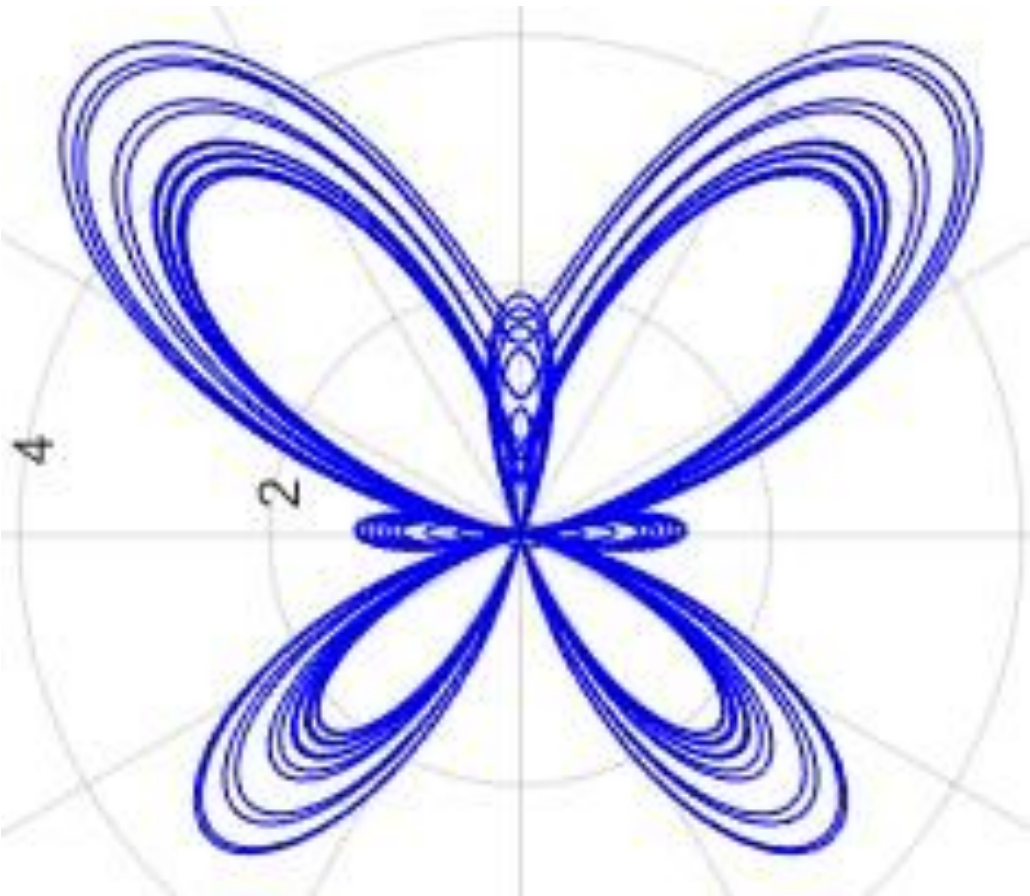
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Блинова И.В., Попов И.Ю.

Кривые, заданные параметрически и в полярных координатах



Санкт-Петербург
2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Блинова И.В., Попов И.Ю.

Кривые, заданные параметрически и в полярных координатах

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО по направлению подготовки 01.03.02, 09.03.01, 09.03.02, 09.03.03, 09.03.04, 10.03.01, 11.03.02, 11.03.03, 12.03.01, 12.03.02, 12.03.03, 12.03.05, 12.05.01, 13.03.02, 14.03.01, 15.03.04, 15.03.06, 16.03.01, 16.03.03, 18.03.02, 19.03.01, 19.03.02, 19.03.03, 23.03.03, 24.03.02, 27.03.04, 27.03.05, 38.03.01, 44.03.04, 45.03.04 в качестве учебно-методического пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования бакалавриата.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2017

Блинова И.В., Попов И.Ю. Кривые, заданные параметрически и в полярных координатах. Учебное пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2017. – 56 с.

Рецензенты: д.ф.-м.н., профессор, заведующий учебным центром ОАО «Авангард» В.Д. Лукьянов;
к.ф.-м.н., доцент кафедры ВМ Университета ИТМО А.И. Трифанов.

Предлагаемое пособие предназначено для студентов первого курса академического бакалавриата. В первом разделе объясняется задание кривых в полярных координатах и параметрически. Во втором разделе приведены уравнения, основные геометрические свойства и иллюстрации большинства специальных кривых, встречающихся в математике и ее приложениях. В третьем разделе разбираются задачи вычисления площадей плоской фигуры и длины дуги кривой, связанные с данным типом кривых. Пособие содержит примеры и задачи по каждой теме.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

Содержание

ПОЛЯРНОЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ КРИВЫХ

1. Уравнение кривой в полярной системе координат

Рассмотрим два основных способа задания положения точки M на плоскости: 1) в декартовой системе координат $M(x, y)$ (Рис. 1); 2) в полярной системе координат $M(r, \varphi)$ (Рис. 2).

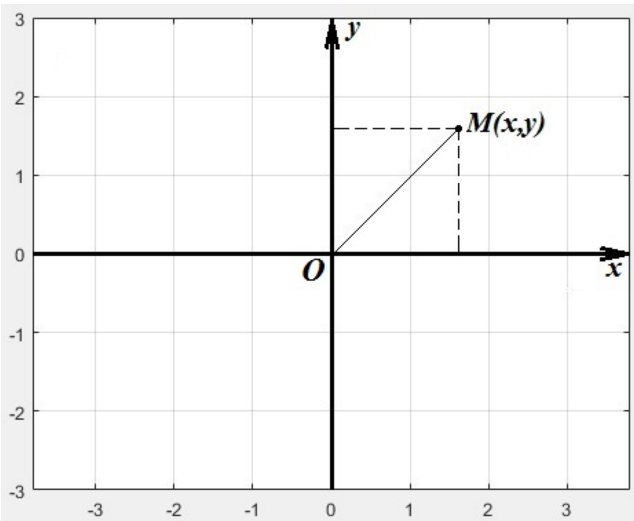


Рис.1. Декартова система координат

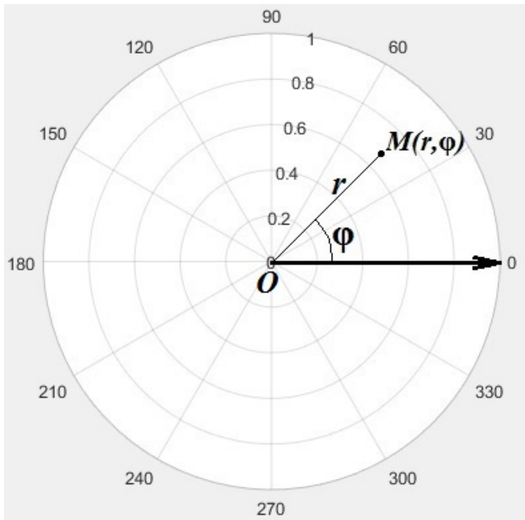


Рис.2. Полярная система координат

Полярная система координат задается лучом, который называется нулевым или полярной осью. Точка O, из которой выходит этот луч, называется началом координат или полюсом. Каждая точка на плоскости определяется двумя полярными координатами: полярным радиусом и полярным углом.

Полярный радиус (r) соответствует расстоянию от точки до начала координат. Полярный радиус может принимать значения от нуля до бесконечности ($r \in [0, \infty)$).

Полярный угол (φ) - угол, на который следует повернуть полярную ось для того, чтобы ее направление совпало с направлением вектора $\vec{OM}$ (при этом $\varphi > 0$, если поворот осуществляется против часовой стрелки, $\varphi < 0$ в противном случае).

Полярный угол имеет бесконечно много возможных значений (отличающихся друг от друга на величину $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$). Значение полярного угла, удовлетворяющее условию $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, называется главным. В некоторых случаях главным значением полярного угла называют значения φ, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Запись $M(r, \varphi)$ означает, что точка M имеет полярные координаты r и φ.

Если начало декартовой прямоугольной системы координат совместить с полюсом, а ось Ox направить по полярной оси, то прямоугольные координаты (x, y) можно перевести в полярные координаты (r, φ), используя тригонометрические формулы: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. При этом $x^2 + y^2 = r^2$.

Переход от полярных координат к декартовым можно выполнить по формулам:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Уравнение кривой в полярных координатах имеет вид $r = r(\varphi)$.

Для приближенного построения кривой $r = r(\varphi)$ элементарными средствами достаточно построить таблицу значений r, например для $\varphi \in [0, 2\pi)$.

φ_1	φ_2	...	φ_n
r_1	r_2	...	r_n

Пример 1. Построить в полярной системе координат кривую $r = 1 + \cos\varphi$.

Решение. Определим значения r для разных значений угла φ. Так как всегда должно быть выполнено $r \geqslant 0$, то $1 + \cos\varphi \geqslant 0$. Неравенство выполнено при любых φ. Рассмотрим изменение $\varphi \in [0, 2\pi]$. Построим кривую (Рис. 3).

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	3π	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r	2	1.866	1.5	1	0,5	0,134	0	0,134	0,5	1	1,5	1.866	2

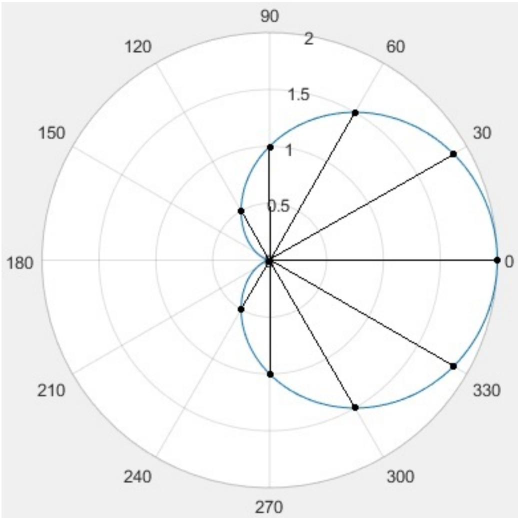


Рис.3. $r = 1 + \cos\varphi$

2. Параметрические уравнения кривой

Рассмотрим в декартовой прямоугольной системе координат параметрические уравнения кривой[1]:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

t - параметр кривой. Область изменения параметра определяется как пересечение максимально возможных областей определения функций $x = x(t)$, $y = y(t)$. Исключение параметра t из системы (если оно возможно) приводит к уравнению, связывающему x и y, т.е. к уравнению вида $f(x, y) = 0$.

Для приближенного построения графика кривой, заданной параметрически, достаточно построить таблицу значений x и y в зависимости от возможных значений параметра t. При этом надо учитывать $t_1 < t_2 < ... < t_n$.

[1]Параметрически задавать кривую можно в любой системе координат, но мы будем рассматривать параметрическое задание кривой только в декартовой системе.

t_1	t_2	...	t_n
x_1	x_2	...	x_n
y_1	y_2	...	y_n

Затем на плоскости построить декартову систему координат и отметить точки с координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), ...,(x_n, y_n), соединить эти точки в порядке увеличения параметра t.

Пример 2. Построить кривую, заданную параметрически

$$\begin{cases} x = t(2-t) \\ y = t^2(2-t) \end{cases}$$

Решение. Как видно из уравнения кривой, при $t = 0$ и при $t = 2$ имеем одну и ту же координату (x, y), равную $(0, 0)$. Значит, $(0, 0)$ - точка самопересечения кривой. Определим значения x и y для разных значений t ($t \in (-\infty, \infty)$) и построим кривую (Рис. 4).

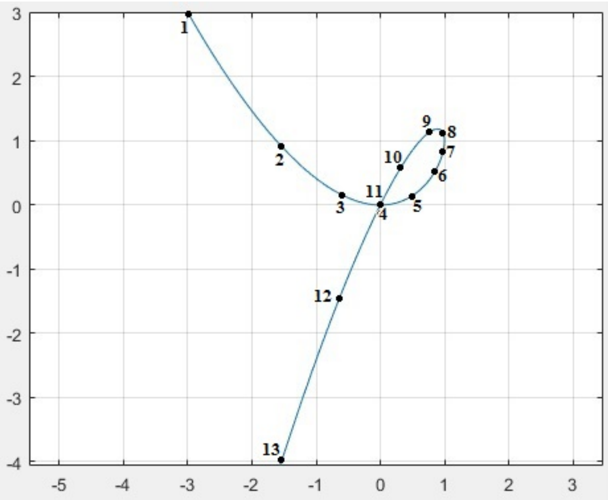


Рис.4. $(-1 < t < 2,6)$

t	-1	-0,6	-0,3	0	0,3	0,6	0,9
x	-3	-1,56	-0,69	0	0,51	0,84	0,99
y	3	0,936	0,207	0	0,153	0,504	0,891

t	1,2	1,5	1,8	2	2,3	2,6
x	0,96	0,75	0,36	0	-0,69	-1,56
y	1,152	1,125	0,648	0	-1,587	-4,056

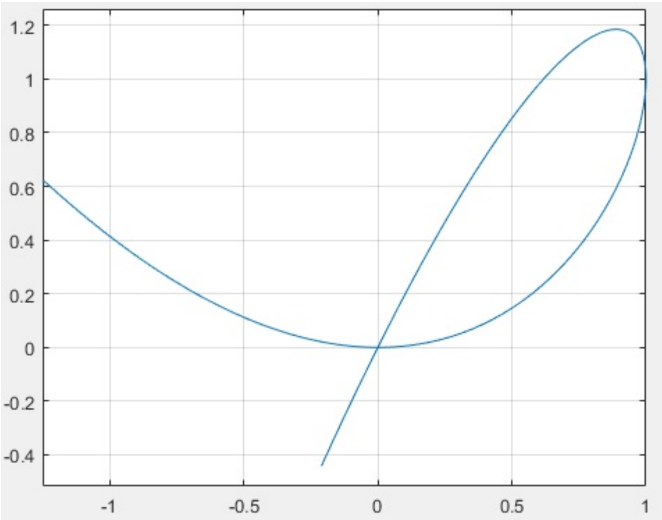


Рис.5. $(-0,5 < t < 2,1)$

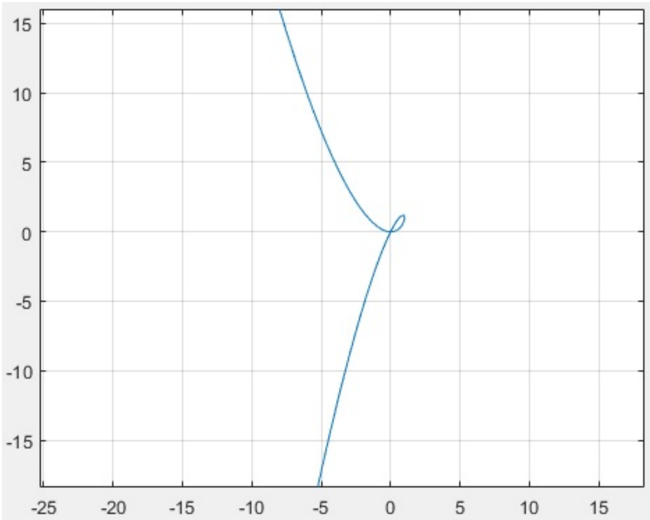


Рис.6. $(-2 < t < 3,5)$

Пример 3. Построить кривую, заданную параметрически

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

Определим значения x и y для разных значений t. Так как sin и cos периодические функции с периодом 2π, то $t \in [0, 2\pi)$. Построим кривую (Рис. 7).

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
x	1	0,6495	0,3535	0,125	0	-0,125	-0,3535	-0,6495	-1
y	0	0,125	0,3535	0,6495	1	0,6495	0,3535	0,125	0

t	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	3π	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
x	-0,6495	-0,3535	-0,125	0	0,125	0,3535	0,6495	1
y	-0,125	-0,3535	-0,6495	-1	-0,6495	-0,3535	-0,125	0

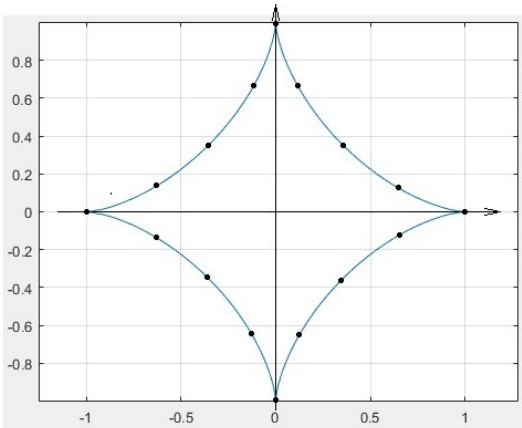


Рис.7. $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$

Задачи

1.1. Построить точки, заданные полярными координатами $A(2; \frac{\pi}{4})$, $B(3; \frac{4\pi}{3})$, $C(1; \frac{\pi}{6})$, $D(3; -\frac{4\pi}{3})$, $E(4; -\frac{\pi}{4})$.

1.2. В полярной системе координат $Or\varphi$ изобразить координатные линии $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$, $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

1.3. Найти полярные координаты точек, заданных в декартовых координатах, $A(1; -\sqrt{3})$, $B(2\sqrt{3}; 2)$, $C(-4; 4)$, $D(\sqrt{2}; -\sqrt{6})$, если полюс совпадает с началом координат, а полярная ось - с положительным направлением оси Ox.

1.4. Найти прямоугольные координаты точек, заданных в полярных координатах, $A(2\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4})$, $B(7; \frac{\pi}{2})$, $C(3; \frac{5\pi}{4})$, $D(1; -\frac{\pi}{4})$, если полюс совпадает с началом координат, а полярная ось - с положительным направлением оси Ox.

1.5. Найти полярные координаты точек, симметричных точкам $A(3; \frac{\pi}{6})$, $B(5; \frac{2\pi}{3})$, $C(2; -\frac{\pi}{6})$ относительно: 1)полюса, 2) полярной оси, 3) прямой, проходящей через полюс, перпендикулярно полярной оси.

1.6. Какая линия определяется уравнениями: 1) $x = \sin t$, $y = \sin^2 t$, 2) $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$, 3)$x = 5t$, $y = 7t$?

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

1. Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, расстояние от каждой из которых до данной точки, называемой центром, есть величина постоянная.

1.1. Окружность с центром в точке (0,0)

Окружность с центром в точке $(0,0)$ можно задать:

1) В декартовых координатах:

a) уравнением $x^2 + y^2 = a^2$ ($R = a$ радиус окружности);
b) параметрическими уравнениями при $t \in [0, 2\pi)$ (Рис. 8):

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, \ (R = a) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = a\cos t + b\sin t \\ y = b\cos t - a\sin t \end{cases}, \ (R = \sqrt{a^2 + b^2})$$

2) В полярных координатах уравнение окружности радиуса a с центром в точке $(0,0)$ имеет вид: $r = a$. Действительно, так как $x^2 + y^2 = a^2$ и $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то $(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = a^2$. Упростим, $r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = a^2$. Окончательно имеем $r = a$ (Рис. 9).

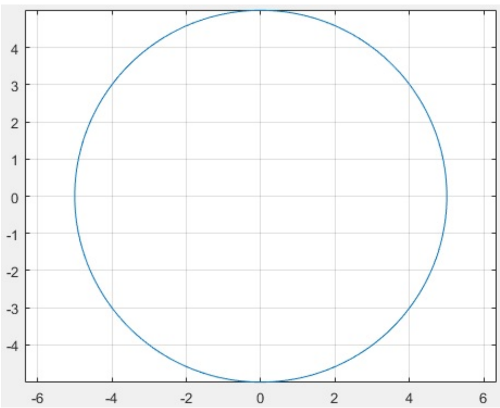


Рис.8.

$$\begin{cases} x = 4\cos t + 3\sin t \\ y = 3\cos t - 4\sin t \end{cases}, \ (R = 5)$$

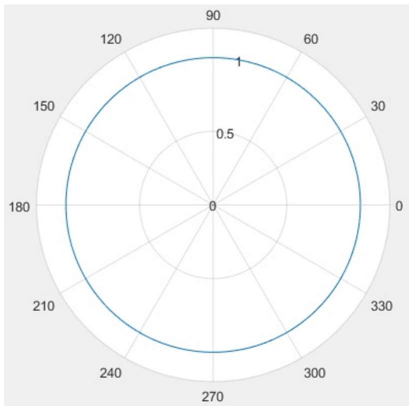


Рис.9.

$r = 1$, $(R = 1)$

1.2. Окружность с центром в точке $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$

Окружность с центром в точке (x_0, y_0) можно задать:

1) В декартовых координатах

а) уравнениями:

a1) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$;

a2) $x^2 + y^2 - 2ax = 0$

Чтобы перейти от уравнения $x^2+y^2-2ax = 0$ к знакомому уравнению окружности, прибавим к обоим частям этого уравнения a^2. Получим $x^2+y^2-2ax+a^2 = a^2$. Тогда $(x-a)^2+y^2 = a^2$, т.е. окружность с центром в точке $(a, 0)$ и радиусом a.

a3) $x^2 + y^2 - 2ay = 0$

Уравнение окружности $x^2+(y-a)^2 = a^2$ с центром в точке $(0, a)$ и радиусом a.

b) параметрически:

$$\begin{cases} x = a\cos t + x_0 \\ y = a\sin t + y_0, \;\; t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

2) В полярных координатах для a>0 и b>0

a)$r = a\cos\varphi$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

b)$r = -a\cos\varphi$, $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

c)$r = b\sin\varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$

d)$r = -b\sin\varphi$, $\varphi \in [\pi, 2\pi]$

e)$r = a\cos\varphi + b\sin\varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$

f)$r = a\cos\varphi - b\sin\varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$

g)$r = -a\cos\varphi + b\sin\varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$

h)$r = -a\cos\varphi - b\sin\varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$

В уравнениях (a-h) a - длина отрезка, соединяющего полюс и точку пересечения окружности с лучом $\varphi = 0$ $(\varphi = \pi)$; b - длина отрезка, соединяющего полюс и точку пересечения окружности с лучом $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $(\varphi = \frac{3\pi}{2})$. Окружности проходят через полюс.

На рисунках 10-19 обозначены точки пересечения окружностей с лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \pi$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

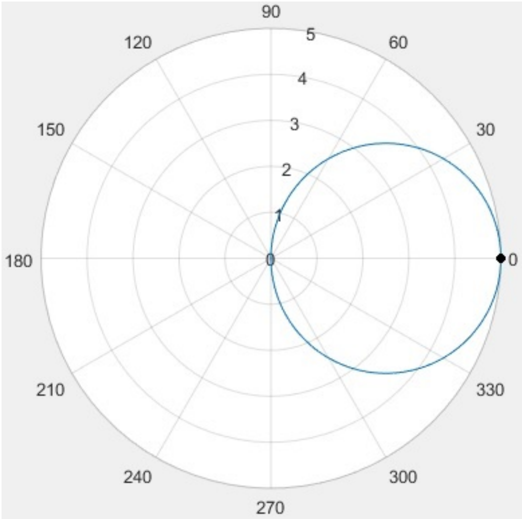


Рис.10. $r = 5\cos\varphi,\ \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

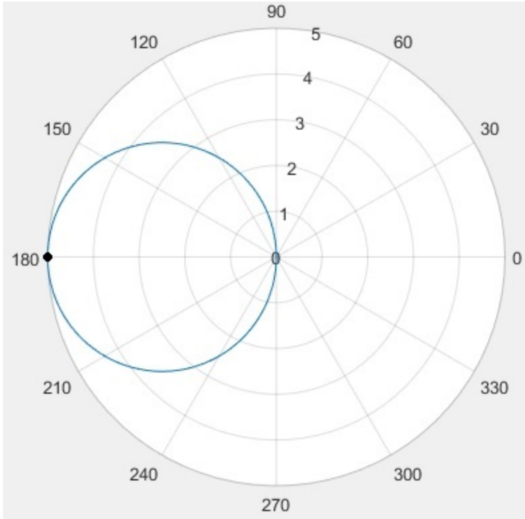


Рис.11. $r = -5\cos\varphi,\ \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

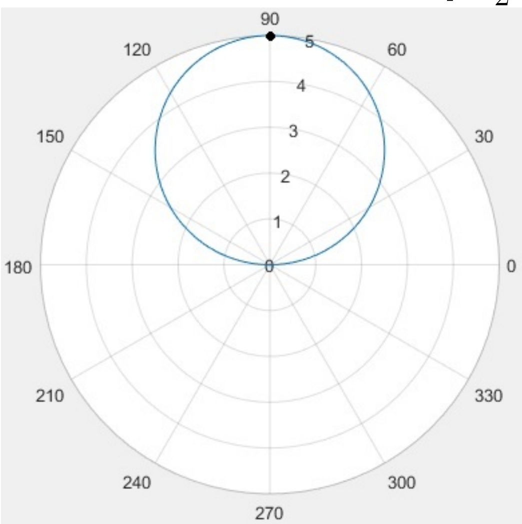


Рис.12. $r = 5\sin\varphi,\ \varphi \in [0, \pi]$

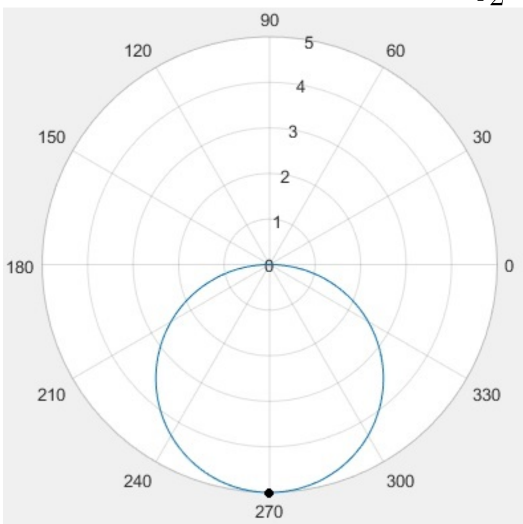


Рис.13. $r = -5\sin\varphi,\ \varphi \in [\pi, 2\pi]$

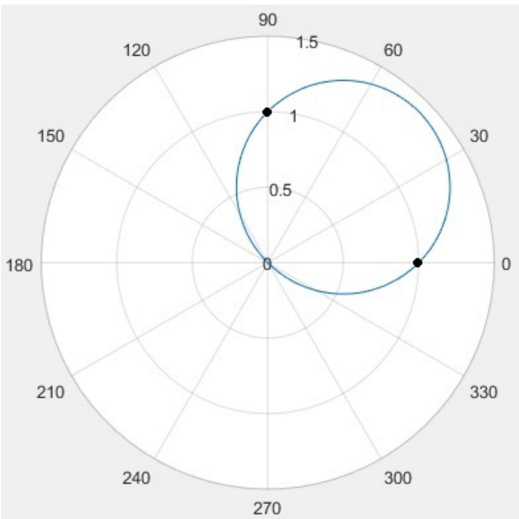


Рис.14.
$r = \cos\varphi + \sin\varphi,\ \varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

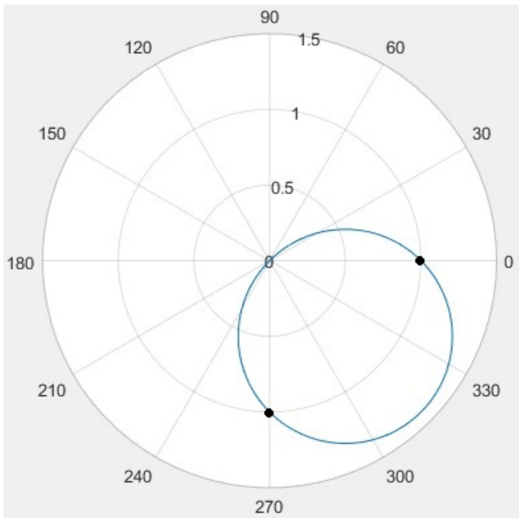


Рис.15.
$r = \cos\varphi - \sin\varphi,\ \varphi \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

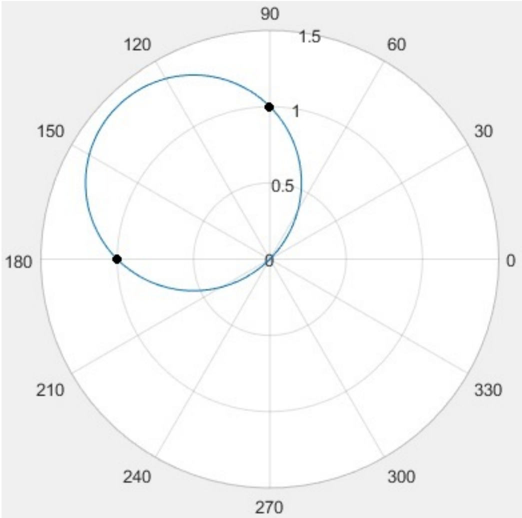


Рис.16.
$r = -\cos\varphi + \sin\varphi$, $\varphi \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$

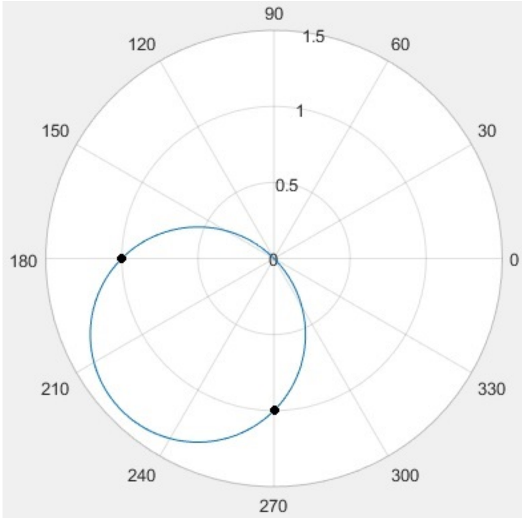


Рис.17.
$r = -\cos\varphi - \sin\varphi$, $\varphi \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$

На рисунках 18,19 приведены окружности, для которых $a \neq b$.

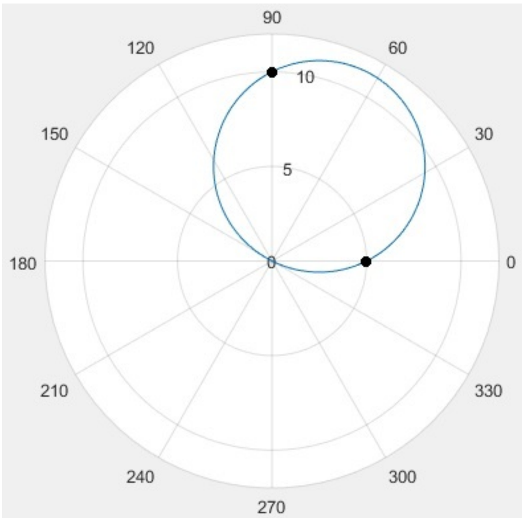


Рис.18. $r = 10\cos\varphi + 5\sin\varphi$

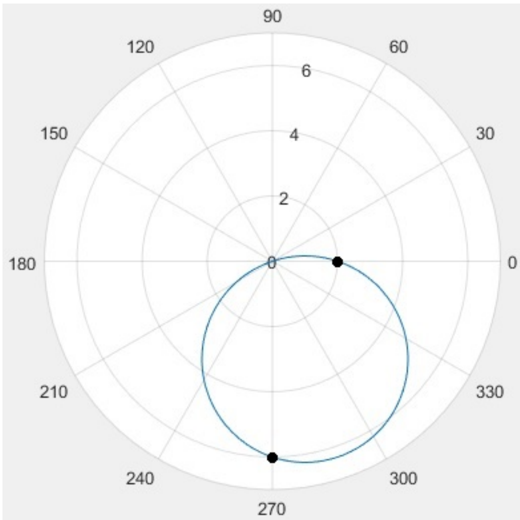


Рис.19. $r = 2\cos\varphi - 6\sin\varphi$

Для окружности $r = \cos\varphi$ рассмотрено изменение параметра $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (Рис. 20-23).

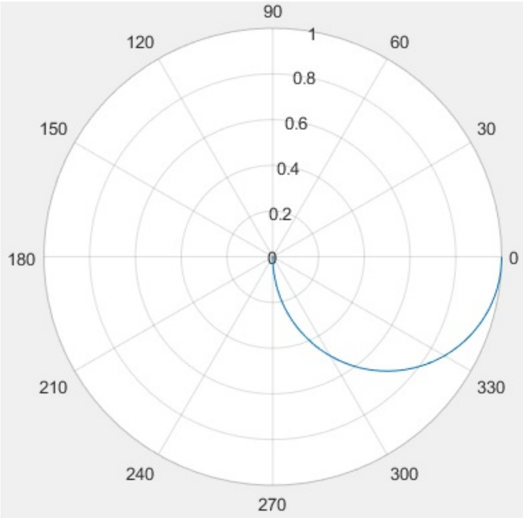


Рис.20. $r = \cos\varphi,\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$

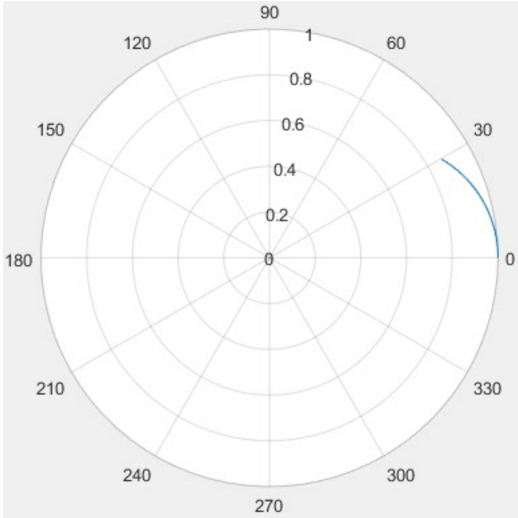


Рис.21. $r = \cos\varphi,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{6}$

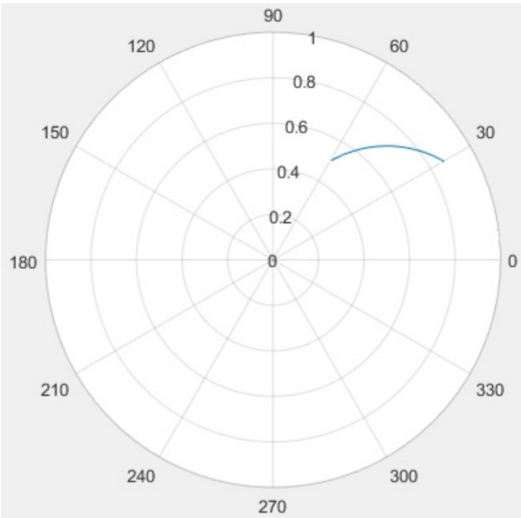


Рис.22. $r = \cos\varphi,\ \frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{3}$

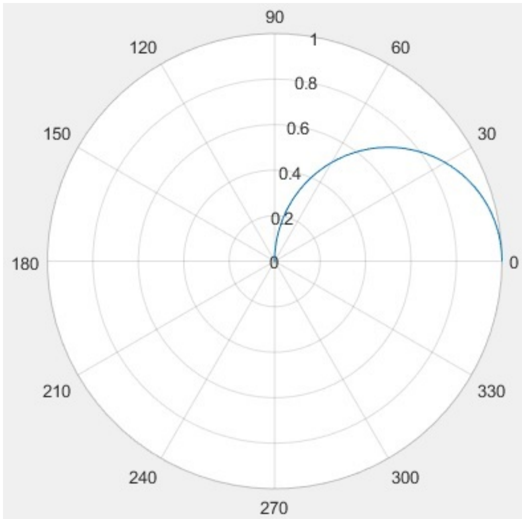


Рис.23. $r = \cos\varphi,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

2. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая расстояний между фокусами. $|F_1M| + |F_2M| = 2a$, $|F_1F_2| < 2a$ (Рис. 24).

1) В декартовых координатах эллипс с полуосями a и b с центром в точке $(0,0)$ можно задать: a) уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; b) параметрически: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$

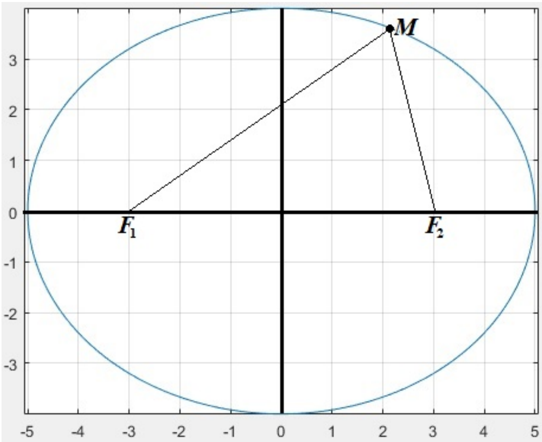


Рис.24. $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$

2) В полярных координатах уравнение эллипса с полуосями a и b $(a > b)$ с центром в фокусе можно задать уравнением $r = \frac{p}{1-e\cos\varphi}$ $(\varphi \in [0, 2\pi])$, где $p = \frac{b^2}{a}$ - фокальный параметр эллипса, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ - эксцентриситет эллипса (Рис. 25-28).

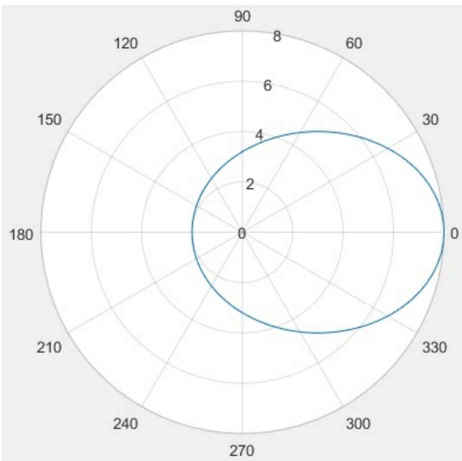


Рис.25.

$r = \frac{\frac{16}{5}}{1-\frac{3}{5}\cos\varphi}$ или $r = \frac{16}{5-3\cos\varphi}$

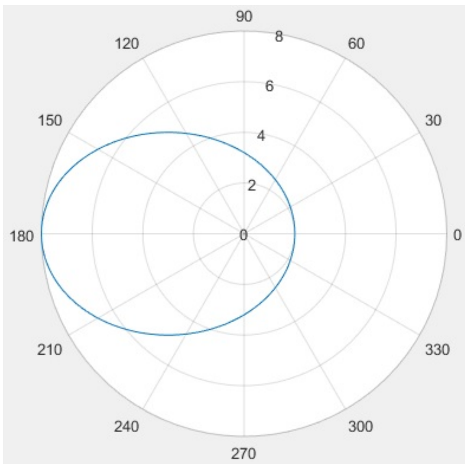


Рис.26.

$r = \frac{16}{5+3\cos\varphi}$

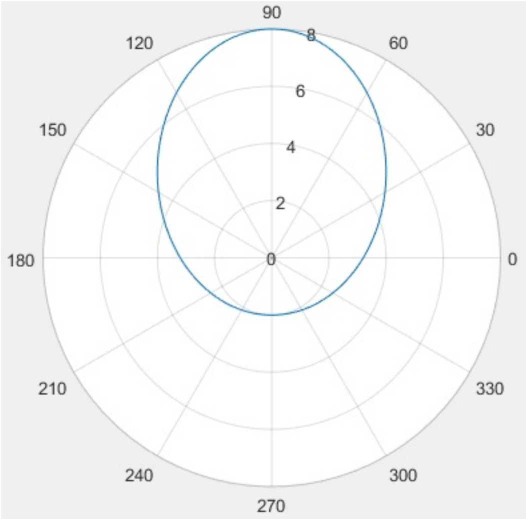


Рис.27. $r = \frac{16}{5-3\sin\varphi}$

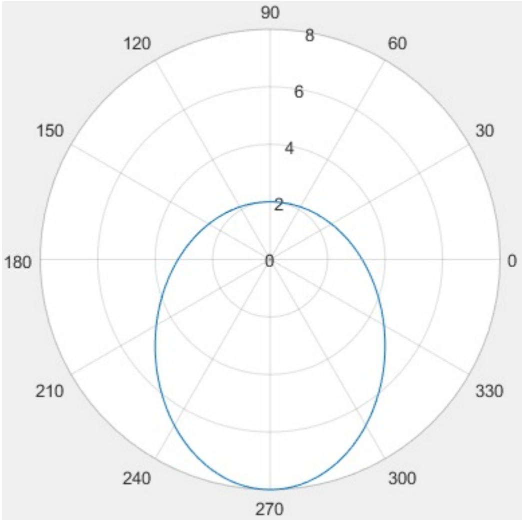


Рис.28. $r = \frac{16}{5+3\sin\varphi}$

3. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами. $|F_1M - F_2M| = 2a$, $|F_1F_2| > 2a$ (Рис. 29).

1) В декартовых координатах гиперболу с полуосями a и b с центром в точке $(0,0)$ можно задать: a) уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

b) параметрически: $\begin{cases} x = \pm a \text{ ch } t \\ y = b \text{ sh } t, \quad t \in (-\infty, \infty) \end{cases}$

2) В полярных координатах уравнение правой ветви гиперболы с полуосями a и b с центром в фокусе можно задать уравнением $r = \frac{p}{1-e\cos\varphi}$ (φ удовлетворяет неравенству $1 - e\cos\varphi > 0$), где $p = \frac{b^2}{a}$ - фокальный параметр гиперболы, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ - эксцентриситет гиперболы[1] (Рис. 30-33).

[1]Заметим, в полярных координатах уравнения эллипса, гиперболы и параболы совпадают, но описывают разные линии, поскольку отличаются эксцентриситетами (для эллипса $e < 1$, для гиперболы $e > 1$, для параболы $e = 1$). Значения угла φ удовлетворяют неравенству $r(\varphi) \geqslant 0$

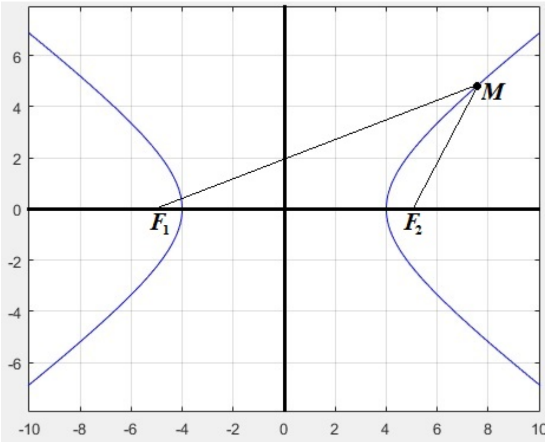


Рис.29. $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$

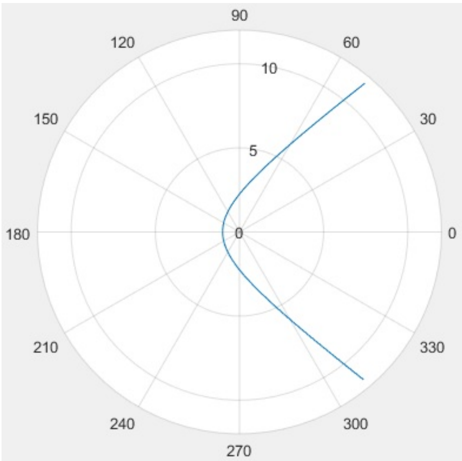


Рис.30.
$r = \frac{\frac{9}{4}}{1 - \frac{5}{4}\cos\varphi}$ или $r = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}$

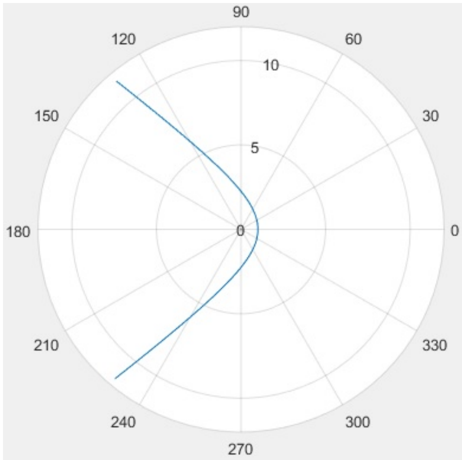


Рис.31.
$r = \frac{9}{4 + 5\cos\varphi}$

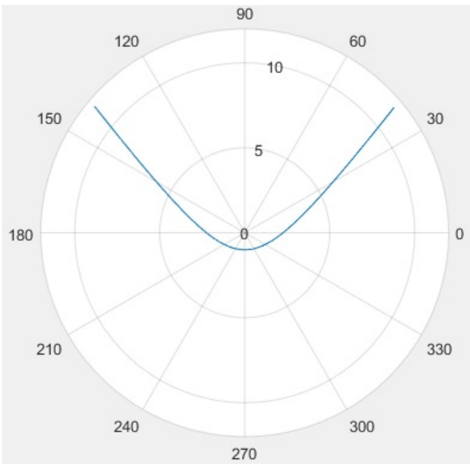


Рис.32. $r = \frac{9}{4 - 5\sin\varphi}$

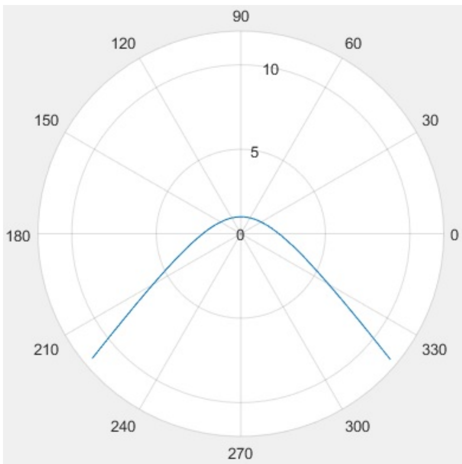


Рис.33. $r = \frac{9}{4 + 5\sin\varphi}$

4. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от точки, называемой фокусом, и от прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус $|FM| = |QM|$ (Рис. 34).

1) В декартовых координатах параболу с параметром p и вершиной в точке $(0,0)$ можно задать уравнением $y^2 = 2px$.

2) В полярных координатах уравнение параболы с параметром p с центром в фокусе можно задать уравнением $r = \frac{p}{1-e\cos\varphi}$ (φ удовлетворяет неравенству $1-e\cos\varphi > 0$), где p - фокальный параметр параболы, $e = 1$ - эксцентриситет параболы[2] (Рис. 35).

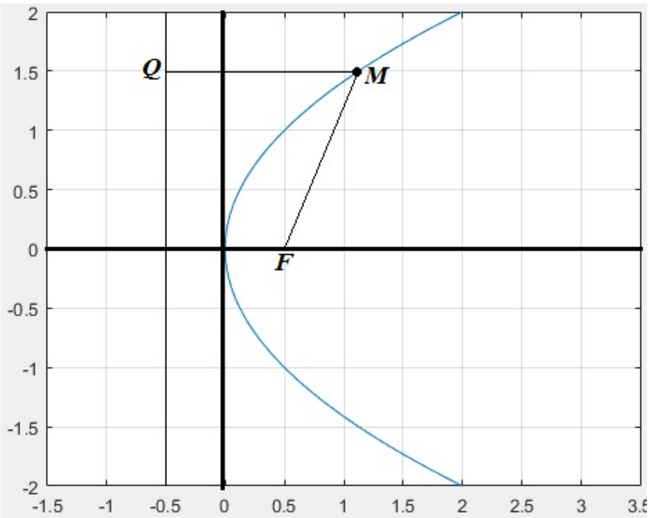


Рис.34. $y^2 = 2x$, $p = 1$

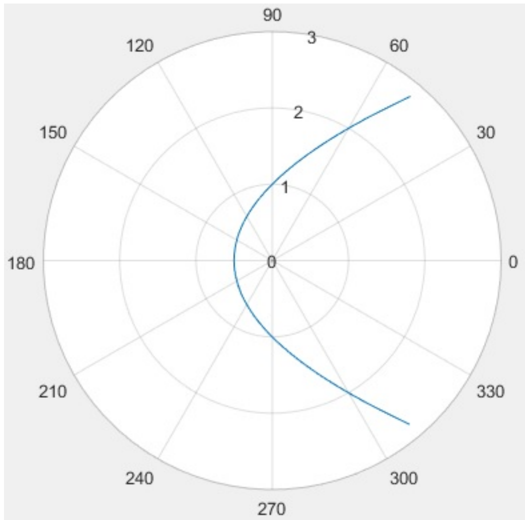


Рис.35. $r = \frac{1}{1-\cos\varphi}$

[2]Заметим, в полярных координатах уравнения эллипса, гиперболы и параболы совпадают, но описывают разные линии, поскольку отличаются эксцентриситетами (для эллипса $e < 1$, для гиперболы $e > 1$, для параболы $e = 1$). Значения угла φ удовлетворяют неравенству $r(\varphi) \geqslant 0$

5. Спирали

5.1. Спираль Архимеда

Спираль Архимеда - плоская кривая, траектория точки M, которая равномерно движется вдоль луча OV с началом в O, в то время как сам луч OV равномерно вращается вокруг O (Рис. 36).

Спираль Архимеда можно задать в полярных координатах уравнением $r = a + b\varphi$, $\varphi \in [\frac{a}{b}, \infty)$ (Рис. 36-39).

Если $a = 0$, то $r = b\varphi$, $\varphi \in [0, \infty)$ (Рис. 40-43).

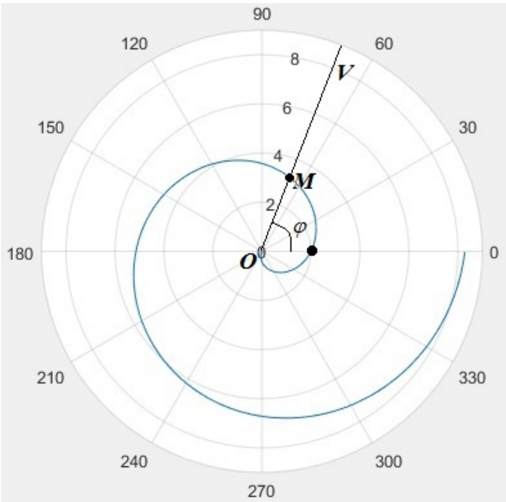


Рис.36. $r = 2 + \varphi$

$a = 2$, $b = 1$, $\varphi \in [-2, 2\pi]$

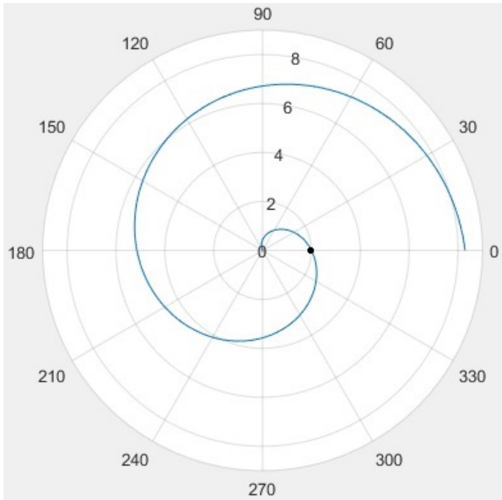


Рис.37. $r = 2 - \varphi$

$a = 2$, $b = -1$, $\varphi \in [-2\pi, 2]$

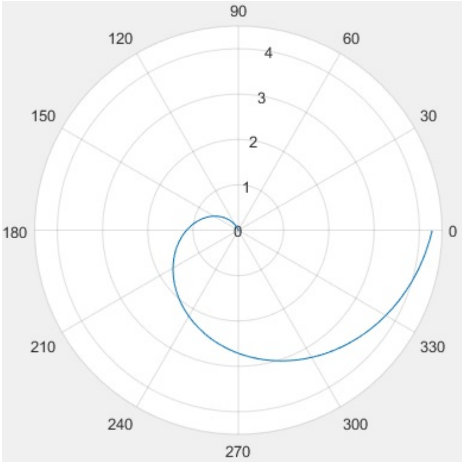


Рис.38. $r = -2 + \varphi$,
$a = -2$, $b = 1$, $\varphi \in [2, 2\pi]$

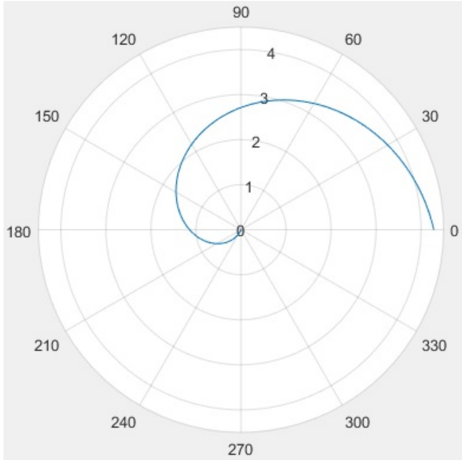


Рис.39. $r = -2 - \varphi$
$a = -2$, $b = -1$, $\varphi \in [-2\pi, -2]$

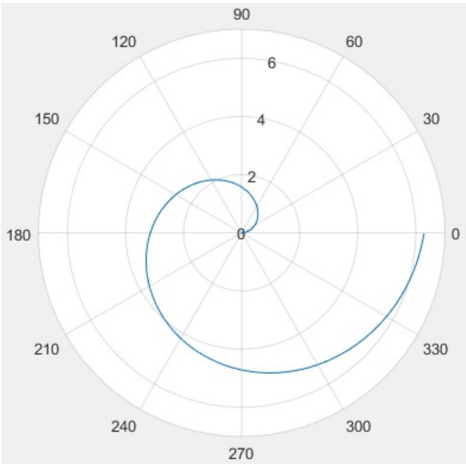


Рис.40. $r = \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

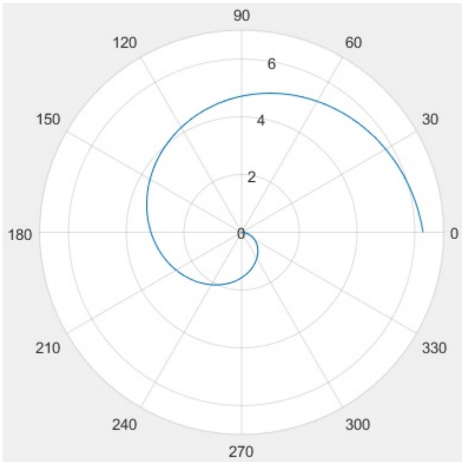


Рис.41. $r = -\varphi$, $\varphi \in [-2\pi, 0]$

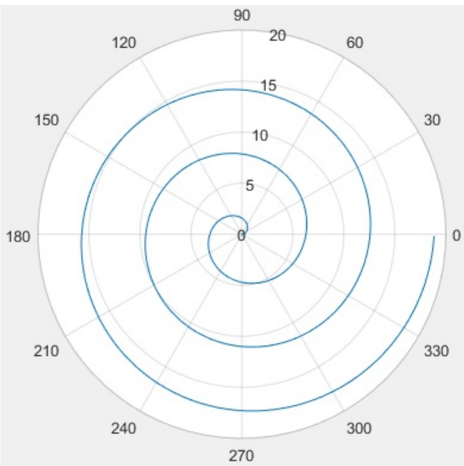


Рис.42. $r = \varphi$, $\varphi \in [0, 6\pi]$

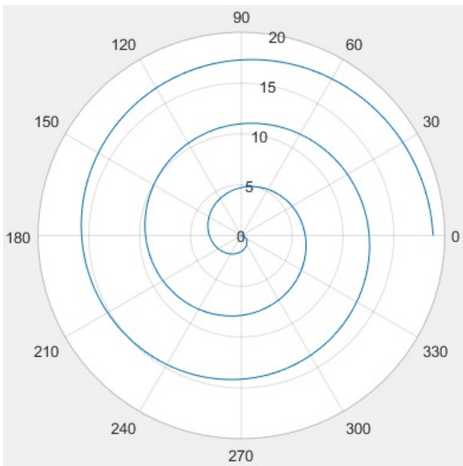


Рис.43. $r = -\varphi$, $\varphi \in [-6\pi, 0]$

5.2. Логарифмическая спираль

Логарифмическая спираль - плоская кривая, траектория точки M, которая движется вдоль луча OV со скоростью пропорциональной расстоянию OM, в то время как сам луч OV равномерно вращается вокруг O (Рис.44).

Логарифмическую спираль можно задать в полярных координатах уравнением $r = a^{\varphi}$. Различают спирали:

a) $r = a^{\varphi}$, $a > 1$, $\varphi \in [0, \infty)$ (Рис. 44-47).

b) $r = a^{\varphi}$, $0 < a < 1$, $\varphi \in [0, \infty)$ (Рис. 48-51).

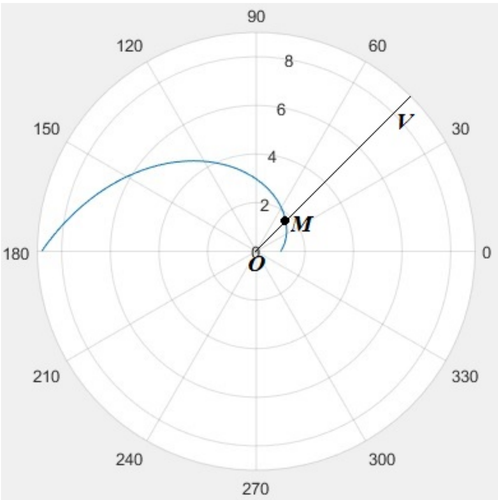


Рис.44. $r = 2^{\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$

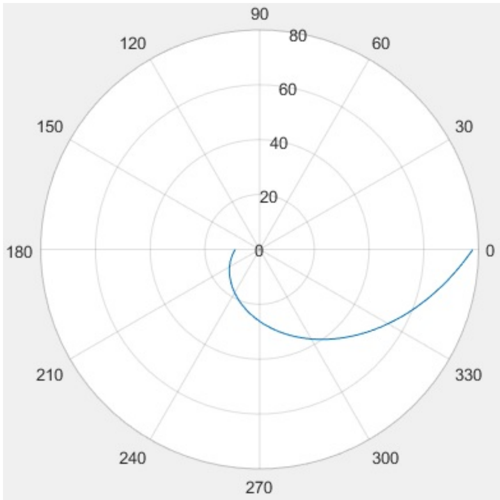


Рис.45. $r = 2^{\varphi}$, $\varphi \in [\pi, 2\pi]$

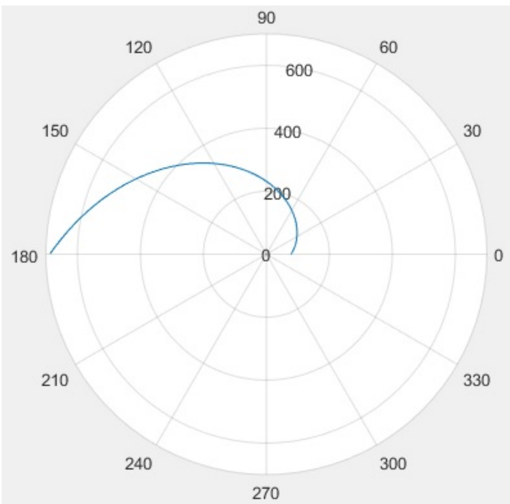


Рис.46. $r = 2^{\varphi}$, $\varphi \in [2\pi, 3\pi]$

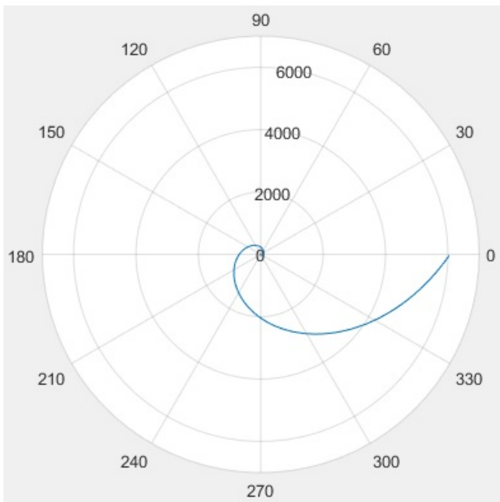


Рис.47. $r = 2^{\varphi}$, $\varphi \in [0, 4\pi]$

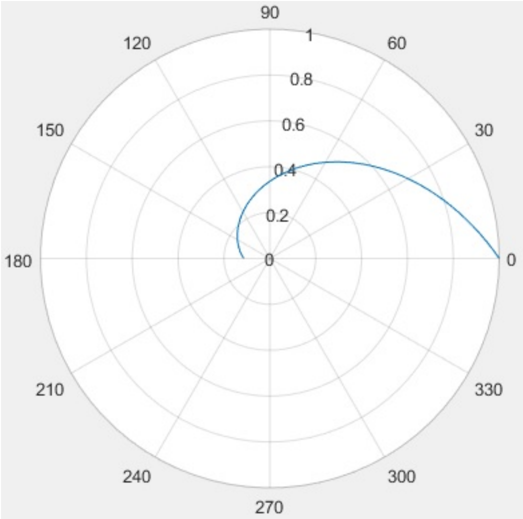


Рис.48.
$r = \left(\frac{1}{2}\right)^{\varphi}, \varphi \in [0, \pi]$

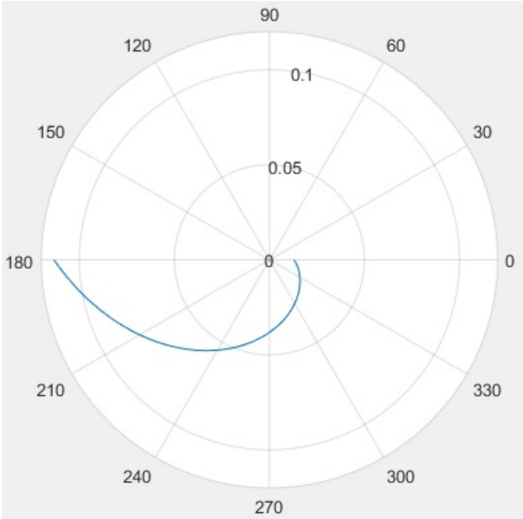


Рис.49.
$r = \left(\frac{1}{2}\right)^{\varphi}, \varphi \in [\pi, 2\pi]$

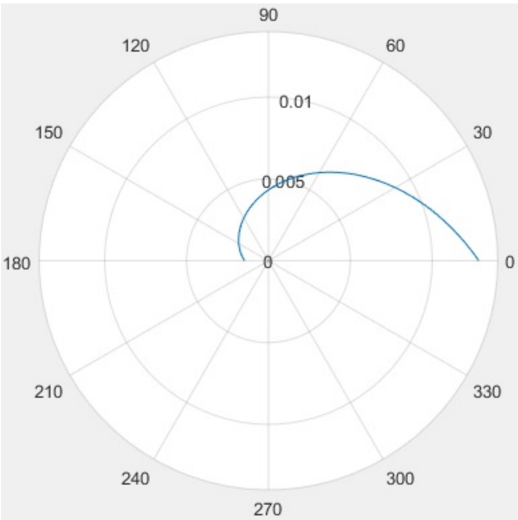


Рис.50.
$r = \left(\frac{1}{2}\right)^{\varphi}, \varphi \in [2\pi, 3\pi]$

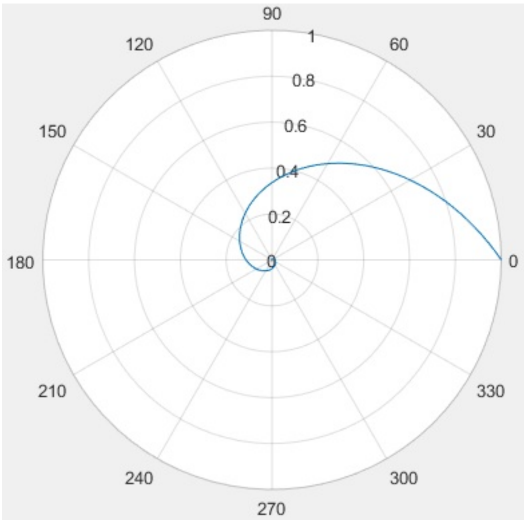


Рис.51.
$r = \left(\frac{1}{2}\right)^{\varphi}, \varphi \in [0, 4\pi]$

6. Астроида

Всякая точка M астроиды есть основание перпендикуляра $|PM|$ к отрезку $|AB|$ постоянной длины a, движущемуся так, что концы его все время находятся на координатных осях (Рис. 52).

Астроиду можно задать уравнением $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, параметрически: $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t, t \in [0, 2\pi] \end{cases}$
и в полярных координатах: $r = a\sqrt{\cos^6\varphi + \sin^6\varphi}$.

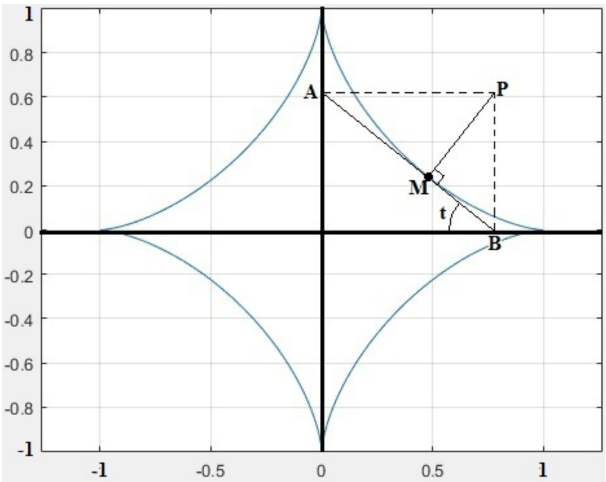


Рис.52. $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$

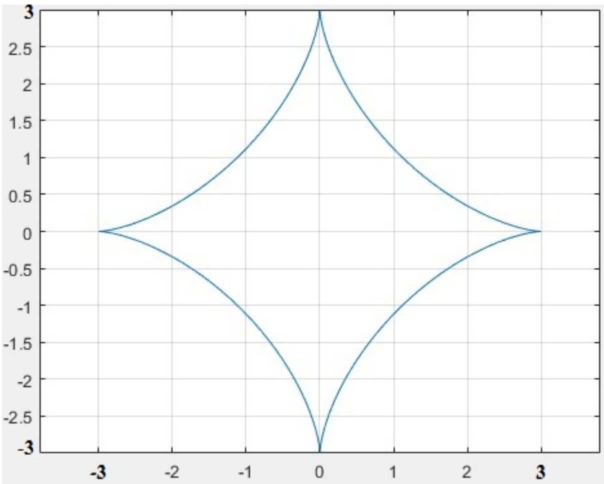


Рис.53. $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$

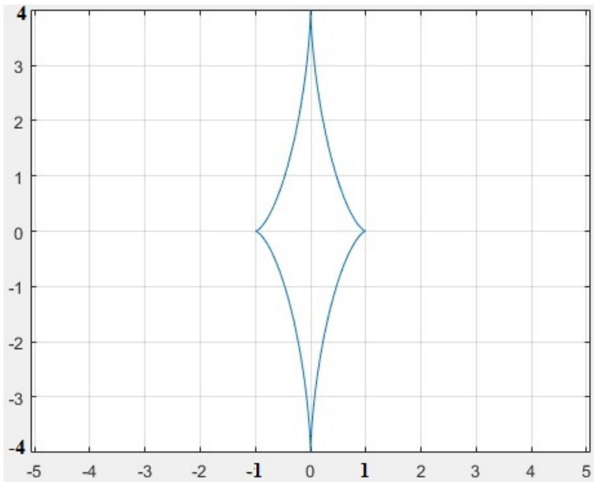


Рис.54. Кривая, заданная уравнением

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$$

7. Полярная роза

a) Всякая точка M четырехлепестковой розы есть основание перпендикуляра $|OM|$ к отрезку $|AB|$ постоянной длины $2a$, движущемуся так, что концы его все время находятся на координатных осях (Рис. 55).

Четырехлепестковую розу можно задать уравнением $(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$ или в полярных координатах $r = a|\sin 2\varphi|$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

b) Трехлепестковая роза: $r = a\sin 3\varphi$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi] \cup [\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ (Рис. 56).

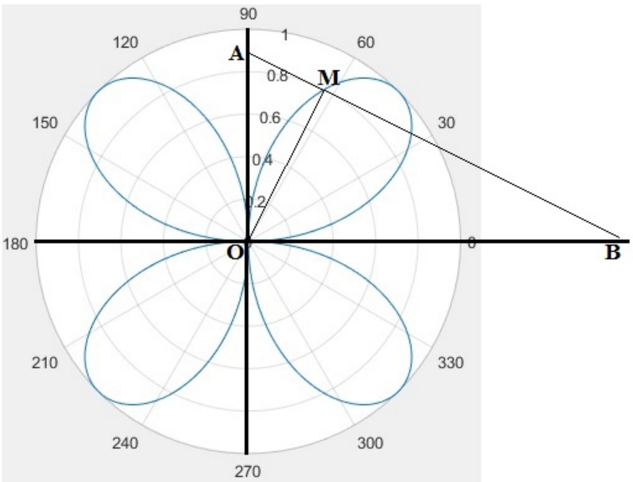


Рис.55. $r = |\sin 2\varphi|$

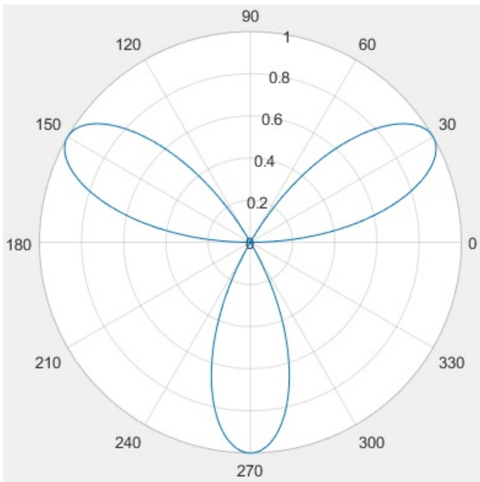


Рис.56. $r = \sin 3\varphi$

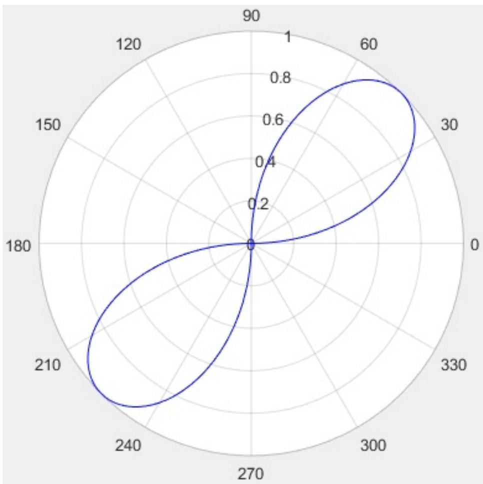


Рис.57. $r = \sin 2\varphi$
$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

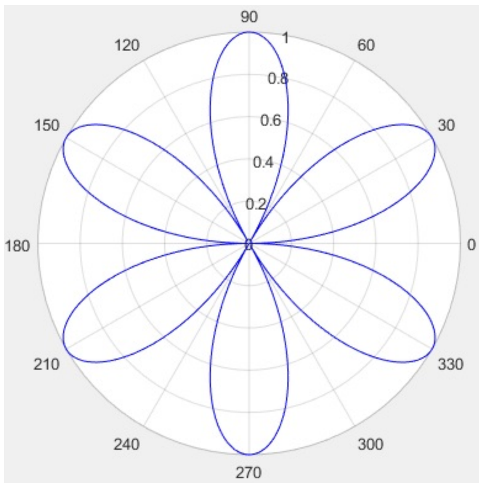


Рис.58. $r = |\sin 3\varphi|$
$\varphi \in [0, 2\pi]$

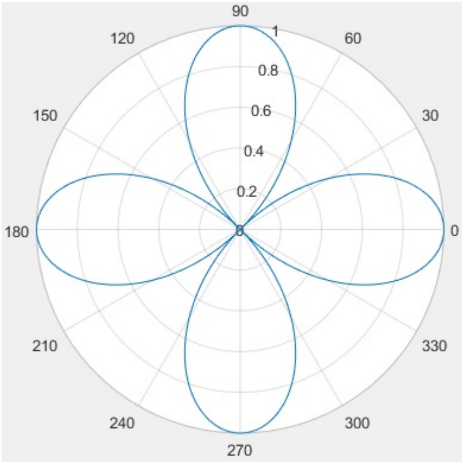


Рис.59. $r = |\cos 2\varphi|$

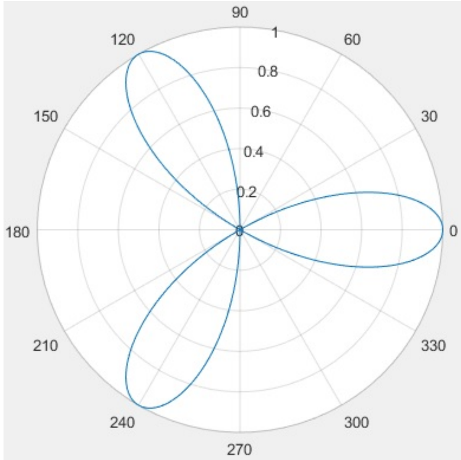


Рис.60. $r = \cos 3\varphi$

8. Лемниската Бернулли

Характеристическое свойство лемнискаты Бернулли: $|F_1M|\cdot|F_2M| = a^2$, где $F_1(-a,0)$, $F_2(a,0)$ (Рис. 64).

Лемнискату Бернулли можно задать уравнением $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$, в полярных координатах $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$ (Рис. 61-62). Параметрическое задание лемнискаты (Рис. 63-64): $\begin{cases} x = a\sqrt{2}\frac{t+t^3}{1+t^4} \\ y = a\sqrt{2}\frac{t-t^3}{1+t^4}, t \in (-\infty,\infty) \end{cases}$

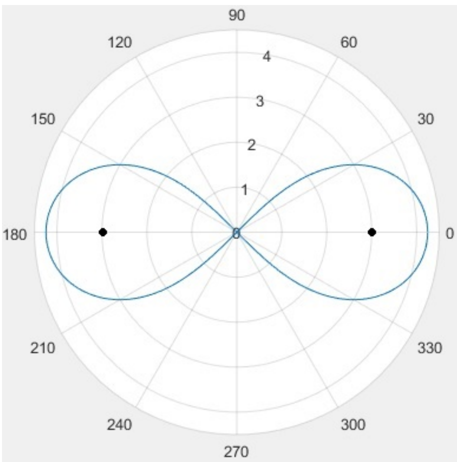


Рис.61. $r^2 = 18\cos 2\varphi$, $a = 3$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$

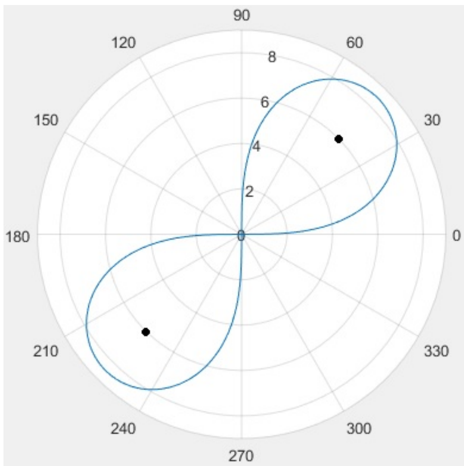


Рис.62. $r^2 = 72\sin 2\varphi$, $a = 6$, $\varphi \in [0,\frac{\pi}{2}] \cup [\pi,\frac{3\pi}{2}]$

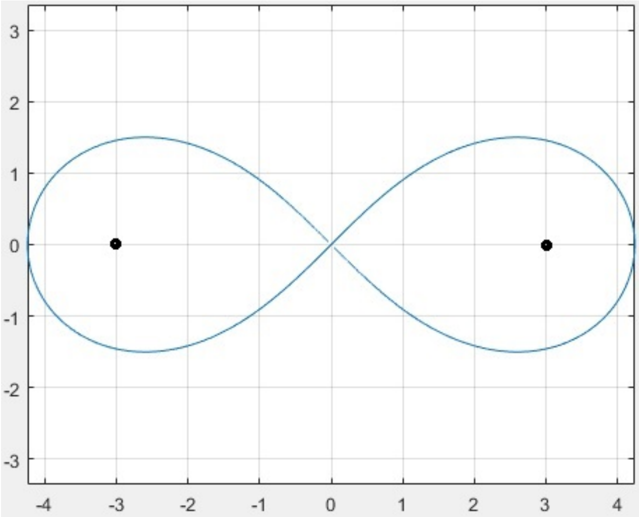


Рис.63. $\begin{cases} x = 3\sqrt{2}\frac{t+t^3}{1+t^4} \\ y = 3\sqrt{2}\frac{t-t^3}{1+t^4} \end{cases}, a = 3$

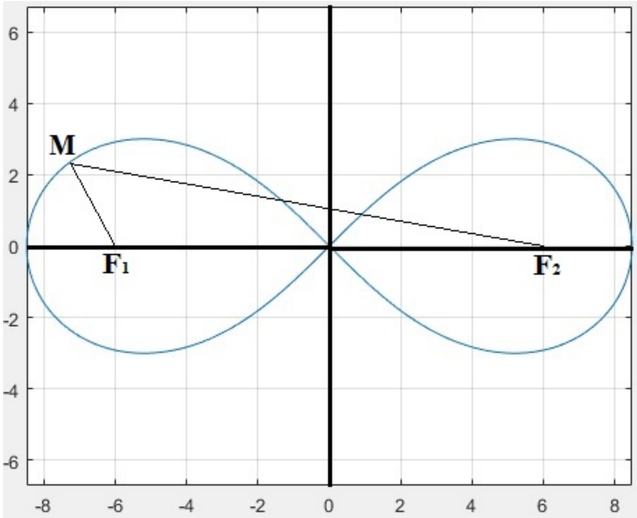


Рис.64. $\begin{cases} x = 6\sqrt{2}\frac{t+t^3}{1+t^4} \\ y = 6\sqrt{2}\frac{t-t^3}{1+t^4} \end{cases}, a = 6$

9. Улитка Паскаля. Кардиоида

9.1. Улитка Паскаля

Характеристическое свойство улитки Паскаля: для всякого луча, исходящего из точки O, $|BM| = |BN| = b$ (Рис. 67).

Улитку Паскаля можно задать уравнением $(x^2+y^2+2ax)^2 = b^2(x^2+y^2)$, в полярных координатах $r = 2a\cos\varphi \pm b$ (φ удовлетворяет условию $r(\varphi) \geqslant 0$). Параметрическое задание улитки:

$$\begin{cases} x = 2a\cos^2 t + b\cos t \\ y = 2a\sin t\cos t + b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

При этом начало координат является:

1) узловой точкой при $|2a| > |b|$ (Рис. 67).

2) точка возврата при $|2a| = |b|$ (в этом случае улитка Паскаля является кардиоидой) (Рис. 68).

3) двойной точкой при $|2a| < |b|$ (Рис. 69).

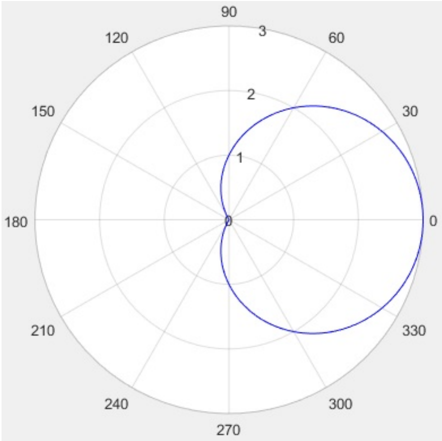


Рис.65. $r = 2\cos\varphi + 1$, $a = 1,\ b = 1,\ \varphi \in [-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}]$

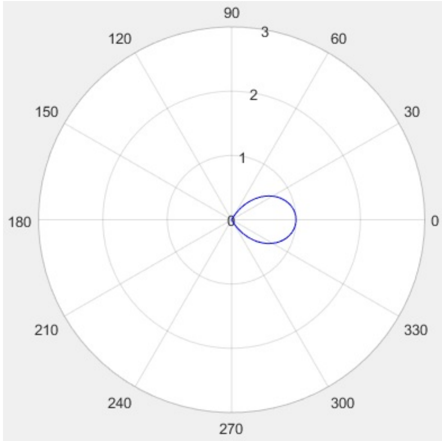


Рис.66. $r = 2\cos\varphi - 1$, $a = 1,\ b = 1,\ \varphi \in [-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$

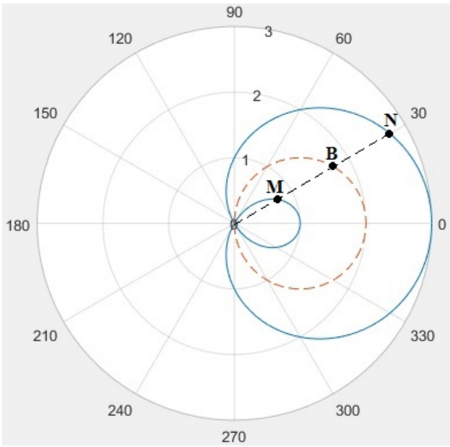


Рис.67. $r = 2\cos\varphi \pm 1$, $r = 2\cos\varphi$

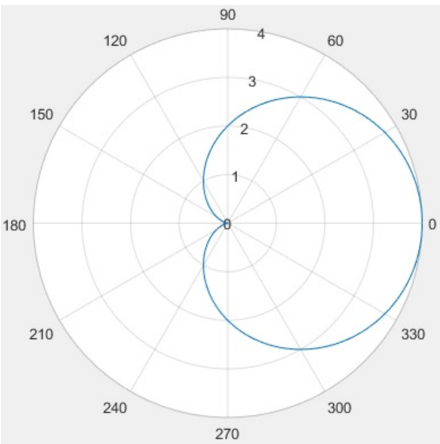


Рис.68. $r = 2\cos\varphi + 2$, $a = 1,\ b = 2$

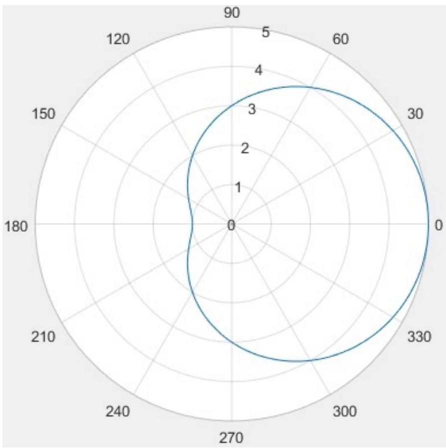


Рис.69. $r = 2\cos\varphi + 3$, $a = 1,\ b = 3$

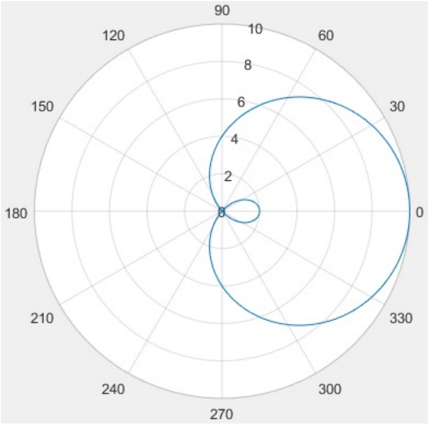


Рис.70. $r = 6\cos\varphi \pm 4$, $a = 3$, $b = 4$

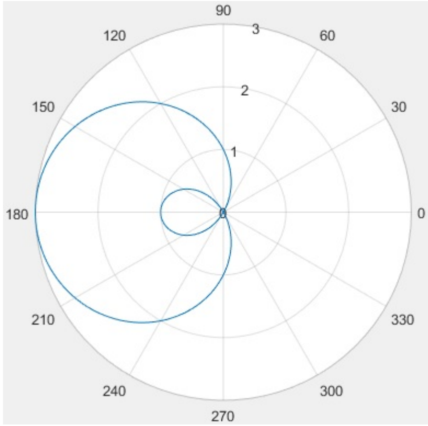


Рис.71. $r = -2\cos\varphi \pm 1$

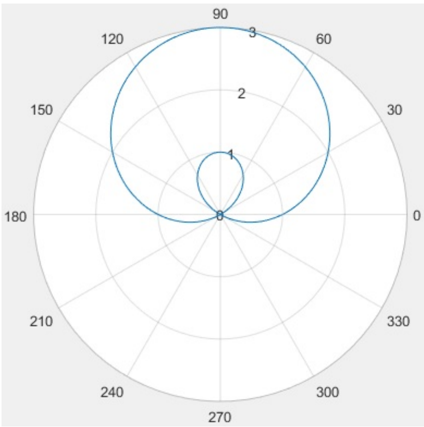


Рис.72. $r = 2\sin\varphi \pm 1$

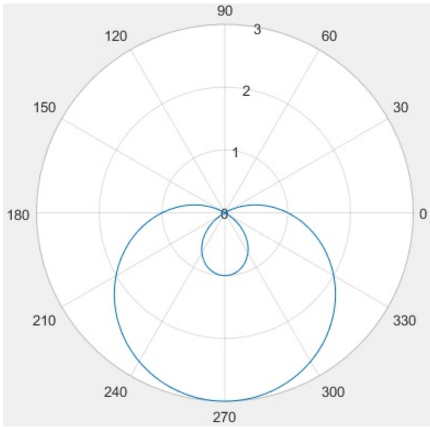
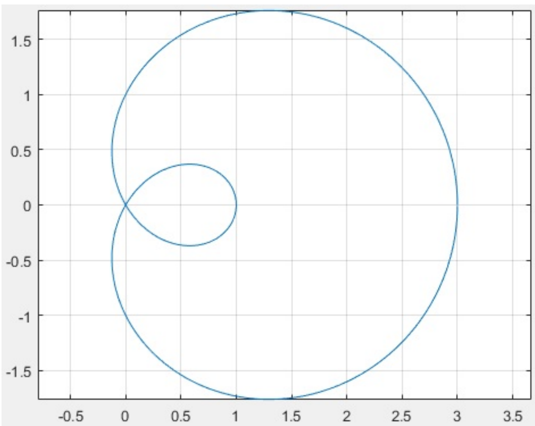
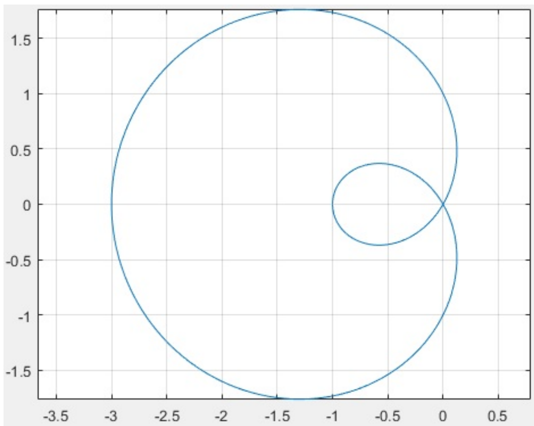


Рис.73. $r = -2\sin\varphi \pm 1$



$$\begin{cases} x = 2\cos^2 t + \cos t \\ y = 2\sin t\cos t + \sin t \end{cases}$$

Рис.74. $a = 1$, $b = 1$



$$\begin{cases} x = -2\cos^2 t + \cos t \\ y = -2\sin t\cos t + \sin t \end{cases}$$

Рис.75. $a = -1$, $b = 1$

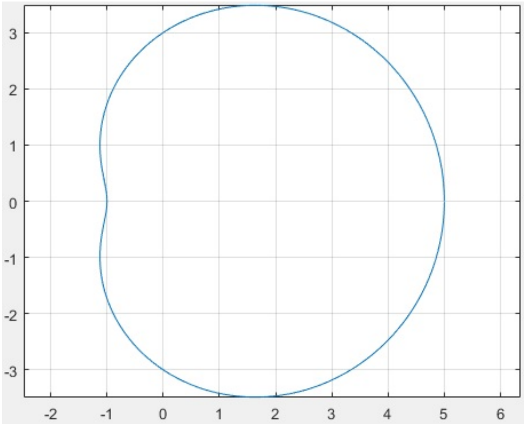


Рис.76. $\begin{cases} x = 2\cos^2 t + 3\cos t \\ y = 2\sin t\cos t + 3\sin t \end{cases}$, $a = 1$, $b = 3$

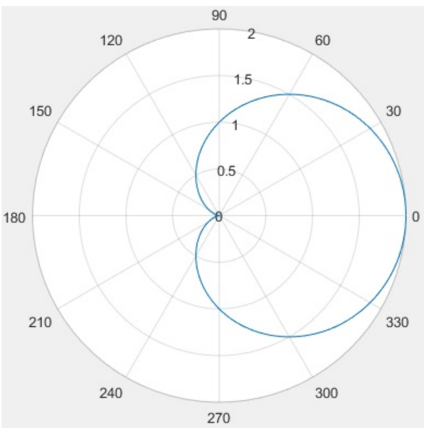
9.2. Кардиоида

Если $2a = b$, то имеем кардиоиду: $(x^2+y^2+2ax)^2 = 4a^2(x^2+y^2)$.

Уравнение кардиоиды в полярных координатах: $r = 2a(1+\cos\varphi)$, $r = 2a(1-\cos\varphi)$. Параметрические задания кардиоиды:

$$\begin{cases} x = a(2\cos t + \cos 2t) \\ y = a(2\sin t + \sin 2t), \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2a(\cos^2 t + \cos t) \\ y = 2a(\sin t\cos t + \sin t), \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$



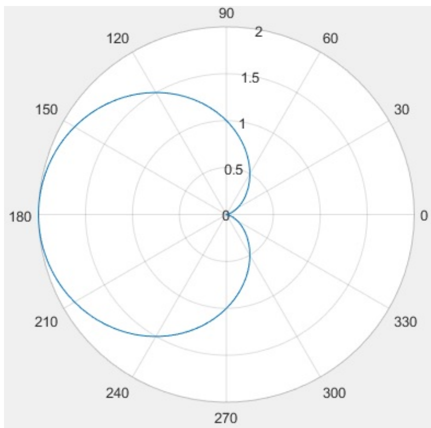


Рис.77. $r = 1 + \cos\varphi$, $a = \frac{1}{2}$ **Рис.78.** $r = 1 - \cos\varphi$, $a = \frac{1}{2}$

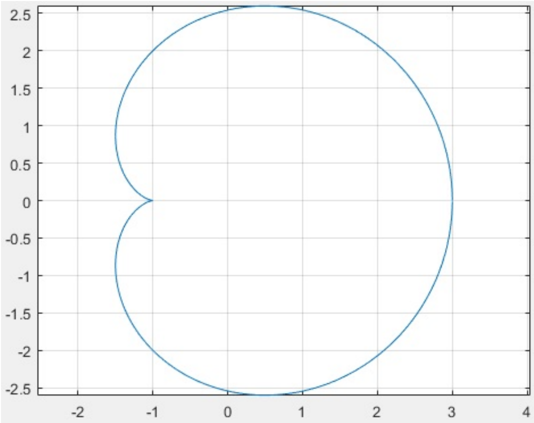


Рис.79.

$$\begin{cases} x = 2\cos t + \cos 2t \\ y = 2\sin t + \sin 2t \end{cases}, \ a = 1$$

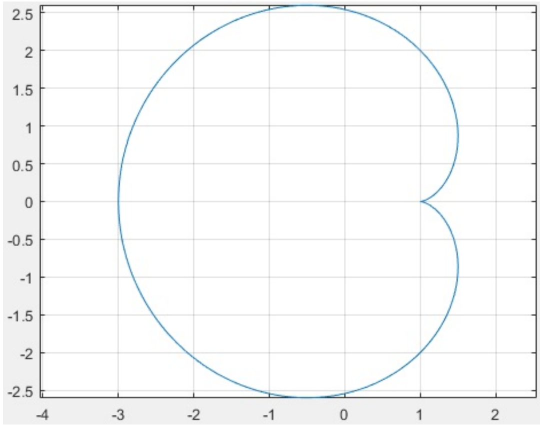


Рис.80.

$$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}, \ a = 1$$

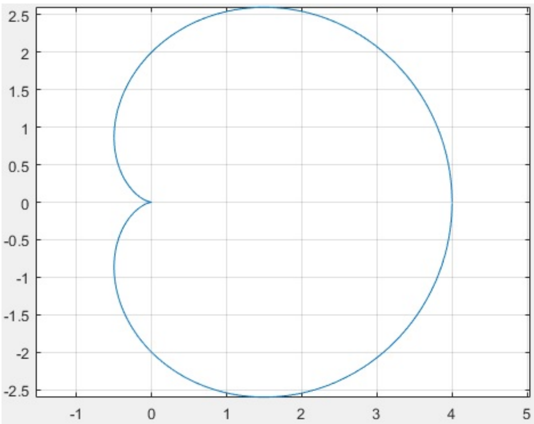


Рис.81. $\begin{cases} x = 2(\cos^2 t + \cos t) \\ y = 2(\sin t \cos t + \sin t) \end{cases}, \ a = 1$

10. Циклоида

Характеристическое свойство: кривая совпадает с траекторией точки M окружности радиуса a, которая катится без скольжения по оси Ox (в начальный момент времени точка M нахадится в начале координат) (Рис. 82).

Параметрические уравнения циклоиды:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \ \ t \in (-\infty, \infty) \end{cases}$$

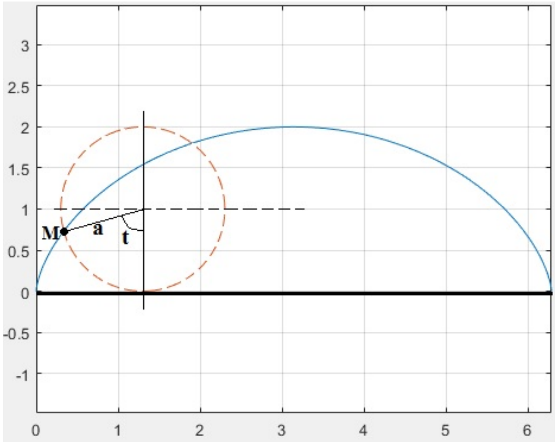


Рис.82. $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $a = 1$, $t \in [0, 2\pi]$

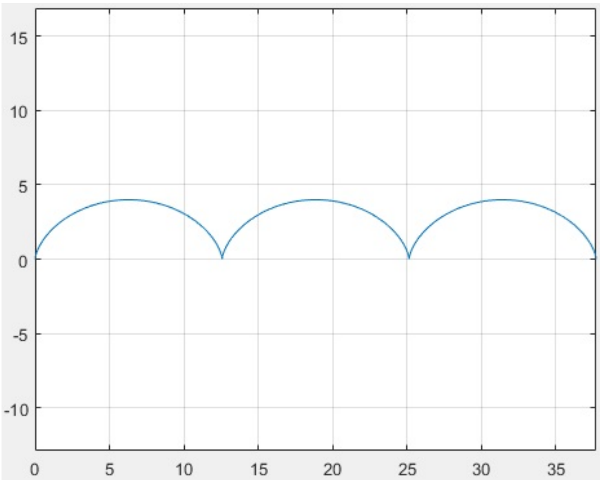


Рис.83. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$

$a = 2$, $t \in [0, 6\pi]$

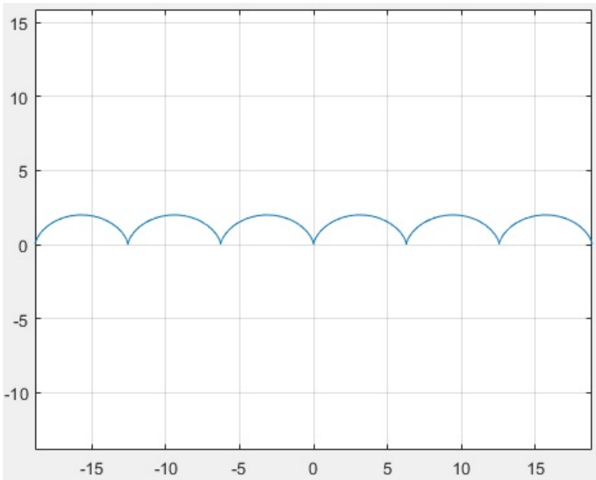


Рис.84. $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

$a = 1$, $t \in [-6\pi, 6\pi]$

11. Эвольвента (развертка) окружности

Каждая точка M этой кривой есть конец нити, которая, оставаясь натянутой, разматывается с окружности $x^2 + y^2 = a^2$ (Рис. 85). Параметрические уравнения эвольвенты:

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t), \quad t \in [0, \infty] \end{cases}$$

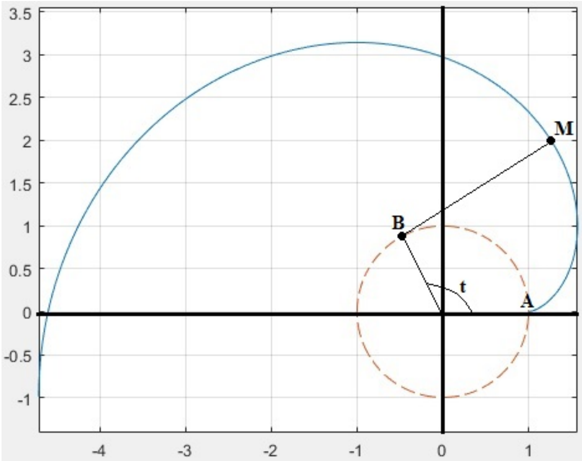


Рис.85. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$, $a = 1$, $t \in [0, \frac{3\pi}{2}]$

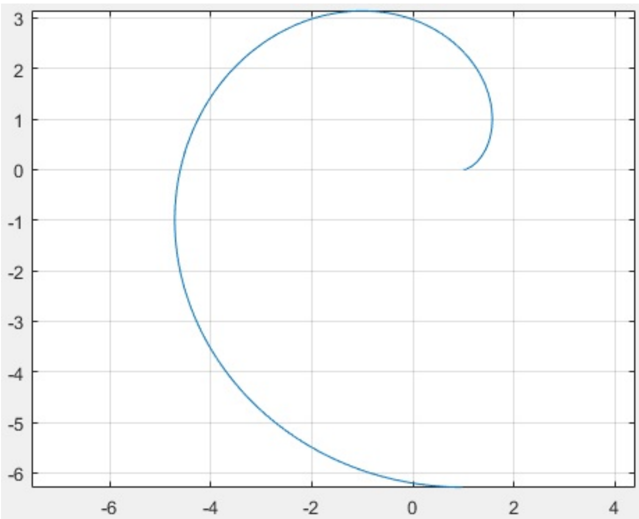


Рис.86. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$
$a = 1$, $t \in [0, 2\pi]$

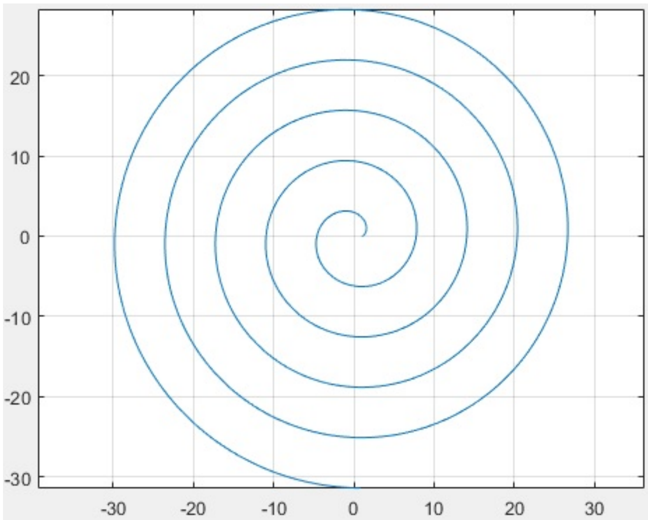


Рис.87. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$
$a = 1$, $t \in [0, 10\pi]$

12. Верзьера Аньези (локон Аньези)

Верзьера Аньези - плоская кривая, геометрическое место точек M, для которых выполнено соотношение: $\frac{BM}{BC} = \frac{OA}{OB}$, где OA – диаметр окружности, BC – полухорда этой окружности, перпендикулярная OA (Рис. 88).

Уравнение верзьеры Аньези: $y = \frac{a^3}{a^2+x^2}$

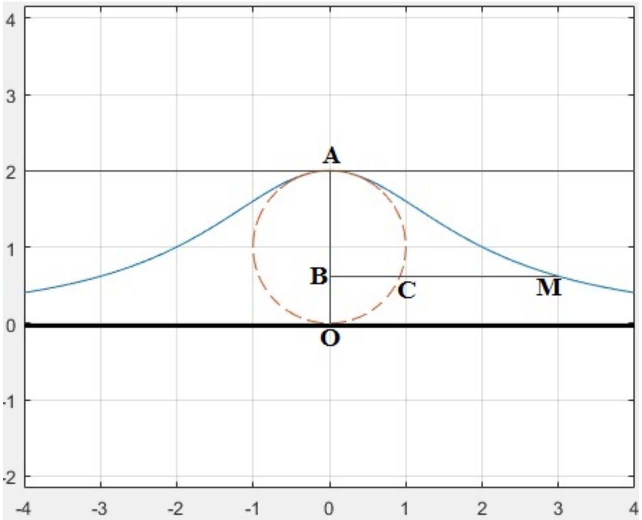


Рис.88. $y = \frac{8}{4+x^2}$
$a = 2$, $t \in [-4, 4]$

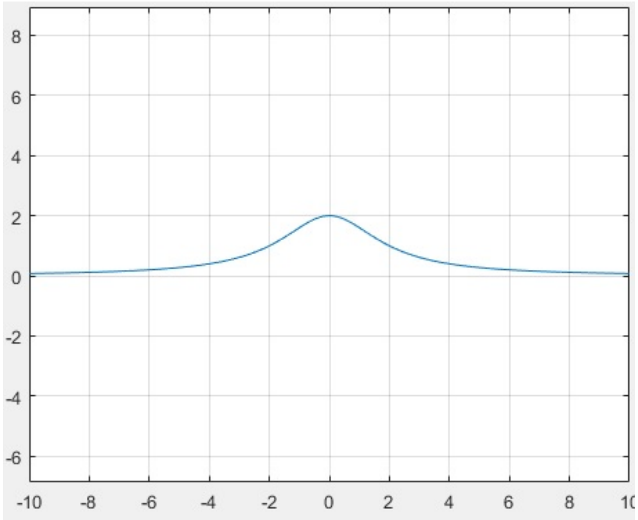


Рис.89. $y = \frac{8}{4+x^2}$
$a = 2$, $t \in [-10, 10]$

13. Декартов лист

Декартов лист - линия, которая состоит из петли и двух бесконечных ветвей (Рис. 90). Декартов лист можно задать уравнением $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ или в полярных координатах $r = \frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$.

Параметрические уравнения: $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad \text{где } t = \mathrm{tg}\varphi \end{cases}$

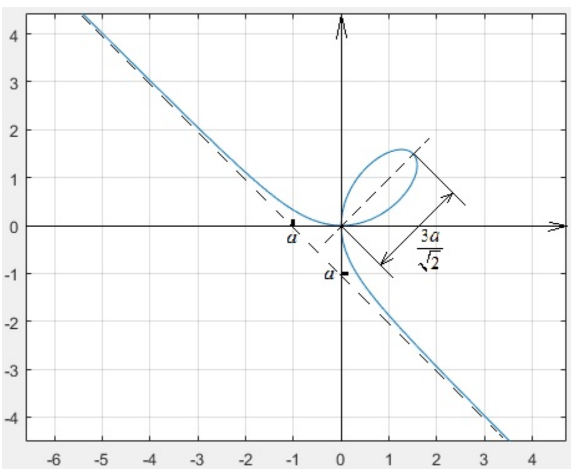
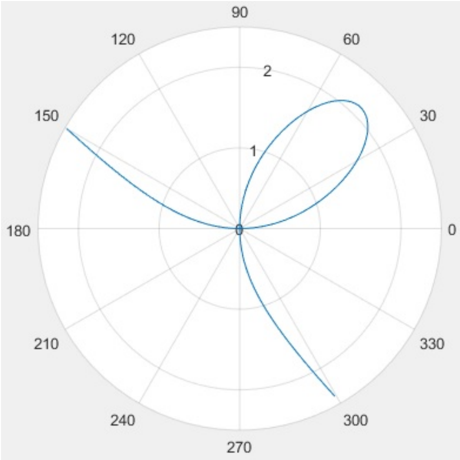


Рис.90. $a = 1$



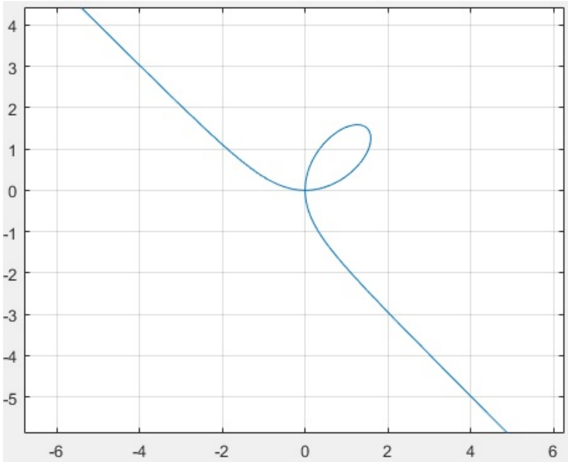
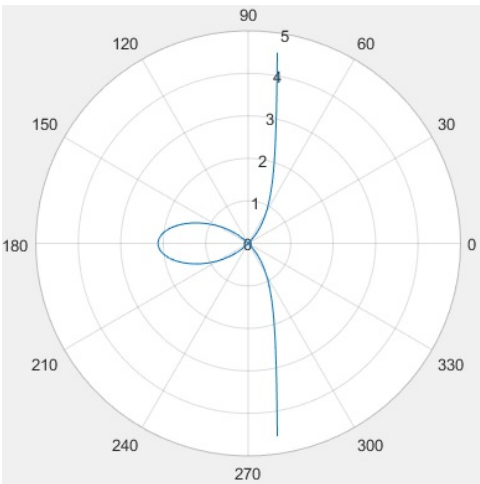


Рис.91. $r = \frac{3\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$, $a = 1$ **Рис.92.** $\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3}, \end{cases}$ $a = 1$

13.1. Декартов лист, повернутый на 135°

Уравнение кривой, повернутой на 135°, можно задать в прямоугольной системе $y = \pm x\sqrt{\frac{l+x}{l-3x}}$, где $l = \frac{3a}{\sqrt{2}}$, или в полярных координатах $r = \frac{l(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)}{\cos\varphi(\cos^2\varphi+3\sin^2\varphi)}$.

Параметрические уравнения: $\begin{cases} x = l\frac{t^2-1}{3t^2+1} \\ y = l\frac{t(t^2-1)}{3t^2+1}. \end{cases}$



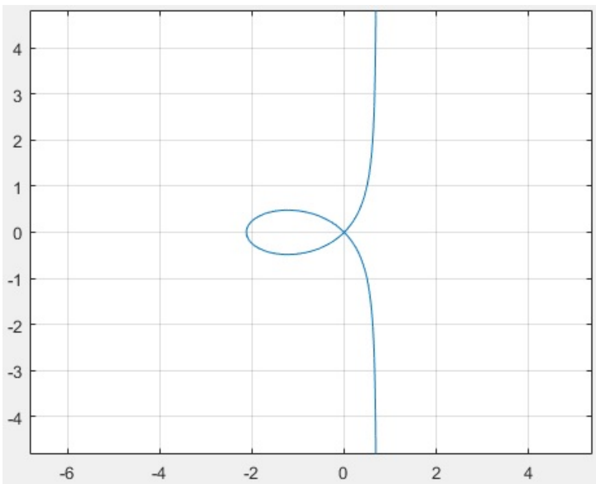


Рис.93. $a = 1$ **Рис.94.** $a = 1$

14. Эпициклоида

Эпициклоида - кривая, совпадающая с траекторией точки M окружности радиуса a, которая катится без скольжения по окружности $x^2+y^2=b^2$, оставаясь вне ее (в начальный момент точка M находится в точке с координатой $(b,0)$) (Рис. 95). В частном случае, если $a=b$, то кривая совпадает с кардиоидой.

Уравнение эпициклоиды:

$$\begin{cases} x=(a+b)\cos t - a\cos\frac{a+b}{a}t \\ y=(a+b)\sin t - a\sin\frac{a+b}{a}t, \quad t\in[0,2\pi] \end{cases}$$

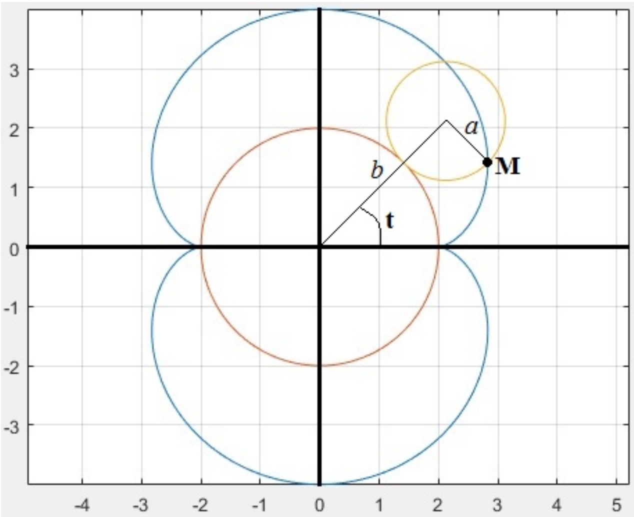


Рис.95. $a=1$, $b=3$

$$\begin{cases} x=3\cos t-\cos(3t) \\ y=3\sin t-\sin(3t) \end{cases}$$

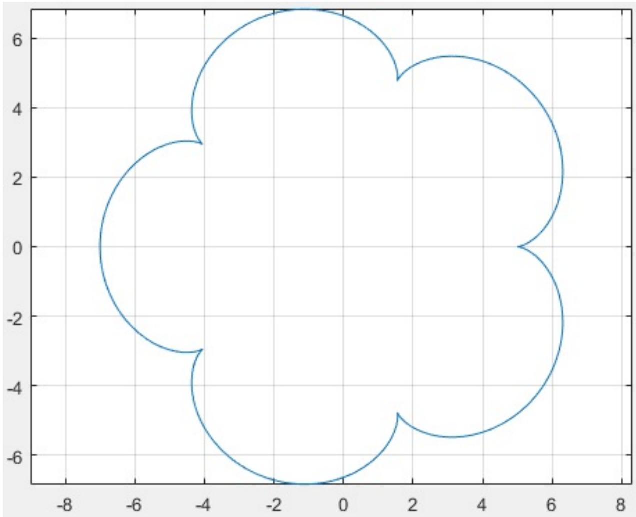


Рис.96. $a=1$, $b=6$

$$\begin{cases} x=6\cos t-\cos(6t) \\ y=6\sin t-\sin(6t) \end{cases}$$

15. Гипоциклоида

Гипоциклоида - кривая, совпадающая с траекторией точки M окружности радиуса a, которая катится без скольжения по окружности $x^2+y^2=b^2$, оставаясь внутри нее (в начальный момент точка M находится в точке с координатой $(b,0)$) (Рис. 97). В частном случае, если $a=\frac{b}{4}$, то кривая совпадает с астроидой.

Уравнение гипоциклоиды:

$$\begin{cases} x = (b-a)\cos t + a\cos\frac{b-a}{a}t \\ y = (b-a)\sin t - a\sin\frac{b-a}{a}t, \ \ t\in[0,2\pi] \end{cases}$$

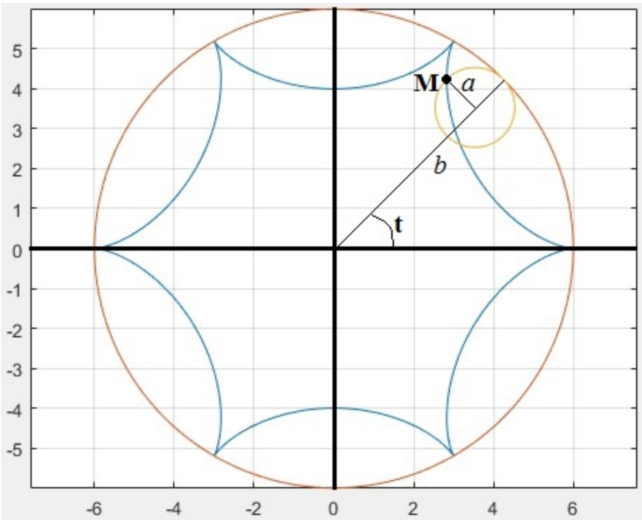


Рис.97. $a=1,\ b=6$

$$\begin{cases} x = 5\cos t + \cos(5t) \\ y = 5\sin t - \sin(5t) \end{cases}$$

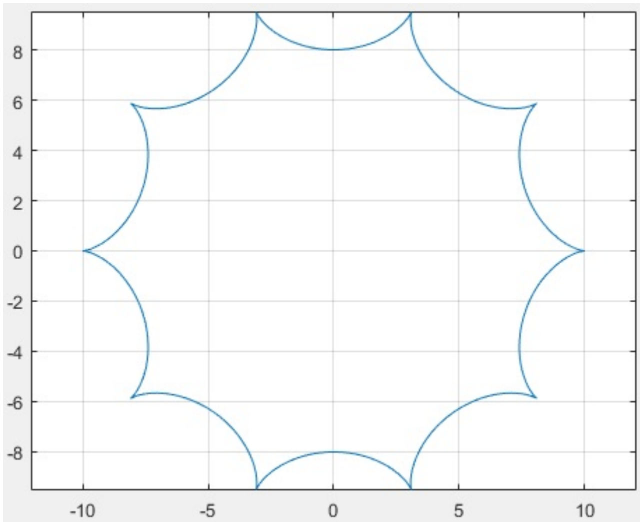


Рис.98. $a=1,\ b=10$

$$\begin{cases} x = 9\cos t + \cos(9t) \\ y = 9\sin t - \sin(9t) \end{cases}$$

16. Конхоида

Характеристическое свойство конхоиды: для всякого луча, исходящего из точки $O(0,0)$, $|BM| = |BN| = b$ (Рис. 101).

Конхоиду можно задать уравнением $x^2y^2 + (x+a)^2(x^2 - b^2) = 0$ или в полярных координатах $r = \frac{a}{\cos\varphi} \pm b$. Прямая $x = a$ ($r = \frac{a}{\cos\varphi}$) является ассимптотой для обеих ветвей конхоиды.

Параметрические уравнения конхоиды: $x = a \pm b\cos t$, $y = a\ \mathrm{tg} t \pm b\sin t$.

Форма конхоиды зависит от параметров a и b. 1) Если $a > b$, то внутренняя ветвь конхоиды имеет петлю в точке $O(0,0)$ (Рис. 102); 2) если $a = b$, петля внутренней ветви стягивается в точку (Рис. 103); 3) если $a < b$, то внутренняя ветвь не проходит через точку $O(0,0)$ (Рис. 101).

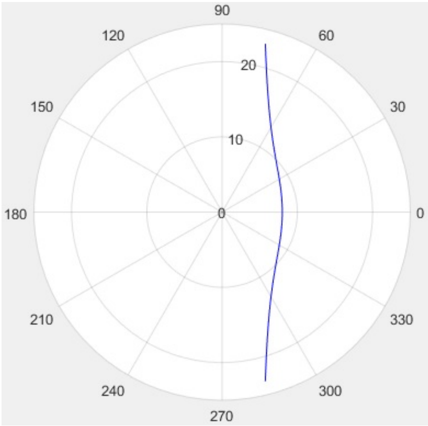


Рис.99. $r = \frac{5}{\cos\varphi} + 3$, $a = 5$, $b = 3$

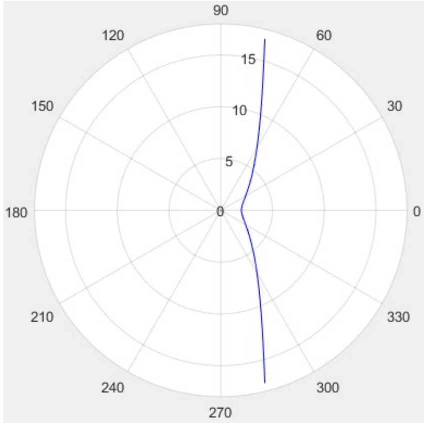


Рис.100. $r = \frac{5}{\cos\varphi} - 3$, $a = 5$, $b = -3$

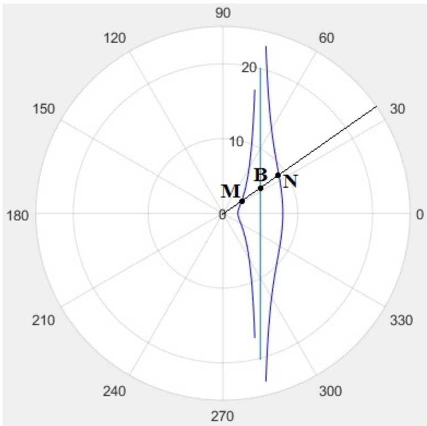


Рис.101. $r = \frac{5}{\cos\varphi} \pm 3$, $r = \frac{5}{\cos\varphi}$

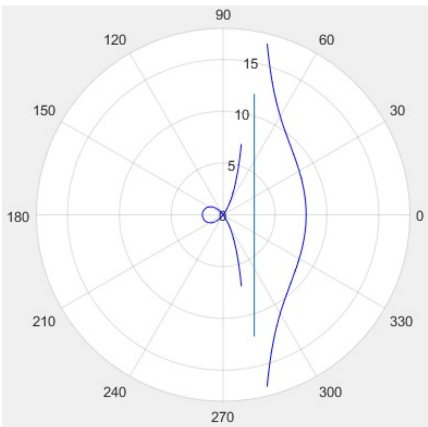


Рис.102. $r = \frac{3}{\cos\varphi} \pm 5$, $r = \frac{3}{\cos\varphi}$, $a = 3$, $b = \pm 5$

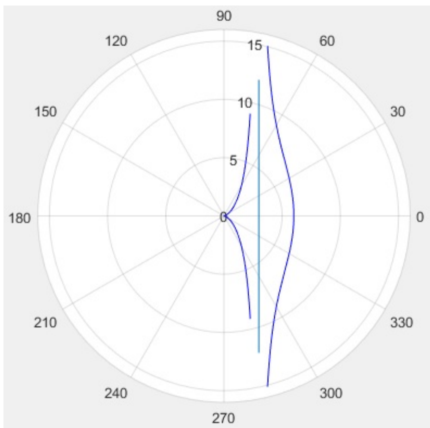


Рис.103. $r = \frac{3}{\cos\varphi} \pm 3$, $r = \frac{3}{\cos\varphi}$, $a = 3$, $b = \pm 3$

17. Циссоида

Характеристическое свойство циссоиды: для всякого луча, исходящего из $O(0,0)$, $|OM| = |BC|$ (Рис. 104).

Циссоиду можно задать уравнением: $y^2(2a - x) = x^3$ или в полярных координатах $r = 2a\mathrm{tg}\varphi\sin\varphi$.

Параметрические уравнения циссоиды: $x = \frac{2a}{1+u^2}$, $y = \frac{2a}{u(1+u^2)}$, где $u = \mathrm{tg}t$.

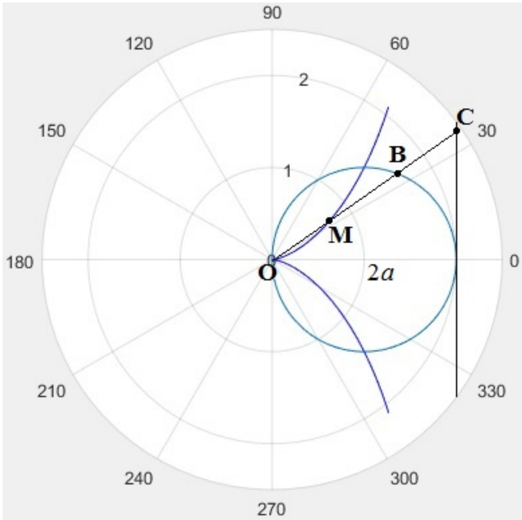


Рис.104. $r = 2\mathrm{tg}\varphi\sin\varphi$, $r = 2\cos\varphi$, $r = \frac{2}{\cos\varphi}$

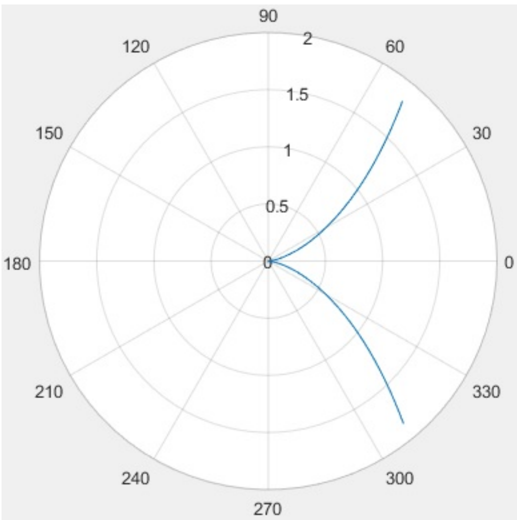


Рис.105. $r = 2\mathrm{tg}\varphi\sin\varphi$

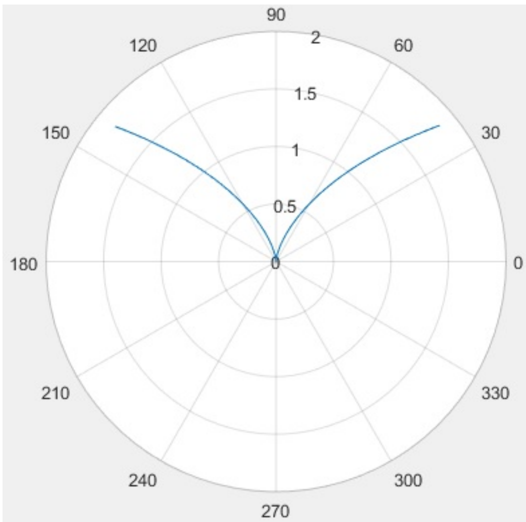


Рис.106. $r = 2\mathrm{ctg}\varphi\cos\varphi$

18. Прямая

Все точки прямой линии обладают следующим свойством: проекция на ось n отрезка OM, проведенного из полюса O в точку M прямой, равна a (Рис. 107).

Прямую можно задать уравнением $r = \frac{a}{\cos(\varphi-\alpha)}$, где a - расстояние от полюса, α - угол между полярной осью и осью n, проходящей через полюс, перпендикулярно к прямой.

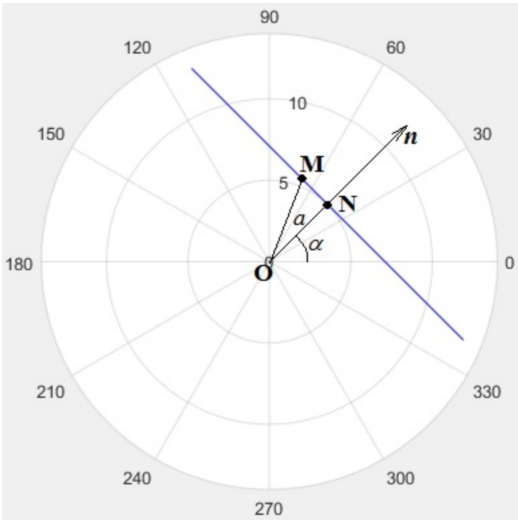


Рис.107. $r = \frac{5}{\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})}$

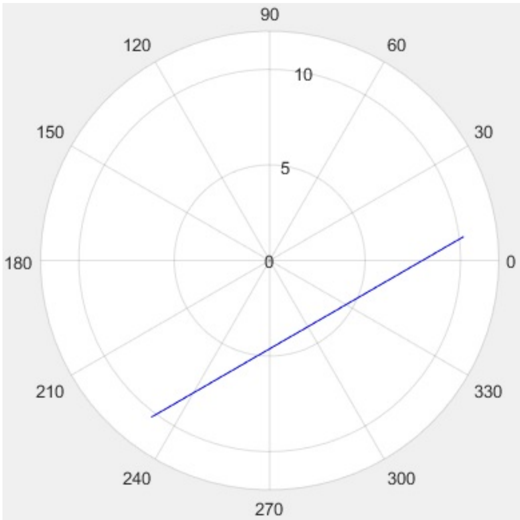


Рис.108. $r = \frac{4}{\cos(\varphi+\frac{\pi}{3})}$

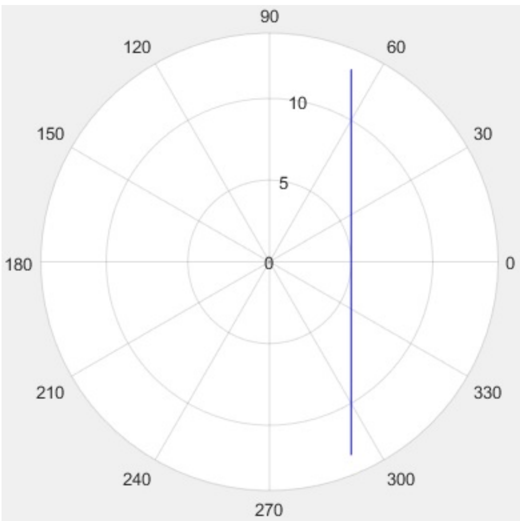


Рис.109. $r = \frac{5}{\cos\varphi}$

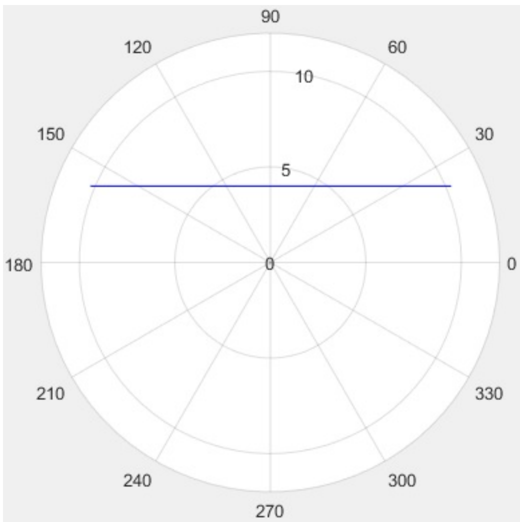


Рис.110. $r = \frac{4}{\sin\varphi}$

18.1. Прямая, проходящая через полюс

Прямую проходящую через полюс можно задать уравнением (Рис. 111):

$$\begin{cases} r = 0 \\ r > 0, \varphi = \alpha (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi) \\ r > 0, \varphi = \alpha + \pi \end{cases}$$

где α - угол между прямой и полярной осью.

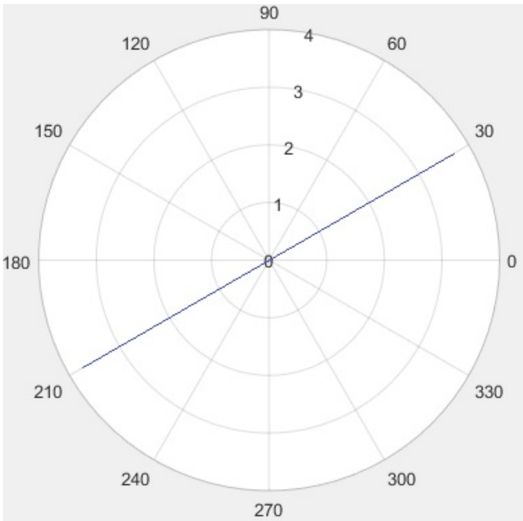


Рис.111. $\begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{6} \\ \varphi = \frac{7\pi}{6} \\ r = 0 \end{cases}$

Задачи

2.1. В полярной системе координат написать уравнение окружности с радиусом a, если:
1) центр окружности находится в полюсе;
2) полюс лежит на окружности, а полярная ось проходит через центр окружности.

2.2. Найти радиус окружностей: 1) $r = 8 \sin \varphi$, 2) $r = \cos \varphi + \sin \varphi$, 3) $r = 10 \cos \varphi + 5 \sin \varphi$.

2.3. Написать параметрические уравнения окружности с центром в начале координат и радиусом 5.
2.4. Написать уравнение эллипса с полуосями $a = 7$, $b = 3$:
1) параметрическое (центр эллипса находится в точке (0,0)),
2) в полярной системе координат (фокус эллипса находится в полюсе).
2.5. Какой диапазон параметра φ соответствует тому, что спираль Архимеда $r = \varphi$ сделает четыре первых полных оборота?
2.6.Точки $A(5, 0)$ и $B(0, 5)$ принадлежат астроиде, симметричной относительно осей Ox и Oy. Написать ее параметрические уравнения.
2.7. Сколько лепестков имеет полярная роза: 1) $r = \cos 11\varphi$, 2) $r = |\sin 20\varphi|$?
2.8. Найти координаты пересечения полярной розы $r = 11\cos(7\varphi)$ с полярной осью.
2.9. Найти координаты фокусов лемнискаты Бернулли: 1) $r^2 = 4^2\cos(2\varphi)$, 2) $r^2 = 4^2\sin(2\varphi)$.
2.10. Написать полярное уравнение кардиоиды, содержащей точки: 1) $(4, 0)$; 2) $(4, \pi)$.
2.11. Одна арка циклоиды опирается на отрезок длиной 4π. Написать ее параметрические уравнения.
2.12. Написать уравнение эпициклоиды, если $a = 10$, $b = 2$.
2.13. Написать уравнение гипоциклоиды, если $a = 10$, $b = 2$.
2.14. Написать в полярных координатах уравнение прямой, проходящей через точку с координатами: 1) $A(2, 0)$ (перпендикулярно полярной оси), 2) $B(2, \pi)$ (перпендикулярно полярной оси), 3) $C(2, \frac{\pi}{2})$ (параллельно полярной оси), 4) $D(2, \frac{3\pi}{2})$ (параллельно полярной оси).

ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ
ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

1. Площадь плоской фигуры

1.1. Для функций, заданных в явном виде

Площадь фигуры, ограниченной графиком непрерывной функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $y = b$ и горизонтальной осью, может быть найдена по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Площадь фигуры, ограниченной непересекающимися графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$, $y = b$ может быть найдена по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx$$

1.2. Для функций, заданных параметрически

Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox может быть найдена по формуле:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$$

где пределы интегрирования находятся из уравнений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$ $(y(t) \geqslant 0$ при $[t_1, t_2])$.

1.3. Для фунций, заданных в полярных координатах

В полярных координатах площадь, ограниченная графиком функции $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi$$

2. Длина дуги плоской кривой

2.1. Для функций, заданных в явном виде

Длина дуги кривой, заданной уравнением $y = f(x)$ вычисляется по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

где a и b - абсциссы концов дуги.

2.2. Для функций, заданных параметрически

Длина дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$ вычисляется по формуле:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} dt$$

2.3. Для фунций, заданных в полярных координатах

Длина дуги кривой, заданной в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $(\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta)$ вычисляется по формуле:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

Пример 1. Найти площадь петли кривой $x = \frac{1}{3}t(t^2 - 3)$, $y = t^2$.

Решение.

Если $t = \sqrt{3}$, то $x = 0$, $y = 3$. Если $t = -\sqrt{3}$, то $x = 0$, $y = 3$. Значит, $(0, 3)$ является точкой самопересечения кривой (Рис. 112). Причем значения x возрастают с ростом значений параметра t. Найдем площадь:

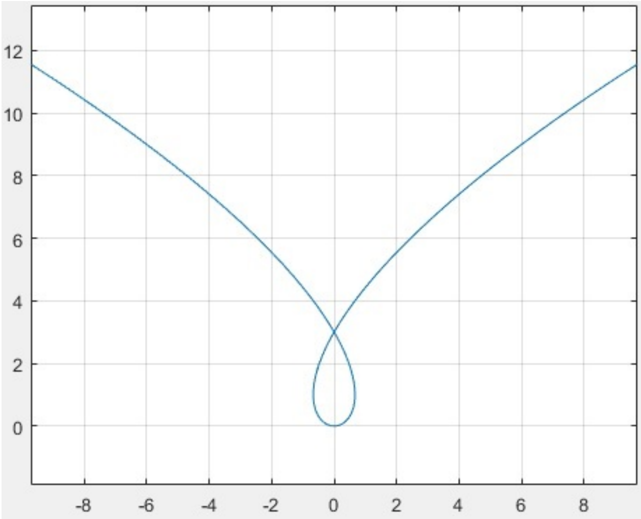


Рис.112. $x = \frac{1}{3}t(t^2-3)$, $y = t^2$

$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} y(t)x'(t)dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} t^2(\frac{1}{3}t(t^2-3))'dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} t^2(t^2-1)dt = (\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5})|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{5}$.

Пример 2. Найти площадь одного лепестка кривой $r = \sin 3\varphi$.

Решение. φ принимает значения $\varphi \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi] \cup [\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ (Рис. 113). Для одного лепестка $\varphi \in [0, \frac{\pi}{3}]$. Найдем площадь:

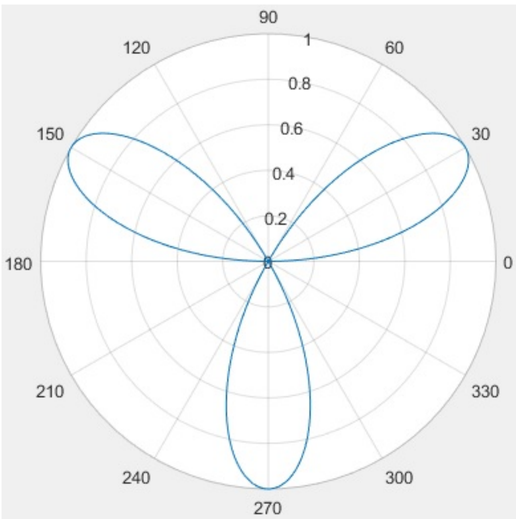


Рис.113. $r = \sin 3\varphi$

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\varphi d\varphi = \frac{1}{4}(\varphi - \frac{1}{6}\sin(6\varphi))|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12}.$$

Пример 3. Найти длину дуги циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ (Рис. 114).

Решение.

$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(2(t - \sin t))'^2 + (2(1 - \cos t))'^2} dt =$
$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(2 - 2\cos t)^2 + (2 \sin t)^2} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt =$
$= -8 \cos \frac{t}{2} |_0^{2\pi} = 16$

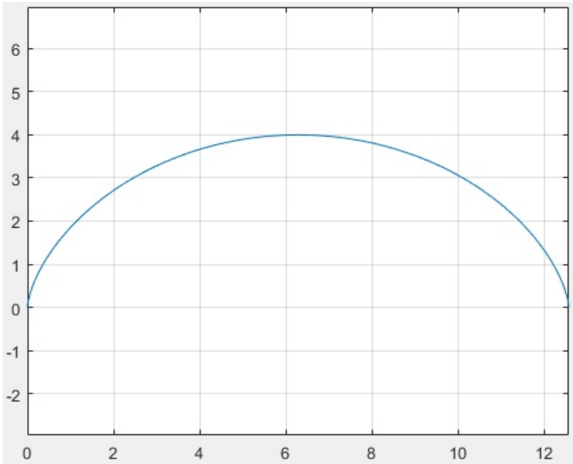


Рис.114. $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$

Пример 4. Найти длину дуги $r = \varphi^2$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$.

Решение. (Рис. 115). $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi =$
$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^4 + 4\varphi^2} d\varphi = \frac{(\varphi^2+4)^{\frac{3}{2}}}{3} |_0^{2\pi} = \frac{8}{3}((\pi^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 1).$

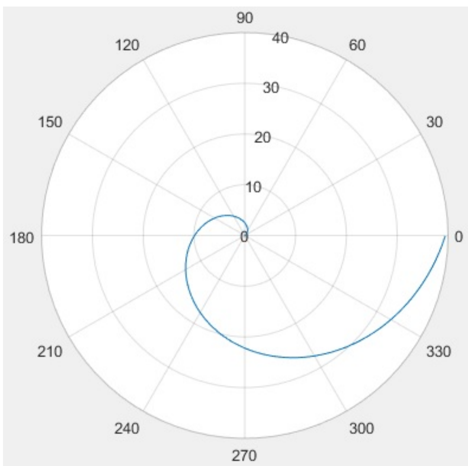


Рис.115. $r = \varphi^2$

Задачи

3.1. Найти площадь петли кривой $x = t^2 - 1$, $y = 4t - t^3$.
3.2. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностями $r = \cos\varphi$, $r = \sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.
3.3. Найти площадь фигуры, органиченной астроидой $x = \cos^3\varphi$, $y = \sin^3\varphi$.
3.4. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ и осью Ox.
3.5. Найти площадь петли кривой $x = t(2 - t)$, $y = t^2(2 - t)$.
3.6. Найти площадь одного лепестка кривой $r = |\cos 2\varphi|$.
3.7. Найти длину дуги кривой $x = 3\cos t - \cos 3t$, $y = 3\sin t - \sin 3t$ от $t = 0$ до π.
3.8. Найти длину дуги циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.
3.9. Найти длину петли кривой $x = t^2 + 1$, $y = \frac{1}{3}t(t^2 - 3)$.
3.10. Найти длину дуги кардиоиды $r = 1 - \cos\varphi$.

РАЗНЫЕ КРИВЫЕ

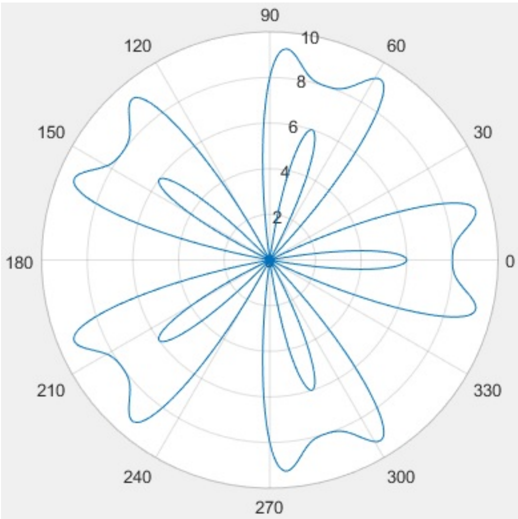


Рис.116. $r = 1 + 7\cos(5\varphi) + $
$+4\sin^2(5\varphi) + 3\sin^4(5\varphi)$

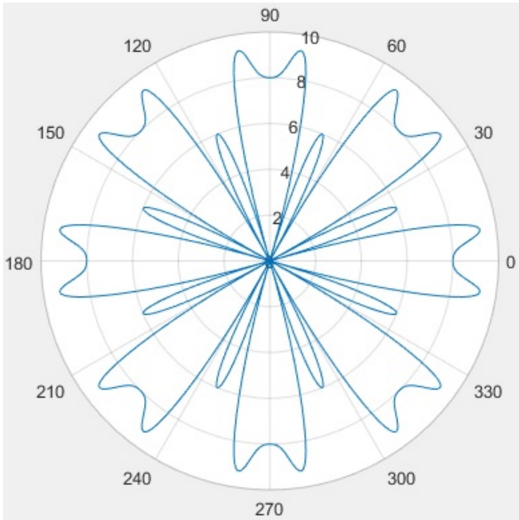


Рис.117. $r = 1 + 7\cos(8\varphi) + $
$+4\sin^2(8\varphi) + 3\sin^4(8\varphi)$

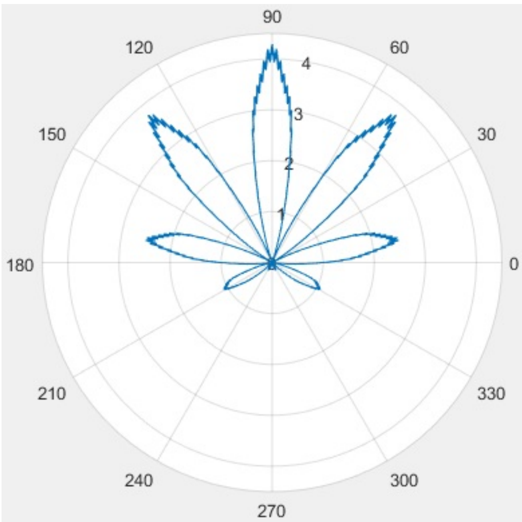


Рис.118.

$$r = (1 + \sin(9\varphi))(1 + \sin\varphi)\times$$
$$\times(1 + 0.03\sin(9 \times 5\varphi))\times$$
$$\times(1 + 0.04\sin(9 \times 33\varphi))$$

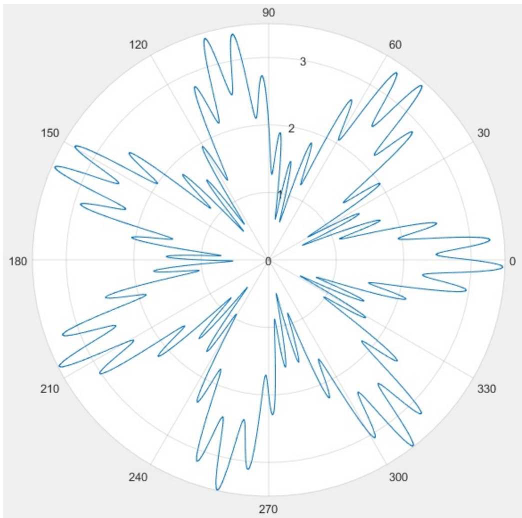


Рис.119.

$$r = 2 - \tfrac{1}{2}\sin(50\varphi) +$$
$$+\cos(7\varphi)$$

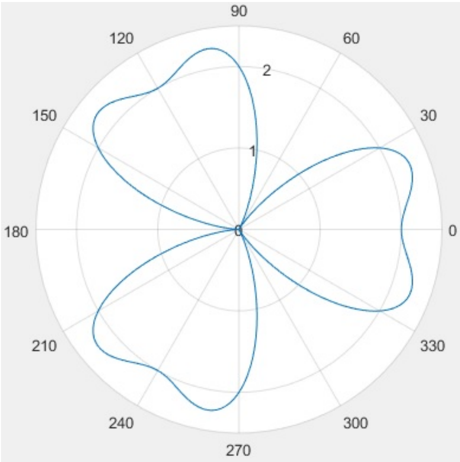


Рис.120. $r = 1 + \cos(3\varphi) + \sin^2(3\varphi)$

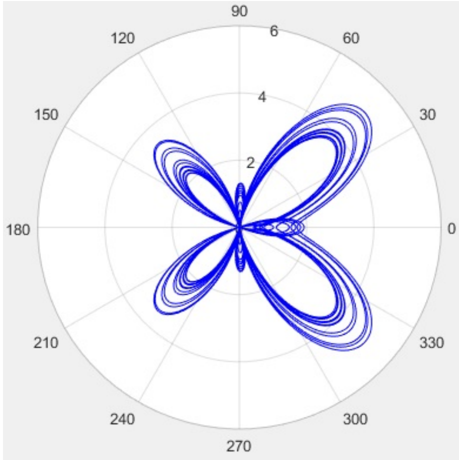


Рис.121. $r = \exp(\cos\varphi) - 2\cos(4\varphi) + \sin^{\frac{5}{7}}(\varphi/12)$

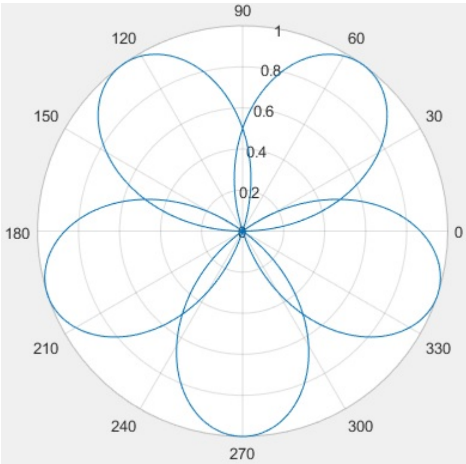


Рис.122. $r = \sin(\frac{5}{3}\varphi)$

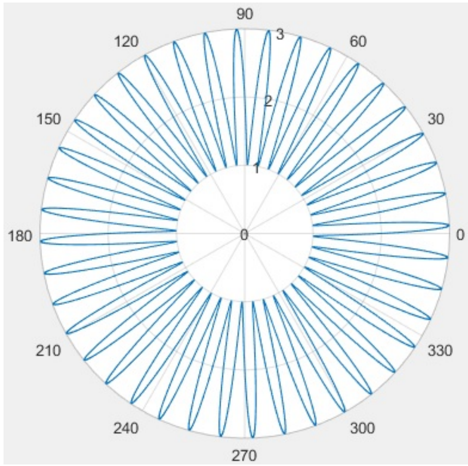


Рис.123. $r = 2 + \sin(40\varphi)$

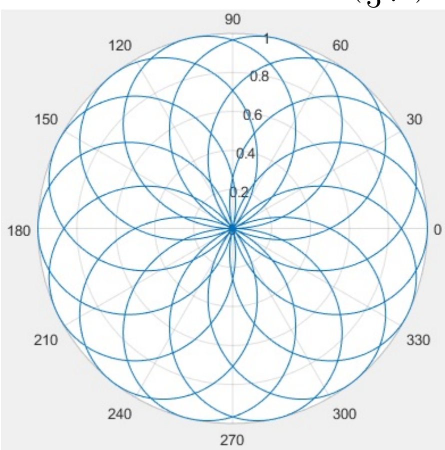


Рис.124.

$$r = \sin\frac{7\varphi}{6}$$

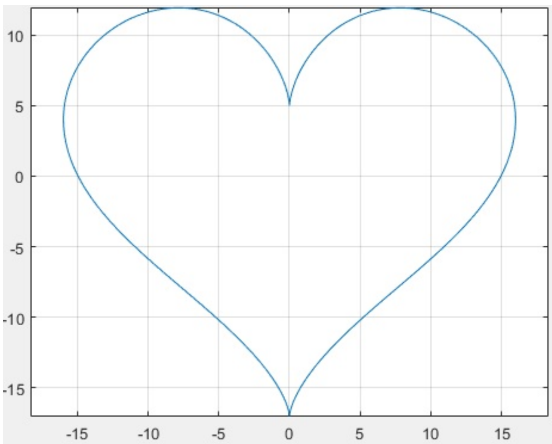


Рис.125.

$$\begin{cases} x = 16\sin^3(t) \\ y = 13\cos(t) - 5\cos(2t) - \\ \quad - 2\cos(3t) - \cos(4t) \end{cases}$$

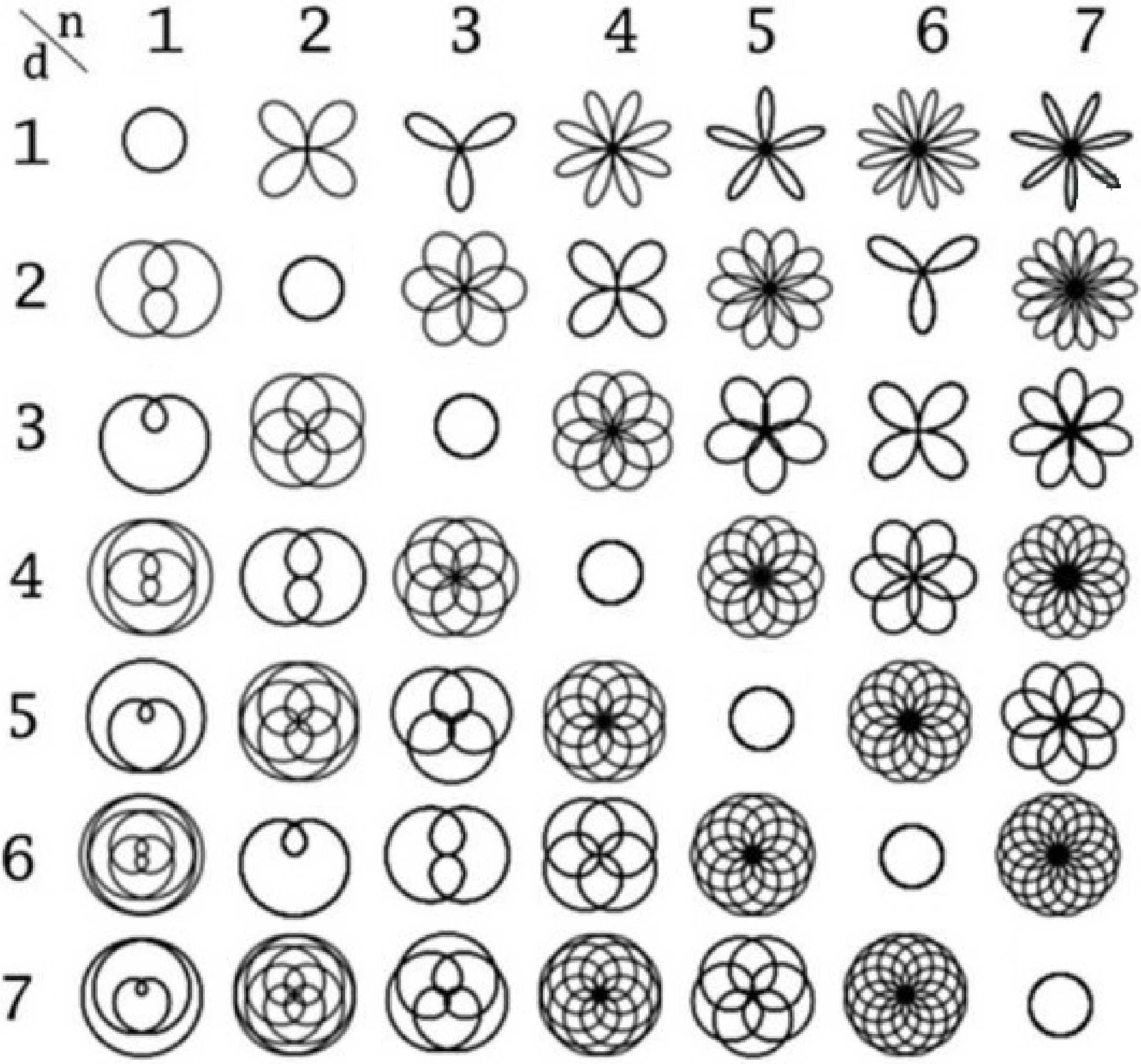


Рис.126. Общий вид полярной розы, задаваемой уравнением $r = \sin(k\varphi)$ при различных значениях $k = \frac{n}{d}$

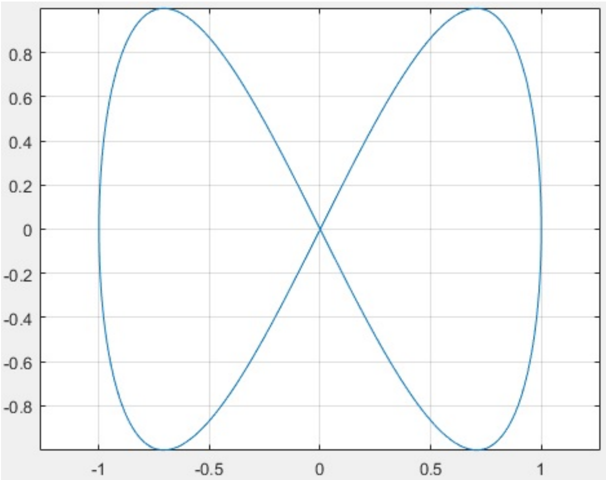


Рис.127. $\begin{cases} x = \sin(t) \\ y = \sin(2t) \end{cases}$

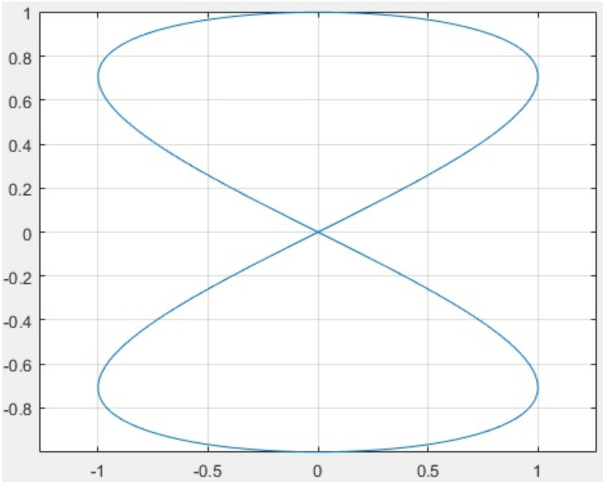


Рис.128. $\begin{cases} x = \sin(2t) \\ y = \cos(t) \end{cases}$

В физике такие кривые называют фигурами Лиссажу (Рис. 127,128).

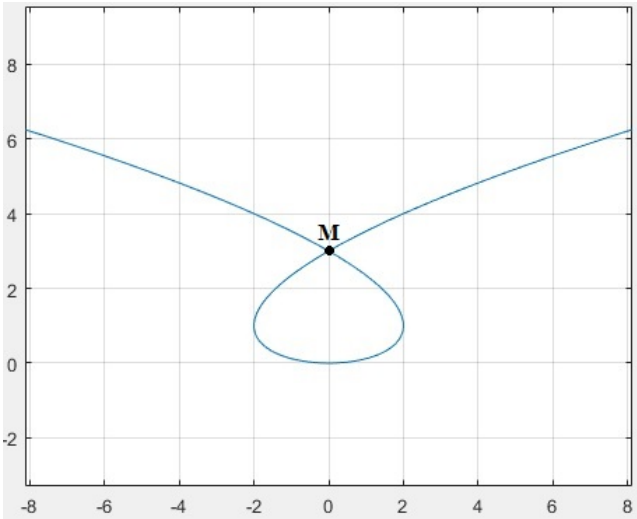


Рис.129. $\begin{cases} x = t(3 - t^2) \\ y = t^2 \end{cases}$,

$M(0,3)$ при $t = \pm\sqrt{3}$

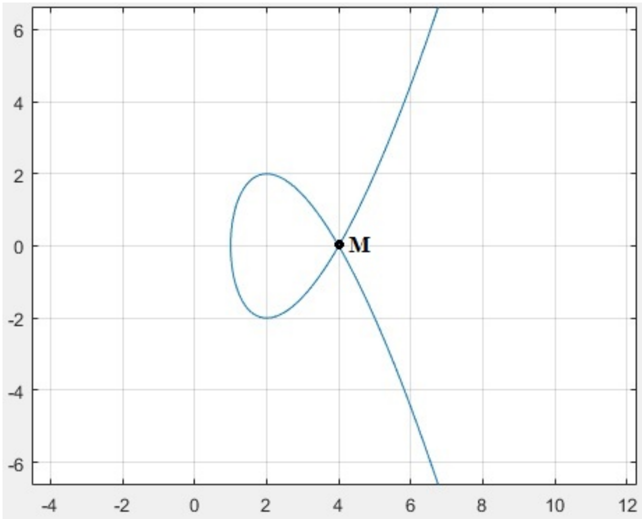


Рис.130. $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t(t^2 - 3) \end{cases}$,

$M(4,0)$ при $t = \pm\sqrt{3}$

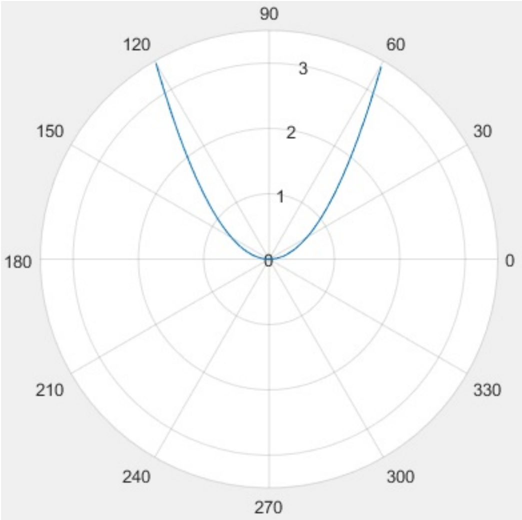


Рис.131. $r = \dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$

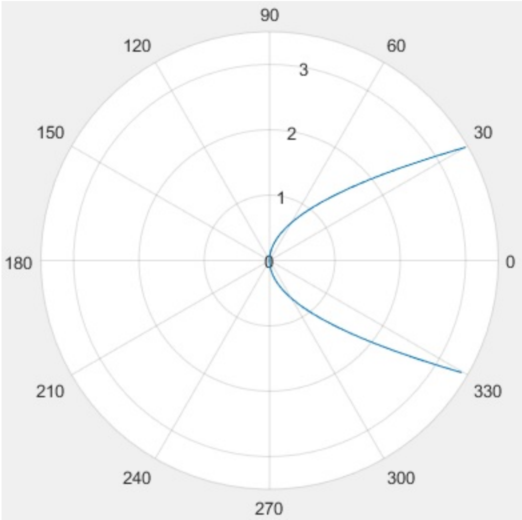


Рис.132. $r = \dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$

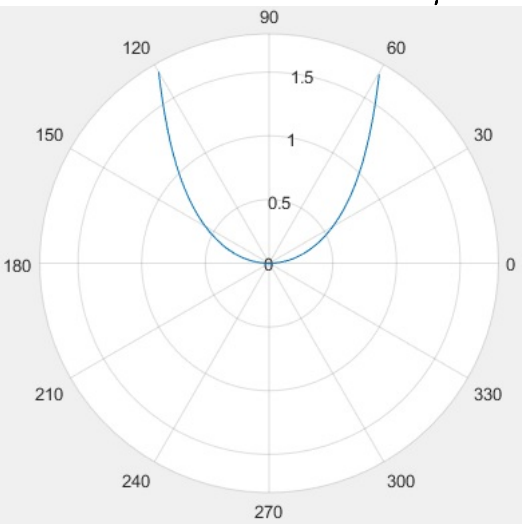


Рис.133. $r = \mathrm{tg}\varphi$

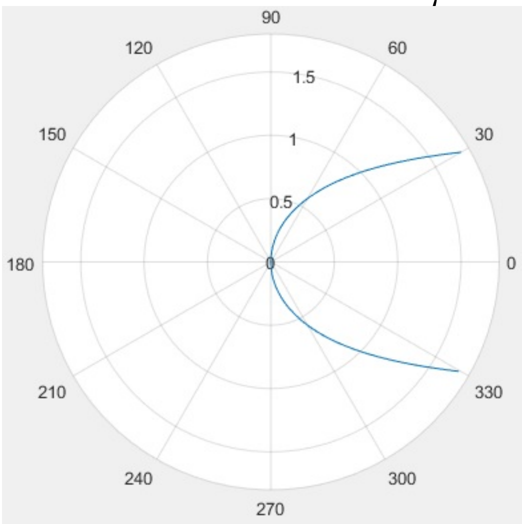
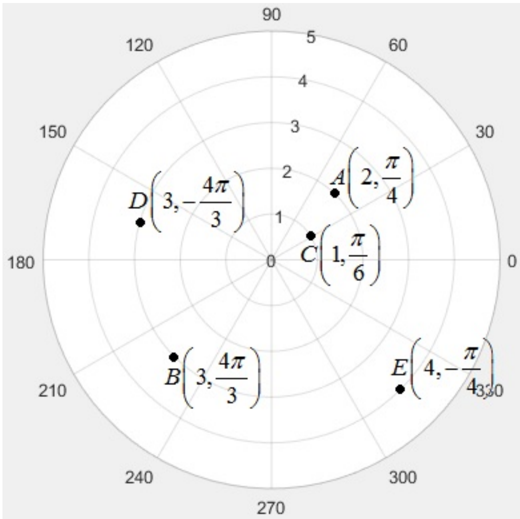


Рис.134. $r = \mathrm{ctg}\varphi$

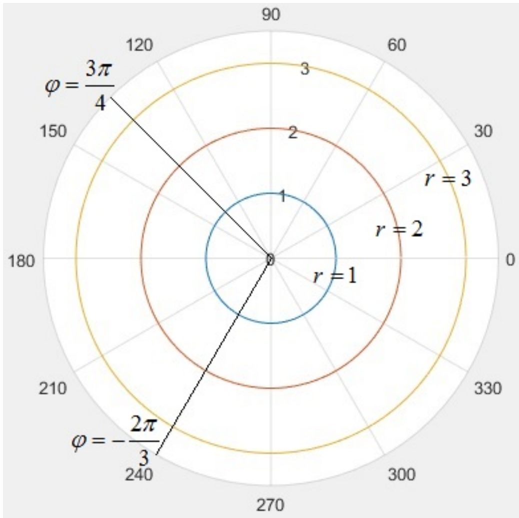
ОТВЕТЫ

Полярное и параметрическое задание кривых

1.1.



1.2.



1.3. $A(2; -\frac{\pi}{3})$, $B(4; \frac{\pi}{6})$, $C(4\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4})$, $D(\sqrt{8}; \frac{\pi}{3})$.
1.4. $A(-2; 2)$, $B(0; 7)$, $C(-\frac{3}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{\sqrt{2}})$, $D(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$.
1.5. 1) $A_1(3; \frac{7\pi}{6})$, $B_1(5; -\frac{\pi}{3})$, $C_1(2; \frac{5\pi}{6})$.
2) $A_2(3; -\frac{\pi}{6})$, $B_2(5; -\frac{2\pi}{3})$, $C_2(2; \frac{\pi}{6})$.
3) $A_3(3; \frac{5\pi}{6})$, $B_3(5; \frac{\pi}{3})$, $C_3(2; -\frac{5\pi}{6})$.
1.6. 1) парабола $y = x^2$, 2) прямая $x + y = 1$,
3) прямая $y = \frac{7}{5}x$.

Замечательные кривые

2.1. 1) $r = a$, 2) $r = 2a\cos\varphi$. **2.2.** 1) 4; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.
2.3. $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$. **2.4.**1) $\begin{cases} x = 7\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$, 2) $r = \frac{9}{7-2\sqrt{10}\cos\varphi}$.
2.5.$\varphi \in [0, 8\pi]$. **2.6.** $\begin{cases} x = 5\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases}$. **2.7.** 1) 11, 2) 40.
2.8. (11;0). **2.9.** 1) $(\sqrt{2}; 0)$, $(\sqrt{2}, \pi)$; 2) $(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4})$, $(\sqrt{2}, \frac{-3\pi}{4})$
2.10. 1) $r = 2(1 + \cos\varphi)$, 2) $r = 2(1 - \cos\varphi)$

2.11. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ **2.12.** $\begin{cases} x = 12\cos t - 2\cos(6t) \\ y = 12\sin t - 2\sin(6t) \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} x = 8\cos t + 2\cos(4t) \\ y = 8\sin t - 2\sin(4t) \end{cases}$

2.14. 1) $r = \frac{2}{\cos\varphi}$, $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; 2) $r = \frac{-2}{\cos\varphi}$, $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$; 3) $r = \frac{2}{\sin\varphi}$, $\varphi \in (0, \pi)$; 4) $r = \frac{-2}{\sin\varphi}$, $\varphi \in (\pi, 2\pi)$.

Площадь плоской фигуры. Длина дуги кривой

3.1. $S = \frac{256}{15}$. **3.2.** $S = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$. **3.3.** $S = \frac{3}{8}\pi$. **3.4.** $S = 3\pi$. **3.5.** $S = \frac{8}{15}$. **3.6.** $S = \frac{\pi}{8}$.

3.7. $l = 12$. **3.8.** $l = 8$. **3.9.** $l = 4\sqrt{3}$. **3.10.** $l = 4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. СПб., Лань, 2017, 624 с.
2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.И. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. СПб., Лань, 2010, 608 с.
3. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. Астрель АСТ, 2006, 872 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. (в 3-х томах), СПб., Лань, 2009.
5. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2-х томах. Том 1. СПб., Лань, 2015, 448 с.
6. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2-х томах. Том 2-й. СПб., Лань, 2008, 464 с.
7. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу (в 3-х томах). М., Физматлит, 2003.

Миссия университета – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики – крупнейшая в Санкт-Петербургском национальном исследовательском университете информационных технологий, механики и оптики. С момента основания на ней работали такие выдающиеся ученые, как И.П. Натансон, В.А. Тартаковский, В.Н. Попов, И.А. Молотков, А.Г. Аленицын, В.В. Жук и другие. Научные интересы сотрудников покрывают практически все разделы математики. На кафедре сложилась мощная научная школа по математическому моделированию сложных физических систем. В последнее время активно развивается направление, связанное с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовым компьютером и квантовыми коммуникациями. Сотрудники кафедры активно участвуют в международных научных конференциях, работают в рамках Российских и международных научных проектов. Сложилось тесное научное сотрудничество с Санкт-Петербургским государственным университетом, Петербургским отделением Математического института имени В.А. Стеклова РАН, лабораторией физикохимии наносистем Института химии силикатов РАН и другими научными центрами как в России, так и за рубежом: университетами Марселя и Тулона (Франция), Ювяскиля (Финляндия), Гумбольдтовским университетом Берлина (Германия).

Блинова Ирина Владимировна
Попов Игорь Юрьевич

Кривые, заданные параметрически и в полярных координатах

Учебное пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе