Типовой расчет по высшей математике

Линейные операторы

4 модуль

Учебно-методическое пособие

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Санкт-Петербург
2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Афанасьева С.С., Гортинская Л.В.,
Рыжков А.Е., Трифанов А.И.

Типовой расчет по высшей математике

Линейные операторы

4 модуль

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2016

Афанасьева С.С., Гортинская Л.В., Рыжков А.Е., Трифанов А.И. Типовой расчет „Линейные операторы“. 4 модуль. Учебно-методическое пособие. -СПб: НИУ ИТМО, 2016. -40 с.

Предлагаемое пособие предназначено для студентов второго курса специальности 010400.62 „Прикладная математика и информатика“.

Рекомендовано к печати Ученым Советом естественнонаучного факультета 01.11.2016, протокол № 5

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория „Национальный исследовательский университет“. Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования „Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики“ на 2009-2018 годы.

Содержание

Общие рекомендации

Типовой расчет по математике за четвертый модуль включает в себя задачи по темам: „Спектральный анализ оператора скалярного типа“, „Жорданова форма и жорданов базис оператора“ и „Ортоганализация Грама-Шмидта“.

Каждый студент обязан выполнить четыре задания, одно задание согласно своему варианту из каждой темы. Номера задач указываются преподавателем, ведущим практические занятия в группе.

Перед выполнением каждого задания написать полное условие, чертежи и рисунки необходимо исполнить аккуратно, снабдив их необходимыми подписями и обозначениями. При решении задач требуется делать достаточно подробные пояснения.

Выполненная работа сдается на проверку преподавателю, который в случае необходимости может потребовать от студента устные пояснения к выполненной работе, то есть защитить типовой расчет. К типовому расчету даются краткие методические указания, принимая во внимание которые и пользуясь указанной литературой, студент может приступить к выполнению типового расчета, не дожидаясь, когда необходимый материал будет изложен на лекции.

Задание 1. Спектральный анализ оператора скалярного типа.

Пример выполнения задания 1

Задача. Автоморфизм $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ задан в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ матрицей $\mathbf{A}$.

$$:= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Найти спектр $\sigma(\mathbf{A})$ автоморфизма $\mathbf{A}$;
2. Найти собственные векторы автоморфизма $\mathbf{A}$ и доказать, что $\mathbf{A}$ является оператором скалярного типа;
3. Найти собственные подпространства автоморфизма $\mathbf{A}$;
4. Привести матрицу автоморфизма $\mathbf{A}$ к диагональному виду, при этом указать матрицу T перехода к новому базису;
5. Проверить явным вычислением (через преобразование подобия с матрицей T), что вид матрицы автоморфизма в новом базисе действительно диагональный;
6. Написать выражения для спектральных проекторов автоморфизма $\mathbf{A}$, а также записать вид спектральной теоремы для него;
7. Вычислить указанные функции от оператора $\mathbf{A}$: $f_1(\mathbf{A}) = \cos^2 \mathbf{A}$, $f_2(\mathbf{A}) = \log_2 \mathbf{A}$.

Решение. Пусть E обозначает единичную матрицу 3×3.

1. Найдём спектр $\sigma(A)$ автоморфизма A, т.е. множество всех его собственных чисел. Для этого достаточно найти все корни характеристического многочлена $\chi(t)$ оператора A.

$$\chi(t) = \det(\mathbf{A} - tE) = -t^3 - 5t^2 - 3t + 9 = -(t+3)^2(t-1).$$

Таким образом $\sigma(A) = \{-3, 1\}$.

2. Для нахождения собственных векторов оператора A, соответствующих собственным числам найденным выше, достаточно решить систему уравнений $(A - \lambda E)x = 0$ для каждого из собственных чисел λ.

Для $\lambda = 1$ матрица соотвествующей системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right).$$

Элементарными преобразованиями эту матрицу можно преобразовать к виду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Откуда легко видеть, что ранг матрицы системы равен 2, а значит соответствующее собственное подпространство одномерное. В качестве базисного вектора удобно взять, например, $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Найдем собственное подпространство соответсвующее собственному значению $\lambda = -3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Размерность пространства решений соответствующей системы уравнений равна 2. В качестве базиса пространства решений выберем ортогональные векторы $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Сумма размерностей собственных подпространств совпадает с размерностью всего пространства, поэтому A является оператором скалярного типа.

