

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А. А. Горбачёв, Е. Г. Лебедько

АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 12.03.02 «Оптотехника» и специальности
12.05.01 – «Электронные и оптико-электронные приборы и системы
специального назначения» в качестве учебного пособия для реализации
основных профессиональных образовательных программ высшего
образования бакалавриата и специалитета

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

**Санкт-Петербург
2017**

Горбачёв А.А., Лебедько Е.Г. Анализ сигналов. Учебно-методическое пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2017. – 68 с.

Рецензенты:

Цыганок Е.А., к.т.н., доцент каф. ПиКО, Университет ИТМО

Смирнова И.Г., к.т.н., доцент каф. СТО, Университет ИТМО

В настоящем сборнике приведены краткие сведения из теории и условия задач по разделам «Аналитическое представление сигналов и помех» и «Преобразование сигнала и шума в линейных системах». Для большинства задач даются ответы, позволяющие проверить правильность промежуточных или конечных результатов решения. Приводимые задачи являются типовыми и охватывают наиболее важные темы.

Учебное пособие предназначено для студентов очной формы обучения по направлению подготовки 12.03.02 «Оптотехника» и 12.05.01 «Электронные и оптико-электронные приборы и системы специального назначения».



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО

©А.А. Горбачёв, Е.Г. Лебедько, 2017

Содержание

1 Гармонический анализ периодических сигналов	4
1.1 Теоретические положения.....	4
1.2 Примеры решения задач.....	6
1.3 Задачи	9
2 Гармонический анализ непериодических сигналов	12
2.1 Теоретические положения.....	12
2.2 Примеры решения задач.....	16
2.3 Задачи	21
3 Корреляционный анализ детерминированных сигналов	25
3.1 Теоретические положения.....	25
3.2 Примеры решения задач.....	27
3.3 Задачи	28
4 Случайные сигналы и шумы	34
4.1 Теоретические положения.....	34
4.2 Примеры решения задач.....	40
4.3 Задачи	42
5 Передача сигналов через стационарные линейные системы.....	48
5.1 Теоретические положения.....	48
5.2 Примеры решения задач.....	54
5.3 Задачи	56
Список литературы	64

1 Гармонический анализ периодических сигналов

1.1 Теоретические положения

Если вещественная периодическая функция $s(t)$ с периодом T $s(t) = s(nT + t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, описывающая периодический сигнал, удовлетворяет условиям Дирихле, то ее можно представить бесконечной совокупностью неограниченных во времени гармонических колебаний с различными амплитудами, начальными фазами и частотами, кратными частоте повторения $F = 1/T$ функции $s(t)$. Все перечисленные параметры гармоник зависят от вида функции $s(t)$. Совокупность гармоник, на которые разлагается функция $s(t)$, представляется бесконечным рядом Фурье в тригонометрической форме [1]:

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos \omega n t + B_n \sin \omega n t],$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — частота первой гармоники функция $s(t)$

или в комплексной форме:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\omega n t}, \quad j = \sqrt{-1},$$

где коэффициенты ряда определяются соотношениям:

$$A_0 = C_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt,$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(\omega n t) dt,$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(\omega n t) dt,$$

$$C_n = C_{nc} - jC_{ns} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j\omega n t} dt,$$

$$C_{nc} = \frac{A_n}{2}, \quad C_{ns} = \frac{B_n}{2}.$$

При этом коэффициенты A_0 и C_0 характеризуют постоянную составляющую (среднее значение) сигнала, т. е. высоту прямоугольника с основанием T , равновеликого фигуре под графиком $s(t)$ на периоде T , коэффициент A_n и B_n — амплитуды косинусоидальной и синусоидальной гармоник, с частотой в n раз большей основной частоты $\omega = \frac{2\pi}{T}$, а C_n — комплексная амплитуда гармоники (с учетом начальной фазы).

Если функция $s(t)$ — четная, т. е. $s(t) = s(-t)$, то $B_n = C_{ns} = 0$, если функция $s(t)$ — нечетная, т. е. $s(t) = -s(-t)$, то $A_n = C_{nc} = 0$.

Комплексные коэффициенты C_n можно представить в виде:

$$C_n = |C_n| e^{-j\varphi_n}, |C_n| = \sqrt{C_{nc}^2 + C_{ns}^2}$$

где $|C_n| = \sqrt{C_{nc}^2 + C_{ns}^2}$ — модуль спектральной функции, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\varphi_n = \arctg \frac{C_{ns}}{C_{nc}}$ — аргумент спектральной функции.

Совокупность гармоник, на которые разлагается периодическая функция $s(t)$, называется спектром этой функции. Зависимость коэффициентов A_n , B_n и модуля $|C_n|$ от частоты называется амплитудным спектром, а зависимость аргумента φ_n от частоты — фазовым спектром функции $s(t)$. При этом для комплексной формы разложения амплитудный спектр — функция четная (симметрична относительно оси ординат, т. е. постоянной составляющей C_0), а фазовый спектр — функция нечетная (симметрична относительно начала координат).

При тригонометрической форме разложения амплитудный и фазовый спектры строятся только для положительных значений частоты, фазовый спектр определяется зависимостью $\varphi_n = \arctg \frac{B_n}{A_n}$, $n = 1, 2, \dots$ от частоты.

При переходе от тригонометрической формы разложения к комплексной каждая гармоника, за исключением постоянной составляющей, как бы "расщепляется" на два вектора с одной и той же частотой, но противоположным направлением вращения. При этом амплитуды A_n и B_n должны, естественно, уменьшиться в два раза.

Спектры периодических сигналов представляются суммой бесконечного множества дискретных гармоник, эти спектры на графике изображаются в виде дискретных линий и называются поэтому линейчатыми. Интервал дискретности равен частоте первой гармоники, определяемой периодом T функции $s(t)$.

Таким образом, сигналы можно анализировать, рассматривая их во временном (пространственном) и в частотном (спектральном) представлениях. При временном и частотном представлениях электрического периодического сигнала его полная средняя мощность, которая выделяется на сопротивлении в 1 Ом [2],

$$\overline{s(t)^2} = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{nc}^2 + C_{ns}^2) = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2).$$

При передаче, приеме и при различных преобразованиях сигнала его амплитудный и фазовый спектры, как правило, изменяются, а следовательно, изменяется форма исходного сигнала и уменьшается его

средняя мощность. В процессе таких преобразований может потребоваться, чтобы в преобразованном сигнале содержалась определенная часть, например, 90 % средней мощности исходного сигнала или чтобы его спектр содержал гармоники с амплитудами не менее заданного уровня. От этих требований зависит ширина спектра преобразованного сигнала. Следует заметить, что для точного воспроизведения форм сигнала необходимо сохранить неизменными как амплитудный, так и фазовый спектры.

1.2 Примеры решения задач

Задача 1

Найти аналитическое выражение для амплитудного и фазового спектров периодического сигнала вида $s(t) = E \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$,

$nT_0 - \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4} + nT_0$, $T_0 > T$, $n = 0, \pm 1, \dots$ и $s(t) = 0$ при любых других значениях t , где T_0 — период сигнала $s(t)$, а T — "период" синусоиды, если бы последняя непрерывно существовала на бесконечном интервале времени.

Решение

Так как функция $s(t)$ — нечетная, то $A_0 = C_0 = A_n = C_{nc} = 0$ и необходимо определить B_n и $C_n = C_{ns}$:

$$B_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T/4}^{T/4} E \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{T_0}t\right) dt = \frac{E}{T_0} \int_{-T/4}^{T/4} \cos\left[2\pi\left(\frac{1}{T} - \frac{n}{T_0}\right)t\right] dt -$$

$$- \frac{E}{T_0} \int_{-T/4}^{T/4} \cos\left[2\pi\left(\frac{1}{T} + \frac{n}{T_0}\right)t\right] dt = \frac{ET}{\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_0 - nT}{T_0}\right)}{T_0 - nT} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_0 + nT}{T_0}\right)}{T_0 + nT} \right], n = 1, 2, \dots$$

$$C_n = C_{ns} = \frac{B_n}{2} = \frac{ET}{2\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_0 - nT}{T_0}\right)}{T_0 - nT} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_0 + nT}{T_0}\right)}{T_0 + nT} \right], n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Выражение для $C_n = C_{ns}$ можно упростить:

$$C_n = C_{ns} = \frac{EnT^2}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{\pi nT}{2T_0}\right)}{T_0^2 - n^2T^2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Кроме того, выражение для $C_n = C_{ns}$ можно записать, используя функцию $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$:

$$C_n = C_{ns} = \frac{ET}{4T_0} \left[\operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_0 - nT}{T_0} \right) - \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_0 + nT}{T_0} \right) \right], n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Выражение для фазового спектра определяется выражением:

$$\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{C_{ns}}{C_{nc}} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n = 1, 2, \dots \\ -\frac{\pi}{2}, & n = -1, -2, \dots \end{cases}$$

Задача 2

Найти среднюю мощность сигнала $s(t)$, содержащуюся в полосе частот от 0 до $F = 3/T$:

$$s(t) = \begin{cases} E & \text{при } -T/2 \leq t \leq 0; \\ -E & \text{при } 0 < t \leq T/2, \end{cases}$$

где T — период сигнала.

Какую часть она составляет от полной средней мощности сигнала?

Решение

Средняя мощность сигнала $s(t)$, содержащаяся в полосе частот от 0 до $F = 3/T$, определяется следующим выражением:

$$\overline{s_1(t)^2} = \sum_{n=-3}^3 |C_n|^2 = \sum_{n=-3}^3 (C_{nc}^2 + C_{ns}^2).$$

Значения C_{nc} и C_{ns} могут быть найдены из выражения

$$C_n = C_{nc} - jC_{ns} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt.$$

Так как функция $s(t)$ — нечетная, то $C_0 = C_{nc} = 0$.

$$C_n = C_{ns} = \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 E \cdot e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt + \int_0^{T/2} (-E) \cdot e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt \right] = \frac{1}{T} \cdot \frac{E \cdot e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}}{-j\frac{2\pi n}{T}} \Bigg|_{-T/2}^0 +$$

$$+ \frac{1}{T} \cdot \frac{(-E) \cdot e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}}{-j\frac{2\pi n}{T}} \Bigg|_0^{T/2} = \frac{E}{-j2\pi n} \cdot (1 - e^{j\pi n} - e^{-j\pi n} + 1) = j \frac{E \cdot (1 - \cos(\pi n))}{\pi n}.$$

$$\text{Поскольку } |C_n| = \sqrt{C_{nc}^2 + C_{ns}^2} = |C_{ns}|, \text{ то } |C_1| = \frac{2E}{\pi}, |C_2| = 0, |C_3| = \frac{2E}{3\pi}.$$

Тогда средняя мощность сигнала $s(t)$, содержащаяся в полосе частот от 0 до $F = 3/T$, равна

$$\overline{s_1(t)^2} = \sum_{n=-3}^3 |C_n|^2 = \frac{80E^2}{9\pi^2}.$$

Полную среднюю мощность сигнала можно найти, используя временное представление сигнала:

$$\overline{s(t)^2} = \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 E^2 dt + \int_0^{T/2} E^2 dt \right] = E^2.$$

В полосе частот от 0 до $F = 3/T$ содержится часть полной средней мощности, составляющей величину $\frac{80}{9\pi^2}$, т.е. примерно 90 % полной средней мощности.

Задача 3

Найти аналитическое выражение для амплитудного и фазового спектров периодического сигнала вида $s(t) = E \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$,

$nT_0 - \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4} + nT_0$, $T_0 > T$, $n = 0, \pm 1, \dots$ и $s(t) = 0$ при любых других значениях t , где T_0 — период сигнала $s(t)$, а T — "период" косинусоиды, если бы последняя непрерывно существовала на бесконечном интервале времени.

Решение

Так как функция $s(t)$ — четная, то $B_n = C_{ns} = 0$ и необходимо определить $A_0 = C_0$, A_n и $C_n = C_{nc}$:

$$A_0 = C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T/4}^{T/4} E \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt = \frac{ET}{\pi T_0};$$

$$A_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T/4}^{T/4} E \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{T_0}t\right) dt = \frac{E}{T_0} \int_{-T/4}^{T/4} \cos\left[2\pi\left(\frac{1}{T} - \frac{n}{T_0}\right)t\right] dt +$$

$$+ \frac{E}{T_0} \int_{-T/4}^{T/4} \cos\left[2\pi\left(\frac{1}{T} + \frac{n}{T_0}\right)t\right] dt = \frac{ET}{\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_0 - nT}{T_0}\right)}{T_0 - nT} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_0 + nT}{T_0}\right)}{T_0 + nT} \right], n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Выражение для A_n можно упростить:

$$A_n = \frac{2ETT_0}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{\pi nT}{2T_0}\right)}{T_0^2 - n^2T^2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Кроме того, выражение для A_n можно записать, используя функцию $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$:

$$A_n = \frac{ET}{2T_0} \left[\text{sinc}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_0 - nT}{T_0}\right) + \text{sinc}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_0 + nT}{T_0}\right) \right], n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$C_n = C_{nc} = \frac{A_n}{2} = \frac{ET}{2\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_0 - nT}{T_0}\right)}{T_0 - nT} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_0 + nT}{T_0}\right)}{T_0 + nT} \right], n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{C_{ns}}{C_{nc}} = 0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

1.3 Задачи

1. Определить и построить амплитудный и фазовый спектры при тригонометрической и комплексной формах разложения периодического сигнала, заданного на периоде T в виде:

$$s(t) = \begin{cases} -E & \text{при } -T/2 \leq t \leq 0, \\ E & \text{при } 0 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

Такой сигнал может быть сформирован, например, при модуляции "полудисксом" излучения от точечного источника.

$$\text{Ответ: } s(t) = \frac{4E}{\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3 \cdot \frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{5} \sin\left(5 \cdot \frac{2\pi}{T}t\right) + \dots \right].$$

2. Для периодического сигнала, определенного на периоде T в виде

$$s(t) = \begin{cases} -E & \text{при } -T/2 \leq t \leq -T/4, T/4 \leq t \leq T/2, \\ E & \text{при } -T/4 < t < T/4, \end{cases}$$

выполнить задания, указанные в задаче 1. Сравнить полученный спектр со спектром сигнала, приведенным в задаче 1.

3. Выполнить задания, указанные в задаче 1, для периодического сигнала, описываемого на периоде T в виде:

$$s(t) = \begin{cases} -2E & \text{при } -T/2 \leq t \leq -T/4, T/4 \leq t \leq T/2, \\ 0 & \text{при } -T/4 < t < T/4. \end{cases}$$

Сравнить полученный результат с результатом задачи 1.

4. Выполнить задания, указанные в задаче 1, для периодического сигнала, описываемого на периоде T в виде:

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } -T/2 \leq t \leq 0, \\ 2E & \text{при } 0 < t \leq T/2. \end{cases}$$

Сравнить полученный результат со спектром сигнала, приведенного в задаче 1.

5. Для сигнала, приведенного в задаче 1, определить среднюю мощность, выделяемую на сопротивлении в 1 Ом и содержащуюся в полосе частот до $F = 5/T$ и $10/T$. Какую часть она составляет от полной средней мощности сигнала?

Ответ: $\approx 0,933$; $\approx 0,960$.

6. Используя комплексную форму разложения, определить амплитудный и фазовый спектры периодической последовательности прямоугольных импульсов величиной E и длительностью τ_n :

$$s(t) = \begin{cases} E & \text{при } t_1 + nT \leq t \leq t_1 + \tau_n + nT; \\ 0 & \text{при } t_1 + \tau_n + nT < t \leq t_1 + (n+1)T, 0 \leq t_1; n = 0, \pm 1, \dots \end{cases}$$

где T — период сигнала, t_1 — момент начала импульса. Построить график амплитудного и фазового спектров при $T/\tau_n = 4$ и $t_1 = -\tau_n/2, 0, \tau_n/2$.

$$\text{Ответ: } |C_n| = \frac{E \cdot \tau_n}{T} \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega \cdot \tau_n}{2}\right)}{\frac{\omega \cdot \tau_n}{2}} \right|, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} n,$$

$$\varphi_n = \frac{2\pi}{T} n(t_1 + \tau_n/2) + (k-1)\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots$$

7. Для сигнала, приведенного в задаче 6, при $T/\tau_n = 4$ найти среднюю мощность сигнала, содержащуюся в полосе частот до $F = 1/\tau_n$. Какую часть она составляет от полной средней мощности сигнала?

Ответ: $\approx 0,056$.

8. При воздействии на фотоприемник периодического импульсного излучения в выходной цепи фотоприемника появляются помехи и последовательность периодических электрических импульсов с периодом $T = 500$ мс, величиной A и длительностью $\tau_n = 100$ нс. Из этой последовательности необходимо выделить гармонику с номером $n = 1000$. Можно ли для этой цели применить устройство с чувствительностью к колебаниям по величине в два раза меньшим амплитуды первой гармоники в спектре импульсной последовательности? Гармоники с какими порядковыми номерами невозможно выделять из рассматриваемой импульсной последовательности с помощью такого устройства?

Ответ: да; $n > 3024$.

9. Определить и построить амплитудный и фазовый спектры при тригонометрической и комплексной формах разложения периодического сигнала величиной E , заданного на периоде T в виде:

$$\text{а) } s(t) = E \frac{t}{T}, \quad 0 \leq t \leq T;$$

$$\text{б) } s(t) = E \frac{T+2t}{2T}, \quad -T/2 \leq t \leq T/2;$$

$$\text{в) } s(t) = E \sin\left(\frac{\pi}{T} t\right), \quad 0 \leq t \leq T;$$

$$\text{г) } s(t) = E \left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad 0 \leq t \leq T;$$

$$\text{д) } s(t) = \begin{cases} 2E \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{T}\right), & -T/2 \leq t \leq 0, \\ 2E \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T}\right), & 0 \leq t \leq T/2; \end{cases}$$

$$\text{е) } s(t) = \begin{cases} 2E \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq T/2, \\ 2E \left(1 - \frac{t}{T}\right), & T/2 \leq t \leq T; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{ж)} \quad s(t) &= E \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T} \right), \quad -T/2 \leq t \leq T/2; & \text{з)} \quad s(t) &= \begin{cases} E \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right), & -T/4 \leq t \leq T/4, \\ 0, & -T/2 \leq t \leq -T/4, T/4 \leq t \leq T/2; \end{cases} \\
\text{и)} \quad s(t) &= \begin{cases} E \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), & 0 \leq t \leq T/2, \\ 0, & -T/2 \leq t \leq 0; \end{cases} & \text{к)} \quad s(t) &= \begin{cases} 2E \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq T/2, \\ 0, & T/2 < t \leq 0; \end{cases} \\
\text{л)} \quad s(t) &= \begin{cases} -E, & -\tau_u \leq t \leq 0, \\ E, & 0 \leq t \leq \tau_u, \\ 0, & \tau_u \leq t \leq T/2. \end{cases}
\end{aligned}$$

ОТВЕТ:

$$\begin{aligned}
\text{а)} \quad s(t) &= \frac{E}{2} - \frac{E}{\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) + \dots \right]; \\
\text{б)} \quad s(t) &= \frac{E}{2} + \frac{E}{\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) - \dots \right]; \\
\text{в)} \quad s(t) &= \frac{2E}{\pi} - \frac{4E}{\pi} \left[\frac{1}{3} \cos\left(2\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{15} \cos\left(4\frac{2\pi}{T}t\right) + \dots \right]; \\
\text{г)} \quad s(t) &= \frac{E}{2} + \frac{E}{\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) + \dots \right]; \\
\text{д)} \quad s(t) &= \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{3^2} \cos\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{5^2} \cos\left(5\frac{2\pi}{T}t\right) + \dots \right]; \\
\text{е)} \quad s(t) &= \frac{E}{2} - \frac{4E}{\pi^2} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{3^2} \cos\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{5^2} \cos\left(5\frac{2\pi}{T}t\right) + \dots \right]; \\
\text{ж)} \quad s(t) &= \frac{E}{2} - \frac{E}{\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) - \dots \right]; \\
\text{з)} \quad s(t) &= \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{2E}{\pi} \left[\frac{1}{3} \cos\left(2\frac{2\pi}{T}t\right) - \frac{1}{15} \cos\left(4\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{35} \cos\left(6\frac{2\pi}{T}t\right) - \dots \right]; \\
\text{и)} \quad s(t) &= \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \frac{2E}{\pi} \left[\frac{1}{3} \cos\left(2\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{15} \cos\left(4\frac{2\pi}{T}t\right) + \dots \right]; \\
\text{к)} \quad s(t) &= \frac{E}{4} - \frac{2E}{\pi^2} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{3^2} \cos\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{5^2} \cos\left(5\frac{2\pi}{T}t\right) + \dots \right] + \\
&+ \frac{E}{\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) - \frac{1}{4} \sin\left(4\frac{2\pi}{T}t\right) + \dots \right]; \\
\text{л)} \quad s(t) &= \frac{4E}{\pi} \left[\sin^2\left(\frac{\pi\tau_u}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{2} \sin^2\left(2\frac{\pi\tau_u}{T}\right) \sin\left(2\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{3} \sin^2\left(3\frac{\pi\tau_u}{T}\right) \sin\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) + \dots \right].
\end{aligned}$$

2 Гармонический анализ непериодических сигналов

2.1 Теоретические положения

Ограниченный на конечном интервале времени $[t_1, t_2]$ (в пространстве), называемый финитным, или неограниченный по длительности, но абсолютно интегрируемый непериодический детерминированный сигнал $s(t)$ можно представить как периодический с бесконечно большим периодом $T \rightarrow \infty$. Такой сигнал можно рассматривать как во временном (пространственном), так и в частотном (спектральном) представлениях. Если спектр периодического сигнала характеризуется суммой множества дискретных гармонических составляющих, частоты которых кратны частоте первой гармоники и обратно пропорциональны периоду сигнала, то, очевидно, спектр детерминированного непериодического абсолютно интегрируемого сигнала должен представляться суммой бесконечного множества составляющих, частоты которых образуют бесконечное непрерывное множество значений в некотором интервале, т.е. спектр должен быть непрерывным. Спектр финитного сигнала можно определить с помощью интеграла (прямого преобразования) Фурье [3]:

$$S(j\omega) = \int_{t_1}^{t_2} s(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Так как $s(t) = 0$ при $t < t_1$ и $t > t_2$, то пределы интегрирования в преобразовании Фурье как финитного, так и неограниченного по длительности абсолютно интегрируемого сигналов можно принять бесконечными:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Функция частоты $S(\omega)$ называется спектральной функцией сигнала $s(t)$, причем от спектрального представления сигнала $S(\omega)$ к его временному представлению $s(t)$ можно перейти с помощью обратного преобразования Фурье:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

В общем случае $S(j\omega)$ — функция комплексная:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cos(\omega t)dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\sin(\omega t)dt = |S(\omega)|e^{-j\phi(\omega)},$$

причем

$$|S(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}, \quad \phi(\omega) = \arctg\left(\frac{B(\omega)}{A(\omega)}\right),$$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(\omega t) dt, \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(\omega t) dt.$$

Функция $|S(\omega)|$ называется амплитудным, а $\varphi(\omega)$ — фазовым спектром непериодического сигнала, при этом для вещественного сигнала $|S(\omega)|$ — всегда четная, а $\varphi(\omega)$ — всегда нечетная функция частоты. В отличие от спектров периодических сигналов термин "спектральная функция" указывает не то, что $S(\omega)$ характеризует не амплитуду соответствующей гармоники, а бесконечно малое значение амплитуды гармоники, отнесенное к бесконечно малому интервалу частот, включающему в себя рассматриваемую частоту. Действительно, сравнив обратное преобразование Фурье с формулой разложения периодической функции в комплексный ряд Фурье, можно заметить, что бесконечно малая комплексная амплитуда

$$dC = \frac{1}{2\pi} S(j\omega) d\omega = S(j2\pi f) df,$$

откуда

$$S(j\omega) = \frac{dC}{df}.$$

Пусть задан непериодический одиночный (финитный) сигнал $s_1(t)$ со спектральной функцией $S_1(j\omega)$. Если рассмотреть периодическую последовательность с периодом T таких сигналов, как $s_1(t)$, то можно определить коэффициенты разложения C_n или A_n и B_n периодического сигнала соответственно в комплексный или тригонометрический ряд Фурье. При этом оказывается, что $S_1(j\omega)$ отличается от C_n лишь отсутствием множителя $1/T$. Поэтому при переходе от одиночного финитного сигнала $s_1(t)$ со спектральной функцией $S_1(j\omega)$ к периодическому сигналу $s_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1(t - kT)$ с периодом T коэффициенты разложения комплексного ряда Фурье C_n можно определять по формуле

$$C_n = \frac{1}{T} S_1(j\omega),$$

причем аргумент ω спектральной функции следует принять равным частоте $n\omega_1 = 2\pi n/T$ соответствующей гармоники.

Следовательно, форма амплитудного спектра, т.е. графика модуля спектральной функции как функции частоты, одиночного финитного сигнала $s_1(t)$ с точностью до масштабного множителя $1/T$ совпадает с огибающей линейчатого амплитудного спектра периодической последовательности, полученной путем бесконечного повторения сигналов $s_1(t)$ с периодом T .

Преобразования сигнала во временной (пространственной) области сопровождаются соответствующими преобразованиями его спектра.

Если сигнал $s_1(t)$ имеет спектральную функцию $S_1(j\omega)$, то сдвиг его во времени на интервал τ приводит к изменению на $\omega\tau$ только его фазового спектра, так что если $s_2(t) = s_1(t \mp \tau)$, то $S_2(j\omega) = S_1(j\omega)e^{\mp j\omega\tau}$.

При сжатии (растяжении) во времени в n раз сигнала $s_1(t)$, имеющего спектральную функцию $S_1(\omega)$, происходит расширение (сужение) спектра по частоте и уменьшение (увеличение) модуля спектральной функции

$$S_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_1\left(\frac{\omega}{n}\right).$$

Дифференцированию по времени сигнала $s_1(t)$, имеющего спектральную функцию $S_1(\omega)$, соответствует умножение $S_1(\omega)$ на $j\omega$, а интегрированию — деление на $j\omega$:

$$s_2(t) = \frac{ds_1(t)}{dt} \rightarrow S_2(j\omega) = j\omega S_1(j\omega),$$

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^t s_1(\tau) d\tau \rightarrow S_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega} S_1(j\omega).$$

Так как преобразования Фурье — линейные операции, то суммированию сигналов $s_1(t), s_2(t), s_3(t), \dots$, имеющих спектральные функции $S_1(\omega), S_2(\omega), \dots$, соответствует суммирование этих спектральных функций.

Для функций $f(t)$ и $g(t)$, имеющих спектральные функции $F(\omega)$ и $G(\omega)$ соответственно, справедливы соотношения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)G(j\Omega - j\omega) d\omega,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)G^*(j\omega) d\omega,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(\tau - t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)G(j\omega)e^{j\omega\tau} d\omega,$$

где $G^*(j\omega)$ — функция, комплексно-сопряженная функции $G(j\omega)$. Четной функции $s(t) = s(-t)$ соответствует вещественная спектральная функция

$$S(j\omega) = A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cos(\omega t) dt, \text{ а нечетной функции } s(t) = -s(-t) \text{ — чисто}$$

$$\text{мнимая спектральная функция } S(j\omega) = B(\omega) = -j \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\sin(\omega t) dt.$$

Если для четной функции $s(t) = s(-t)$ известна вещественная спектральная функцией $S(j\omega)$, а для временной функции сигнала $s(t)$,

подобной функции спектральной функции $S(j\omega)$, требуется определить соответствующую спектральную функцию ($s(t) \rightarrow Y(j\omega)$), то для этого достаточно в функции $s(t)$ заменить t на ω и $S(j\omega)$ умножить на 2π :

$$Y(j\omega) = 2\pi S(j\omega).$$

Это правило облегчает определение спектров сложных по форме непериодических сигналов, так как позволяет использовать для этого существующие таблицы преобразований Фурье.

Функция $|S(\omega)|$ имеет размерность $\left[\frac{\text{амплитуда сигнала}}{\Gamma\omega} \right]$, функция $|S(j\omega)|^2 = \left[\frac{(\text{амплитуда сигнала})^2}{\Gamma\omega^2} \right] = \left[\frac{(\text{амплитуда сигнала})^2 \cdot c}{\Gamma\omega} \right]$.

Для электрического сигнала (напряжения или тока) эта размерность соответствует энергии, выделяемой на сопротивления 1 Ом и приходящейся на 1 Гц полосы частот, поэтому $|S(j\omega)|^2$ называется спектральной плотностью энергии. Полную энергию непериодического сигнала E_0 можно найти, просуммировав мгновенные мощности сигнала $s^2(t)$ по времени его существования, либо просуммировав спектральные плотности энергии $|S(j\omega)|^2$ по всем линейным частотам существования спектра этого сигнала. Оба результата должны, естественно, совпадать, что и утверждается равенством Парсевала:

$$E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |S(jf)|^2 df.$$

Для встречающихся на практике сигналов спектральная плотность энергии $|S(j\omega)|^2$ достигает максимума на некоторой частоте, для большинства видеосигналов — на частоте $\omega = 0$, т.е. $|S(j\omega)|_{\text{макс}}^2 = |S(0)|^2$. Для упрощения вычислений площадь, определяемую в частотной области интегралом в равенстве Парсевала, можно находить как площадь равновеликого прямоугольника с высотой, равной $|S(jf)|_{\text{макс}}^2$. При этом основание прямоугольника определяет так называемую эффективную (или энергетическую) ширину спектра сигнала:

$$\Delta f_{\text{эфф}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S(jf)|^2 df}{|S(jf)|_{\text{макс}}^2}.$$

Если сигналу $s_1(t)$ соответствует спектральная функция $S_1(j\omega)$, а сигналу $s_2(t)$ — $S_2(j\omega)$, то энергия суммы сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, выделяемая на сопротивлении в 1 Ом, равна сумме энергий каждого из

сигналов и энергии их взаимодействия, выделяемых на сопротивлении в 1 Ом, что определяет равенство Рэлея:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t) dt + 2 \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} s_2^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_1(\omega)|^2 d\omega +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [S_1(j\omega)S_2^*(j\omega) + S_1^*(j\omega)S_2(j\omega)] d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_2(\omega)|^2 d\omega,$$

где $S^*(j\omega)$ — функция, комплексно-сопряженная функции $S(j\omega)$. При этом энергия взаимодействия сигналов, выделяемая на сопротивлении в 1 Ом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_1(j\omega)||S_2(j\omega)| \cos[\varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega)] d\omega,$$

где $\varphi_1(\omega), \varphi_2(\omega)$ — фазовые спектры первого и второго сигналов. Сигналы, для которых $\varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega) = const$, называются когерентными. Если энергия взаимодействия

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t) dt = 0,$$

то сигналы называются ортогональными. Ортогональность комплексных функций на интервале $[t_1, t_2]$ определяется соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1^*(t)s_2(t) dt = 0.$$

2.2 Примеры решения задач

Задача 1

Определить спектральную функцию одиночного импульса, описываемого функцией

$$s(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_0 t), & \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, -\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4}, \\ 0, & t < -\frac{T}{4}, t > \frac{T}{4}. \end{cases}$$

Решение

С помощью прямого преобразования Фурье находим:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = A \int_{-T/4}^{T/4} \cos(\omega_0 t) \cos(\omega t) dt = \frac{A}{2} \int_{-T/4}^{T/4} \cos[(\omega - \omega_0)t] dt +$$

$$+ \frac{A}{2} \int_{-T/4}^{T/4} \cos[(\omega + \omega_0)t] dt = A \left[\frac{\sin[(\omega - \omega_0)T/4]}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin[(\omega + \omega_0)T/4]}{\omega + \omega_0} \right] =$$

$$= \frac{AT}{4} \left[\frac{\sin[(\omega - \omega_0)T/4]}{(\omega - \omega_0)T/4} + \frac{\sin[(\omega + \omega_0)T/4]}{(\omega + \omega_0)T/4} \right] = \frac{2A\omega_0}{\omega^2 + \omega_0^2} \cos\left(\frac{\omega T}{4}\right).$$

Так как $s(t)$ — функция четная, то спектральная функция $S(j\omega)$ — вещественная и также четная функция, при этом $S(j\omega) = 0$ для $\omega = \pm\omega_0, \pm 3\omega_0, \dots$. Поскольку в функции $S(j\omega)$ отсутствует мнимая составляющая, то в пределах $-3\omega_0 \leq \omega \leq 3\omega_0$ фазовый спектр можно представить в виде:

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{B(\omega)}{A(\omega)}\right) = 0, \quad -3\omega_0 \leq \omega \leq 3\omega_0,$$

а при каждом переходе функции $S(\omega)$ через нуль $\varphi(\omega)$ скачком увеличивается на π для $\omega > 0$ и уменьшается на π для $\omega < 0$, так как арктангенс — функция периодическая с периодом π .

Задача 2

Определить спектральную функцию единичного скачка (функции Хевисайда)

$$s(t) = e(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Решение

Для этой функции $\int_0^{\infty} |s(t)| dt \rightarrow \infty$, ввиду чего формулы преобразования Фурье не могут быть применены непосредственно. Это затруднение легко обойти, если искомую спектральную функцию представить как предел для функции $s(t)e^{-ct}$ где c — положительное число, стремящееся к нулю.

В этом случае искомая спектральная функция определится выражением

$$S(j\omega) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c + j\omega} = \frac{1}{j\omega}.$$

Модуль и аргумент спектральной функции в области положительных частот будут равны

$$S(\omega) = \frac{1}{\omega} \quad \text{и} \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}.$$

Задача 3

Определить спектральную функцию прямоугольного импульса (рис. 2.1, а)

$$s(t) = \begin{cases} A, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2; \\ 0, & -\tau/2 > t > \tau/2, \end{cases}$$

где A и τ — величина и длительность импульса соответственно.

Решение

Решим эту задачу двумя способами

а) Спектральная функция равна

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j\omega t} dt = -\frac{A}{j\omega} (e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}).$$

Используя формулу Эйлера $\frac{e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}}{2j} = \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ [4], получим

$$-\frac{A}{j\omega} (e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}) = A \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}.$$

б) представим прямоугольный импульс в виде разности двух функций Хевисайда (рис. 2.1, б)

$$s(t) = A[e(t + \tau/2) - e(t - \tau/2)].$$

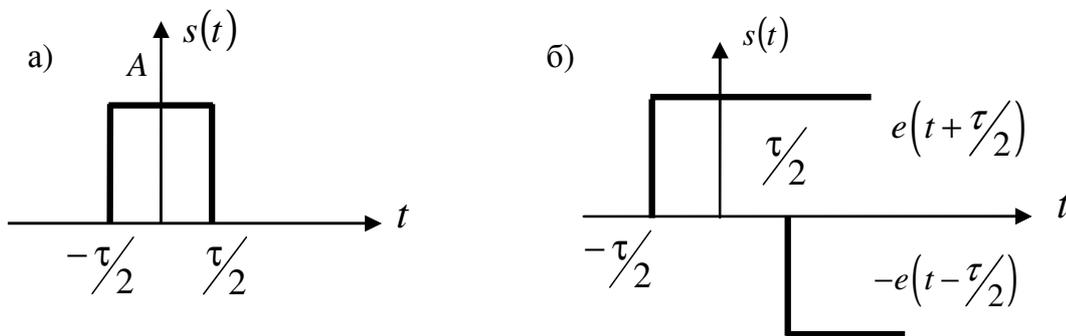


Рисунок 2.1

Так как спектральная функция Хевисайда равна $\frac{1}{j\omega}$, то, используя теорему (свойство) смещения, получим

$$S(j\omega) = \frac{A}{j\omega} (e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}) = A \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}.$$

Задача 4

Определить спектральную функцию сигнала, состоящего из двух импульсов прямоугольной формы разной полярности, представленного на рисунке 2.2.

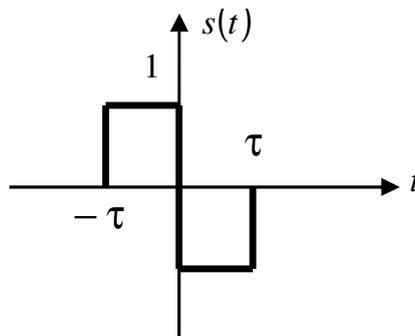


Рисунок 2.2

Решение

Такой сигнал можно представить через функции Хевисайда в следующем виде

$$s(t) = e(t + \tau) - 2e(t) + e(t - \tau).$$

В этом случае спектральная функция будет равна

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \frac{1}{j\omega} e^{j\omega\tau} - \frac{2}{j\omega} + \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega\tau} = \frac{1}{j\omega} (e^{j\omega\tau} - 1) + \frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega\tau} - 1) = \\ &= \frac{1}{j\omega} e^{j\omega\tau/2} (e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}) - \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega\tau/2} (e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}) = \\ &= \tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} (e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}) = 2j\tau \frac{\sin^2 \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}. \end{aligned}$$

Как видим, спектральная функция для такого сигнала является мнимой и нечетной функцией частоты.

Задача 5

Определить спектральную функцию треугольного импульса (рис. 2.3), используя решение задачи 4.

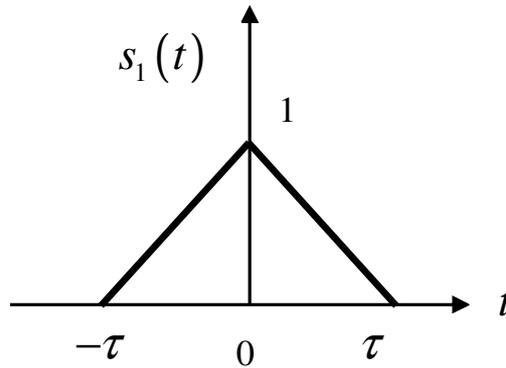


Рисунок 2.3

Решение

Этот треугольный импульс $s_1(t)$ можно получить, если проинтегрировать сигнал $s(t)$ задачи 4

$$s_1(t) = \int_{-\tau}^t [e(t + \tau) - 2e(t) + e(t - \tau)] dt = \int_{-\tau}^t s(t) dt.$$

Сигнал $s(t)$ можно представить в виде обратного преобразования

$$\text{Фурье } s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Следовательно, сигнал $s_1(t)$ будет определяться выражением

$$s_1(t) = \int_{-\tau}^t \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(j\omega)}{j\omega} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega \tau}) d\omega.$$

Так как $s_1(-\tau) = 0$, то

$$s_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega.$$

Следовательно, $\frac{S(j\omega)}{j\omega} = S_1(j\omega)$ является спектральной функцией треугольного импульса $s_1(t)$. $S(j\omega)$ — спектральная функция сигнала $s(t)$ задачи 4.

Отсюда имеем

$$S_1(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{j\omega} = \frac{j\tau \sin^2 \frac{\omega\tau}{2}}{j\omega \frac{\omega\tau}{2}} = \tau^2 \frac{\sin^2 \frac{\omega\tau}{2}}{\omega^2 \tau^2 / 4}.$$

Задача 6

Определить спектральную функцию гауссова импульса $s(t) = e^{-\pi \frac{t^2}{\tau^2}}$, где τ — длительность импульса примерно на уровне 0,5 от максимальной величины импульса.

Решение

Спектральная функция равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \frac{t^2}{\tau^2}} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \frac{t^2}{\tau^2} - j\omega t} dt.$$

Выделим в степени экспоненты полный квадрат

$$-\pi \frac{t^2}{\tau^2} - j\omega t = -\pi \left(\frac{t^2}{\tau^2} + 2 \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \frac{j\omega\tau}{2\sqrt{\pi}} t + \left(\frac{j\omega\tau}{2\sqrt{\pi}} \right)^2 \right) + \left(\frac{j\omega\tau}{2\sqrt{\pi}} \right)^2 = -\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{j\omega\tau}{2\sqrt{\pi}} \right)^2 - \frac{\omega^2 \tau^2}{4\pi}.$$

Подставим это выражение в интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{j\omega\tau}{2\sqrt{\pi}} \right)^2 - \frac{\omega^2 \tau^2}{4\pi}} dt = e^{-\frac{\omega^2 \tau^2}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{j\omega\tau}{2\sqrt{\pi}} \right)^2} dt.$$

Обозначим $\frac{t}{\tau} + j \frac{\omega\tau}{2\sqrt{\pi}} = y$, $dt = \tau dy$, получим

$$\tau e^{-\frac{\omega^2 \tau^2}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} dy = \tau e^{-\frac{\omega^2 \tau^2}{4\pi}}.$$

При вычислении интеграла использовалась формула

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}, \quad a > 0.$$

Как видим, спектральная функция гауссова импульса является также гауссовой функцией.

2.3 Задачи

1. Для сигнала из задачи 1 (см. 2.2 Примеры решения задач) определить величину энергии, содержащейся в полосе частот до $\omega = \omega_1$, и эффективную ширину спектра.

Ответ:

$$E_{0,\omega_1} = \frac{A^2 T}{2} \left\{ -\frac{2}{\pi} \frac{\sin^2[(\omega_1 - \omega_0)T/4]}{(\omega_1 - \omega_0)T/4} + Si(\pi) + Si[(\omega_1 - \omega_0)T/2] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \left[-2 - \ln \left| \frac{\omega_1 + \omega_0}{\omega_1 - \omega_0} \right| + 2Ci(\pi) + Ci|(\omega_1 - \omega_0)T/2| - Ci|(\omega_1 + \omega_0)T/2| \right] \right\}; \\ \Delta f_{эфф} = \frac{\pi}{4T}.$$

2. Определить спектральную функцию пачки из N идентичных по форме импульсов, в которой первый импульс пачки $s_1(t) = A \cos(\omega_0 t)$, $-T_0/4 \leq t \leq T_0/4$. Интервал между моментами появления соседних импульсов $T = T_0$. Определить частоты, при которых эта спектральная плотность достигает максимумов и обращается в нуль.

Ответ:

$$S(j\omega) = S_1(j\omega) \frac{e^{-jN\omega T} - 1}{e^{-j\omega T} - 1}; \quad \omega = k \frac{2\pi}{T}, \quad \omega = \frac{1}{N} \cdot \frac{2\pi}{T}, \quad k = 1, 2, \dots$$

3. Определить спектральную функцию сигнала, описываемого функцией вида:

$$s(t) = A \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}, \quad \omega_0 = const, \quad -\infty < t < \infty.$$

Ответ: $\pi \frac{A}{\omega_0}; \quad -\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0, \quad S(j\omega) = 0 \quad \text{при} \quad |\omega| > |\omega_0|.$

4. По заданной спектральной функции импульса $S(j\omega) = \pi A e^{-\alpha|\omega|}$ определить его форму и построить график $s(t)$.

Ответ: $s(t) = \frac{\alpha A}{\alpha^2 + t^2}.$

5. Для импульса экспоненциальной формы $s(t) = A e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$, $0 \leq t < \infty$, определить полосу частот, в пределах которой сосредоточено 90% всей его энергии. Какая доля всей энергии импульса заключена во временном интервале $[0, 1/\alpha]$ и в полосе частот до $\omega_1 = \alpha [с^{-1}]$?

Ответ: $0,6314\alpha; 0,865; 0,5.$

6. Определить энергию взаимодействия и энергию суммы двух сигналов, представляющих собой прямоугольные видеоимпульсы

величиной A и длительностью τ_n , причем один из них существует на интервале времени $-\tau_n/2 \leq t \leq \tau_n/2$, другой — на интервале $0 \leq t \leq \tau_n$.

Ответ: $A^2\tau_n/2; 3A^2\tau_n$.

7. Определить спектральную функцию сигнала, состоящего из двух одинаковых прямоугольных видеоимпульсов величиной A и длительностью τ_n каждый и разделенных интервалом T , причем $s_1(t) = A, -\tau_n/2 \leq t \leq \tau_n/2$.

Ответ: $A\tau_n \frac{\sin(\omega\tau_n/2)}{\omega\tau_n/2} (1 - e^{-j\omega T})$.

8. Используя результаты решения задачи 1 (см. 2.2 Примеры решения задач) определить спектральные функции сигналов вида:

$$s(t) = -A\omega_0 \cos(\omega_0 t), \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, -\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4}, s(t) = 0, |t| > \frac{T}{4}$$

$$s(t) = \frac{A}{\omega_0} \sin(\omega_0 t), -\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4}, s(t) = 0, |t| > \frac{T}{4}$$

$$s(t) = A \cos\left(\frac{\omega_0}{n} t\right), n > 0, -\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4}, s(t) = 0, |t| > \frac{T}{4}.$$

Как оценить характер изменения спектра исходного сигнала, не проводя вычислений?

Ответ: $-\frac{2A\omega_0}{\omega^2 + \omega_0^2} j\omega \cos(\omega T/4); \frac{1}{j\omega} \frac{2A\omega_0}{\omega^2 + \omega_0^2} \cos(\omega T/4); \frac{2A\omega_0}{(\omega n)^2 + \omega_0^2} \cos(n\omega T/4)$.

9. Определить спектральную функцию произведения двух сигналов:

$$s_1(t) = A_1 \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1 t} \text{ и } s_2(t) = A_2 \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2 t}, \omega_1 = \text{const}, \omega_2 = \text{const}, -\infty < t < \infty.$$

Ответ: $\pi \frac{A_1 A_2}{\omega_2}, -\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ при $\omega_1 < \omega_2$; $\pi \frac{A_1 A_2}{\omega_1}, -\omega_2 \leq \omega \leq \omega_1$ при $\omega_2 < \omega_1$.

10. Являются ли ортогональными на интервале $[0, T]$ сигналы следующего вида: $e^{jn\omega_0 t}$ и $e^{-jn\omega_0 t}$; $\cos(n\omega_0 t)$ и $\sin(n\omega_0 t)$, $\omega_0 = 2\pi/T$; $A, -\tau_n/2 \leq t \leq \tau_n/2$ и $A, -\tau_n/4 \leq t \leq 3\tau_n/4, T > \tau_n$?

11. Определить эффективную ширину спектра сигнала:

а) $s(t) = A e^{-\frac{t^2}{2a^2}}, -\infty \leq t \leq \infty,$

где $2a$ — длительность сигнала на уровне $A e^{-0.5}$;

б) $s(t) = \begin{cases} A, & -\tau_n/2 \leq t \leq \tau_n/2, \\ 0, & |t| > \tau_n/2; \end{cases}$

в) $s(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ A e^{-t/a}, & 0 \leq t < \infty, a > 0. \end{cases}$

Ответ: а) $(\sqrt{2\pi a})^{-1}$; б) τ_n^{-1} ; в) $(2a)^{-1}$.

12. Определить амплитудный и фазовый спектры и построить их графики для следующих сигналов:

$$\text{а) } s(t) = \begin{cases} A \frac{t}{\tau_n}, & 0 \leq t \leq \tau_n, \\ 0, & t < 0, t > \tau_n; \end{cases}$$

$$\text{б) } s(t) = \begin{cases} A \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{\tau_n} \right), & -\tau_n/2 \leq t \leq \tau_n/2, \\ 0, & t < -\tau_n/2, t > \tau_n/2; \end{cases}$$

$$\text{в) } s(t) = \begin{cases} A \left(1 - \frac{t}{\tau_n} \right), & 0 \leq t \leq \tau_n, \\ 0, & t < 0, t > \tau_n; \end{cases}$$

$$\text{г) } s(t) = \begin{cases} A \cos^2(\omega_0 t), & -T/2 \leq t \leq T/2, \omega_0 = 2\pi/T, \\ 0, & |t| > T/2; \end{cases}$$

$$\text{д) } s(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \tau_n, \\ -A, & 2\tau_n \leq t \leq 3\tau_n, \\ 0, & t < 0, \tau_n < t < 2\tau_n, t > 3\tau_n; \end{cases}$$

$$\text{е) } s(t) = A e^{-a|t|}, \quad a > 0, -\infty < t < \infty;$$

$$\text{ж) } s(t) = \begin{cases} A \sin(\omega_0 t), & \omega_0 = 2\pi/T, 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t < 0, t > T; \end{cases}$$

$$\text{з) } s(t) = \begin{cases} A t^2, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t < 0, t > T; \end{cases}$$

$$\text{и) } s(t) = \begin{cases} A t e^{-at}, & a > 0, 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t < 0, t > T; \end{cases}$$

$$\text{к) } s(t) = \begin{cases} A e^{-at} \sin(\omega_0 t), & 0 \leq t \leq T, \omega_0 = 2\pi/T, \\ 0, & t < 0, t > T, T_0 < T. \end{cases}$$

Ответ:

$$\text{а) } \frac{A}{\tau_n \omega^2} [1 - e^{-j\omega\tau_n} (1 + j\omega\tau_n)];$$

$$\text{б) } \frac{A}{\tau_n \omega^2} [e^{j\omega\tau_n/2} - e^{-j\omega\tau_n/2} (1 + j\omega\tau_n)];$$

$$\text{в) } A \left\{ \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau_n}) - \frac{1}{\tau_n \omega^2} [1 - e^{-j\omega\tau_n} (1 + j\omega\tau_n)] \right\};$$

$$\text{г) } AT \frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{4\omega_0^2 + \omega^2} \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2};$$

$$\text{д) } A\tau_n \frac{\sin(\omega\tau_n/2)}{\omega\tau_n/2} (1 - e^{-j2\omega\tau_n});$$

$$\text{е) } \frac{2Aa}{a^2 + \omega^2};$$

$$\text{ж) } j \frac{AT\omega}{2(\omega^2 - 4\pi^2)} \sin(\omega T);$$

$$\text{з) } j \frac{A}{\omega^3} [2 - (2 + 2Tj\omega - \omega^2 T^2) e^{-j\omega T}];$$

$$\text{и) } \frac{A}{(j\omega + a)^2} [e^{-(a+j\omega)T} (1 - aT - j\omega T) + 1];$$

$$\text{к) } \frac{\omega_0}{(j\omega + a)^2 + \omega_0^2} \left[1 - e^{-(a+j\omega)T} \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 T) + \frac{a}{\omega_0} \sin(\omega_0 T) + \cos(\omega_0 T) \right) \right].$$

3 Корреляционный анализ детерминированных сигналов

3.1 Теоретические положения

Энергетические свойства детерминированного сигнала и скорость изменения его во времени (или в пространстве) можно оценивать с помощью корреляционной функции. Автокорреляционная функция (АКФ) характеризует степень перекрытия сигнала $s(t)$ и его копии, сдвинутой относительно исходного положения сигнала на временной (пространственный) интервал τ . Для детерминированного сигнала $s(t)$ конечной длительности или неограниченного во времени, но удовлетворяющего условию абсолютной интегрируемости, АКФ определяется соотношением [5]:

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t \pm \tau)dt,$$

причем интеграл будет отличен от нуля в пределах интервала перекрытия сигнала $s(t)$ и его копии $s(t \pm \tau)$, сдвинутой на τ в сторону опережения или отставания.

АКФ — всегда четная функция аргумента τ , при $\tau = 0$ она достигает максимума и характеризует энергию сигнала:

$$K(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = E_0.$$

Нормированная АКФ называется коэффициентом корреляции и обозначается $k(\tau)$, при этом $k(\tau)$ — безразмерная функция аргумента τ . Для ограниченного во времени (пространстве) и для неограниченного по длительности, но абсолютно интегрируемого сигнала коэффициент корреляции $k(\tau) = K(\tau) / K(0)$, причем $-1 \leq k(\tau) \leq 1$.

Для неограниченных во времени (в пространстве) детерминированных сигналов, энергия которых бесконечно велика, АКФ определяется соотношением

$$K_{\text{беск}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t \pm \tau)dt.$$

и характеризует среднюю взаимную мощность перекрывающихся частей сигнала и его копии, сдвинутой на интервал τ . Для периодического сигнала $s(t)$ с периодом T_0 АКФ имеет также период, равный T_0

$$K_{\text{пер}}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)s(t \pm \tau)dt.$$

Таким образом, АКФ периодического сигнала можно найти, определив АКФ непериодического сигнала, заданного на периоде T_0 , а

затем разделив найденное значение на T_0 и приписав результату периодичность с периодом T_0 .

Для нахождения АКФ сложных по форме периодических детерминированных сигналов можно воспользоваться разложением таких сигналов в ряда Фурье. Если при интегрировании гармонических составляющих учесть свойства их ортогональности, то для АКФ можно получить выражение

$$K_{\text{пер}}(\tau) = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) \cos\left(\frac{2\pi n}{T_0} \tau\right).$$

По полученному разложению легко синтезировать АКФ, воспользовавшись подробными таблицами для гармонического синтеза [6]. Коэффициент корреляции для неограниченного во времени (пространстве) сигнала $s(t)$ определяется только для переменной составляющей

$$k(\tau) = \frac{K_{\text{беск}}(\tau) - \overline{s(t)}^2}{K_{\text{беск}}(0) - \overline{s(t)}^2},$$

где $\overline{s(t)}$ — постоянная составляющая сигнала.

