

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

В.О. Мамченко, Н.П. Деменчук

**ОТДЕЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МЕХАНИКИ
ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА**

Учебно-методическое пособие

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

Санкт-Петербург

2016

УДК 539.3/8(031)

Мамченко В.О., Деменчук Н.П. Отдельные разделы механики твердого деформируемого тела: Учеб.-метод. пособие. – СПб.: Университет ИТМО, 2016. – 103 с.

Изложены основы теории и приведены примеры решения задач по определению деформаций конструкций энергетическими методами, определению напряжений при колебаниях, ударных нагрузках, а также расчету тонкостенных сосудов, работающих под давлением. Указанные разделы сопротивления материалов широко используются в практике проектирования и эксплуатации технологического оборудования пищевых производств и техники искусственного холода.

Предназначено для магистрантов направления 16.04.03 Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения по дисциплине «Основы механики и прочности энергетических систем» очной и заочной форм обучения.

Рецензент: кандидат техн. наук, проф. А.А. Малышев

Рекомендовано к печати Советом факультета холодильной, криогенной техники и кондиционирования, протокол № 2 от 27.10. 2016 г.



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 – 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2016

© Мамченко В.О., Деменчук Н.П., 2016

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие, предназначенное в помощь магистрантам, изучающим дисциплину «Основы механики и прочности энергетических систем», может быть полезно магистрантам, специальности которых связаны с проектированием и эксплуатацией холодильной, криогенной техники, систем кондиционирования техники, а также технологического оборудования молочных, мясных и иных перерабатывающих производств.

Каждый из разделов учебно-методического пособия содержит краткую теоретическую часть, которая подкрепляется решением задач, часто встречающихся в практической деятельности специалистов соответствующего профиля.

1. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Одной из задач сопротивления материалов является оценка жесткости конструкций. Напомним, что под жесткостью понимают способность конструкции выдерживать внешние нагрузки при изменении ее формы и размеров в установленных пределах. Таким образом, необходимо уметь определять упругие перемещения любой точки конструкции. Кроме того, оценка прочности и жесткости в статически неопределимой конструкции невозможна без предварительного расчета перемещений.

Известны методы определения перемещений при простых видах деформирования. Однако существуют и другие методы определения перемещений в различных конструкциях, причем более общие, удобные и пригодные для любого вида нагружения (растяжение–сжатие, кручения, изгиба, сложного сопротивления). Это энергетические методы определения деформаций, основанные на законе сохранения энергии и начале возможных перемещений.

Всякое упругое тело под действием внешних сил деформируется, при этом его частицы перемещаются до тех пор, пока не установится равновесие между внешними и внутренними силами. Полагаем, что скорость нагружения мала, поэтому инерционными силами перемещаемых масс конструкции можно пренебречь и считать нагружение статическим. При деформировании упругого тела в нем накапливается потенциальная энергия упругой деформации. Приращение потенциальной энергии деформации U равно уменьшению потенциальной энергии положения внешних сил U_P , которое численно равно работе внешних сил при упругой деформации тела A_P . Таким образом,

$$U = A_P.$$

Из теоретической механики известна работа постоянной сосредоточенной силы P на перемещении Δ по ее направлению как произведение величины силы на это направление:

$$A_P = P \Delta.$$

Работа пары сил на угловом перемещении в направлении этой пары (в плоскости действия этой пары)

$$A_p = M\theta.$$

Распределенная нагрузка интенсивностью q совершает работу на площади эпюры перемещений под этой нагрузкой

$$A_p = q\omega.$$

Работа в любой линейно деформируемой системе при нагрузке, возрастающей от нуля до заданной величины, равна площади диаграммы $P-\Delta$ (рис. 1.1):

$$A_p = \frac{1}{2}P\Delta.$$

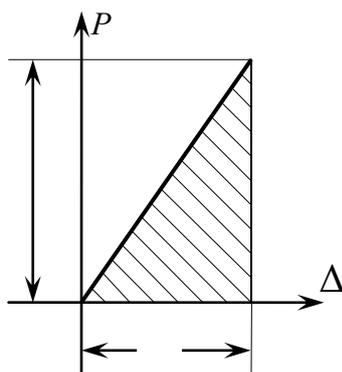


Рис. 1.1

Полная работа деформации при действии суммы сил на упругую систему равна полусумме произведений окончательного значения соответствующей силы на окончательную величину соответствующего перемещения (теорема Клайперона):

$$A_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n N_i \cdot \Delta_i, \quad (1.1)$$

где N_i – обобщенная сила, т. е. сила, совершающая работу; Δ_i – обобщенное перемещение, т. е. тот вид перемещения, на котором обобщенная сила совершает работу. Следует заметить, что под обобщенной силой можно понимать одну из группы сил, работа

которой нас интересует, а обобщенное перемещение вызывается всеми действующими на систему силами.

Эта работа не зависит от порядка нагружения.

Внутренние силы препятствуют деформациям, вызываемым внешними силами. Внешние силы вызывают перемещения точек упругой системы, а возникающие при этом внутренние силы направлены противоположно этим перемещениям. Таким образом, работа внутренних сил всегда отрицательна. Внутренние силы приводятся к внутренним силовым факторам. Вычислим работу каждого силового фактора, учитывая, что работа последнего на перемещениях, вызываемых остальными, равна нулю.

Работа осевой силы N

Выделим из стержня элемент длиной dz . Осевая сила совершает работу на удлинении элемента (рис. 1.2):

$$\Delta(dz) = \frac{Ndz}{EF}.$$

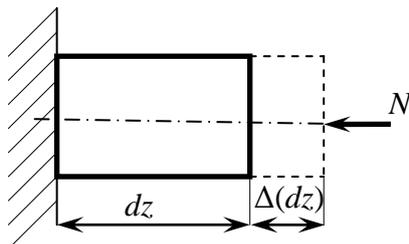


Рис. 1.2

Элементарная работа

$$dA = -\frac{1}{2} N \frac{N}{EF} dz. \quad (1.2)$$

Работа крутящего момента M_K

При кручении правое сечение поворачивается в своей плоскости относительно левого на угол $d\varphi$ – угол закручивания (рис. 1.3):

$$d\varphi = \frac{M_K dz}{GI_P}.$$

Элементарная работа

$$dA = -\frac{1}{2} M_K \frac{M_K dz}{GI_p}. \quad (1.3)$$

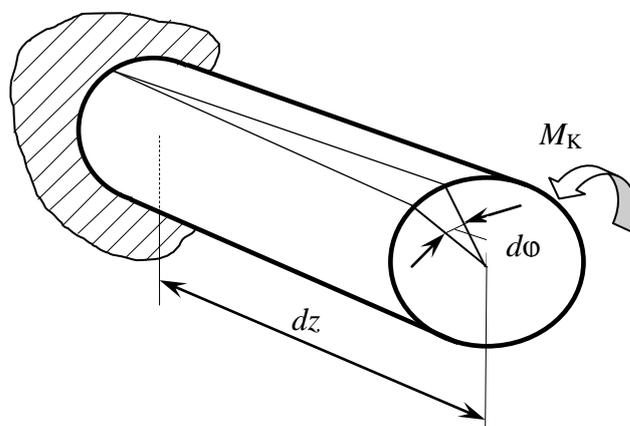


Рис. 1.3

Работа изгибающих моментов $M_{и}$

При изгибе происходит поворот сечения на угол $d\alpha$ (рис. 1.4), который определяется кривизной оси стержня

$$d\alpha = \frac{1}{\rho} dz K_y.$$

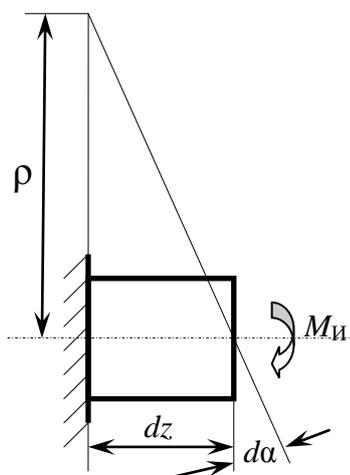


Рис. 1.4

Из теории чистого изгиба известно, что кривизна определяется

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{II}}{EI_{II}}, \text{ т. е. } d\alpha = \frac{M_{II}}{EI_{II}} dz.$$

Элементарная работа

$$dA = -\frac{1}{2} M_{II} \frac{M_{II}}{EI_{II}} dz. \quad (1.4)$$

Работа поперечной силы Q

Поперечная сила является равнодействующей элементарных сил, характеризующихся касательными напряжениями. Последние возникают при поперечном изгибе и определяются по формуле Журавского. Элементарная сила $dQ = \tau \cdot dF$ совершает работу на абсолютном сдвиге сечения $d\lambda$ (рис. 1.5), т. е.

$$d(dA) = -\frac{1}{2} dQ d\lambda = -\frac{1}{2} \tau dF \gamma dz.$$

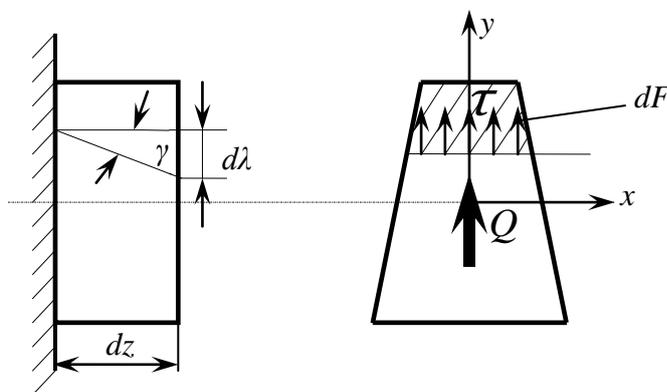


Рис. 1.5

Так как

$$\tau = \frac{QS_x^0}{I_x b} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{\tau}{G},$$

то

$$d(dA) = -\frac{1}{2} \tau \frac{Q}{G} dF dz = -\frac{Q^2 (S_x^\omega)^2}{2GI_x^2 b^2} dF dz,$$

или

$$dA = -\frac{Q^2}{GF} dz \frac{F}{I_x^2} \int \frac{(S_x^\omega)^2}{b^2} dF.$$

Обозначив сомножитель, зависящий от геометрии сечения, через K_y :

$$K_y = \frac{F}{I_x^2} \int \frac{(S_x^\omega)^2}{b^2} dF,$$

получим окончательное выражение элементарной работы:

$$dA = -\frac{1}{2} Q \frac{Q}{GF} dz \cdot K_y.$$

Коэффициент K_y для круглого сечения равен $K_y = \frac{32}{37}$, для прямоугольного сечения $K_y = 1,2$. При равномерном распределении касательного напряжения по сечению $K_y = 1$.

Таким образом, полная работа внутренних сил в общем случае деформирования

$$A = -\frac{1}{2} \left(\int_l \frac{N \cdot N}{EF} dz + \int_l K_y \frac{Q_y \cdot Q_y}{GF} dz + \int_l K_x \frac{Q_x \cdot Q_x}{GF} dz + \right. \\ \left. + \int_l \frac{M_x \cdot M_x}{EI_x} dz + \int_l \frac{M_y \cdot M_y}{EI_y} dz + \int_l \frac{M_K \cdot M_K}{GI_K} dz \right).$$

«Начало возможных перемещений» (теорема о возможных перемещениях) применительно к упругим системам формулируется следующим образом: если система находится в равновесии под

действием нагрузки, то сумма работ внешних и внутренних сил на возможных перемещениях точек системы равна нулю, т. е.

$$A_P + A = 0.$$

Так как $A_P = U$, то $U = A$.

Таким образом, потенциальная энергия деформирования численно равна работе внешних сил при нагружении системы или работе внутренних сил, совершаемой в процессе разгрузки:

$$U = \frac{1}{2} \left(\int_l \frac{N^2}{EF} dz + \int_l K_y \frac{Q_y^2}{GF} dz + \int_l K_x \frac{Q_x^2}{GF} dz + \int_l \frac{M_x^2}{EI_x} dz + \int_l \frac{M_y^2}{EI_y} dz + \int_l \frac{M_K^2}{GI_K} dz \right). \quad (1.5)$$

Потенциальная энергия всегда положительна как квадратичная функция и не подчиняется принципу суперпозиции. Выражения для потенциальной энергии линейно деформируемой системы в общем случае действия сил можно обобщить в виде

$$U = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^6 \int_0^{l_i} \frac{V_{ik}^2}{2C_{ik}} dz, \quad (1.6)$$

где V_{ik} – обобщенный внутренний силовой фактор в произвольном сечении i -го участка длиной l_i и соответствующей жесткостью C_{ik} .

1.1. Определение перемещений по теореме Кастильяно

Теорема Кастильяно формулируется следующим образом: обобщенное перемещение точки приложения обобщенной силы по направлению ее действия равно частной производной от потенциальной энергии деформации по соответствующей этому перемещению обобщающей силе. Математически эта теорема записывается в виде

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial T_i}. \quad (1.7)$$

Рассмотрим, например, упругое тело, нагруженное произвольной системой сил P и обобщенной силой T (рис. 1.6). Необходимо определить перемещение Δ по направлению обобщенной силы (обобщенное перемещение).

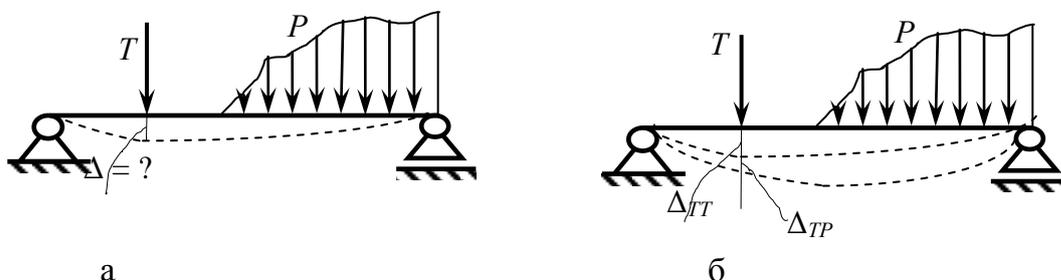


Рис. 1.6

Искомое перемещение определяется перемещением от обобщенной силы T и перемещением от нагрузки P :

$$\Delta_T = \Delta_{TT} + \Delta_{TP}.$$

Нагрузим балку сначала силой T , а затем нагрузкой P и вычислим потенциальную энергию при работе соответствующих сил:

$$U = \frac{1}{2}T\Delta_{TT} + T\Delta_{TP} + U_{PP}. \quad (1.8)$$

Последнее слагаемое означает накопленную потенциальную энергию деформации от комплексной нагрузки P . Во втором слагаемом множитель $\frac{1}{2}$ отсутствует, поскольку при нагружении балки нагрузкой P сила T не изменяется. Продифференцируем полученное выражение по обобщенной силе T , учитывая, что $\Delta_{TT} = \delta_{TT} \cdot T$:

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \delta_{TT} T + \Delta_{TP} = \Delta_{TT} + \Delta_{TP} = \Delta_T.$$

Таким образом, $\Delta_T = \partial U / \partial T$ – перемещение точки приложения обобщенной силы по направлению ее действия равно частной производной от потенциальной энергии деформирования по обобщенной силе:

$$\Delta = \partial U / \partial T. \quad (1.9)$$

Дифференцируя выражение (1.5) с учетом того, что V_{ik} неявная функция T , получаем уравнение Кастильяно в виде

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \sum_{\kappa=1}^6 \int_0^{l_i} \frac{V_{ik}}{C_{ik}} \cdot \frac{\partial V_{ik}}{\partial T_j} dz. \quad (1.10)$$

Этим выражением можно пользоваться для непосредственного вычисления перемещения, не определяя предварительно потенциальную энергию по формуле (1.5).

Если рассчитывается перемещение в сечении, где отсутствует соответствующая обобщенная сила, то необходимо до определения реакции связей и внутренних силовых факторов приложить фиктивную обобщенную силу T_ϕ , которую после вычисления производной $\frac{\partial V_{ik}}{\partial T_\phi}$ положить равной нулю. Как уже отмечалось, в самом общем случае нагружения системы на каждом из участков необходимо вычислить шесть интегралов (1.5). Однако в большинстве случаев для стержневых систем интегралами, зависящими от продольных и поперечных сил, можно пренебречь, ввиду малости перемещений от этих сил.

1.2. Применение теоремы Кастильяно к определению упругих перемещений в стержневых системах

Пример 1. Определить угол поворота относительно оси z конца консоли, нагруженной скручивающим моментом m (рис. 1.7).

Решение. При кручении потенциальная энергия определяется

$$U = \int_0^l \frac{M_K^2 dz}{2GI_K}.$$

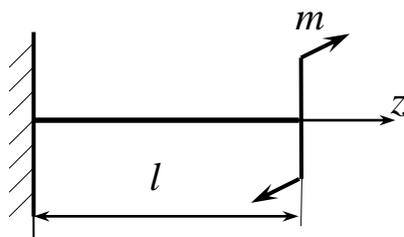


Рис. 1.7

При $GI_K = \text{const}$

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{1}{GI_K} \int_0^l M_K \frac{\partial M_K}{\partial T} dz,$$

так как обобщенная сила $T = m$ и

$$\Delta = \varphi = \frac{1}{GI_K} \int_0^l m \cdot 1 \cdot dz = \frac{ml}{GI_K},$$

что совпадает с полученным ранее выражением для угла закручивания.

Пример 2. Определить прогиб точки A свободного конца консольной балки, нагруженной силой P и моментом M (рис. 1.8).

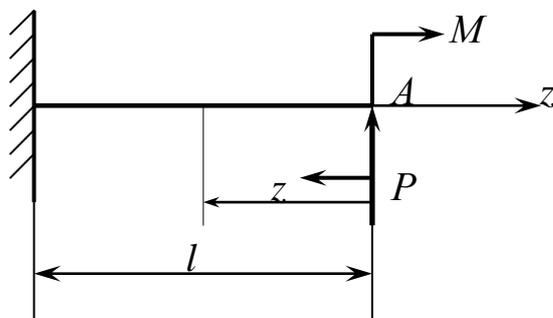


Рис. 1.8

Решение. Уравнение для изгибающего момента в произвольном сечении z имеет вид $M_{из} = Pz - M$. Обобщенная сила

$$T = P \quad \text{и} \quad \partial M_{из} / \partial P = z.$$

Если жесткость сечения стержня GI_x по его длине постоянна, искомый прогиб точки A определится

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_0^l M_{из} \frac{\partial M_{из}}{\partial T} dz;$$

$$\Delta_A = \frac{1}{EI} \int_0^l (Pz - M) z dz = \frac{1}{EI} \left(\frac{Pl^3}{3} - \frac{Ml^2}{2} \right).$$

Пример 3. Определить вертикальное перемещение точки A для конструкции, изображенной на рис. 1.9. Жесткость стержней одинакова и равна EF .

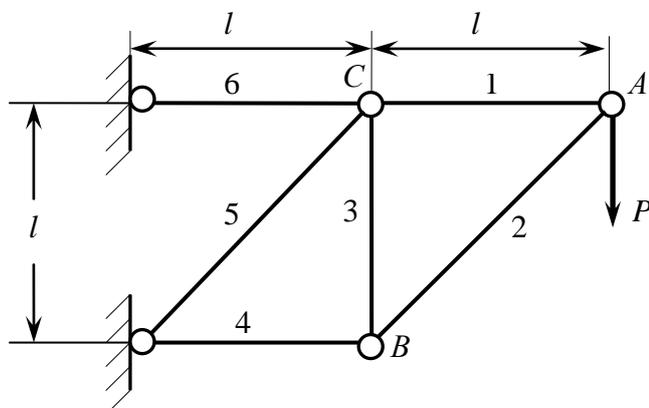


Рис. 1.9

Решение. Определяем усилия в каждом стержне методом вырезания узлов в точках A , B и C (рис. 1.10).

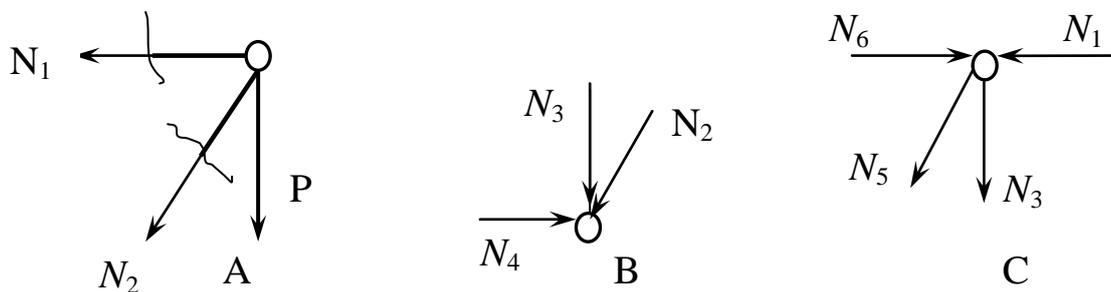


Рис. 1.10

Составляя уравнения равновесия для каждого из узлов, получаем

$$N_2 = -P\sqrt{2}; \quad N_3 = -N_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = P; \quad N_1 = -N_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = P;$$

$$N_4 = N_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = -P;$$

$$N_5 \frac{1}{\sqrt{2}} + N_3 = 0 \Rightarrow N_5 = -N_3\sqrt{2} = -P\sqrt{2}; \quad N_6 - N_5 \frac{1}{\sqrt{2}} - N_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_6 = P + P = 2P.$$

Рассчитываем далее величину потенциальной энергии, накопленной в каждом стержне:

$$U_i = \frac{N_i^2 l_i}{2EF}$$

Результаты расчетов сводим в табл. 1.1.

Таблица 1.1

№ стержня	Нормальная сила N	Длина участка l_i	Потенциальная энергия U_i
1	P	l	$\frac{P^2 l}{2EF}$
2	$-P\sqrt{2}$	$l\sqrt{2}$	$\frac{P^2 l\sqrt{2}}{EF}$
3	P	l	$\frac{P^2 l}{2EF}$
4	$-P$	l	$\frac{P^2 l}{2EF}$
5	$-P\sqrt{2}$	$l\sqrt{2}$	$\frac{P^2 l\sqrt{2}}{EF}$
6	$2P$	l	$\frac{2P^2 l}{EF}$

Суммарная потенциальная энергия, накопленная конструкцией, будет равна

$$U = \sum_i U_i = \frac{P^2 l}{2EF} (7 + 4\sqrt{2}) = \frac{12,66P^2 l}{2EF}$$

Искомое перемещение точки A по направлению силы P

$$\Delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{12,66Pl}{EF}$$

Пример 4. Для ломаного стержня, изображенного на рис. 1.11, а, нагруженного силой P , определить полное линейное перемещение точки A .

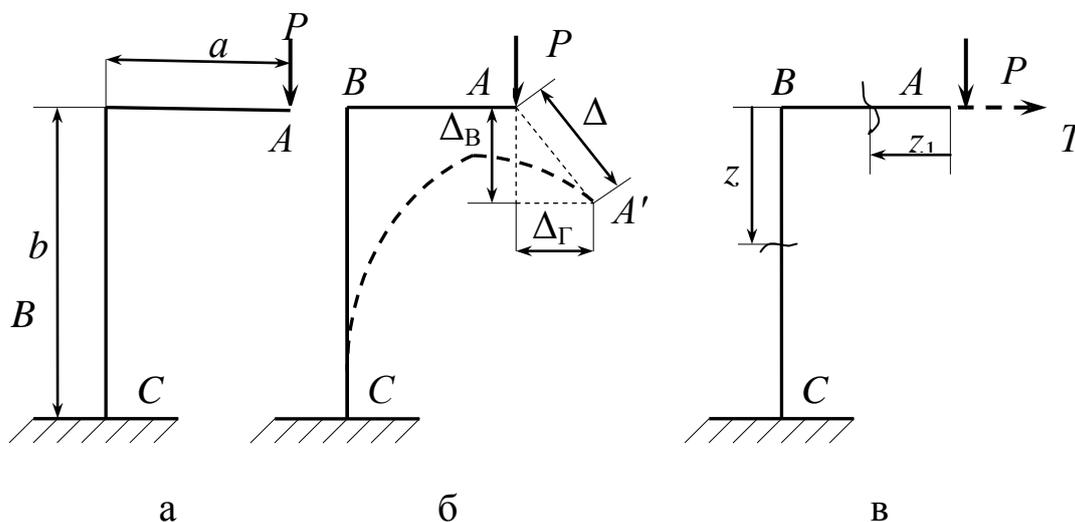


Рис. 1.11

Решение. Очевидно, в данном случае полное перемещение точки A ломаного стержня состоит из перемещений этой точки в вертикальном и горизонтальном направлениях (см. рис. 1.11, б) и определится как

$$\Delta_A = \sqrt{\Delta_\Gamma^2 + \Delta_B^2}.$$

Пренебрегаем нормальными и поперечными силами и учитываем только изгиб. При $EI = \text{const}$

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_i M_{II} \frac{\partial M_{II}}{\partial T} dz.$$

Изгибающий момент на участке AB в произвольном сечении z_1 (см. рис. 1.11, в)

$$M_{II} = P \cdot z_1.$$

Определяем вертикальное перемещение точки Δ_A^B . Обобщенной силой является $T = P$.

Частная производная по обобщенной силе

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -z_1;$$

на участке BC

$$M = -P a; \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -a.$$

Перемещение точки A в вертикальном направлении

$$\begin{aligned} \Delta_A^B &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^a M \frac{\partial M}{\partial P} dz + \int_0^b M \frac{\partial M}{\partial P} dz \right] = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a -Pz \cdot -z dz + \int_0^b (Pa \cdot a) dz \right] = \\ &= \frac{1}{EI} \left(\frac{Pa^3}{3} + Pa^2b \right). \end{aligned}$$

Определим горизонтальное перемещение точки A . Поскольку действующая сила P не совершает работу на горизонтальном направлении (не является обобщенной), приложим в точке A фиктивную обобщенную силу T .

Изгибающие моменты участок AB :

$$M_{\text{И}} = Pz \text{ и } \partial M_{\text{И}} / \partial T = 0;$$

на участке BC :

$$M_{\text{И}} = Pa + Tz_2 \text{ и } \partial M_{\text{И}} / \partial T = z_2.$$

Подставляя эти значения и полагая, что $T = 0$, получим интеграл только на участке BC :

$$\Delta_A^{\Gamma} = \frac{1}{EI} \int_0^b (Pa \cdot z) dz = \frac{Pab^2}{2EI}.$$

Окончательно: $\Delta_{\Sigma} = \sqrt{\Delta_{\Gamma}^2 + \Delta_B^2}.$

Пример 5. Определить угол поворота концевого сечения A консольной балки, нагруженной силой P (рис. 1.12).

Решение. Поскольку в точке A сила P не является обобщенной θ_A , необходимо ввести фиктивную обобщенную силу в виде момента, тогда

$$M_x = -Pz - T ; \quad \frac{\partial M_x}{\partial T} = -1$$

и

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^l -Pz - T \cdot -1 dz = \frac{1}{EI} \left(\frac{Pl^2}{2} + T \right).$$

Поскольку $T = 0$, окончательно получаем $\theta_A = \frac{Pl^2}{2EI_x}$.

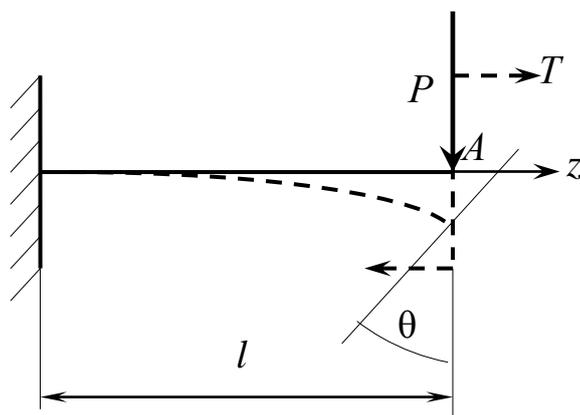


Рис. 1.12

1.3. Метод фиктивных сил при определении перемещений

В тех случаях, когда требуется определить перемещение в сечениях, где отсутствует обобщенная сила, вводят дополнительную (фиктивную) обобщенную силу.

Пример 6. Определить прогиб конца консольной балки (рис. 1.13).

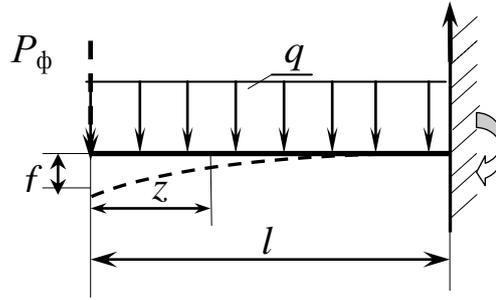


Рис. 1.13

Решение. В расчетной схеме обобщенной силы нет, поэтому вводим фиктивную обобщенную силу T (на рисунке показана пунктиром). Имеем

$$M_x = -Tz - \frac{qz^2}{2}; \quad \frac{\partial M_x}{\partial T} = -z.$$

Определим прогиб f :

$$f = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{1}{EI} \int_0^l M_x \frac{\partial M_x}{\partial T} dz = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(-Tz - \frac{qz^2}{2} \right) \cdot (-z) dz.$$

Полученное уравнение справедливо при любых значениях T , в том числе и при $T = 0$. Тогда

$$f = \frac{1}{EI} \int_0^l \frac{qz^2}{2} dz = \frac{ql^4}{8EI}.$$

Пример 7. Определить реакции опор статически неопределимой ломаной балки (рис. 1.14), пользуясь теоремой Кастильяно. Жесткость грузовых участков EI одинакова.

Решение. Отметим, что задача один раз статически неопределима и вертикальное перемещение опоры C невозможно, т. е. $\Delta_C = 0$. С другой стороны, перемещение точки C определится как

$$\Delta_C = \int_0^a \frac{M_H^2}{EI} \cdot \frac{\partial M_H}{\partial R_C} dz_1 + \int_0^b \frac{M_H^2}{EI} \frac{\partial M_H}{\partial R_C} dz_2.$$

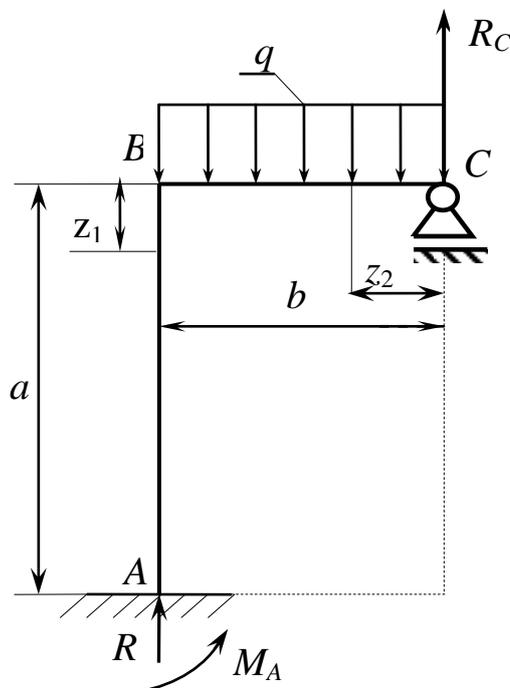


Рис. 1.14

Для каждого из грузовых участков составляем аналитические выражения для изгибающего момента и определяем производные усилий по обобщающей силе.

Первый участок ($0 \leq z_1 \leq a$)

$$M_H = R_C b - \frac{qb^2}{2}; \quad \frac{\partial M_H}{\partial R_C} = b.$$

Второй участок ($0 \leq z_2 \leq b$)

$$M_H = R_C z_2 - \frac{qz_2^2}{2}; \quad \frac{\partial M_H}{\partial R_C} = z_2.$$

Вертикальное перемещение точки C может быть представлено в виде

$$\Delta_C = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a \left(R_C b - \frac{qb^2}{2} \right) b dz_1 + \int_0^b \left(R_C z_2 - \frac{qz_2^2}{2} \right) z_2 dz_2 \right].$$

Проинтегрировав это выражение, имеем

$$\Delta_c = \frac{1}{EI} \left[\left(R_c - \frac{1}{2} qa \right) ab^2 + b^3 \left(\frac{1}{3} R_c - \frac{1}{8} qb \right) \right].$$

Так как $\Delta_c = 0$, получаем в итоге

$$R_c = \frac{3qb}{8} \frac{b+4a}{b+3a}.$$

Реакцию в заделке R_A легко определить из уравнения статики ($\Sigma Y = 0$).

1.4. Теорема о взаимности работ и перемещений

Теорема о взаимности работ и перемещений так же, как и теорема Кастильяно, относится к числу общих теорем сопротивления материалов и применима ко всем упругим системам, для которых справедлив принцип независимости действия сил.

Рассмотрим упругую систему в виде балки под действием сил P_1 и P_2 (рис. 1.15). Определим работу этих сил.

Сила P_1 совершает работу на перемещении Δ_{11} . Прикладываем силу P_2 . Она совершает работу на перемещении Δ_{22} , а сила P_1 – на перемещении Δ_{12} . Полная работа будет равна

$$A = \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} + P_1 \Delta_{12}. \quad (1.10)$$

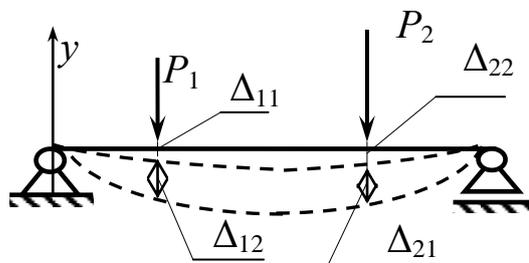


Рис. 1.15

Поменяем порядок нагружения, тогда сила P_2 совершает работу на перемещении Δ_{22} , сила P_1 – на перемещении Δ_{11} , а сила P_2 – на перемещении Δ_{21} . Полная работа составит

$$A = \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} + \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + P_2 \Delta_{21}. \quad (1.11)$$

Окончательная работа не зависит от порядка приложения нагрузок, поэтому, сравнивая (1.10) и (1.11), имеем

$$P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}, \quad (1.12)$$

т. е. работа силы P_1 на возможном перемещении, вызванном действием силы P_2 , равна работе силы P_2 на возможном перемещении, вызванном действием силы P_1 . Это теорема о взаимности работ (теорема Бетти). Теорема имеет важное практическое значение, поскольку под силами P_1 и P_2 можно понимать обобщенные силы, а под перемещениями Δ_{12} и Δ_{21} – обобщенные перемещения. В частном случае, когда $P_1 = P_2$, получим теорему о взаимности перемещений (теорема, или принцип, Максвелла):

$$\Delta_{12} = \Delta_{21}. \quad (1.13)$$

Если к тому же $P_1 = P_2 = 1$, то это означает, что для двух единичных состояний упругой системы перемещение по направлению первой единичной силы, вызванное второй единичной силой, равно перемещению по направлению второй силы, вызванному первой (рис. 1.16).

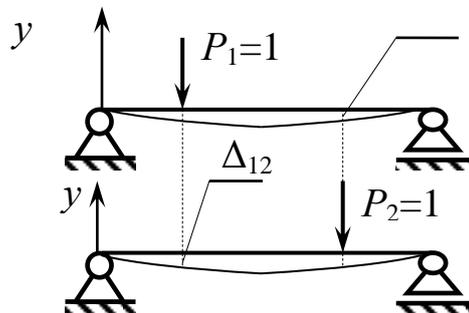


Рис. 1.16

1.5. Теорема Максвелла–Мора и ее применение для расчета перемещений

Использование теоремы Кастильяно не всегда удобно, поскольку перемещения можно определять только в точках приложения сил и только по направлению их действия. На практике часто возникает необходимость в определении перемещения любой точки в любом направлении. Воспользуемся методом Максвелла–Мора. Уравнение (1.9) для расчета перемещений в направлении действия силы P_K можно представить в виде

$$\Delta_i = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \left(\frac{M_x}{EI_x} \frac{\partial M_x}{\partial P_i} + \frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial P_i} + \frac{M_k}{GI_k} \frac{\partial M_k}{\partial P_i} \right) dz. \quad (1.14)$$

Рассмотрим один из интегралов, входящих в уравнение (1.14); например,

$$\int \frac{M_x}{EI_x} \frac{\partial M_x}{\partial P_i} dz.$$

Если на тело воздействует ряд обобщенных сил $P_1, P_2, P_3, \dots, P_i$, то от каждой из них в поперечном сечении возникает изгибающий момент $M_x(z)$, который является линейной функцией этих сил

$$M_x(z) = a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + \dots + a_n P_n,$$

где коэффициенты a – некоторые коэффициенты пропорциональности, зависящие от координаты рассматриваемого сечения по длине балки (рис. 1.17).

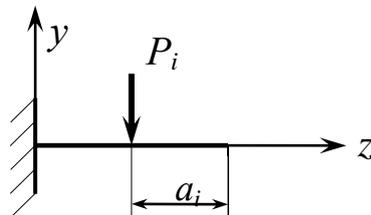


Рис. 1.17

Обобщенное перемещение точки приложения обобщенной силы P_i находится как $\frac{\partial M_x}{\partial P_i} = a_i$, а частные производные от остальных слагаемых обращаются в нуль. Если положить $P_i = 1$, то $a_i = M_x$, а остальные обобщенные силы становятся равными нулю.

Следовательно, M_x можно рассматривать как величину момента, возникающего в поперечном сечении балки от действия так называемой единичной силы, приложенной в сечении, где действует эта сила. Поэтому вычисление производной от изгибающего момента по обобщенной силе можно заменить вычислением изгибающего момента по единичной силе. Присвоим ему надстрочный индекс \overline{M}_x . Изгибающий момент от действующих нагрузок будем обозначать M_p . Тогда формула (1.14) приобретет вид

$$\Delta_i = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \left(\frac{M_{xp} \cdot \overline{M}_x}{EI_x} + \frac{M_{yp} \cdot \overline{M}_y}{EI_y} + \frac{M_{kp} \cdot \overline{M}_k}{GI_k} \right) dz. \quad (1.15)$$

Формула (1.15) называется формулой Максвелла–Мора. Она предложена Максвеллом в 1864 г. и введена в практику расчетов Мором в 1874 г. В формуле под перемещением Δ_i следует понимать или линейное перемещение, или угол поворота сечения, причем, если Δ_i – линейное перемещение, то единичной нагрузкой должна быть сила, если Δ_i угловое перемещение, то единичная нагрузка – момент. Метод Мора универсален, так как позволяет рассчитывать перемещения в сечениях, где среди внешних воздействий отсутствует обобщенная сила. Помимо этого, по методу Мора можно рассчитывать температурные перемещения, обусловленные изменением температуры тела Δt . При произвольном законе изменения температур по сечению стержня, опуская несущественные внутренние факторы, имеем:

$$N_{i(t)} = E_i \int_{F_i} \alpha_i \Delta t_i dF ;$$

$$M_{xi(t)} = E_i \int_{F_i} \alpha_i \Delta t_i y dF ;$$

$$M_{yi(t)} = E_i \int_{F_i} \alpha_i \Delta t_i x dF .$$

1.6. Порядок расчета перемещений по методу Максвелла–Мора

1. Заданную систему с действующими на нее нагрузками принимаем за грузовое состояние I.

2. Строим единичное (фиктивное) состояние II, для чего освобождаем балку от заданной нагрузки и нагружаем ее одной нагрузкой (P или M), равной единице и приложенной в том сечении, где необходимо определить перемещение (линейное или угловое).

3. Разбиваем балку на грузовые участки и для каждого из них составляем уравнения моментов M_{pi} и \bar{M}_i , вызванных силами состояния I и II.

4. Полученные выражения подставляем в формулу (1.15) и производим вычисления перемещений.

5. Если найденное перемещение имеет знак «плюс», то это означает, что направление этого перемещения совпадает с направлением единичной нагрузки, в противном случае перемещение будет в обратную сторону.

Пример 8. Определить прогиб посередине пролета (точка C) и угол поворота на левой опоре балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 1.18).

Решение. Определяем реакции опор и записываем уравнение изгибающих моментов для любого сечения нагруженной балки. В силу симметрии $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$. Строим эпюру изгибающих моментов (см. рис. 1.18, б). Посередине пролета приложим единичную силу и строим фиктивное состояние для балки, нагруженной единичной силой. Определяем опорные реакции и строим эпюру \bar{M}_i для фиктивного состояния (см. рис. 1.18, в, г). На опоре A прикладываем единичный момент $M = 1$ и строим эпюру моментов от этой фиктивной нагрузки (см. рис. 1.18, д, е).

В произвольном сечении балки z имеем для первого состояния

$$M_{zp} = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2};$$

для сил второго состояния (единичной силы)

$$\bar{M} = \frac{1}{2}z.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (1.15) и учитывая симметрию сил, получаем прогиб в середине пролета:

$$y_c = 2 \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} M_{zP} \overline{M}_z dz = \frac{2}{EI_x} \int_0^{l/2} \frac{z}{2} \left(\frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2} \right) dz = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{qlz^3}{6} - \frac{qz^4}{8} \right) \Big|_{z=0}^{z=l/2} =$$

$$= \frac{ql^4}{EI_x} \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{128} \right) = \frac{5ql^4}{384EI_x}.$$

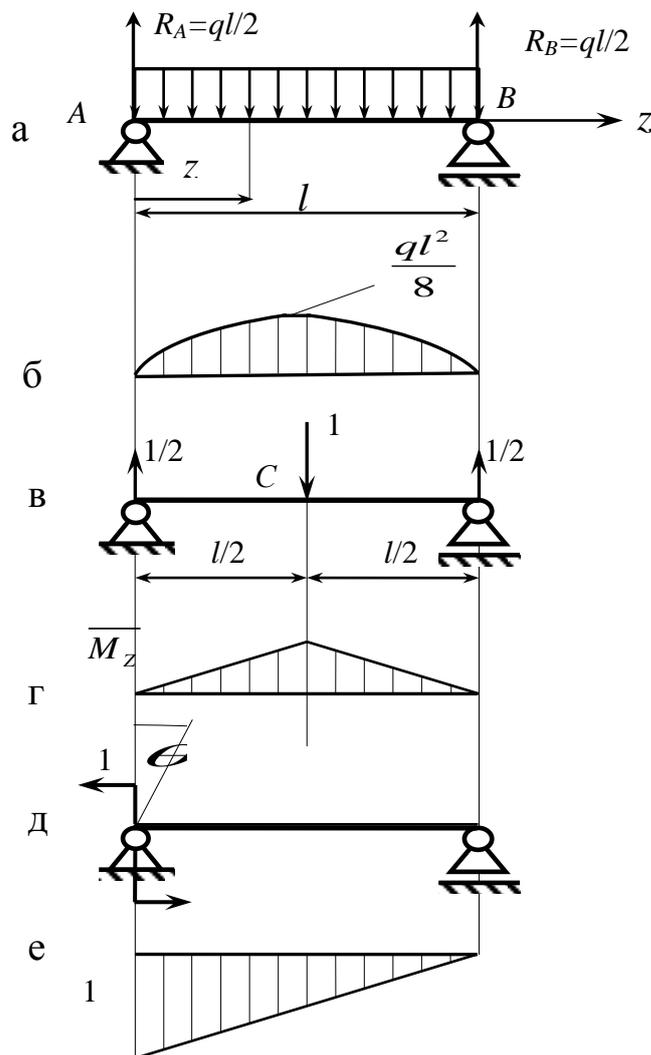


Рис. 1.18

Для определения угла поворота θ на левой опоре приложим в точке A единичную нагрузку $M = 1$ (см. рис. 1.18, д, е) и запишем уравнения моментов для обоих состояний:

$$M_{xp} = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2}$$

и

$$\bar{M}_x = -1 + \frac{z}{l}.$$

Откуда

$$\theta_A = \frac{1}{EI_x} \int_0^l M_{xp} \bar{M}_x dz = \frac{1}{EI_x} \int_0^l \left(\frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2} \right) \left(\frac{z}{l} - 1 \right) dz = \frac{1}{EI_x} \int_0^l \left(qz^2 - \frac{qz^3}{2l} - \frac{qzl}{2} \right) dz.$$

Вычислив интеграл, получаем окончательно

$$\theta_A = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{qz^3}{3} - \frac{qz^4}{8l} - \frac{qlz^2}{4} \right) \Big|_{z=0}^{z=l} = -\frac{ql^3}{24EI_x}.$$

Обратим внимание, что знак «плюс», полученный при вычислении линейного перемещения y_C , означает, что выбранное направление единичной силы соответствует действительному прогибу балки. Знак «минус» при расчете угла поворота балки в точке A свидетельствует о несоответствии с выбранным направлением пары сил M .

Пример 9. Для полурамы ABC , нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q , определить перемещение шарнирно подвижной опоры C (рис. 1.19).

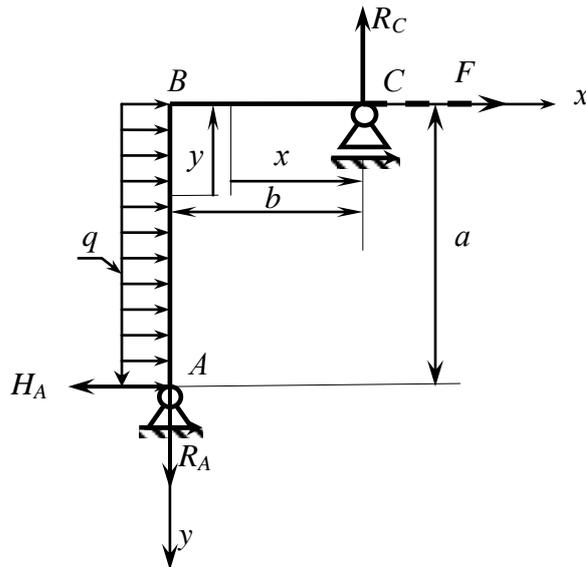


Рис. 1.19

Решение. При решении задачи будем пренебрегать действием нормальных и поперечных сил. Опорная реакция на подвижной опоре C

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow R_C b - qa^2/2 = 0 \Rightarrow R_C = qa^2/2b.$$

Остальные реакции можно не определять, если рассматривать нагрузки справа. Уравнения для расчета изгибающих моментов в произвольном сечении каждого грузового участка по силам справа M_P приводятся в табл. 1.2. В точке C прикладываем единичную силу $F = 1$ (на рисунке показана пунктиром). Расчет моментов, обусловленных действием этой силы \bar{M} , также помещаем в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Участок	M_P	\bar{M}
$AB (0 < y < a)$	$qa^2/2 - qy^2/2$	$a - y$
$BC (0 < x < b)$	$qa^2x/2b$	ax/b

Подставляя полученные выражения в уравнение (1.15), рассчитываем горизонтальное перемещение опоры C :

$$\Delta_C = \frac{q}{2EI} \left[\int_0^a a^2 - y^2 \quad a - y \quad dy + \int_0^b \left(\frac{a^2 x}{b} \right) \frac{ax}{b} dx \right].$$

Проинтегрировав последнее выражение, получаем окончательно

$$\Delta_C = \frac{qa^3}{6EI} \left(\frac{3}{4} a + b \right).$$

Пример 10. Для пространственной стержневой конструкции (рис. 1.20) определить перемещение точки A по направлению осей x и y .

Решение. Обозначим искомое перемещение точки A через Δ_x и Δ_y . Определим внутренние силовые факторы (без учета продольных и поперечных сил) для стержня в грузовом состоянии (рис. 1.21) и соответствующему искомому перемещению в единичном состоянии:

для $\Delta_x - T_x = 1$ (см. рис. 1.21, а); для $\Delta_y - T_y = 1$ (см. рис. 1.21, б), т. е. изгибающие или крутящие моменты от фактической нагрузки и единичной силы. Положительными моментами считаем те, которые направлены против часовой стрелки. Результаты расчета помещены в табл. 1.3.

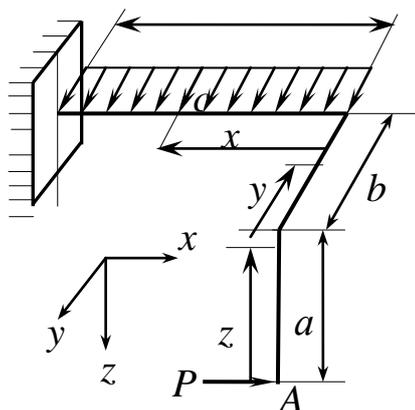


Рис. 1.20

Для определения перемещений точки A в уравнении (1.15) под знаком интеграла перемножаем значения усилий из табл. 1.3 от заданной нагрузки и от соответствующей перемещению единичной силы:

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \int_0^a \frac{M_y \overline{M}_y}{EI_y} dz + \int_0^b \frac{M_y \overline{M}_y}{GI_{kb}} dy + \int_0^b \frac{M_z \overline{M}_z}{EI_{zb}} dy + \int_0^c \frac{M_y \overline{M}_y}{EI_{yc}} dx + \int_0^c \frac{M_z \overline{M}_z}{EI_{zc}} dx = \\ &= \int_0^a \frac{Pz \cdot z}{EI_{ya}} dz + \int_0^b \frac{Pa \cdot a}{GI_{kb}} dy + \int_0^b \frac{-Py \cdot -y}{EI_{zb}} dy + \int_0^c \frac{Pa \cdot a}{EI_{yc}} dx + \int_0^c \frac{\left(-Pb + q \frac{x^2}{2}\right) \cdot -b}{EI_{zc}} dx = \\ &= \frac{Pa^3}{3EI_{ya}} + \frac{Pa^2b}{GI_{kb}} + \frac{Pb^3}{3EI_{zb}} + \frac{Pa^2c}{EI_{yc}} + \frac{1}{EI_{zc}} \left(Pb^2c - \frac{qbc^3}{6} \right). \end{aligned}$$

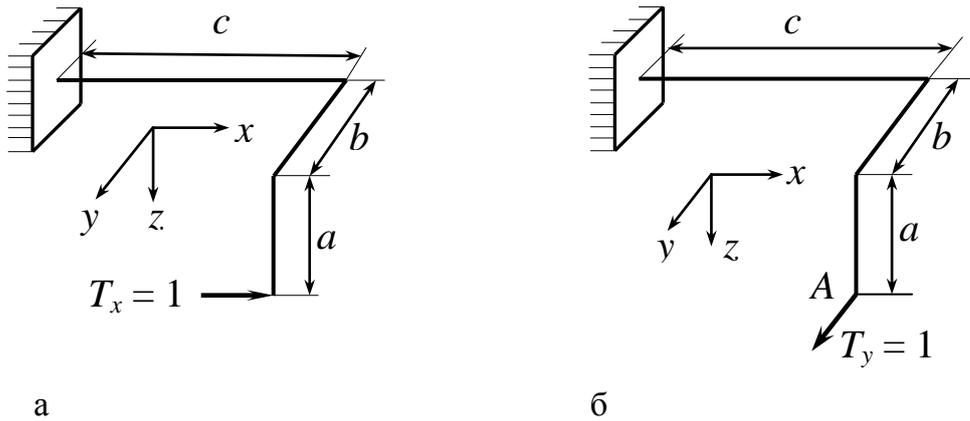


Рис. 1.21

Таблица 1.3

Участок	Усилия от заданной нагрузки			Усилия от единичной нагрузки $T_x = 1$			Усилия от единичной нагрузки $T_y = 1$		
	M_x	M_y	M_z	\overline{M}_x	\overline{M}_y	\overline{M}_z	\overline{M}_x	\overline{M}_y	\overline{M}_z
$0 \leq z \leq a$	0	$P \cdot z$	0	0	$1 \cdot z$	0	$1 \cdot z$	0	0
$0 \leq y \leq a$	0	$P \cdot a$	$P \cdot y$	0	$1 \cdot a$	$1 \cdot y$	$1 \cdot a$	0	0
$0 \leq x \leq c$	0	Pa	$-Pb + qx^2/2$	0	$1 \cdot a$	$1 \cdot b$	$1 \cdot a$	0	$1 \cdot x$

Перемещение по оси y :

$$\Delta_y = \int_0^c \frac{M_z \overline{M}_z}{EI_{zc}} dx = \int_0^c \frac{\left(-Pb + q \frac{x^2}{2}\right) - x}{EI_{zc}} dx = \frac{1}{EI_{zc}} \left(\frac{Pbc^2}{2} - q \frac{c^3}{6} \right).$$

Перемещение точки A в плоскости XOY :

$$\Delta_{A(xOY)} = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}.$$

Пример 11. Определить угол поворота сечения A кривого стержня постоянной жесткости, изображенного на рис. 1.22.

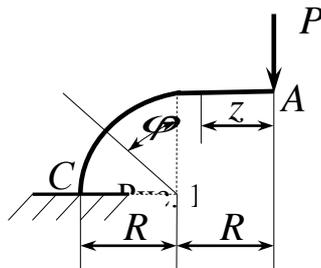


Рис. 1.22

Решение. Пренебрегаем перемещениями от продольной и поперечной сил в сравнении с перемещением от изгибающего момента; прогиб точки A в направлении, перпендикулярном оси стержня, определится

$$\Delta_A = \int_i \frac{M_P \bar{M}}{EI} dz.$$

Изгибающие моменты в произвольном сечении каждого из участков стержня от заданной нагрузки:

на участке AB $M = Pz$;

на участке BC $M = P R + R \sin \varphi = PR (1 + \sin \varphi)$.

Для определения угла поворота сечения A приложим обобщенную силу в сечении – единичный момент $T = 1$ и изобразим стержень в единичном состоянии (рис. 1.23).

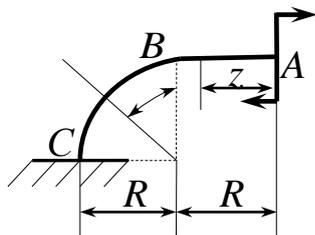


Рис. 1.23

Изгибающий момент от $T = 1$ в любом сечении стержня равен единице, т. е. $\bar{M} = 1$. Перемножая изгибающие моменты от заданной и единичной нагрузок и учитывая, что на криволинейном участке BC $dz = R d\varphi$, имеем

$$\begin{aligned} \theta_A &= \sum_{i=1}^2 \int_0^l \frac{M_P \bar{M}}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left[\int_0^R Pz \cdot 1 dz + \int_0^{\pi/2} PR (1 + \sin \varphi) \cdot 1 R d\varphi \right] = \\ &= \left[\frac{PR^2}{2} + PR^2 \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

1.7. Способ Верещагина

Вычисление интеграла Максвелла–Мора можно существенно упростить, применив специальные приемы, среди которых получил широкое распространение способ Верещагина. Его часто называют способом перемножения эпюр. Если в пределах грузового участка жесткость стержня постоянна, то, вынеся ее из под знака интеграла (1.15), в подынтегральном выражении получаем произведение двух функций $M_P \cdot \bar{M}$ (к примеру, функции изгибающего момента от заданной нагрузки и от безразмерной единичной силы). Функция внутренних силовых факторов от внешней нагрузки может иметь произвольный характер, в то время как функция \bar{M} от обобщенной единичной силы на прямолинейном участке всегда линейна.

Таким образом, необходимо вычислить интеграл от двух функций, одна из которых обязательно линейная.

Рассмотрим эпюру изгибающих моментов от заданной внешней нагрузки (грузовую эпюру) M_P на каком-либо участке (рис. 1.24). В общем случае она имеет произвольное очертание. Под этой эпюрой изобразим эпюру от единичной силы \bar{M} . Это наклонная прямая.

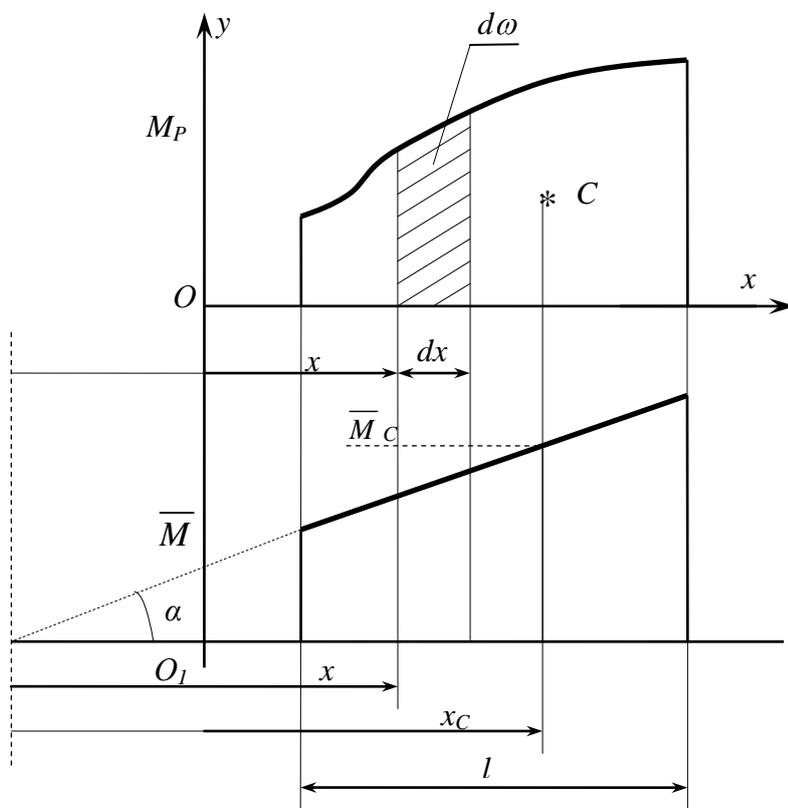


Рис. 1.24

Из верхней эпюры имеем: $d\omega = M_p dx$ – элементарная площадь, из нижней $\overline{M} = xtg\alpha$. Откуда подынтегральное выражение равно

$$\int_l M_p \overline{M} \cdot dx = \int_l d\omega \cdot x \cdot tg\alpha = tg\alpha \int_l x d\omega,$$

но $\int_l x d\omega$ – это статический момент площади фигуры относительно оси $O - O_1$ (ось y на рис. 1.24). (Напомним, что статический момент площади равен произведению площади фигуры на координаты ее центра тяжести. Следовательно,

$$\int_l M_p \overline{M} dx = tg\alpha \cdot x_C \cdot \omega = \omega \overline{M}_C.$$

Формула для расчета перемещений приобретает вид

$$\Delta_{P1} = \frac{\omega \overline{M}_C}{EI_z}. \quad (1.16)$$

Таким образом, перемещение определится как произведение площади эпюры моментов от заданной нагрузки на величину ординаты от эпюры от единичной силы, расположенной под центром тяжести грузовой эпюры, деленное на жесткость сечения стержня на рассматриваемом участке.

В случае, если балка имеет несколько грузовых участков, формула (1.16) запишется в виде

$$\Delta_{P1} = \sum_{i=1}^n \frac{\omega \overline{M}_C}{EI_z};$$

$$\Delta_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\omega_x \overline{M}}{EI_x} + \frac{\omega_y \overline{M}}{EI_y} + \frac{\omega_k \overline{M}}{GI_k} \right). \quad (1.17)$$

Формулы (1.16) и (1.17) называют формулами Верещагина.

Для определения перемещения способом Верещагина нужно:

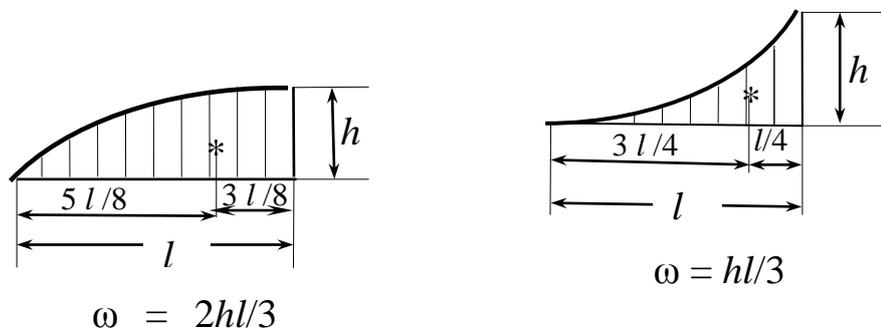
1. Построить эпюру изгибающих моментов (M_p) от заданных внешних нагрузок.

2. Построить эпюру изгибающих моментов от единичной нагрузки.

3. Определить из этих эпюр ω_i и $\overline{M_{Ci}}$ и, подставив их значения в (1.16) или (1.17), вычислить искомое перемещение.

Заметим, что если обе эпюры моментов линейны, то не имеет значения, с какой из них выбирать величину ω_i , а с какой – $\overline{M_{Ci}}$. Если же грузовая эпюра нелинейна, то площадь ω_i – это площадь этой эпюры, а величина $\overline{M_{Ci}}$ определяется по эпюре от единичной силы. Если эпюры M_P и $\overline{M_{Ci}}$ располагаются по одну сторону от оси (т. е. имеют одинаковые знаки), то их произведение будет положительно, а направление перемещения будет совпадать с выбранным направлением единичной силы (момента). Если же эти эпюры расположены по разные стороны, то их произведение отрицательно и перемещение обратно выбранному направлению обобщенной единичной силы. Сложные эпюры в границах грузовых участков следует разбивать на простейшие, площади и положение центров тяжести сечений хорошо известны (прямоугольник, треугольник, параболический треугольник и т. д.). Ниже приведены площади и координаты центров тяжести некоторых форм эпюр изгибающих моментов (рис. 1.25).

Параболический треугольник



Квадратичная парабола

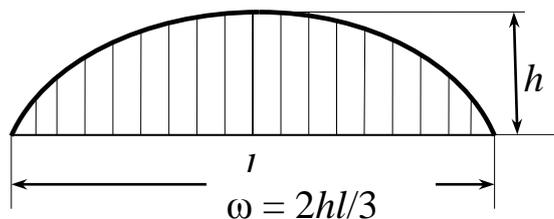


Рис. 1.25

Если обе эпюры M_P и \bar{M} представляют собой линейные трапеции (рис. 1.26), их произведение дает

$$\omega \bar{M} = \frac{1}{6} (2aa_1 + 2bb_1 + ab_1 + ba_1) .$$

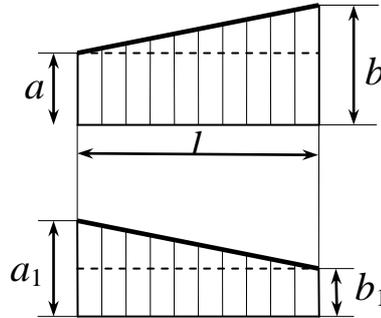


Рис. 1.26

Если грузовая эпюра представляет собой параболическую трапецию, а эпюра от единичной обобщенной силы – линейную трапецию (рис. 1.27), их произведение будет

$$\omega \bar{M}_c = \frac{1}{6} (aa_1 + 4cc_1 + bb_1) .$$

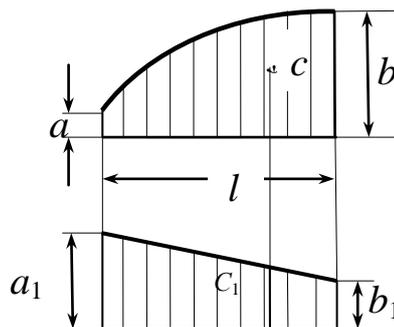


Рис. 1.27

При сложном нагружении балки эпюру M_P удобно строить в «расслоенном» виде, т. е. построить эпюры от каждой нагрузки отдельно, используя при этом принцип независимости действия сил.

Пример 12. Определить прогиб сечения A консольной балки (рис. 1.28).

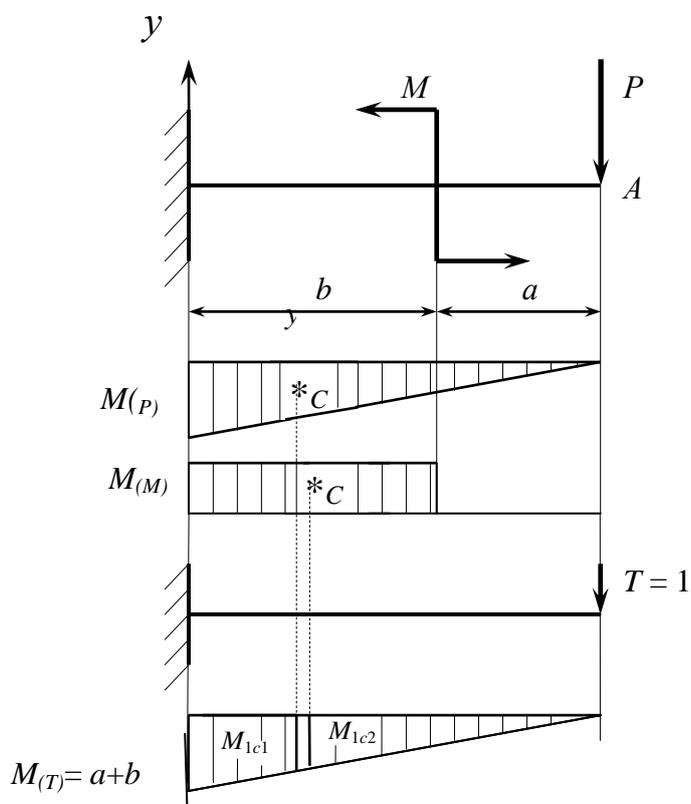


Рис. 1.28

Решение. Строим отдельно грузовые эпюры от сосредоточенной нагрузки P (M_P) и момента M (M_M) и от единичной силы $T = 1$.

Выполнив перемножение эпюр, получаем искомое перемещение сечения A :

$$\Delta_A = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} P a + b \quad a + b \quad \frac{2}{3} a + b - bM \left(a + \frac{b}{2} \right) \right];$$

окончательно

$$\Delta_A = \frac{P a + b^3}{3EI} - \frac{Mb 2a + b}{2EI}.$$

Пример 13. Найти прогиб точки D балки (рис. 1.29, а) методом Мора и способом Верещагина. Принять жесткость стержня EI_x постоянной.

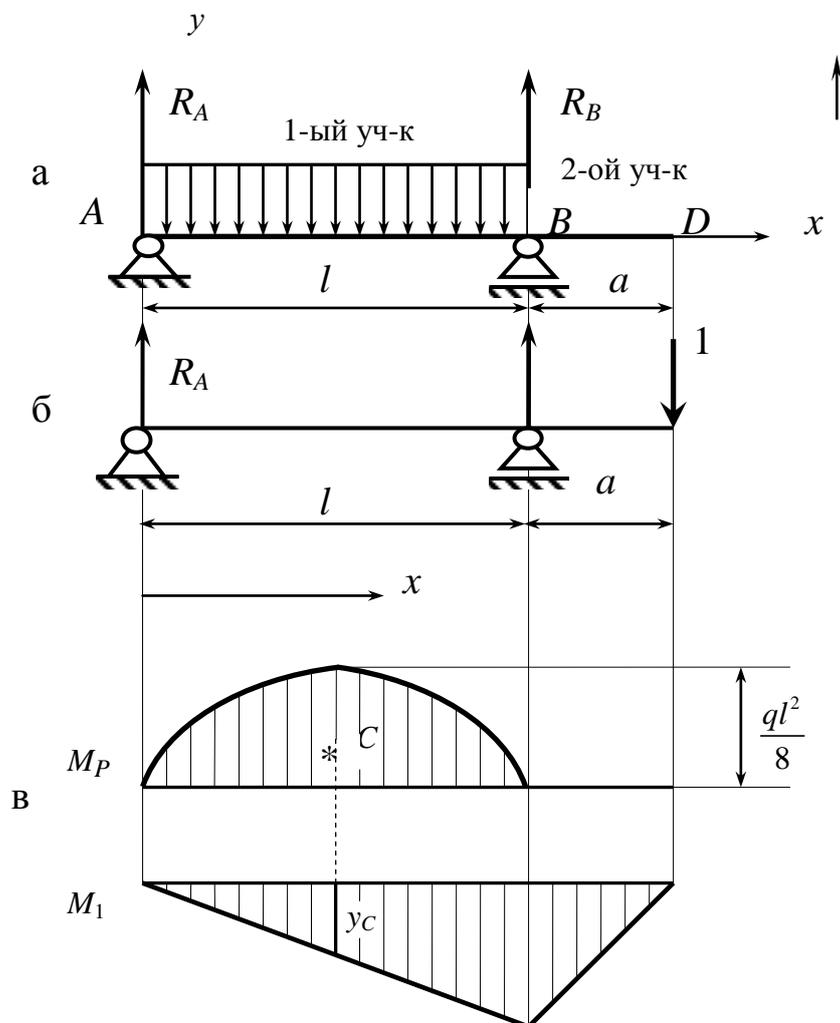


Рис. 1.29

Решение. Определяем реакции опор: от заданной распределенной нагрузки $R_A = R_B = ql/2$; от фиктивной единичной нагрузки (см. рис. 1.29, б) $R_A = -a/l$; $R_B = 1 + a/l$.

Записываем уравнения изгибающих моментов от заданной нагрузки и от единичной силы. Результаты приведены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Участок 1 ($0 \leq x_1 \leq l$)	M_P	\bar{M}
	$M_P = \frac{ql}{2}x_1 - \frac{qx_1^2}{2}$	$\bar{M}(x_1) = -\frac{a}{l}x_1$
Участок 2 ($l \leq x_2 \leq a$)	$M_P(x_2) = 0$	

Учитывая, что на участке 2 произведение моментов M_P и \bar{M} равно нулю, искомое перемещение сечения D по теореме Мора будет равно

$$\Delta_D = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{ql}{2}x_1 - \frac{qx_1^2}{2} \right) \left(-\frac{a}{l}x_1 \right) dx_1 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{qlax_1^3}{2 \cdot 3} + \frac{qax_1^4}{2l \cdot 4} \right)_0^l = \frac{qal^3}{24EI}.$$

Теперь определим перемещение сечения D методом Верещагина.

Площадь квадратичной параболы

$$\omega = \frac{2}{3}hl = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}ql^2 \cdot l = \frac{2}{24}ql^3;$$

ордината центра тяжести эпюры моментов от заданной нагрузки на эпюре моментов от единичной нагрузки $y_C = -a/2$.

Прогиб сечения D

$$\Delta_D = -\frac{1}{EI} \frac{2ql^3}{24} \cdot \frac{a}{2} = -\frac{qal^3}{24EI},$$

т. е. численно такой же результат. Знак «минус» указывает на то, перемещение направлено в сторону, противоположную вектору приложенной единичной силы.

Пример 14. Определить способом Верещагина, как уменьшится расстояние между точками A и B рамы, изображенной на рис. 1.30, а, при действии сосредоточенных сил P и моментов M .

Решение. Строим эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки (см. рис. 1.30, б) и фиктивной единичной силы T (см. рис. 1.30, в). Поскольку рама симметрична относительно вертикальной оси, можем рассматривать перемещение от ее половины, а получен-

ный результат удвоить. Эпюру от заданной нагрузки удобно разбить на две фигуры – прямоугольник и треугольник (см. рис. 1.30, б). С учетом этого имеем

$$\Delta_{AB} = \frac{2}{EI_1} \left(Mh \cdot \frac{1}{2} Ph \cdot h \cdot \frac{2}{3} h \right) + \frac{ah}{EI_2} M + Ph .$$

И окончательно, расстояние между точками *A* и *B* уменьшится на величину

$$\Delta_{AB} = \frac{2}{EI_1} \left(\frac{Mh^2}{2} + \frac{Ph^3}{3} \right) + \frac{ah}{EI_2} M + Ph .$$

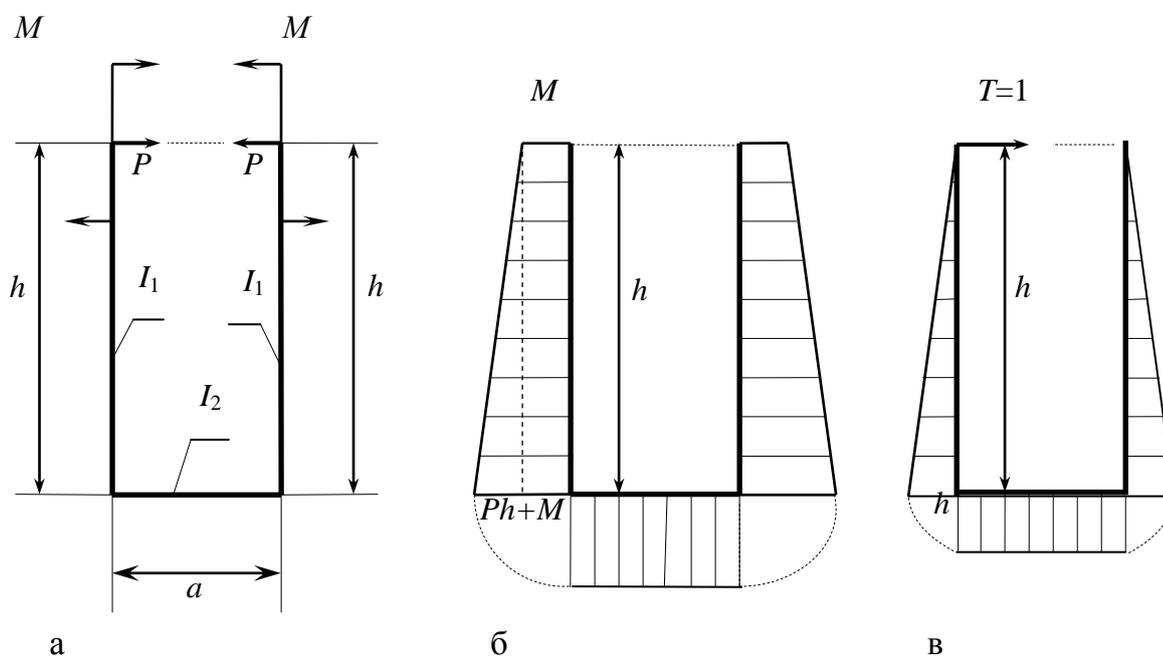


Рис. 1.30

1.8. Статически неопределимые системы

Напомним, что статически неопределимыми системами являются те, у которых число неизвестных силовых факторов превышает их количество, определяемое из уравнений равновесия твердого тела. Число «лишних» связей, устанавливаемых в дополнение к необходимым, обеспечивающим кинематическую неизменяемость системы, и определяет степень статической неопределимости системы. В качестве примера на рис. 1.31, а изображена дважды статически неопределимая система, так как она имеет две «лишние»

связи; система, приведенная на рис. 1.31, б, – один раз статически неопределима.

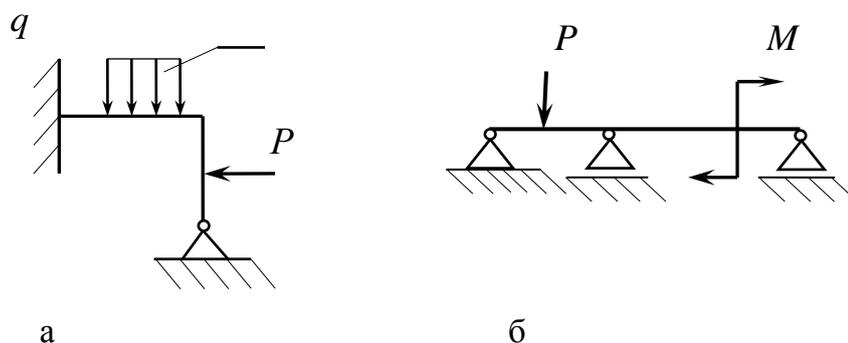


Рис. 1.31

Степень статической неопределимости возрастает, если в системе появляются замкнутые контуры. Так, для рамы, изображенной на рис. 1.32, б, степень статической неопределимости равна 3. Для кинематической неизменяемости рамы достаточно одной жесткой заделки по числу уравнений равновесия, другая заделка добавляет три неизвестные («лишние») связи. Для решения такой системы необходимо написать еще 3 дополнительных уравнения.

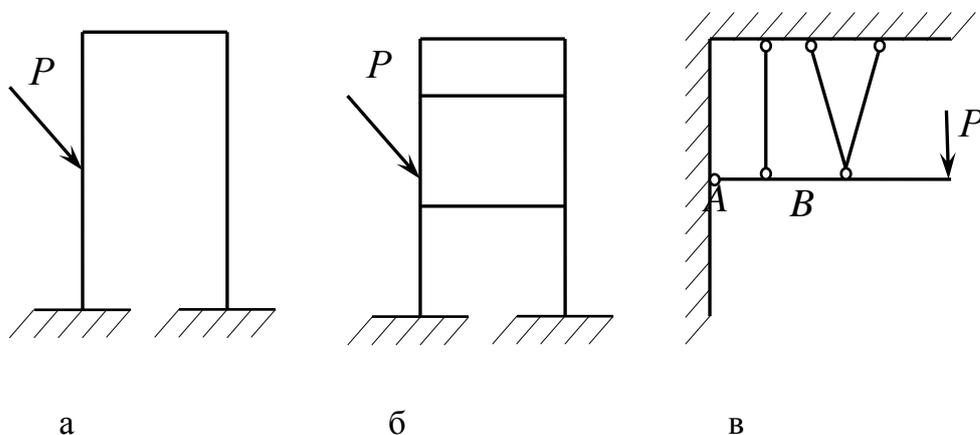


Рис. 1.32

Любой плоский замкнутый контур является трижды статически неопределимым. Дополнительными неизвестными здесь появляются нормальная сила N , поперечная сила Q и изгибающий момент M .

На рис. 1.32, б изображена 9 раз статически неопределимая система. В ней 6 неизвестных от двух жестких заделок и по 3 неизвестных от каждого замкнутого контура. Итого 12 неизвестных. Уравнений равновесия, как в каждой плоской системе, 3. Статическая неопределимость системы $12 - 3 = 9$, что требует для ее решения девяти дополнительных уравнений.

Степень статической неопределимости снижается, если в системе имеются промежуточные шарниры. Шарнир дает дополнительное условие равновесия – равенство нулю изгибающего момента в шарнире и равенство нулю моментов всех сил, расположенных по одну сторону от шарнира. На рис. 1.32, в изображена дважды статически неопределимая система: два неизвестных дают закрепление, одно – в узле *A* и два – в узле *B*; итого 5 неизвестных, уравнений равновесия 3, степень статической неопределимости $5 - 3 = 2$. Для решения системы необходимы 2 дополнительных уравнения.

Определение неизвестных внутренних силовых факторов и затем расчета конструкции на прочность, жесткость и устойчивость требует использования специальных методов расчета. К ним относятся метод сил и метод перемещений. При упругой деформации в выражении закона Гука при использовании метода сил известны перемещения, а нужно определить нагрузки; в методе перемещений известны нагрузки, а надо найти деформационные факторы, или перемещения.

Наиболее общим методом для раскрытия статической неопределимости является метод сил. Суть его заключается в том, что заданная статически неопределимая система освобождается от дополнительных связей, как внешних, так и взаимных, а их действие заменяется силами и моментами. Величины их подбираются таким образом, чтобы перемещения соответствовали тем ограничениям, которые накладывались на систему отброшенными связями. Таким образом, получаем эквивалентную систему. Две системы считаются эквивалентными, если напряжения, деформации и перемещения в них одинаковы. Для упругих систем достаточно, чтобы в них были одинаковыми перемещения.

Рассмотрим заданную дважды статически неопределимую систему (рис. 1.33, а).

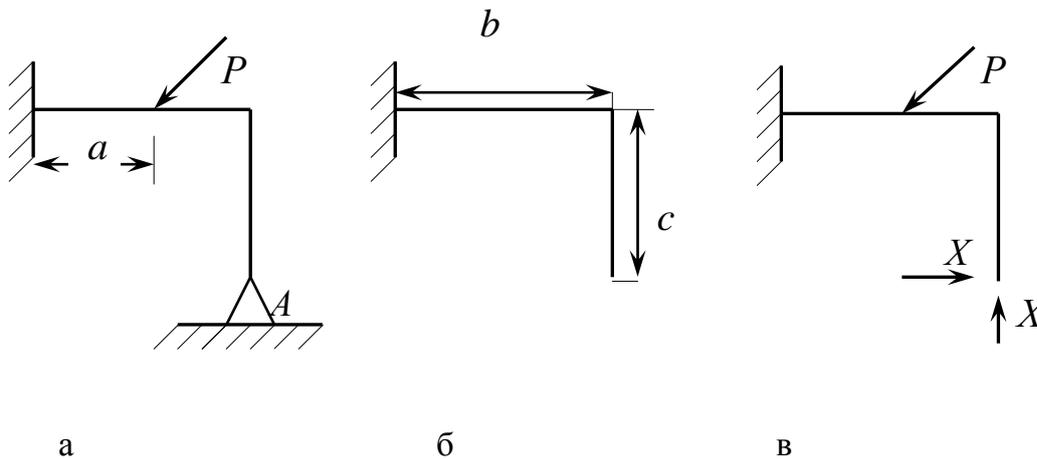


Рис. 1.33

Если отбросить две дополнительные связи, например закрепление в опоре A , то система становится статически определимой. Ее называют *основной*. Заметим, что вариантов перехода от заданной статически неопределимой системы к основной может быть несколько; приведенный на рис. 1.33, б – один из них. Важно только, чтобы система не теряла кинематической неизменяемости. Нагрузим основную систему всеми внешними силами, а действие отброшенных связей заменим неизвестными силами X_1 и X_2 . В результате получаем эквивалентную систему (см. рис. 1.33, в).

Из условия эквивалентности горизонтальные и вертикальные перемещения точки A равны нулю, т. е. $\Delta_{A_{гор}} = 0$ и $\Delta_{A_{верт}} = 0$. Согласно принципу независимости действия сил и закону Гука,

$$\Delta_{A_{гор}} = X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1P} = 0; \quad (1.18)$$

$$\Delta_{A_{верт}} = X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \Delta_{2P} = 0.$$

где δ – перемещение от единичной силы – *коэффициент податливости*. Первая цифра в подстрочном индексе указывает на направление перемещения, вторая – сила, под действием которой это перемещение осуществляется. Раскроем слагаемые системы (1.18).

Перемещения Δ_{iP} и $\delta_{i,j}$ определяют, используя метод Мора или способ Верещагина, по направлениям 1 и 2 от внешней силы P :

$$\Delta_{1P} = \sum_{k=1}^3 \int_{l_1} \frac{M_{P,k} \cdot \overline{M}_{1k}}{EI} dx - \text{горизонтальное};$$

$$\Delta_{2P} = \sum_{k=1}^3 \int_{l_2} \frac{M_{P,k} \cdot \overline{M}_{2k}}{EI} - \text{вертикальное},$$

где k – номер грузового участка; $M_{P,k}$ – изгибающий момент от внешних сил на участке k ; \overline{M}_{1k} и \overline{M}_{2k} – изгибающие моменты от единичных сил X_1 и X_2 , соответственно.

Пренебрегая влиянием продольных и поперечных сил и учитывая только изгиб элементов рамы, определяем коэффициенты податливости:

$$\delta_{11} = \sum_{k=1}^3 \int \frac{\overline{M}_{1,k}^2}{EI} dx; \quad \delta_{22} = \sum_{k=1}^3 \int \frac{\overline{M}_{2,k}^2}{EI} dx;$$

на основании теоремы о взаимности перемещений (1.13)

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_{k=1}^3 \int \frac{\overline{M}_{1k} \cdot \overline{M}_{2k}}{EI} .$$

На рис. 1.34 приведены расчетные схемы для определения изгибающих моментов от заданной нагрузки (см. рис. 1.34, а), единичных сил (см. рис. 1.34, б, в) и эпюры изгибающих моментов.

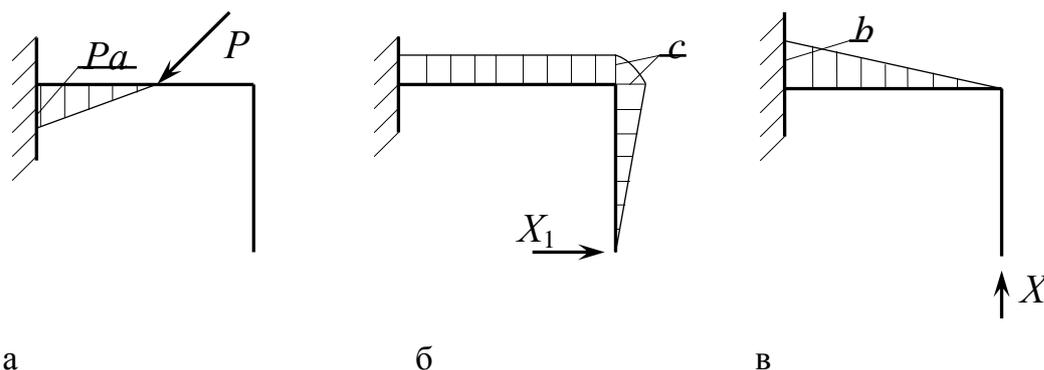


Рис. 1.34

Решая систему уравнений (1.18), находим неизвестные величины X_1 и X_2 .

Таким образом, статическая неопределимость раскрыта. Далее для статически определимой эквивалентной системы можно рассчитать напряжения и перемещения описанными ранее способами. Для систем, состоящих из прямолинейных элементов (см. рис. 1.33, 1.34), вычисление перемещений удобно производить по способу Верещагина.

Если система n раз статически неопределима, то необходимо написать n условий эквивалентности:

$$\left. \begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \dots + X_n\delta_{1n} + \Delta_{1P} &= 0; \\ X_2\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \dots + X_n\delta_{2n} + \Delta_{2P} &= 0; \\ X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + X_3\delta_{n3} + \dots + X_n\delta_{nn} + \Delta_{nP} &= 0. \end{aligned} \right\} (1.19)$$

Система (1.19) называется канонической системой уравнений метода сил. В общем виде систему (1.19) можно записать как перемещение по направлению i :

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^n X_k \delta_{i,k} + \Delta_{i,P} = 0, \quad (1.20)$$

где n – степень статической неопределимости системы, или число неизвестных сил X_k .

Если необходимо учесть перемещения, обусловленные изменением температур, или монтажные напряжения, то уравнение (1.20) записывают в виде

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^n X_k \delta_{i,k} + \Delta_{i,P} + \Delta_{i,t} + \Delta_{i,монт} = 0,$$

где $\Delta_{i,t}$ и $\Delta_{i,монт}$ – перемещения точки приложения силы X_k в направлении этой силы, соответственно, от изменения температур или от погрешности при изготовлении или сборке конструкции.

1.9. Использование свойств симметрии при раскрытии статической неопределимости систем

На рис. 1.35 приведен пример симметричной в геометрическом отношении рамы. Ее правую часть можно рассматривать как зеркальное отображение левой части относительно плоскости симметрии. Система 6 раз статически неопределима. Расчет таких рам можно упростить и уменьшить число неизвестных силовых факторов, если использовать их свойства симметрии.

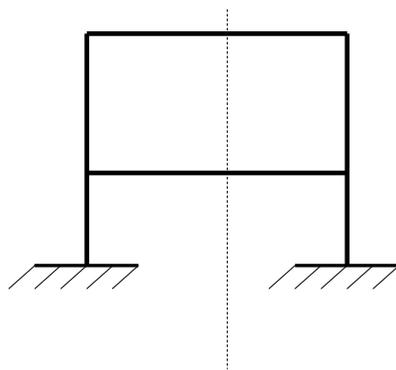


Рис. 1.35

При геометрической симметрии и симметрии нагружения система называется симметричной (зеркальное изображение) (рис. 1.36, а).

Система, изображенная на рис. 1.36, б, называется кососимметричной. Здесь изображение зеркальное, но знаки обобщенных сил противоположные. Аналогично классифицируются и внутренние силовые факторы. Обратимся к симметричной статически неопределимой раме (см. рис. 1.36, а). Выберем основную систему, разрезая раму по плоскости симметрии.

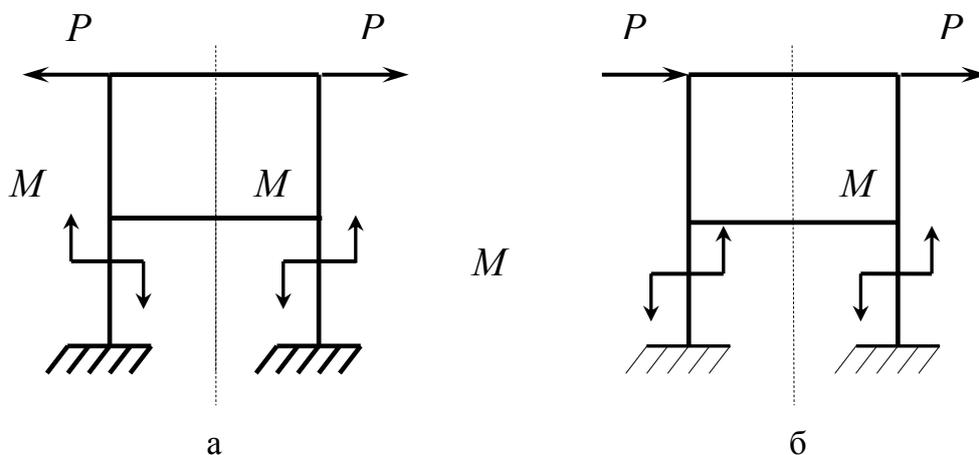


Рис. 1.36

Определим один из коэффициентов δ_{16} (единичное взаимное перемещение) (рис. 1.37, б, в).

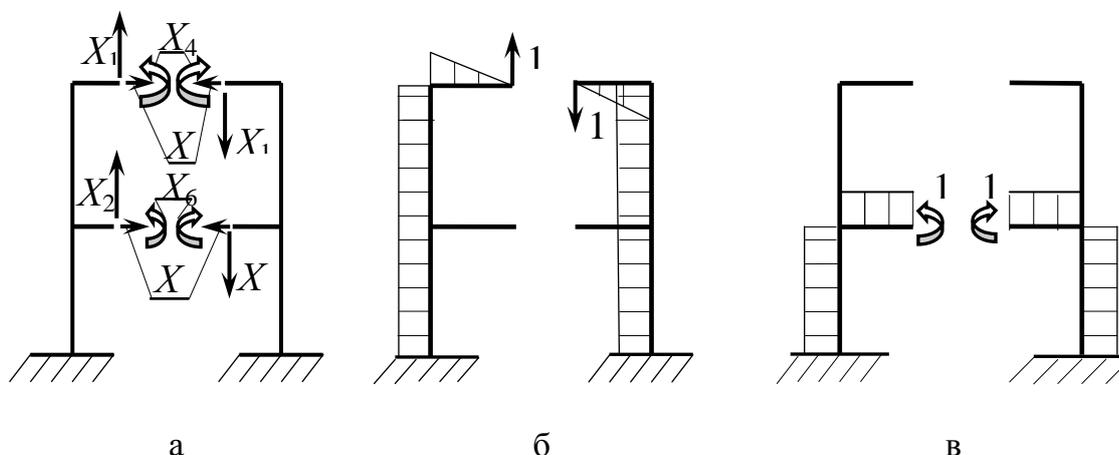


Рис. 1.37

Эпюра изгибающих моментов от кососимметричного единичного внутреннего силового фактора – силы $X_1 = 1$ будет кососимметричной (см. рис. 1.37, б), а от симметричного ВСФ – силы X_6 – симметричной. Перемножение эпюр дает нуль. Следовательно, часть слагаемых в системе канонических уравнений (1.19) обратится в нуль. Например, первые два уравнения системы примут вид

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку при симметричной нагрузке $\Delta_{1P} = \Delta_{2P} = 0$, система становится однородной, следовательно, $X_1 = 0$; $X_2 = 0$. Это означает, что в симметричной раме при симметричной нагрузке кососимметричные силовые факторы в плоскости симметрии обращаются в нуль. Аналогично в симметричной раме при кососимметричной нагрузке симметричные силовые факторы обращаются в нуль.

Если внешняя нагрузка произвольная, ее раскладывают на симметричную и кососимметричную, решают две отдельные задачи, а конечный результат получают наложением полученных решений (рис. 1.38). В случае, если рама обладает кривой геометрической симметрией, поступают аналогичным образом и также получают упрощения в системе канонических уравнений.

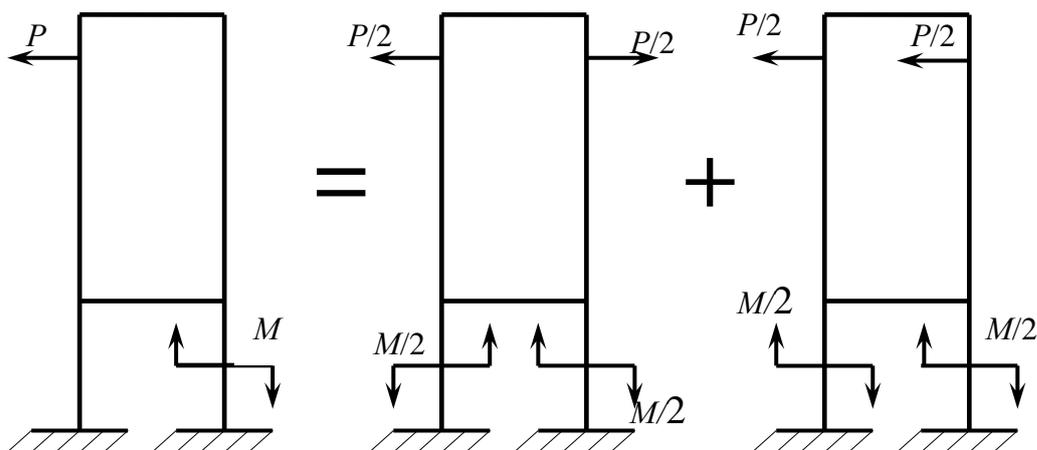


Рис. 1.38

1.10. Алгоритм расчета статически неопределимых систем

1. Определить степень статической неопределимости заданной системы.

2. Выбрать основную систему, стремясь, чтобы большее количество побочных коэффициентов обращалось в нуль. При этом в геометрически симметричной системе симметрия должна сохраняться.

3. Построить эквивалентную систему, то есть к основной системе приложить заданную нагрузку и неизвестные усилия, заменяющие отброшенные связи.

4. Составить канонические уравнения метода сил, число которых должно равняться степени статической неопределимости системы.

5. В основной системе построить эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки M_p .

6. Построить в основной системе эпюры изгибающих моментов от единичных сил $\overline{M_{x_2}}, \overline{M_1}, \dots, \overline{M_n}$, свободные члены уравнений, используя интеграл Мора или метод Верещагина.

7. Решить систему канонических уравнений сил и найти значения «лишних» неизвестных. Построить суммарную эпюру изгибающих моментов, нормальных и поперечных сил. (Используя принцип независимости действия сил, удобно пользоваться методом сложения.)

Значение перемещения в заданном направлении можно определить с помощью теоремы Кастильяно или интеграла Мора.

Пример 15. Раскрыть статическую неопределимость кососимметричной рамы постоянной жесткости, изображенной на рис. 1.36, а, и определить горизонтальное перемещение точки A .

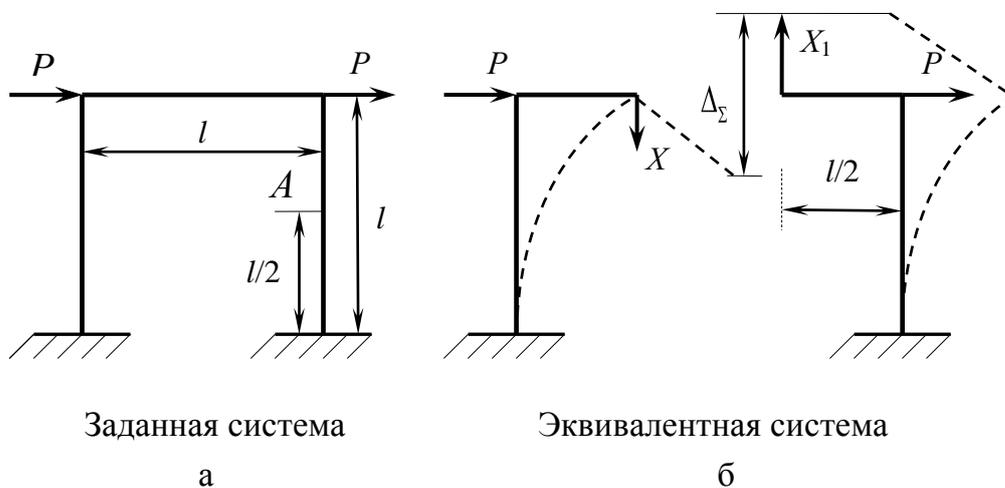


Рис. 1.39

Решение. На рис. 1.39 изображены исходная и основная системы для раскрытия статической неопределенности.

С учетом симметрии конструкции неизвестным усилием будет лишь усилие $X_1 \neq 0$. Уравнение для раскрытия статической неопределенности будет иметь вид

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Строим эпюры изгибающих моментов от силы P и единичной силы $X_1 = 1$ (рис. 1.40):

$$\delta_{11} = 2 \left\{ \int_0^{l/2} \frac{zz}{EI} dz + \int_0^l \frac{l^2}{4EI} dz \right\} = \frac{2l^3}{EI} \left(\frac{l}{24} + \frac{1}{4} \right) = \frac{7l^3}{12EI};$$

$$\Delta_{1P} = 2 \left\{ - \int_0^l \frac{Pz \cdot \frac{l}{2}}{EI} dz \right\} = - \frac{Pl^3}{2EI},$$

откуда

$$X_1 = - \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{6}{7} P.$$

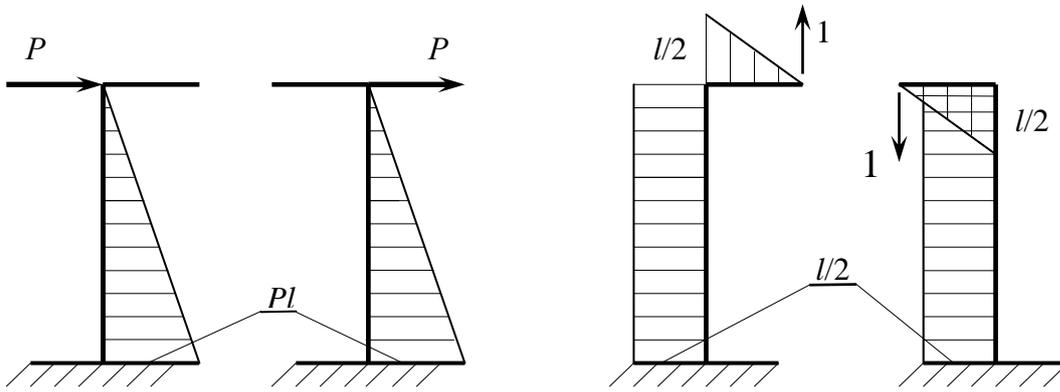


Рис. 1.40

Неизвестные усилия определены.

Для определения горизонтального перемещения точки A строим суммарную эпюру изгибающих моментов от внешних сил и рассчитанных усилий (рис. 1.41).

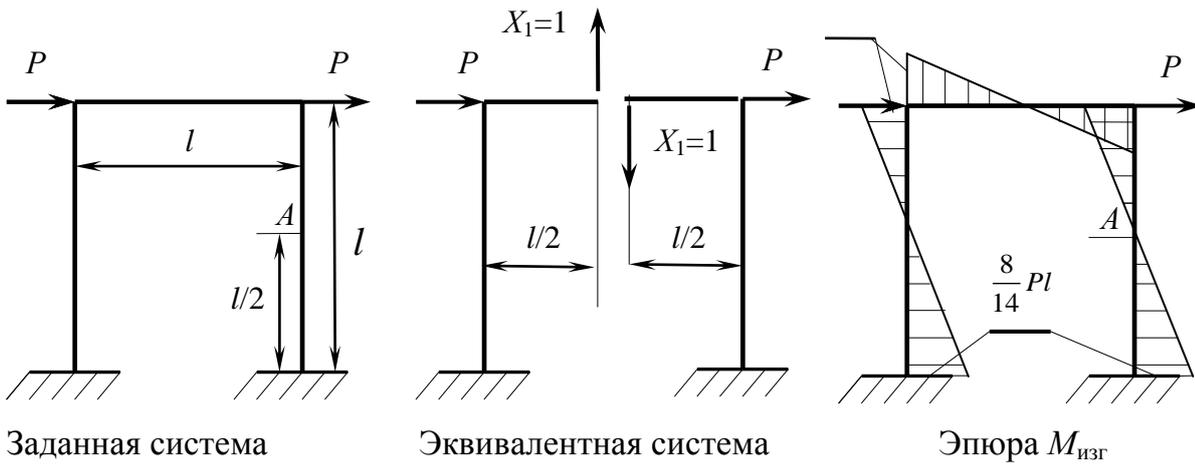


Рис. 1.41

Далее разрезаем раму в любой точке, в точке A прикладываем единичную силу и строим эпюру моментов (рис. 1.42).

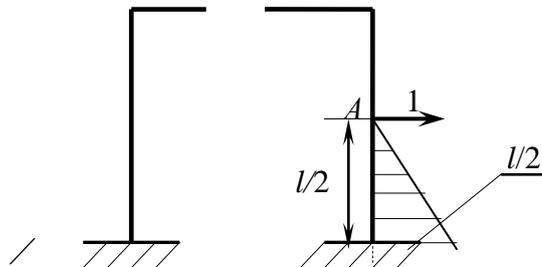


Рис. 1.42

Перемножая эпюры, получаем в итоге перемещение точки A :

$$\delta_A = \frac{17}{336} \cdot \frac{Pl^3}{EI}.$$

Пример 16. Раскрыть статическую неопределимость и определить вертикальное перемещение точки A рамы, изображенной на рис. 1.43, а. Жесткость стержней EI считать одинаковой.

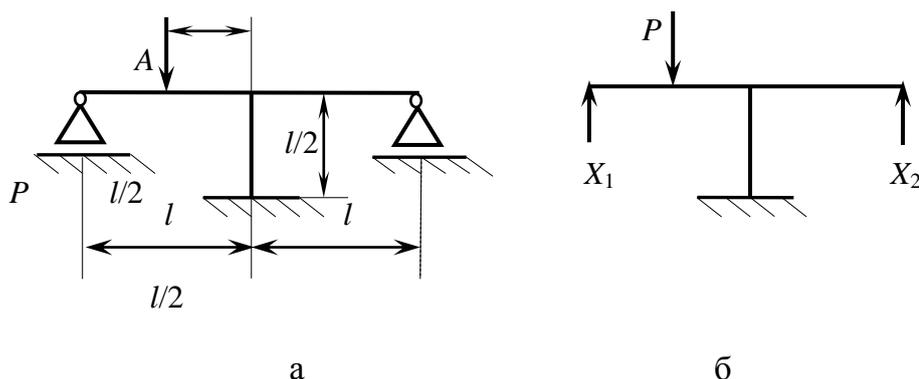


Рис. 1.43

Решение. На систему наложены пять связей, необходимых – три. Следовательно, система дважды статически неопределима. Отбросив лишние связи, получаем основную систему. Загрузив основную систему нагрузкой P и реакциями лишних связей, получаем эквивалентную систему, которая эквивалентна исходной по силам (см. рис. 1.43, б).

Система канонических уравнений устанавливает эквивалентность по перемещениям:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Для определения коэффициентов и грузовых слагаемых канонических уравнений строим эпюры изгибающих моментов от единичных неизвестных (рис. 1.44) и от заданной внешней нагрузки (рис. 1.45).

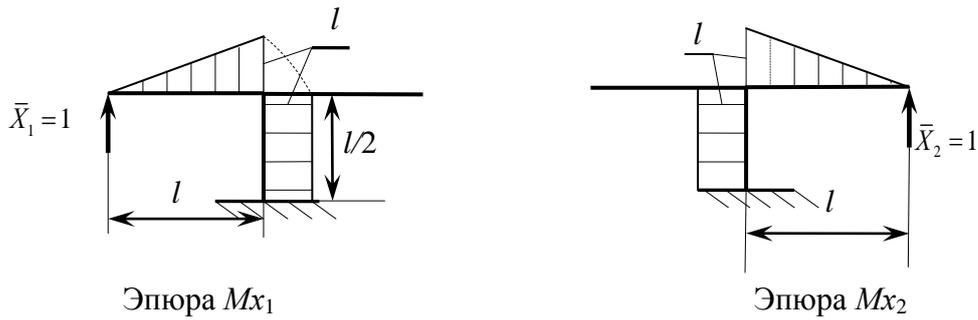
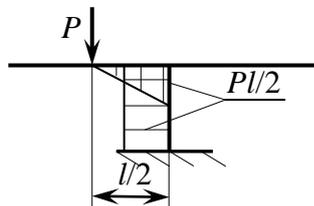


Рис. 1.44



Грузовая эпюра M_P

Рис. 1.45

Определяем коэффициенты канонических уравнений, используя способ Верещагина. Для определения δ_{11} и δ_{22} перемножаем эпюры Mx_1 и Mx_2 на самих себя:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l + \frac{l}{2} \cdot l \cdot l \right) = \frac{5l^3}{6EI}.$$

Из условия симметрии $\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{5l^3}{6EI}$.

Для определения δ_{12} и δ_{21} умножаем эпюру $\overline{Mx_1}$ на эпюру $\overline{Mx_2}$:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{l}{2} \cdot l \cdot l \right) = -\frac{l^3}{2EI}$$

Перемножая поочередно грузовую эпюру M_P на единичные эпюры $\overline{Mx_1}$ и $\overline{Mx_2}$, находим свободные члены системы канонических уравнений и

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \right) \right] - \frac{Pl}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot l = -\frac{17}{48} \cdot \frac{Pl^3}{EI};$$

$$\Delta_{2P} = +\frac{1}{EI} \left(\frac{Pl}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot l \right) = +\frac{Pl^3}{4EI}.$$

Подставляя полученные выражения в систему канонических уравнений, находим реакции лишних связей:

$$X_1 = \frac{49}{128} P; \quad X_2 = -\frac{9}{128} P.$$

Эпюра изгибающих моментов приведена на рис. 1.46.

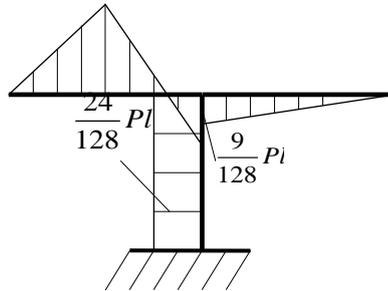


Рис. 1.46

Определяем вертикальное перемещение точки *A* методом Мора. Для этого в указанной точке приложим единичную силу. Эпюра изгибающих моментов от единичной силы приведена на рис. 1.47.

Перемножая эпюры изгибающих моментов от заданной и единичной нагрузок и преобразуя полученные произведения, окончательно получаем

$$\delta_A = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{l/2} \left(\frac{49Pz}{128} - Pz \right) \cdot -z \, dz + \int_0^{l/2} \frac{24Pl}{128} \cdot z \, dz \right] = \frac{151Pl^3}{384EI}.$$

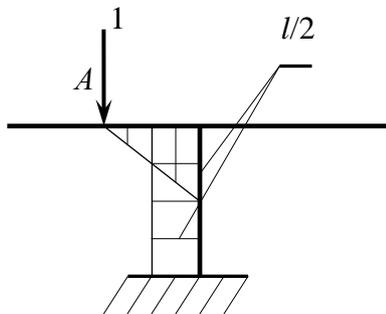


Рис. 1.47

2. ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

В предыдущем разделе рассматривались методы расчета конструкций, испытывающих статические нагрузки. На практике большинство элементов машин и механизмов работают при нагрузках, изменяющихся в короткие промежутки времени, например поршень или шатун компрессора холодильной машины. Такие нагрузки называют *динамическими*. Они вызываются ускорением элементов, а следовательно, появлением инерционных сил и дополнительных напряжений.

Различают следующие типы динамических нагрузок. Нагрузки при равноускоренном движении тела. В этом случае при известных силах инерции определение внутренних силовых факторов производится методом сечений, то есть так же, как и при статическом нагружении. Такой подход основан на принципе Даламбера, согласно которому всякое движущееся тело можно считать находящимся в состоянии мгновенного равновесия, если к действующим на него внешним силам добавить силу инерции. Она равна произведению массы тела на его ускорение, направлена в сторону, противоположную ускорению, и представляет собой объемную силу, так как приложена к каждой элементарной частице материала тела:

$$d\Phi_i = dm \cdot a = \frac{\gamma dV}{g} \cdot a.$$

Колебательные нагрузки – ударные нагрузки, действующие в течение очень короткого промежутка времени (10^{-2} – 10^{-4} с) и вызывающие большие ускорения.

2.1. Примеры решения задач движения с постоянным ускорением

Пример 17. Груз весом P поднимается равноускоренно с ускорением a с помощью троса сечением F , объемным весом γ (рис. 2.1). Определить напряжение в тросе.

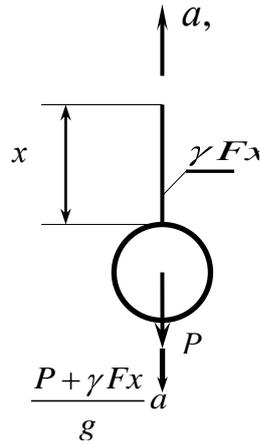


Рис. 2.1

Решение. В соответствии с принципом Даламбера динамическое напряжение, возникающее в тросе, определится суммой напряжений при статическом приложении сил и добавочным напряжением, обусловленным силами инерции, т. е.

$$\sigma_{\delta} = \frac{P + \gamma Fx}{F} + \frac{P + \gamma Fx}{gF} a = \frac{P + \gamma Fx}{F} \left(1 + \frac{a}{g} \right).$$

Первый сомножитель представляет собой напряжение при статическом приложении сил, тогда

$$\sigma_{\delta} = \sigma_c \left(1 + \frac{a}{g} \right) = k_{\delta} \sigma_c,$$

где $k_{\delta} = 1 + \frac{a}{g} = \frac{\sigma_{\delta}}{\sigma_c}$ – коэффициент динамичности, показывающий, во сколько раз динамические напряжения σ_{δ} больше напряжений при статическом приложении сил ($k_{\delta} > 1$). Часто на практике коэффициент динамичности, предварительно найденный из решения соответствующей динамической задачи, используется для решения квазистатической задачи.

Условие прочности в данном случае записывается в виде:

$$\sigma_{\delta} = k_{\delta} \sigma_c^{\max} \leq \sigma .$$

Пример 18. Рассчитать напряжения, возникающие в ободе вращающегося маховика постоянного сечения, изображенного на рис. 2.2. Влиянием спиц (или другого типа соединения с втулкой) пренебрегаем. На рисунке: D – средний диаметр маховика; F – площадь его поперечного сечения; ω – угловая скорость вращения маховика; γ – объемный вес материала маховика; q – интенсивность сил инерции на единицу длины обода.

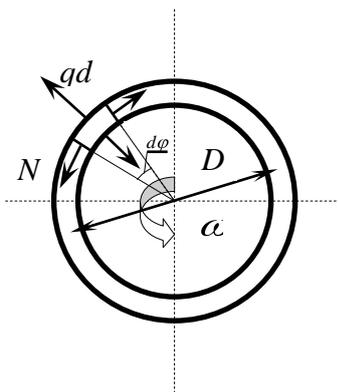


Рис. 2.2

Решение. Так как маховик вращается с постоянной угловой скоростью ω , угловое ускорение равно нулю ($\varepsilon = 0$) и тангенциальное ускорение

$$w_t = \varepsilon \frac{D}{2} = 0.$$

Радиальное ускорение в этом случае

$$w_R = \omega^2 \frac{D}{2}.$$

Центробежная сила для элемента ds кольца

$$qds = w_R \frac{F\gamma}{g} ds = \frac{F\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2 D}{2} ds$$

Внутреннее усилие, согласно известной из гидравлики теореме о равнодействующей от внутреннего давления, распределенного по любой образующей,

$$N = \frac{qD}{2}.$$

Отсюда динамическое напряжение

$$\sigma_{\partial} = \frac{N}{F} = \frac{F\gamma D}{2g} \cdot \frac{\omega^2 D}{2}.$$

Линейная скорость обода маховика $v = \omega \frac{D}{2}$, отсюда окончательно получаем

$$\sigma_{\partial} = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2 D^2}{4} = \frac{\gamma}{g} \cdot v^2.$$

Например, число оборотов маховика $n = 300$ об/мин; $D = 2$ м; объемный вес материала маховика $\gamma = 7500$ кг/м³.

Угловая скорость вращения маховика

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \cdot 300}{60} = 31,4 \text{ с}^{-1};$$

линейная скорость

$$v = \frac{31,4 \cdot 2}{2} = 31,4 \text{ м/с};$$

напряжение

$$\sigma_{\partial} = \frac{7500 \cdot 9,81}{9,81} \cdot 31,4^2 = 7,39 \text{ МПа}.$$

Пример 19. Груз весом P , поднятый краном на тросе длиной $l = 12$ м, при торможении поворачивающейся стрелы крана отклоняется от вертикали на величину $a = 4$ м (рис. 2.3). Определить, насколько увеличивается напряжение в тросе.

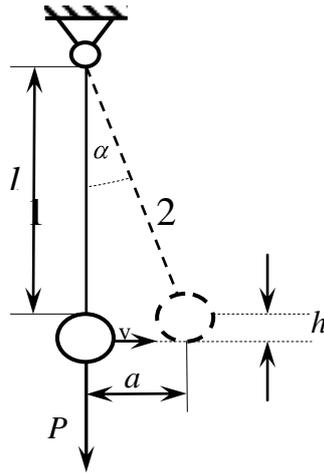


Рис. 2.3

Решение. В момент, когда стрела крана останавливается, движение груза становится колебательным. При максимальном отклонении груза от вертикали (положение 2 на рисунке) его скорость V становится равной нулю. Приравнивая кинетическую энергию груза в положении 1 и полученную потенциальную энергию в положении 2, имеем

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{2} = Ph.$$

Откуда

$$V^2 = 2gh = 2gl(1 - \cos \alpha),$$

где

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{l}.$$

Тогда

$$V^2 = 2g(l - \sqrt{l^2 - a^2}).$$

Нормальная сила в тросе в начальный момент времени движения груза

$$N_{\delta} = P + \frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{l} = P \left(1 + \frac{1}{g} \cdot \frac{2g l - \sqrt{l^2 - a^2}}{l} \right) = P \left(1 + \frac{2 \cdot 12 - \sqrt{12^2 - 4^2}}{12} \right) = 1,11P$$

Таким образом, нормальная сила N_{δ} увеличилась на 11 % по сравнению с $N_{\text{стат}}$. Следовательно, на столько же увеличится и напряжение.

2.2. Критическая скорость вращения вала

Число оборотов, при котором вращающиеся валы, попадая в резонанс, становятся динамически неустойчивыми и при этом возникают недопустимо большие колебания, называют *критическим*.

Рассмотрим вал с рабочим колесом, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω (рис. 2.4, а).

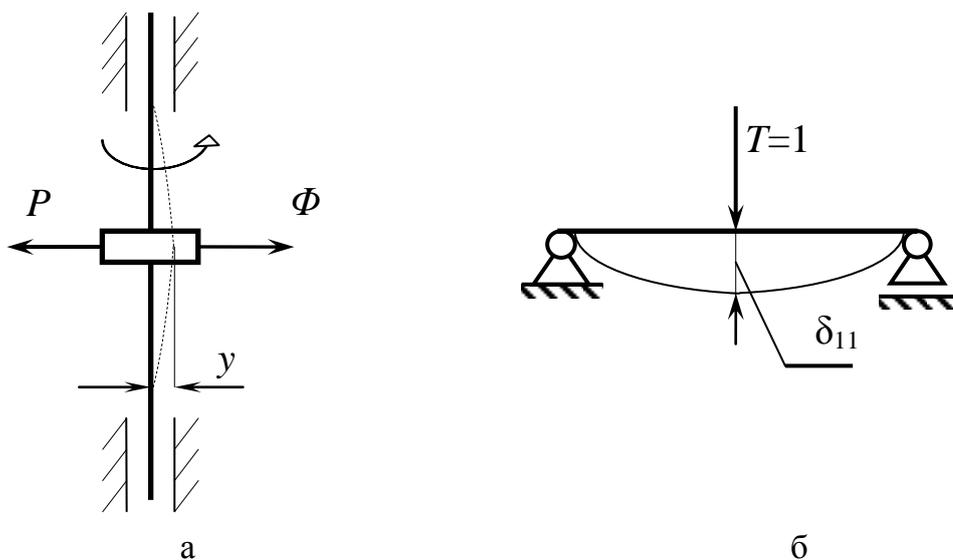


Рис. 2.4

Полагаем, что ось вала идеальная прямая, вся масса сосредоточена в рабочем колесе, а центр масс расположен на оси вала.

На вал действуют центробежная сила Φ , вызывающая его изгиб y , и реакция сил упругости в месте приложения центробежной силы P . При этом возможны следующие соотношения сил:

- устойчивое состояние системы, когда $P > \Phi$;
- нейтральное (критическое) состояние системы при $P = \Phi$;
- неустойчивое состояние при $P < \Phi$.

Центробежная сила определится как

$$\Phi = m\omega^2 y,$$

где y – прогиб вала.

Реакция вала в месте приложения силы Φ (сила упругости вала)

$$P = cy,$$

где c – жесткость вала при изгибе.

При постоянном сечении вала жесткостью EI и размещении рабочего колеса посередине пролета

$$c = \frac{48EI}{l^3}.$$

Критическая скорость вала соответствует условию

$$m\omega_{\text{КРИТ.}}^2 y = cy,$$

откуда

$$\omega_{\text{КРИТ.}} = \sqrt{\frac{c}{m}}, \text{ или } \omega_{\text{КРИТ.}} = \sqrt{\frac{1}{\delta m}},$$

где $\delta = 1/c$ – податливость,

$$\delta_{11} = \frac{1 \cdot l^3}{48EI}$$

(см. рис. 2.4, б).

Окончательно

$$\omega_{\text{КРИТ.}} = \sqrt{\frac{48EI}{ml^3}}.$$

Пример 20. Рассчитать нормальные напряжения растяжения в лопатке детандера криогенной установки (рис. 2.5) и допускаемую скорость вращения рабочего колеса. Принять: плотность материала $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³; предел прочности при рабочей температуре $\sigma_B = 950$ МПа; коэффициент запаса прочности $\bar{n} = 1,5$; $R = 120$ мм; $r_0 = 75$ мм.

Решение. При равномерном вращении ротора касательное ускорение лопатки отсутствует и сила инерции определяется только нормальным ускорением

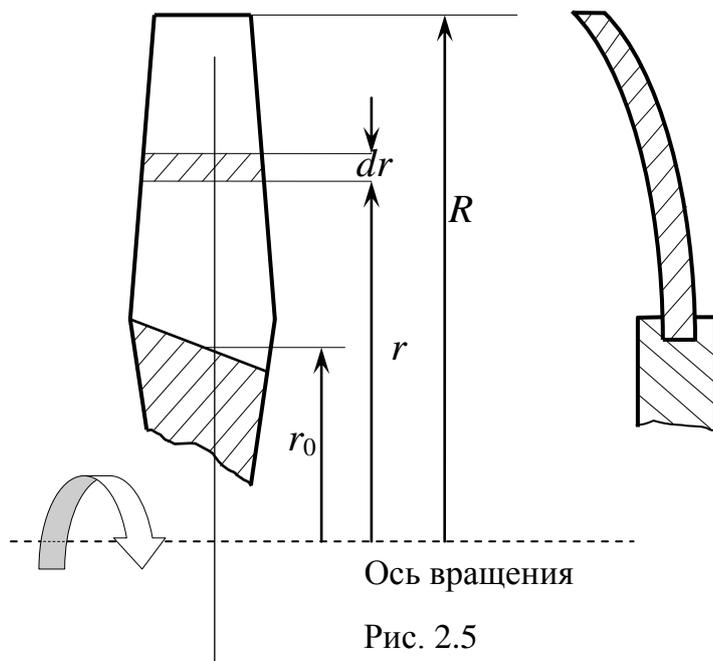
$$I_n = \omega^2 r ,$$

где $\omega = \pi n / 30$ – угловая скорость; r – расстояние от оси вращения до рассматриваемой точки.

Каждый элемент dr лопатки испытывает центробежную силу

$$dP = m_{\text{л}} I = \rho F \omega^2 r dr ;$$

$$P = \rho \omega^2 F \int_r^R r dr = \rho \omega^2 F (R^2 - r^2) / 2.$$



Для вычисления интеграла необходимо знать функцию $F = f(r)$, которая при проектировании рабочего колеса определяется газодинамическим расчетом. Принимаем, что лопатка имеет постоянное поперечное сечение (рис. 2.6).

Нормальное напряжение в любом сечении лопатки определится

$$\sigma_p = \rho \omega^2 F (R^2 - r^2) / 2F = \rho \omega^2 (R^2 - r^2) / 2.$$

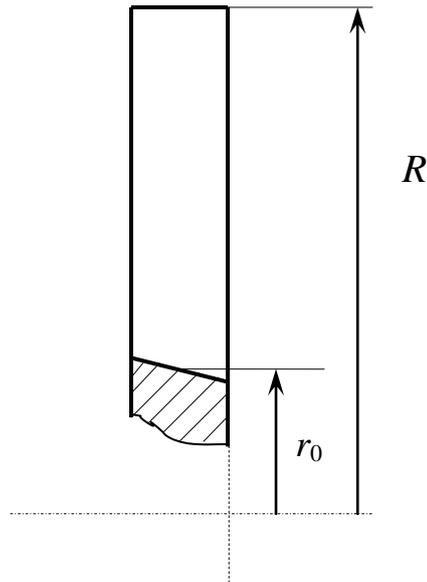


Рис. 2.6

Таким образом, напряжение по радиусу лопатки изменяется по закону параболы, причем максимальное значение σ_{MAX} будет в месте ее крепления при $r = r_0$. Условие прочности при этом будет иметь вид

$$\sigma_{MAX} = \rho \omega^2 (R^2 - r_0^2) / 2 \leq \sigma_B n ;$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2\sigma_B}{\rho (R^2 - r_0^2) n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 950 \cdot 10^6}{78 \cdot 10^3 (0,12^2 - 0,075^2) \cdot 1,5}} = 1360 \text{ рад/с} .$$

Отсюда допустимая частота вращения рабочего колеса

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 1360}{3,14} = 12990 \cong 13000 \text{ об/мин} .$$

Следует отметить, что полученная величина должна быть скорректирована после аэродинамического расчета лопатки с учетом изгибающего и крутящего моментов.

2.3. Колебания упругих систем

Колебания возникают под действием переменных по величине и направлению сил, приложенных к конструкции. К примеру, вращение неотбалансированной крыльчатки вентилятора массой m приво-

дит к появлению переменной по направлению центробежной силы, что, в свою очередь, вызывает вибрации, колебания всей системы (рис. 2.7). Такие колебания называются *вынужденными*. Частота колебаний в этом случае будет совпадать с частотой вращения несбалансированной массы. Если же колебания вызваны однократно приложенным к системе импульсом, то они называются *свободными* и характеризуются *частотой свободных колебаний* ν , Гц, т. е.

$$\nu = 1 / T ,$$

где T – период свободных колебаний (время одного колебания).

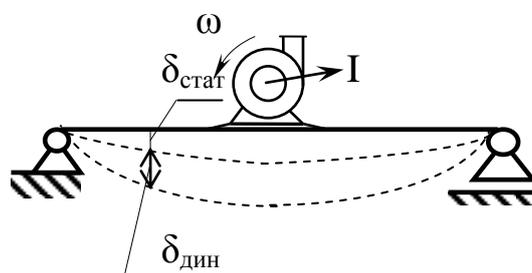


Рис. 2.7

Напомним, что круговая частота колебания – число колебаний, совершенных системой за время 2π секунд, т. е.

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} .$$

В случае, если частота вынужденных колебаний совпадает с частотой собственных, наступает явление *резонанса*, при котором резко возрастает амплитуда колебаний системы, значительно превышающая величину амплитуды при большом различии в частотах, а следовательно, и величины напряжений. К примеру, частота собственных колебаний зданий примерно $\nu \approx 5 \div 6$ 1/с (Гц), что соответствует $n = 300 \div 360$ об/мин. Частота вращения маховиков используемых ранее оппозитных компрессоров аммиачных холодильных установок – величина того же порядка. Поэтому одной из причин перехода на высокооборотные машины является уход от опасных режимов, вызываемых резонансом и приводящих к возможному разрушению конструкций. Заметим, что сопротивление среды, силы

трения снижают величины деформаций при резонансе, но, тем не менее, они остаются опасными.

Так как частоты вынужденных (возмущающих) колебаний, как правило, являются характеристикой оборудования, задача проектировщика рассчитать частоту собственных колебаний конструкции, чтобы она в необходимой мере отличалась от частоты возмущающей силы (порядка на 30 %).

Во многих случаях характер колебаний может быть определен одним параметром, например, координатой. Такая система называется системой с одной степенью свободы. Примером может служить пружина с подвешенным на конце грузом, совершающая продольные колебания.

2.3.1. Собственные колебания системы с одной степенью свободы без затухания

Рассмотрим конструкцию, состоящую из упругой невесомой консольной балки и присоединенного к ней точечного груза массой m (рис. 2.8).

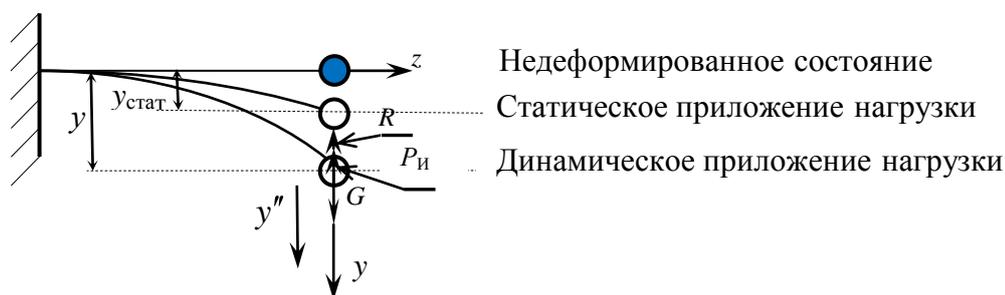


Рис. 2.8

Положение груза определяется координатой, отсчитываемой от положения равновесия.

В соответствии с принципом Даламбера

$$P_{и} + R - G = 0, \quad (2.1)$$

где $P_{и}$ – сила инерции, направленная с сторону, противоположную ускорению, и равная $P_{и} = my''$; R – упругая (восстанавливающая) сила,

$$R = c(y_{СТАТ} + y),$$

здесь c – жесткость упругой системы, представляющая собой силу, вызывающую деформацию, равную единице (в общем случае это прогиб, угол поворота, перемещение); G – вес груза,

$$G = m g .$$

Уравнение (2.1) можно переписать в виде

$$m y'' + c(y_{\text{СТАТ}} - y) = G . \quad (2.2)$$

Так как $c \cdot y_{\text{СТАТ}} = G$, преобразуем уравнение (2.2):

$$m y'' = c y ;$$

сокращая левую и правую части последнего уравнения на m и обозначая $\frac{c}{m} = \omega^2$, получаем дифференциальное уравнение свободных колебаний с одной степенью свободы:

$$y'' + \omega^2 y = 0 . \quad (2.3)$$

Как известно, решение уравнения (2.3) при начальных условиях: при $t = 0$ $y = y_0$; при $t = 0$ $y' = v_0$, имеет вид

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t , \quad (2.4)$$

где y_0 и v_0 – перемещение и скорость в начальный момент соответственно.

Вводя $y_0 = A \sin \varphi$; $\frac{v_0}{\omega} = A \cos \varphi$, получаем

$$y = A \sin \omega t + \varphi , \quad (2.5)$$

где $A = y_{\text{max}}$ – амплитуда колебаний; φ – начальная фаза; $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – круговая частота колебаний.

Поскольку $c = G / y_{\text{СТАТ}}$, имеем

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{G}{y_{\text{СТАТ}}} \cdot \frac{g}{G}} = \sqrt{\frac{g}{y_{\text{СТАТ}}}}. \quad (2.6)$$

Заметим, что, если массу системы нельзя считать пренебрежимо малой, ее приводят к сечению, где приложен груз G , с помощью коэффициента приведения, т. е.

$$m_{\text{ПР}} = m + m_{\text{К}} \cdot \alpha,$$

где m – масса груза; $m_{\text{К}}$ – масса конструкции; α – коэффициент приведения массы конструкции к сечению, где приложен груз.

Как следует из уравнения (2.6), колебания носят гармонический характер и описываются синусоидальным законом с амплитудой A , круговой частотой ω и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{y_{\text{СТАТ}}}{g}}.$$

2.3.2. Вынужденные колебания с затуханием. Резонанс Напряжения при колебаниях

Если на упругую систему, помимо веса груза G и силы упругого сопротивления системы R , действуют в том же направлении периодически меняющаяся возмущающая сила P и сила сопротивления среды F (например, газовой или жидкостной), то дифференциальное уравнение движения груза при колебаниях можно представить в виде

$$\frac{G}{g} y'' + R - G - S + F = \frac{G}{g} y'' + cy - S + F = 0. \quad (2.7)$$

Как правило, сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости колебаний, т. е. $F = \alpha y'$. Пусть на систему действует гармоническая возмущающая сила $P = P_0 \sin(\Omega t + \psi)$,

где P_0 – максимальная величина силы; ω – частота возмущающей силы; ψ – начальная частота возмущающей силы.

Преобразовывая, как и ранее уравнение (2.7), получим

$$my'' + \alpha y' + cy = P_0 \sin(\Omega t + \psi),$$

$$y'' + 2ny' + \omega^2 y = \frac{P_0}{m} \sin(\Omega t + \psi), \quad (2.8)$$

где $n = 0.5\alpha / m$ коэффициент затухания колебаний; ω – частота собственных колебаний в отсутствии возмущающей силы P и силы сопротивления F , найденной в предыдущем разделе.

Решение неоднородного уравнения (2.8) для амплитуды A вынужденных колебаний с учетом сил сопротивления имеет вид

$$y = \frac{A_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2\Omega^2}{\omega^4}}} \sin \Omega t - \psi, \quad (2.9)$$

или

$$y = A_0 \beta \sin(\Omega t - \psi),$$

где A_0 – отклонение упругой системы от положения равновесия при статическом приложении амплитудного значения возмущающей силы; β – коэффициент нарастания колебаний (динамический коэффициент),

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2\Omega^2}{\omega^4}}}. \quad (2.10)$$

Таким образом, амплитуда вынужденных колебаний

$$A_{\text{вын}} = A_0 \cdot \beta.$$

Нормальные напряжения, возникающие при этом,

$$\sigma_{\text{д}} = \sigma_0 \cdot \beta.$$

где σ_0 – напряжение, соответствующее отклонению A_0 .

Таким образом, напряжения при колебаниях

$$\sigma_{\frac{MAX}{MIN}} = \sigma_{CT} \pm \sigma_D = \sigma_{CT} \pm \sigma_0 \beta,$$

где σ_{CT} – напряжения в системе от веса груза $G = mg$.

Условие прочности

$$\sigma_{CT} + \beta \sigma_0 \leq \sigma.$$

Анализ формул (2.9), (2.10) показывает, если частота возмущающей силы мала, коэффициент нарастания колебаний близок к единице. Если частоты свободных и вынужденных колебаний близки, а демпфирующее влияние сил сопротивления невелико, наблюдается явление *резонанса*, при этом амплитуда колебаний и напряжения возрастают в разы. При высокой частоте возмущающей силы динамический коэффициент стремится к нулю и напряжение в системе близко к статическому напряжению от груза G .

С целью избежать резонанса используют способы снижения частоты собственных колебаний машин и оборудования, для чего применяют различные типы демпфирующих устройств: пружинные, газовые амортизаторы и т. д. Помимо этого устанавливают оборудование с высокой частотой колебаний или применяют специальные устройства для рассеяния энергии при колебаниях (увеличивают коэффициент затухания колебаний n).

Пример 21. Посредине пролета балки, состоящей из двух двутавров, установлен двигатель весом $G = 16$ кН, делающий 1850 об/мин (рис. 2.9). Подобрать номер двутавра, если центробежная сила неуравновешенных вращающихся частей $F = 1,0$ кН. Определить также наибольшее напряжение и прогиб в центре пролета.

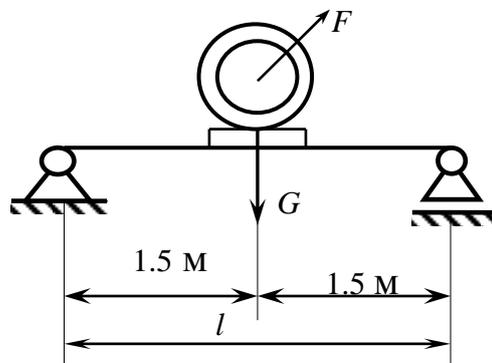


Рис. 2.9

Решение. Частота вынужденных колебаний определяется частотой вращения двигателя:

$$\Omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 1850}{30} = 193,6 \text{ рад/с.}$$

Для отстройки от резонанса необходимая частота собственных круговых колебаний должна удовлетворять условию

$$\omega = \frac{\Omega}{0,7} = \frac{193,6}{0,7} = 276,6 \text{ рад/с.}$$

Как известно, статический прогиб балки от силы, приложенной посередине, равен

$$y_{\text{СТАТ}} = \frac{Gl^3}{48EI_X} = \frac{16 \cdot 10^3 \cdot 300^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot I_X} = \frac{450}{I_X} \text{ см.}$$

Согласно (2.6), имеем

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{\text{СТАТ}}}},$$

откуда

$$I_X = \frac{\omega^2 \cdot 450}{g} = \frac{276,6^2 \cdot 450}{981} = 35095 \text{ см}^4.$$

Осевой момент инерции каждого из двух двутавров балки

$$I_{X(1)} = I_X / 2 = 35095 / 2 = 17547,6 \text{ см}^4.$$

Из таблиц сортамента выбираем двутавр № 36, у которого $I_X = 13380 \text{ см}^4$, осевой момент сопротивления $W_X = 743 \text{ см}^3$.

Так как выбранный двутавр имеет меньший, чем требуется, осевой момент инерции, проверим собственную круговую частоту колебаний балки. Статический прогиб балки

$$y_{\text{СТАТ}} = \frac{16 \cdot 10^3 \cdot 300^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 13380} = 0,0168 \text{ см};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{981}{0,0168}} = 241,6 \text{ рад/с}; \quad \frac{\Omega}{\omega} = \frac{193,6}{241,6} = 0,80.$$

Условие отстройки от резонанса не выполняется. Принимаем двутавр № 40, у которого $I_X = 19062 \text{ см}^4$; $W_X = 953 \text{ см}^3$. Тогда

$$y_{\text{СТАТ}} = \frac{16 \cdot 10^3 \cdot 300^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 19062} = 0,0118 \text{ см};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{981}{0,0118}} = 288,3 \text{ рад/с}; \quad \frac{\Omega}{\omega} = \frac{193,6}{288,3} = 0,67;$$

$$0,7 \cdot 288,3 = 201,8 > 193,6.$$

Условие отстройки выполнено.

Определим напряжения, возникающие при колебаниях. Напряжение от статически приложенного веса двигателя

$$\sigma_{\text{СТАТ}} = \frac{M}{W_X} = \frac{Gl}{4W_X} = \frac{16 \cdot 10^3 \cdot 300}{4 \cdot 2 \cdot 953} = 629,5 \text{ Н/см}^2 \cong 6,3 \text{ МПа.}$$

Напряжение от статически приложенного амплитудного значения возмущающей силы

$$\sigma_{\text{СТАТ}}^F = \frac{Fl}{4W_X} = \frac{10^3 \cdot 300}{4 \cdot 2 \cdot 953} = 39,3 \text{ Н/см}^2 = 0,39 \text{ МПа.}$$

Динамический коэффициент β в отсутствии демпфирующего воздействия среды

$$\beta = \frac{1}{1 - \Omega/\omega^2} = \frac{1}{1 - 193,6/288,3^2} = 1,82.$$

Наибольшее нормальное напряжение

$$\sigma_{\text{МАХ}} = \sigma_{\text{СТАТ}} + \sigma_{\text{СТАТ}}^F \beta = 6,3 + 0,39 \cdot 1,82 = 7,0 \text{ МПа.}$$

Прогиб балки посередине пролета

$$y_{\text{МАХ}} = y_{\text{СТАТ}} + y_{\text{СТАТ}} \cdot \beta = 0,0118 + 0,0118 \cdot 1,82 = 0,0138 \text{ см.}$$

2.4. Основы технической теории удара

Под ударной нагрузкой понимают резкое изменение скоростей соприкоснувшихся тел за очень короткий промежуток времени. Механическим ударом называют столкновение тел, при котором кинетическая энергия полностью или частично преобразуется в энергию их деформации. Момент соприкосновения тел, движущихся до этого с разными скоростями, называют началом удара.

В процессе удара в соприкасающихся телах возникают напряжения, которые практически мгновенно распространяются от зоны контакта по всему объему тел. При этом возникают большие ударные нагрузки, значительно превышающие внешние силы, и естественно, существенные динамические деформации соприкасающихся тел. Ударные нагрузки в общем случае могут вызывать растяжение, сжатие, изгиб, кручение, а также их комбинации.

Задача расчета конструкции на удар должна содержать анализ напряженного состояния в зоне контакта, изменение контактных сил во времени и другие вопросы, содержащие серьезные теоретические и экспериментальные трудности. В практических расчетах используют приближенные методы расчета, позволяющие правильно оценить порядок максимальных напряжений, деформаций и усилий, в частности при ударе по стержням и балкам. При этом полагается, что при ударе в теле возникают только упругие деформации, а материал в процессе удара подчиняется закону Гука.

Вся кинетическая энергия ударяющего тела полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации конструкции.

2.4.1. Горизонтальный удар груза по балке

Рассмотрим вначале случай горизонтального удара груза массой m по балке (рис. 2.10).

Будем считать, что масса балки пренебрежимо мала в сравнении с массой падающего груза.

Как только груз коснется балки, его скорость начнет уменьшаться. К моменту полной остановки груза сила, действующая на балку, достигнет максимума. Далее начнется движение в обратном направлении. Уравнение движения груза при ударе

$$y = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t, \quad (2.11)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}$ – частота собственных колебаний груза, присоединенного к балке.

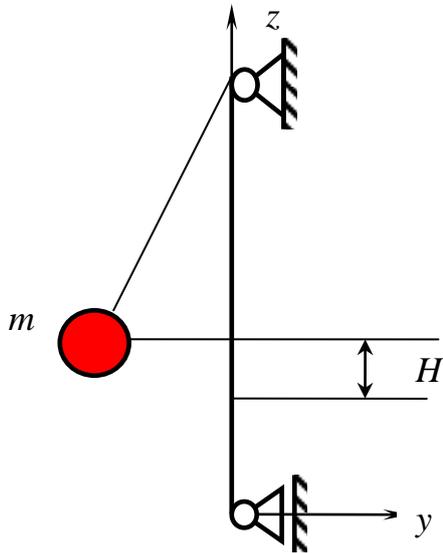


Рис. 2.10

Подставляя начальные условия в начальный момент времени:

при $t = 0$ $y = 0$;

при $t = 0$ $y' = v_0 = \sqrt{2gH}$

в уравнение (2.11), находим постоянные c_1 и c_2 :

$$c_2 = 0; \quad c_1 = \frac{v}{\omega} = \sqrt{2H\delta_c},$$

где δ_c – прогиб балки в точке удара при действии силы, равной весу ударяющего груза.

Уравнение (2.11) принимает вид

$$y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Отсюда максимальное перемещение сечения в точке соприкосновения к моменту окончания деформации составит

$$y_{MAX} = \delta_D = \frac{v_0}{\omega} = \sqrt{2H\delta_C}$$

Наибольшая величина силы

$$P_D = \frac{\delta_D}{\delta_{11}} = \frac{\sqrt{2H\delta_C}}{\delta_C / P_C} = P_C \sqrt{\frac{2H}{\delta_C}} = \frac{v_0}{\omega \delta_{11}} = P_C \beta,$$

где β – динамический коэффициент при горизонтальном ударе по упругой системе,

$$\beta = \sqrt{\frac{2H}{\delta_C}};$$

$P_C = mg$ – вес ударяющего тела; δ_C – деформация балки от действия статической нагрузки P_C ; $v_0 = \sqrt{2gH}$ – скорость ударяющего груза.

Напряжения, возникающие в упругой системе,

$$\sigma_D = \beta \sigma_C.$$

Деформация

$$\delta_D = \beta \delta_C.$$

2.4.2. Вертикальный удар по упругой системе

В случае вертикального удара груза (рис. 2.11) к моменту окончательной деформации груз пройдет путь

$$H + \delta_C.$$

Следовательно, работа, затраченная на деформацию конструкции,

$$A = P_C(H + \delta_D).$$

Потенциальная энергия упругой деформации конструкции

$$U_D = \frac{1}{2} P_D \delta_D.$$

Объединяя полученные выражения и учитывая, что

$$\delta_D = \delta_{11} P_D,$$

получаем

$$\delta_D = \delta_C \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_C}}\right) = \beta \delta_C,$$

где β – динамический коэффициент при вертикальном ударе,

$$\beta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_C}}. \quad (2.12)$$

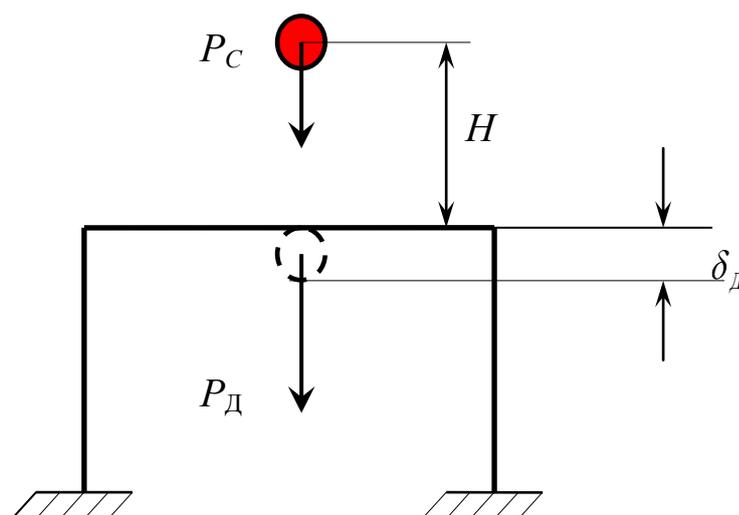


Рис. 2.11

Так как в пределах упругих деформаций напряжения и усилия пропорциональны перемещениям, получаем

$$\sigma_D = \beta \sigma_C; \quad (2.13)$$

$$P_D = \beta P_C. \quad (2.14)$$

Таким образом, при ударе деформации, усилия и напряжения увеличиваются в β раз.

Динамический коэффициент может быть выражен иным образом:

$$\beta = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{g\delta_c}}; \quad (2.15)$$

$$\beta = 1 + \sqrt{1 + \frac{\Pi}{U_c}}, \quad (2.16)$$

где $v_0 = \sqrt{2gH}$; $\Pi = P_c H$; $U_c = \frac{1}{2} P_c \delta_c$.

Заметим, если величина отношений

$$2H / \delta_c \geq 100$$

или

$$v^2 / g\delta_c \geq 100,$$

то выражения (2.12) и (2.15) можно упростить, пренебрегая единицами. Уравнения приобретают вид

$$\beta = \sqrt{\frac{v^2}{g\delta_c}} = \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}}. \quad (2.17)$$

Ошибка определения динамического коэффициента при этом не превысит 10 %.

Проанализируем полученные выражения. Из уравнения (2.12) следует, что если $H = 0$, т. е. просто приложить груз P , то динамический коэффициент $\beta = 2$. Это случай так называемого мгновенного (внезапного) нагружения. Следовательно, при мгновенном приложении нагрузки деформации и напряжения будут в 2 раза больше, чем при статическом приложении такой же нагрузки. Согласно (2.15), увеличение перемещения упругой системы (т. е. повышения податливости) при статическом приложении нагрузки

приводит к снижению динамического коэффициента. Таким образом, для уменьшения напряжений необходимо использовать различного рода демпфирующие устройства – рессоры, пружинные амортизаторы и т. п.

2.4.3. Учет массы упругой системы, испытывающей удар

В случае, когда масса тела, подверженного удару, сравнима с массой ударяющего груза, следует учесть ее влияние на деформативные характеристики системы.

Упругую систему с распределенной массой, равной Q/g (Q – общий вес системы), заменяют системой, обладающей такими же упругими свойствами, но с «приведенной» массой $\alpha Q/g$, сосредоточенной в точке удара. Величина сосредоточенной массы принимается такой, чтобы ее кинетическая энергия была равна кинетической энергии с распределенной массой, т. е.

$$\int_0^v \frac{v^2}{2g} dQ = \alpha \frac{Qv_1^2}{2g}, \quad (2.18)$$

где v_1 – скорость сечения в точке удара, в момент соприкосновения груза с конструкцией; v – скорость остальных точек упругой конструкции в тот же момент времени.

При этом принимаются следующие допущения:

- перемещения всех точек системы совершаются одновременно, при этом закон распределения скоростей совпадает с законом распределения перемещений:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{\delta_c}{\delta_{1c}}, \quad (2.19)$$

где δ_c – перемещение элементарной частицы системы от статического действия силы P_c , равной весу груза; δ_{1c} – перемещение сечения в месте удара при статическом приложении силы P_c ;

• закон распределения перемещений в системе одинаков для случаев как статического, так и динамического нагружений.

Из уравнения (2.18) коэффициент приведения массы

$$\alpha = \frac{\int v^2 dQ}{v_1^2 Q}, \quad (2.20)$$

или

$$\alpha = \frac{\int \left(\frac{\delta_c}{\delta_{1c}} \right)^2 dQ}{Q}. \quad (2.21)$$

С учетом формул (2.20), (2.21) выражение для динамического коэффициента можно записать в виде

$$\beta = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{g\delta_c \left(1 + \alpha \frac{Q}{P_c}\right)^2}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c \left(1 + \alpha \frac{Q}{P_c}\right)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{\Pi}{U_c \left(1 + \alpha \frac{Q}{P_c}\right)}}. \quad (2.22)$$

Применение приведенных выше формул для расчета перемещений, напряжений и усилий корректно при выполнении допущений, положенных в основу технической теории удара. Как показывают исследования, их можно применять, если время удара t_y в 3–5 раз превышает наибольший период собственных колебаний тел T .

Для стержней, например,

$$T = 2l \sqrt{\frac{\rho}{E}},$$

где ρ – плотность материала стержня; l – его длина; E – модуль Юнга.

Таким образом, критерий применимости уравнений можно выразить следующим образом:

$$K_t = \frac{t_y}{T} \geq 3 \div 5.$$

Пример 22. Груз весом $P = 60$ кг с высоты $H = 0,5$ м падает на деревянную балку прямоугольного поперечного сечения со сторонами $h \times b = 150 \times 100$ мм, шарнирно опертую по концам (рис. 2.12). Определить максимальные напряжения, возникающие при ударе. При расчете учесть массу балки. Принять: удельный вес дерева 540 кг/м^3 , модуль Юнга $E = 0,12 \times 10^4 \text{ МПа} = 0,12 \times 10^4 \text{ Н/мм}^2$.

Решение. При статическом нагружении балки наиболее опасным сечением будет сечение, где приложена сила P . Изгибающий момент здесь

$$M_c = \frac{Pab}{l}.$$

Он вызывает появление напряжения

$$\sigma_c = \frac{M_c}{W_x} = \frac{Pab}{lW_x},$$

где W_x – момент сопротивления сечения бруса,

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{10 \cdot 15^2}{6} = 375 \text{ см}^3.$$

При ударе опасным сечением будет то же сечение, однако напряжения будут существенно больше:

$$\sigma_d^{MAX} = \beta \sigma_c^{MAX},$$

где β – динамический коэффициент при ударе,

$$\beta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c \left(1 + \alpha \frac{Q}{P_c} \right)}},$$

здесь Q – вес упругой системы (балки); δ_c – деформация упругой системы в том сечении, где происходит удар, при статическом действии силы P ; α – коэффициент приведения массы балки.

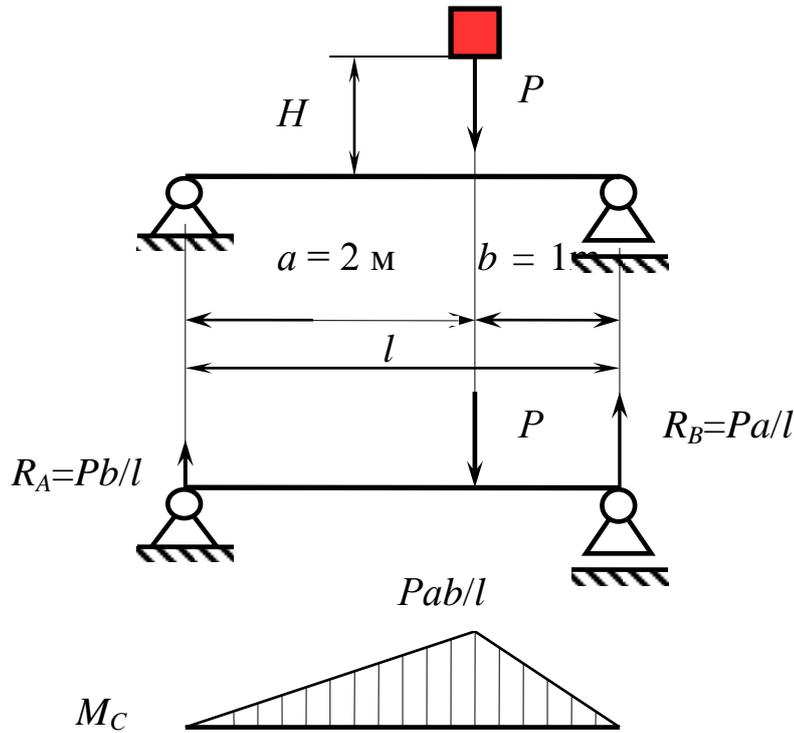


Рис. 2.12

Определим две последние величины. Воспользуемся методом начальных параметров.

Уравнение упругой линии для балки, изображенной на рис. 2.9 (начало координат поместим в точку A),

$$EI_x y = Cz + \frac{Pb}{l} \frac{z^3}{6} - \frac{P}{6} \left(z - a \right)^3,$$

где

$$C = -\frac{Pb}{6} \left(l - \frac{b^2}{l} \right).$$

Из этого уравнения находим прогиб в сечении C :

$$EI_x y = EI_x \delta_C = -\frac{Pa^2 b^2}{3l}.$$

Составим отношение перемещений (в данном случае прогибов) y_1/δ_C , т. е. отношение прогиба балки при статическом действии силы P в любом сечении z на первом участке к прогибу сечения в месте нанесения удара (точка C) при статическом действии силы P :

$$\frac{y_1}{\delta_C} = \frac{EI_x y}{EI \delta_C} = \frac{-\frac{Pb}{l} \left(l - \frac{b^2}{l} \right) z + \frac{Pb}{6l} z^3}{-\frac{Pa^2 b^2}{3l}} = \frac{\left(l - \frac{b^2}{l} \right) z - \frac{z^3}{l}}{2 \frac{a^2 b}{l}}.$$

Выберем теперь начало координат в точке B и после аналогичных преобразований получим выражение для y_2/δ_C для второго участка:

$$\frac{y_2}{\delta_C} = \frac{\left(l - \frac{a^2}{l} \right) z - \frac{z^3}{l}}{2 \frac{ab^2}{l}}.$$

Коэффициент приведения массы

$$\beta = \frac{1}{Q} \left[\int_0^a \left(\frac{y_1}{\delta_C} \right)^2 \frac{Q}{l} dz + \int_0^b \left(\frac{y_2}{\delta_C} \right)^2 dz \right].$$

После подстановки в последнюю формулу найденных величин y_1/δ_C и y_2/δ_C , интегрирования и преобразований имеем

$$\alpha = \frac{1}{3} + \frac{4}{35l} \left(\frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b} \right) + \frac{2}{105} \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \right).$$

Так как $a = \frac{2}{3}l = 2м$, $b = \frac{1}{3}l = 1м$, то $\alpha = \frac{41}{71}$.

Находим: момент инерции бруса

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \cdot 15^3}{12} = 2812,5 \text{ см}^4;$$

вес одного погонного метра деревянного бруса

$$m_0 = \gamma bh \cdot 1 = 540 \cdot 0,15 \cdot 0,1 \cdot 1,0 = 8,1 \text{ кг / м};$$

прогиб в сечении C при статическом приложении груза

$$\delta_c = \frac{Pa^2b^2}{3lEI_x} = \frac{60 \cdot 9,8 \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^6}{3 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 0,12 \cdot 10^4 \cdot 2812,5 \cdot 10^4} = 7,74 \text{ мм};$$

напряжение в сечении C при статическом приложении груза

$$\sigma_c^{MAX} = \frac{Pab}{lW_x} = \frac{60 \cdot 9,8 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^3 \cdot 375 \cdot 10^3} = 1,05 \text{ Н / мм}^2 = 1,05 \text{ МПа};$$

динамический коэффициент

$$\beta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c \left(1 + \alpha \frac{ml}{P}\right)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 500}{7,74 \cdot \left(1 + \frac{41}{70} \cdot \frac{8,1 \cdot 3}{60}\right)}} = 11,3.$$

Так как в данном случае $2H / \delta_c = \frac{2 \cdot 500}{7,74} = 129,2 \geq 100$, можно воспользоваться упрощенной формулой

$$\beta = \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 500}{7,74}} = 11,36.$$

Погрешность составляет менее 0,6 %.

Максимальное напряжение при ударе

$$\sigma_d^{MAX} = \beta \sigma_c^{MAX} = 11,3 \cdot 1,05 = 11,9 \text{ МПа}.$$

Допускаемое напряжение для бруса из сосновых пород $\sigma_{\text{доп}} = 10 \text{ МПа}$, т. е. максимальное напряжение при ударе несколько превышает допускаемое значение. В этом случае можно воспользо-

ваться демпфирующими средствами, например установкой прокладки из резины.

Под правую опору положим параллелепипед из резины размерами $h \times b \times l = 15 \times 5 \times 5$ см. Модуль Юнга резины $E = 800$ Н/см². Резиновая вставка в статике деформируется силой, равной реакции правой опоры:

$$R_B = \frac{Pa}{l} = \frac{60 \cdot 9.8 \cdot 2}{3} = 392 \text{ Н.}$$

Прогиб вставки

$$\delta_C^P = \frac{R_B \cdot h}{E \cdot b \cdot l} = \frac{392 \cdot 15}{800 \cdot 25} = 0,294 \text{ см.}$$

Прогиб балки под грузом (в точке C) за счет деформации вставки

$$\Delta_C = \frac{2}{3} \delta_C^P = \frac{2}{3} \cdot 0,294 = 0,196 \text{ см.}$$

Суммарный статический прогиб

$$\delta_\Sigma = \delta_C + \Delta_C = 0,774 + 0,196 = 0,97 \text{ см.}$$

Динамический коэффициент

$$\beta = \sqrt{\frac{2H}{\delta_\Sigma}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50}{0,97}} = 10,15.$$

Максимальное напряжение при ударе

$$\sigma_D^{MAX} = 10,15 \cdot 1,05 = 10,65 \text{ МПа,}$$

что ниже, чем при отсутствии вставки. Таким образом, уменьшение жесткости системы снижает напряжение при ударе.

Пример 23. Определить напряжения в поперечных сечениях стальных стержней и их удлинение при падении груза весом $P = 1$ кг с высоты $h = 0,1$ м на диск, закрепленный на нижнем стержне (рис. 2.13).

Решение. Определим перемещение диска от статического действия груза, предварительно вычислив нормальные усилия в стержнях. Вырезая узел A и составляя уравнения равновесия действующих на него сил, имеем

$$N_1 = N_2, \quad N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 30^\circ = N_3 \quad \text{и} \quad N_1 = N_2 = \frac{P}{2 \cos 30^\circ}.$$

Массу стержней не учитываем.

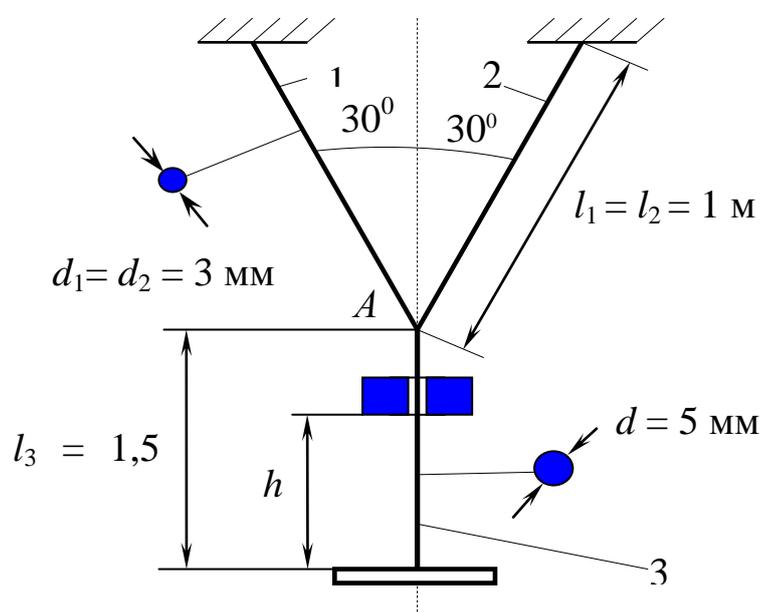


Рис. 2.13

Статические удлинения стержней

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{P \cdot l_1}{E \cdot \pi d_1^2 / 4 \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ} = \frac{1 \cdot 9,8 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 3^2 / 4 \cdot 2 \cdot 0,866} = 0,65 \cdot 10^{-2} \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EF_3} = \frac{Pl_3}{E \pi d_3^2 / 4} = \frac{1 \cdot 9,81 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 5^2 / 4} = 0,37 \cdot 10^{-2} \text{ мм}.$$

Статическое перемещение диска (точка B) определится как сумма вертикального перемещения узла A и удлинения стержня 3, т. е.

$$\delta_A = \Delta l_1 / \cos 30^\circ = 0,65 \cdot 10^{-2} / 0,866 = 0,75 \cdot 10^{-2} \text{ мм};$$

$$\delta_C^B = \delta_\Sigma = \delta_A + \Delta l_3 = (0,75 + 0,37) \cdot 10^{-2} = 1,12 \cdot 10^{-2} \text{ мм}.$$

Динамический коэффициент

$$\beta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_C^B}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 100 \cdot 100}{1,12}} = 1,05 \cdot 10^2 = 105.$$

Удлинение стержней при ударе

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \beta \Delta l_1 = 105 \cdot 0,65 \cdot 10^{-2} = 0,68 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \beta \cdot \Delta l_3 = 105 \cdot 0,37 \cdot 10^{-2} \cong 0,39 \text{ мм}.$$

Динамическое перемещение точки B

$$\delta_D^B = \beta \delta_C^B = 105 \cdot 1,12 \cdot 10^{-2} = 1,18 \text{ мм}.$$

Динамические напряжения в стержнях

$$\sigma_{1д} = \sigma_{2д} = \beta \frac{P}{2 \pi d_1^2 / 4 \cos 30^\circ} = 105 \frac{1 \cdot 9,81}{2 \cdot 3,14 \cdot 3^2 / 4 \cdot 0,866} = 84,1 \text{ Н / мм}^2 = 84,1 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{3д} = \beta \frac{P}{\pi d_3^2 / 4} = 105 \frac{1 \cdot 9,81}{3,14 \cdot 5^2 / 4} = 52,6 \text{ Н / мм}^2 = 52,6 \text{ МПа}.$$

Пример 24. Определить напряжение в тросе лебедки, вызванное внезапной остановкой груза весом $P = 500$ Н, опускающегося со скоростью $v = 1$ м/с. В момент остановки длина троса от барабана до груза $l = 20$ м. Площадь поперечного сечения каната $F = 2$ см². Модуль Юнга материала троса $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па. Массой троса пренебречь.

Решение. Потенциальная энергия троса, растянутого силой P , равна - $\frac{1}{2} P \delta_c$, где δ_c – удлинение троса под действием статически

приложенной нагрузки P ; кинетическая энергия троса при внезапной остановке груза – $\frac{Pv^2}{2g}$.

В момент остановки лебедки груз по инерции продолжает двигаться, удлиняя трос на величину δ_K и совершая работу $P\delta_K$, при этом кинетическая энергия груза переходит в дополнительную потенциальную энергию деформации троса. Полная потенциальная энергия деформации троса при этом составит

$$U = \frac{1}{2} \delta_C + \delta_K \overline{P}_D = \frac{1}{2} \frac{P}{\delta_C} \delta_C + \delta_K \overline{P}_D,$$

где $\overline{P}_D = \frac{P}{\delta_C} \delta_C + \delta_K \overline{P}_D$ – максимальная сила, действующая на трос в момент полной остановки груза.

На основании закона сохранения энергии можно записать

$$\frac{Pv^2}{2g} + \frac{P\delta_C}{2} + P\delta_K = \frac{1}{2} \frac{P}{\delta_C} \delta_C + \delta_K \overline{P}_D,$$

откуда

$$\delta_K = v \sqrt{\frac{\delta_C}{g}} \quad \text{и} \quad \delta_K = \delta_C \sqrt{\frac{v^2}{g\delta_C}}.$$

Суммарное наибольшее удлинение троса

$$\delta_\Sigma = \delta_C + \delta_K = \delta_C + v \sqrt{\frac{\delta_C}{g}} = \delta_C \left(1 + \sqrt{\frac{v^2}{g\delta_C}} \right) = \delta_C \beta,$$

где β – динамический коэффициент.

Наибольшее напряжение в тросе

$$\sigma_D = \sigma_C \beta = \frac{P}{F} \left(1 + \sqrt{\frac{v^2}{g \frac{Pl}{EF}}} \right).$$

Подставляя численные значения, имеем $\beta = 21,2$ и

$$\sigma_{\text{д}} = \frac{500}{2 \cdot 10^{-4}} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{1,0^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{9,81 \cdot 500 \cdot 20}} \right) \cong 53 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 53 \text{ МПа}.$$

Для смягчения удара установим на тросе между грузом и лебедкой пружину жесткостью $c = 4 \cdot 10^{-3} \text{ мм/Н}$ (рис. 2.14)

Деформация пружины под действием груза, приложенного статически,

$$\delta_{\text{п}} = Pc = 500 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 2000 \cdot 10^{-3} \text{ мм} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Деформация троса с установленной пружиной при статическом приложении груза

$$\delta_{\Sigma} = \delta_c + \delta_{\text{п}} = \frac{Pl}{EF} + Pc = \frac{500 \cdot 20}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} + 2 \cdot 10^{-3} = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

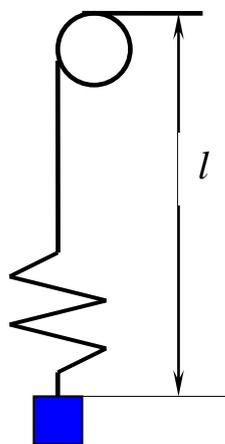


Рис. 2.14

Наибольшее напряжение при ударе

$$\sigma_{\text{д}}^{\text{MAX}} = \sigma_c^{\text{MAX}} \beta = \frac{P}{F} \left(1 + \sqrt{\frac{v^2}{g \delta_{\Sigma}}} \right) = \frac{500}{2 \cdot 10^{-4}} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{1,0^2 \cdot 10^3}{9,81 \cdot 2,25}} \right) = 19,25 \cdot 10^6 \text{ Н / м}^2 = 19,25 \text{ МПа},$$

где $\beta = 7,7$, т. е. в 2,75 раза меньше, чем в случае отсутствия пружины.

Как следует из приведенных расчетов, чем больше статическое удлинение δ_{Σ}^C , тем меньше динамический коэффициент и максимальные напряжения. Поэтому в лифтах и клетях шахт тросы прикрепляются к кабинам с помощью пружин, увеличивающих δ_{Σ}^C и тем самым смягчающих действие ударных нагрузок.

3. РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПО БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ

Тонкостенные оболочки, в которых толщина стенки существенно меньше других габаритов, широко используются в холодильной, криогенной технике, пищевой, химической и многих других отраслях промышленности. К ним относятся ресиверы, промежуточные сосуды, кожухотрубные испарители и конденсаторы, газгольдеры, цистерны, танки для жидких пищевых продуктов и др.

Оболочкой вращения называют поверхность, образованную вращением некоторой кривой вокруг оси (рис. 3.1).

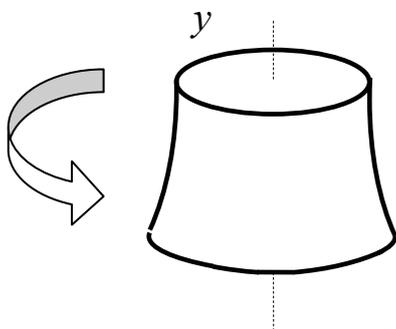


Рис. 3.1

Геометрическое место точек, равноудаленных от наружной и внутренней поверхностей оболочки, т.е. делящее толщину оболочки пополам, называют срединной поверхностью. По форме срединной поверхности различают цилиндрическую, коническую, сферическую и т.д. поверхности. Сечение срединной поверхности плоскостью, проходящей через ось вращения, называют меридиональным сечением. Если оболочка представляет собой тело вращения и нагрузка симметрична относительно оси, то оболочка называется осесимметричной. При расчете тонкостенных осесимметричных оболочек правомерно допустить, что нормальные напряжения, возникающие в стенке, распределяются по толщине равномерно, т.е. изгиб оболочки отсутствует. Теория, исключая изгиб стенки оболочки, называется безмоментной теорией оболочек. Согласно этой теории, в сечениях оболочки изгибающие, крутящие моменты и поперечные силы отсутствуют.

3.1. Напряжения в осесимметричной оболочке по безмоментной теории

Рассмотрим оболочку, образованную вращением некоторой кривой относительно оси $x-x$, находящуюся под внутренним давлением p (рис. 3.2).

Кривизна в любой точке оболочки характеризуется двумя радиусами: ρ_m – радиусом кривизны меридионального сечения и ρ_t – радиусом кривизны нормального сечения, перпендикулярного меридиональному, равным отрезку нормали, заключенной между рассматриваемой точкой и осью вращения. Это главные радиусы кривизны поверхности вращения.

Выделим из стенки оболочки толщиной t двумя меридиональными сечениями и двумя сечениями, нормальными к меридиональным, бесконечно малый элемент и рассмотрим его равновесие (рис. 3.3). Элемент находится в равновесии под действием сил, обусловленных меридиональным напряжением σ_m , окружным напряжением σ_t , перпендикулярным меридиональному, и давлением p , действующим на элементарную площадку. Меридиональные напряжения σ_m получают приращения на гранях элемента dm , окружные в силу симметрии остаются одинаковыми. Уравнение равновесия в виде проекций всех сил на нормаль к элементарной поверхности n запишется в виде

$$p\rho_m d\theta\rho_t d\phi - \sigma_m t\rho_t d\phi \sin \frac{d\theta}{2} - (\sigma_m + d\sigma_m) t\rho_e d\phi \sin \frac{d\theta}{2} - 2\sigma_t t\rho_m d\theta \sin \frac{d\phi}{2} = 0. \quad (3.1)$$

Слагаемым $d\sigma_m t\rho_{tw} d\phi \sin \frac{d\theta}{2}$ можно пренебречь ввиду его малости большего, чем остальные, порядка. Поскольку углы $d\phi$ и $d\theta$ малы, то

$$\sin \frac{\phi}{2} \cong \frac{\phi}{2} \quad \text{и} \quad \sin \frac{\theta}{2} \cong \frac{\theta}{2}.$$

С учетом этих допущений уравнение равновесия (3.1) приобретает вид

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{t}. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) носит название уравнения Лапласа. Так как это уравнение содержит два неизвестных (σ_m и σ_t), то для их определения необходимо воспользоваться дополнительным уравнением равновесия части оболочки, отсеченной коническим нормальным сечением (рис. 3.4).

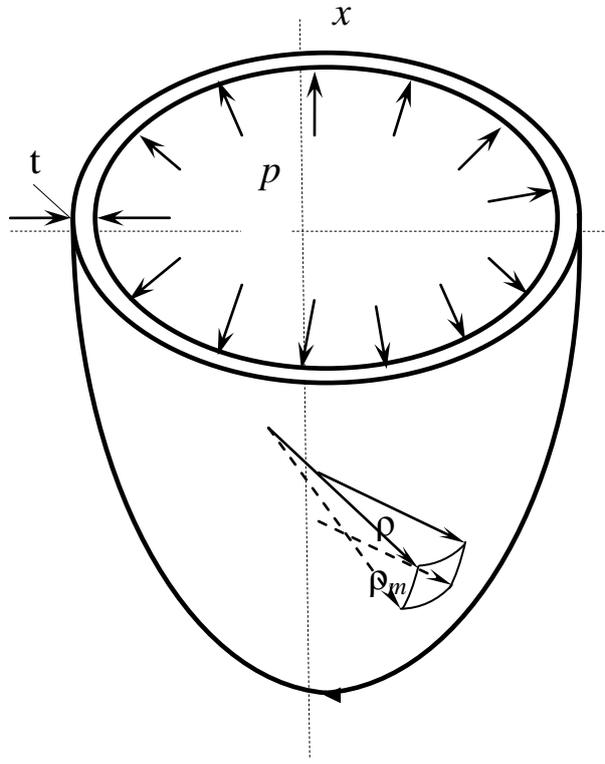


Рис. 3.2

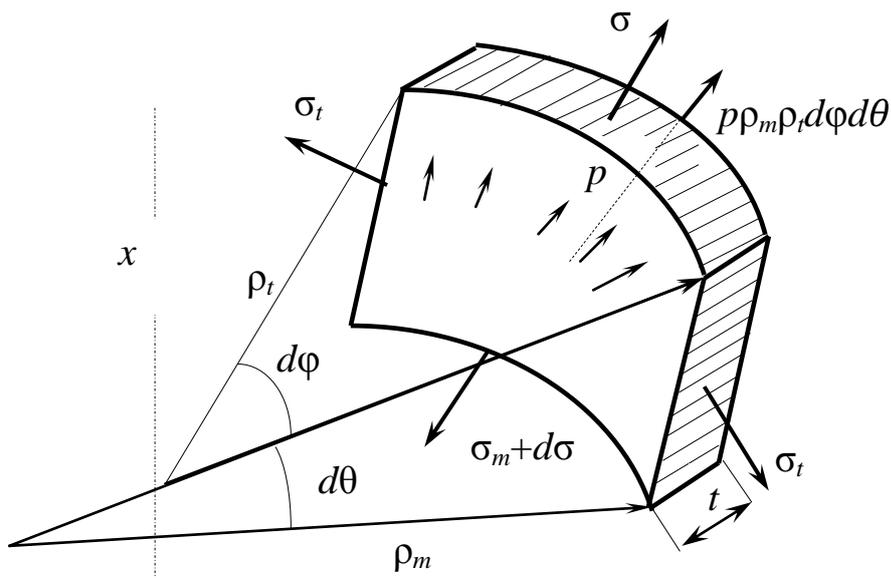


Рис. 3.3

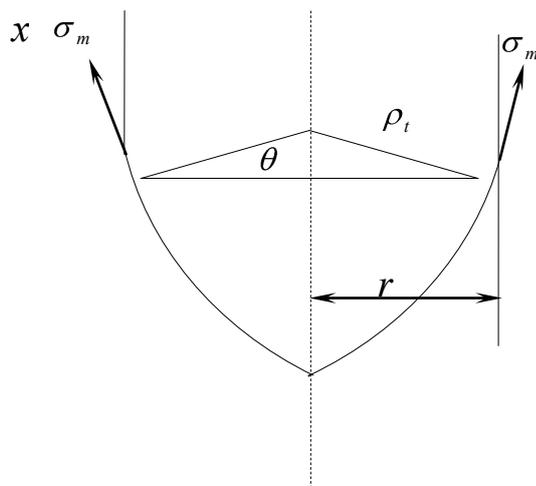


Рис. 3.4

Выделенная часть оболочки находится в равновесии под действием сил, обусловленных внутренним давлением p и меридиональным напряжением, возникающим в стенке оболочки σ_m . Уравнение равновесия будет иметь вид

$$2\pi r t \sigma_m \sin \theta = F_x, \quad (3.3)$$

где F_x – проекция на ось x равнодействующей всех внешних сил.

Откуда меридиональное напряжение

$$\sigma_m = \frac{F_x}{2\pi r t \sin \theta}. \quad (3.4)$$

Таким образом, принятые допущения позволяют свести задачу определения напряжений к статически определимой, когда неизвестные определяются из условий равновесия. Для определения F_x выделим бесконечно малую площадку dA , на которую действует равномерно распределенная нагрузка p (рис. 3.5).

Проекция поверхностной нагрузки на ось x

$$p_x = p dA \cos \theta. \quad (3.5)$$

Проекция элементарной площадки dA на плоскость, перпендикулярную оси x

$$dA' = dA \cos \theta. \quad (3.6)$$

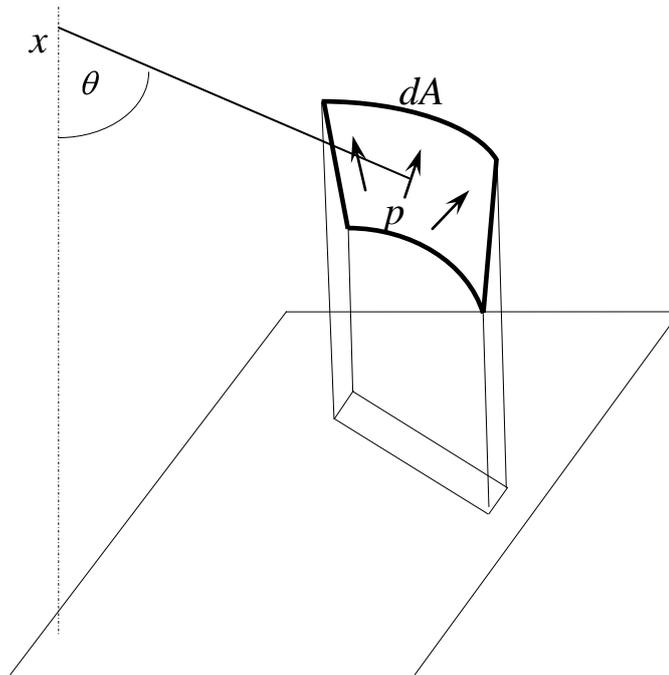


Рис. 3.5

Подставляя (3.6) в (3.5), имеем

$$p_x = p dA'.$$

Следовательно, проекция на ось равнодействующей сил давления, действующей на поверхность оболочки, определяется интегралом, взятым по площади проекции оболочки на плоскость, перпендикулярную оси x . Таким образом, независимо от формы поверхности оболочки проекция равнодействующей сил давления на ось x равна произведению давления на площадь проекции поверхности оболочки на плоскость, перпендикулярную этой оси, т. е.

$$F_x = \int_A p dA' = p \int_A dA' = p A'.$$

Например, для оболочки, находящейся под давлением (рис. 3.6), величина силы F будет равна произведению давления на площадь круга радиусом r , нормального к оси x , т. е. $F_x = p \cdot \pi r^2$; для оболочки заполненной жидкостью и находящейся под давлением p (рис. 3.7), сила F будет суммой

$$F_x = \gamma \cdot V + p \cdot \pi r^2$$

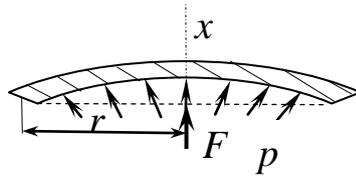


Рис. 3.6

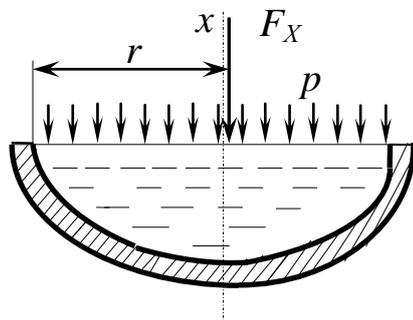


Рис. 3.7

3.2. Некоторые примеры расчета оболочек по безмоментной теории

Цилиндрическая оболочка, находящаяся под внутренним избыточным давлением p (рис. 3.8). В этом случае $\rho_m \rightarrow \infty$; $\rho_t = R$. Тогда из формулы Лапласа (3.2) имеем

$$\frac{\sigma_t}{R} + \frac{\sigma_m}{\infty} = \frac{p}{t}, \quad (3.7)$$

где t – толщина стенки оболочки.

Из (3.7) следует

$$\sigma_t = \frac{pR}{t}. \quad (3.8)$$

Определим меридиональное напряжение $\sigma_m = \sigma_x$. Очевидно, оно вызывается силой давления p на крышки цилиндра $\pi R^2 \cdot p$. Условие равновесия будет иметь вид

$$\sigma_m \cdot 2\pi R \cdot t = \pi R^2 \cdot p,$$

откуда

$$\sigma_m = \frac{pR}{2t}. \quad (3.9)$$

Сравнивая уравнения (3.8) и (3.9), видим, что окружные напряжения в два раза больше, чем меридиональные (осевые). Этим и объясняется наблюдаемые на практике разрушения цилиндрических оболочек с образованием трещин вдоль образующих цилиндра.

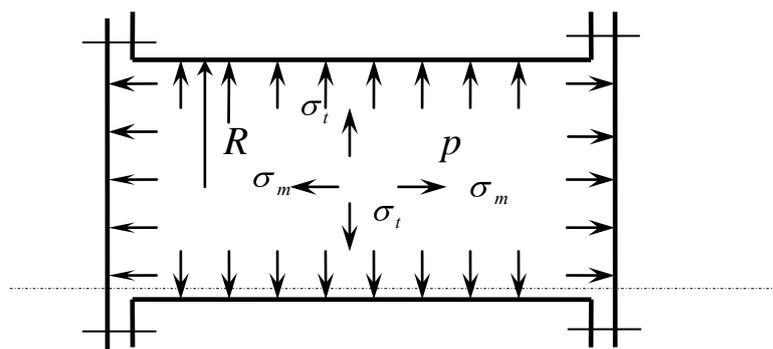


Рис. 3.8

Сферическая оболочка. Для сферической оболочки, находящейся под внутренним давлением p (рис. 3.9)

$$\sigma_m = \sigma_t = R,$$

уравнение Лапласа имеет вид

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{pR}{2t}. \quad (3.10)$$

Из формулы (3.10) следует, что сферическая оболочка в два раза прочнее цилиндрической, т. е. сферическая форма наиболее целесообразна для сосудов под давлением. На практике по различным

соображениям чаще используют резервуары цилиндрической формы с днищами эллиптической или сферической формы. При этом наиболее предпочтительными считаются: угол между осью цилиндрической части и нормалью к оболочке в месте их стыка θ (см. рис. 3.4) порядка 53° ; высота днища, равная примерно половине диаметра D цилиндрической части; радиус сферы $R_{\text{сф}} = 5D/8$.

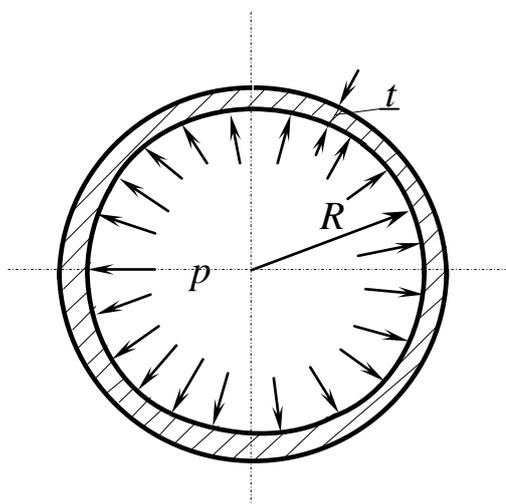


Рис. 3.9

Материал оболочки находится в сложном напряженном состоянии (плоском), поэтому для проверки его прочности следует использовать одну из теорий прочности. Наиболее употребительными в этом случае являются III и IV теории прочности.

Условие прочности
по четвертой теории прочности

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_t^2 - \sigma_m \sigma_t} \leq [\sigma];$$

по третьей теории прочности

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_t \leq [\sigma].$$

Если требуется подобрать толщину оболочки t , то вначале приближенно определяют t по наибольшему главному напряжению, а затем полученная величина проверяется по одной из теорий прочности. Если в условиях эксплуатации материал оболочки может подвергаться коррозии или ударным нагрузкам, то толщину оболочки увеличивают на 1–2 мм.

3.3. Расчет распорных колец

Резервуары для жидких и газовых сред, как правило, изготавливают цилиндрической формы со сферическим или эллиптическим дном. В области соединения сферического дна с цилиндрической частью возникает значительная радиальная составляющая F_r меридиональной силы, передаваемой от дна на цилиндрическую образующую (рис. 3.10). Это вызывает изгиб стенки сосуда. Поэтому с целью снижения изгибающих усилий на торце цилиндра устанавливают распорное кольцо, воспринимающее сжимающие усилия и устраняющее напряжения изгиба.

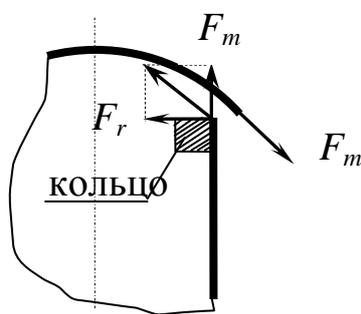


Рис. 3.10

Рассмотрим оболочку, меридиональные сечения которой не являются плавными кривыми, а образованы прямыми и имеют излом в сечении $A-A$ (рис. 3.11, а).

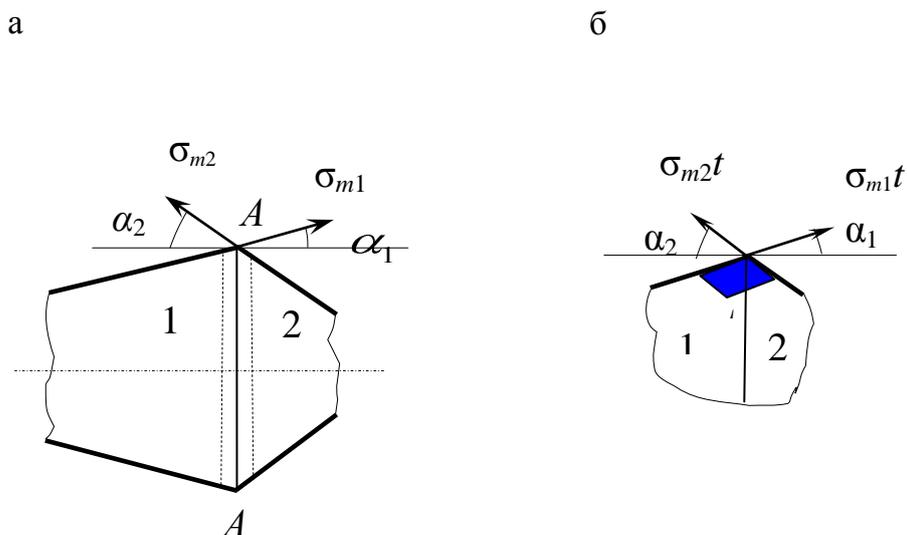


Рис. 3.11

Касательные к меридиональной линии слева и справа от сечения $A-A$ образуют между собой угол $180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)$. Меридиональное напряжение в сечении, образованном конической поверхностью тела 1, обозначим σ_{m1} , тела 2 – соответственно σ_{m2} , толщину стенок обеих оболочек примем одинаковой и равной t .

Уравнение равновесия сил для кольца высотой, равной единице, в сечении $A-A$ будет иметь вид

$$F_{1m} = \sigma_{m1} t \cos \alpha_1 \cdot 2\pi r = F_{2m} = \sigma_{m2} t \cos \alpha_2 2\pi r,$$

откуда

$$\sigma_{m1} t \cos \alpha_1 = \sigma_{m2} t \cos \alpha_2. \quad (3.11)$$

Из уравнения (3.11) следует, что проекции сил на ось оболочки уравниваются. Сумма проекций всех сил на плоскость, перпендикулярную оси оболочки, дает радиальную распределенную составляющую F_r , сжимающую оболочку в сечении $A-A$:

$$F_r = \sigma_{m1} t \sin \alpha_1 + \sigma_{m2} t \sin \alpha_2.$$

Радиальная нагрузка F_r вызывает в оболочке напряжения изгиба. Распорные кольца (рис. 3.12) воспринимают радиальную составляющую и предотвращают появление изгибающих моментов в оболочке.

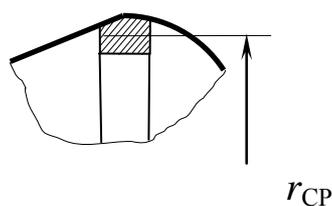


Рис. 3.12

Для определения сжимающего усилия в кольце разрежем кольцо плоскостью, нормальной к оси, выделим часть срединной окружности и рассмотрим условие равновесия ее верхней части (рис. 3.13).

Проецируя все силы на ось x , имеем

$$2F_C - F_r \cdot 2r_C = 0,$$

откуда $F_C = F_r r_{CP}$, здесь r_{CP} – радиус срединной поверхности кольца, который для тонкостенных сосудов можно принять равным внутреннему или наружному радиусу сосуда.

Сжимающее напряжение в кольце будет равно

$$\sigma = -F_C r_C / A, \quad (3.12)$$

где A – площадь поперечного сечения кольца.

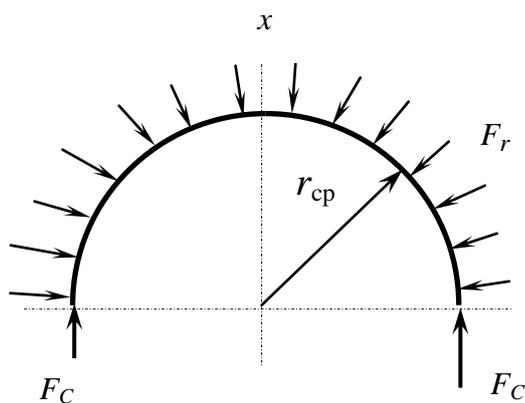


Рис. 3.13

Заметим, что на практике в качестве распорного кольца часто используют утолщение оболочки, отгибая края оболочки внутрь центральной части (рис. 3.14).

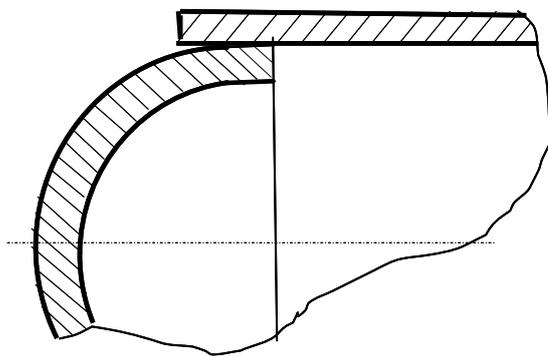


Рис. 3.14

Пример 25. Определить минимальную толщину стенки кислородного баллона диаметром 350 мм, если избыточное давление газа 150 ати. Допускаемое напряжение принять $[\sigma] = 120$ МПа.

Решение. Поскольку окружное напряжение σ_t для цилиндрической оболочки в 2 раза больше, чем меридиональное σ_m , определяем окружное напряжение:

$$\sigma_t = \frac{pR}{t} = \frac{150 \cdot 9,81 \cdot 35}{2t}.$$

Условие прочности по третьей теории прочности

$$\sigma_t = \frac{pR}{t} \leq \sigma,$$

откуда толщина цилиндрических стенок баллона

$$t = \frac{pR}{\sigma} = \frac{150 \cdot 9,81 \cdot 35}{120 \cdot 10^2 \cdot 2} = 2,14 \text{ см} = 21,4 \text{ мм}.$$

Меридиональное напряжение

$$\sigma_m = \frac{pR}{2t} = \frac{150 \cdot 9,81 \cdot 35}{4 \cdot 2,14} = 6017 \text{ Н/см}^2 \cong 60,2 \text{ МПа}.$$

Следует заметить, что толщина стенок баллона должна быть несколько больше, поскольку в процессе эксплуатации он может подвергаться ударным нагрузкам и коррозии.

Пример 26. Бак для воды водонапорной башни наполнен до высоты $h = 8$ м, радиус цилиндрической части $r = 3$ м, радиус сферического днища $R = 4$ м, угол $\alpha = 53^\circ$, толщина стенок $t = 0,8$ см. Определить максимальные окружные и меридиональные напряжения в цилиндрической и сферической частях бака, а также сжимающее усилие в распорном кольце и его площадь поперечного сечения (рис. 3.15). Принять: удельный вес воды $\gamma = 1000 \text{ кг/м}^3$; допускаемое напряжение на растяжение $\sigma = 160$ МПа.

На рис. 3.15 обозначены: $\sigma_{mц}$ – меридиональное напряжение в цилиндрической части емкости; $\sigma_{мс}$ – то же, для сферического днища.

Решение. Вес жидкости в сосуде

$$G = \left[\pi r^2 h_1 + \pi (R-l)^2 \left(R - \frac{1}{3} (R-l) \right) \right] \gamma,$$

где

$$l = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = 2,65 \text{ м};$$

$$H = R - l = 4 - 2,65 = 1,35 \text{ м}; \quad h_1 = h - H = 8 - 1,35 = 6,65 \text{ м};$$

$$G = \left[3,14 \cdot 3,0^2 \cdot 6,65 + 3,14 \cdot 1,35^2 \cdot \left(4 - \frac{1,35}{3} \right) \right] \cdot 10000 = 1950000 \text{ Н}.$$

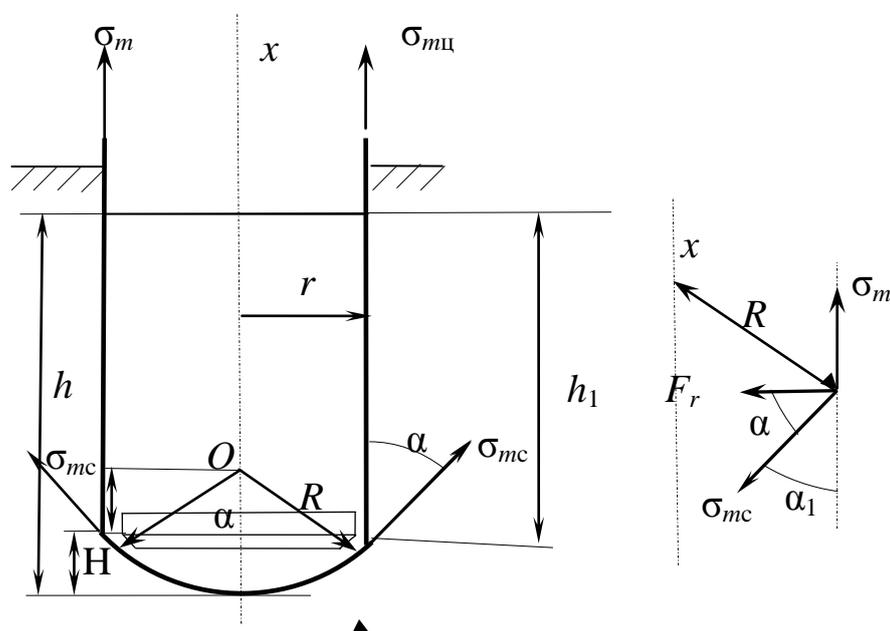


Рис. 3.15

Напряжение в цилиндрической части сосуда

$$\sigma_{\text{мц}} = \frac{G}{2\pi r t} = \frac{1950000}{2 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 8} = 12,94 \text{ Н / мм}^2 = 12,94 \text{ МПа};$$

$$\sigma_t^{\text{max}} = \frac{h_1 \gamma r}{t} = \frac{665 \cdot 0,001 \cdot 9,81 \cdot 300}{0,8} = 2446 \text{ Н / см}^2 \cong 24,5 \text{ МПа}.$$

Максимальное напряжение в сферическом днище будет на дне резервуара, где действует наибольшее давление столба жидкости.

Согласно уравнению Лапласа (3.2), имеем

$$\sigma_{mc} = \sigma_{tc} = \frac{h\gamma R}{2t} = \frac{800 \cdot 0,001 \cdot 9,81 \cdot 400}{2 \cdot 0,8} = 1962 \text{ Н / см}^2 = 19,62 \text{ МПа}.$$

Меридиональное напряжение в сферической части σ_{mc} находится из условия равновесия меридиональных усилий и весом столба жидкости, т. е.

$$G = \sigma_{mc} 2\pi r t \cos \alpha_1,$$

откуда

$$\sigma_{mc} = \frac{G}{2\pi r t \cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{1950000}{2 \cdot 3,14 \cdot 300 \cdot 0,8 \cdot \sin 53^\circ} = 1621 \text{ Н / см}^2 = 16,2 \text{ МПа}.$$

Радиальная нагрузка F_r в распорном кольце

$$F_r = \sigma_{mc} t \sin(90^\circ - \alpha) = 1621 \cdot 0,8 \cdot \sin 37^\circ = 712 \text{ Н / см}.$$

Принимая внешний радиус распорного кольца равным $R_k = r = 3,0$ м, определяем необходимую площадь поперечного сечения кольца. Согласно (3.12),

$$A_k = F_r R_k / [\sigma] = 712 \cdot 300 / 16000 = 13,35 \text{ см}^2.$$

При толщине распорного кольца, например, 12 мм высота кольца (его ширина) будет

$$b = \frac{A_k}{1,2} = 13,35 / 1,2 \cong 11,1 \text{ см}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1976. – С.608.

Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. 4-е изд., перераб. – М.: Высш. шк., 1975. – 654 с.

Макаров Е.Г. Сопротивление материалов на базе Mathcad. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 512 с.

Степин П.А. Сопротивление материалов: Учеб. для машиностроительных спец. вузов. 9-е изд., испр. – М.: Интеграл-Пресс, 1997. – 320 с.

Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т. 1. Элементарная теория и задачи. 2-е изд., стереотип. / Пер. с англ. В.Н. Федорова. – М.: Наука, 1965. – 363 с.

Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ.....	4
1.1. Определение перемещений по теореме Кастильяно	10
1.2. Применение теоремы Кастильяно к определению упругих перемещений в стержневых системах	12
1.3. Метод фиктивных сил при определении перемещений.....	18
1.4. Теорема о взаимности работ и перемещений.....	21
1.5. Теорема Максвелла–Мора и ее применение для расчета перемещений.....	23
1.6. Порядок расчета перемещений по методу Максвелла–Мора	25
1.7. Способ Верещагина	32
1.8. Статически неопределимые системы.....	39
1.9. Использование свойств симметрии при раскрытии статической неопределимости систем	45
1.10. Алгоритм расчета статически неопределимых систем	47
2. ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ	53
2.1. Примеры решения задач движения с постоянным ускорением.....	53
2.2. Критическая скорость вращения вала.....	58
2.3. Колебания упругих систем.....	61
2.4. Основы технической теории удара	70
3. РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПО БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ.....	87
3.1. Напряжения в осесимметричной оболочке по безмоментной теории	88
3.2. Некоторые примеры расчета оболочек по безмоментной теории	92
3.3. Расчет распорных колец.....	95
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	101

Мамченко Валерий Олегович
Деменчук Николай Павлович

ОТДЕЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

Учебно-методическое пособие

Ответственный редактор
Т.Г. Смирнова

Титульный редактор
Е.О. Трусова

Компьютерная верстка
Н.В. Гуральник

Дизайн обложки
Н.А. Потехина

Печатается
в авторской редакции

Подписано в печать 26.12.2016. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 6,05. Печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 6,25
Тираж 30 экз. Заказ № С 65

Университет ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
Издательско-информационный комплекс
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9