3. Выше были найдены собственные подпространства автоморфизма A. Собственному значению $\lambda = 1$ соответствует подпространство, порожденное вектором v_1, а подпространство, соответствующее собственному значению $\lambda = -3$, является линейной оболочкой векторов v_2 и v_3.

4. Выше было показано, что A является оператором скалярного типа. В пунктах 1 и 2 были найдены все собственные числа A и размерности соответствующих собственных подпространств. Поэтому оператор A диагонализуем и в некотором базисе его матрица имеет вид:
$$D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$
Найдем базис пространства $\mathbb{R}^3$, котором матрица оператора A диагональна. Для этого необходимо и достаточно найти набор из 3-х линейно независимых собственных векторов оператора A, которые и будут образовывать искомый базис. Заметим, что векторы, соответствующие различным собственным числам самосопряженного оператора A ортогональны, а векторы v_2 и v_3, соответствующие одному и тому же собственному числу $\lambda = -3$ были выбраны линейно независимыми. Поэтому набор векторов $\{v_1, v_2, v_3\}$ является бази-

сом пространства $\mathbb{R}^3$, в котором матрица оператора $\mathbf{A}$ диагональна. В столбцах матрицы перехода T к базису v_1, v_2, v_3 стоят координаты новых базисных векторов относительно старого базиса, т.е.

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Проверим, что вид матрицы автоморфизма в новом базисе действительно диагональный:

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

6. Напишем выражения для спектральных проекторов автоморфизма $\mathbf{A}$.

   Спектральный проектор P_λ на собственное подпространство, соответсвующее значению λ, можно записать в виде

$$P_\lambda(*) = \sum (f^i, *) v_i,$$

   где суммирование производится по всем базисным собственным векторам, отвечающим собственному числу λ, а $\{f^i\}$ — векторы сопряженного базиса к $\{v_i\}$.

   Таким образом, в рассматриваемом случае, матрицы спектральных проекторов (в исходном базисе) имеют вид:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{-3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   В силу спектральной теоремы оператор $\mathcal{A}$ допускает спектральное представление

$$A = \sum_\lambda \lambda P_\lambda.$$

В нашем случае данное разложение принимает вид $\mathcal{A} = P_1 - 3P_{-3}$. Проверим это:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Вычислим указанные функции от оператора A : $f_1(A) = \cos^2 A,\ f_2(A) = \log_2 A$.

$$\cos^2 A = \cos^2(TD_AT^{-1}) = T\cos^2 D_AT^{-1} = T \begin{pmatrix} \cos^2 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 3 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2 3 \end{pmatrix} T^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 3 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 1+\cos^2 3}{2} & \frac{\cos^2 3-\cos^2 1}{2} & 0 \\ \frac{\cos^2 3-\cos^2 1}{2} & \frac{\cos^2 3+\cos^2 1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2 3 \end{pmatrix}$$

$$\log_2 A = \log_2(TD_AT^{-1}) = T\log_2 D_AT^{-1} =$$

$$= T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \log_2 3 + (2k+1)\pi i & 0 \\ 0 & 0 & \log_2 3 + (2k+1)\pi i \end{pmatrix} T^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\log_2 3+(2k+1)\pi i}{2} & \frac{\log_2 3+(2k+1)\pi i}{2} & 0 \\ \frac{\log_2 3+(2k+1)\pi i}{2} & \frac{\log_2 3+(2k+1)\pi i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \log_2 3 + (2k+1)\pi i. \end{pmatrix}$$

Варианты задания 1

Автоморфизм $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ задан в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ матрицей $\mathbf{A}$.

1. Найти спектр $\sigma(A)$ автоморфизма A;
2. Найти собственные векторы автоморфизма A и доказать, что A является оператором скалярного типа;
3. Найти собственные подпространства автоморфизма A ;
4. Привести матрицу $\mathbf{A}$ автоморфизма A к диагональному виду, при этом указать матрицу T перехода к новому базису;
5. Проверить явным вычислением (через преобразование подобия с матрицей T), что вид матрицы автоморфизма в новом базисе действительно диагональный;
6. Написать выражения для спектральных проекторов автоморфизма A, а также записать вид спектральной теоремы для него;
7. Вычислить указанные функции от оператора A : $f_1(A) = \cos^2 A$, $f_2(A) = \log_2 A$.

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 6) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

7) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; 8) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$; 9) $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

10) $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; 11) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 12) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

13) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 14) $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$; 15) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

16) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; 17) $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 18) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

19) $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$; 20) $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; 21) $A = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & -7 & 13 \end{pmatrix}$;

22) $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -15 \\ 0 & -4 & 0 \\ -15 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; 23) $A = \begin{pmatrix} -5 & 12 & 0 \\ 12 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 24) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 8 \\ 0 & 8 & -3 \end{pmatrix}$;

25) $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 15 \\ 0 & 4 & 0 \\ 15 & 0 & 9 \end{pmatrix}$; 26) $A = \begin{pmatrix} -10 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; 27) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$;

28) $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 29) $A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 0 \\ 8 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$; 30) $A = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & -9 & 13 \end{pmatrix}$;

Задание 2. Жорданова форма и жорданов базис оператора.

Пример выполнения задания 2

Задача. Автоморфизм $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ задан в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ матрицей A.

$$A = \begin{pmatrix} 3.5 & 1 & 1 \\ 0.25 & 3.5 & 1.5 \\ 0.5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Найти спектр $\sigma(\mathbf{A})$ автоморфизма $\mathbf{A}$;

2. Найти собственные векторы автоморфизма $\mathbf{A}$ и доказать, что $\mathbf{A}$ не является оператором скалярного типа;

3. Найти Жорданов (канонический) базис автоморфизма $\mathbf{A}$;

4. Привести матрицу A автоморфизма $\mathbf{A}$ к Жордановой (канонической) форме, при этом указать матрицу T перехода к новому базису;

5. Проверить явным вычислением (через преобразование подобия с матрицей T), что вид матрицы автоморфизма в новом базисе имеет именно ту Жорданову форму, которая указана в пункте 4;

6. Указать кратности (полную, алгебраическую и спектральную каждого собственного значения оператора);

7. Написать выражения для характеристического и минимального полиномов автоморфизма $\mathbf{A}$.

8. Вычислить следующие функции автоморфизма A : $f_1(\mathbf{A}) = \cos(\mathbf{A})$, $f_2(\mathbf{A}) = 3^{\mathbf{A}}$.

Решение.

1. Как и в первом пункте задания 1, найдем спектр $\sigma(\mathbf{A})$ автоморфизма $\mathbf{A}$.
$$\chi_A(t) = -t^3 + 12t^2 - 48t + 64 = -(t-4)^3.$$
Таким образом $\sigma(\mathbf{A}) = \{4\}$.

2. Найдем собственные векторы автоморфизма $\mathbf{A}$.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0.5 & 1 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1.5 & 0 \\ 0.5 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Поэтому собственное подпространство, соответствующее значению 4 одномерно и порождено вектором $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Поскольку единственное собственное подпространство оператора A одномерно, то A не является оператором скалярного типа. Более того, Жорданова форма оператора A состоит из одной Жордановой клетки 3×3, соответствующей собственному числу 4. Таким образом спектральная кратность собственного числа $\lambda = 4$ равна одному, а алгебраическая трём.

3. Пусть $B = (A - 4E)$. Ясно, что $B^3 = 0$, $B^2 \neq 0$. Найдем $\operatorname{Im}(B^2)$:
$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0.5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Ранг матрицы B^2 равен 1, поэтому $\operatorname{Im}(B^2)$ одномерно и порождено вектором $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Рассмотрим базис пространства $\operatorname{Im}(B^2)$. Доста-

точно взять один вектор, например, $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Он и присоединенные к нему вектора образуют Жорданов базис оператора A. Присоединенные вектора удовлетворяют условиям: $Bv_2 = v_3$, $Bv_1 = v_2$. Найдем v_1 из уравнения $B^2 v_1 = v_3$. Матрица соответствующей системы уравнений имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0.5 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Положим $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, тогда $v_2 = Bv_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ и векторы v_1, v_2, v_3 образуют Жорданов базис оператора A.

4. Приведем матрицу $\mathbf{A}$ автоморфизма A к Жордановой (канонической) форме. Из наблюдений, сделанных выше ясно, что Жорданова форма оператора A имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

При этом в столбцах матрицы перехода к каноническому базису стоят координаты базисных векторов, т.е.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Проверим что вид матрицы автоморфизма в новом базисе именно

такой.

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.5 & 0.5 \\ -0.25 & 0.5 & 0 \\ 0.375 & -0.25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.5 & 1 & 1 \\ 0.25 & 3.5 & 1.5 \\ 0.5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Указажем полную, алгебраическую и спектральную кратности собственного значения 4. Как было показано в пункте 2 спектральная кратность собственного числа 4 равна одному, а алгебраическая трём. Полная кратность числа 4 равна размерности ядра оператора B^3, т.е. пространства $\mathbb{R}^3$. Таким образом полная кратность собствеенного значения 4 равна трём.

7. В рассматриваемом примере алгебрачеcкая кратность собственного числа равна 3, поэтому минимальный полином оператора A совпадает с характеристическим, описанным в пункте 1.

8. Вычислим следующие функции автоморфизма A : $f_1(\mathbf{A}) = \cos(\mathbf{A})$, $f_2(\mathbf{A}) = 3^{\mathbf{A}}$.

Для функции f имеем $f(A) = f(TJT^{-1}) = Tf(J)T^{-1}$. Для жордановой клетки

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

значение $f(J)$ может быть вычислено по формуле

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ \frac{f'(\lambda)}{1!} & f(\lambda) & \dots\dots\dots & 0 \\ \frac{f''(\lambda)}{2!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} & f(\lambda) \quad \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$f_1(A) = T\cos JT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 4 & 0 & 0 \\ -\sin 4 & \cos 4 & 0 \\ -\frac{\cos 4}{2} & -\sin 4 & \cos 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25 & -0.5 & 0.5 \\ -0.25 & 0.5 & 0 \\ 0.375 & -0.25 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sin 4+\cos 4}{2} & -\sin 4+\cos 4 & -\sin 4-\cos 4 \\ -\frac{\sin 4+\cos 4}{4} & \frac{\sin 4+3\cos 4}{2} & \frac{-3\sin 4-\cos 4}{2} \\ -\frac{\sin 4}{2} & \sin 4 & -\sin 4+\cos 4 \end{pmatrix}$$

$$f_2(A) = T3^J T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^4 & 0 & 0 \\ 3^4\ln 3 & 3^4 & 0 \\ \frac{3^4\ln^2 3}{2} & 3^4\ln 3 & 3^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25 & -0.5 & 0.5 \\ -0.25 & 0.5 & 0 \\ 0.375 & -0.25 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 81 \begin{pmatrix} \frac{\ln^2 3-\ln 3+2}{2} & \ln 3-\ln^2 3 & \ln 3+\ln^2 3 \\ \frac{\ln^2 3+\ln 3}{4} & -\frac{\ln^2 3+\ln 3-2}{2} & \frac{3\ln 3+\ln^2 3}{2} \\ \frac{\ln 3}{2} & -\ln 3 & 1+\ln 3 \end{pmatrix}$$

Варианты задания 2

II. Автоморфизм $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ задан в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ матрицей A.

1. Найти спектр $\sigma(\mathbf{A})$ автоморфизма $\mathbf{A}$;
2. Найти собственные векторы автоморфизма $\mathbf{A}$ и доказать, что $\mathbf{A}$ не является оператором скалярного типа;
3. Найти Жорданов (канонический) базис автоморфизма $\mathbf{A}$;
4. Привести матрицу A автоморфизма $\mathbf{A}$ к Жордановой (канонической) форме, при этом указать матрицу T перехода к новому базису;
5. Проверить явным вычислением (через преобразование подобия с матрицей T), что вид матрицы автоморфизма в новом базисе имеет именно ту Жорданову форму, которая указана в пункте 4;
6. Указать кратности (полную, алгебраическую и спектральную каждого собственного значения оператора);
7. Написать выражения для характеристического и минимального полиномов автоморфизма $\mathbf{A}$.
8. Вычислить следующие функции автоморфизма $\mathbf{A}$: $f_1(\mathbf{A}) = \cos(\mathbf{A})$, $f_2(\mathbf{A}) = 3^{\mathbf{A}}$.

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1,5 & 1 & 0,5 \\ 0,25 & 1,5 & 0,75 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} -0,4 & -0,2 & 0,8 \\ -1,8 & -0,4 & 0,6 \\ 3,6 & -1,2 & 0,8 \end{pmatrix};$$

$$3)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3,4 & -0,2 \\ 2 & 0,8 & 2,6 \end{pmatrix}; \qquad 4)\ A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$5)\ A = \begin{pmatrix} -8 & -9 & 10 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & -10 & 2 \end{pmatrix}; \qquad 6)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$7)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0,5 & -1 \end{pmatrix}; \qquad 8)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$9)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad 10)\ A = \begin{pmatrix} 6,5 & -0,5 & 1,5 \\ 1 & 6 & 1 \\ -0,5 & -0,5 & 8,5 \end{pmatrix};$$

$$11)\ A = \begin{pmatrix} -4,5 & -0,5 & 0,5 \\ -4 & -6 & 6 \\ -4,5 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}; \qquad 12)\ A = \begin{pmatrix} -3,25 & 0,25 & 0,5 \\ -0,25 & -2,75 & 0,5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix};$$

$$13)\ A = \begin{pmatrix} -0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}; \qquad 14)\ A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2,5 & -6,5 & 3,5 \\ -9,5 & -10,5 & 7,5 \end{pmatrix};$$

$$15)\ A = \begin{pmatrix} -3,25 & 0,25 & 0,5 \\ -0,25 & -2,75 & 0,5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}; \qquad 16)\ A = \begin{pmatrix} -3,25 & -0,25 & 0,25 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0,75 & -0,25 & -2,75 \end{pmatrix};$$

$$17)\ A = \begin{pmatrix} -12 & 1 & 7 \\ -8 & -5 & 8 \\ -15 & 1 & 10 \end{pmatrix}; \qquad 18)\ A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

19) $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 0,5 & -3 & 0,5 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 20) $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \\ -0,5 & 0,5 & 3 \end{pmatrix}$;

21) $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1,5 \\ 0,8 & -1.2 & -4 \end{pmatrix}$; 22) $A = \begin{pmatrix} -0,6 & 2,4 & 1 \\ -2,4 & 4,6 & 1,5 \\ 0,8 & -1,2 & 1 \end{pmatrix}$;

23) $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 1,2 & 1 \\ -1,2 & 2,8 & 1,5 \\ 0,8 & -1.2 & 0 \end{pmatrix}$; 24) $A = \begin{pmatrix} -0,6 & -0,2 & 0,5 \\ 9,8 & 1,6 & -1,5 \\ -1,2 & -0.4 & 2 \end{pmatrix}$;

25) $A = \begin{pmatrix} -3,6 & -0,2 & 0.5 \\ 16,8 & 2,6 & -1,5 \\ 1,6 & 1,2 & -1 \end{pmatrix}$; 26) $A = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,2 & 0,5 \\ 4,8 & 2,6 & -1,5 \\ -3,2 & -0.4 & 3 \end{pmatrix}$;

27) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0,5 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & -0,5 & -3 \end{pmatrix}$; 28) $A = \begin{pmatrix} 0 & -6,5 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

29) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0,5 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & -0,5 & -3 \end{pmatrix}$; 30) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1,5 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ -1 & -0,5 & -1 \end{pmatrix}$;

Задание 3. Вещественное евклидово пространство.

Пример выполнения задания 3

Задача.

Вещественное евклидово пространство X реализовано как $\mathbb{R}^5$ со стандартным скалярным произведением. Подпространство L евклидова пространства X задано как линейная оболочка векторов a_1, a_2, a_3. Задан также фиксированный вектор x. Найти ортогональную проекцию x_L вектора x на подпространство L и ортогональную составляющую x_M этого же вектора.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

<u>Решение задачи получить двумя способами:</u>

<u>Первый способ.</u>

1. Найти ортонормированный базис подпространства L;

2. Написать явный вид ортогонального проектора P_L на подпространство L;

3. Вычислить с помощью P_L ортогональную проекцию x_L, а затем и x_M (как разность $x_M = x - x_L$).

<u>Второй способ.</u>

1. Найти неортонормированный базис подпространства L (анализируя структуру L как линейной оболочки векторов a_1, a_2, a_3);

2. С помощью представления $x = x_L + x_M$ (где x_L разложено по базису L), составить и решить систему линейных уравнений для определения коэффициентов разложения x_L по базису L.

Решение. Первый способ. Для нахождения ортонормированного базиса e_1, e_2, e_3 подпространства L применим процесс ортогонализации Грама-Шмидта к системе векторов a_1, a_2, a_3. Получим

$$e_1 = \frac{a_1}{||a_1||} = \frac{\sqrt{15}}{15}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{a_2 - (a_2, e_1)e_1}{||a_2 - (a_2, e_1)e_1||} = \frac{\sqrt{30}}{30}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\\0\\-3\end{pmatrix}$$

$$e_3 = \frac{a_3 - (a_3, e_1)e_1 - (a_3, e_2)e_2}{||a_3 - (a_3, e_1)e_1 - (a_3, e_2)e_2||} = \frac{\sqrt{15}}{30}\begin{pmatrix}-1\\3\\-5\\4\\3\end{pmatrix}$$

Ортогонального проектор P_L на подпространство L имеет вид

$$P_L(x) = (x, e_1)e_1 + (x, e_2)e_2 + (x, e_3)e_3.$$

Откуда $x_L = \frac{1}{60}\begin{pmatrix}23\\123\\-173\\52\\27\end{pmatrix}$, и, соответственно $x_M = x - x_L = \frac{1}{60}\begin{pmatrix}37\\57\\53\\8\\33\end{pmatrix}$.

<u>Второй способ.</u> Заметим, что ранг матрицы $A = \Big(a_1, a_2, a_3\Big)$ совпадает с размерностью подпространства L и равен 3. Поэтому векторы a_1, a_2, a_3 линейно независимы и образуют базис подпространства $L = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$.

Пусть $x = x_L + x_M$, где $x_L \in L, x_M \perp L$, тогда $x_L = \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3$ для некоторых, однозначно определенных α, β и γ. Найдем коэффициенты α, β, γ. Поскольку $x_M \perp L$, то x_M ортогонален каждому из векторов a_1, a_2, a_3 и, следовательно

$$\begin{cases} (x, a_1) = \alpha(a_1, a_1) + \beta(a_2, a_1) + \gamma(a_3, a_1) \\ (x, a_2) = \alpha(a_1, a_2) + \beta(a_2, a_2) + \gamma(a_3, a_2) \\ (x, a_3) = \alpha(a_1, a_3) + \beta(a_2, a_3) + \gamma(a_3, a_3) \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим

$$\alpha = -\frac{4}{5},\ \beta = -\frac{9}{20},\ \gamma = \frac{25}{12}.$$

Отсюда $x_L = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 23 \\ 123 \\ -173 \\ 52 \\ 27 \end{pmatrix}$, и, соответственно $x_M = x - x_L = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 37 \\ 57 \\ 53 \\ 8 \\ 33 \end{pmatrix}$.

Варианты задания 3

Вещественное евклидово пространство X реализовано как $\mathbb{R}^5$ со стандартным скалярным произведением. Подпространство L евклидова пространства X задано как линейная оболочка векторов a_1, a_2, a_3. Задан также фиксированный вектор x. Найти ортогональную проекцию x_L вектора x на подпространство L и ортогональную составляющую x_M этого же вектора.

Решение задачи получить двумя способами:

Первый способ.

1. Найти ортонормированный базис подпространства L;
2. Написать явный вид ортогонального проектора P_L на подпространство L;
3. Вычислить с помощью P_L ортогональную проекцию x_L, а затем и x_M (как разность $x_M = x - x_L$).

Второй способ.

1. Найти неортонормированный базис подпространства L (анализируя структуру L как линейной оболочки векторов a_1, a_2, a_3);
2. С помощью представления $x = x_L + x_M$ (где x_L разложено по базису L), составить и решить систему линейных уравнений для определения коэффициентов разложения x_L по базису L.

$$1. a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$2. a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$3. a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$4. a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$5. a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$6. a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix};$$

$$7. a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$8. a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$9. a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$10. a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix};$$

$$11. a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$12. a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$13. a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$14. a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$15. a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$16.\, a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$17.\, a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$18.\, a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$19.\, a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$20.\, a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$21. a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$22. a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$23. a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$24. a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$25. a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$26. a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$27. a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$28. a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$29. a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$30. a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix};$$

Задание 4. Приведение к каноническому виду уравнения поверхности второго порядка.

Пример выполнения задания 4

Задача.

Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка с помощью теории квадратичных форм. Указать матрицу перехода к новому базису (ортогональную), вид уравнения поверхности в новом базисе. Сделать рисунок, интерпретируя ортогональное преобразование координат как некоторый поворот системы координат в $\mathbb{R}^3$.

$$x^2 + y^2 - 6yz + z^2 = 0.$$

Матрица соответствующей квадратичной формы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем ее собственные числа. Характеристический многочлен равен

$$\chi(x) = -(x-1)(x^2 - 2x - 8).$$

Собственные значения равны $1, -2, 4$. Соответствующие им собственные векторы ортогональны. Нормируем их и найдем ортонормированный базис из собственных векторов. Получим следующую систему векторов:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода к новому базису имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Пусть (x_1, y_1, z_1) обозначают координаты вектора в новом базисе, тогда координаты преобразуются по правилу $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, т.е.

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = \frac{y_1}{\sqrt{2}} - \frac{z_1}{\sqrt{2}} \\ z = \frac{y_1}{\sqrt{2}} + \frac{z_1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Данное преобразование является поворотом на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг оси O_x. Уравнение поверхности в новой системе координат имеет вид:

$$x_1^2 - 2y_1^2 + 4z_1^2 = 0.$$

Получаем каноническое уравнение конуса.

Варианты задания 4

Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка с помощью теории квадратичных форм. Указать матрицу перехода к новому базису (ортогональную), вид уравнения поверхности в новом базисе. Сделать рисунок, интерпретируя ортогональное преобразование координат как некоторый поворот системы координат в $\mathbb{R}^3$.

1. $x^2 + 4xy + y^2 + 2z^2 - 6 = 0;$
2. $3x^2 - 2yz = 0;$
3. $2x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2xz - 12 = 0;$
4. $x^2 - 3y^2 - 2yz - 3z^2 - 6 = 0;$
5. $2x^2 - 6xy + 2y^2 + z^2 = 0;$
6. $3x^2 - 2y^2 - 2yz - 2z^2 - 12 = 0;$
7. $2x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 2xz + 36 = 0;$
8. $x^2 + 4xy + y^2 - 2z^2 = 0;$
9. $6y^2 - 4xz = 0;$
10. $-x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 10 = 0;$
11. $x^2 + 4xy + y^2 - 2z^2 + 12 = 0;$
12. $5x^2 - 2y^2 - 2yz - 2z^2 = 0;$
13. $2x^2 - 6xy + 2y^2 + z^2 - 25 = 0;$
14. $4x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 - 16 = 0;$
15. $x^2 + 4xy + y^2 - 2z^2 - 12 = 0;$
16. $2x^2 - 2y^2 - 2yz - 2z^2 + 1 = 0;$
17. $x^2 + y^2 - 6yz + z^2 = 0;$
18. $x^2 + 4xy + y^2 - 2z^2 + 12 = 0;$
19. $2x^2 + 2y^2 + 3yz + 2z^2 - 10 = 0;$
20. $x^2 - y^2 - yz - z^2 = 0.$
21. $x^2 + 4xy + y^2 + z^2 = 0;$
22. $x^2 + 4xy + y^2 + 2z^2 - 6 = 0;$
23. $x^2 + 4xy + y^2 - 2z^2 = 0;$

24. $x^2 + 4xy + y^2 - 2z^2 + 12 = 0;$
25. $2x^2 - 6xy + 2y^2 + z^2 = 0;$
26. $2x^2 - 6xy + 2y^2 + z^2 - 25 = 0;$
27. $3x^2 + 4xy + 3y^2 + 2z^2 - 50 = 0;$
28. $3x^2 + 4xy + 3y^2 - 2z^2 = 0;$
29. $3x^2 + 4xy + 3y^2 - 2z^2 - 100 = 0;$
30. $x^2 + 4xy + y^2 - 2z^2 = 0;$