Связь двух ограниченных во времени (пространстве), а также удовлетворяющих условию абсолютной интегрируемости детерминированных сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ определяется функцией взаимной корреляции

$$K_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t + \tau) s_2(t) dt.$$

Коэффициент взаимной корреляции

$$k_{12}(\tau) = \frac{K_{12}(\tau) - \overline{s_1(t)} \cdot \overline{s_2(t)}}{\sqrt{[K_1(0) - \overline{s_1(t)}^2] \cdot [K_2(0) - \overline{s_2(t)}^2]}},$$

где $K_1(0)$, $K_2(0)$ — автокорреляционная функция первого и второго сигналов при $\tau = 0$.

Функцию взаимной корреляции двух детерминированных периодических сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ с одним и тем же периодом можно определить, разложив их в ряды Фурье и определив коэффициенты разложения:

$$K_{12}(\tau) = A_{01} A_{02} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{n1} A_{n2} + B_{n1} B_{n2}) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} \tau\right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{n1} A_{n2} + B_{n1} B_{n2}) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} \tau\right).$$

Если сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ разложить в ряд только по косинусам, то

$$K_{12}(\tau) = A_{01} A_{02} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n1} A_{n2} \cos\left(\frac{2\pi n}{T} \tau\right).$$

Интервал, в пределах которого АКФ или коэффициент корреляции уменьшаются от максимального до заданного значения, например, ε ,

называется интервалом корреляции. В этом случае интервал корреляции $\tau_{\text{кор.}\varepsilon}$ определяется из соотношения

$$k(\tau) = \varepsilon.$$

Иногда интервал корреляции $\tau_{\text{кор}}$ определяют путем трансформации фигуры под графическим коэффициентом корреляции в равнобедренный прямоугольник с высотой $k(0) = 1$. При этом

$$\tau_{\text{кор}} = \int_0^{\infty} k(\tau) d\tau,$$

если интеграл сходится, а при выборе пределов интегрирования учитывается, что АКФ — функция четная. В этом случае интервал корреляции и эффективная ширина спектра оказываются связанными соотношением:

$$\Delta f_{\text{эфф}} \tau_{\text{кор}} = 0,5,$$

вытекающим из того, что АКФ непериодического детерминированного сигнала $K(\tau)$ квадрат модуля спектральной функции $|S(\omega)|^2$ связаны прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$|S(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega.$$

3.2 Примеры решения задач

Задача 1

Определить АКФ одиночного импульса вида

$$s(t) = A \cos(2\pi t / T), \quad -T/4 \leq t \leq T/4, \quad s(t) = 0, \quad |t| > T/4.$$

Найти коэффициент и время корреляции и эффективную ширину спектра.

Решение

Так как $s(t)$ — непериодический сигнал, ограниченный по длительности, то его АКФ определяется в интервале $-T/4 + \tau \leq t \leq T/4$, либо в интервале $-T/4 \leq t \leq T/4 - \tau$, когда перекрываются сигнал и сдвинутая влево или вправо на интервал τ его копия:

$$\begin{aligned} K(\tau) &= \int_{-T/4+\tau}^{T/4} A^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \cos\left[\frac{2\pi}{T}(t-\tau)\right] dt = \frac{A^2}{2} \int_{-T/4+\tau}^{T/4} \left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right) + \cos\left[\frac{2\pi}{T}(2t-\tau)\right] \right\} dt = \\ &= \frac{A^2}{2} \left(\frac{T}{2} - \tau\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right) + \frac{A^2 T}{4\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right), \quad 0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

Так как у непериодического ограниченного по длительности сигнала постоянная составляющая равна нулю, то коэффициент корреляции

$$k(\tau) = \frac{K(\tau)}{K(0)} = \left(1 - \frac{2\tau}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right) + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right), \quad 0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}.$$

Если интервал корреляции определить как отрезок времени, за который коэффициент корреляции уменьшается от 1 до 0, то $\tau_{\text{кор.}\varepsilon}$ можно найти, решив трансцендентное относительно τ уравнение

$$\left(1 - \frac{2\tau}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right) + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right) = 0,$$

$$\tau_{\text{кор.}\varepsilon} = T/2.$$

Если интервал корреляции определить по формуле $\tau_{\text{кор}} = \int_0^{T/2} k(\tau) d\tau$, то

в этом случае

$$\tau_{\text{кор}} = \frac{2T}{\pi^2}.$$

Эффективная ширина спектра сигнала

$$\Delta f_{\text{эфф}} = \frac{1}{2\tau_{\text{кор}}} = \frac{\pi^2}{4T}.$$

3.3 Задачи

1. Применив разложения в ряд Фурье, определить АКФ и коэффициент корреляции периодического сигнала

$$\text{а) } s(t) = \begin{cases} A, & nT - \frac{\tau_n}{2} \leq t \leq nT + \frac{\tau_n}{2}, \\ 0, & t < nT - \frac{\tau_n}{2}, t > nT + \frac{\tau_n}{2}, \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \end{cases} \quad \text{б) } s(t) = \begin{cases} 2A\left(\frac{1}{2} + \frac{t}{T}\right), & nT - T/2 \leq t \leq nT, \\ 2A\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T}\right), & nT \leq t \leq nT + T/2, \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Ответ:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} \cos(n\alpha) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{2}, & 0 \leq \alpha \leq \pi, \\ -\frac{\alpha^2}{2}, & 2\alpha \leq \alpha \leq \pi, \end{cases} \quad K(\tau) = \left(\frac{A\tau_n}{T}\right)^2 + \begin{cases} \frac{A^2\tau}{T} + \frac{A^2\tau_n}{T}, & nT \leq \tau \leq \tau_n + nT, \\ 0, & nT + \tau_n < \tau \leq \left(\frac{1}{2} + n\right)T; \end{cases}$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^4} = -\frac{\pi^4}{96} - \frac{\pi^2}{16}x^2 + \frac{\pi}{24}x^3, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad K(\tau) = A^2 \left(\frac{5}{12} - 4\frac{\tau^2}{T^2} + \frac{16}{3}\frac{\tau^3}{T^3} \right),$$

$$nT \leq \tau \leq nT + T/2.$$

2. Определить функцию взаимной корреляции двух периодических сигналов

$$s_1(t) = \begin{cases} E_1, & nT - \tau_{n1}/2 \leq t \leq nT + \tau_{n1}/2, \\ 0, & t < nT - \tau_{n1}/2, t > nT + \tau_{n1}/2, \end{cases}$$

$$s_2(t) = \begin{cases} E_2, & nT - \tau_{n2}/2 \leq t \leq nT + \tau_{n2}/2, \\ 0, & t < nT - \tau_{n2}/2, t > nT + \tau_{n2}/2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

При этом использовать правило разложения в ряд Фурье и принять $\tau_{n1} = \frac{T}{3}, \tau_{n2} = \frac{T}{6}$.

Ответ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{n^2} \cos(nx) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}\alpha + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x \leq \alpha, \\ \frac{\pi^2}{6} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\pi}{2}x + \frac{x^2}{4}, & \alpha \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$K_{12}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{3} E_1 E_2, & nT \leq \tau \leq nT + \frac{T}{6}, \\ \frac{1}{3} E_1 E_2 - \frac{\tau}{T}, & nT + \frac{T}{6} \leq \tau \leq nT + \frac{T}{2}. \end{cases}$$

3. Воспользовавшись разложением в ряд Фурье, определить функцию взаимной корреляции двух периодических сигналов

$$\text{а) } s(t) = \begin{cases} E_1, & nT \leq t \leq nT + T/2, \\ 0, & nT + T/2 < t < T(n+1); \end{cases} \quad \text{б) } s(t) = \begin{cases} 2E_2 \frac{t}{T}, & nT \leq t \leq nT + T/2, \\ 0, & nT + T/2 < t < T(n+1), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Ответ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}x, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$K_{12}(\tau) = \frac{1}{4} E_1 E_2 - \frac{\tau^2}{T^2} E_1 E_2, \quad nT \leq \tau \leq nT + T/2.$$

4. Определить функцию взаимной корреляции ограниченного по длительности сигнала $s_1(t)$ произвольной формы и сигнала в виде δ -функции — $s_2(t) = S_0 \delta(t - t_0)$, сдвинутого на интервал t_0 относительно первого.

$$\text{Ответ: } K_{12}(\tau) = S_0 s_1(t_0 + \tau).$$

5. Определить функцию взаимной корреляции сдвинутых друг относительно друга на интервал $\Delta t = t_2 - t_1$ двух "узких" импульсов, записываемых через δ -функцию:

$$s_1(t) = S_1 \delta(t - t_1), \quad s_2(t) = S_2 \delta(t - t_2).$$

$$\text{Ответ: } K_{12}(\tau) = S_1 S_2 \delta(\tau - \Delta t).$$

6. Определить АКФ, коэффициент корреляции, интервал корреляции $\tau_{\text{кор}}$, $\tau_{\text{кор.}\epsilon}$ и эффективную ширину спектра непериодического детерминированного сигнала:

а) $s(t) = A \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right)$, $-\infty < t < \infty$; б) $s(t) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$, $0 \leq t \leq T/2$;

в) $s(t) = A \frac{t}{T}$, $0 \leq t \leq T$; г) $s(t) = A \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$, $-T/4 \leq t \leq T/4$;

д) $s(t) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$, $0 \leq t \leq 3T/2$; е) $s(t) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$, $0 \leq t \leq 5T/4$;

ж) $s(t) = A \exp(-\alpha t)$, $0 \leq t < \infty$; з) $s(t) = At^2$, $0 \leq t \leq T$;

и) $s(t) = At \exp(-\alpha t)$, $\alpha > 0$, $0 \leq t < \infty$.

Построить графики АКФ и $k(\tau)$.

Ответ:

а) $K(\tau) = A^2 a \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4a^2}\right)$, $\tau_{\text{кор}} = \sqrt{\pi} a$;

б) $K(\tau) = \frac{A^2}{4} (T - 2\tau) \cos\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right) + \frac{A^2 T}{4\pi} \sin\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right)$, $0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}$, $\tau_{\text{кор}} = \frac{2T}{\pi^2}$;

в) $K(\tau) = A^2 \left[\frac{1}{3} \left(T - \frac{\tau^3}{T^2} \right) - \frac{\tau}{2} \left(1 - \frac{\tau^2}{T^2} \right) \right]$, $0 \leq \tau \leq T$, $\tau_{\text{кор}} = \frac{3T}{8}$;

г) $K(\tau) = \frac{A^2}{4} \left[\frac{T}{2} - \tau + \frac{3T}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi\tau}{T}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{T}{2} - \tau \right) \cos\left(\frac{4\pi\tau}{T}\right) \right]$, $0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}$, $\tau_{\text{кор}} = \frac{T}{6}$;

д) $K(\tau) = \frac{A^2}{4} (3T - 2\tau) \cos\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right) + \frac{A^2 T}{4\pi} \sin\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right)$, $0 \leq \tau \leq \frac{3T}{2}$, $\tau_{\text{кор}} = \frac{2T}{3\pi^2}$;

е) $K(\tau) = \frac{A^2}{2} \left(\frac{5}{4} T - \tau \right) \cos\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right)$, $0 \leq \tau \leq \frac{5T}{4}$, $\tau_{\text{кор}} = \frac{T}{5\pi^2}$;

ж) $K(\tau) = \frac{A^2}{2\alpha} \exp(-\alpha\tau)$, $0 \leq \tau < \infty$, $\tau_{\text{кор}} = \alpha^{-1}$;

з) $K(\tau) = A^2 \left[T^3 \left(\frac{1}{5} T^2 - \frac{1}{2} T\tau + \frac{1}{3} \tau^2 \right) - \frac{1}{30} \tau^5 \right]$, $0 \leq \tau \leq T$, $\tau_{\text{кор}} = \frac{5}{18} T$;

$$\text{и) } K(\tau) = \frac{A^2}{2\alpha} \left\{ \frac{\tau}{2\alpha} (2\alpha T + 1) \exp[\alpha(\tau - 2T)] - \left(T^2 + \frac{T}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2} \right) \exp[\alpha(\tau - 2T)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{3}{4} \tau - \frac{1}{\alpha} \right) \exp(-\alpha\tau) \right\}, 0 \leq \tau \leq T,$$

$$\tau_{\text{кор}} = \left[\left(\alpha T^2 + T + \frac{1}{2\alpha} \right) \exp(-2\alpha T) + \frac{1}{2\alpha} \right]^{-1} \left\{ \left(T^2 + \frac{T}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2} \right) [1 - \exp(-\alpha T)] \exp(-\alpha T) - \right. \\ \left. - \left(2T + \frac{1}{\alpha} \right) [\alpha T - 1 + \exp(-\alpha T)] \exp(-\alpha T) - \frac{3}{4\alpha} [1 - (\alpha T + 1) \exp(-\alpha T)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha} [\exp(-\alpha T) - 1] \right\}.$$

7. Определить функции взаимной корреляции $K_{12}(\tau)$, $K_{21}(\tau)$ и коэффициенты взаимной корреляции $k_{12}(\tau)$, $k_{21}(\tau)$ двух непериодических детерминированных сигналов:

$$\text{а) } s_1(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t < 0, t > T, \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} A \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t < 0, t > T; \end{cases}$$

$$\text{б) } s_1(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t < 0, t > T, \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} A \sin(\pi t / T), & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t < 0, t > T; \end{cases}$$

$$\text{в) } s_1(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t < 0, t > T, \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} 2A \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ 2A \left(1 - \frac{t}{T} \right), & \frac{T}{2} \leq t \leq T; \end{cases}$$

$$\text{г) } s_1(t) = \begin{cases} A \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t < 0, t > T, \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} A \sin(\pi t / T), & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t < 0, t > T; \end{cases}$$

$$д) s_1(t) = \begin{cases} 2A \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ 2A \left(1 - \frac{t}{T}\right), & \frac{T}{2} \leq t \leq T, \\ 0, & t < 0, t > T, \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \frac{5T}{4}, \\ 0, & t < 0, t > \frac{5T}{4}; \end{cases}$$

$$е) s_1(t) = \begin{cases} A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right), & 0 \leq t \leq \frac{5}{4}T, \\ 0, & t < 0, t > \frac{5}{4}T, \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \frac{5T}{4}, \\ 0, & t < 0, t > \frac{5T}{4}; \end{cases}$$

$$ж) s_1(t) = \begin{cases} A \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t < 0, t > T, \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq T/2, \\ 0, & t < 0, t > T/2. \end{cases}$$

Ответ:

$$а) K_{12}(\tau) = \begin{cases} \frac{A^2}{2T} (T^2 - \tau^2), & -T \leq \tau \leq 0, \\ \frac{A^2}{2T} (T - \tau)^2, & 0 \leq \tau \leq T, \\ 0, & \tau < -T, \tau > T, \end{cases} \quad k_{12}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\tau^2}{T^2}\right), & -T \leq \tau \leq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2, & 0 \leq \tau \leq T, \\ 0, & \tau < -T, \tau > T; \end{cases}$$

$$б) K_{12}(\tau) = \begin{cases} \frac{A^2 T}{\pi} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right)\right], & 0 \leq \tau \leq T, \\ 0, & \tau < -T, \tau > T, \end{cases} \quad k_{12}(\tau) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right)\right], & 0 \leq \tau \leq T, \\ 0, & \tau < -T, \tau > T; \end{cases}$$

$$в) K_{12}(\tau) = \begin{cases} A^2 T \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau^2}{T^2}\right), & 0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}, \\ A^2 T \left(1 - \frac{\tau^2}{T^2}\right), & \frac{T}{2} \leq \tau \leq T, \\ 0, & \tau < -T, \tau > T, \end{cases} \quad k_{12}(\tau) = \begin{cases} \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau^2}{T^2}\right), & 0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}, \\ \sqrt{3} \left(1 - \frac{\tau^2}{T^2}\right), & \frac{T}{2} \leq \tau \leq T, \\ 0, & \tau < -T, \tau > T; \end{cases}$$

$$\Gamma) \quad K_{12}(\tau) = \begin{cases} \frac{A^2}{\pi} \left[\frac{T}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{T}\tau\right) + T \cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right) + \tau \right], & 0 \leq \tau \leq T, \\ 0, & \tau < -T, \tau > T, \end{cases} \quad k_{12}(\tau) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{T}\tau\right) + \cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right) + \frac{\tau}{T} \right], & 0 \leq \tau \leq T, \\ 0, & \tau < -T, \tau > T, \end{cases}$$

$$\Delta) \quad K_{12}(\tau) = \begin{cases} \frac{2A^2T}{\pi} \left[\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right) - \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{T}\tau\right) + \frac{\tau}{T} \right], & 0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}, \\ \frac{2A^2T}{\pi} \left[1 - \frac{\tau}{T} - \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{T}\tau\right) \right], & \frac{T}{2} \leq \tau \leq T, \\ 0, & \tau < -T, \tau > T, \end{cases} \quad k_{12}(\tau) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{6}}{\pi} \left[\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right) - \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{T}\tau\right) + \frac{\tau}{T} \right], & 0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}, \\ \frac{2\sqrt{6}}{\pi} \left[1 - \frac{\tau}{T} - \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{T}\tau\right) \right], & \frac{T}{2} \leq \tau \leq T, \\ 0, & \tau < -T, \tau > T; \end{cases}$$

$$\epsilon) \quad K_{12}(\tau) = \begin{cases} \frac{A^2T}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right), & -\frac{5}{4}T \leq \tau \leq 0, \\ \frac{A^2T}{2\pi} \left(1 - \sin\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right) \right), & 0 \leq \tau \leq \frac{5}{4}T, \\ 0, & \tau < -T, \tau > T, \end{cases} \quad k_{12}(\tau) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(10+\pi)}} \cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right), & -\frac{5}{4}T \leq \tau \leq 0, \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(10+\pi)}} \left(1 - \sin\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right) \right), & 0 \leq \tau \leq \frac{5}{4}T, \\ 0, & \tau < -T, \tau > T; \end{cases}$$

$$\text{ж) } \quad K_{12}(\tau) = \begin{cases} \frac{A^2}{T} \left(\frac{T}{2} - \tau \right)^2, & -\frac{T}{2} \leq \tau \leq 0, \\ \frac{A^2}{2} \left(\frac{T}{4} + \tau \right), & 0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}, \\ \frac{A^2}{2T} (T^2 - \tau^2), & \frac{T}{2} \leq \tau \leq T, \\ 0, & \tau < -T/2, \tau > T, \end{cases} \quad k_{12}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T^2} \left(\frac{T}{2} - \tau \right)^2, & -\frac{T}{2} \leq \tau \leq 0, \\ \frac{1}{T} \left(\frac{T}{4} + \tau \right), & 0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}, \\ \frac{1}{T^2} (T^2 - \tau^2), & \frac{T}{2} \leq \tau \leq T, \\ 0, & \tau < -T/2, \tau > T. \end{cases}$$

4 Случайные сигналы и шумы

4.1 Теоретические положения

Для передачи на расстояние информации используются различные физические колебания. Если колебания несут полезную информацию, то они называются сигналами, если затрудняют прием сигналов то — помехами. Для детерминированных колебаний по известным их параметрам и мгновенным значениям можно однозначно предсказать параметры и мгновенные значения в любой последующий момент времени и в любой точке пространства. Поэтому детерминированные колебания всегда можно описать функциональной зависимостью, в которой аргумент — время или координаты. Для случайных колебаний по известным их параметрам и мгновенным значениям нельзя однозначно предсказать параметры и мгновенные значения в последующие моменты времени и в различных точках пространства, можно утверждать о тех или иных значениях и параметрах колебаний лишь с определенной вероятностью или плотностью вероятности. При этом если случайное колебание может принимать бесконечное непрерывное множество значений, то его характеризуют плотностью вероятности, а для характеристики множества дискретных значений используют вероятности различных состояний $P_i, i = 1, 2, \dots$. Для математического описания случайных колебаний, образующих бесконечное непрерывное множество значений, можно выбрать интересующий интервал времени T или область пространства, разбить их точками на малые участки и указать для множества этих точек плотности вероятности, которым соответствуют те или иные значения колебаний. Плотность вероятности значений колебания для множества дискретных точек времени или пространства называется многомерной плотностью вероятности и обозначается

$$W_k[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k)] = W_k(x_1, x_2, \dots, x_k), x(t_i) = x_i.$$

Зная k -мерную плотность вероятности случайного колебания (для k "сечений"), можно определить плотность вероятности меньшей размерности (для меньшего числа "сечений"), например для $g < k$. В этом случае исходную плотность вероятности $W_k(x_1, \dots, x_k)$ следует проинтегрировать по всем возможным значениям $X(t_i)$ в каждом "сечении" для $i = g + 1, \dots, k$:

$$W_g(x_1, \dots, x_g) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_k(x_1, \dots, x_k) dx_{g+1} \dots dx_k.$$

Множество различных значений случайной величины будем обозначать заглавной буквой X , а некоторое конкретное течение ее — строчной буквой x . Если число точек ("сечений") на выбранном интервале T устремить к бесконечности, то интервалы между точками ("сечениями")

устремляются к нулю, и в пределе многомерная плотность вероятности преобразуется в функционал плотности вероятности, который наиболее полно характеризует случайное колебание

$$F[x(t)] = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ T = \text{const}}} W_k[x(t_1), \dots, x(t_k)].$$

Если состояние какого-либо объекта случайно изменяется при непрерывном изменении времени (координат), то такое изменение называют случайным процессом, для случайных изменений состояния в дискретные моменты времени применяют термин "случайная последовательность". Если в течение некоторого времени наблюдать за случайным процессом, можно установить конкретный характер изменения состояния объекта в данном наблюдении. Такая полностью известная (детерминированная) функция, описывающая изменение состояния объекта в данном конкретном наблюдении, называется реализацией процесса. Если многомерная плотность вероятности или функционал плотности вероятности случайного процесса не зависят от начала отсчета времени или координат, то такой процесс называется стационарным в узком смысле.

Иногда для характеристики случайного процесса достаточно знать одномерную плотность вероятности $W_1(x)$ или интегральную вероятность для некоторого момента времени t_1 :

$$P(x) = P[X(t_1) < x] = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(x) dx,$$

где $X(t_1)$ — множество возможных значений случайной величины в момент времени t_1 , x — некоторое конкретное значение этой величины. Для стационарного в узком смысле процесса $W_1(x)$ и $P(x)$ не зависят от порядкового номера "сечения" процесса. Нередко вместо таких подробных характеристик случайного процесса, как $W_1(x)$ и $P(x)$ достаточно располагать его среднестатистическими параметрами. К ним, прежде всего, относится математическое ожидание (среднее значение, первый начальный момент), которое для непрерывного множества X определяется соотношением

$$m_1\{X\} = \langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x W_1(x) dx,$$

а для дискретного множества X —

$$m_1\{X\} = \langle X \rangle = \sum_{i=1}^N x_i P_i,$$

где P_i — вероятность появления значения x_i , $m_1\{\cdot\}$, $\langle \cdot \rangle$ — знаки операций статистического усреднения (по множеству значений). Степень рассеяния значений множества X оценивается такими среднестатистическими параметрами, как второй начальный момент $m_2\{X\}$, $\langle X^2 \rangle$ и дисперсия

(второй центральный момент) $D\{X\}$, определяемыми при непрерывном и дискретном множествах X соответственно

$$m_2\{X\} = \langle X^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W_1(x) dx, \quad m_2\{X\} = \langle X^2 \rangle = \sum_{i=1}^N x_i^2 P_i, \quad \sum_{i=1}^N P_i = 1,$$

$$M_2\{X\} = D\{X\} = \sigma^2 = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle X \rangle)^2 W_1(x) dx,$$

$$M_2\{X\} = D\{X\} = \sum_{i=1}^N (x_i - \langle X \rangle)^2 P_i,$$

где σ — среднеквадратическое отклонение случайной величины относительно ее среднего значения.

Если усреднение по множеству эквивалентно усреднению по времени одной реализации процесса, то такой процесс называется эргодическим. Таким образом, для эргодического процесса $\langle X(t_1) \rangle = \overline{x(t)}$ (черта над реализацией $x(t)$ обозначает операцию усреднения по времени).

Для определения моментов случайного процесса удобно пользоваться характеристической функцией $\Xi_1(v)$, представляющей собой математическое ожидание комплексной функции случайной величины X :

$$\Xi_1(v) = m_1(e^{jvx}) = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(x) e^{jvx} dx,$$

где v — вещественный параметр.

По характеристической функции $\Xi_1(v)$ можно определить плотность вероятности

$$W_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Xi_1(v) e^{-jvx} dv$$

и начальные моменты любого порядка случайной величины X

$$m_k\{X\} = j^{-k} \left[\frac{d^k \Xi_1(v)}{dv^k} \right]_{v=0}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Натуральный логарифм характеристической функции называется кумулянтной функцией

$$\phi(v) = \ln \Xi_1(v).$$

Производная k -го порядка кумулянтной функции при $v = 0$, деленная на j^k , называется k -м кумулянтном χ_k . Первые четыре кумулянта связаны с центральными моментами случайной величины соотношениями

$$\chi_1 = m_1\{X\}, \quad \chi_2 = D\{X\}, \quad \chi_3 = M_3\{X\} = [X - \langle X \rangle]^3, \\ \chi_4 = M_4\{X\} = [X - \langle X \rangle]^4 - 3D\{X\}.$$

Хотя функциональной зависимости для мгновенных значений случайного процесса указать невозможно, но можно установить среднестатистическую функциональную зависимость значений процесса, разделенных любым временным интервалом. Эта зависимость

устанавливается автокорреляционной функцией (АКФ) процесса, определяемой как математическое ожидание произведения двух значений случайного процесса, разделенных произвольным интервалом τ :

$$B_2(t_1, t_1 + \tau) = m_1 \{x(t_1), x(t_1 + \tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)x(t_1 + \tau)W_1[x(t_1), x(t_1 + \tau)]dx(t_1)dx(t_1 + \tau).$$

Если математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а корреляционная функция зависит от одного временного параметра, то такие процессы называются стационарными в широком смысле:

$$B_2(t_1, t_1 + \tau) = B_2(\tau).$$

Процесс стационарный в узком смысле стационарен и в широком смысле. Если процесс не только стационарен, но и эргодичен, то АКФ можно определить усреднением в пределах одной реализации:

$$B_2(t_1, t_1 + \tau) = B_2(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t + \tau)dt.$$

При этом для $\tau = 0$ АКФ определяет полную среднюю мощность процесса, включая мощность постоянной составляющей, если $\overline{x(t)} \neq 0$. Коэффициент корреляции стационарного случайного процесса

$$b_2(\tau) = \frac{B_2(\tau) - m_1^2}{B_2(0) - m_1^2}.$$

Для двух различных случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ статистическая связь их значений, разделенных интервалом $\tau = t_2 - t_1$ определяется функцией взаимной корреляции

$$B_{xy}(t_1, t_2) = \langle X(t_1)Y(t_2) \rangle,$$

при этом если $B_{xy}(t_1, t_2) = B_{xy}(\tau)$, то процессы называются стационарно-связанными и коэффициент взаимной корреляции

$$b_{xy}(\tau) = \frac{B_{xy}(\tau) - m_{1x}m_{1y}}{\sigma_x \sigma_y},$$

где σ_x, σ_y — дисперсии процессов $X(t)$ и $Y(t)$.

При многократных наблюдениях за одним и тем же случайным процессом становится известным множество различных реализаций, каждая из которых отличается от других как амплитудным, так и фазовым спектрами. Однако если усреднить эти спектры по множеству реализаций, то спектр процесса в целом получить не удастся, так как такое усреднение всегда будет давать либо нуль, либо среднее значение процесса $\langle X(t) \rangle$, если оно отлично от нуля (среднее значение суммы случайных функций равно сумме средних значений слагаемых). Поэтому усреднять следует лишь функции реализаций, которые не зависят от фазовых спектров. Такими функциями являются квадраты реализаций. Для электрических сигналов

квадрат мгновенного значения реализации можно рассматривать как мгновенную мощность, выделяемую на сопротивлении 1 Ом.

Если в случайном процессе $X(t)$ выделять k -ую реализацию и ограничить ее длительность интервалом $[-T/2, T/2]$, то для этой усеченной реализации можно найти спектральную функцию

$$\chi_{kT}(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x_{kT}(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Если T устремить к ∞ , средняя мощность процесса будет

$$P_c = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\chi(j\omega)|^2}{T} d\omega.$$

Величина

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\chi(j\omega)|^2}{T} = G(\omega)$$

носит название энергетический спектр случайного процесса.

Этот спектр характеризует распределение средней мощности процесса по частотам элементарных гармонических составляющих, но не учитывает их фазовые соотношения. Энергетический спектр имеет размерность квадрата функции, описывающей процесс, деленного на Герц.

Энергетический спектр и АКФ эргодического процесса согласно теореме Винера-Хинчина связаны прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_2(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

$$B_2(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Так же как для детерминированных, для случайных сигналов можно ввести понятия эффективной ширины спектра и времени (интервала) корреляции, определяемых аналогичным образом:

$$\Delta f_{\text{эфф}} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega}{G_{\text{макс}}(\omega)} = \frac{B_2(0)}{G_{\text{макс}}(\omega)},$$

$$b_2(\tau_{\text{кор.}\varepsilon}) = \varepsilon \quad \text{либо} \quad \tau_{\text{кор}} = \int_0^{\infty} b_2(\tau) d\tau.$$

Для последнего определения $\tau_{\text{кор}}$ справедливо соотношение

$$\Delta f_{\text{эфф}} \tau_{\text{кор}} = 0,5.$$

Если энергетический спектр $G(\omega) = G = \text{const}$ в бесконечно широкой полосе частот $-\infty < \omega < \infty$, то такой процесс называется белым шумом, для которого

$$B_2(\tau) = G\delta(\tau).$$

Белый шум является математической абстракцией, удобной при анализе реальных систем и процессов. Если постоянная времени системы τ_c и время корреляции реального процесса (шума) $\tau_{кор}$ находятся в соотношении $\tau_c \gg \tau_{кор}$, то реальный коррелированный шум можно рассматривать как белый шум. Энергетический спектр G такого белого шума, "эквивалентного" по энергетическому воздействию на систему реальному коррелированному шуму, можно принять равным значению энергетического спектра реального шума при $\omega = 0$, т.е. $CG = G(\omega = 0) = G(0)$. Согласно преобразованию Фурье

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} B_2(\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} B_2(\tau) d\tau = 2\sigma_x^2 \int_0^{\infty} b_2(\tau) d\tau = 2\sigma_x^2 \tau_{кор},$$

где σ_x^2 — дисперсия реального процесса (при ограниченной ширине спектра процесса).

Среднее значение производной случайного процесса равно производной от среднего значения самого случайного процесса, для которого это среднее значение дифференцируемо:

$$m_{1\xi'}(t) = m'_{1\xi}(t).$$

Отсюда следует, что среднее значение производной стационарного случайного процесса всегда равно нулю.

Корреляционная функция производной случайного процесса определяется выражением

$$B_{2\xi'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 B_{2\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Для стационарного случайного процесса имеем

$$B_{2\xi'}(\tau) = -B''_{2\xi}(\tau),$$

т.е. корреляционная функция производной случайного процесса равна второй производной корреляционной функции самого процесса, взятой с обратным знаком.

Энергетический спектр производной стационарного случайного процесса равен:

$$G_{\xi'}(\omega) = \omega^2 G_{\xi}(\omega).$$

Мощность производной стационарного случайного процесса определяется формулой

$$B_{2\xi'}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 G_{\xi}(\omega) d\omega.$$

Отношение средних мощностей производной $\xi'(t)$ и самого процесса $\xi(t)$ равно

$$\omega_1^2 = \frac{B_{2\xi'}(0)}{B_{2\xi}(0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 G_{\xi}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} G_{\xi}(\omega) d\omega}.$$

Корень квадратный из последнего соотношения называется *средней квадратической частотой спектра случайного процесса*.

Интеграл в среднеквадратическом случайного процесса $\xi(t)$ можно представить в виде

$$\eta(t) = \int_a^b h(t, \nu) \xi(\nu) d\nu,$$

где $h(t, \nu)$ — заданная детерминированная функция, a и b — произвольные постоянные величины.

Этот интеграл является новым случайным процессом, среднее значение которого равно

$$m_{1\eta}(t) = \int_a^b h(t, \nu) m_{1\xi}(\nu) d\nu.$$

Если исходный процесс $\xi(t)$ являлся стационарным, то

$$m_{1\eta}(t) = m_{1\xi} \int_a^b h(t, \nu) d\nu.$$

Корреляционная функция проинтегрированного процесса определяется выражением

$$B_{2\eta}(t_1, t_2) = \int_a^b \int_a^b h(t_1, \nu_1) h(t_2, \nu_2) B_{2\xi}(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2.$$

Для исходного стационарного случайного процесса имеем

$$B_{2\eta}(t_1, t_2) = \int_a^b \int_a^b h(t_1, \nu_1) h(t_2, \nu_2) B_{2\xi}(\nu_1 - \nu_2) d\nu_1 d\nu_2.$$

Как видно из этого выражения проинтегрированный процесс в общем случае уже является нестационарным случайным процессом.

Для определения энергетического спектра интеграла стационарного случайного процесса можно использовать выражение

$$G_{\eta}(\omega) = \frac{1}{\omega^2} G_{\xi}(\omega).$$

4.2 Примеры решения задач

Задача 1

Корреляционная функция случайного процесса имеет вид

$$B_2(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos(\beta\tau).$$

Определить энергетический спектр, эффективную ширину спектра, интервал корреляции $\tau_{\text{кор}}$ и $\tau_{\text{кор.}\varepsilon}$ при $\varepsilon = 0$.

Решение

Энергетический спектр можно найти с помощью преобразования Фурье с учетом того, что $K(\tau)$ — функция четная:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_2(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2\sigma^2 \int_0^{\infty} \cos(\omega\tau) \cos(\beta\tau) e^{-\alpha\tau} d\tau = \sigma^2 \int_0^{\infty} \cos[(\omega - \beta)\tau] e^{-\alpha\tau} d\tau + \sigma^2 \int_0^{\infty} \cos[(\omega + \beta)\tau] e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2 + (\omega - \beta)^2} + \frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2 + (\omega + \beta)^2} = \frac{2\alpha\sigma^2(\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2)}{(\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2)^2 - 4\beta^2\omega^2}.$$

Процесс не содержит постоянной составляющей, поэтому его дисперсия равна

$$B_2(0) = \sigma^2,$$

коэффициент корреляции

$$b_2(\tau) = \frac{B_2(\tau)}{B_2(0)} = e^{-\alpha|\tau|} \cos(\beta\tau).$$

Максимальное значение энергетического спектра приходится на частоту $\omega = 0$

$$G(0) = \frac{2\alpha\sigma^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Эффективная ширина спектра

$$\Delta f_{\text{эфф}} = \frac{B_2(0)}{G(0)} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha}.$$

Интервал корреляции

$$\tau_{\text{кор}} = \frac{1}{2\Delta f_{\text{эфф}}} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad \cos(\beta\tau_{\text{кор},\varepsilon}) = \varepsilon, \quad \tau_{\text{кор},\varepsilon} = \frac{\pi}{2\beta}.$$

Задача 2

Плотность вероятностей двух случайных величин x и y определяется зависимостью

$$W_2(x, y) = A \sin(x + y), \quad (0 < x < \pi/2, 0 < y < \pi/2).$$

Определить постоянную A и найти интегральные функции распределения $F_2(x, y)$, $F_1(x)$, $F_1(y)$.

Решение

Постоянная A находится из условия

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} A \sin(x + y) dx dy = 1.$$

Интегрируя – получим

$$A \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\pi/2} \sin(x + y) dy \right] dx = A \int_0^{\pi/2} [-\cos(x + \pi/2) + \cos x] dx = \\ = A \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) dx = 2A = 1.$$

Отсюда $A = 0,5$.

Интегральные законы будут равны

$$F_2(x, y) = \int_0^x \int_0^y 0,5 \sin(x+y) dx dy = \int_0^x [-\cos(x+y) + \cos x] dx = \\ = 0,5[-\sin(x+y) + \sin x]_0^x = 0,5[\sin x + \sin y - \sin(x+y)].$$

$$F_1(x) = \int_0^x \int_0^{\pi/2} 0,5 \sin(x+y) dx dy = 0,5 \int_0^x [-\cos(x+y)]_0^{\pi/2} dx = \\ = 0,5 \int_0^x (\sin x + \cos y) dx = 0,5[-\cos x + \sin x]_0^x = 0,5(1 - \cos x + \sin x).$$

Аналогично $F_1(y) = 0,5(1 - \cos y + \sin y)$.

Задача 3

Доказать, что интеграл $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)s(t)dt$ стационарного случайного процесса $x(t)$ с корреляционной функцией $B_{2x}(\tau)$ имеет корреляционную функцию

$$B_{2y}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(u)s(v)B_{2x}(u-v+\tau)dudv.$$

Решение

Корреляционная функция процесса $y(t)$ равна

$$B_{2y}(\tau) = m_1 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)s(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)s(t)dt \right\}.$$

Заменим переменную t в первом интеграле на u , а во втором интеграле на v , и эти два интеграла представим теперь двойным интегралом

$$m_1 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(u)s(u)x(v-\tau)s(v)dudv \right\} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(u)s(v)m_1 \{x(u)x(v-\tau)\}dudv = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(u)s(v)B_{2x}(u-v+\tau)dudv.$$

Так как $m_1 \{x(u)x(v-\tau)\}$ является корреляционной функцией процесса $x(t)$.

4.3 Задачи

1. Дана двумерная плотность вероятности случайного нормального процесса, характеризующая этот процесс в два момента времени t_1 и t_2 (в двух "сечениях")

$$W_2(x_1, x_2) = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2(1-b^2)} \left[\frac{(x_1 - m_{11})^2}{\sigma_1^2} - \frac{2b_2(x_1 - m_{11})(x_2 - m_{12})}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - m_{12})^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-b^2}},$$

где $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$, $m_i, i = 1, 2$, $b_2 = b_2(t_1, t_2)$ — коэффициент корреляции, σ_1^2, σ_2^2 — дисперсии процесса в моменты времени t_1 и t_2 . Определить одномерную плотность вероятности процесса (для момента времени t_1).

2. Имеется три типа фотоприемников, у которых уровень собственных шумов можно оценить по четырехбалльной системе. Значения вероятностей, с которыми у фотоприемников могут возникнуть шумы данного уровня, приведены в таблице 4.1. Необходимо выбрать фотоприемник с наименьшим в среднем уровнем шумов и с наименьшим рассеянием значений шумов.

Таблица 4.1 – Вероятность возникновения шумов у фотоприемников

Уровень помех, баллы	Вероятность появления помех для типов фотоприемников		
	Тип 1	Тип 2	Тип 3
0	0,40	0,50	0,30
1	0,50	0,40	0,20
2	0,06	0,04	0,20
3	0,04	0,06	0,30

Ответ: тип 2.

3. Величина принимаемого случайного сигнала зависит от числа поступивших в данный момент фотонов $n = 1, 2, \dots$, а вероятность появления n фотонов пропорциональна $1/n^3$. Определить среднее число принятых фотонов.

Ответ: 3/2.

4. Интегральная вероятность (интегральная функция распределения) случайной величины X характеризуется зависимостью

$$P(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x_0^3}{x^3}, & x \geq x_0, \\ 0, & x < x_0, x > 0. \end{cases}$$

Определить среднее значение m_1 и дисперсию σ^2 .

Ответ: $3x_0/2, 3x_0^2/4$.

5. Определить $M\langle X \rangle$ и $D\langle X \rangle$ случайной величины X , значения которой подчиняются распределению Лапласа:

$$W(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

Ответ: 0; 2.

6. При измерении дальности до объекта возникают систематическая и случайные ошибки. Систематическая ошибка всегда приводит к уменьшению дальности на 5 м, а случайные ошибки подчиняются нормальному закону распределения со среднеквадратическим

отклонением $\sigma = 10$ м . Определить вероятность измерения дальности с ошибкой, не превышающей по абсолютной величине 15 м.

Ответ: 0,8186.

7. Высотомер обеспечивает измерения с систематической погрешностью + 20 м, при этом случайные ошибки распределены по нормальному закону. Определить допустимую среднеквадратическую погрешность высотомера, чтобы с вероятностью, равной 0,9, ошибка измерения высоты по абсолютной величине не превышала 100 м.

Ответ: ≈ 56 м. Трансцендентное уравнение рекомендуется решать графически.

8. Определить характеристическую функцию случайного процесса с плотностью вероятностей

$$W_1(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Ответ: $\Theta_1(v) = \frac{\alpha}{\alpha - jv}$.

9. Найти одномерную характеристическую функцию нормального случайного процесса с плотностью вероятностей

$$W_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{(x - m_1)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Ответ: $\Theta_1(v) = \exp\left(jm_1v - \frac{\sigma^2v^2}{2}\right)$.

10. Определить характеристическую и кумулянтную функции случайной величина X , имеющей плотность вероятности

$$W(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

С помощью характеристической функции найти математическое ожидание и дисперсию X .

Ответ: $(1 + v^2)^{-1}$; 0; 2.

11. Выполнить задания, указанные в задаче 10, для случайной величины X , у которой плотность вероятности

$$W(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Ответ: $(1 - jv)^{-1}$; 1; 1.

12. Случайной величине X соответствует характеристическая функция

$$\Xi_1(v) = e^{-a|v|}, \quad a > 0.$$

Определить плотность вероятности X .

Ответ: $\frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}$.

13. Характеристическая функция случайной величины X имеет вид

$$\Xi_1(v) = e^{-\frac{v^2 \sigma^2}{2}},$$

где σ^2 — дисперсия величины X . Определить плотность вероятности, кумулянтную функцию и первые четыре начальные и центральные момента величины X

Ответ: $M_3\{X\} = 0, M_4\{X\} = 6\sigma^4$.

14. Вычислить среднее значение и дисперсию случайного процесса, распределенного по закону Релея

$$W_1(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

Ответ: $m_{1x} = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sigma_x^2 = \sigma^2 \frac{4 - \pi}{2}$.

15. Случайный процесс можно описать функциональной зависимостью

$$X(t) = \sum_{i=1}^N [A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t)],$$

где ω_i — известные частоты колебаний, A_i, B_i — вещественные случайные взаимно некоррелированные коэффициенты, имеющие нулевые средние значения и дисперсии

$$D\{A_i\} = D\{B_i\} = \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Определить корреляционную функцию процесса $B_2(t_1, t_2)$.

Ответ: $\sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \cos[\omega_i(t_2 - t_1)]$.

16. Определить, является ли процесс вида $Z(t) = X(t) + Y$ стационарным в широком смысле, если $X(t)$ — стационарный случайный процесс, а Y : а) случайная величина, не связанная с процессом $X(t)$; б) $Y = X(t_0)$. Будет ли в каждом случае процесс $Z(t)$ эргодическим, если процесс $X(t)$ — эргодичен?

Ответ: а) Да; зависит от свойств Y ; б) Нет, нет.

17. АКФ процесса имеет вид:

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3} \alpha^2 \tau^2\right).$$

Определить энергетический спектр $S(\omega)$.

Ответ: $\frac{16\sigma^2 \alpha^5}{3(\omega^2 + \alpha^2)^5}$.

18. АКФ процесса имеет вид:

$$\text{а) } K(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|} \quad ; \quad \text{б) } K(\tau) = \frac{A}{1 + \alpha^2 \tau^2} \quad ; \quad \text{в) } K(\tau) = Ae^{-\alpha^2 \tau^2} \quad ;$$

$$\text{г) } K(\tau) = A \frac{\sin(\alpha\tau)}{\alpha\tau}.$$

Определить интервалы корреляции $\tau_{\text{кор}}$, $\tau_{\text{кор.}\varepsilon}$ и эффективную ширину спектра $\Delta f_{\text{эфф}}$.

$$\text{Ответ: а) } \frac{1}{\alpha}; \frac{1}{\alpha} \ln \varepsilon \quad ; \quad \text{б) } \frac{\pi}{2\alpha}; \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} \quad ; \quad \text{в) } \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \frac{1}{\alpha} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad ;$$

$$\text{г) } \frac{\pi}{2\alpha}; \frac{\sin(\alpha\tau_{\text{кор.}\varepsilon})}{\alpha\tau_{\text{кор.}\varepsilon}} = \varepsilon.$$

$$\text{Указание: воспользоваться определенным интегралом } \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

19. На входе полосового фильтра действует белый шум с энергетическим спектром $S(\omega) = N_0$. Без изменения интенсивности фильтр пропускает колебания в полосе частот от f_1 до f_2 и не пропускает колебаний за пределами этой полосы частот. Определить АКФ, дисперсию, коэффициент корреляции, эффективную ширину спектра и интервал корреляции шума на выходе фильтра.

$$\text{Ответ: } r(\tau) = \frac{\sin\left[\frac{(\omega_2 - \omega_1)\tau}{2}\right]}{(\omega_2 - \omega_1)\tau} \cos\left[\frac{(\omega_1 + \omega_2)\tau}{2}\right] \quad ; \quad \tau_{\text{кор}} = \frac{1}{4(f_2 - f_1)} \quad ;$$

$$\sigma^2 = 2N_0(f_2 - f_1); \Delta f_{\text{эфф}} = 2(f_2 - f_1).$$

20. На входе фильтра нижних частот действует белый шум. Фильтр пропускает без изменения интенсивности колебания в полосе частот от 0 до 4 МГц и не пропускает колебаний за пределами этой полосы частот. Дисперсия шума на выходе фильтра 4 В^2 . Определить энергетический спектр входного белого шума, АКФ, коэффициент корреляции, эффективную ширину спектра и интервал корреляции шума на выходе фильтра.

$$\text{Ответ: } 5 \cdot 10^{-7} \text{ В}^2 \cdot \text{с}; r(\tau) = \frac{\sin(8 \cdot 10^6 \cdot \pi\tau)}{8 \cdot 10^6 \cdot \pi\tau}; \tau_{\text{кор}} = 0,625 \cdot 10^{-7} \text{ с}.$$

21. Случайный процесс $X(t)$ имеет энергетический спектр $S(\omega) = \frac{a^2}{(\omega^2 + \alpha^2)^2}$. Определить энергетический спектр и дисперсию производной процесса $dX(t)/dt$.

Ответ: $\frac{a^2\omega^2}{(\omega^2 + \alpha^2)^2}; \frac{\pi a^2}{2\alpha}$.

22. Являются ли стационарными в широком смысле, стационарно связанными, эргодическими и эргодически связанными два процесса

$$X(t) = A \cos(\omega_1 t - \Phi) \text{ и } Y(t) = B \cos(\omega_2 t - \Psi),$$

где A, B, ω_1, ω_2 — известные постоянные величины, в Φ и Ψ — случайные не связанные величины с плотностью вероятности, равномерно распределенной в интервале $[0, 2\pi]$?

Ответ: стационарны, стационарно связаны, эргодические и эргодически связаны.

23. Определить энергетический спектр стационарного случайного процесса с корреляционной функцией $B_2(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{при } |\tau| \leq \tau_0 \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_0 \end{cases}$

Ответ: $G(\omega) = 2\sigma^2\tau_0 \frac{\sin \omega\tau_0}{\omega\tau_0}$.

24. Определить среднюю квадратичную частоту спектра случайного процесса с энергетическим спектром $G(\omega) = G \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{2\pi}\right)$.

Ответ: $\omega_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{\tau}$.

5 Передача сигналов через стационарные линейные системы

5.1 Теоретические положения

Система называется стационарной, если ее реакция на входное воздействие не зависит от момента приложения воздействия, а определяется свойствами системы и интервалом времени, прошедшего с момента начала воздействия. Если параметры и характеристики системы не зависят от параметров и направления прохождения сигналов, то такие системы называются линейными.

Для анализа стационарных линейных систем можно применять спектральный метод и метод интеграла наложения.

В спектральной области о стационарной линейной системе можно судить по ее передаточной функции, определяемой отношением комплексных амплитуд (фазов, амплитуд гармоник различных частот в спектре с известными начальными фазами), сигналов на выходе и на входе системы:

$$K(j\omega) = \frac{E_{\text{вых}}(j\omega)}{E_{\text{вх}}(j\omega)} = |K(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}.$$

Зависимость модуля передаточной функции $|K(j\omega)|$ от частоты называется амплитудно-частотной характеристикой, а зависимость аргумента $\varphi(\omega)$ от частоты — фазочастотной характеристикой системы.

По спектральной функции сигнала на входе $S(j\omega)$ и по передаточной функции $K(j\omega)$ системы можно найти спектральную функцию сигнала на выходе системы:

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = S(j\omega) \cdot K(j\omega).$$

Зная энергетический спектр случайного процесса на входе системы $G(\omega)$ и амплитудно-частотную характеристику системы $|K(j\omega)|$, можно найти энергетический спектр процесса на выходе:

$$G_{\text{вых}}(\omega) = G(\omega) \cdot |K(j\omega)|^2.$$

Временную зависимость сигнала на выходе системы можно найти, применив обратное преобразование Фурье к спектральной функции $S_{\text{вых}}(j\omega)$:

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \cdot K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Для системы, состоящей из нескольких последовательно соединенных и односторонне связанных четырехполюсников с передаточными функциями $K_1(j\omega)$, $K_2(j\omega)$, ... общая передаточная функция равна произведению передаточных функций таких четырехполюсников.

Чтобы к функции $s(t)$ можно было применить преобразование Фурье, она должна быть абсолютно интегрируема. Такому условию удовлетворяет ограниченный класс функций. В частности функции e^{at} ($a > 0$), $s(t) = const$, $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$ не являются абсолютно интегрируемыми. Менее жестким является условие, при котором $s(t) = 0$ для $t < 0$, а при $t > 0$ скорость возрастания $s(t)$ не превышает скорости роста экспоненты $e^{c_0 t}$ с коэффициентом в показателе c_0 , называемым абсциссой абсолютной сходимости. К подобным функциям можно применить преобразование Лапласа.

Поведение функции $s(t)$, удовлетворяющей преобразованию Лапласа, до момента $t = 0$ обычно не представляет интереса (например, сигнал на выходе системы может появиться только после появления сигнала на входе), поэтому на интервале $-\infty < t < 0$ значение функции $s(t)$ принимается равным нулю, а при $t > 0$ допускается возрастание функции с такой скоростью, чтобы сходился интеграл от произведения $s(t)e^{-ct}$, $c > c_0 \geq 0$.

Для функций $s_{\text{вых}}(t)$, удовлетворяющих требованиям преобразования Лапласа, переменную интегрирования ω заменяют на переменную $p = c + j\omega$, $c > c_0$, что приводит к обратному преобразованию Лапласа:

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S(p) \cdot K(p) e^{pt} dp.$$

Значения переменной p , при которых подынтегральная функция обращается в бесконечность, являются особыми точками функции и называются полюсами. При использовании обратного преобразования Фурье полюсы могут располагаться как слева, так и справа от мнимой оси $(-j\infty, j\infty)$, т.е. в левой и правой полуплоскостях комплексного переменного $p = c + j\omega$. При использовании обратного преобразования Лапласа все полюсы располагаются слева от линии, параллельной мнимой оси и отстоящей от этой оси на расстоянии $c > c_0$, так как область изменения подынтегральной функции определяется абсциссой абсолютной сходимости c_0 и лежит слева от линии $c = const$, $c > c_0$.

Для обратного преобразования Фурье левой полуплоскости комплексного переменного, а для обратного преобразования Лапласа — области слева от линии $c = const$, всегда соответствует время $t > 0$. Правой полуплоскости при преобразовании Фурье и области справа от линий $c = const$ при преобразовании Лапласа соответствует время $t < 0$.

Интегрирование на комплексной плоскости ведется по замкнутому контуру, охватывающему все особые точки подынтегральной функции. При этом интеграл по замкнутому контуру равен сумме вычетов во всех полюсах подынтегральной функции, умноженной на $2\pi j$, а знак суммы зависит от направления обхода контура интегрирования. Если обход

контура происходит против направления движения часовой стрелки, то сумме приписывается положительный знак, в противном случае — отрицательный знак.

Таким образом, для абсолютно интегрируемых функций

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = \sum_i \text{resp}_i, t > 0,$$

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = -\sum_k \text{resp}_k, t < 0.$$

Для функций, интегрируемых по Лапласу,

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = \sum_i \text{resp}_i, t > 0; s_{\text{ВЫХ}}(t) = 0, t < 0,$$

где resp_i — вычет (от французского *residu*) функции в полюсе p_i .

Если подынтегральную функцию $H(p) = S(p)K(p)e^{pt}$ можно представить в виде

$$H(p) = \frac{f(p)}{p - p_0},$$

где p_0 — простой (однократный) полюс, то вычет в этом полюсе $\text{resp}_0 = f(p_0)$.

Если подынтегральную функцию $H(p)$, имеющую простой полюс p_0 , нельзя записать в виде $H(p) = \frac{f(p)}{p - p_0}$, то вычет в этом полюсе определяется

как

$$\text{resp}_0 = \lim_{p \rightarrow p_0} [(p - p_0)H(p)].$$

Если подынтегральную функцию можно представить в виде отношения двух полиномов $H(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$, причем степень полинома $P(p)$ не выше степени полинома $Q(p)$, то вычет в простом полюсе p_0 ,

$$\text{resp}_0 = \left. \frac{P(p)}{dQ(p)} \right|_{p=p_0} dp.$$

Если функции $H(p)$, имеющую в точке $p = p_1$ полюс кратности m , можно представить в виде $H(p) = \frac{f(p)}{(p - p_1)^m}$, то вычет в этом полюсе

$$\text{resp}_1 = \left. \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} f(p) \right|_{p=p_1},$$

в противном случае вычет в этом полюсе

$$\text{resp}_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{p \rightarrow p_1} \frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} [(p - p_1)^m H(p)].$$

Следует заметить, что если полюсы подынтегральной функции расположены как слева, так и справа от мнимой оси, то обратные преобразования Фурье и Лапласа дадут различные результаты.

При анализе реально существующих систем нередко приходится вычислять интеграл вида

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) d\omega,$$

в котором подынтегральная функция $H(j\omega)$ обычно может быть представлена отношением полиномов $H(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)}$ причем полиномы

$P(j\omega)$ и $Q(j\omega)$ являются четными функциями частоты ω , и степень полинома $P(j\omega)$ числителя, по крайней мере, на 2 меньше степени полинома $Q(j\omega)$ знаменателя. В этом случае $Q(j\omega)$ можно записать как произведение полинома $h(j\omega)$ в функции от $j\omega$ и полинома $h(-j\omega)$ в функции от

$$Q(j\omega) = h(j\omega)h(-j\omega) = |h(j\omega)|^2,$$

а подынтегральную функцию можно представить в виде:

$$H(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{|h(j\omega)|^2} = \frac{b_0\omega^{2n-2} + b_1\omega^{2n-4} + \dots + b_{n-1}}{|a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n|^2},$$

где $n = 1, 2, \dots$, a_i, b_i — вещественные коэффициенты.

При большом порядке полиномов $P(j\omega)$ и $Q(j\omega)$ трудно определить полюсы функции $H(j\omega)$, в этом случае вычисление интеграла может быть сведено к вычислению определителя Гурвица D_n для характеристического уравнения $h_n(p) = 0$, все корни которого располагаются в левой полуплоскости комплексного переменного, и определителя M_n , связанного с определителем D_n [7].

Определитель D_n имеет n строк и n столбцов и составляется по следующему правилу. По главной диагонали выписываются коэффициенты от a_1 до a_n . Строки определителя, начиная с диагонали, заполняются коэффициентами a_i вправо по убывающим, а влево по возрастающим относительно диагонали индексам. При этом все коэффициенты a_i , индексы которых должны быть больше n или меньше нуля, заменяются нулями. Определитель M_n получается из определителя D_n путем замены в последнем первого столбца на столбец с коэффициентами $b_0, -b_1, +b_2, -b_3, \dots, (-1)^{n-1} b_{n-1}$.

Например, для $n = 5$ определители D_n и M_n получаются в виде:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{vmatrix}, M_n = \begin{vmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_1 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ b_2 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ -b_3 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{vmatrix}.$$

После составления определителей D_n и M_n вычисляется интеграл по следующему соотношению:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) d\omega = \frac{\pi M_n}{a_0 D_n}.$$

При интегрировании на плоскости комплексного переменного $p = c + j\omega$ и при большом порядке полиномов $P(p)$ и $Q(p)$, через которые записана подынтегральная функция $H(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$, для вычисления

интеграла вида $I = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} H(p) dp$ можно воспользоваться разложением функции $H(p)$ на простые множители и элементарные дроби.

При разложении на простые множители каждый из полиномов $P(p)$ и $Q(p)$ степеней m и n соответственно должен быть представлен произведением постоянного коэффициента при старшей степени переменной p и соответственно m или n линейных множителей вида $(p - p_k)$, где p_k — k -й корень полинома, т.е. k -й нуль (для полинома $P(p)$) или k -й полюс (для полинома $Q(p)$). Например, полином степени m можно записать в виде:

$$P(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} = b_0 \prod_{k=1}^m (p - p_k).$$

Если l -й корень p_l , $1 < l < m$, имеет кратность d_l (например, $d_l = 3$), то в составе произведения простых множителей должно быть d_l (т.е. 3) одинаковых простых множителя, т.е. $(p - p_k)^{d_l}$. Обычно степень полиномов $P(p)$ и $Q(p)$ — четная, в этом случае если среди корней полиномов имеются комплексные, то они обязательно образуют комплексно-сопряженные пары и располагаются на комплексной плоскости симметрично относительно мнимой оси, т.е. имеют одинаковые по модулю к противоположные по знаку вещественные части: $p_{k1} = c_k + j\omega_k$, $p_{k2} = -c_k + j\omega_k$. При этом каждую пару сомножителей с такими корнями можно записать в виде полинома второго порядка: $[p - (c_k + j\omega_k)][p - (c_k - j\omega_k)] = (p - c_k)^2 + \omega_k^2$. Для определения корней полиномов необходимо решить алгебраические уравнения

$$P(p) = Q(p) = 0.$$

Если степень m полинома $P(p)$ меньше степени n полинома $Q(p)$ ($m < n$), что соответствует устойчивым системам, то отношение полиномов $P(p)$ и $Q(p)$ можно представить суммой n (по степени полинома знаменателя) элементарных дробей, соответствующих корням p_k (кратности d_k) полинома $Q(p)$, т.е. полюсам функции $H(p)$:

$$H(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{f_{k1}}{p - p_k} + \frac{f_{k2}}{(p - p_k)^2} + \dots + \frac{f_{kd_k}}{(p - p_k)^{d_k}} \right].$$

Коэффициенты $f_{ki}, i = \overline{1, d_k}$ можно определить следующим образом.

Если кратность $d_k = 1$ (p_k — простой полюс), то $f_{ki} = \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}$, где

$$Q'(p_k) = \left. \frac{dQ(p)}{dp} \right|_{p=p_k}. \text{ В общем случае для определения } f_{ki} \text{ следует левую и}$$

правую части формулы разложения на элементарные дроби умножить на $Q(p)$ и, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p в обеих частях равенства, найти значения f_{ki} . Если при разложении функции $H(p)$ на элементарные дроби встречаются комплексно-сопряженные пары корней (полюсов), то соответствующие пары дробей можно объединять в дроби вида

$$q_k \frac{p + r_k}{(p - c_k)^2 + \omega_k^2}$$

с полиномом второго порядка в знаменателе. Это достигается приведением пар таких дробей к общему знаменателю.

Изложенные способы вычисления интегралов на основе теории функций комплексного переменного свидетельствуют о том, что любую реальную сложную систему с передаточной функцией высокого порядка можно представить совокупностью простейших систем — звеньев с передаточными функциями первого и второго порядков путем последовательного (при использовании разложения на простые множители) или параллельного (при использовании разложения на элементарные дроби) их соединения. При этом порядок передаточной функции системы определяет и порядок системы.

Стационарные линейные системы можно исследовать не только в спектральной, но и во временной (пространственной) области, наблюдая отклик (реакцию) системы на входной стандартный сигнал. Если таким сигналом является единичный скачок на входе, то отклик на этот сигнал называется переходной характеристикой (функцией), а если входной сигнал можно представить δ -функцией, то отклик называется импульсной характеристикой (функцией) или импульсной переходной функцией и

обозначается $g(\tau)$, где время τ отсчитывается с момента поступления сигнала на вход системы, так что $g(\tau) = 0$ при $\tau < 0$.

Это соотношение называется условием физической реализуемости системы.

Импульсная характеристика $g(\tau)$ описывает свойства системы во временной области, так же как передаточная функция ее — в спектральной области. Поэтому эти две характеристики функционально связаны. Их связь описывается парой преобразований Фурье:

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_0^{\infty} g(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

$$g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega)e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Применяя интегрирование на комплексной плоскости, по известной характеристике $K(j\omega)$ можно всегда определить $g(\tau)$, и наоборот.

На основе условия физической реализуемости системы во временной области, определяемого через импульсную характеристику, можно установить условие физической реализуемости в частотной области. Согласно правилам интегрирования на комплексной плоскости передаточная функция $K(p)$ физической реализуемой системы не должна иметь полюсов в правой полуплоскости комплексного переменного p и на мнимой оси $j\omega$. Существует также критерий Винера-Пэли, согласно которому для физической реализуемой системы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log|K(j\omega)|^2}{1 + \omega^2} d\omega < \infty.$$

Зная импульсную характеристику системы и сигнал на входе, заданный во временной (пространственной) области, можно определить сигнал на выходе системы с помощью интегральной свертки:

$$s_{\text{вых}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(\tau - t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau - t)g(t)dt.$$

Из последнего выражения следует, что сигнал на выходе стационарной линейной системы определяется как функция взаимной корреляции входного сигнала и зеркального отображения импульсной характеристики, либо наоборот, как функция взаимной корреляции импульсной характеристики и зеркального отображения входного сигнала.

5.2 Примеры решения задач

Задача 1

Пусть передаточная функция стационарной линейной системы записана в виде

$$K(p) = -\frac{1}{(p+a)(p-b)}, \quad a = \text{const}, b = \text{const}, a > 0, b > 0.$$

Требуется определить импульсную характеристику $g(\tau)$.

Решение

Применив к $K(p)$ обратное преобразование Лапласа, получим:

$$g(\tau) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} K(p)e^{p\tau} dp = -\frac{1}{2\pi j} \oint \frac{e^{p\tau}}{(p+a)(p-b)} dp, \quad c > b.$$

Подынтегральная функция имеет два простых полюса в точках $p = -a$ и $p = b$, причем в рассматриваемом случае оба эти полюса расположены слева от линии $c = \text{const}$, поэтому согласно теории вычетов:

$$g(\tau) = \begin{cases} \text{res}(p = -a) + \text{res}(p = b), & \tau \geq 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$$

Обходя контур интегрирования в "положительном" направлении, находим вычеты

$$\text{res}(p = -a) = -\lim_{p \rightarrow -a} \left[(p+a) \frac{e^{p\tau}}{(p+a)(p-b)} \right] = \frac{e^{-a\tau}}{a+b},$$

$$\text{res}(p = b) = -\lim_{p \rightarrow b} \left[(p-b) \frac{e^{p\tau}}{(p+a)(p-b)} \right] = -\frac{e^{b\tau}}{a+b}.$$

Таким образом,

$$g(\tau) = \begin{cases} \frac{e^{-a\tau} - e^{b\tau}}{a+b}, & \tau \geq 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$$

Рассмотренная система, однако, будет физически нереализуемой, так как один полюс ее передаточной функции лежит в правой полуплоскости.

Задача 2

Пусть энергетический спектр процесса описывается функцией

$$G(\omega) = -\frac{1}{(j\omega+a)(j\omega-a)}, \quad a = \text{const}, a > 0.$$

Найти АКФ процесса.

Решение

Так как АКФ — функция четная, существующая как при $\tau > 0$, так и при $\tau < 0$, то следует воспользоваться обратным преобразованием Фурье. Перейдя к интегрированию на комплексной плоскости, получим

$$S(p) = -\frac{1}{(p+a)(p-a)}.$$

Подынтегральная функция имеет два простых полюса, однако в данном случае полюс $p = -a$ лежит в левой полуплоскости, а полюс $p = a$ — в правой.

Обходя в "положительном" направлении контур в левой полуплоскости, получаем

$$B_2(\tau) = \text{res}(p = -a) = \lim_{p \rightarrow -a} \left[-(p+a) \frac{e^{p\tau}}{(p+a)(p-a)} \right] = \frac{e^{-a\tau}}{2a}, \tau \geq 0.$$

В правой полуплоскости обход контуре происходит в "отрицательном" направлении, поэтому

$$B_2(\tau) = \text{res}(p = a) = -\lim_{p \rightarrow a} \left[-(p-a) \frac{e^{p\tau}}{(p+a)(p-a)} \right] = \frac{e^{a\tau}}{2a}, \tau \leq 0.$$

Таким образом,

$$B_2(\tau) = \begin{cases} \frac{e^{a\tau}}{2a}, & \tau \leq 0, \\ \frac{e^{-a\tau}}{2a}, & \tau \geq 0. \end{cases}$$

5.3 Задачи

1. На выходе стационарной линейной системы энергетический спектр случайного процесса имеет вид:

$$G(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{\omega^2 + \lambda_i^2}, a_i = \text{const}, \lambda_i = \text{const}.$$

Определить АКФ этого процесса.

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{\lambda_i^2} e^{-\lambda_i |\tau|}.$$

2. Стационарная линейная система колебательного вида имеет передаточную функцию

$$K(j\omega) = \frac{k}{-T\omega^2 + \xi j\omega + k}, k = \text{const}, k > 0, T = \text{const}, T > 0, \xi = \text{const}, \xi > 0.$$

На вход системы подается белый шум с корреляционной функцией $B_2(\tau) = N_0 \delta(\tau)$.

Определить АКФ и дисперсию шума на выходе системы в установившемся режиме.

$$\text{Ответ: } D = \frac{kN_0}{2\xi}.$$

3. Случайный сигнал, имеющий энергетический спектр

$$G(\omega) = \frac{2T\sigma^2}{1 + \omega^2 T^2}, T = \text{const}, T > 0, \sigma^2 = \text{const}, \sigma^2 > 0,$$

подаётся на вход стационарной линейной системы с передаточной функцией

$$K(j\omega) = \frac{1 + T_1 j\omega}{-T_1^2 \omega^2 + j\omega + k}, k = \text{const}, T_1 = \text{const}.$$

Определитель дисперсию сигнала на выходе системы.

Ответ: $T \frac{\sigma^2}{k}$.

4. Определить импульсную характеристику системы, если ее передаточная функция имеет вид:

а) $K(j\omega) = \frac{b}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_3^2}} e^{-j \arctg(\omega \tau_3)}$; б) $K(j\omega) = \frac{a}{(1 + \omega^2 \tau_3^2)^2}$;

в) $K(j\omega) = \frac{\xi}{\omega^2 + \alpha^2}$.

Ответ: а) $\frac{b}{\tau_3} e^{-\tau/\tau_3}$; б) $\frac{a}{2\tau_3^2} \left[\tau ch\left(\frac{\tau}{\tau_3}\right) - \tau_3 sh\left(\frac{\tau}{\tau_3}\right) \right]$; в) $-\frac{\xi}{\alpha} ch(\alpha\tau)$.

5. Определить энергетический спектр и корреляционную функцию случайного процесса на выходе линейного фильтра с передаточной функцией $K(j\omega) = k \exp\left(-\frac{\omega^2 \tau_0^2}{4\pi}\right)$ при воздействии на входе белого шума

скорреляционной функцией $B_{21}(\tau) = \frac{G}{2} \delta(t)$.

Ответ: $G_2(\omega) = \frac{Gk^2}{2} e^{-\frac{\omega^2 \tau_0^2}{2\pi}}$, $B_{22}(\tau) = \frac{k^2 G \tau_0}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\pi \tau^2}{2\tau_0^2}}$.

Примечание. При решении задач с 6 по 17 входные сигналы рекомендуется представлять совокупностью полубесконечных по длительности составляющих.

6. Интегрирующая цепь составлена из включенных последовательно резистора сопротивлением R и конденсатора емкостью C . На вход цепи подается прямоугольный видеоимпульс величиной A и длительностью $\tau_{и}$. Определить сигнал на выходе цепи (на конденсаторе).

Ответ:

$$s_{\text{вых}}(\tau) = \begin{cases} A \left(1 - e^{-\frac{\tau}{RC}} \right), & 0 \leq \tau \leq \tau_{и}, \\ A \left(e^{-\frac{\tau_{и}}{RC}} - 1 \right) e^{-\frac{\tau}{RC}}, & \tau_{и} \leq \tau < \infty. \end{cases}$$

7. Для интегрирующей цепи с постоянной времени $T = RC$ определить сигнал на выходе, если на вход подан импульс треугольного вида величиной A и длительностью $\tau_{и}$:

$$s(t) = \begin{cases} A \frac{t}{\tau_{и}}, & 0 \leq t \leq \tau_{и}, \\ 0, & t < 0, t > \tau_{и}. \end{cases}$$

Ответ:

$$s_{\text{вых}}(\tau) = \begin{cases} A \frac{T}{\tau_n} \left(\frac{\tau}{T} - 1 + e^{-\frac{\tau}{T}} \right), & 0 \leq \tau \leq \tau_n, \\ A \frac{T}{\tau_n} e^{-\frac{\tau}{T}} \left[1 + e^{\frac{\tau_n}{T}} \left(\frac{\tau_n}{T} - 1 \right) \right], & \tau_n \leq \tau < \infty. \end{cases}$$

8. В условиях задач 6 и 7 принять, что входной сигнал

$$s(t) = \begin{cases} A \left(1 - \frac{t}{\tau_n} \right), & 0 \leq t \leq \tau_n, \\ 0, & t < 0, t > \tau_n. \end{cases}$$

Ответ:

$$s_{\text{вых}}(\tau) = \begin{cases} A \left[1 - e^{-\frac{\tau}{T}} - \frac{T}{\tau_n} \left(\frac{T}{\tau} - 1 + e^{-\frac{\tau}{T}} \right) \right], & 0 \leq \tau \leq \tau_n, \\ A \left[1 - e^{-\frac{\tau}{T}} \left(\frac{T}{\tau_n} + 1 + e^{-\frac{\tau_n}{T}} - \frac{T}{\tau_n} e^{-\frac{\tau_n}{T}} \right) \right], & \tau_n \leq \tau < \infty. \end{cases}$$

9. Для условий задач 6 и 7 положить входной сигнал

$$s(t) = \begin{cases} 2A \frac{t}{\tau_n}, & 0 \leq t \leq \tau_n / 2, \\ 2A \left(1 - \frac{t}{\tau_n} \right), & \tau_n / 2 \leq t \leq \tau_n, \\ 0, & t < 0, t > \tau_n. \end{cases}$$

Ответ:

$$s_{\text{вых}}(\tau) = \begin{cases} 2A \frac{T}{\tau_n} \left(\frac{\tau}{T} - 1 + e^{-\frac{\tau}{T}} \right), & 0 \leq \tau \leq \frac{\tau_n}{2}, \\ 2A \left[1 - \frac{T}{\tau_n} \left(\frac{\tau}{T} - 1 + 2e^{-\frac{\tau_n - 2\tau}{2T}} - e^{-\frac{\tau}{T}} \right) \right], & \frac{\tau_n}{2} \leq \tau \leq \tau_n, \\ 2A \frac{T}{\tau_n} e^{-\frac{\tau}{T}} \left(1 + e^{-\frac{\tau_n}{T}} - 2e^{-\frac{\tau_n}{2T}} \right), & \tau_n \leq \tau < \infty. \end{cases}$$

10. На вход интегрирующей цепи с постоянной времени T подан сигнал вида

$$s(t) = \begin{cases} A \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right), & 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2}, \\ 0, & t < 0, t > T_0 / 2. \end{cases}$$

Определить сигнал на выходе. В конечных результатах принять $T = T_0$.

Ответ:

$$s_{\text{вых}}(\tau) = \begin{cases} \frac{A}{1+(2\pi)^2} \left[\sin\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right) - 2\pi \cos\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right) - 2\pi e^{-\frac{\tau}{T}} \right], & 0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}, \\ \frac{2\pi A}{1+(2\pi)^2} (1 + e^{0.5}) e^{-\frac{\tau}{T}}, & \frac{T}{2} \leq \tau < \infty. \end{cases}$$

11. На вход интегрирующей цепи с параметрами, указанными в задачах 6 и 7, подан ограниченный по длительности сигнал

$$s(t) = \begin{cases} 4A \frac{t}{\tau_{\text{и}}}, & 0 \leq t \leq \frac{\tau_{\text{и}}}{4}, \\ A, & \frac{\tau_{\text{и}}}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}\tau_{\text{и}}, \\ 4A \left(1 - \frac{t}{\tau_{\text{и}}}\right), & \frac{3}{4}\tau_{\text{и}} \leq t \leq \tau_{\text{и}}. \end{cases}$$

Определить сигнал на выходе цепи.

Ответ:

$$s_{\text{вых}}(\tau) = \begin{cases} 4A \frac{T}{\tau_{\text{и}}} \left(\frac{\tau}{T} - 1 + e^{-\frac{\tau}{T}} \right), & 0 \leq \tau \leq \frac{\tau_{\text{и}}}{4}, \\ A \left[1 + 4 \frac{T}{\tau_{\text{и}}} \left(1 - e^{-\frac{\tau_{\text{и}}}{4T}} \right) e^{-\frac{\tau}{T}} \right], & \frac{\tau_{\text{и}}}{4} \leq \tau \leq \frac{3}{4}\tau_{\text{и}}, \\ 4A \left\{ 1 + \frac{T}{\tau_{\text{и}}} \left[1 - \frac{\tau}{T} + \left(1 - e^{-\frac{\tau_{\text{и}}}{4T}} - e^{-\frac{3\tau_{\text{и}}}{4T}} \right) e^{-\frac{\tau}{T}} \right] \right\}, & \frac{3}{4}\tau_{\text{и}} \leq \tau \leq \tau_{\text{и}}, \\ 4A \frac{T}{\tau_{\text{и}}} \left(1 - e^{-\frac{\tau_{\text{и}}}{4T}} - e^{-\frac{3\tau_{\text{и}}}{4T}} + e^{-\frac{\tau}{T}} \right), & \tau_{\text{и}} \leq \tau < \infty. \end{cases}$$

Примечание. При определении импульсной характеристики дифференцирующей цепи в задачах 12 – 17 передаточную функцию этой цепи следует разбить на два слагаемых, одно из которых должно соответствовать передаточной функции интегрирующего звена. В процессе вычислений пределы интегрирования следует включать в область интегрирования.

12. Дифференцирующая цепь составлена из конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R , постоянная времени цепи $T = RC$. На вход цепи подан прямоугольный видеоимпульс величиной A и длительностью $\tau_{\text{и}}$. Определить импульсную характеристику и сигнал на выходе цепи (на резисторе).

Ответ:

$$s_{\text{вых}}(\tau) = \begin{cases} Ae^{\frac{\tau}{T}}, & 0 \leq \tau \leq \tau_n, \\ A\left(1 - e^{\frac{\tau_n}{T}}\right)e^{\frac{\tau}{T}}, & \tau_n \leq \tau < \infty. \end{cases}$$

13. Заполнить задания, указанные в задаче 12, приняв, что на вход дифференцирующей цепи подан импульс вида:

$$s(t) = \begin{cases} A\frac{t}{\tau_n}, & 0 \leq t \leq \tau_n, \\ 0, & t < 0, t > \tau_n. \end{cases}$$

Ответ:

$$s_{\text{вых}}(\tau) = \begin{cases} A\frac{T}{\tau_n}\left(1 - e^{\frac{\tau}{T}}\right), & 0 \leq \tau \leq \tau_n, \\ -A\frac{T}{\tau_n}\left[1 + \left(\frac{\tau_n}{T} - 1\right)e^{\frac{\tau_n}{T}}\right]e^{\frac{\tau}{T}}, & \tau_n \leq \tau < \infty. \end{cases}$$

14. На вход дифференцирующей цепи с параметрами, указанным в задаче 12, подан сигнал вида:

$$s(t) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{t}{\tau_n}\right), & 0 \leq t \leq \tau_n, \\ 0, & t < 0, t > \tau_n. \end{cases}$$

Определить сигнал на входе цепи.

Ответ:

$$s_{\text{вых}}(\tau) = \begin{cases} A\left[\left(1 + \frac{T}{\tau_n}\right)e^{\frac{\tau}{T}} - \frac{T}{\tau_n}\right], & 0 \leq \tau \leq \tau_n, \\ A\left[1 + \frac{T}{\tau_n}\left(1 - e^{\frac{\tau_n}{T}}\right)e^{\frac{\tau}{T}}\right], & \tau_n \leq \tau < \infty. \end{cases}$$

15. В условиях задачи 12 принять, что на входе цепи действует импульс вида:

$$s(t) = \begin{cases} 2A\frac{t}{\tau_n}, & 0 \leq t \leq \frac{\tau_n}{2}, \\ 2A\left(1 - \frac{t}{\tau_n}\right), & \frac{\tau_n}{2} \leq t \leq \tau_n, \\ 0, & t < 0, t > \tau_n. \end{cases}$$

Ответ:

$$s_{\text{ВЫХ}}(\tau) = \begin{cases} 2A \frac{T}{\tau_n} \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}}\right), & 0 \leq \tau \leq \frac{\tau_n}{2}, \\ 2A \frac{T}{\tau_n} \left[\left(2e^{\frac{\tau_n}{2T}} - 1\right) e^{-\frac{\tau}{T}} - 1 \right], & \frac{\tau_n}{2} \leq \tau \leq \tau_n, \\ 2A \frac{T}{\tau_n} \left(2e^{\frac{\tau_n}{2T}} - e^{-\frac{\tau_n}{T}} - 1\right) e^{-\frac{\tau}{T}}, & \tau_n \leq \tau < \infty. \end{cases}$$

16. В условиях задачи 12 принять, что входной сигнал имеет вид:

$$s(t) = \begin{cases} 2 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right), & 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & t < 0, t > T/2. \end{cases}$$

Ответ:

$$s_{\text{ВЫХ}}(\tau) = \begin{cases} \frac{2\pi A}{1 + (2\pi)^2} \left[2\pi \sin\left(\frac{2\pi}{T} \tau\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{T} \tau\right) - e^{-\frac{\tau}{T}} \right], & 0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}, \\ -\frac{2\pi A}{1 + (2\pi)^2} (1 + e^{0.5}) e^{-\frac{\tau}{T}}, & \frac{T}{2} \leq \tau < \infty. \end{cases}$$

17. Выполнить задания, указанные в задаче 12, полагая, что на вход дифференцирующей цепи подан сигнал вида:

$$s(t) = \begin{cases} 4A \frac{t}{\tau_n}, & 0 \leq t \leq \frac{\tau_n}{4}, \\ A, & \frac{\tau_n}{4} \leq t \leq \frac{3}{4} \tau_n, \\ 4A \left(1 - \frac{t}{\tau_n}\right), & \frac{3}{4} \tau_n \leq t \leq \tau_n, \\ 0, & t < 0, t > \tau_n. \end{cases}$$

Ответ:

$$s_{\text{ВЫХ}}(\tau) = \begin{cases} 4A \frac{T}{\tau_n} \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}}\right), & 0 \leq \tau \leq \frac{\tau_n}{4}, \\ 4A \frac{T}{\tau_n} \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{\tau_n}{4T}}\right) e^{-\frac{\tau}{T}} \right], & \frac{\tau_n}{4} \leq \tau \leq \frac{3}{4} \tau_n, \\ 4A \frac{T}{\tau_n} \left(e^{\frac{\tau_n}{4T}} + e^{\frac{3\tau_n}{4T}} - 1 \right) e^{-\frac{\tau}{T}}, & \frac{3}{4} \tau_n \leq \tau \leq \tau_n, \\ 4A \frac{T}{\tau_n} \left[1 + \left(e^{\frac{\tau_n}{4T}} + e^{\frac{3\tau_n}{4T}} - e^{-\frac{\tau_n}{T}} - 1 \right) e^{-\frac{\tau}{T}} \right], & \tau_n \leq \tau < \infty. \end{cases}$$

18. Фильтр имеет постоянную передаточную функцию в полосе частот от $-F$ до $+F$:

$$K(j\omega) = \begin{cases} K_0, & -F \leq f \leq +F, \\ 0, & |f| > |F|. \end{cases}$$

Определить импульсную характеристику и, используя два критерия физической реализуемости, подтвердить возможность физической осуществимости такого фильтра.

$$\text{Ответ: } g(\tau) = 2K_0F \frac{\sin(2\pi F\tau)}{2\pi F\tau}.$$

19. Используя два критерия, установить возможность физической реализуемости фильтра, имеющего передаточную функцию

$$K(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T}.$$

Определить его импульсную характеристику. Учесть примечание перед задачей 12.

$$\text{Ответ: } g(\tau) = \delta(\tau) - \frac{e^{-\frac{\tau}{T}}}{T}.$$

20. Линейная цепь составлена из двух резисторов сопротивлением R каждый и двух конденсаторов емкостью C каждый. Элементы цепи включены по мостовой схеме, образуя замкнутый прямоугольник, причем однотипные элементы включены в противоположные плечи моста. Такую схему можно уподобить схемам интегрирующей и дифференцирующей цепей, соединенных параллельно. К одной из диагоналей моста подведено входное напряжение, выходное напряжение снимается с другой диагонали моста.

Определить:

а) передаточную функцию и импульсную характеристику моста, подтвердив возможность его физической реализуемости, при этом учесть примечание перед задачей 12;

б) сигнал на выходе моста при подаче на вход в момент $t=0$ напряжения в виде единичного скачка:

$$s(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$$

в) сигнал на выходе моста при подаче на вход прямоугольного видеоимпульса

$$s(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \tau_n, \\ 0, & t < 0, t > \tau_n; \end{cases}$$

г) сигнал на выходе моста при подаче на вход пилообразного видеоимпульса

$$s(t) = \begin{cases} A \frac{t}{\tau_n}, & 0 \leq t \leq \tau_n, \\ 0, & t < 0, t > \tau_n; \end{cases}$$

д) сигнал на выходе моста при подаче на вход импульса вида:

$$s(t) = \begin{cases} A \left(1 - \frac{t}{\tau_n}\right), & 0 \leq t \leq \tau_n, \\ 0, & t < 0, t > \tau_n; \end{cases}$$

е) сигнал на выходе моста при подаче на вход импульса вида:

$$s(t) = \begin{cases} A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), & 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & t < 0, t > T/2. \end{cases}$$

Ответ:

а) $K(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T}$, $g(t) = \frac{2}{T} e^{-\frac{t}{T}} - \delta(t)$;

б) $s_{\text{ВЫХ}}(\tau) = A \left(1 - 2e^{-\frac{\tau}{T}}\right)$, $0 \leq \tau < \infty$;

в) $s_{\text{ВЫХ}}(\tau) = \begin{cases} 2 \left(1 - 2e^{-\frac{\tau}{T}}\right), & 0 \leq \tau \leq \tau_n, \\ A \left[\left(1 + e^{-\frac{\tau_n}{T}}\right) e^{-\frac{\tau}{T}} - 1 \right], & \tau_n \leq \tau < \infty; \end{cases}$

г) $s_{\text{ВЫХ}}(\tau) = \begin{cases} \frac{A}{\tau_n} \left[\tau - 2T \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}}\right) \right], & 0 \leq \tau \leq \tau_n, \\ 2A \left[\left(1 - \frac{T}{\tau_n}\right) e^{-\frac{\tau_n}{T}} + \frac{T}{\tau_n} \right] e^{-\frac{\tau}{T}}, & \tau_n \leq \tau < \infty; \end{cases}$

д) $s_{\text{ВЫХ}}(\tau) = \begin{cases} A \left[1 + 2 \frac{T}{\tau_n} - \frac{\tau}{\tau_n} - 2 \left(1 + \frac{T}{\tau_n}\right) e^{-\frac{\tau}{T}} \right], & 0 \leq \tau \leq \tau_n, \\ 2A \left[\frac{T}{\tau_n} \left(e^{-\frac{\tau_n}{T}} - 1 \right) - 1 \right] e^{-\frac{\tau}{T}}, & \tau_n \leq \tau < \infty; \end{cases}$

е) $s_{\text{ВЫХ}}(\tau) = \begin{cases} \frac{A}{1 + (2\pi)^2} \left\{ (1 - 4\pi^2) \sin\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right) - 4\pi \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right) - e^{-\frac{\tau}{T}} \right] \right\}, & 0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}, \\ \frac{4A}{1 + (2\pi)^2} (1 + e^{0,5}) e^{-\frac{\tau}{T}}, & \frac{T}{2} \leq \tau < \infty. \end{cases}$

Список литературы

1. Лебедько Е.Г. Теоретические основы передачи информации: Учебное пособие. — СПб: Издательство «Лань», 2011. — 352 с.
2. Таукчи В.М. Спектральный и корреляционный анализ сигналов и линейных систем. Сборник задач. — Л.: ЛИТМО, 1979.
3. Лебедько Е.Г. Математические основы передачи информации (Часть 1 и 2): учебное пособие. — СПб: СПбГУ ИТМО, 2005. — 92 с.
4. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов: пер. с нем. / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев; под ред. Г. Гроше, В. Циглера. — Изд. перераб. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — 718 с.
5. Таукчи В.М. Прикладная теория информации. Ч. 1. Конспект лекций. — Л.: ЛИТМО, 1975.
6. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Дрофа, 2006. — 719 с.
7. Горяинов В.Т. Статистическая радиотехника. Примеры и задачи: учебное пособие для вузов / В.Т. Горяинов, А.Г. Журавлев, В.И. Тихонов; под ред. В.И. Тихонова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Сов. радио, 1980. — 543 с.

Миссия университета – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

КАФЕДРА ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ И СИСТЕМ

Кафедра создавалась в 1937-38 годах и существовала под следующими названиями:

- с 1938 по 1958 год – кафедра военных оптических приборов;
- с 1958 по 1967 год – кафедра специальных оптических приборов;
- с 1967 по 1992 год – кафедра оптико-электронных приборов;
- с 1992 года – кафедра оптико-электронных приборов и систем.

Кафедру возглавляли:

- с 1938 по 1942 год – профессор К.Е. Солодилов;
- с 1942 по 1945 год – профессор А.Н. Захарьевский (по совместительству);
- с 1945 по 1946 год – профессор М.А. Резунов;
- с 1947 по 1972 год – профессор С.Т. Цуккерман;
- с 1972 по 1992 год – заслуженный деятель науки и техники РСФСР, профессор Л.Ф. Порфирьев;
- с 1992 по 2007 год – заслуженный деятель науки РФ, профессор Э.Д. Панков.
- с 2007 года по настоящее время – почетный работник высшего профессионального образования, профессор В.В. Коротаев.

С 1938 по 1970 кафедра входила в состав оптического факультета.

В 1970 году кафедра вошла в состав факультета оптико-электронного приборостроения, который в 1976 году был переименован в инженерно-физический факультет.

В 1998 г кафедра вошла в состав факультета оптико-информационных систем и технологий.

В 2015 году кафедра вошла в состав факультета лазерной и световой инженерии.

Кафедра оптико-электронных приборов и систем (ОЭПиС) осуществляет подготовку профессионалов в области создания

оптико-электронных и видеоинформационных приборов и систем, а также в области разработки их программного обеспечения.

Результаты научных исследований кафедры докладываются на ведущих мировых научных форумах, публикуются в виде научных статей и монографий.

Приборы, разработанные на кафедре, поставляются на предприятия России и на предприятия других стран.

Этот уникальный опыт передается нашим студентам.

На кафедре работают 6 докторов наук, профессоров, однако большую часть коллектива составляют молодые люди в возрасте от 18 до 35 лет, в том числе 11 молодых кандидатов наук.

Коллектив кафедры оптико-электронных приборов и систем (ОЭПиС) – сформировавшаяся научная и научно-педагогическая школа, существующая с 1938 года.

За эти годы были подготовлены более тысячи специалистов, более ста докторов и кандидатов наук.

С 2007 г. заведующим кафедрой является почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации, профессор В.В. Кортаев.

Только в период с 2007 по 2015 год на кафедре были защищены 28 диссертаций на соискание ученой степени кандидата технических наук.

В 2012 году научно-педагогическая школа кафедры ОЭПиС «Оптико-электронное приборостроение» была внесена в реестр ведущих научных и научно-педагогических школ Санкт-Петербурга.

Подробная информация о кафедре ОЭПиС имеется на сайте кафедры: <http://oep.ifmo.ru/>

**Алексей Александрович Горбачёв
Евгений Георгиевич Лебедько**

АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

В авторской редакции

А.А. Горбачёв, Е.Г. Лебедько

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе