

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.Ю. Григорьев, К.А. Григорьев, Д.П. Малявко

**КОЛЕБАНИЯ И ВИБРОАКТИВНОСТЬ
ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН**

Учебное пособие

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

Санкт-Петербург

2016

УДК 621.031(075.80)

ББК 22.21

Г 83

Григорьев А.Ю., Григорьев К.А., Малявко Д.П. Колебания и виброактивность элементов машин: Учеб. пособие. – СПб.: Университет ИТМО, 2016. – 136 с.

Учебное пособие написано на основе лекций, читаемых в течение ряда лет. Основное внимание уделено теории колебаний одно- и многомассовых систем, теории линейных колебаний. Приводятся краткие сведения из теории нелинейных колебаний. Положения теории проиллюстрированы примерами из практики.

Предназначено для самостоятельной работы магистрантов направления 16.04.03 Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения, 23.04.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов при изучении дисциплин «Колебания элементов машин» и «Виброактивность» очной и заочной форм обучения.

Рецензенты: ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова» (доктор техн. наук, проф. М.А. Колосов; кандидат техн. наук, доц. К.П. Моргунов); доктор техн. наук, проф. Л.К. Горшков (Экологический институт)

Рекомендовано к печати Советом факультета холодильной, криогенной техники и кондиционирования, протокол № 9 от 10. 05.2016 г.



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 – 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2016

© Григорьев А.Ю., Григорьев К.А., Малявко Д.П., 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
I. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ	6
1. Понятие о силе упругости	6
2. Экспериментальное определение коэффициента жёсткости	7
3. Горизонтальные гармонические колебания груза на пружине	8
4. Вертикальные колебания груза на пружине	13
II. КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ	15
1. Свободные колебания консервативной системы с одной степенью свободы	15
2. Свободные затухающие колебания груза на пружине	23
3. Вынужденные колебания без сопротивлений	30
4. Чисто вынужденные колебания груза при резонансе	38
5. Простейший виброграф	40
6. Случай периодического негармонического возмущения ..	41
7. Биения	44
8. Движение груза на пружине под действием возмущения произвольного вида	46
9. Вынужденные колебания с сопротивлением	48
III. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ	55
1. Кинетическая и потенциальная энергия системы вблизи положения устойчивого равновесия	55
2. Движение консервативной системы с двумя степенями свободы в окрестности устойчивого положения равновесия	58
3. Примеры свободных колебаний материальной системы с двумя степенями свободы	65
4. Вынужденные колебания материальной системы с двумя степенями свободы	70
5. Колебания вращающихся валов	73
6. Свободные колебания вала околостационарного положения	77
7. Колебания вращающегося горизонтального вала с учётом веса диска	80

IV. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ	83
1. Свободные колебания системы с несколькими степенями свободы	83
2. Вынужденные колебания системы с несколькими степенями свободы	87
3. Колебания цепочки упругосвязанных тел	89
V. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ	97
1. Продольные и крутильные колебания стержней	97
2. Понятие о бегущих волнах	100
3. Понятие о стоячих волнах	102
4. Свободные колебания стержней конечных размеров	103
5. Поперечные колебания балок	108
6. Собственные колебания однородной балки	112
VI. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ	117
1. Колебания нелинейных механических систем	117
2. Свободные колебания груза на пружине при наличии сил сухого (кулонова) трения	117
3. Понятие о фрикционных автоколебаниях	122
4. Метод медленно меняющихся амплитуд	125
5. Колебания при нелинейной характеристике упругой силы	131
6. Решение задачи о колебаниях методом гармонического баланса	132

ВВЕДЕНИЕ

Теория колебаний и виброактивность изучают механические колебания или вибрации элементов машин и механизмов. Механические колебания могут быть и полезными, и вредными. Вибрации, возникающие при работе механизма, с одной стороны, могут ухудшить технологические и прочностные условия его работы. С другой стороны, в промышленности широкое распространение находят вибрационные машины транспортного и другого назначения, такие как питатели, концентрационные столы, транспортёры и др. Все они используют принцип вибрационного перемещения материала.

Теория колебаний разрабатывает аналитические методы, использование которых необходимо для динамического описания всех этих машин.

Теория колебаний широко использует методы теоретической механики, высшей математики, в том числе качественной теории дифференциальных уравнений.

I. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

1. Понятие о силе упругости

Рассмотрим металлическую винтовую пружину, подвешенную к горизонтальной неподвижной поверхности (рис. 1). Пусть l_0 – длина недеформированной пружины, l – длина деформированной (растянутой) пружины, $\lambda = l - l_0$ – деформация растяжения. Как показывает опыт, при деформации пружины возникает упругая сила \overline{F} , стремящаяся вернуть пружину в исходное недеформированное состояние. Эту силу ещё называют *восстанавливающей силой*. Величина данной силы в случае малых деформаций ($\lambda \ll l_0$) пропорциональна величине деформации λ и может быть определена из математического выражения закона Гука:

$$F = c \cdot \lambda, \quad (1)$$

где c – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом жёсткости пружины.

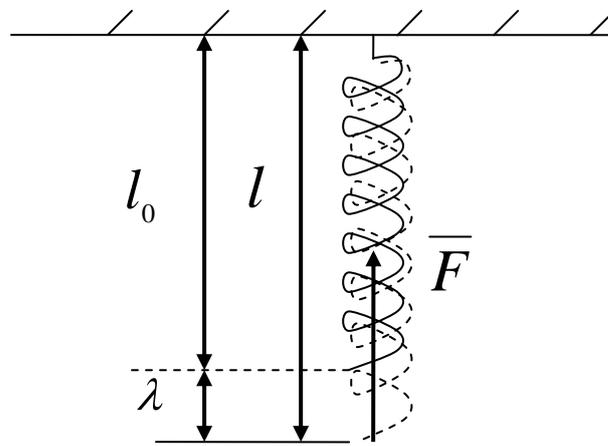


Рис. 1

Очевидно, что размерность коэффициента жесткости:

$$[c] = \frac{H}{m} = \frac{c_u}{c^2} = \frac{c \Gamma}{m}.$$

Коэффициент жёсткости c является упругой характеристикой пружины и в основном зависит от материала, из которого она изготовлена, и её геометрических размеров.

Силу \vec{F} из выражения (1) называют *линейной восстанавливающей силой*, так как она пропорциональна первой степени отклонения точки от равновесного положения.

2. Экспериментальное определение коэффициента жёсткости

Пусть имеется вертикальная пружина (рис. 2), точка O – точка конца пружины в недеформированном состоянии.

1. Подвесим к пружине тело массой m и, соответственно, весом $P = mg$.

2. Подождём, пока колебания затухнут. Пусть точка A – конец пружины с подвешенным грузом. Измерим деформацию пружины:

$$\lambda_{CT} = OA.$$

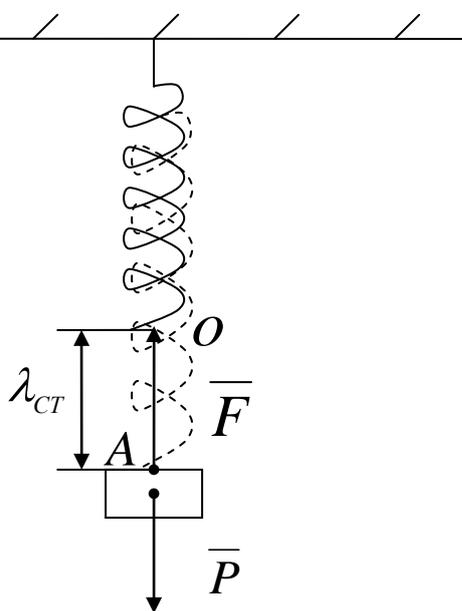


Рис. 2

3. Из условия равновесия груза силы \vec{P} и \vec{F} такие, что $\vec{P} = -\vec{F}$ и, следовательно, $P = F$.

4. Тогда из закона Гука получим, что

$$P = c \cdot \lambda_{ст} \Rightarrow c = \frac{P}{\lambda_{ст}}. \quad (2)$$

Таким образом, коэффициент жёсткости c равен весу груза, делённому на статическую деформацию пружины, вызванную этим грузом.

3. Горизонтальные гармонические колебания груза на пружине

Рассмотрим тело массой m , лежащее на абсолютно гладкой горизонтальной поверхности (рис. 3). С помощью горизонтальной пружины с коэффициентом жёсткости c тело прикреплено к вертикальной стенке.

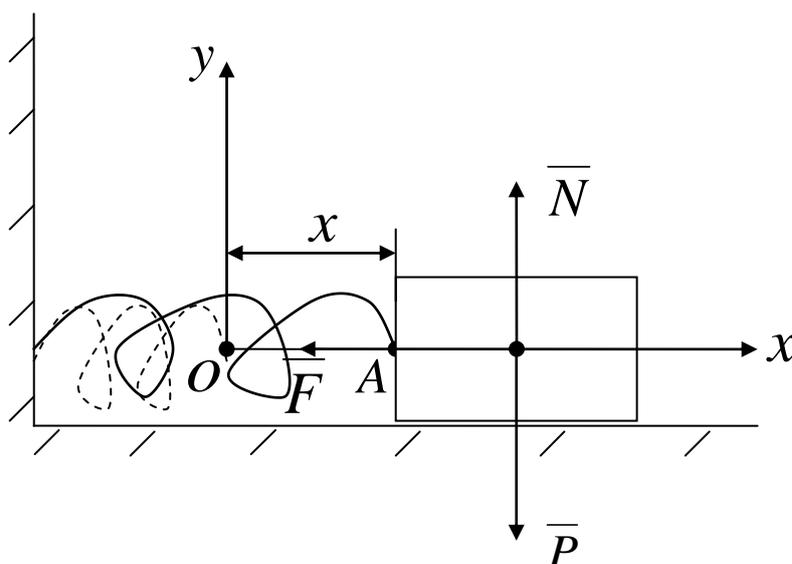


Рис. 3

Введём прямоугольную декартовую плоскую систему координат Oxy с началом в точке O – положения конца недеформированной пружины. С учётом выбранной системы координат $x = OA = \lambda$ – это одновременно и x -я координата положения груза, и текущая деформация пружины λ . Пусть в какой-то момент времени тело было сдвинуто из равновесного положения точки O . Рассмотрим

силы, действующие на груз. Это \bar{P} – сила веса груза, \bar{N} – нормальная реакция гладкой поверхности, \bar{F} – упругая сила пружины.

Трением о поверхность (так как она гладкая) и сопротивлением воздуха пренебрегаем. Как видно из рисунка, силы \bar{P} и \bar{N} проекции на ось x не имеют, т. е. $P_x = N_x = 0$.

На ось x в полную величину проецируется упругая восстанавливающая сила пружины \bar{F} , проекция которой на ось x будет равна

$$F_x = \begin{cases} -c|x| = -cx, & \text{если } x > 0 \text{ – пружина растянута;} \\ c|x| = c(-x), & \text{если } x < 0 \text{ – пружина сжата,} \end{cases}$$

т. е. при любом x проекция силы F на ось x определяется формулой

$$F_x = -cx. \quad (3)$$

Зная F_x , составим дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\ddot{x} = -cx \quad \text{или} \quad m\ddot{x} + cx = 0. \quad (4)$$

Так как на тело вдоль оси x не действуют никакие другие силы, кроме линейной восстанавливающей силы F_x , то уравнение (4) называется *дифференциальным уравнением свободных колебаний груза (тела) на пружине*.

Введём обозначение $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$, тогда уравнение (4) переписется в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (5)$$

где k называется круговой частотой колебаний; в дальнейшем будет ясно, почему этот параметр имеет такое название.

Как видно, уравнение (5) – это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Решается оно обычным приёмом составления характеристического уравнения, т. е. решение этого уравнения ищем в виде $x = \ell^{r \cdot t}$; тогда, подставляя это

решение в уравнение (5), получим $r^2 \ell^{rt} + k^2 \ell^{rt} = 0$, откуда следует характеристическое уравнение

$$r^2 + k^2 = 0 \Rightarrow r = \pm k \cdot i \quad (i = \sqrt{-1})$$

(его корни чисто мнимые).

Следовательно, общее решение уравнения (5) имеет вид

$$x = C_1 \cdot \cos kt + C_2 \cdot \sin kt, \quad (6)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные интегрирования, значения которых определяются из начальных условий. Так, пусть задано, что в начальный момент времени $t_0 = 0$, пружина была растянута на величину x_0 и грузу толчком сообщили начальную скорость \dot{x}_0 .

Таким образом, начальные условия следующие: $t_0 = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$.

Подставим в выражение (6) значение времени $t_0 = 0$, тогда получим

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0), \text{ но } \sin(0) = 0, \text{ а } \cos(0) = 1 \Rightarrow \\ x_0 &= C_1 \cdot 1 \Rightarrow C_1 = x_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Продифференцируем выражение (6) по времени:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (8)$$

Подставим в это уравнение $t = 0$ и получим

$$\dot{x}_0 = -C_1 k \sin(0) + C_2 k \cos(0) \Rightarrow C_2 k = \dot{x}_0 \Rightarrow C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}. \quad (9)$$

С учётом выражений (7) и (9) решение (6) запишется в виде

$$x = x_0 \cdot \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \cdot \sin kt. \quad (10)$$

Преобразуем это выражение. Введём новые обозначения:

$$x_0 = a \cdot \sin \alpha; \quad \frac{\dot{x}_0}{k} = a \cdot \cos \alpha. \quad (11)$$

Откуда получаем, что

$$x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2} = a^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \Rightarrow a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}; \quad (12)$$

$$\frac{a \cdot \sin \alpha}{a \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{x}_0 \cdot k}{x_0}. \quad (13)$$

С учётом выражений (11) выражение (10) запишется в виде

$$x = a (\sin \alpha \cdot \cos kt + \cos \alpha \cdot \sin kt) = a \sin (kt + \alpha), \quad (14)$$

где a и α определяются из выражений (12) и (13).

Движение материальной точки, заданное выражением (14), называется *гармоническими колебаниями*.

Так как $-1 \leq \sin (kt + \alpha) \leq 1$, то $-a \leq x \leq a$. Следовательно, с изменением времени t продольная координата груза x изменяется в пределах от $(-a)$ до $(+a)$ и полный размах колебаний достигает величины $2a$.

Величина a , равная полуразмаху колебаний, называется *амплитудой колебаний*.

Как видно из выражения (12), амплитуда свободных колебаний зависит только от начальных условий движения.

Переменная величина $\varphi = kt + \alpha$ называется *фазой колебаний*, $\alpha = \varphi /_{t=0}$ – *начальной фазой* колебаний, она зависит только от начальных условий движения (13).

Определение: *движение материальной точки называется периодическим, если через некоторый промежуток времени T значения и координаты положения точки и её скорости повторяются.*

Для гармонических колебаний материальной точки, описываемых выражением (14), скорость точки в любой момент времени определится выражением

$$\dot{x} = a \cdot k \cdot \cos(kt + \alpha). \quad (15)$$

Мы знаем, что функции синуса и косинуса, входящие в выражения (14) и (15), являются периодическими с периодом 2π , следовательно, значения координаты x и скорости \dot{x} будут повторять свои значения при изменении фазы колебаний на величину 2π . Отсюда можно определить период колебаний:

$$k(t + T) + \alpha = kt + \alpha + 2\pi. \quad (16)$$

Следовательно, свободные гармонические колебания материальной точки являются периодическими, с периодом T , величина которого может быть определена из выражения (16):

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Так как период T – это время, через которое координата положения точки и её скорость повторяются, то для колебательного движения период T – это время одного полного колебания материальной точки.

Вспоминая, что $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$, получим

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (17)$$

Тогда материальная точка за единицу времени совершит $f = \frac{1}{T}$ колебаний. Величину f называют *частотой колебаний*, размерность

$$[f] = Гц = \frac{КОЛ}{с}.$$

Величина

$$k = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (18)$$

называется *круговой частотой колебаний*, размерность $[k] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

4. Вертикальные колебания груза на пружине

Прикрепим груз весом P к концу вертикально подвешенной пружины (рис. 4), один конец которой закреплён на неподвижной горизонтальной поверхности.

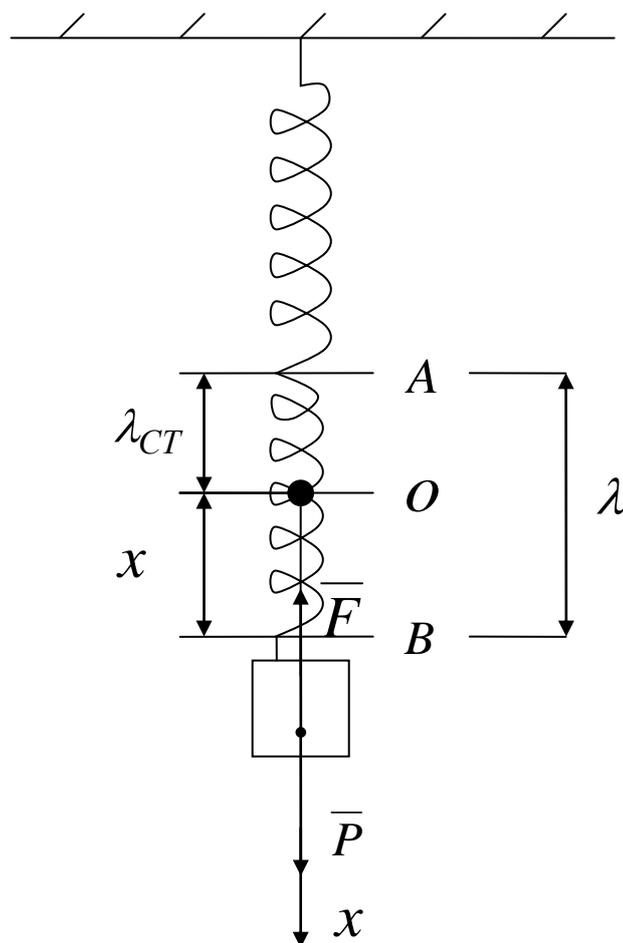


Рис. 4

Пусть точка A – точка конца недеформированной пружины, точка O – конец статически деформированной пружины грузом P , т. е. то положение конца пружины, когда тело не движется, а сила тяжести уравнивается восстанавливающей силой упругости $P = \lambda_{CT} \cdot c$.

Точка B – текущее положение конца деформированной пружины при колебаниях груза. Тогда, согласно закону Гука,

$$OA = \lambda_{CT} = \frac{P}{c} \text{ – статическая деформация пружины.}$$

Введём ось Ox с началом в точке O , направленную вертикально вниз. Тогда $OB = x$ – динамическая деформация пружины, равная (с учётом нашего выбора оси Ox) текущей координате положения груза. Составим уравнение движения груза, при этом не учитываем сопротивление воздуха и другое:

$$m\ddot{x} = P_X + F_X, \text{ где } P_X = P, \text{ а } F_X = -c\lambda = -c(\lambda_{CT} + x);$$

$$\lambda = AB = OA + OB = \lambda_{CT} + x \text{ – полная деформация пружины.}$$

Тогда получаем

$$m\ddot{x} = P - c(\lambda_{CT} + x) \Rightarrow P - c \cdot \lambda_{CT} - cx,$$

но $\lambda_{CT} = \frac{P}{c} \Rightarrow$ получаем уравнение вертикальных колебаний груза на пружине:

$$m\ddot{x} + cx = 0. \tag{19}$$

Если уравнение (19) сравнить с уравнением (4), можно увидеть, что дифференциальное уравнение вертикальных колебаний совпадает с дифференциальным уравнением горизонтальных колебаний. Поэтому вертикальные колебания также носят гармонический и периодический характер и для них справедливы все соотношения, полученные в предыдущем подразделе.

II. КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

1. Свободные колебания консервативной системы с одной степенью свободы

Механическая система называется *консервативной*, если на неё действуют только потенциальные силы. Предполагается, что на систему при этом наложены только идеальные, двухсторонние и стационарные связи. Последнее означает, что в уравнения связей время явно не входит.

При движении консервативной системы выполняется закон сохранения полной механической энергии:

$$T + \Pi = \text{const}, \quad (20)$$

где $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$ – кинетическая энергия системы; Π – потенциальная энергия.

В рамках теоретической механики любая система рассматривается как совокупность n материальных точек, причём каждая i -я материальная точка имеет свою массу m_i и скорость \vec{v}_i .

Так как система имеет только одну степень свободы, то, следовательно, и одну обобщённую координату q , задание которой однозначно определяет мгновенное положение всех точек системы в пространстве. Возьмём, например, кривошипно-шатунный механизм (рис. 5, а). Зная угловую координату φ кривошипа, можно указать положения всех точек этого механизма. Значит, φ можно принять за обобщённую координату. Отсюда следует, что радиус-вектор i -й точки системы является векторной функцией обобщённой координаты (см. рис. 5, б):

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q). \quad (21)$$

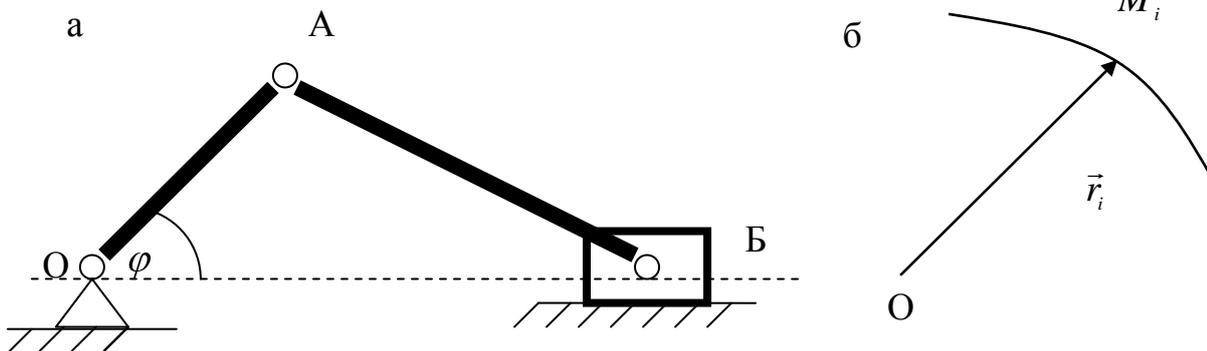


Рис. 5

На рис. 5, б точка O – некоторый неподвижный центр, M_i – мгновенное положение i -й точки на траектории, $\vec{r}_i = OM_i$ – радиус-вектор этой точки.

Обобщённая координата является скалярной функцией времени:

$$q = q(t). \quad (22)$$

Равенства (21) и (22) определяют радиус-вектор как сложную функцию времени, при этом обобщённая координата q является промежуточным аргументом.

Для скорости i -й точки имеем

$$\vec{v}_i = \frac{d \vec{r}_i}{d t}.$$

Согласно правилу дифференцирования сложной функции, получим

$$\vec{v}_i = \frac{d \vec{r}_i}{d q} \dot{q}. \quad (23)$$

Точкой сверху традиционно обозначается дифференцирование скалярных величин по времени ($\dot{q} = \frac{dq}{dt}$). Подставим выражение (23) в формулу для кинетической энергии материальной системы:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{d \bar{r}_i}{d q} \right)^2 \dot{q}^2. \quad (24)$$

Введём обозначение

$$\sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{d \bar{r}_i}{d q} \right)^2 = A. \quad (25)$$

Скалярная величина A определяется после выполнения соответствующих операций (25) по всем точкам системы. Она является функцией обобщённой координаты $A = A(q)$ и называется *обобщённым инерционным коэффициентом* системы. Таким образом, из (24) с учётом (25) получаем

$$T = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2. \quad (26)$$

Потенциальная энергия системы зависит от положения её точек, а оно определяется значением обобщённой координаты. Значит, можно написать

$$\Pi = \Pi(q) \quad (27)$$

Как известно, потенциальная энергия всегда определяется с точностью до постоянного слагаемого, которое условимся выбирать так, чтобы

$$\Pi(q) = 0. \quad (28)$$

Обобщённая сила в случае консервативной системы, согласно одному из способов ее вычисления в аналитической механике, может быть представлена в следующем виде:

$$Q = -\frac{d\Pi}{dq}. \quad (29)$$

В положении равновесия системы обобщённая сила обращается в ноль. Условимся координату q отсчитывать от положения равновесия, т. е. считать в этом положении $q = 0$. Из (29) получим

$$\left. \frac{d\Pi}{dq} \right|_{q=0} = 0. \quad (30)$$

Разложим функцию (27) в ряд Маклорена:

$$\Pi = \Pi(0) + \left. \frac{d\Pi}{dq} \right|_{q=0} \cdot q + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\Pi}{dq^2} \right|_{q=0} \cdot q^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3\Pi}{dq^3} \right|_{q=0} \cdot q^3 + \dots \quad (31)$$

Первые два слагаемые, согласно (28) и (30), равны нулю; так как в дальнейшем будем рассматривать движение вблизи равновесного положения $q = 0$, то обобщённую координату можно считать малой. Поэтому основным слагаемым в (31) является квадра-

тичный член, остальными пренебрегаем. Обозначим $\left. \frac{d^2\Pi}{dq^2} \right|_{q=0} = c$,

где c – квазижесткость, тогда с принятой степенью точности из (31) получаем

$$\Pi = \frac{c}{2} q^2. \quad (32)$$

Разложим обобщённый инерционный коэффициент в ряд Маклорена:

$$A(q) = A(0) + \left. \frac{dA}{dq} \right|_{q=0} \cdot q + \dots$$

Сохраним в этом разложении лишь наибольший постоянный член, который обозначим $A(0) = m$. Тогда кинетическая энергия материальной системы (26) переписется так:

$$T = \frac{m}{2} \dot{q}^2. \quad (33)$$

Составим уравнение движения системы в форме Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0. \quad (34)$$

С помощью выражений (32) и (33) выполняем обычную процедуру при составлении уравнений Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = m\ddot{q}; \quad \frac{\partial T}{\partial q} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = c q.$$

Подстановка их в выражение (34) приводит к следующему дифференциальному уравнению движения консервативной системы вблизи положения равновесия:

$$m \ddot{q} + c q = 0. \quad (35)$$

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$m r^2 + c = 0,$$

корни которого, называемые *характеристическими показателями*, определяются по формуле

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{m}}.$$

Инерционный коэффициент m положителен, так как $T > 0$. Следовательно, оба показателя вещественны, если $c < 0$. Это означает, что в положении равновесия потенциальная энергия имеет максимум (рис. 6), вторая производная от потенциальной энергии отрицательна:

$$\left. \frac{d^2 \Pi}{dq^2} \right|_{q=0} = c < 0, \text{ где } c - \text{квазижесткость.}$$

Общий интеграл уравнения (35) запишется в следующем виде:

$$q = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$

Заметим, что $r_1 > 0$, $r_2 < 0$, поэтому $q \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, при $c < 0$ положение равновесия ($q = 0$) является неустойчивым. Напомним, что в этом случае потенциальная энергия достигает максимума. Наоборот, при $c > 0$ в положении равновесия потенциальная энергия достигает минимума, и это положение является устойчивым. Сказанное можно проиллюстрировать на примере маятника (рис. 7).

Если $c > 0$, то $r_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{c}{a}}$, в этом случае материальная система совершает колебания около устойчивого положения равновесия.

Уравнение (35) математически эквивалентно уравнению собственных свободных колебаний груза на пружине (рис. 8):

$$m \ddot{x} + c x = 0, \tag{36}$$

где c – коэффициент жесткости пружины; x – смещение груза от равновесного положения; m – масса груза.

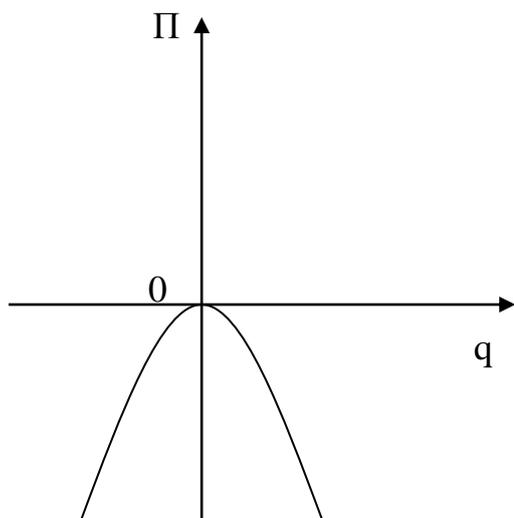


Рис. 6

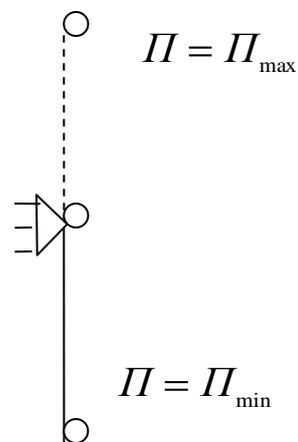


Рис. 7

Уравнения (35) и (36) математически эквивалентны уравнению колебаний электрического тока в LC -контуре (рис. 9):

$$L \ddot{q} + \frac{1}{C} q = 0, \quad (37)$$

где L – индуктивность катушки; C – ёмкость конденсатора; q – количество электричества, прошедшего через сечение проводника.

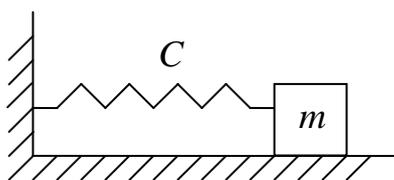


Рис. 8

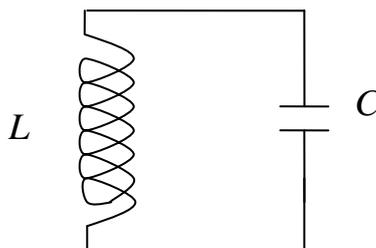


Рис. 9

Эквивалентность уравнений (35)–(37) выражается так:

$$\begin{aligned} m &\leftrightarrow m \leftrightarrow L; \\ c &\leftrightarrow c \leftrightarrow \frac{1}{C}; \\ q &\leftrightarrow x \leftrightarrow q. \end{aligned}$$

Колебания произвольной консервативной системы с одной степенью свободы вблизи положения устойчивого равновесия эквивалентны собственным колебаниям груза на пружине. Эквивалентность электрического уравнения (37) механическим уравнениям (35) и (36) является проявлением электромеханической аналогии. Любой механической системе может быть сопоставлена эквивалентная ей электрическая схема.

На этом основан принцип действия аналоговых вычислительных машин (АВМ).

В силу аналогии с движением груза на пружине колебания данной консервативной системы носят гармонический характер. Как известно, общее решение уравнения (36) имеет вид

$$x = a \cdot \sin(\kappa t + \alpha),$$

где амплитуда колебаний $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\kappa^2}}$; их начальная фаза

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\kappa x_0}{\dot{x}_0}.$$

Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\kappa} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$. Частота колебаний,

измеряемая в Герцах, $f = \frac{1}{T} = \frac{\kappa}{2\pi}$; круговая частота колебаний,

измеряемая в $\frac{1}{\text{сек}}$, $\kappa = \sqrt{\frac{c}{m}}$ называется собственной частотой. По

анalogии для уравнения (35) можем записать

$$q = a \cdot \sin(\kappa t + \alpha),$$

где $a = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{\kappa^2}}$, здесь q_0 , \dot{q}_0 – начальные значения обобщённой координаты и обобщённой скорости; начальная фаза колебаний

$tg\alpha = \frac{\kappa q_0}{\dot{q}_0}$; период колебаний $T = \frac{2\pi}{\kappa} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$; круговая частота

колебаний $f = \frac{1}{T} = \frac{\kappa}{2\pi}$; собственная частота $\kappa = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

Аналогичные формулы описывают колебания тока в LC -контуре. Как видно из соответствующих формул, гармонические колебания являются незатухающими вследствие отсутствия в рассматриваемой модели рассеивания энергии. Наличие сил сопротивления будем учитывать ниже.

2. Свободные затухающие колебания груза на пружине

Действующие на материальную систему силы сопротивления могут иметь различную физическую природу. К ним относятся: силы сухого трения, силы внутреннего рассеивания энергии в материале (гистерезис), силы вязкого сопротивления движению, аэродинамические силы сопротивления и др. Будем изучать влияние на колебания наиболее простых сил вязкого сопротивления. Пусть имеется материальная точка, движущаяся в вязкой среде (рис. 10). Сила сопротивления в этом случае определяется формулой $\bar{R} = -\beta \bar{v}$, где \bar{v} – скорость точки, β – коэффициент вязкого сопротивления, определяемый экспериментально. Он зависит от свойств среды, формы

тела и др. Размерность этого коэффициента $\frac{н\ сек}{м} = \frac{кг}{сек}$.

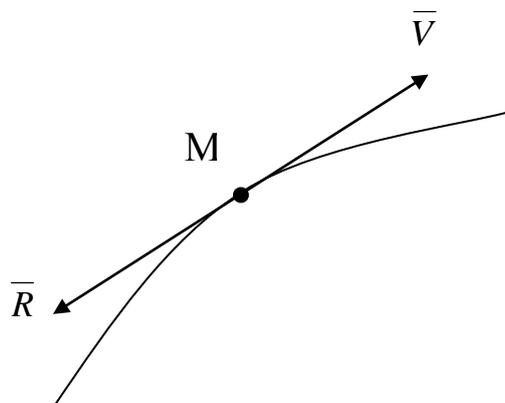


Рис. 10

Для модуля силы сопротивления будем иметь $R = \beta v$. Заметим, что введённая таким образом сила сопротивления возникает при движении тел в жидкости или газе с не очень большими скоростями.

Такого рода сила появляется и при движении поршня с отверстием, погруженного в вязкую жидкость (рис. 11). Это устройство называется демпфером, его будем изображать в таком виде, как на рис. 12, в случае, если присутствует вязкое сопротивление.

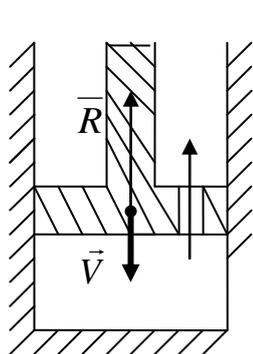


Рис. 11

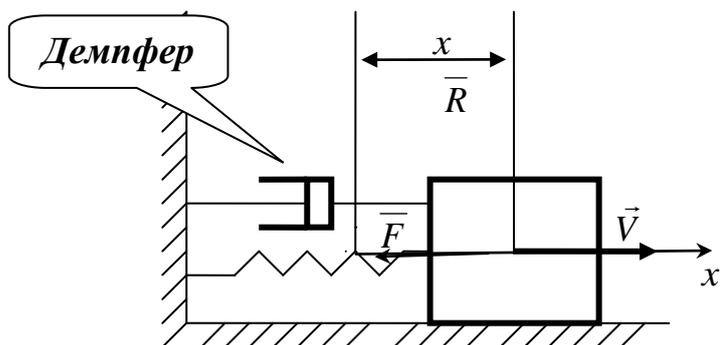


Рис. 12

Рассмотрим колебания груза на пружине при учёте вязкого сопротивления (см. рис. 12). Обозначим через x координату груза, отсчитываемую от положения статического равновесия, \bar{F} — сила упругости пружины. Дифференциальное уравнение движения груза в этом случае имеет вид

$$m \ddot{x} = F_x + R_x. \quad (38)$$

Известно, что $F_x = -c x$. Кроме того, проецируя приведённое выше векторное равенство для силы сопротивления на ось x , получим $R_x = -\beta v_x = -\beta \dot{x}$. Подстановка в (38) даёт

$$m \ddot{x} + \beta \dot{x} + c x = 0. \quad (39)$$

Уравнение (39) математически эквивалентно уравнению колебаний электрического тока в RLC -контуре (рис. 13):

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{q}{C} = 0,$$

где R – активное сопротивление.

Здесь имеет место следующая электромеханическая аналогия:

$$L \leftrightarrow m, \quad R \leftrightarrow \beta, \quad \frac{1}{C} \leftrightarrow c, \quad q \leftrightarrow x.$$

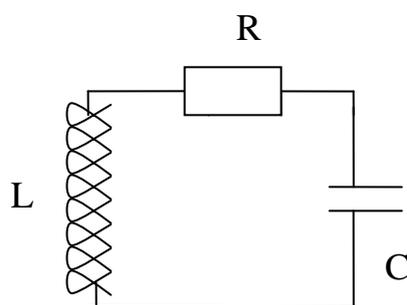


Рис. 13

Разделим левую и правую части выражения (39) на m и введём следующие обозначения: $\kappa = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – собственная частота свободных колебаний груза без учёта сопротивлений, $n = \frac{\beta}{2m}$ – удельный коэффициент сопротивления, отнесённый к удвоенной массе груза, измеряемый в сек^{-1} . Будем иметь

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + \kappa^2 \cdot x = 0. \quad (40)$$

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение имеет вид

$$r^2 + 2n r + \kappa^2 = 0 \quad (41)$$

и следующие корни (характеристические показатели):

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \kappa^2}.$$

Характер общего интеграла уравнения (40) и, соответственно, типы движения груза существенно различны в следующих трёх случаях.

1. Случай большого сопротивления, когда $n > \kappa$, $\beta > 2\sqrt{c \cdot m}$.

Тогда r_1 и r_2 вещественны и отрицательны, причём $r_2 < r_1 < 0$. Общий интеграл уравнения (40) имеет вид

$$x = C_1 \cdot e^{r_1 t} + C_2 \cdot e^{r_2 t}, \quad (42)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

2. Промежуточное критическое сопротивление, когда $n = \kappa$, $\beta = 2\sqrt{c \cdot m}$.

В этом случае получаем кратный отрицательный корень уравнения (41) $r_1 = r_2 = -n < 0$. Общий интеграл уравнения (39) запишется в виде

$$x = (C_1 + C_2 t) \cdot e^{-nt}. \quad (43)$$

Поскольку в обоих случаях характеристические показатели отрицательны, движения, согласно (42) и (43), носят затухающий *неколебательный* характер. Такой закон затухания движения называется *апериодическим*. На рис. 14 показаны возможные графики апериодического движения.

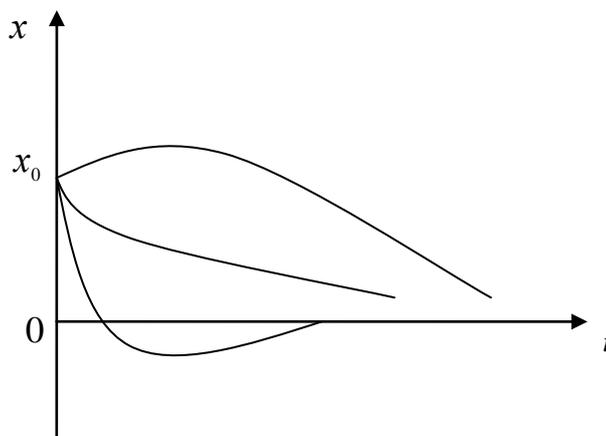


Рис. 14

3. Случай малого сопротивления, когда $n < \kappa$, $\beta < 2\sqrt{c \cdot m}$.
Корни уравнения (41) будут комплексными и сопряжёнными:

$$r_{1,2} = -n \pm \kappa_1 \cdot i,$$

где $\kappa_1 = \sqrt{\kappa^2 - n^2}$, $i = \sqrt{-1}$.

В этом случае общий интеграл уравнения (40) запишется в виде

$$x = e^{-nt} \cdot (C_1 \cos \kappa_1 t + C_2 \sin \kappa_1 t). \quad (44)$$

Продифференцируем левую и правую части выражения (44) по времени:

$$\dot{x} = e^{-nt} [\kappa_1 C_2 - n C_1] \cos \kappa_1 t - (\kappa_1 C_1 + n C_2) \sin \kappa_1 t. \quad (45)$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ пружина деформирована на величину $x = x_0$, а грузу толчком сообщена скорость $\dot{x} = \dot{x}_0$. Подставим эти условия в (44) и (45). Получим

$$\begin{cases} x_0 = C_1; \\ \dot{x}_0 = \kappa_1 C_2 - n C_1, \end{cases}$$

откуда $C_1 = x_0$, $C_2 = \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{\kappa_1}$, и из (44) находим

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos \kappa_1 t + \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{\kappa_1} \sin \kappa_1 t \right). \quad (46)$$

Решение (46) может быть переписано в другой форме:

$$x = a \sin(\kappa_1 t + \alpha), \quad (47)$$

причём для определения амплитуды a и начальной фазы колебаний α имеем

$$a = e^{-nt} \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\kappa_1} \right)^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\kappa_1 x_0}{\dot{x}_0 + nx_0}.$$

Отметим, что амплитуда убывает со временем по экспоненциальному закону. Начальная фаза постоянна. Характер движения в соответствии с (47) имеет вид колебаний с экспоненциально убывающей амплитудой (рис. 15). Круговая частота данных колебаний κ_1 с увеличением сил сопротивления уменьшается, соответственно, период с ростом сопротивления увеличивается:

$$T = \frac{2\pi}{\kappa_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa^2 - n^2}}. \quad (48)$$

Отношение двух последовательных максимальных отклонений в одну сторону называется декрементом колебаний:

$$\Delta = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a(t)}{a(t+T)}$$

откуда $\Delta = e^{nT}$. Обычно используют логарифмический декремент колебаний:

$$\delta = e_n \Delta = nT = \frac{2\pi n}{\sqrt{\kappa^2 - n^2}},$$

откуда

$$n = \frac{\delta \kappa}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{2\delta \sqrt{c m}}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}. \quad (49)$$

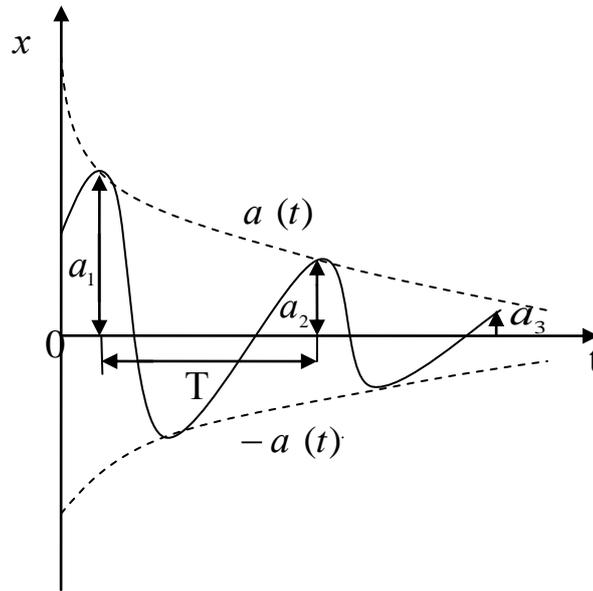


Рис. 15

Формула (49) позволяет экспериментально определить коэффициент вязкости. Поступают следующим образом:

1. Снимают осциллограмму колебаний.
2. По осциллограмме определяют логарифмический декремент затухания δ .
3. По формуле (49) рассчитывают коэффициент вязкости.

Замечание. Непостоянность логарифмического декремента для различных размахов, которая может выявиться при обработке осциллограммы, свидетельствует о присутствии в системе сил сопротивления, существенно отличных от вязкого.

Величина N , характеризующая темп затухающего движения, называется коэффициентом затухания. При большом сопротивлении, когда $n > k$, имеем $x = C_1 e^{-|r_1|t} + C_2 e^{-|r_2|t}$, причём $0 < |r_1| < |r_2|$. Темп затухания характеризуется меньшим по модулю характеристическим показателем, поэтому

$$N = |r_1| = n - \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (50)$$

При малом сопротивлении темп затухания определяется вещественной частью комплексных характеристических показателей:

$$N = n. \quad (51)$$

На рис. 16 показана найденная из (50) и (51) зависимость коэффициента затухания от коэффициента сопротивления. Максимально быстрое затухание наблюдается в критическом случае при $n = \kappa$, причём $N_{\max} = \kappa$.

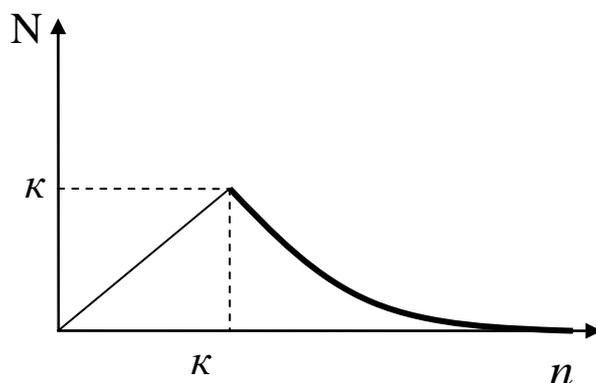


Рис. 16

3. Вынужденные колебания без сопротивлений

В реальных условиях часто приходится анализировать колебания машинных агрегатов и их элементов под действием внешних возмущений периодического характера. При этом различают внешние возмущения силового и кинематического характера. Пусть имеется машина, идеализированная в виде груза весом P на пружине с жёсткостью c (рис. 17). К грузу приложено внешнее силовое возмущение $\bar{F} \sin \omega t$. Абсолютную координату x груза будем отсчитывать от его положения статистического равновесия точки O .

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний груза имеет вид

$$m\ddot{x} + cx = F \sin \omega t. \quad (52)$$

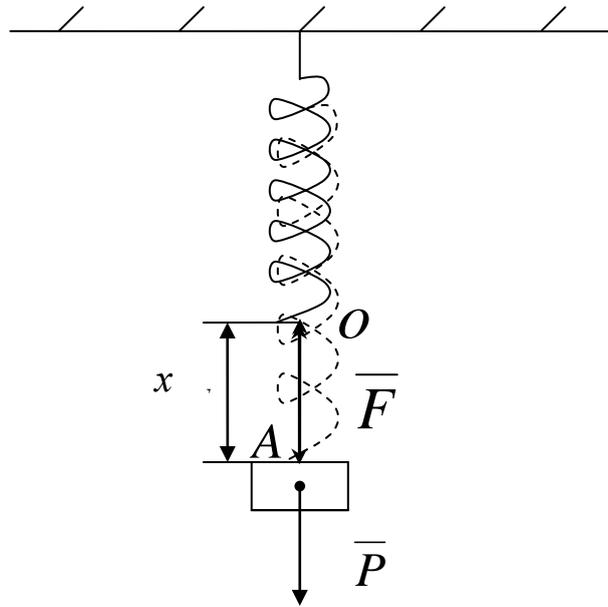


Рис. 17

Рассмотрим случай кинематического возбуждения. На груз не действуют внешние силы (кроме силы веса P и упругой восстанавливающей силы со стороны пружины), однако основание колеблется по некоторому закону $f(t)$ (рис. 18).

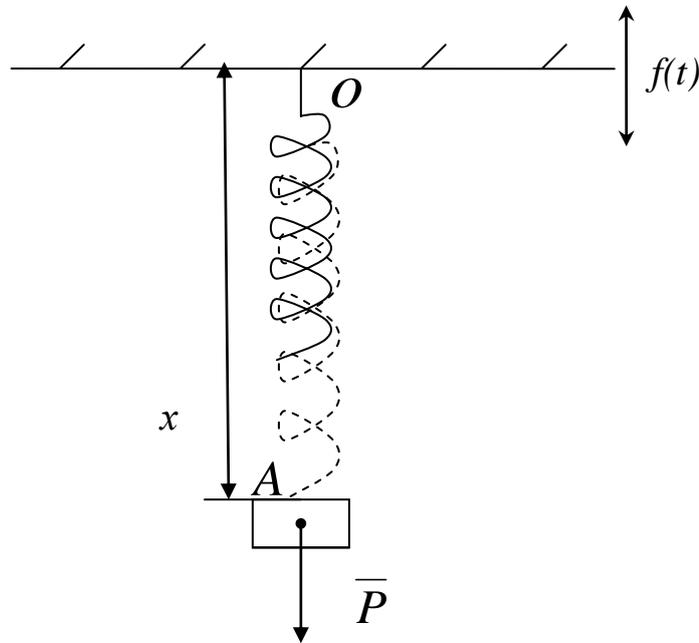


Рис. 18

В качестве обобщённой координаты примем относительную координату x груза относительно вибрирующего основания. Уравнение движения груза имеет вид

$$m\dot{w}_x = -cx, \quad (53)$$

где $-cx$ – проекция упругой силы пружины; w_x – проекция абсолютного ускорения груза на ось x .

Из теоретической механики известно, что при поступательном переносном движении абсолютное ускорение определяется выражением

$$\bar{w} = \bar{w}_e + \bar{w}_r$$

или в проекциях на ось x

$$w_x = w_{ex} + w_{rx}.$$

В нашем случае переносное движение определяется колебанием основания, поэтому для проекции переносного ускорения получаем $w_{ex} = \ddot{f}$. Для проекции относительного ускорения будем иметь $w_{rx} = \ddot{x}$. Тогда при подстановке в выражение (53) получим

$$m\ddot{x} + cx = -m\ddot{f}. \quad (54)$$

Уравнение (54) переходит в (52), если положить $F \stackrel{\text{с}}{=} -m\ddot{f}$.

Следовательно, вынужденные колебания при силовом и кинематическом возбуждении математически эквивалентны. Только в случае силового возбуждения координату нужно брать абсолютной, а в случае кинематического – относительной.

Внешняя сила в технических устройствах различного назначения (вибрационные машины) может быть реализована разными способами.

1. Инерционный вибровозбудитель представляет собой обыкновенный неуравновешенный ротор (рис. 19, 20).

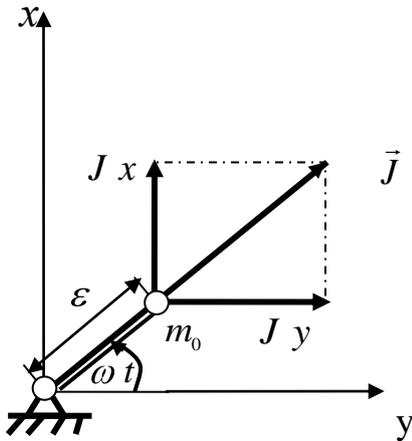


Рис. 19

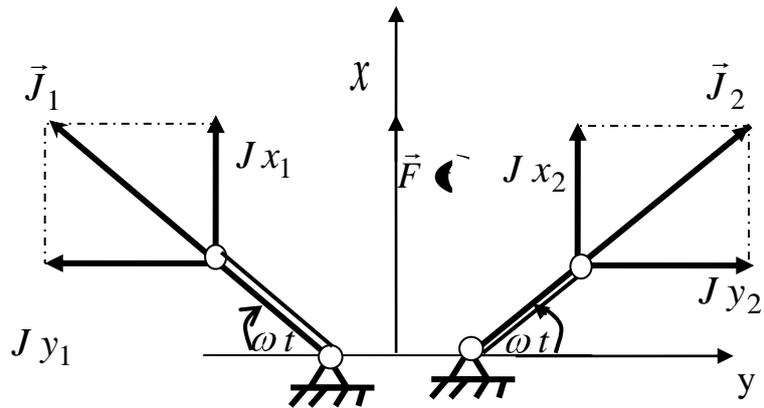


Рис. 20

Пусть m_0 – масса ротора, а ε – его эксцентриситет (расстояние от центра масс до оси вращения), ω – частота или, что то же самое, угловая скорость вращения ротора. Тогда на ротор будет действовать вращающая центробежная сила, модуль которой равен $J = m_0 \varepsilon \omega^2$. Эта сила имеет две составляющие (компоненты) вдоль неподвижных осей x и y , изменяющиеся по гармоническому закону:

$$J_x = m_0 \varepsilon \omega^2 \sin(\omega t), \quad J_y = m_0 \varepsilon \omega^2 \cos(\omega t).$$

Спаренный инерционный вибровозбудитель может реализовать гармоническую силу постоянного направления (см. рис. 20). Возбудители одинаковы и вращаются навстречу друг другу. $J_1 = J_2 = J$. Компоненты центробежных сил по оси y взаимно уничтожаются, а по оси x складываются. Результирующая сила меняется по гармоническому закону $F_m = F_0 \sin(\omega \cdot t)$, причем $F_0 = 2m_0 \varepsilon \omega^2$.

Электромагнитный возбудитель колебаний. Ток катушки, намотанной на ферромагнитный сердечник, питается внешним гармоническим напряжением (рис. 21). Магнитный поток в сердечнике замыкается через воздушный зазор и упруго закрепленный ферромагнитный якорь. Согласно законам электротехники, пандемоторная сила, действующая на якорь, также изменяется по гармоническому закону. Такие возбудители широко применяются в промышленности.

Ими оснащены ряд вибрационных машин, грохоты, питатели, виброконвейеры.

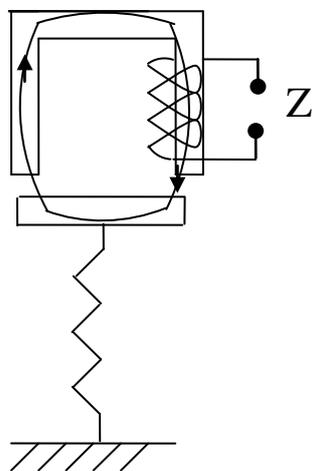


Рис. 21

Существуют электродинамические, гидравлические, электрофрикционные и другие возбудители колебаний.

Рассмотрим вынужденные колебания под действием гармонического возбуждения. В этом случае уравнение (52) примет вид

$$m\ddot{x} + cx = F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t). \quad (55)$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общий интеграл ищем в виде $x = x_1 + x_2$, где x_1 – общий интеграл соответствующего однородного уравнения $m \ddot{x}_1 + c x_1 = 0$, совпадающего с (36), которое решено выше. Следовательно, компонента x_1 изменяется по гармоническому закону с частотой $\kappa = \sqrt{\frac{c}{m}}$. При учете сопротивления данная компонента будет убывать со временем по экспоненциальному закону, поэтому она несущественна. Гораздо большее значение имеет другая компонента x_2 , отвечающая частному решению уравнения (55). Она характеризует чисто вынужденные колебания груза на пружине:

$$x_2 = D \cdot \sin(\omega t), \quad D = const. \quad (56)$$

Подстановка (56) в (55) даёт

$$-mD\omega^2 \sin(\omega t) + cD \sin(\omega t) = F_0 \sin(\omega t),$$

или

$$-mD\omega^2 + cD = F_0,$$

откуда $D = \frac{F_0}{c - m\omega^2}.$

Из (56) получаем

$$x_2 = \frac{F_0}{c - m\omega^2} \cdot \sin(\omega t). \quad (57)$$

Чисто вынужденные колебания носят гармонический характер с частотой возмущающей силы. Амплитуда чисто вынужденных колебаний

$$|D| = \frac{F_0}{|c - m\omega^2|} = \frac{\frac{F_0}{c}}{\left|1 - \frac{m}{c}\omega^2\right|}.$$

Обозначим $\frac{F_0}{c} = x_{cm}$ – статическая деформация пружины под действием постоянной силы, равной амплитуде F_0 возмущающей силы. Введём коэффициент динамичности

$$\mu = \frac{1}{\left|1 - \frac{\omega^2}{K^2}\right|}, \quad (58)$$

где K – уже известная нам собственная частота.

Отметим, что коэффициент динамичности равен отношению амплитуды к статистической деформации пружины $\mu = \frac{|D|}{x_{cm}}$. На рис. 22 показана зависимость коэффициента динамичности от частоты возмущающей силы.

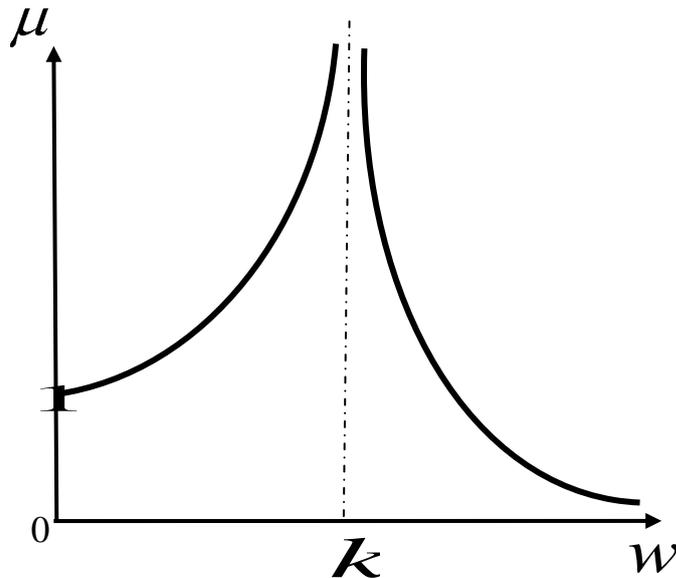


Рис. 22

Явление бесконечного нарастания коэффициента динамичности и амплитуды колебаний в случае совпадения частоты возмущения и собственной частоты $\omega = \kappa$ носит название *резонанса*. Можно выделить два частотных диапазона:

- 1) до резонансный низкочастотный диапазон ($0 < \omega < \kappa$), внутри него с ростом частоты коэффициент динамичности увеличивается;
- 2) зарезонансный высокочастотный диапазон ($\omega > \kappa$), внутри него с ростом частоты коэффициент динамичности падает.

Можем написать

$$x_2 = \begin{cases} x_{cm} \mu \sin(\omega t) & \text{при } (0 < \omega < \kappa); \\ -x_{cm} \mu \sin(\omega t) & \text{при } (\omega > \kappa). \end{cases}$$

Следовательно, в дорезонансной области колебания происходят в одной фазе с возмущающей силой (рис. 23, а), а в зарезонансной – в противофазе (см. рис. 23, б).

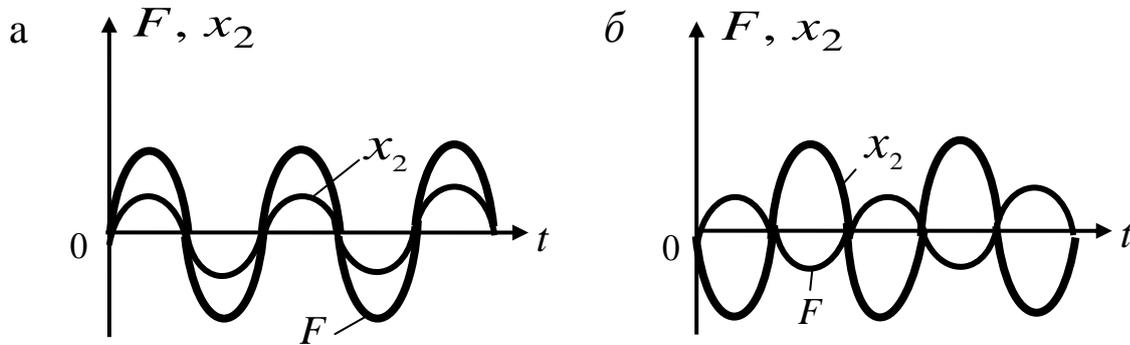


Рис. 23

Найдём силу, которая передаётся колеблющимся грузом на основание (рис. 24). Она равна упругой силе пружины:

$$\Phi = c|x_2| = cx_{cm}\mu|\sin(\omega t)|.$$

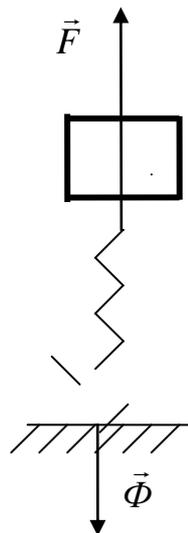


Рис. 24

Таким образом, сила, передаваемая на фундамент, пропорциональна коэффициенту динамичности. При работе машины, совершающей интенсивные механические вибрации, всегда следует выполнить виброизоляцию фундамента. Значительные вибрационные нагрузки приводят со временем к его разрушению. Поэтому следует коэффициент динамичности выбирать как можно меньше. Согласно выражению (58), $\mu \rightarrow 0$ при $\kappa \rightarrow 0$, а это значит, что и $c \rightarrow 0$. Следовательно, хорошая виброизоляция имеет место при использовании упругих амортизаторов с весьма малой жёсткостью.

4. Чисто вынужденные колебания груза при резонансе

Рассмотрим случай резонанса $\kappa = \omega$. Это означает, что $c = m\omega^2$. Тогда уравнение (55) примет вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}. \quad (59)$$

Будем искать решение чисто вынужденных колебаний, в этом случае в форме

$$x_2 = E t \cos(\omega t), \text{ где } E = \text{const}.$$

Вычисляем производные по времени от этой функции:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= E (\cos(\omega t) - \omega t \sin(\omega t)); \\ \ddot{x}_2 &= -E (\omega \cdot \sin(\omega t) + \omega^2 t \cdot \cos(\omega t)). \end{aligned}$$

После подстановки в выражение (59) получаем

$$-E \cdot (\omega \cdot \sin(\omega t) + \omega^2 t \cdot \cos(\omega t)) + \omega^2 E t \cdot \cos(\omega t) = \frac{F_0}{m} \cdot \sin(\omega t),$$

откуда $E = -\frac{F_0 t}{2\omega m}$. Следовательно, закон чисто вынужденных

колебаний при резонансе будет иметь вид

$$x_2 = -\frac{F_0 t}{2m \omega} \cos(\omega t). \quad (60)$$

Этот закон отвечает гармоническим колебаниям, амплитуда которых нарастает по линейному закону $a \stackrel{\curvearrowright}{=} \frac{F_0 t}{2m \omega}$. Фаза резонансных колебаний сдвинута относительно фазы возмущения на четверть периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$ возмущающей силы, так как $\cos \omega t = \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \omega \left(t + \frac{T}{4} \right)$.

График зависимости (60) показан на рис. 25.

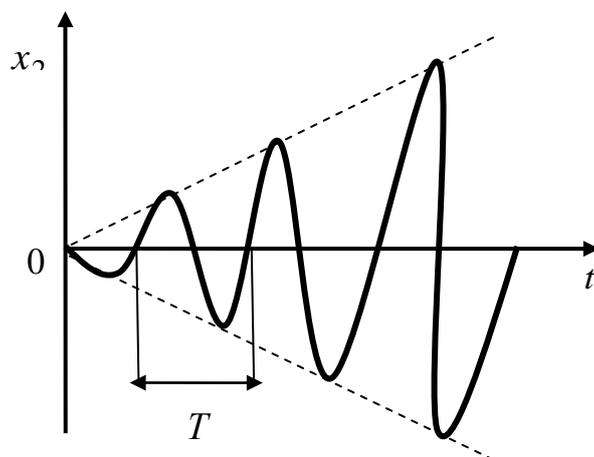


Рис. 25

Бесконечное нарастание амплитуды со временем обусловлено отсутствием сил сопротивления движению, поэтому в действительности линейное нарастание амплитуды имеет место только в начале движения, когда силы сопротивления ещё заметно не сказываются.

5. Простейший виброграф

Вибрографом называется прибор, предназначенный для измерения колебаний. Простейший виброграф (рис. 26) предназначен для измерения гармонических колебаний и состоит из корпуса прибора 3, который жёстко установлен на колеблющемся основании; собственно вибратора 2, который представляет собой груз на пружине, прикрепленный к корпусу.

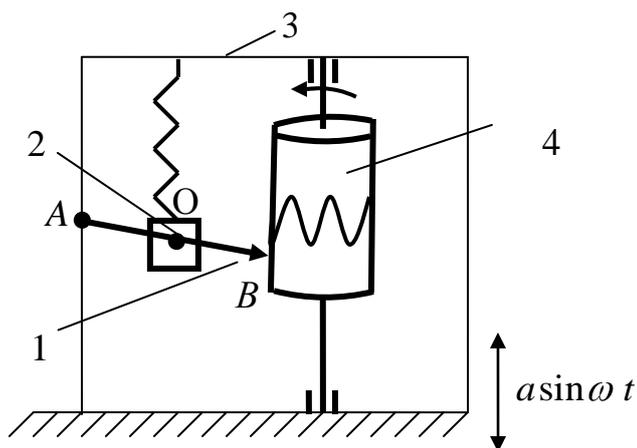


Рис. 26

Барабан 4 вращается вокруг оси, жестко связанной с корпусом, с постоянной угловой скоростью. Стрелка 1 шарнирно связана с корпусом и вибрографом, на конце стрелки установлено перо.

Имеет место случай кинематического возбуждения колебаний, поэтому уравнение движения в соответствии с (54) будет иметь вид

$$m \ddot{x} + c x = m a \omega^2 \sin(\omega t),$$

откуда для чисто вынужденных колебаний, согласно (57), получим

$$x_2 = \frac{m a \omega^2}{c - m \omega^2} \sin(\omega t), \quad (61)$$

где a и ω – неизвестные величины.

Упругий элемент, с помощью которого виброграф крепится к корпусу, выбирается достаточно мягким ($\ll m \omega^2$), поэтому из (61) получаем приближённо

$$x_2 = -a \sin(\omega t).$$

Напомним, что x_2 — это относительная координата. Для абсолютной координаты вибрографа будем иметь

$$x_{abc} = a \sin(\omega t) + \ll a \sin(\omega t) \gg 0.$$

Итак, точка O неподвижна (см. рис. 26), точка A колеблется вместе с корпусом. Следовательно, конец пера — точка B — колеблется по закону

$$x_B = \frac{OB}{OA} a \sin(\omega t).$$

6. Случай периодического негармонического возмущения

Предположим, что действующая на груз внешняя сила изменяется по периодическому, но не гармоническому закону (рис. 27).

Здесь $F(t) = F(t+T)$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

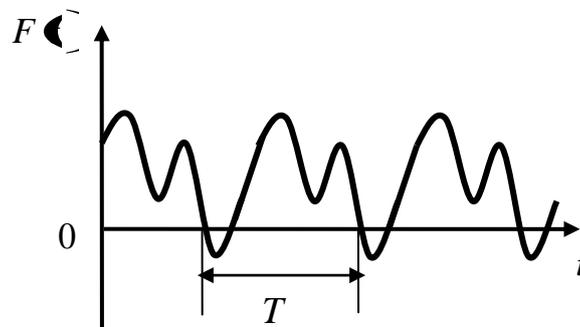


Рис. 27

В силу периодичности возмущения она может быть разложена на ряд Фурье:

$$F(\varphi) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos(i\omega t) + B_i \sin(i\omega t)), \quad (62)$$

причём среднее значение возмущающей силы определяется по формуле

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(\varphi) dt,$$

а остальные коэффициенты ряда – по формулам

$$a_i = \frac{2}{T} \int_0^T F(\varphi) \cos(i\omega t) dt, \quad b_i = \frac{2}{T} \int_0^T F(\varphi) \sin(i\omega t) dt \quad (i=1, 2, 3, \dots)$$

Чисто вынужденные колебания также будем искать в виде ряда Фурье:

$$x = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos(i\omega t) + B_i \sin(i\omega t)), \quad (63)$$

Причём коэффициенты A_0, A_i, B_i заранее неизвестны. Подстановка (62) и (63) в уравнение (52) даёт

$$\begin{aligned} & m \sum_{i=1}^{\infty} (A_i i^2 \omega^2 \cos(i\omega t) - B_i i^2 \omega^2 \sin(i\omega t)) + \\ & + c \cdot \left[A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos(i\omega t) + B_i \sin(i\omega t)) \right] = \\ & = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos(i\omega t) + B_i \sin(i\omega t)) \end{aligned}$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых тригонометрических функциях даёт

$$A_0 = \frac{a_0}{c}, \quad A_i = \frac{a_i}{c - m i^2 \omega^2}, \quad B_i = \frac{b_i}{c - m i^2 \omega^2}.$$

В соответствии с (63) окончательно получаем

$$x = \frac{a_0}{c} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \cos(i\omega t)}{c - m i^2 \omega^2}. \quad (64)$$

Если ввести собственную частоту колебаний κ , то выражение (64) можно переписать в следующем виде:

$$x = \frac{a_0}{c} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \cos(i\omega t) + \varepsilon_i \sin(i\omega t)}{\kappa^2 - i^2 \omega^2}.$$

Таким образом, чисто вынужденные колебания являются периодическими периода T , но не гармоническими.

Заметим, что, если $\omega = \frac{\kappa}{i}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), то $x \rightarrow \infty$.

Следовательно, в системе имеется бесчисленное множество резонансов. В случае, когда $i = 1$, $\omega = \kappa$ и частота возмущения равна собственной частоте, имеет место основной, или главный, резонанс (резонанс на частоте основной гармоники). Если $i = 2, 3, 4, \dots$, то $\omega = \frac{\kappa}{2}, \frac{\kappa}{3}, \frac{\kappa}{4}, \dots$. Получаем побочные резонансы на частотах второй, третьей, четвёртой и т.д. гармониках. Отметим, что побочные резонансы наблюдаются в низкочастотной области.

Под амплитудой колебаний D в рассматриваемом случае будем понимать модуль наибольшего отклонения от среднего значения A_0 . График назначения амплитуды в зависимости от ω показан на рис. 28.

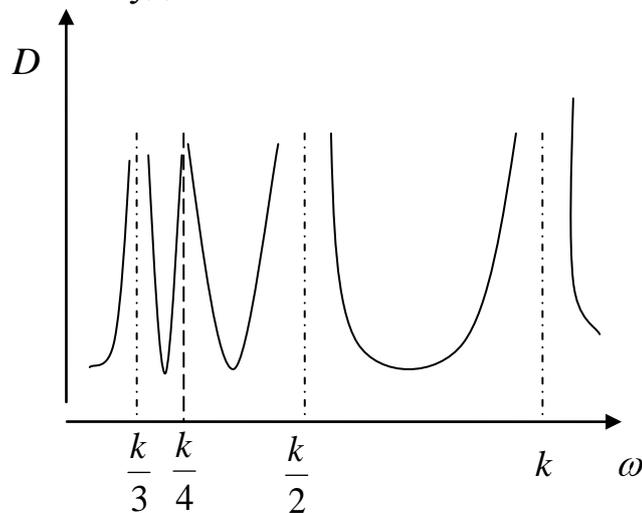


Рис. 28

Отметим, что при учёте сопротивления движению амплитуды при всех резонансах будут конечными, причём значение побочных резонансов высоких порядков весьма мало.

7. Биения

Рассмотрим вынужденные колебания груза под действием двух гармонических сил различной частоты $F_1 \sin(\omega_1 t)$ и $F_2 \sin(\omega_2 t)$, где F_1, F_2 – амплитуды сил; частоты ω_1, ω_2 этих сил будем считать взаимно иррациональными, т. е. их отношение не является рациональным числом. Тогда суммарная сила является не периодической, а почти периодической. Дифференциальное уравнение движения груза запишется так:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} = F_1 \sin(\omega_1 t) + F_2 \sin(\omega_2 t). \quad (65)$$

Как и раньше, ограничимся исследованием только чисто вынужденных колебаний. Частное решение уравнения (65) будем искать в виде

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t). \quad (66)$$

Подстановка (66) в (65) позволяет найти коэффициенты A_1 и A_2 :

$$A_1 = \frac{F_1}{c - m \omega_1^2}, \quad A_2 = \frac{F_2}{c - m \omega_2^2}.$$

Перепишем (66) в виде

$$x = \frac{A_1 + A_2}{2} (\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)) + \frac{A_1 - A_2}{2} (\sin(\omega_1 t) - \sin(\omega_2 t))$$

или

$$x = A_1 + A_2 \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + A_1 - A_2 \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t.$$

Последнее выражение можно представить так:

$$x = A \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \alpha\right), \quad (67)$$

где

$$A = \sqrt{(A_1 + A_2)^2 \cos^2 \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + (A_1 - A_2)^2 \sin^2 \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t.$$

Таким образом, закон колебаний (67) является гармоническим с частотой $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, однако амплитуда и начальная фаза не являются постоянными, а меняются по времени с частотой $(\omega_1 - \omega_2)$ (частота модуляции).

Если $\omega_1 \approx \omega_2$, то частота изменения амплитуды и фазы много меньше частоты колебаний. Такое движение называется биениями. График биений показан на рис. 29.

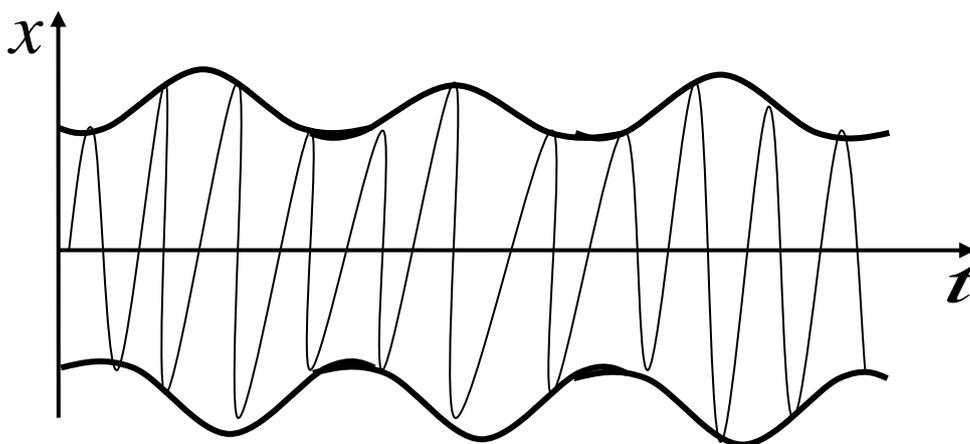


Рис. 29

Аналогичное явление наблюдается, если частота возмущения оказывается близкой к собственной частоте ($\omega \approx \kappa$). Это происходит вследствие наложения чистоты вынужденных и собственных колебаний с близкими частотами.

8. Движение груза на пружине под действием возмущения произвольного вида

Пусть $F(t)$ – произвольная функция времени. Это может быть прямоугольный импульс продолжительности t_0 (рис. 30) или гармоническое возмущение с амплитудой, убывающей по экспоненте (рис. 31) или что-нибудь ещё. Преобразуем уравнение (52) к виду

$$\ddot{x} + \kappa^2 x = \frac{F(t)}{m}. \quad (68)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения можно записать в виде

$$x = C_1 \cos(\kappa t) + C_2 \sin(\kappa t). \quad (69)$$

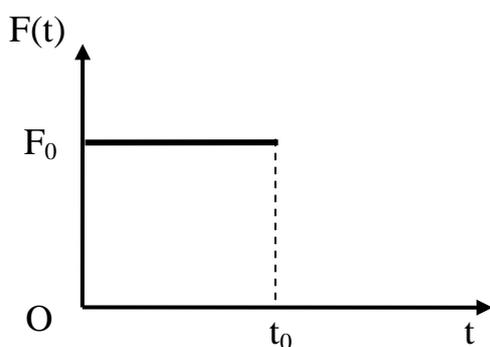


Рис. 30

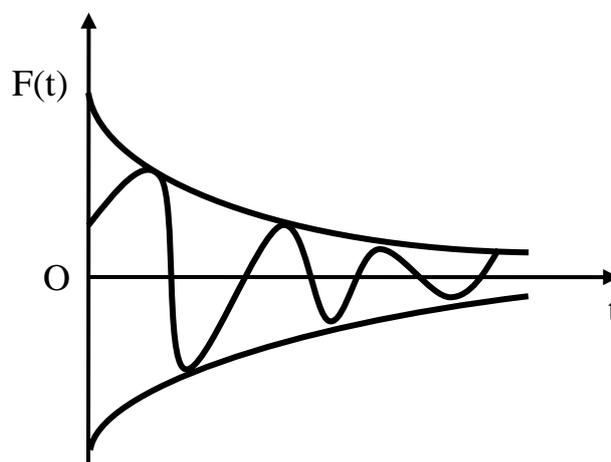


Рис. 31

Для нахождения решения неоднородного уравнения примем метод вариации произвольных постоянных, а именно, будем искать решение уравнения (68) в форме (69), но величины C_1 и C_2 считать функциями времени. Продифференцируем выражение (69) по времени:

$$\dot{x} = \dot{C}_1 \cos(\kappa t) + \dot{C}_2 \sin(\kappa t) - \kappa C_1 \sin(\kappa t) + \kappa C_2 \cos(\kappa t). \quad (70)$$

Заметим, что две неизвестные функции C_1 и C_2 связаны лишь одним условием – уравнением (68), поэтому их можно подчинить произвольному условию. Потребуем, чтобы

$$\dot{C}_1 \cos(\kappa t) + \dot{C}_2 \sin(\kappa t) = 0, \quad (71)$$

тогда из (70) получаем

$$\dot{x} = -\kappa \cdot C_1 \sin(\kappa t) + \kappa \cdot C_2 \cos(\kappa t). \quad (72)$$

Выполняем ещё одно дифференцирование:

$$\ddot{x} = -\kappa^2 C_1 \cos(\kappa t) - \kappa^2 C_2 \sin(\kappa t) - \kappa \dot{C}_1 \sin(\kappa t) + \kappa \dot{C}_2 \cos(\kappa t). \quad (73)$$

Подставим (69) и (73) в (68). После упрощений придём к уравнению

$$-\dot{C}_1 \sin(\kappa t) + \dot{C}_2 \cos(\kappa t) = \frac{F}{\sqrt{m c}}. \quad (74)$$

Из системы двух линейных алгебраических уравнений (71) и (74) относительно C_1 и C_2 находим

$$\dot{C}_1 = \frac{F}{\sqrt{m c}} \sin(\kappa t), \quad \dot{C}_2 = \frac{F}{\sqrt{m c}} \cos(\kappa t). \quad (75)$$

Решим уравнения (75) для нулевых начальных условий:

$$t_0 = 0, \quad C_1 = C_2 = 0.$$

Непосредственно интегрируя (75), получаем

$$C_1 = -\frac{1}{\sqrt{m c}} \int_0^t F \sin(\kappa \tau) d\tau; \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{m c}} \int_0^t F \cos(\kappa \tau) d\tau.$$

Подстановка в выражение (69) даёт

$$x = \frac{1}{\sqrt{m c}} \left[- \int_0^t F \sin(\kappa \tau) \cos(\kappa t) d\tau + \int_0^t F \cos(\kappa \tau) \sin(\kappa t) d\tau \right],$$

или

$$x = \frac{1}{\sqrt{m c}} \cdot \int_0^t F \sin \kappa (-\tau) d\tau. \quad (76)$$

Итак, движение груза при нулевых начальных условиях под действием произвольного возмущения представляется через интеграл Дюамеля (76).

9. Вынужденные колебания с сопротивлением

Рассмотрим вынужденные колебания груза на пружине при наличии вязкого сопротивления под действием гармонической силы. Соответствующее дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m \ddot{x} + \beta \dot{x} + c x = F_0 \cdot \sin(\omega t)$$

или, после деления на массу (см. подразд. 2 разд. II),

$$\ddot{x} + 2n \dot{x} + \kappa^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t). \quad (77)$$

Для математически эквивалентной электрической задачи (рис. 32) будем иметь дифференциальное уравнение

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{q}{c} = E \cdot \sin(\omega t),$$

где E – ЭДС источника.

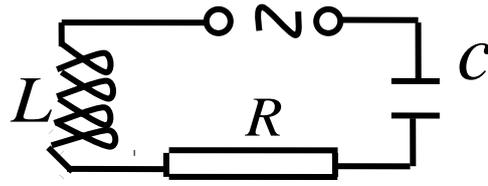


Рис. 32

Общее решение однородного уравнения, соответствующего (77), изменяется со временем по закону, найденному при исследовании затухающих колебаний. Поэтому чисто вынужденное решение уравнения (77) играет основную роль. Будем искать его в виде

$$x = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t). \quad (78)$$

Подстановка выражения (78) в (77) даёт

$$-\omega^2 (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) + 2n\omega (a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)) + \kappa^2 (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t).$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых функциях приводит к системе для нахождения коэффициентов a и b :

$$\begin{aligned} (\kappa^2 - \omega^2) a + 2n\omega b &= 0, \\ -2n\omega a + (\kappa^2 - \omega^2) b &= \frac{F_0}{m}. \end{aligned}$$

Откуда

$$a = -\frac{2n\omega F_0}{m [(\kappa^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2]},$$

$$b = \frac{(\kappa^2 - \omega^2) F_0}{m [(\kappa^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2]}.$$

После подстановки в (78) получаем

$$x = \frac{F_0}{m} \cdot \left[-\frac{2n\omega}{\sqrt{\kappa^2 - \omega^2} + 4n^2\omega^2} \cos(\omega t) + \frac{\kappa^2 - \omega^2}{\sqrt{\kappa^2 - \omega^2} + 4n^2\omega^2} \sin(\omega t) \right].$$

Обычным способом это выражение можно привести к виду

$$x = D \cdot \sin(\omega t - \alpha).$$

Причём

$$D = \frac{F_0}{m\sqrt{\kappa^2 - \omega^2} + 4n^2\omega^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2n\omega}{\kappa^2 - \omega^2}.$$

Как и раньше, отношение амплитуды вынужденных колебаний к статической деформации пружины назовём коэффициентом динамичности, для которого в данном случае получим

$$\mu = \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2 - \omega^2} + 4n^2\omega^2}. \quad (79)$$

Легко видеть, что $\mu|_{\omega=0} = 1$, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \mu = 0$.

Максимум коэффициента динамичности отвечает минимуму величины $\Delta = \sqrt{\kappa^2 - \omega^2} + 4n^2\omega^2$. Берём производную от Δ и приравняем её нулю:

$$\frac{d\Delta}{d\omega} = 2\sqrt{\kappa^2 - \omega^2} - 2\omega + 8n^2\omega = 0,$$

откуда $\omega^2 = \kappa^2 - 2n^2$. Конечно, это выражение должно быть положительным. Поэтому минимум величины Δ , а значит, максимум амплитуды будут иметь место лишь при $\kappa > n\sqrt{2}$. Вычисления дают

$$\Delta_{\min} = 4n^2 \cdot (\kappa^2 - n^2), \quad \mu_{\max} = \frac{\kappa^2}{2n\sqrt{\kappa^2 - n^2}}.$$

График зависимости коэффициента динамичности от частоты возмущения показан на рис. 33. Он называется *амплитудно-частотной характеристикой системы*.

Графическое изображение зависимости начальной фазы α как функции параметра ω называется *фазочастотной характеристикой системы*. Из выражения для тангенса начальной фазы получаем, что при малых ω

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{2n \omega}{k^2} > 0, \text{ при } \omega \gg k \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{2n}{\omega} < 0;$$

при $\omega \rightarrow k$ $\operatorname{tg} \alpha \rightarrow \infty$, значит, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ при $\omega = k$.

На рис. 34 изображена фазочастотная характеристика. Если коэффициент демпфирования стремится к нулю, то фазочастотная характеристика переходит в ломаную линию OAB.

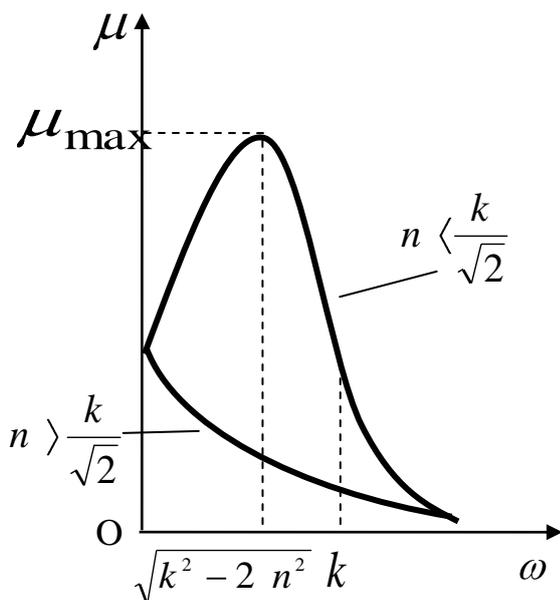


Рис. 33

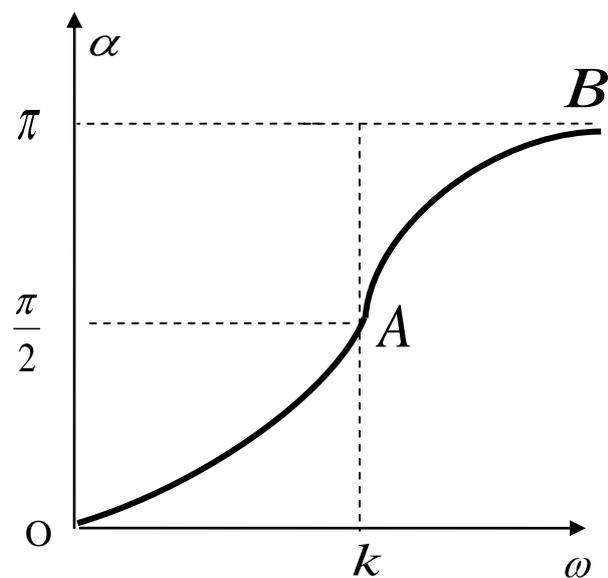


Рис. 34

При $0 < \omega < k$ фазовый сдвиг невелик $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Как было указано выше, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ при $\omega = k$. В результате получим

$x = D \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. колебания сдвинуты относительно возмущающей силы на четверть периода (рис. 35).

В резонансной области $\zeta > \zeta_{\text{кр}}$ сдвиг фазы $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; в случае, когда $\omega \gg \kappa$, сила и колебания находятся примерно в противофазе (рис. 36).

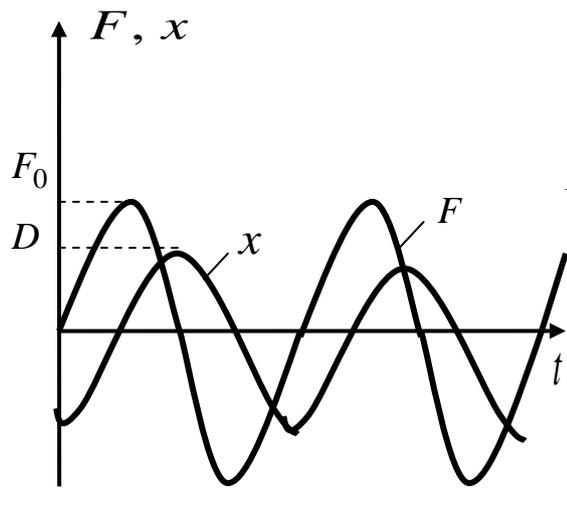


Рис. 35

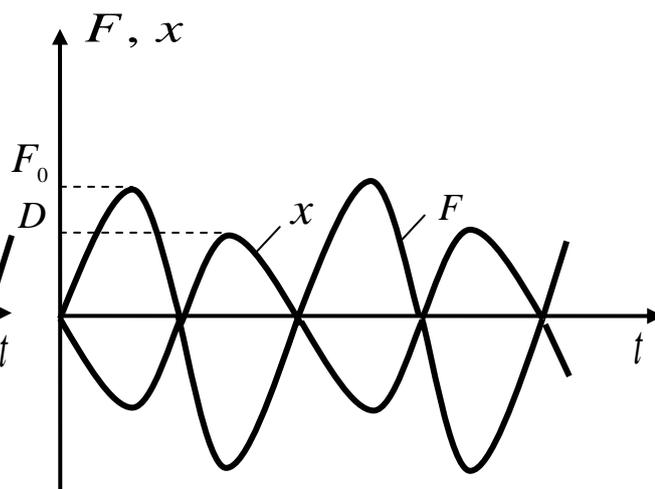


Рис. 36

Найдём силу $\vec{\Phi}$, передаваемую через упругий элемент и демпфер на основании (рис. 37).

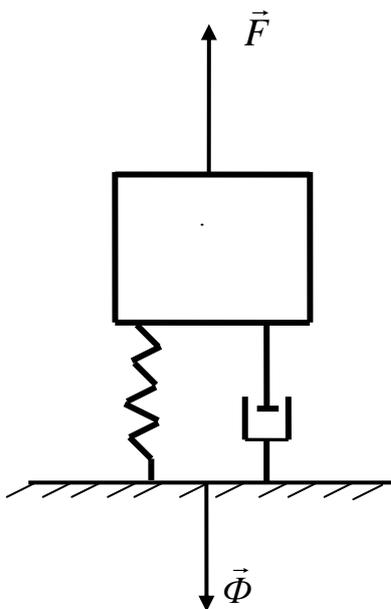


Рис. 37

Очевидно, $\Phi = |c \dot{x} + \beta x|$ или $\Phi = m \cdot |\kappa^2 x + 2n \dot{x}|$. Закон колебаний можно представить в виде

$$x = x_{cm} \mu \sin(\omega t - \alpha),$$

Значит,

$$\dot{x} = x_{cm} \mu \omega \cos(\omega t - \alpha),$$

Отсюда

$$\Phi = m x_{cm} \mu \left[\kappa^2 \sin(\omega t - \alpha) + 2n \omega \cos(\omega t - \alpha) \right].$$

Максимальное значение силы

$$\Phi_{\max} = m x_{cm} \mu \sqrt{\kappa^4 + 4n^2 \omega^2} = \frac{m}{c} F_0 \mu \sqrt{\kappa^4 + 4n^2 \omega^2}.$$

Введём коэффициент виброизоляции $\lambda = \frac{\Phi_{\max}}{F_0}$. Тогда

$$\lambda = \mu \sqrt{1 + 4 \frac{n^2 \omega^2}{\kappa^4}}.$$

С учётом (79) получим

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 + \frac{4n^2 \omega^2}{\kappa^4}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\kappa^2}\right)^2 + \frac{4n^2 \omega^2}{\kappa^4}}}.$$

Очевидно,

$$\lambda /_{\omega=0} = 1, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \lambda = 0, \quad \lambda /_{\omega=k\sqrt{2}} = 1.$$

График зависимости коэффициента виброизоляции λ от ω при различных n показан на рис. 38 ($n_1 > n_2$).

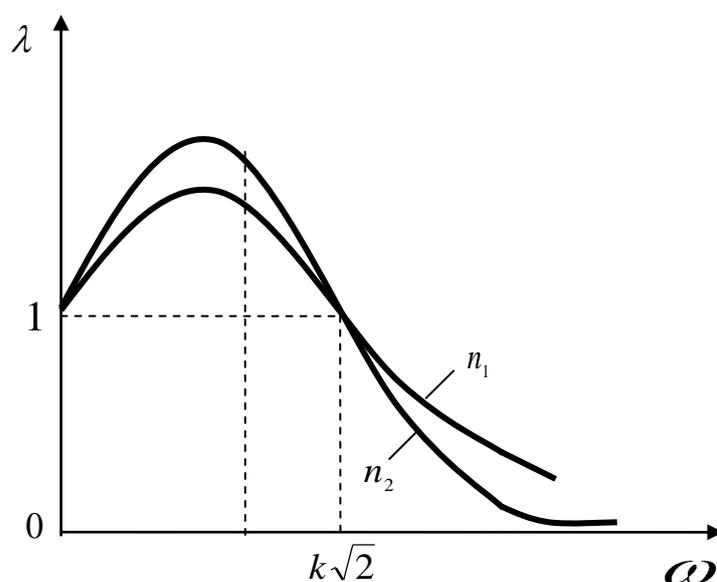


Рис. 38

Из графика видно, что в низкочастотном диапазоне для снижения коэффициента виброизоляции следует увеличить силу вязкого сопротивления путём установки соответствующего демпфера. Наоборот, в высокочастотном диапазоне увеличение коэффициента сопротивления влечёт за собой увеличение коэффициента виброизоляции.

III. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

1. Кинетическая и потенциальная энергия системы вблизи положения устойчивого равновесия

Рассмотрим механическую систему со стационарными связями и с s степенями свободы, соответственно, её положение в пространстве описывается s обобщёнными координатами:

$$q_1, q_2, \dots, q_s.$$

Потенциальная энергия системы $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_s)$. Она определяется с точностью до постоянного слагаемого. Выберем его так, чтобы в так называемой нулевой точке

$$\Pi(0, 0, \dots, 0) = 0. \quad (80)$$

Обобщённые координаты будем отсчитывать таким образом, чтобы при $q_1 = q_2 = \dots = q_s = 0$ имело место положение равновесия. Следовательно, в этой точке выполняются равенства

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \right|_0 = \left. \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \right|_0 = \dots = \left. \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} \right|_0 = 0. \quad (81)$$

Разложим потенциальную энергию в s -кратный ряд Маклорена:

$$\Pi = \Pi(0, 0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^s \left(\left. \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right|_0 \right) q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left(\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right|_0 \right) q_i q_j + \dots \quad (82)$$

Обозначение $\left. \dots \right|_0$ говорит о том, что соответствующие частные производные вычисляются в нулевой точке. Первый и второй члены разложения (82), согласно (80) и (81), равны нулю. Невыписанные слагаемые содержат обобщённые координаты в третьей, чет-

вёртой и т. д. степенях. Поэтому вблизи положения равновесия, когда обобщённые координаты малы, ими можно пренебречь.

Введём квазиупругие коэффициенты:

$$c_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0, \quad c_{ij} = c_{ji} .$$

Потенциальная энергия, таким образом, вблизи положения равновесия представима в виде следующей однородной квадратичной формы:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s c_{ij} q_i q_j . \quad (83)$$

Например, для системы с двумя степенями свободы ($s = 2$) получим

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + c_{12} q_1 q_2 + c_{21} q_2 q_1 + c_{22} q_2^2) \\ &= \frac{c_{11}}{2} q_1^2 + c_{12} q_1 q_2 + \frac{c_{22}}{2} q_2^2 . \end{aligned} \quad (84)$$

Пусть система состоит из n материальных точек. Радиус-вектор k -й точки является векторной функцией обобщённых координат:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s) . \quad (85)$$

В свою очередь,

$$q_1 = q_1, \quad q_2 = q_2, \dots, \quad q_s = q_s . \quad (86)$$

Равенства (85) и (86) определяют радиус-вектор k -й точки как сложную функцию времени, причём обобщённые координаты выступают как промежуточные аргументы.

Скорость κ -й точки определяется формулой

$$\bar{v}_\kappa = \frac{d \bar{r}_\kappa}{d t}.$$

Согласно правилам сложного дифференцирования, получим

$$\bar{v}_\kappa = \frac{\partial \bar{r}_\kappa}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_\kappa}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_\kappa}{\partial q_s} \dot{q}_s = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \bar{r}_\kappa}{\partial q_i} \dot{q}_i.$$

Для кинетической энергии системы имеем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^n m_\kappa \cdot \bar{v}_\kappa^2.$$

Кроме того,

$$\bar{v}_\kappa^2 = \bar{v}_\kappa \cdot \bar{v}_\kappa = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \bar{r}_\kappa}{\partial q_i} \dot{q}_i \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_\kappa}{\partial q_j} \dot{q}_j.$$

В результате кинетическая энергия системы определится выражением

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^n m_\kappa \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_\kappa}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \bar{r}_\kappa}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (87)$$

Введём обозначения:

$$A_{ij} = \sum_{\kappa=1}^n m_\kappa \frac{\partial \bar{r}_\kappa}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \bar{r}_\kappa}{\partial q_j}.$$

Эти величины являются скалярными функциями обобщённых координат и называются квазиинерционными коэффициентами. Очевидно, $A_{ij} = A_{ji}$.

Разложим данные коэффициенты в ряды Маклорена вблизи положения равновесия:

$$A_{ij} = A_{ij}(0, 0, \dots, 0) + \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_1} \right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_2} \right)_0 q_2 + \dots + \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_s} \right)_0 q_s + \dots$$

Сохраним только немалые члены соответствующих рядов и обозначим

$$a_{ij} = A_{ij}(0, 0, \dots, 0) \quad .$$

С указанной степенью точности из (87) получаем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad . \quad (88)$$

Итак, кинетическая энергия системы является однородной квадратичной формой обобщённых скоростей. Для системы с двумя степенями свободы получим

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{21} \dot{q}_2 \dot{q}_1 + a_{22} \dot{q}_2^2) \\ &= \frac{a_{11}}{2} \dot{q}_1^2 + a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{a_{22}}{2} \dot{q}_2^2 \quad . \end{aligned} \quad (89)$$

2. Движение консервативной системы с двумя степенями свободы в окрестности устойчивого положения равновесия

Вблизи положения равновесия потенциальная и кинетическая энергия системы с двумя степенями свободы определяется формулами (84) и (89). Кинетическая энергия по своему смыслу положительна. Если

$$\dot{q}_2 = 0, \text{ то } T = \frac{a_{11}}{2} \dot{q}_1^2 > 0, \text{ следовательно, } a_{11} > 0. \quad (90)$$

Точно так же получим, если

$$\dot{q}_1 = 0, \text{ то } a_{22} > 0. \quad (91)$$

Перепишем выражение (89) следующим образом:

$$\begin{aligned} T &= \frac{a_{11}}{2} \left(\dot{q}_1^2 + 2 \frac{a_{12}}{a_{11}} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{a_{12}^2}{a_{11}^2} \dot{q}_2^2 \right) + \frac{a_{22} a_{11} - a_{12}^2}{2 a_{11}} \dot{q}_2^2 = \\ &= \frac{a_{11}}{2} \left(\dot{q}_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \dot{q}_2 \right)^2 + \frac{a_{22} a_{11} - a_{12}^2}{2 a_{11}} \dot{q}_2^2. \end{aligned}$$

Положим $\dot{q}_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \dot{q}_2$, тогда из условия, что $T > 0$, и (90)

следует

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0. \quad (92)$$

Инерционные коэффициенты всегда должны удовлетворять условиям (90)–(92).

Пусть в положении равновесия $q_1 = q_2 = 0$ потенциальная энергия имеет строгий минимум, равный нулю. Значит, вблизи положения равновесия $\Pi > 0$. На основании выражения (84) приходим к неравенствам, наложенным на квазиупругие коэффициенты:

$$c_{11} > 0, \quad c_{22} > 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0. \quad (93)$$

Составим уравнения движения системы в форме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1,2). \quad (94)$$

Имеем для $j = 1$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2, \quad \frac{\partial T}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = c_{11}q_1 + c_{12}q_2.$$

Аналогичные результаты получим для $j = 2$.

Подстановка в (94) даёт

$$\begin{cases} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 = 0, \\ a_{12} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + c_{12} q_1 + c_{22} q_2 = 0. \end{cases} \quad (95)$$

Частное решение системы (95) ищем в виде

$$q_1 = e^{rt}, \quad q_2 = a e^{rt}, \quad (96)$$

где r – характеристический показатель; a – постоянная.

После подстановки в систему (95) и сокращения на e^{rt} получаем

$$\begin{aligned} a_{11}r^2 + c_{11} + a \cdot (a_{12}r^2 + c_{12}) &= 0; \\ a_{12}r^2 + c_{12} + a \cdot (a_{22}r^2 + c_{22}) &= 0. \end{aligned} \quad (97)$$

Исключим из этих уравнений величину a . Придём к следующему выражению:

$$(a_{11}r^2 + c_{11}) \cdot (a_{22}r^2 + c_{22}) - (a_{12}r^2 + c_{12})^2 = 0. \quad (98)$$

Левую часть последнего равенства обозначим Δ она $\xrightarrow[r^2 \rightarrow \pm\infty]{} +\infty$.

Далее $\Delta \Big|_{r=0} = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$ (см. третье условие (93)).

Кроме того,

$$\begin{aligned} \Delta \left(-\frac{c_{22}}{a_{22}} \right) &= - \left(-a_{12} \frac{c_{22}}{a_{22}} + c_{12} \right)^2 < 0; \\ \Delta \left(-\frac{c_{11}}{a_{11}} \right) &= - \left(-a_{12} \frac{c_{11}}{a_{11}} + c_{12} \right)^2 < 0. \end{aligned}$$

Из рис. 39 видно, что оба корня уравнения (98) вещественны и отрицательны. Обозначим их $r^2 = -\kappa_1^2$, $r^2 = -\kappa_2^2$. Следовательно, имеем две пары чисто мнимых сопряжённых характеристических показателей:

$$r_{1,2} = \pm \kappa_1 \cdot i, \quad r_{3,4} = \pm \kappa_2 \cdot i.$$

Каждой паре первого или второго уравнения (97) отвечает своё значение постоянной a :

$$a_1 = \frac{c_{11} - a_{11}\kappa_1^2}{a_{12}\kappa_1^2 - c_{12}}, \quad a_2 = \frac{c_{11} - a_{11}\kappa_2^2}{a_{12}\kappa_2^2 - c_{12}}.$$

Найденным значениям характеристических показателей соответствует следующее общее решение системы (95):

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1 \sin(\kappa_1 t + d_1) + C_2 \sin(\kappa_2 t + d_2), \\ q_2 &= C_1 a_1 \sin(\kappa_1 t + d_1) + C_2 a_2 \sin(\kappa_2 t + d_2), \end{aligned} \tag{99}$$

где C_1, C_2, d_1, d_2 – произвольные постоянные. Их количество совпадает с порядком системы (95).

Подставим начальные условия:

$$t = 0, \quad q_1 = q_{10}, \quad q_2 = q_{20}, \quad \dot{q}_1 = \dot{q}_{10}, \quad \dot{q}_2 = \dot{q}_{20}.$$

Подстановка этих условий в (99) приводит к уравнениям для определения произвольных постоянных:

$$q_{10} = C_1 \sin \alpha_1 + C_2 \sin \alpha_2, \quad q_{20} = C_1 a_1 \sin \alpha_1 + C_2 a_2 \sin \alpha_2,$$

$$\dot{q}_{10} = C_1 \kappa_1 \cdot \cos \alpha_1 + C_2 \kappa_2 \cdot \cos \alpha_2, \quad \dot{q}_{20} = C_1 \kappa_1 \cdot a_1 \cos \alpha_1 + C_2 \kappa_2 \cdot a_2 \cos \alpha_2.$$

В соответствии с выражениями (99) закон изменения обеих координат представляет собой наложение (суперпозицию) двух различных гармонических колебаний с частотами κ_1 и κ_2 . Если эти частоты рационально несоизмеримы друг с другом, то результи-

рующие колебания являются непериодическими, т. е. нельзя найти промежуток времени, через который величины обобщённых координат и скоростей повторяются. Такие колебания называются почти периодическими. Наименьшая частота κ_1 собственных колебаний называется *частотой основного тона*, большая частота κ_2 – *обертонном*.

Уравнение для нахождения частот получим из (98), если в нём положить $r^2 = -\kappa^2$. Получим биквадратное уравнение

$$\Delta \kappa^2 = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 \cdot \kappa^4 - a_{22} \cdot c_{11} + a_{11} \cdot c_{22} - 2a_{12} \cdot c_{12} \cdot \kappa^2 + c_{11} \cdot c_{22} - c_{12}^2 = 0. \quad (100)$$

Предположим, что вторая обобщённая координата q_2 искусственно заторможена. Тогда из (95) получаем

$$a_{11} \ddot{q}_1 + c_{11} q_1 = 0, \quad q_2 \equiv 0.$$

Этому случаю отвечают гармонические колебания с частотой

$$n_1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}.$$

Аналогично при заторможенной координате q_1 получим гармонические колебания с частотой

$$n_2 = \sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}}.$$

Парциальной частотой колебаний консервативной системы с двумя степенями свободы называется частота её колебаний в том случае, когда одна из обобщённых координат искусственно заторможена. Найденные выше n_1 и n_2 – парциальные частоты. Из рис. 40

видно, что парциальные частоты лежат в диапазоне между основными тоном и обертоном: $\kappa_1 < n_1 < n_2 < \kappa_2$.

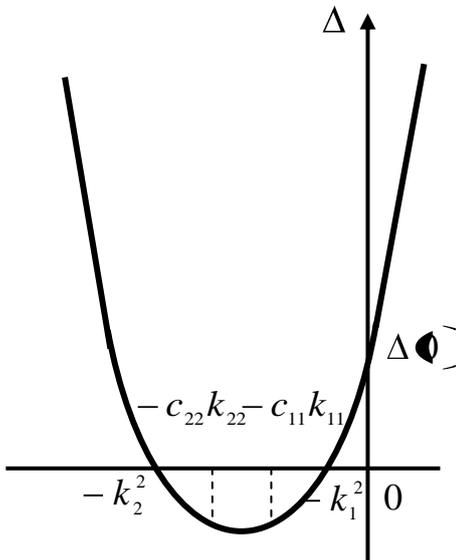


Рис. 39

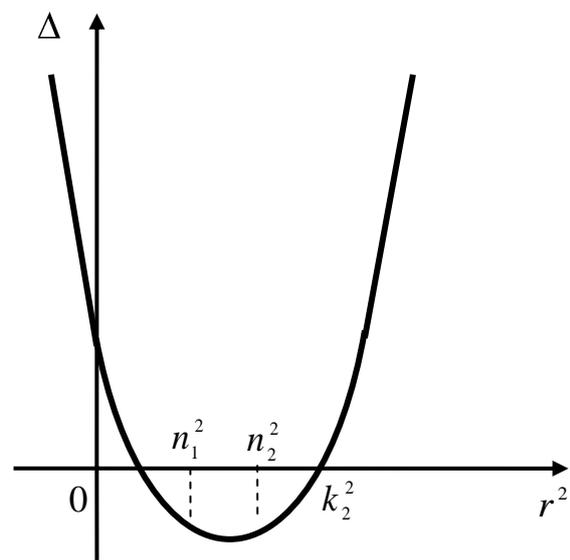


Рис. 40

График функции $\Delta \kappa^2$ получаем из рис. 39 заменой r^2 на $-\kappa^2$.

Введём обозначения:

$$\xi_1 = c_1 \cdot \sin(\kappa_1 t + \alpha_1); \quad \xi_2 = c_2 \cdot \sin(\kappa_2 t + \alpha_2). \quad (101)$$

Тогда закон колебаний (99) может быть переписан:

$$q_1 = \xi_1 + \xi_2; \quad q_2 = a_1 \cdot \xi_1 + a_2 \cdot \xi_2. \quad (102)$$

Равенства (102) можно рассматривать как замену переменных q_1, q_2 на ξ_1, ξ_2 . Новые обобщённые координаты, согласно (101), меняются по закону гармоник с частотами κ_1 и κ_2 . Поэтому дифференциальные уравнения системы в новых координатах имеют следующий вид:

$$\ddot{\xi}_1 + \kappa_1^2 \cdot \xi_1 = 0; \quad \ddot{\xi}_2 + \kappa_2^2 \cdot \xi_2 = 0.$$

Новые координаты называются нормальными, отвечающие им гармонические колебания называются нормальными колебаниями.

Рассмотрим частные случаи.

Случай кратных корней. Пусть квазиинерционные и квазиупругие коэффициенты пропорциональны:

$$\frac{c_{11}}{a_{11}} = \frac{c_{22}}{a_{22}} = \frac{c_{12}}{a_{12}} = \kappa^2. \quad (103)$$

Отсюда $c_{11} = a_{11} \kappa^2$, $c_{22} = a_{22} \kappa^2$, $c_{12} = a_{12} \kappa^2$. Поставим эти значения в (95):

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + \kappa^2 q_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + \kappa^2 q_2 &= 0; \\ a_{12} (\ddot{q}_1 + \kappa^2 q_1) + a_{22} (\ddot{q}_2 + \kappa^2 q_2) &= 0. \end{aligned}$$

Определитель этой системы, согласно (92), отличен от нуля. Следовательно,

$$\ddot{q}_1 + \kappa^2 q_1 = 0, \quad \ddot{q}_2 + \kappa^2 q_2 = 0.$$

Таким образом, координаты q_1 и q_2 изменяются по гармоническому закону с одной и той же частотой:

$$q_1 = C_1 \sin(\kappa \cdot t + \alpha_1), \quad q_2 = C_2 \sin(\kappa \cdot t + \alpha_2).$$

Однако амплитуды C_1, C_2 и начальные фазы α_1, α_2 в общем случае не совпадают. Очевидно, в рассматриваемом случае собственные и парциальные частоты, согласно (103), сливаются:

$$\kappa_1 = n_1 = n_2 = \kappa.$$

Случай нулевого корня. Пусть квазиупругие коэффициенты удовлетворяют равенству

$$c_{11} \cdot c_{22} - c_{12}^2 = 0.$$

Это означает, что в точке $q_1 = q_2 = 0$ потенциальная энергия не имеет строгого минимума. В этом случае для анализа устойчивости равновесия необходимо учитывать члены более высокого порядка в разложении потенциальной энергии [см. выражение (8.2)].

3. Примеры свободных колебаний материальной системы с двумя степенями свободы

1. **Колебания двухмассовой упругой системы.** Пусть x_1, x_2 – отклонения соответствующих тел от их положений в состоянии устойчивого равновесия, а c_1, c_2 – коэффициенты жесткости пружин (рис. 41, а). За обобщённые координаты системы принимаем x_1 и x_2 .

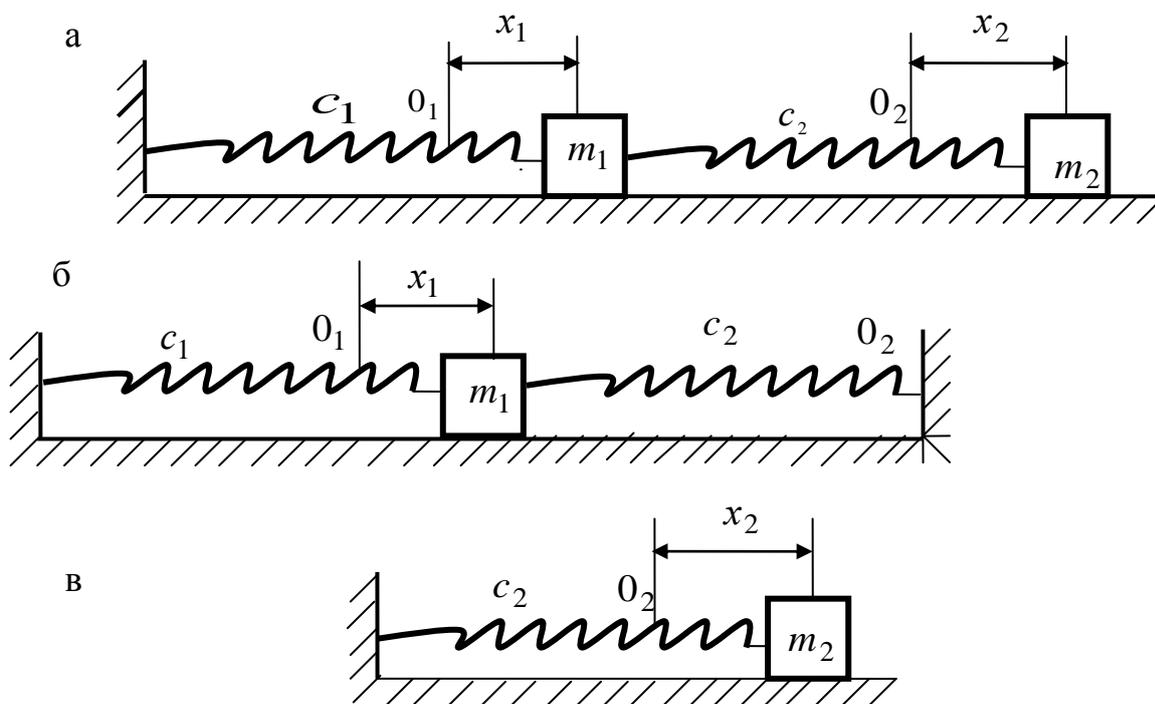


Рис. 41

Кинетическая энергия системы определится выражением

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 .$$

Таким образом, $a_{11} = m_1$, $a_{22} = m_2$, $a_{12} = 0$.

Для потенциальной энергии системы имеем

$$П = \frac{c_1}{2} x_1^2 + \frac{c_2}{2} (c_2 - x_1)^2,$$

или

$$П = \frac{c_1 + c_2}{2} x_1^2 - c_2 x_1 x_2 + \frac{c_2}{2} x_2^2.$$

Отсюда $c_{11} = c_1 + c_2$, $c_{22} = c_2$, $c_{12} = -c_2$.

Частное уравнение, согласно (98), будет

$$(c_1 + c_2 - m_1 \kappa^2) (c_2 - m_2 \kappa^2) c_2^2 = 0. \quad (104)$$

Введём парциальные частоты. Пусть $x_2 = 0$ (см. рис. 41, б).

Тогда первая парциальная частота $n_1 = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m_1}}$. Теперь пусть

$x_1 = 0$ (см. рис. 41, в). Получим вторую парциальную частоту – $n_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}$. Уравнение (104) можно переписать в следующем виде:

$$m_1 \cdot m_2 \cdot (c_1^2 - \kappa^2) (c_2^2 - \kappa^2) c_2^2 = 0.$$

Введём обозначение $n_3 = \sqrt{\frac{c_2}{m_1}}$, что соответствует частоте системы в том случае, когда второе тело закреплено и пружина устранена.

Частотное уравнение примет вид

$$(c_1^2 - \kappa^2) (c_2^2 - \kappa^2) - n_2^2 n_3^2 = 0,$$

или

$$\kappa^4 - (c_1^2 + n_2^2) \kappa^2 + n_2^2 (c_1^2 - n_3^2) = 0.$$

Очевидно, $n_1^2 - n_3^2 = \frac{c_1}{m_1}$. Введём $n_* = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}$ – частота системы

с отброшенной второй пружины. В результате придём к такому уравнению:

$$k^4 - (n_1^2 + n_2^2)k^2 + n_2^2 n_*^2 = 0,$$

откуда

$$k_{1,2}^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} \pm \sqrt{\frac{n_1^2 + n_2^2}{4} - n_2^2 \cdot n_*^2}.$$

Основной частоте отвечает решение со знаком «минус» перед радикалом, высшему обертону – решение со знаком «плюс».

2. Колебания подрессоренной вагонетки. Установленные на колёсах подрессоренной вагонетки амортизаторы будем схематизировать пружинами жёсткости c . Центр масс точки C будем считать расположенным на прямой, соединяющей точки A и B крепления амортизаторов (рис. 42). Расстояния a и b в общем случае неодинаковы. Пусть $P = m q$ – вес вагонетки, J – её центральный момент инерции.

Вагонетка имеет две степени свободы. В качестве обобщённых координат принимаем x – вертикальное смещение центра масс вагонетки и φ – угол поворота вагонетки (рис. 43). Координаты будем отсчитывать от положения вагонетки при недеформированных пружинах. Последнее положение считаем исходным. Итак, $A_0 C_0 B_0$ – исходное положение вагонетки, $A C B$ – её текущее положение при малых свободных колебаниях.

Кинетическая энергия вагонетки $T = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{J}{2} \dot{\varphi}^2$, её потен-

циальная энергия $\Pi = \frac{c}{2} (A_0 A)^2 + \frac{c}{2} (B_0 B)^2 + m q x_0$. Изменение обобщённых координат считаем малыми, поэтому

$$A_0 A = x - a \cdot \operatorname{tg} \phi = x - a \cdot \phi, \quad B_0 B = x + v \cdot \phi;$$

$$\Pi = \frac{c}{2} (x - a \cdot \phi)^2 + \frac{c}{2} (x + v \cdot \phi)^2 + m q \cdot x.$$

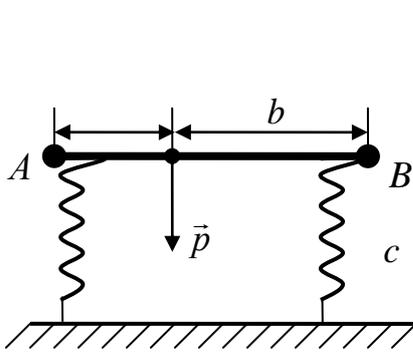


Рис. 42

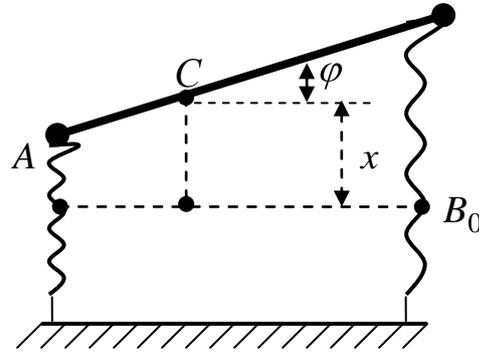


Рис. 43

Выполнив обычную процедуру составления уравнений Лагранжа, получим

$$m \ddot{x} + 2c x + c (v - a) \phi = -m q; \tag{105}$$

$$J \ddot{\phi} + c (v - a) x + c (a^2 + v^2) \phi = 0.$$

Система дифференциальных уравнений получилась неоднородной, так как координаты x и ϕ отсчитываются не от положения статического равновесия. Положим

$$x = x_0 + q_1, \quad \phi = \phi_0 + q_2, \quad x_0 = \text{const}, \quad \phi_0 = \text{const}.$$

Динамические добавки q_1 и q_2 удовлетворяют соответствующей однородной системе дифференциальных уравнений и могут быть истолкованы как новые обобщённые координаты, отсчитываемые от положения статического равновесия. Подставляем x_0 , ϕ_0 в систему (105). Получим систему для нахождения этих параметров:

$$\begin{cases} 2c x_0 + c (v - a) \phi_0 = -m q; \\ c (v - a) x_0 + c (a^2 + v^2) \phi_0 = 0. \end{cases}$$

Откуда

$$x_0 = -\frac{mq}{c} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a + b}, \quad \varphi_0 = \frac{m q}{c} \cdot \frac{b - a}{a + b}.$$

Отметим, что в симметричном случае, когда

$$a = b, \quad \varphi_0 = 0, \quad x_0 = -\frac{m q}{2c},$$

для q_1 и q_2 получаем однородную систему:

$$\begin{cases} m \ddot{q}_1 + 2c q_1 + c(a - b)q_2 = 0; \\ J \ddot{q}_2 + c(a - b)q_1 + c(a^2 + b^2)q_2 = 0. \end{cases}$$

Будем иметь

$$a_{11} = m, a_{22} = J, \quad a_{12} = 0, \quad c_{11} = 2c, \quad c_{22} = c \cdot (a^2 + b^2), \quad c_{12} = c \cdot (a - b).$$

Частотное уравнение

$$(c - m \kappa^2) \left[(a^2 + b^2) - J \kappa^2 \right] - c^2 (a - b)^2 = 0. \quad (106)$$

Введем парциальные частоты:

1. $n_1 = \sqrt{\frac{2c}{m}}$ – собственная частота поступательных колебаний

с исключёнными поворотами.

2. $n_2 = \sqrt{\frac{c(a^2 + b^2)}{J}}$ – собственная частота чисто поворотных

колебаний с закреплённым центром масс.

Кроме того, пусть

$$n_3 = \frac{c(a - b)}{\sqrt{m J}}.$$

Уравнение (106) примет вид $(\kappa_1^2 - \kappa^2)(\kappa_2^2 - \kappa^2) - n_3^2 = 0$ или $\kappa^4 - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)\kappa^2 + n_1^2 n_2^2 - n_3^2 = 0$, откуда

$$\kappa_{1,2}^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)^2}{4} + n_3^2}.$$

В несимметричной системе ($b \neq a$) поступательные вертикальные колебания сопровождаются поворотами. Если же система симметрична, то $n_3 = 0$ и мы получаем $\kappa_1 = n_1$, $\kappa_2 = n_2$. Очевидно, $n_1 < n_2$, если $\frac{2c}{m} < \frac{2c a^2}{J}$, откуда $\sqrt{\frac{J}{m}} < a$ или $\rho < a$, где ρ – радиус инерции вагонетки.

Таким образом, если радиус инерции вагонетки меньше половины её длины, то частота основного тона характеризуется поступательными вертикальными колебаниями. Если же радиус инерции больше половины длины, то при колебаниях основного тона наблюдаются чисто поворотные колебания.

4. Вынужденные колебания материальной системы с двумя степенями свободы

Рассмотрим вынужденные колебания вблизи устойчивого положения равновесия системы с двумя степенями свободы под действием внешнего гармонического возмущения. Дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = F_1 \sin(\omega t); \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = F_2 \sin(\omega t), \end{cases} \quad (107)$$

где F_1 , F_2 – амплитуды возмущающих сил; ω – частота возмущения.

Будем искать решение чисто вынужденных колебаний в виде

$$q_1 = A_1 \sin(\omega t), \quad q_2 = A_2 \sin(\omega t). \quad (108)$$

После подстановки (108) в (107) и сокращения на $\sin(\omega t)$ получаем линейную систему уравнений для нахождения A_1 и A_2 :

$$\begin{cases} (c_{11} - a_{11}\omega^2) A_1 + c_{12} - a_{12}\omega^2 A_2 = F_1; \\ (c_{12} - a_{12}\omega^2) A_1 + (c_{22} - a_{22}\omega^2) A_2 = F_2, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\Delta(\omega^2)} \left[F_1 (c_{22} - a_{22}\omega^2) - F_2 (c_{12} - a_{12}\omega^2) \right]; \\ A_2 &= \frac{1}{\Delta(\omega^2)} \left[F_2 (c_{11} - a_{11}\omega^2) - F_1 (c_{12} - a_{12}\omega^2) \right], \end{aligned} \quad (109)$$

где

$$\Delta(\omega^2) = (c_{11} - a_{11}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - (c_{12} - a_{12}\omega^2)^2.$$

Отметим, что частотное уравнение в задаче о свободных колебаниях имеет $\Delta(\omega^2) = 0$, корни которого κ_1 и κ_2 . Следовательно, когда частота возмущающей силы совпадает с одной из собственных частот, $A_{1,2} \rightarrow \infty$.

Таким образом, в системе есть две резонансные частоты:

1. Основной резонанс на частоте основного тона $\omega = \kappa_1$.
2. Высший резонанс на частоте обертона $\omega = \kappa_2$.

Пусть $F_2 = 0$, тогда из (109) получаем

$$A_1 = F_1 \frac{c_{22} - a_{22}\omega^2}{\Delta(\omega^2)}; \quad A_2 = -F_1 \frac{c_{12} - a_{12}\omega^2}{\Delta(\omega^2)}.$$

Амплитуды колебаний по первой обобщённой координате обращаются в нуль, если $c_{22} - a_{22}\omega^2 = 0$, откуда $\omega = \sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}} = n_2$ – вторая парциальная частота при заторможенной первой координате.

Явление обращения в нуль чисто вынужденных колебаний по одной из обобщённых координат называется антирезонансом. В данной задаче антирезонанс по координате q_1 наблюдается при $\omega = n_2$, при этом вторая координата $q_2 \neq 0$. Ранее было показано, что $\kappa_1 < n_2 < \kappa_2$. Поэтому амплитудно-частотная характеристика системы при $F_2 = 0$ имеет вид, как на рис. 44. При учёте сил сопротивления эта характеристика имеет вид, как на рис. 45. Резонансные пики становятся конечными и несколько смещены в низкочастотную область. При этом высокочастотный резонансный пик обычно менее интенсивный. Таким образом, наиболее опасным является резонанс на основном тоне. Гашение колебаний на частоте антирезонанса является неполным.

На явлении антирезонанса основан принцип действия линейных гасителей колебаний.

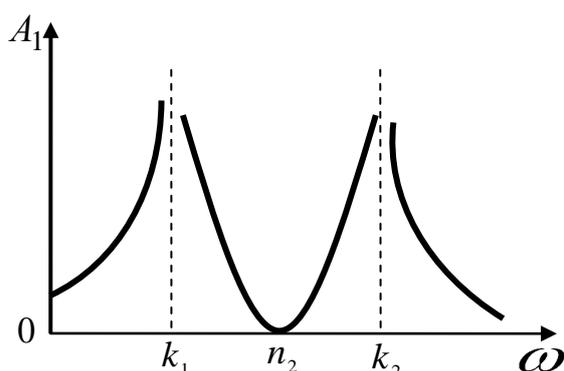


Рис. 44

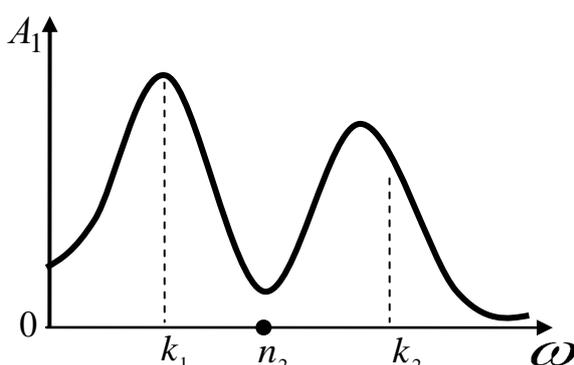


Рис. 45

Пусть имеется машина, идеализированная в виде груза на пружине (рис. 46). Машина находится под действием внешнего гармонического возмущения. Чтобы погасить чисто вынужденные вибрации тела, к нему присоединяют линейный гаситель в виде массы m_2 на пружине жёсткости c_2 (рис. 47). При этом гаситель колебаний таков, что его парциальная частота настроена на частоту возмущения $\omega = n_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}$. В этом случае $q_1 = 0$, $q_2 \neq 0$.

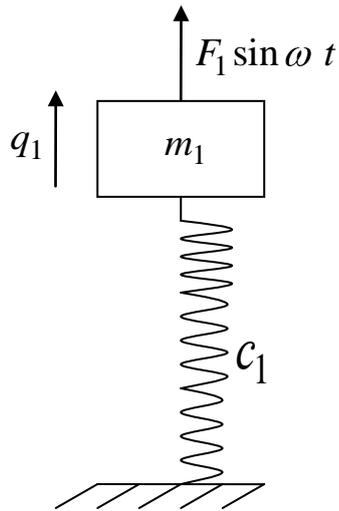


Рис. 46

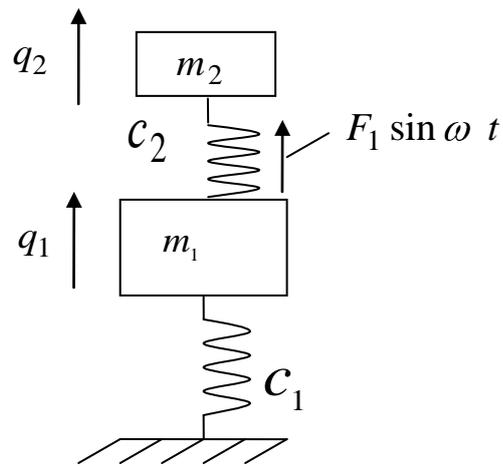


Рис. 47

Недостатки линейных гасителей колебаний:

1. Гашение происходит только на частоте антирезонанса, в широком частотном диапазоне гашение исключено.

2. Высокая чувствительность гашения по отношению к вариации параметров машины (при изменении жесткости амортизаторов, величины масс, сил сопротивления эффективность гашения резко падает).

Поэтому для гашения в широком диапазоне обычно используют нелинейные гасители колебаний виброударного типа. Такие гасители называются пассивными гасителями. Существуют также активные гасители, в которых используется система автоматического управления.

5. Колебания вращающихся валов

Рассмотрим круглый вал, вращающийся с угловой скоростью ω . Посередине вала насажен эксцентрично диск (рис. 48). Обозначим через e эксцентриситет диска – расстояние от его центра масс до недеформированной оси вала. Массой вала по сравнению с массой диска m будем пренебрегать. При вращении на вал со стороны диска действует сила инерции \vec{J} (центробежная сила), под действием которой вал приобретает поперечную деформацию (рис. 49). Пусть r – поперечная деформация вала в месте насадки диска. Тогда

модуль центробежной силы $J = m (\ell + r) \cdot \omega^2$. Эта сила уравновешивается упругой силой \vec{F} вала, её модуль $F = c r$.

Коэффициент жёсткости c вала определяется в ходе решения следующей задачи сопротивления материалов: имеем балку длиной ℓ , к середине балки приложена сила \vec{F} . Найти прогиб балки в точке приложения этой силы (рис. 50).

Очевидно, $R_A = R_B = \frac{F}{2}$. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид

$$E J y'' = M,$$

где E – модуль упругости; J – момент инерции сечения вала, равный

$J = \frac{\pi R^4}{4}$, если вал круглый. Изгибающий момент в сечении

$M = R_A x = \frac{F}{2} x$, значит, $y'' = \frac{F}{2 E J} x$.

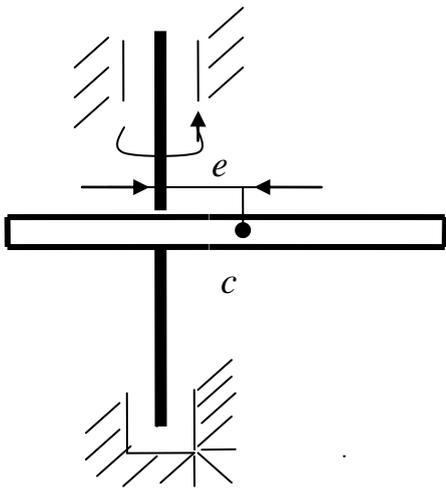


Рис. 48

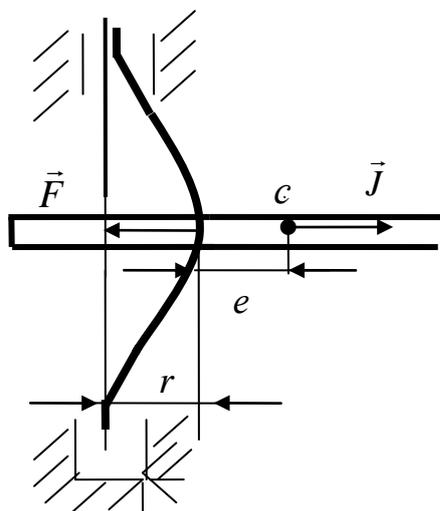


Рис. 49

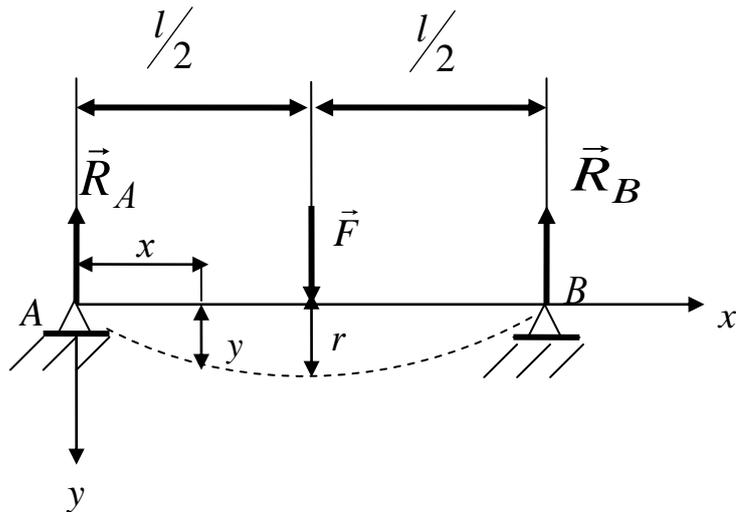


Рис. 50

Интегрируем это выражение первый раз:

$$y' = \frac{F}{4 E J} x^2 + C_1.$$

Постоянная C_1 ищется из условия, что сечение в середине вала не поворачивается: $y' /_{x=\frac{\ell}{2}} = 0$. Тогда $C_1 = -\frac{F}{4 E J} \frac{\ell^2}{4}$ и, следовательно,

$$y' = \frac{F}{4 E J} \left(x^2 - \frac{\ell^2}{4} \right).$$

Интегрируем второй раз:

$$y = \frac{F}{4 E J} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{\ell^2}{4} x \right) + C_2.$$

В точке A прогиб отсутствует, отсюда $y /_{x=0} = 0$. Следовательно, $C_2 = 0$, мы получаем следующее уравнение упругой линии вала:

$$y = \frac{F}{4 E J} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{\ell^2}{4} x \right). \quad (110)$$

Для нахождения величины r нужно в (110) подставить $x = \frac{\ell}{2}$.

Тогда получим $r = \frac{F \ell^3}{48 E J}$. Следовательно, коэффициент жёсткости вала

$$c = \frac{F}{r} = 48 \cdot \frac{E J}{\ell^3}.$$

Из условия, что сила инерции \vec{J} (центробежная сила) уравновешивается упругой силой \vec{F} вала, т. е. $J = F$, получаем

$$m \left(e + r \right) \omega^2 = c r, \text{ откуда } r = \frac{m e \omega^2}{c - m \omega^2}.$$

Обозначим $\kappa = \sqrt{\frac{c}{m}}$ частоту собственных колебаний диска на невращающемся валу, тогда

$$r = \frac{e}{\frac{\kappa^2}{\omega^2} - 1}.$$

Если $\omega \rightarrow \kappa$, то $r \rightarrow \infty$. Частота, при которой поперечные прогибы вала неограниченно возрастают, называется критической частотой вращения. В данной задаче критическая частота вращения совпадает с собственной частотой поперечных колебаний диска на невращающемся валу: $\omega_{кр} = \kappa$.

В общем случае критическая частота не совпадает с собственной. Пусть диск насажен несимметрично относительно опор, тогда при поперечных колебаниях он будет поворачиваться. При этом вследствие влияния кориолисовых сил инерции возникает гироскопический момент, а критическая частота увеличивается по отношению к собственной.

6. Свободные колебания вала околостационарного положения

Исследуем случай, когда сечение вала имеет различные главные моменты инерции, а значит, и различную изгибную жёсткость. Предположим также, что начальный эксцентриситет отсутствует ($e = 0$). Рассмотрим возмущённое положение диска, показанное на рис. 51. Оси координат x, y жестко связаны с диском и выбраны параллельно главным осям инерции сечения вала (1 и 2). При этом система координат Oxy вращается с угловой скоростью ω вала.

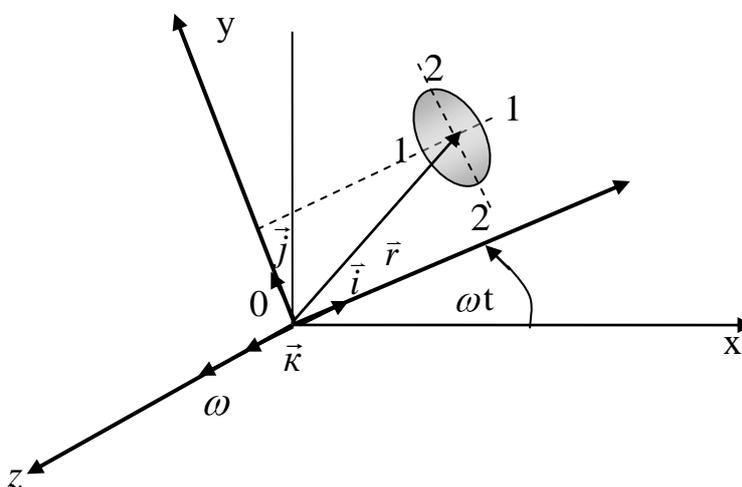


Рис. 51

Уравнение поперечных колебаний диска во вращающейся системе координат имеет вид

$$m \vec{w}_r = \vec{F} + \vec{J}_e + \vec{J}_c, \quad (111)$$

где \vec{w}_r – относительное ускорение центра масс вала; \vec{F} – упругая сила; \vec{J}_e и \vec{J}_c – соответственно переносная и кориолисова силы инерции.

Пусть центр масс вала в подвижной системе координат задаётся радиусом-вектором $\vec{R} = x \vec{i} + y \vec{j}$ (через координаты центра масс). Учитывая, что векторы угловой скорости вала и относительной скорости центра масс вала определяются соотношениями $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}$ и $\vec{v}_r = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j}$, получим выражения для сил, входящих в (111):

$$\vec{F} = -c_1 x \vec{i} - c_2 y \vec{j},$$

где c_1 и c_2 – изгибная жёсткость вала в направлениях 1–1 и 2–2;

$$\begin{aligned} \vec{J}_e &= m \omega^2 \vec{R}; \\ \vec{J}_c &= -2m \vec{\omega} \times \vec{v}_r = -2m \omega \vec{k} \times (\dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j}) = -2m \omega (\dot{y} \vec{i} - \dot{x} \vec{j}). \end{aligned}$$

Так как $\vec{w}_r = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j}$, то, записывая (111) в проекциях на оси подвижной системы координат, получим

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -c_1 x + m \omega^2 x + 2m \omega \dot{y}; \\ m \ddot{y} = -c_2 y + m \omega^2 y - 2m \omega \dot{x}, \end{cases}$$

или, сократив на массу m ,

$$\begin{cases} \ddot{x} + (k_1^2 - \omega^2) x - 2\omega \dot{y} = 0; \\ \ddot{y} + (k_2^2 - \omega^2) y + 2\omega \dot{x} = 0, \end{cases} \quad (112)$$

где

$$k_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}}.$$

Решение системы (112) ищем в форме

$$x = A_1 \cdot e^{r t}, \quad y = A_2 \cdot e^{r t}. \quad (113)$$

Подставив (113) в (112), получим систему двух однородных уравнений относительно A_1 и A_2 :

$$\begin{cases} (r^2 + \kappa_1^2 - \omega^2) A_1 - 2\omega r A_2 = 0; \\ 2\omega r A_1 + (r^2 + \kappa_2^2 - \omega^2) A_2 = 0. \end{cases}$$

Для нахождения ненулевого решения необходимо определитель системы приравнять к нулю:

$$\begin{vmatrix} r^2 + \kappa_1^2 - \omega^2 & -2\omega r \\ 2\omega r & r^2 + \kappa_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$r^4 + r^2 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\omega^2) - (\kappa_1^2 - \omega^2)(\kappa_2^2 - \omega^2) = 0.$$

Решив это биквадратное уравнение, получим два действительных корня:

$$r_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[-(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\omega^2) \pm \sqrt{(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)^2 + 8\omega^2 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)} \right]. \quad (114)$$

Если $r_{1,2}^2 < 0$, то характеристические показатели в выражениях (113) будут мнимыми, что соответствует устойчивому колебанию вала около стационарного положения. Если r_1^2 или r_2^2 больше нуля, то среди характеристических показателей будут положительные и отклонения вала x и y будут аperiodически нарастать со временем, что соответствует случаю неустойчивости. Таким образом, из (114) следует, что критическому состоянию вала соответствует условие

$$\sqrt{(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)^2 + 8\omega^2 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)} \geq \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\omega^2.$$

Возведя обе части последнего равенства в квадрат и приведя подобные члены, получим

$$(\omega^2 - \kappa_1^2)(\omega^2 - \kappa_2^2) \leq 0.$$

Это неравенство удовлетворяется, если ω лежит в пределах

$$\kappa_1 \leq \omega \leq \kappa_2, \quad (115)$$

что и доказывает неустойчивость движения вала в некотором интервале угловых скоростей вращения.

В случае круглого вала его изгибная жёсткость одинакова в любом направлении $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, следовательно, $\kappa_1 = \kappa_2 = \sqrt{\frac{c}{m}}$

и область (115) вырождается в точку $\omega = \omega_{кр} = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

Таким образом, круглый вал теряет устойчивость стационарного положения при достижении угловой скорости критического значения: $\omega_{кр} = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

7. Колебания вращающегося горизонтального вала с учётом веса диска

Предположим, что ось вала (рис. 52) горизонтальна. При составлении уравнений движения в этом случае необходимо учесть также силу веса, проекции которой соответственно равны $-mq \sin \omega t$, $-mq \cos \omega t$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} \ddot{x} + \kappa_1^2 - \omega^2 x - 2\omega \dot{y} = -q \sin \omega t; \\ \ddot{y} + \kappa_2^2 - \omega^2 y + 2\omega \dot{x} = -q \cos \omega t, \end{cases} \quad (116)$$

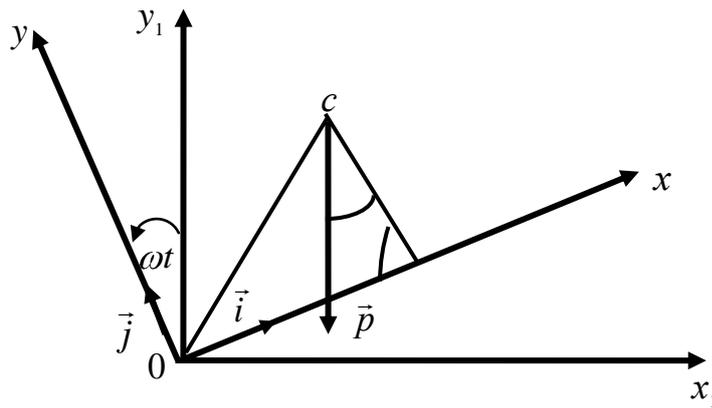


Рис. 52

которая отличается от системы (112) наличием правых частей. Общий интеграл систем (116) состоит из суммы решения однородной задачи (112) и частного интеграла уравнений (116). Рассмотрим частный интеграл системы (116), чтобы выяснить ещё одну возможность критического состояния. Чисто вынужденные колебания ищем в виде

$$x = A_1 \sin w t, \quad y = A_2 \cos w t. \quad (117)$$

Подставляя (117) в уравнения (116), приходим к неоднородной системе алгебраических уравнений для амплитуд \$A_1\$ и \$A_2\$:

$$\begin{cases} (\kappa_1^2 - 2\omega^2) A_1 + 2\omega^2 A_2 = -q, \\ 2\omega^2 A_1 + (\kappa_2^2 - 2\omega^2) A_2 = -q. \end{cases}$$

Решив систему, получим

$$A_1 = -q \frac{\kappa_2^2 - 4\omega^2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 - 2\omega^2 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)},$$

$$A_2 = -q \frac{\kappa_1^2 - 4\omega^2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 - 2\omega^2 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)}$$

Критическое состояние наступает, если знаменатель полученных выражений стремится к нулю; это возможно при условии

$$\omega^2 = \frac{\kappa_1^2 \kappa_2^2}{2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)} \quad (118)$$

Полагая в (118) $\kappa_1 \approx \kappa_2$, получим

$$\omega \approx \frac{\kappa_1}{2} \approx \frac{\kappa_2}{2}.$$

Таким образом, для круглого вала критическое состояние возможно при угловой скорости, равной половине обычной критической скорости $\omega_{кр}$.

IV. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

1. Свободные колебания системы с несколькими степенями свободы

Как было показано ранее, потенциалы и кинетическая энергия системы с несколькими степенями свободы определяются формулами (83), (88). Составим уравнения Лагранжа второго рода, для этого определим производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^s a_{i j} \dot{q}_j; \quad \frac{d}{d t} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^s a_{i j} \ddot{q}_j; \quad \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^s c_{i j} q_j.$$

В результате получим s линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{j=1}^s (a_{i j} \ddot{q}_j + c_{i j} q_j) = 0. \quad (119)$$

Частное решение этой системы порядка $2s$ будем искать в виде

$$q_j = A_j \sin \kappa t + \alpha, \quad (120)$$

где A_j, κ, α – неизвестные постоянные.

После подстановки (120) в (119) и сокращения на $\sin \kappa t + \alpha$ придём к линейной однородной системе уравнений относительно A_j :

$$\sum_{j=1}^s (c_{i j} - \kappa^2 a_{i j}) A_j = 0. \quad (121)$$

Эта система имеет нетривиальное решение лишь в том случае, если её определитель равен нулю:

$$\Delta \kappa^2 = \begin{vmatrix} c_{i j} - \kappa^2 a_{i j} \end{vmatrix} = 0.$$

Получили уравнение степени s относительно неизвестной κ^2 , которое называется частотным. Это уравнение в развёрнутом виде представится так:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \kappa^2 a_{11} & c_{12} - \kappa^2 a_{12} & \dots & c_{1s} - \kappa^2 a_{1s} \\ c_{21} - \kappa^2 a_{21} & c_{22} - \kappa^2 a_{22} & \dots & c_{2s} - \kappa^2 a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} - \kappa^2 a_{s1} & c_{s2} - \kappa^2 a_{s2} & \dots & c_{ss} - \kappa^2 a_{ss} \end{vmatrix} = 0 .$$

Отметим, что частотный определитель симметричен, так как $c_{ij} = c_{ji}$, $a_{ij} = a_{ji}$. После раскрытия определителя получаем

$$\Delta(\kappa^2) = (\kappa^2)^s + B_1(\kappa^2)^{s-1} + \dots + B_{s-1}\kappa^2 + B_s = 0 .$$

Находим s положительных корней; будем считать, что они различны:

$$0 < \kappa_1^2 < \kappa_2^2 < \dots < \kappa_s^2 .$$

Числа $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_s$ характеризуют s неодинаковых собственных частот. Наименьшая частота κ_1 называется основной, или главной, собственной частотой; $\kappa_2, \kappa_3, \dots, \kappa_s$ – последующие частоты, называемые обертонами. Каждой собственной частоте отвечает своё решение системы уравнений (121). Так, для частоты κ_m будем иметь коэффициенты формы $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \dots, A_s^{(n)}$. Подставим эти значения в (121):

$$\sum_{j=1}^s (c_{ij} - \kappa_m^2 a_{ij}) A_j^{(n)} = 0 . \tag{122}$$

Коэффициенты формы всегда определяются с точностью до произвольной постоянной. Условимся выбирать эту постоянную так, чтобы удовлетворялось условие нормировки:

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_{i j} A_i^{(n)} A_j^{(n)} = 1 . \quad (123)$$

Перепишем (122), заменив индекс « m » на r ($m \neq r$):

$$\sum_{j=1}^s (c_{i j} - \kappa_r^2 a_{i j}) A_j^{(n)} = 0 . \quad (124)$$

Умножим (122) на $A_i^{(n)}$, а (124) на $A_i^{(n)}$, из первого вычтем второе и просуммируем как по i , так и по j . Получим

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s (c_{i j} - \kappa_m^2 a_{i j}) A_j^{(n)} A_i^{(n)} - \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s (c_{i j} - \kappa_r^2 a_{i j}) A_i^{(n)} A_j^{(n)} = 0 .$$

Во второй сумме проведём замену i на j . Тогда получим

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s (c_{i j} - c_{j i} - \kappa_m^2 a_{i j} + \kappa_r^2 a_{j i}) A_j^{(n)} A_i^{(n)} = 0 ,$$

ИЛИ

$$\kappa_r^2 - \kappa_m^2 \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_{i j} A_j^{(n)} A_i^{(n)} = 0 .$$

Если $\kappa_r \neq \kappa_m$, то получим

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_{i j} A_j^{(n)} A_i^{(n)} = 0 . \quad (125)$$

Равенство (125) характеризует так называемую ортогональность собственных форм колебаний. Согласно (123) и (125), выделено s ортогональных и нормированных собственных колебаний.

Общий интеграл уравнений (125) представляется в виде суперпозиций s гармонических колебаний с частотами κ_m :

$$q_i = \sum_{m=1}^s c_m A_i^{(n)} \sin(\kappa_m t - \alpha_m), \quad (\kappa = 1, 2, \dots, s). \quad (126)$$

Этот общий интеграл зависит от $2s$ произвольных постоянных $c_1, c_2, \dots, c_s; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$. Пусть

$$\xi_m = c_m \sin(\kappa_m t + \alpha_m). \quad (127)$$

Тогда (126) можно переписать в следующем виде:

$$q_i = \sum_{m=1}^s A_i^{(n)} \xi_m. \quad (128)$$

Равенства (128) можно истолковать как задающие переход от исходных обобщённых координат q_1, q_2, \dots, q_s к новым $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$. Существенно, что коэффициенты такой замены переменных не зависят от произвольных постоянных интегрирования.

Новые координаты, согласно (127), удовлетворяют не связанным друг с другом дифференциальным уравнениям, как и в случае с двумя степенями свободы. Новые координаты называются нормальными.

Итак, при любом числе степеней свободы возможен переход к нормальным координатам, при котором уравнения движения системы разделяются, причём каждое из них совпадает с уравнением гармонических колебаний груза на пружине.

2. Вынужденные колебания системы с несколькими степенями свободы

Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний системы имеют вид

$$\sum_{j=1}^s (m_{ij} \ddot{q}_j + c_{ij} \dot{q}_j) = F_i(t) \quad (129)$$

Они отличаются от (119) тем, что в правых частях стоят функции $F_i(t)$. Свободные колебания системы изучены в предыдущем подразделе, поэтому рассмотрим лишь чисто вынужденные колебания, которые будем искать в виде суммы:

$$q_j = \sum_{r=1}^s A_j^{(r)} \xi_r(t) \quad (130)$$

Формулы (130) полностью отвечают переходу от старых обобщённых координат к нормальным. Подставим (130) в (129), получим

$$\sum_{r=1}^s \sum_{j=1}^s A_j^{(r)} (m_{ij} \ddot{\xi}_r + c_{ij} \dot{\xi}_r) = F_i(t) \quad (131)$$

Согласно (122),

$$\sum_{j=1}^s c_{ij} A_j^{(r)} = \sum_{j=1}^s \kappa_r^2 a_{ij} A_j^{(r)} \quad (132)$$

С учётом (132) уравнения (131) преобразуются к виду

$$\sum_{r=1}^s \sum_{j=1}^s A_j^{(r)} (a_{ij} \ddot{\xi}_r + \kappa_r^2 \xi_r) = F_i(t) \quad (133)$$

Умножим каждое уравнение системы (133) на $A_i^{(r)}$ и сложим:

$$\sum_{r=1}^s (\ddot{\xi}_r + \kappa_r^2 \xi_r) \sum_{i=1}^s a_{ij} A_j^{(r)} A_i^{(r)} = \sum_{i=1}^s A_i^{(r)} F_i(t) \quad (134)$$

Воспользуемся условиями нормировки (123) и ортогональности (125) собственных форм. В результате из (134) получаем

$$\ddot{\xi}_m + \kappa_m^2 \xi_m = \sum_{i=1}^s A_i \overleftarrow{F}_i \overrightarrow{\leftarrow}. \quad (135)$$

Пусть $F_i \overleftarrow{\leftarrow} = h_i \sin(\omega \cdot t)$, где h_i – различные амплитуды возмущений; ω – общая вынужденная частота колебаний.

Тогда выражения (135) примут вид

$$\ddot{\xi}_m + \kappa_m^2 \xi_m = \sum_{i=1}^s A_i \overleftarrow{h}_i \sin(\omega \cdot t). \quad (136)$$

Уравнения (136) эквивалентны дифференциальному уравнению вынужденных колебаний груза на пружине (55). Поэтому в соответствии с (57) можно написать

$$\xi_m = \sum_{i=1}^s A_i \overleftarrow{h}_i \frac{\sin(\omega \cdot t)}{\kappa_m^2 - \omega^2}. \quad (137)$$

Подстановка (137) в (139) приводит к закону чисто вынужденных колебаний:

$$q_i = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s A_j \overleftarrow{A}_j \overrightarrow{A}_i \overleftarrow{\leftarrow} \frac{h_i}{\kappa_2^2 - \omega^2}. \quad (138)$$

Чисто вынужденные колебания системы, согласно (138), носят гармоничный характер. Их амплитуда по координате q_i

$$A_j \overleftarrow{\leftarrow} = \sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^s A_j \overleftarrow{A}_j \overrightarrow{A}_i \overleftarrow{\leftarrow} \frac{h_i}{\kappa_2^2 - \omega^2}.$$

Она стремится к бесконечности при $\omega \rightarrow \kappa_k$. Следовательно, консервативная система с s степенями свободы может резонировать на s собственных частотах. Типовая амплитудно-частотная характеристика для системы с четырьмя степенями свободы показана на рис. 53.

В интервалах между резонансами здесь, как и для системы с двумя степенями свободы, возможны антирезонансы. В этом случае одна из обобщённых координат будет равна нулю (рис. 54).

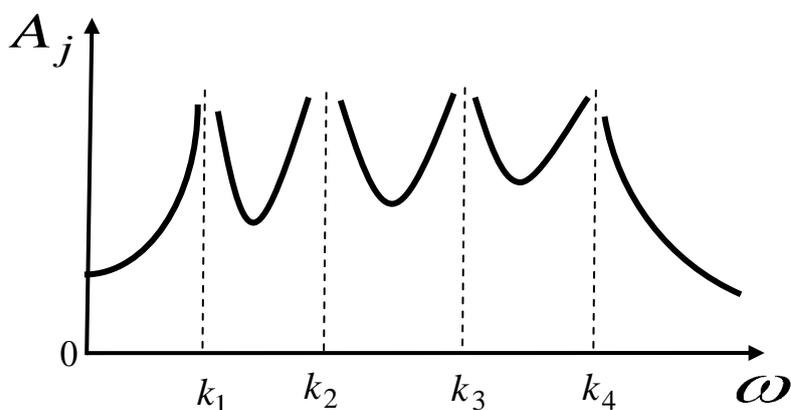


Рис. 53

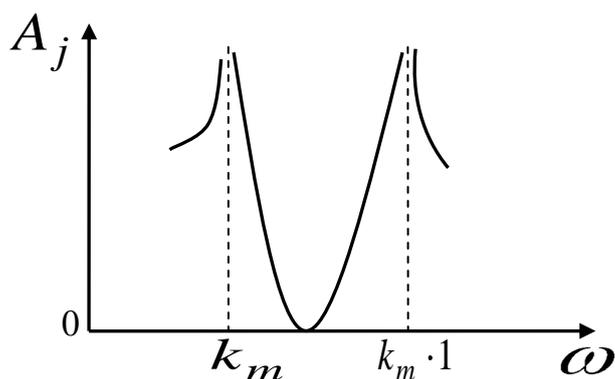


Рис. 54

3. Колебания цепочки упругосвязанных тел

Однородная цепочка упругосвязанных тел является примером системы с несколькими степенями свободы, движение которой изучается до конца в замкнутом виде. Рассмотрим s тел с одинаковой массой m , соединённых одинаковыми пружинами жёсткости c (рис. 55). Трением о поверхность будем пренебрегать. Задача имитирует свободные колебания состава вагонеток.

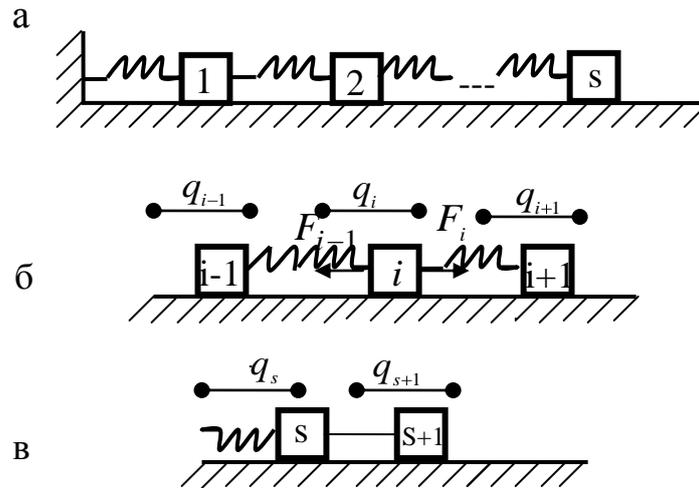


Рис. 55

Пусть q_1, q_2, \dots, q_s – продольные смещения вагонеток, отсчитываемые от их статического положения равновесия (см. рис. 55).

Дифференциальное уравнение движения i -й вагонетки имеет вид

$$m \ddot{q}_i = F_i - F_{i-1}, \quad (139)$$

причём $F_i = c (q_{i+1} - q_i) = 0$, $F_{i-1} = c (q_i - q_{i-1})$. Тогда выражение (139) примет вид

$$m \ddot{q}_i + c (q_i - q_{i+1} - q_{i-1}) = 0. \quad (140)$$

Первая вагонетка взаимодействует со второй и локомотивом, её продольную координату обозначим q_0 . Будем считать

$$q_0 = 0. \quad (141)$$

Для s -й вагонетки в уравнении (140) нужно предусмотреть координату q_{s+1} , но $(s+1)$ -й вагонетки нет. Будем считать, что она есть и жестко связана с s -й вагонеткой (см. рис. 55, в), поэтому

$$q_s = q_{s+1}. \quad (142)$$

Будем искать решение системы (140) в виде

$$q_i = A_i \sin(\kappa t + \alpha),$$

где A_i, κ, α – неизвестные постоянные.

Подставляем это выражение в (140). После упрощений будем иметь

$$-m \kappa^2 A_i + c (A_i - A_{i+1} - A_{i-1}) = 0. \quad (143)$$

Так как $q_s = q_{s+1}$ и $q_0 = 0$, то из (141) и (142) получим

$$A_0 = 0; \quad (144)$$

$$A_{s+1} = A_s. \quad (145)$$

Решение системы однородных линейных алгебраических уравнений будем искать в виде

$$A_i = B \sin(pi), \quad (146)$$

где B, p – неизвестные постоянные.

Подставим (146) в (143). После сокращения на B получим

$$-m \kappa^2 \sin(pi) + c [\sin(pi) - \sin(p(i+1)) - \sin(p(i-1))] = 0,$$

или

$$-m \kappa^2 \sin(pi) + c [\sin(pi) - 2 \sin(pi) \cdot \cos p] = 0.$$

Откуда

$$\cos p = 1 - \frac{m \kappa^2}{2c}. \quad (147)$$

Отметим, что выражение (146) удовлетворяет условию (144). Из (145) следует, что $\sin(ps) = \sin(p \cdot (s+1))$. Это возможно в двух случаях:

$$a) p s = p (s+1) + 2\pi j.$$

Это даёт $p = -2 \pi j$, откуда в соответствии с (146) $A_i = 0$. Таким образом, этот случай нужно отбросить;

$$б) \quad ps = \pi \left(j - \frac{1}{2} \right) - p \left(s + \frac{1}{2} \right)$$

тогда

$$p = \pi \frac{2j - 1}{2s + 1}. \quad (148)$$

Из (146) получим

$$A_i \left(\frac{2j - 1}{2s + 1} \pi i \right) = B \sin \frac{2j - 1}{2s + 1} \pi i. \quad (149)$$

Согласно формуле (149) получаем s различных значений коэффициентов: $A_i \left(\frac{2j - 1}{2s + 1} \pi i \right) : A_i \left(\frac{2j - 1}{2s + 1} \pi \right), A_i \left(\frac{2j - 1}{2s + 1} \pi \right), \dots, A_i \left(\frac{2j - 1}{2s + 1} \pi \right)$. Так как

$$A_i \left(\frac{2j - 1}{2s + 1} \pi \right) = 0, \quad A_i \left(\frac{2j - 1}{2s + 1} \pi \right) = -A_i \left(\frac{2j - 1}{2s + 1} \pi \right), \quad A_i \left(\frac{2j - 1}{2s + 1} \pi \right) = -A_i \left(\frac{2j - 1}{2s + 1} \pi \right).$$

Знак здесь принципиального значения не имеет.

Таким образом, число амплитуд $A_i \left(\frac{2j - 1}{2s + 1} \pi i \right)$ соответствует числу собственных частот состава вагонеток. Величины $A_i \left(\frac{2j - 1}{2s + 1} \pi i \right)$ являются коэффициентами ортогональных форм.

Выберем постоянную B так, чтобы коэффициенты форм удовлетворяли условию нормировки, т. е.

$$\sum_{i=1}^s \left(A_i \left(\frac{2j - 1}{2s + 1} \pi i \right) \right)^2 = 1$$

или, согласно (123) и (149):

$$m B^2 \sum_{i=1}^s \sin^2 \frac{2j - 1}{2s + 1} \pi i = 1. \quad (150)$$

Очевидно,

$$\sum_{i=1}^s \sin^2 \frac{2j-1}{2s+1} \cdot \pi i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \left(1 - \cos \frac{2j-1}{2s+1} \cdot 2\pi i \right) = \frac{s}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^s \cos \frac{2j-1}{2s+1} \cdot 2\pi i. \quad (151)$$

Вычислим сумму косинусов, стоящую в предыдущем равенстве:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \cos \frac{2j-1}{2s+1} \cdot 2\pi i &= \frac{\sin \frac{2j-1}{2s+1} \pi \cdot \cos \frac{2j-1}{2s+1} \cdot 2\pi + \sin \frac{2j-1}{2s+1} \pi \cdot \cos \frac{2j-1}{2s+1} 4\pi + \dots}{\sin \frac{2j-1}{2s+1} \pi} \\ &+ \frac{\sin \frac{2j-1}{2s+1} \pi \cdot \cos \frac{2j-1}{2s+1} 2s\pi - \sin \frac{2j-1}{2s+1} \pi + \sin \frac{2j-1}{2s+1} 3\pi - \sin \frac{2j-1}{2s+1} 3\pi + \dots}{2 \sin \frac{2j-1}{2s+1} \pi} \\ &+ \frac{\sin \frac{2j-1}{2s+1} 5\pi - \dots + \sin \frac{2j-1}{2s+1} \overbrace{(s-1)\pi} - \sin \frac{2j-1}{2s+1} \overbrace{(s-1)\pi} + \sin \overbrace{(j-1)\pi}}}{\dots} \end{aligned}$$

Все слагаемые в числителе этой дроби, кроме первого и последнего, взаимно уничтожаются. Последнее слагаемое равно нулю, поэтому

$$\sum_{i=1}^s \cos \frac{2j-1}{2s+1} \cdot 2\pi i = -\frac{1}{2}.$$

Из (151) получаем

$$\sum_{i=1}^s \sin^2 \frac{2j-1}{2s+1} \cdot \pi i = \frac{2s+1}{4}.$$

После подстановки в (150) получим

$$B = \frac{2}{\sqrt{m \overbrace{(s+1)}}}$$

Поэтому из (149) будем иметь

$$A_i^j = \frac{2}{\sqrt{m} \left(\frac{2s+1}{2} \right)} \sin \frac{2j-1}{2s+1} \pi i . \quad (152)$$

Из (147) и (148) получаем

$$\kappa_j^2 = \frac{2c}{m} \left[1 - \cos \frac{2j-1}{2s+1} \pi \right] .$$

Рассмотрим чисто вынужденные колебания состава вагонеток под действием гармонической силы, приложенной к последней вагонетке. Воспользуемся (138). В нашем случае $h_1 = h_2 = \dots = h_{s-1} = 0$, $h_s = h$. В сумме по i нужно сохранить только последнее слагаемое: $i = s$. Тогда из (138) получим

$$q_j = \sum_{r=1}^s \frac{A_j^r \widehat{A}_s^r h}{\kappa_r^2 - \omega^2} \sin \omega t .$$

С учётом (152) имеем:

$$q_j = \frac{2h}{c \left(\frac{2s+1}{2} \right)} \sum_{r=1}^s \frac{\sin \frac{2r-1}{2s+1} \pi j \cdot \sin \frac{2r-1}{2s+1} \pi s}{1 - \cos \frac{2r-1}{2s+1} \pi - \omega^2} \sin \omega t .$$

Разработанная задача математически эквивалентна задаче о крутильных колебаниях вала с s маховиками, один конец которого закреплён (рис. 56).

Сделаем следующие предположения:

1. Маховики имеют одинаковые осевые моменты инерции I .
2. Длина звеньев участка вала одинаковая и равна ℓ .
3. Поворотной инерцией участков вала пренебрегаем (она мала по сравнению с инерцией маховика). При этом участок вала играет роль пружины кручения.

Под действием крутящего момента M вал закручивается на величину $\varphi = \frac{M \ell}{G J_p}$, где G – модуль сдвига, J_p – полярный момент инерции поперечного сечения вала. Жёсткость участка вала на кручение

$$c = \frac{M}{\varphi} = \frac{G J_p}{\ell} . \quad (153)$$

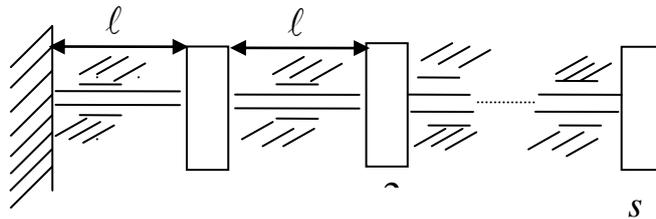


Рис. 56

Пусть φ_i – упругие повороты маховиков, отсчитываемые от положений равновесия. Тогда дифференциальное уравнение поворотных колебаний i -го маховика (рис. 57)

$$I \ddot{\varphi}_i = M_i - M_{i-1} .$$

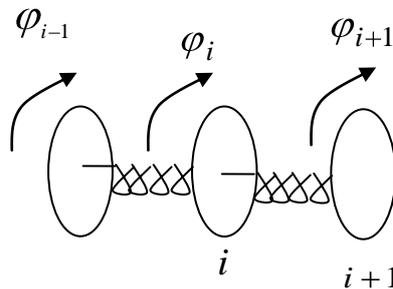


Рис. 57

Соответственно, $M_i = c (\varphi_{i+1} - \varphi_i)$, $M_{i-1} = c (\varphi_i - \varphi_{i-1})$. Тогда

$$I \ddot{\varphi}_i + c (\varphi_i - \varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}) = 0 .$$

Данные уравнения совпадают с уравнениями колебаний ваго-
неток, если провести замену q на φ и t на I . После такой замены
будут справедливы все полученные ранее формулы для собственных
частот и коэффициентов форм.

Аналогия между продольными и крутильными колебаниями
будет проиллюстрирована далее.

V. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

1. Продольные и крутильные колебания стержней

Ранее предполагалось, что абсолютно твёрдые тела связаны упругими элементами, массой которых можно пренебречь. В действительности все упругие элементы обладают распределённой массой. Рассмотрим продольные колебания однородного стержня длиной l (рис. 58, а). Пусть S – площадь поперечного сечения стержня; ρ – плотность материала, из которого он сделан. Влиянием силы тяжести и силами сопротивления будем пренебрегать.

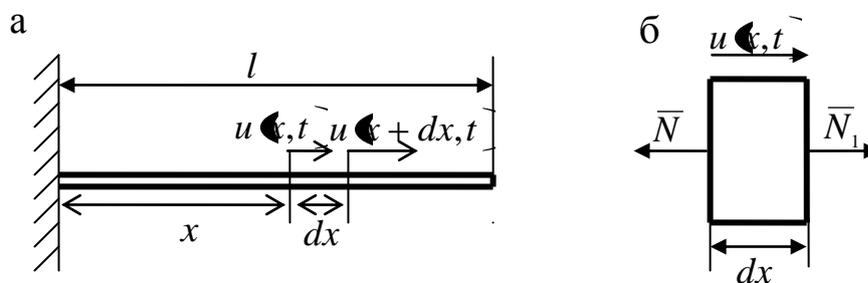


Рис. 58

При упругих колебаниях стержня сечение x сместится в момент t на величину $u(x, t)$, а сечение $x + dx$ – на $u(x + dx, t)$.

Относительная деформация выделенного элемента определится выражением

$$\varepsilon = \frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx}.$$

Разложим функцию $u(x + dx, t)$ в ряд Тейлора по x и сохраним слагаемые низшего порядка:

$$\varepsilon = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Нормальное напряжение определяется законом Гука:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x},$$

где E – модуль упругости материала, из которого сделан стержень.

Предполагаем, что нормальные напряжения равномерно распределены по поперечному сечению стержня. Тогда суммарная продольная сила

$$N = S\sigma = ES \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Напомним, что в сопротивлении материалов ES – жёсткость стержня на растяжение–сжатие. Составим дифференциальное уравнение движения выделенного элемента (см. рис. 58, б):

$$dm \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = N_1 - N,$$

где $dm = \rho S dx$, $N_1 = N(x+dx, t)$, $N = N(x, t)$.

В правой части уравнения N_1 разложим в ряд Тейлора:

$$\rho S dx \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = N + \frac{\partial N}{\partial x} \cdot dx - N,$$

откуда с учётом выражения для N

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (154)$$

Это уравнение в частных производных математически эквивалентно уравнению крутильных колебаний однородного стержня (рис. 59, а). Относительный сдвиг элемента стержня длиной dx

$$\gamma = \frac{\varphi(x+dx, t) - \varphi(x, t)}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} .$$

Из сопротивления материалов для крутящего момента имеем

$$M = G J_p \gamma = G J_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} .$$

Составим уравнение крутильных колебаний выделенного элемента (см. рис. 59, б):

$$dI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = M(x+dx, t) - M(x, t) = \frac{\partial M}{\partial x} dx = GJ_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx .$$

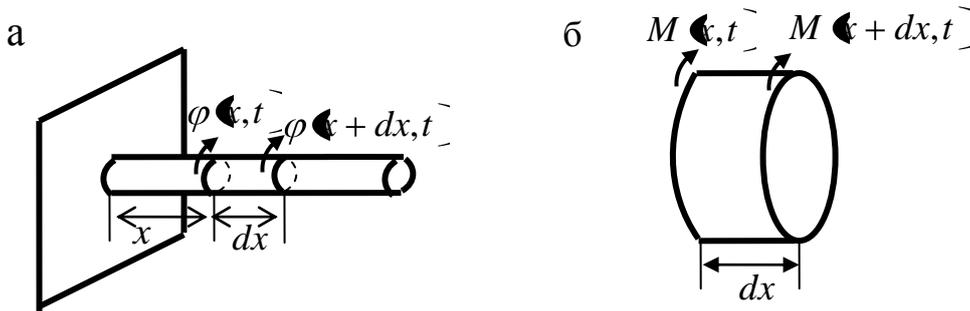


Рис. 59

Осей момент инерции выделенного элемента $dI = J_p dx \rho$, поэтому окончательно получаем

$$G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} . \quad (155)$$

Уравнение (155) перейдет в уравнение (154), если φ заменить на u , а G – на E . Обозначим $\frac{E}{\rho} = a^2$. Тогда (154) примет вид волнового уравнения

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \text{const} . \quad (156)$$

2. Понятие о бегущих волнах

Уравнение (156) допускает решение в виде общего интеграла, называемого интегралом Даламбера:

$$u = f_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{a}\right), \quad (157)$$

где f_1, f_2 – произвольные функции своих аргументов.

В частном случае, когда $f_2 = 0$, $f_1 = f$, из (157) получаем $u = f\left(t - \frac{x}{a}\right)$ – волну, бегущую в сторону увеличения x с постоянной скоростью a . Пусть $t - \frac{x}{a} = \xi$, тогда $u = f(\xi)$ (рис. 60, а). Для x будем иметь: $x = a\left(t - \xi\right)$ – линейный закон изменения координаты x .

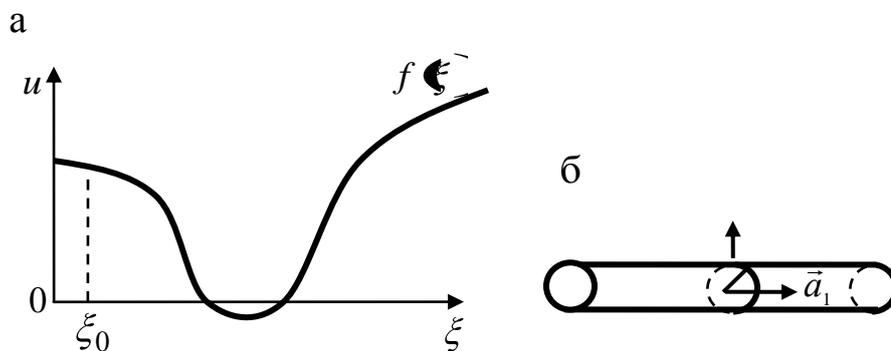


Рис. 60

Закон изменения продольных упругих смещений стержня получится, если допустить, что кривая $f(\xi)$ движется в сторону увеличения ξ с постоянной скоростью a .

Продольные колебания стержня в виде бегущей волны могут быть реализованы для бесконечного длинного стержня. Аналогично продольные упругие волны реализуются и в безграничной однородной упругой среде. Скорость распространения волн $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

По аналогии в безграничном стержне при крутильных колебаниях возможна также бегущая волна, распространяющаяся со скоростью $a_1 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$. Такая бегущая волна называется поперечной. В случае продольных волн упругие колебания происходят в направлении распространения волн, в случае поперечных волн смещения перпендикулярны распространению волны (см. рис. 60, б).

Поперечные волны возможны и в неограниченной среде. Модули упругости и сдвига связаны соотношением $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, где ν – коэффициент Пуассона. Найдём отношение фазовых скоростей продольных и поперечных волн:

$$\frac{a}{a_1} = \sqrt{\frac{E}{G}} = \sqrt{2(1+\nu)} > 1.$$

Таким образом, скорость распространения продольных волн всегда больше скорости распространения поперечных волн.

Рассмотрим частный случай синусоидальной бегущей волны:

$$u = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{a} \right),$$

где A , ω – амплитуда и круговая частота колебаний (рис. 61, а).

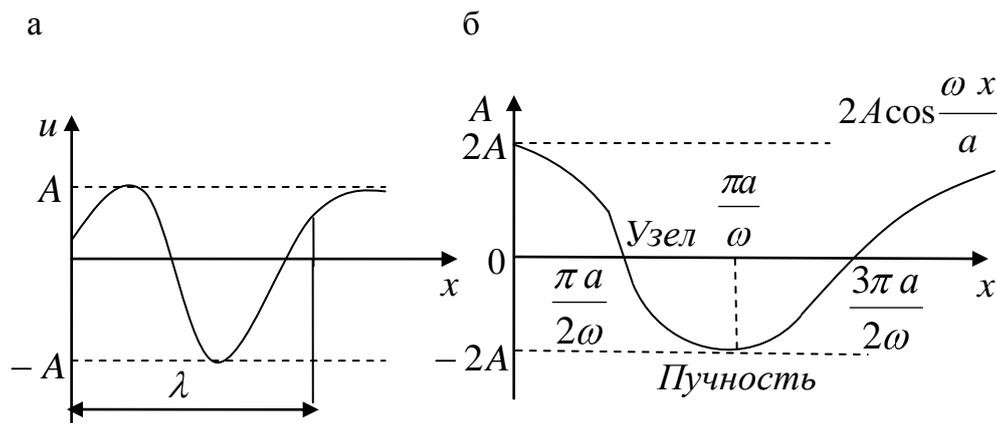


Рис. 61

Величина λ называется длиной волны (расстояние, прошедшее фронтом волны за период).

3. Понятие о стоячих волнах

Уединённые упругие волны, бегущие в заданном направлении, реализуются только в безграничной упругой среде или до момента достижения границ. После достижения границы происходит отражение. В результате в решении (157) появляется второе слагаемое, которое характеризует волну, бегущую с той же скоростью, но в противоположном направлении. Вследствие наложения волн, бегущих в противоположных направлениях, получаются стоячие волны. Рассмотрим наложение двух одинаковых гармонических волн (см. рис. 61, б):

$$u = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{a} \right) + A \sin \omega \left(t + \frac{x}{a} \right) = 2A \cos \frac{\omega x}{a} \cdot \sin \omega t .$$

В случае стоячих волн законы колебаний различных сечений стержней со временем не меняются. Сечения, имеющие максимальную амплитуду, называются пучностями, а покоящиеся сечения – узлами. Для тел конечных размеров наиболее характерны колебания стоячей формы.

4. Свободные колебания стержней конечных размеров

Для построения свободных колебаний (продольных или крутильных) стержня конечного размера волновое уравнение необходимо дополнить граничными условиями. Рассмотрим несколько случаев (рис. 62).

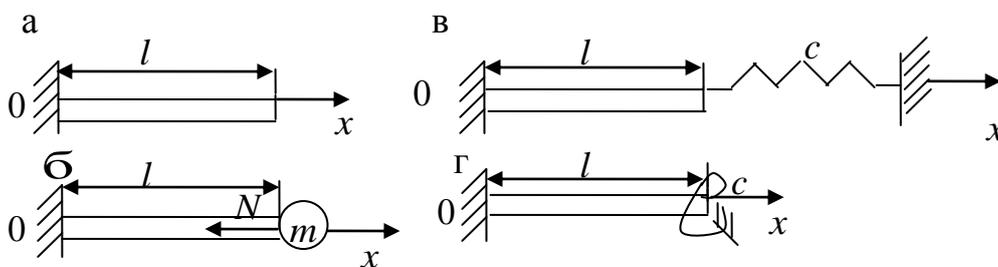


Рис. 62

1. Один конец стержня закреплён, другой свободен (см. рис. 62, а). На закреплённом конце

$$u|_{x=0} = 0. \quad (158)$$

Для крутильных колебаний $\varphi|_{x=0} = 0$. На свободном конце упругая сила равна нулю, $N|_{x=l} = ES \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0$, откуда $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0$; для крутильных колебаний получим $\frac{\partial \varphi}{\partial x}|_{x=l} = 0$.

2. Сосредоточенная масса на конце стержня (см. рис. 62, б). Уравнение движения этой массы имеет вид

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -N|_{x=l}.$$

Откуда

$$\left[m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + ES \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=l} = 0. \quad (159)$$

В случае крутильных колебаний стержня с маховиком на конце получим

$$\left[I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{x=\ell} = 0 ,$$

где I – осевой момент инерции маховика.

3. Подпруженный конец стержня (см. рис. 62, в). Граничные условия имеют вид:

$$\left[c u + ES \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=\ell} = 0 .$$

4. Стержень с пружиной кручения на конце (см. рис. 62, г). Условия на конце такие:

$$\left[c \varphi + GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{x=\ell} = 0 .$$

Решим уравнение (156) при граничных условиях (158) и (159). Частное решение, отвечающее свободным колебаниям, будем искать в виде

$$u(x, t) = V(x) \sin \kappa t , \quad (160)$$

где $V(x)$ – искомая форма стоячей волны; κ – заранее неизвестная частота колебаний.

Подставим (160) в выражение (156):

$$a^2 \frac{d^2 V}{dx^2} \sin \kappa t = V \left(\kappa^2 \sin \kappa t \right) .$$

Откуда

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \left(\frac{\kappa}{a} \right)^2 V = 0 .$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$V = c_1 \sin \frac{\kappa x}{a} + c_2 \cos \frac{\kappa x}{a}, \quad (161)$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Из условия (158) получаем $c_2 = 0$. Условие (159) даёт

$$m \kappa^2 \sin \frac{\kappa l}{a} = ES \cdot \frac{\kappa}{a} \cdot \cos \frac{\kappa l}{a}.$$

Откуда получаем трансцендентное уравнение для нахождения неизвестной частоты κ :

$$\operatorname{ctg} \frac{\kappa l}{a} = \frac{m a}{ES} \kappa, \quad (162)$$

которое называется частотным. Оно имеет бесчисленное множество положительных решений $0 < \kappa_1 < \kappa_2 < \dots$ (рис. 63), которые образуют частотный спектр. Наименьшая частота κ_1 называется *частотой основного тона*.

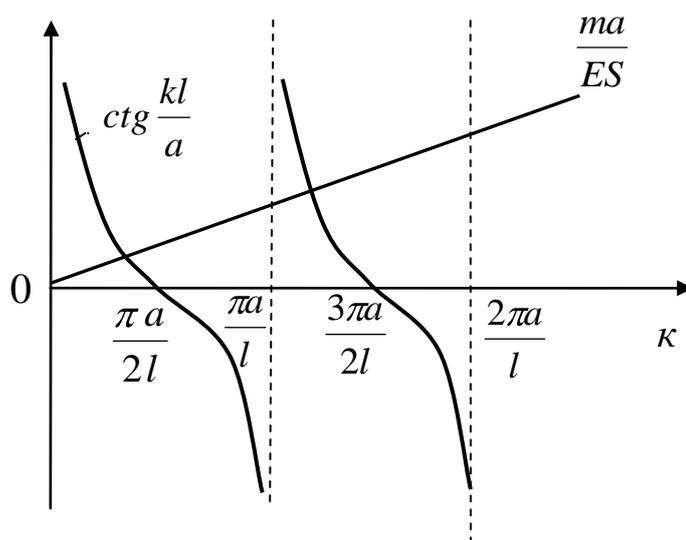


Рис. 63

Отметим, что система с распределёнными параметрами в отличие от систем с конечным числом степеней свободы имеет бесчисленное множество собственных частот. Для очень больших номеров s будем иметь приближённо

$$\kappa_s \approx \frac{(s-1)\pi a}{l}.$$

Рассмотрим частный случай $m=0$. В этом случае частотное уравнение (162) примет вид $ctg \frac{\kappa l}{a} = 0$, откуда $\kappa_s = \frac{\pi a}{2l} (2s-1)$.

Частотный диапазон между соседними частотами

$$\kappa_{s+1} - \kappa_s = \frac{\pi a}{2l} \cdot (2s+1) - \frac{\pi a}{2l} \cdot (2s-1) = \frac{\pi a}{l}.$$

Он не зависит от номера s частоты, откуда следует, что собственные частоты равномерно распределены на оси частот. Такой частотный спектр называется *эквидистантным*. При очень больших s эквидистантным является и спектр стержня с массой.

Каждой собственной частоте однородного стержня отвечает собственная форма:

$$V_s(x) = c_1 \sin \frac{\kappa_s x}{a},$$

или

$$V_s(x) = c_1 \sin \frac{\pi x}{2l} (2s-1).$$

Коэффициент c_1 найдём из условия нормировки:

$$\int_0^l V_s^2(x) dx = 1.$$

Получим

$$c_1^2 \cdot \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{2l} \cdot (s-1) dx = c_1^2 \frac{l}{2} = 1,$$

откуда $c_1 = \sqrt{\frac{2}{l}}$.

Собственные формы удовлетворяют условию ортогональности:

$$\int_0^l V_s(x) \cdot V_r(x) dx = 0 \quad (s \neq r)$$

Ортогональные и нормированные собственные формы однородного стержня будут

$$V_s(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin \frac{\pi x}{2l} \quad (s-1)$$

На рис. 64 изображены графики собственных форм для $s = 1, 2, 3$.

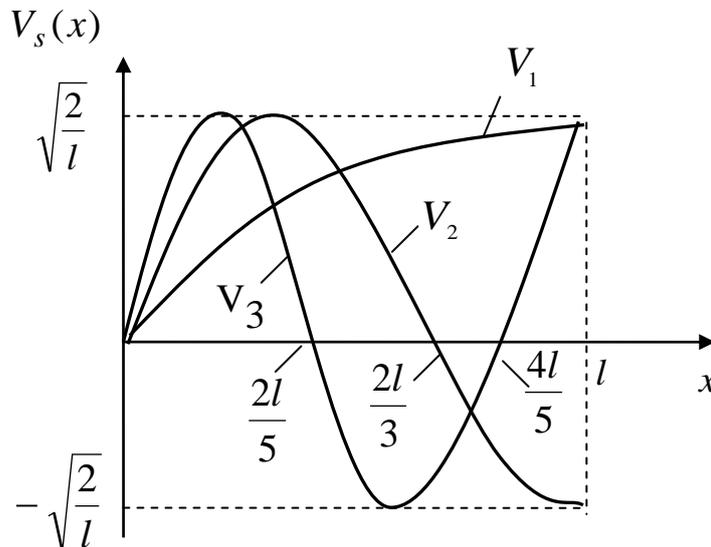


Рис. 64

Частоте κ_1 отвечает безузловая форма колебаний, частотам κ_s (произвольный обертон) отвечают формы упругих колебаний с $s-1$ узлами. Таким образом, при основной частоте все сечения стержня колеблются в фазе, при высших обертонах участки стержня между узлами колеблются в противофазе.

Одночастотные колебания с одной из собственных частот реализуются при строго определённых условиях. При произвольных начальных условиях колебания носят характер наложения (суперпозиции) колебаний с различными частотами:

$$u(x, t) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s(x) \sin(\kappa_s t + \alpha_s),$$

где A_s и α_s определяются из начальных условий.

При нахождении этих постоянных удобно пользоваться ортогональностью и нормировкой свободных форм. В виде ряда по собственным формам можно получить решение и в случае вынужденных колебаний стержня.

Математически эквивалентны рассмотренной задаче и задачи о поперечных колебаниях струн или нитей.

5. Поперечные колебания балок

Рассмотрим балку, изгибающуюся под действием распределённой нагрузки \vec{q} (рис. 65). Пусть $y(x)$ – поперечное смещение точки балки с координатой x . В сопротивлении материалов выводится дифференциальное уравнение изогнутой оси балки:

$$EJ \frac{d^2 y}{d x^2} = M, \quad EJ = const, \quad (163)$$

где E – модуль упругости; J – момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси, перпендикулярной плоскости изгиба; M – изгибающий момент в данном сечении.

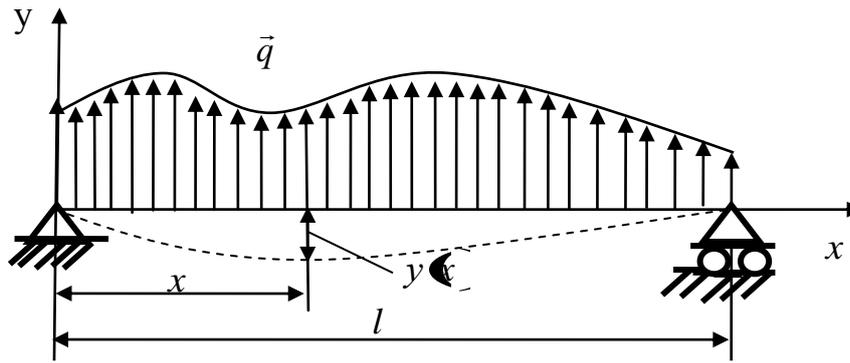


Рис. 65

Кроме того, известна формула, связывающая величину распределённой нагрузки q и изгибающий момент в данном сечении балки M :

$$q = \frac{d^2 M}{d x^2} . \quad (164)$$

Продифференцируем выражение (163) дважды по x . С учётом (164) получим

$$EJ \frac{d^4 y}{d x^4} = q . \quad (165)$$

Рассмотрим свободные поперечные колебания балки. Согласно методу кинестатики, на элемент балки действует сила инерции (рис. 66):

$$- \rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = dJ ,$$

где ρ – масса единицы длины балки; ρdx – масса выделенного элемента. Знак «минус» поставлен в соответствии с известной из теоретической механики формулы для силы инерции: $\vec{J} = -m \cdot \vec{w}$.

Плотность инерционных нагрузок по длине балки, согласно теореме Журавского,

$$q = \frac{dJ}{dx} = -\rho \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

В соответствии с (165) получим

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (166)$$

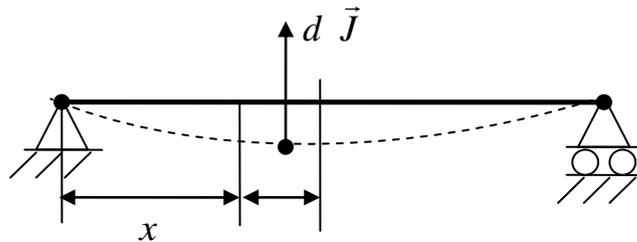


Рис. 66

Заметим, что в отличие от уравнения (165) здесь появились частные производные, так как в случае колебаний смещение y зависит не только от x , но и от t .

Уравнение (166) является приближённым, поэтому из него нельзя получить решение в виде бегущих волн. Однако для исследования стоячих колебаний балок ограниченных размеров это уравнение вполне приемлемо. Уравнение (166) необходимо дополнить граничными условиями. Рассмотрим некоторые из них.

1. Жестко заделанный конец (рис. 67, а):

$$x = 0, y = 0, \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

(сечение в заделке не поворачивается).

2. Свободно опертый конец (см. рис. 67, б): $x = 0, y = 0$. Кроме того, на левом конце изгибающий момент обращается в нуль.

Тогда из уравнения (163) получаем $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$.

3. Свободный конец (см. рис. 67, в). На правом конце изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю. По теореме Журавского $Q = \frac{\partial M}{\partial x}$.

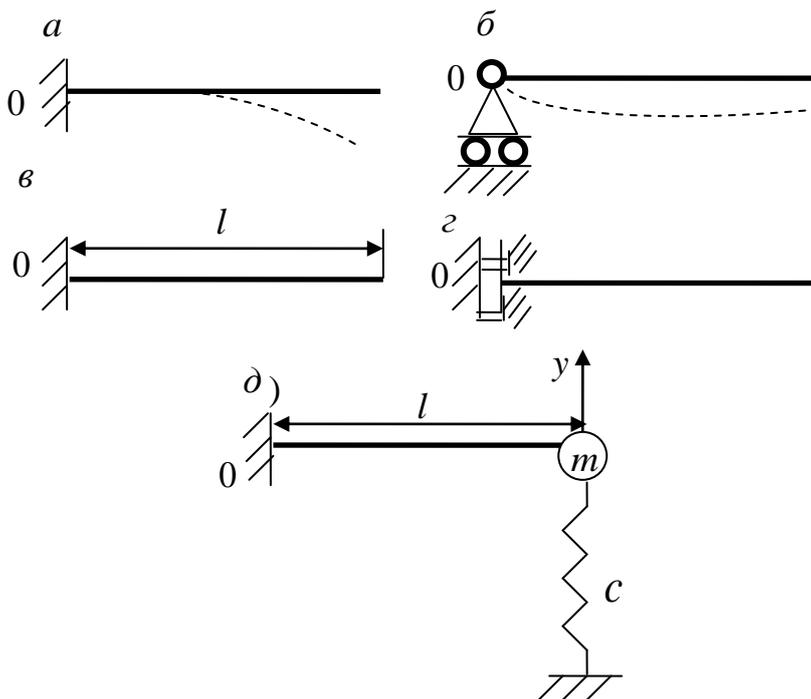


Рис. 67

Из (164) получаем $Q = EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$. Таким образом, получаем

следующие граничные условия: $x = l, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$.

4. Скользящая заделка (см. рис. 67, г). На левом конце сечение не поворачивается. Кроме того, перерезывающая сила на этом конце равна нулю. Это даёт граничные условия:

$$x = 0, \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0.$$

5. Подпружиненный конец (см. рис. 67, д). На правом конце отсутствует изгибающий момент. Кроме того, дифференциальное уравнение движения груза m запишется в виде (при $x = \ell$).

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c y = Q .$$

С учётом выражения для перерезывающей силы получим

$$x = \ell, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad \left(m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c y - EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right)_{x=\ell} = 0 .$$

Подчеркнём, что в случае балки на каждом конце ставится не одно, а два граничных условия. Это необходимо, так как уравнение (166) имеет четвёртый порядок по координате x .

6. Собственные колебания однородной балки

Решим задачу о свободных поперечных колебаниях однородной заделанной с двух сторон балки (рис. 68). Граничные условия имеют вид

$$y|_{x=0, x=\ell} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0, x=\ell} = 0. \quad (167)$$

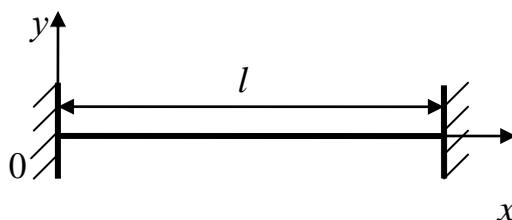


Рис. 68

Будем искать решение уравнения (166) в виде

$$y(x, t) = Y(x) \sin \kappa t , \quad (168)$$

где $Y(x)$ — заранее неизвестная форма колебаний.

Подставим выражение (168) в (166), получим

$$E J \frac{d^4 y}{d x^4} \sin kt - \rho Y k^2 \sin kt = 0 . \quad (169)$$

Обозначим $\nu = \sqrt[4]{\frac{\rho k}{EJ}}$. Величину ν назовём собственным числом. Из (166) получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - \frac{\nu^4}{\ell^4} Y = 0 . \quad (170)$$

Характеристическое уравнение для него имеет вид $r^4 - \frac{\nu^4}{\ell^4} = 0$, корни которого

$$r_{1,2} = \pm \frac{\nu}{\ell} , \quad r_{3,4} = \pm i \frac{\nu}{\ell} .$$

Поэтому общее решение уравнения (170) запишется в виде

$$Y = c_1 ch \frac{\nu}{\ell} x + c_2 sh \frac{\nu}{\ell} x + c_3 \cos \frac{\nu}{\ell} x + c_4 \sin \frac{\nu}{\ell} x , \quad (171)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – произвольные постоянные.

Для определения c_i используем граничные условия (167), получим

$$y|_{x=0, x=\ell} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0, x=\ell} = 0. \quad (172)$$

Продифференцируем уравнение (18) по x :

$$\frac{dY}{dx} = \frac{\nu}{\ell} \left(c_1 sh \frac{\nu}{\ell} x + c_2 ch \frac{\nu}{\ell} x - c_3 \sin \frac{\nu}{\ell} x + c_4 \cos \frac{\nu}{\ell} x \right). \quad (173)$$

Подстановка (171) и (173) в граничные условия (172) приводит к линейной однородной системе для нахождения значений c_1, c_2, c_3, c_4 :

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 \operatorname{ch} \nu + c_2 \operatorname{sh} \nu + c_3 \cos \nu + c_4 \sin \nu = 0 \\ c_2 + c_4 = 0 \\ c_1 \operatorname{sh} \nu + c_2 \operatorname{ch} \nu + c_3 \sin \nu + c_4 \cos \nu = 0 \end{cases}$$

откуда, $c_3 = -c_1$, $c_4 = -c_2$.

Также получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} c_1 (\operatorname{ch} \nu - \cos \nu) - c_2 (\operatorname{sh} \nu - \sin \nu) = 0 \\ c_1 (\operatorname{ch} \nu + \sin \nu) - c_2 (\operatorname{sh} \nu - \cos \nu) = 0 \end{cases},$$

которая имеет нетривиальное решение, если определитель системы обращается в нуль:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch} \nu - \cos \nu & \operatorname{sh} \nu - \sin \nu \\ \operatorname{sh} \nu + \sin \nu & \operatorname{ch} \nu - \cos \nu \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\operatorname{ch}^2 \nu - 2 \operatorname{ch} \nu \cos \nu + \cos^2 \nu - (\operatorname{sh}^2 \nu - \sin^2 \nu) = 0,$$

откуда $\cos \nu = \frac{1}{\operatorname{ch} \nu}$.

Получим трансцендентное уравнение для определения безразмерных характеристических чисел. На рис. 69 показан графический способ нахождения корней этого уравнения.

Имеется бесконечное множество характеристических чисел $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \dots$, причём $\nu_1 = 4,73$. Можно написать приближённую

формулу $\nu_s \approx \frac{2S+1}{2} \pi$, которая тем точнее, чем больше S .

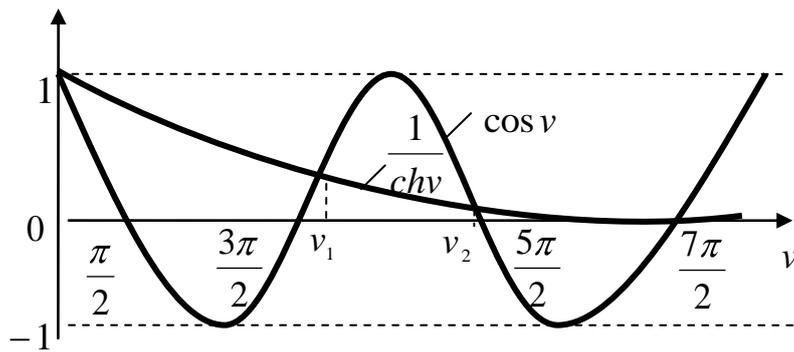


Рис. 69

Для частоты получим $\kappa_s = \sqrt{\frac{E J}{\rho}} \frac{\nu_s^2}{\ell^2}$, для больших S

$$\kappa_s \approx \sqrt{\frac{E J}{\rho}} \frac{(S+1)^2 \pi^2}{4 \ell^2}.$$

Найдём расстояния между соседними собственными частотами:

$$\kappa_s - \kappa_{s-1} \approx \frac{\pi^2}{4 \ell^2} \sqrt{\frac{E J}{\rho}} \left[(S+1)^2 - (S-1)^2 \right] = \frac{2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{E J}{\rho}} S \xrightarrow{S \rightarrow \infty} \infty.$$

Бесконечный частотный спектр получился расходящимся. Напомним, что частотный спектр продольных или крутильных колебаний является равномерным.

Далее можно определить собственные формы, отвечающие каждой из собственных частот. Эти формы являются ортогональными и нормированными. Собственная форма, отвечающая основной (наименьшей) частоте, есть основной тон свободных колебаний и является безузловой. Вторая собственная форма имеет один узел, третья – два узла и т. д. (рис. 70).

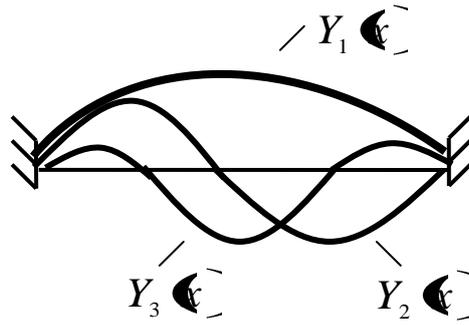


Рис. 70

Свободные колебания балки при заданных начальных условиях представляются как наложение (суперпозиция) бесконечного числа колебаний с различными собственными частотами. Вынужденные колебания балок можно, как и ранее, определить в виде бесконечного ряда по ортогональным и нормированным собственным формам.

VI. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

1. Колебания нелинейных механических систем

Ранее рассматривались только линейные механические системы, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями. Для линейных систем справедлив принцип суперпозиции: колебания линейной системы под действием совокупности внешних воздействий равны сумме её колебаний под действием каждого из воздействий.

Интегрирование линейных дифференциальных уравнений основано на строгой, хорошо разработанной математической теории. Однако целый ряд задач теории колебаний, в частности задач динамики холодильных машин, приводится к нелинейным дифференциальным уравнениям. Интегрирование нелинейных уравнений является сложной математической задачей. Обычно оно проводится либо численно, либо с помощью приближённых аналитических методов.

2. Свободные колебания груза на пружине при наличии сил сухого (кулонова) трения

Пусть на груз кроме упругой силы действует сила сухого трения о поверхность (рис. 71). Дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$m \ddot{x} + c x = F_{mp} . \quad (174)$$

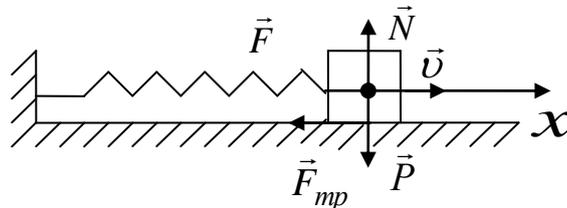


Рис. 71

Сила трения направлена противоположно скорости, поэтому

$$F_{mp} = -f \cdot P \cdot \text{sign } \dot{x}, \quad (175)$$

где

$$\text{sign } \dot{x} = \begin{cases} 1 & \dot{x} > 0, \\ -1 & \dot{x} < 0, \end{cases}$$

f – коэффициент трения скольжения.

Согласно гипотезе Кулона, коэффициент трения является величиной постоянной, не зависящей от скорости груза. В действительности такая зависимость существует.

Формула (175) справедлива при наличии проскальзывания. Если же имеет место относительный покой ($\dot{x} = 0$), то сила трения компенсирует упругую силу, причём необходимо, чтобы $F_{mp} \leq f_0 \cdot P$, где f_0 – коэффициент трения покоя. Обычно f_0 превосходит коэффициент трения скольжения: $f_0 > f$.

С учётом выражения (175) уравнение (174) примет вид

$$m \ddot{x} + c \dot{x} = -f \cdot P \cdot \text{sign } \dot{x}. \quad (176)$$

Получили нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, поскольку $\text{sign } \dot{x}$ является нелинейной функцией \dot{x} (рис. 72).

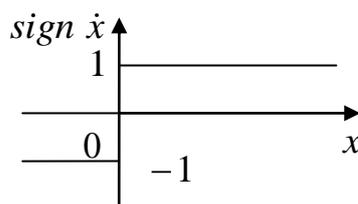


Рис. 72

В силу тормозящего характера кулонова трения искомые колебания носят затухающий характер (рис. 73). Величины a_1, a_2, a_3, \dots – последовательные максимальные отклонения груза.

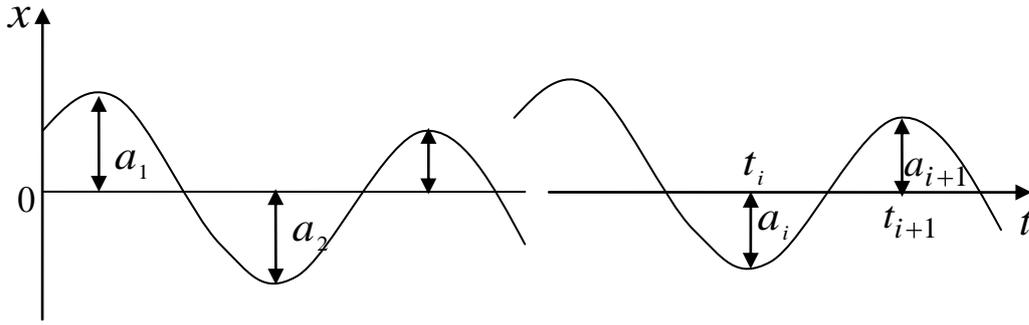


Рис. 73

Пусть в момент времени t_i груз максимально отклоняется в отрицательную сторону (см. рис. 73), тогда

$$t = t_i : \quad x = a_i, \quad \dot{x} = 0. \quad (177)$$

В момент t_{i+1} груз максимально отклоняется в положительную сторону:

$$t = t_{i+1} : \quad x = a_{i+1}, \quad \dot{x} = 0. \quad (178)$$

В интервале $t_i < t < t_{i+1}$ имеет $\dot{x} > 0$, $\text{sign } \dot{x} = 1$. Дифференциальное уравнение на этом этапе имеет вид

$$m \ddot{x} + c x = -f \cdot P,$$

решение которого является

$$x = C_1 \cos k(t - t_i) + C_2 \sin k(t - t_i) - \frac{f \cdot P}{c}. \quad (179)$$

Продифференцируем выражение (179) по времени:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin k(t - t_i) + C_2 k \cos k(t - t_i). \quad (180)$$

Подставим в (179) и (180) $t = t_i$ и воспользуемся выражением (177), получим

$$C_1 = \frac{f \cdot P}{c} - a_i, \quad C_2 = 0.$$

Поэтому будем иметь

$$x = \left(\frac{f \cdot P}{c} - a_i \right) \cdot \cos k(t - t_i) - \frac{f \cdot P}{c},$$

$$\dot{x} = - \left(\frac{f \cdot P}{c} - a_i \right) \cdot k \cdot \sin k(t - t_i). \quad (181)$$

Подставим в (181) $t = t_{i+1}$ и воспользуемся выражением (178):

$$a_{i+1} = \left(\frac{f \cdot P}{c} - a_i \right) \cdot \cos k(t_{i+1} - t_i) - \frac{f \cdot P}{c}, \quad (182)$$

$$0 = - \left(\frac{f \cdot P}{c} - a_i \right) \cdot k \cdot \sin k(t_{i+1} - t_i).$$

Из последнего уравнения получим

$$t_{i+1} - t_i = \frac{\pi}{k}, \quad (183)$$

т. е. полупериод затухающих колебаний равен полупериоду собственных колебаний. Следовательно, затухающие колебания под действием кулонова трения происходят с частотой собственных колебаний. Напомним, что затухающие колебания под действием вязкого сопротивления происходят с несколько меньшей частотой.

Подставим (183) в (182):

$$a_{i+1} = - \left(\frac{f \cdot P}{c} - a_i \right) - \frac{f \cdot P}{c},$$

откуда

$$\Delta a = a_i - a_{i+1} = \frac{2f \cdot P}{c}.$$

Полученный результат говорит о том, что уменьшение амплитуды постоянно и не зависит от номера отклонения. Следовательно,

$$a_1 = a_0 - \frac{2f \cdot P}{c}; \quad a_2 = a_0 - \frac{4f \cdot P}{c}; \dots$$

Итак, в случае кулонова трения амплитуда убывает по линейному закону (рис. 74, а). В случае вязкого сопротивления амплитуда убывает по экспоненциальному закону. Задача о вынужденных колебаниях груза на пружине с кулоновым трением под действием гармонической возмущающей силы также допускает решение. Ден-Гартогом было установлено, что в случае резонанса амплитуда колебаний является ограниченной, если выполняется условие $F < \frac{4}{\pi} f \cdot P$ при $\omega = k$ (см. рис. 74, б).

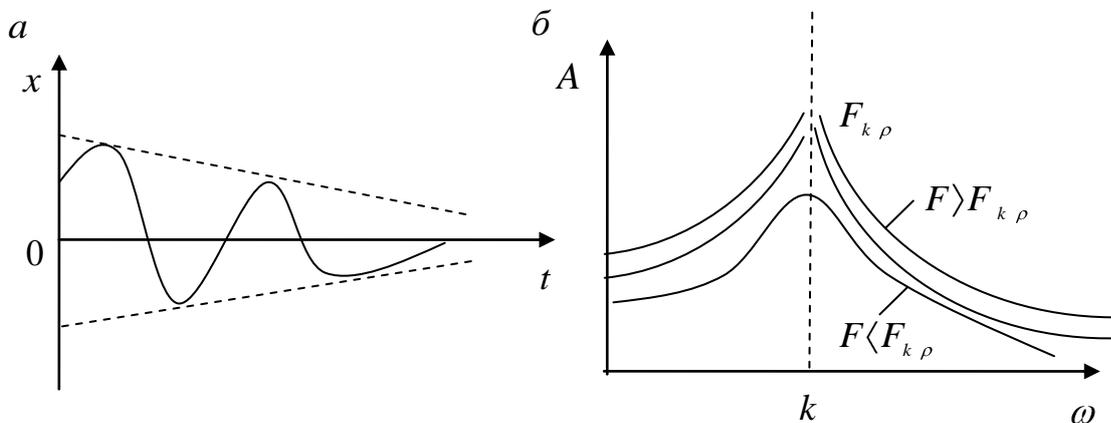


Рис. 74

В действительности на колеблющееся тело обычно действует комбинация сил вязкого и сухого трения. Если вязкое трение мало, то превышение амплитуды возмущения критического значения приводит к резкому увеличению амплитудной частоты при резонансе.

3. Понятие о фрикционных автоколебаниях

Кулоново трение является довольно грубым приложением к действительности. Реально коэффициент трения скольжения является функцией относительной скорости трущихся поверхностей:

$$f = f(v) \quad (184)$$

На рис. 75, а изображён примерный график этой функции. Через f_0 обозначим коэффициент трения покоя, а через v_* – критическую скорость проскальзывания, при которой наблюдается минимальный коэффициент трения. Функцию (184) можно аппроксимировать в окрестности v_* в виде кубической параболы $f = a + bv + cv^3$.

Коэффициенты a, b, c легко выражаются через параметры f_0, f_*, v_* .

Получим
$$a = f_0, \quad b = -\frac{3}{2}(f_0 - f_*), \quad c = \frac{f_0 - f_*}{2v_*^3}.$$

Таким образом,

$$f = f_0 - \frac{f_0 - f_*}{2v_*} \cdot v \cdot \left(3 - \frac{v^2}{v_*^2} \right). \quad (185)$$

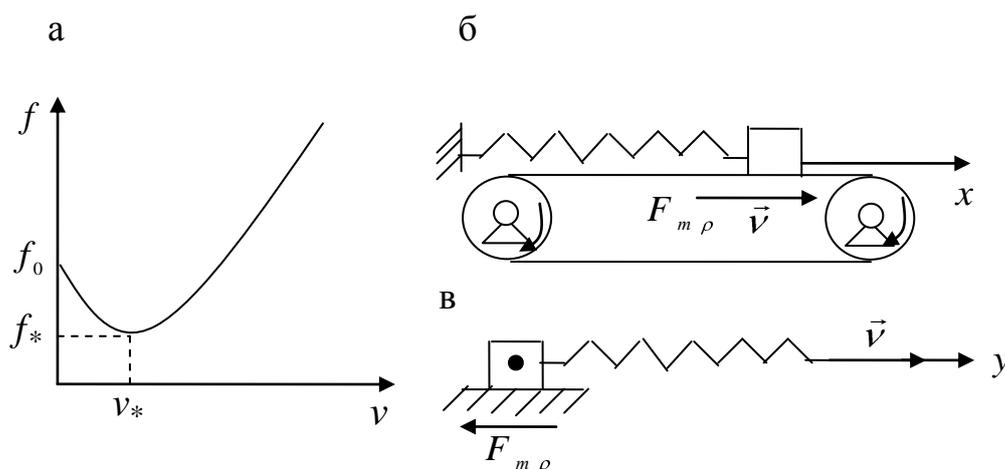


Рис. 75

Рассмотрим задачу о движении груза на пружине по движущейся ленте (см. рис. 75, б). Пусть \vec{v} – скорость ленты, а x – координата груза. Тогда $(v - \dot{x})$ – скорость проскальзывания, а коэффициент трения будет функцией разности $(v - \dot{x})$.

Функцию f будем выбирать согласно выражению (185).

Дифференциальное уравнение движения примет вид

$$m\ddot{x} + cx = f \cdot (v - \dot{x}) \cdot P. \quad (186)$$

Так как $v > \dot{x}$, то сила трения имеет положительное направление. Поставленная задача математически эквивалентна следующей: груз движется относительно неподвижного основания. Конец пружины равномерно движется по закону $y = v \cdot t$ (см. рис. 75, в). Так как $\dot{y} > 0$, то $F_{mp} < 0$, $F_{mp} = -f(\dot{y}) \cdot P$.

Дифференциальное уравнение движения груза имеет вид

$$m\ddot{y} + c(y - vt) = -f(\dot{y}) \cdot P. \quad (187)$$

Уравнение (187) перейдет в (186), если сделать замену $y = vt - x$.

Перейдем к исследованию уравнения (186). Оно допускает постоянное решение $x = x_0$. При этом F_{mp} уравнивает упругую силу пружины:

$$c \cdot x_0 = f(v) \cdot P,$$

откуда

$$f(v) = \frac{c}{P} \cdot x_0,$$

где x_0 – статическая деформация пружины.

Исследуем устойчивость статического решения. Предположим, что в момент $t_0 = 0$ на груз действовало некоторое внешнее возмущение. В силу этого $x \neq x_0$ и определяется согласно выражению (186). Будем считать возмущение малым. Тогда $x = x_0 + \xi$,

где ξ – малая добавка (вариация решения), $\dot{x} = \dot{\xi}$. Подставим это в (186):

$$m\ddot{\xi} + c(x_0 + \xi) = f(v - \dot{\xi}) \cdot P. \quad (188)$$

Разложим функцию f в ряд Тейлора и сохраним члены только первого порядка малости:

$$f(v - \dot{\xi}) = f(v) + f'(v) \cdot (-\dot{\xi}) + \dots$$

Тогда уравнение (188) примет вид

$$m\ddot{\xi} + c(x_0 + \xi) = [f(v) - f'(v) \cdot \dot{\xi}] \cdot P.$$

Подчёркнутые члены взаимно уничтожаются, поэтому приходим к линейному уравнению второго порядка:

$$m\ddot{\xi} + f'(v) \cdot P \cdot \dot{\xi} + c\xi = 0, \quad (189)$$

которое называется уравнением в вариациях. Оно математически эквивалентно дифференциальному уравнению затухающих колебаний груза на пружине при наличии вязкого сопротивления, в котором $\beta = f'(v) \cdot P$. Характеристическое уравнение дифференциального уравнения (189) имеет вид $m r^2 + \beta r + c = 0$.

Если $\beta < 0$, то корни будут иметь положительную вещественную часть в силу подразд. 2 разд. II, откуда следует, что движение неустойчиво и груз с ростом времени удаляется от положения равновесия. Таким образом, при $f'(v) > 0$ движение устойчиво, при $f'(v) < 0$ – неустойчиво (рис. 76).

Положение груза будет устойчивым при скорости ленты больше критической. Если скорость ленты меньше критической, то равновесие неустойчиво и неизбежно возникновение колебательного режима.

Определение. Автоколебания – это незатухающие нелинейные колебания, поддерживаемые внешним источником энергии, вид и свойства которых определяются самой системой.

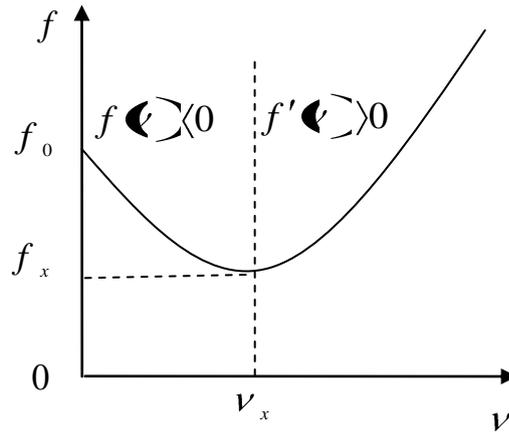


Рис. 76

Автоколебания, порождённые нелинейной природой сил сухого трения, называются *фрикционными автоколебаниями*. Фрикционные автоколебания всегда являются низкочастотными. Для их возникновения необходимо взаимодействие сил упругости, нелинейного сухого трения и автономного источника энергии. Закон фрикционных автоколебаний отвечает специальному устойчивому периодическому решению нелинейного дифференциального уравнения (186). Это уравнение, однако, не может быть проинтегрировано в замкнутом виде аналитически. Поэтому для его решения применяют либо численный расчёт на ЭВМ, либо приближённые аналитические методы.

4. Метод медленно меняющихся амплитуд

Рассмотрим колебания груза на пружине под действием произвольного малого возмущения, которое в общем случае зависит от координаты груза, его скорости и времени. Поэтому дифференциальное уравнение колебаний груза может быть приведено к виду

$$\ddot{x} + \kappa^2 x = \varepsilon F(x, \dot{x}, t), \quad (190)$$

где ε – положительный малый параметр, характеризующий малость возмущения.

Невозмущённое уравнение при $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$\ddot{x}_0 + \kappa^2 x_0 = 0,$$

общее решение которого $x_0 = a \sin(\kappa t + \alpha)$ известно, где a и α – постоянные. Предположим, что решение возмущённого уравнения (190) также имеет вид

$$x = a \sin(\kappa t + \alpha), \quad (191)$$

но a и α уже не постоянные, а некоторые функции времени: $a = a(t)$, $\alpha = \alpha(t)$. Равенство (191) можно истолковать как определяющее замену переменных. При этом старая переменная x заменяется новыми a и α . На новые переменные можно наложить ограничение. Допустим, что выполняется соотношение

$$\dot{x} = a \kappa \cos(\kappa t + \alpha). \quad (192)$$

Оно имело бы место, если бы величины a и α были постоянны. Продифференцируем (191), считая a и α переменными, и приравняем к (192):

$$\dot{x} = \dot{a} \sin(\kappa t + \alpha) + a \kappa + \dot{\alpha} \cos(\kappa t + \alpha) \stackrel{?}{=} a \kappa \cos(\kappa t + \alpha)$$

откуда

$$\dot{a} \sin(\kappa t + \alpha) + a \dot{\alpha} \cos(\kappa t + \alpha) \stackrel{?}{=} 0. \quad (193)$$

Дифференцируем теперь выражение (192) по времени:

$$\ddot{x} = \dot{a} \kappa \cos(\kappa t + \alpha) - a \kappa^2 + \dot{\alpha} \sin(\kappa t + \alpha). \quad (194)$$

Подставляем (192) и (194) в (190):

$$\dot{a} \kappa \cos(\kappa t + \alpha) - a \kappa^2 + \dot{\alpha} \sin(\kappa t + \alpha) + \kappa^2 a \sin(\kappa t + \alpha) \stackrel{?}{=} \varepsilon F,$$

откуда

$$\dot{a} \cos(kt + \alpha) - a \dot{\alpha} \sin(kt + \alpha) = \frac{\varepsilon F}{k}. \quad (195)$$

Уравнения (193) и (195) представляют собой линейную систему алгебраических уравнений относительно \dot{a} и $\dot{\alpha}$, решив которую получим

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon}{k} F \cos(kt + \alpha), \quad \dot{\alpha} = -\frac{\varepsilon}{a k} F \sin(kt + \alpha). \quad (196)$$

Учтём, что в выражение для F вместо x и \dot{x} нужно подставить их представление по (191) и (192), т. е. считать

$$F = F(a \sin(kt + \alpha), a k \cos(kt + \alpha), t). \quad (197)$$

Уравнения (196) представляют собой систему двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных a и α . Удобство системы этих уравнений заключается в том, что скорости изменения этих переменных a и α малы и имеют порядок ε , поэтому их называют медленными. В течение периода колебаний невозмущенной системы $2\pi/k$ амплитуда a и начальная фаза α меняются незначительно. Поэтому, согласно методу медленно меняющихся амплитуд (метод Ван-дер-Поля), решение системы (196) на достаточно большом интервале времени изменится незначительно, если правые части уравнений усреднить по явно входящему времени. Предположим, что зависимость нелинейного возмущения от явно входящего времени также имеет период $2\pi/k$. В этом случае операция осреднения сводится к вычислению интегралов:

$$A(a, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi/k} F(a \sin(kt + \alpha), a k \cos(kt + \alpha), t) \cos(kt + \alpha) dt, \quad (198)$$

$$B(a, \alpha) = -\frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi/k} F(a \sin(kt + \alpha), a k \cos(kt + \alpha), t) \sin(kt + \alpha) dt.$$

Важно, что эти интегралы следует брать, считая величины a и α постоянными. Тогда, согласно методу Ван-дер-Поля, задача приближенно сводится к интегрированию простых уравнений:

$$\dot{a} = \varepsilon A(a, \alpha), \quad \dot{\alpha} = \varepsilon B(a, \alpha). \quad (199)$$

Уравнения (199) автономны, т. е. не зависят от времени явно, поэтому осредненные амплитуда колебаний и начальная фаза являются функциями «медленного» времени $\tau = \varepsilon t$. Тогда

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} = \frac{da}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \varepsilon \frac{da}{d\tau}, \quad \dot{\alpha} = \varepsilon \frac{d\alpha}{d\tau}.$$

Следовательно, уравнения (199) запишутся в следующем виде:

$$\frac{da}{d\tau} = A(a, \alpha), \quad \frac{d\alpha}{d\tau} = B(a, \alpha).$$

Пусть внешнее возмущение автономно, т. е. $F = F(x, \dot{x})$, тогда в (198) можно ввести новую переменную интегрирования $\varphi = \kappa t + \alpha$. Получим

$$A = \frac{1}{2\pi\kappa} \int_0^{2\pi} F(a \sin \varphi, a \kappa \cos \varphi, t) \cos \varphi dt, \quad (200)$$

$$B = -\frac{1}{2\pi a \kappa} \int_0^{2\pi} F(a \sin \varphi, a \kappa \cos \varphi, t) \sin \varphi dt.$$

Следовательно, функции A и B в данном случае зависят только от амплитуды a , поэтому уравнения (199) примут вид

$$\dot{a} = \varepsilon A(a), \quad \dot{\alpha} = \varepsilon B(a). \quad (201)$$

Согласно (201), уравнение для определения медленной осреднённой амплитуды можно рассматривать изолированно. В методе Ван-дер-Поля показывается, что второе уравнение (201) можно не рассматривать. Его интегрирование не повышает точности, и можно положить $\alpha = 0$.

Метод Ван-дер-Поля эквивалентен по точности методам гармонического баланса, гармонической линеаризации, энергетическому методу и др. С другой стороны, метод Ван-дер-Поля совпадает с первым приближением асимптотического метода усреднения. Последний был предложен в работах академиков Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова.

Метод усреднения основан на последовательном уточнении решения. Он широко используется при решении задач в технической и небесной механике, электро- и радиотехнике и т. д.

В качестве примера рассмотрим затухающие колебания под действием нелинейного сопротивления.

Случай 1. Сухое кулоново трение. Сила трения

$$F = -P f \operatorname{sign} \dot{x} \quad \omega \neq 0, \quad f = \text{const}.$$

Учтём, что, согласно методу медленно меняющихся амплитуд,

$$\dot{x} = a k \cos(\omega t + \alpha) \approx a k \cos \varphi.$$

Так как $\alpha > 0$, то $\operatorname{sign} \dot{x} = \operatorname{sign} \cos \varphi$. Отсюда

$$A = -\frac{P f}{2\pi k} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \operatorname{sign} \cos \varphi \, d\varphi = -\frac{P f}{k \pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi = -\frac{2P}{k\pi} f.$$

Дифференциальное уравнение для амплитуды

$$\dot{a} = -2P f / k\pi,$$

откуда при начальных условиях $t = 0$ и $a = a_0$ получим

$$a = a_0 - \frac{2P f}{k\pi} t,$$

т. е. в данном случае амплитуда колебаний убывает по линейному закону, что полностью совпадает с результатом, полученным ранее точным методом.

Случай 2. Вязкое сопротивление. Сила трения

$$F = -\beta \dot{x} = -\beta a k \cos \varphi.$$

Тогда

$$A = -\frac{\beta a k}{2\pi k} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = -\frac{\beta a}{2}.$$

Отсюда

$$\dot{a} = -\frac{\beta}{2} a; \quad a = a_0 e^{-\frac{\beta t}{2}},$$

т. е. и приближённый метод даёт экспоненциальный закон убывания амплитуды.

Случай 3. Квадратное (аэродинамическое) сопротивление. Сила сопротивления пропорциональна квадрату модуля скорости и направлена против вектора скорости. Такая сила сопротивления имеет место для движения тела с большими скоростями в воздушной среде:

$$F = -\beta \dot{x}^2 \operatorname{sign} \dot{x} = -\beta a^2 k^2 \cos^2 \varphi \operatorname{sign} \cos \varphi.$$

Тогда

$$A = -\frac{\beta a^2 k^2}{2\pi k} \int_0^{\pi} \cos^3 \varphi \operatorname{sign} \cos \varphi d\varphi = -\frac{\beta a^2 k}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = -\frac{4\beta a^2 k}{3\pi}.$$

В результате дифференциальное уравнение примет вид:

$$\dot{a} = -\frac{4}{3\pi} \beta k a^2,$$

откуда

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a_0} = \frac{4}{3\pi} \beta k t; \quad a = \frac{a_0}{1 + \frac{4}{3\pi} a_0 \beta k t}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае амплитуда убывает по гиперболическому закону, т. е. более медленно, чем в случае 2.

5. Колебания при нелинейной характеристике упругой силы

Закон Гука для деформации упругих элементов предполагает пропорциональность напряжений и деформаций и справедлив только при малых деформациях. В действительности упругая сила является нелинейной функцией. Более точно для винтовой пружины величина упругой силы определяется выражением

$$F = cx + \beta x^3,$$

где c – коэффициент жёсткости для малых деформаций; β – нелинейная упругая постоянная.

Если $\beta > 0$, то мере увеличения деформации упругая сила растёт быстрее, чем это следует из закона Гука (рис. 77, а). Такая характеристика упругой силы называется жёсткой.

Если $\beta < 0$, то с ростом деформации сопротивление пружины уменьшается (см. рис. 77, б). Такая характеристика называется мягкой. Мягкой характеристике присуще явление перехлопа (см. рис. 77, в).

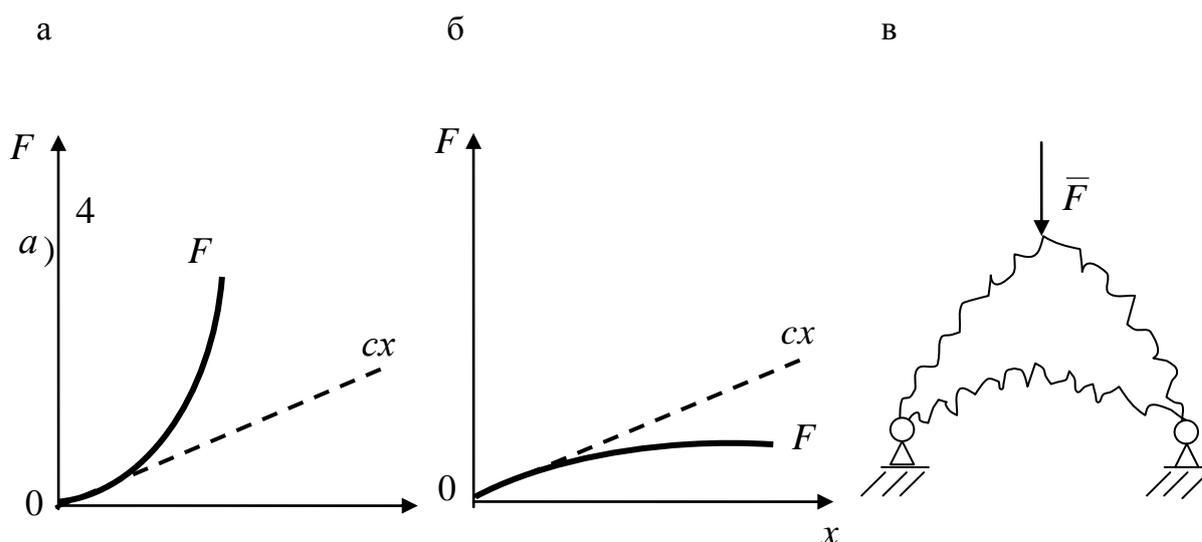


Рис. 77

Отметим, что для жёсткой характеристики $F' = c + 3\beta x^2 > 0$, а для мягкой, соответственно, $F' = c + 3\beta x^2 = 0$, т. е. имеет место максимум упругой силы. Величина деформации, соответствующая этому максимуму,

$$x = x_* = \pm \sqrt{-c/3\beta} .$$

6. Решение задачи о колебаниях методом гармонического баланса

Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях груза на пружине с кубической упругой характеристикой. Дифференциальное уравнение таких колебаний имеет вид

$$m \ddot{x} + c x + \beta x^3 = F_0 \sin \omega t . \quad (202)$$

Это нелинейное уравнение не может быть проигнорировано точно в замкнутом виде. Поэтому его исследуют либо численно, либо приближёнными аналитическими методами, например такими, как метод медленно меняющихся амплитуд. Мы воспользуемся эквивалентным ему методом гармонического баланса. Будем искать периодическое решение с частотой возмущающей силы в виде

$$x = a \sin \omega t . \quad (203)$$

Подставим решение (203) в уравнение (202). С учётом тригонометрической формулы

$$\sin^3 \omega t = \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t$$

получим

$$-m\omega^2 a \sin \omega t + ca \sin \omega t + \beta a^3 \left(\frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t \right) = F_0 \sin \omega t . \quad (204)$$

Это соотношение не может быть удовлетворено выбором постоянной a при любых t , вследствие того, что уравнение (202), строго говоря, не имеет решения вида (203) и вообще не может быть сведено к квадратурам. Его истинное периодическое решение является негармоническим и может быть представлено в виде полного ряда Фурье.

Приближённый метод гармонического баланса основан на том, что в соотношении (204) пренебрегают гармоникой утроенной частоты. После этого его можно сократить на $\sin \omega t$ и записать

$$(c - \omega^2)a + \frac{3}{4}\beta a^3 = F_0,$$

или

$$\omega^2 = k^2 - \frac{F_0 - \frac{3}{4}\beta a^3}{m a}, \quad (205)$$

где $k = \sqrt{c/m}$ – частота собственных колебаний линеаризованной системы.

Допустим, что внешняя гармоническая сила отсутствует и $F_0 = 0$. Иными словами, речь пойдёт о собственных колебаниях нелинейного осциллятора, частота которого ω_0 отличается от частоты ω вынужденных колебаний. Подставив в выражение (205) $F_0 = 0$ и $\omega = \omega_0$, получим

$$\omega_0^2 = k^2 + \frac{3}{4} \frac{\beta}{m} a^2, \quad (206)$$

которое свидетельствует, что при собственных колебаниях нелинейных механических систем без сопротивлений частота не является постоянной, а меняется с изменением амплитуды. Соответствующая зависимость $\omega_0 = \omega_0(a)$ носит название скелетной кривой системы. Скелетная кривая рассматриваемого осциллятора представлена зависимостью (206) и отвечает штриховой линии на рис. 78, а. Здесь предполагается, что постоянная может быть как положительной, так и отрицательной, причём в последнем случае колебания происходят в противофазе с внешним возмущением.

Соотношение (205) даёт амплитудно-частотную характеристику чисто вынужденных колебаний исходной задачи и, очевидно, может быть представлено в виде

$$\omega^2 = \omega_0^2 \sqrt{1 - F_0/ma}.$$

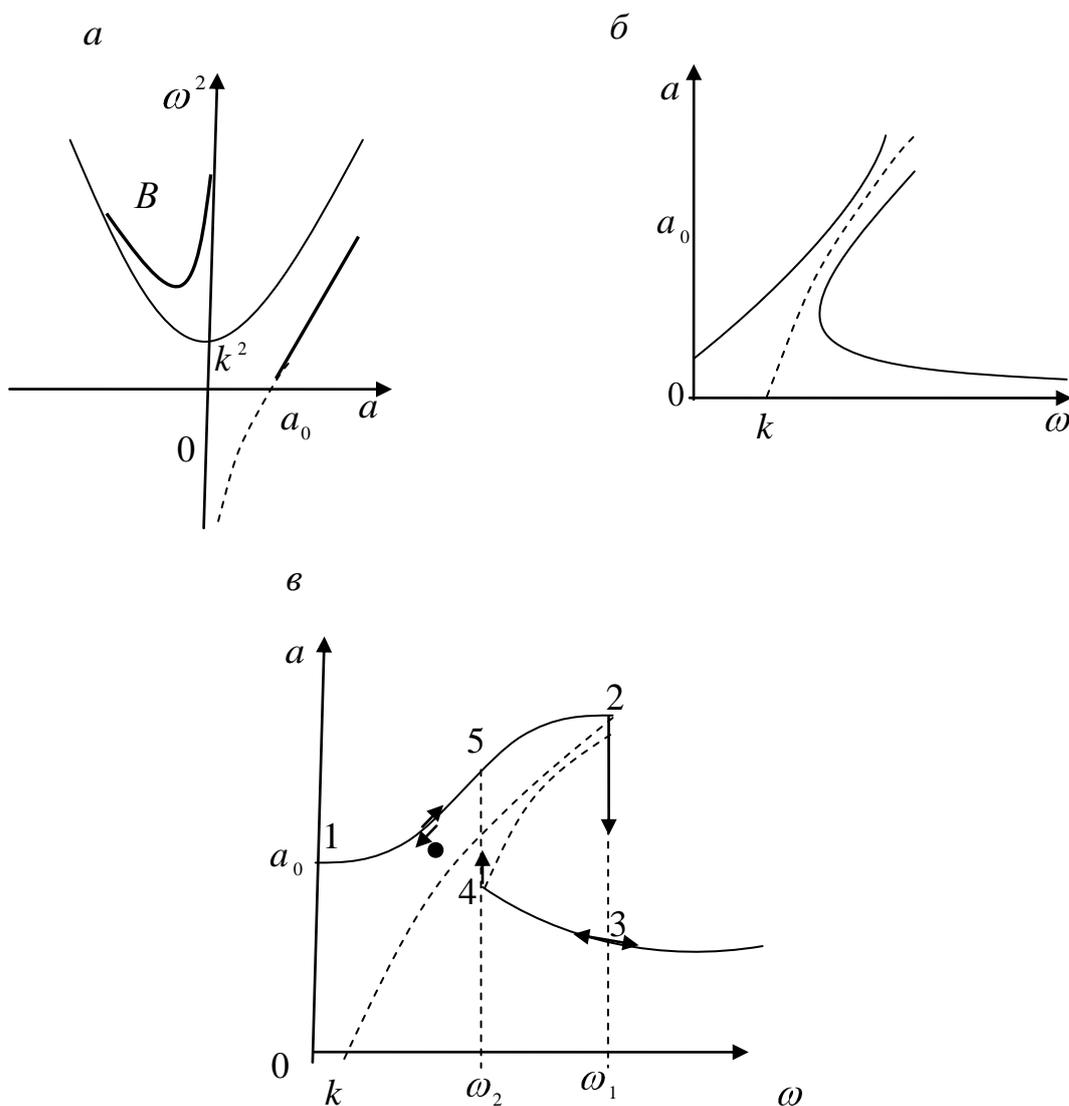


Рис. 78

Следовательно, данная зависимость может быть получена графически, если из ординат скелетной кривой вычитать гиперболы F_0/ma . Отметим, что правая ветвь данной характеристики

пересекает ось абсцисс при $a = a_0 > 0$, точка пересечения является корнем уравнения $\omega_0^2 a_0 \approx F_0 / ma_0$. Поскольку внутри диапазона $0 < a < a_0$ реализуется невыполнимое неравенство, соответствующий участок характеристики (помеченный штрих-пунктиром) физического смысла не имеет.

В дальнейшем будем полагать, что амплитуда a всегда положительна. Поэтому левую часть характеристики следует расположить вправо от оси ординат. Кроме того, по этой оси будем откладывать не ω^2 , а ω , что не изменит качественно характера кривых. Поменяем, как обычно, оси абсцисс и ординат (см. рис. 78, б). Именно такой вид имеет амплитудно-частотная характеристика нелинейного осциллятора с жёсткой силовой характеристикой. Резонансный пик этой характеристики как бы искривляется в сторону высших частот, огибая скелетную кривую. Можно показать, что в системе с мягкой силовой характеристикой изгиб резонансного пика происходит в сторону низших частот.

Если учитывать силы рассеивания энергии, то АЧХ рассматриваемой задачи примет более сложный вид (рис. 78, в). Исследование показывает, что участок характеристики, изображённый штриховой линией, практически не реализуется. Поэтому изменение амплитуды с ростом частоты в соответствии с АЧХ происходит следующим образом. Вначале с увеличением частоты от нуля амплитуда растёт на участке 1–2. В критической точке 2 происходит срыв амплитуды до точки 3. Дальнейший рост частоты приводит к монотонному уменьшению амплитуды до нуля.

Наоборот, при уменьшении частоты (начиная от бесконечности) амплитуда вначале монотонно растёт до критической точки 4, а затем скачком увеличивается, достигая точки 5. Последующее убывание частоты полностью соответствует участку 5–1.

Таким образом, в частотном диапазоне $\omega_2 < \omega < \omega_1$ возможны сразу два устойчивых режима колебаний с большими и малыми амплитудами, причём последний достигим только в результате уменьшения частоты от бесконечности. Подобная неоднозначность, а также внезапные срывы амплитуды являются вообще характерным отличительным свойством вынужденных колебаний механических систем с существенно нелинейной упругой силой.

Григорьев Александр Юрьевич
Григорьев Константин Александрович
Малявко Дмитрий Пантелеймонович

КОЛЕБАНИЯ И ВИБРОАКТИВНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН

Учебное пособие

Ответственный редактор
Т.Г. Смирнова

Титульный редактор
Е.О. Трусова

Компьютерная верстка
Н.В. Гуральник

Дизайн обложки
Н.А. Потехина

Печатается
в авторской редакции

Подписано в печать 26.12.2016. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 7,91. Печ. л. 8,5. Уч.-изд. л. 8,25
Тираж 75 экз. Заказ № С 75

Университет ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

Издательско-информационный комплекс
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9