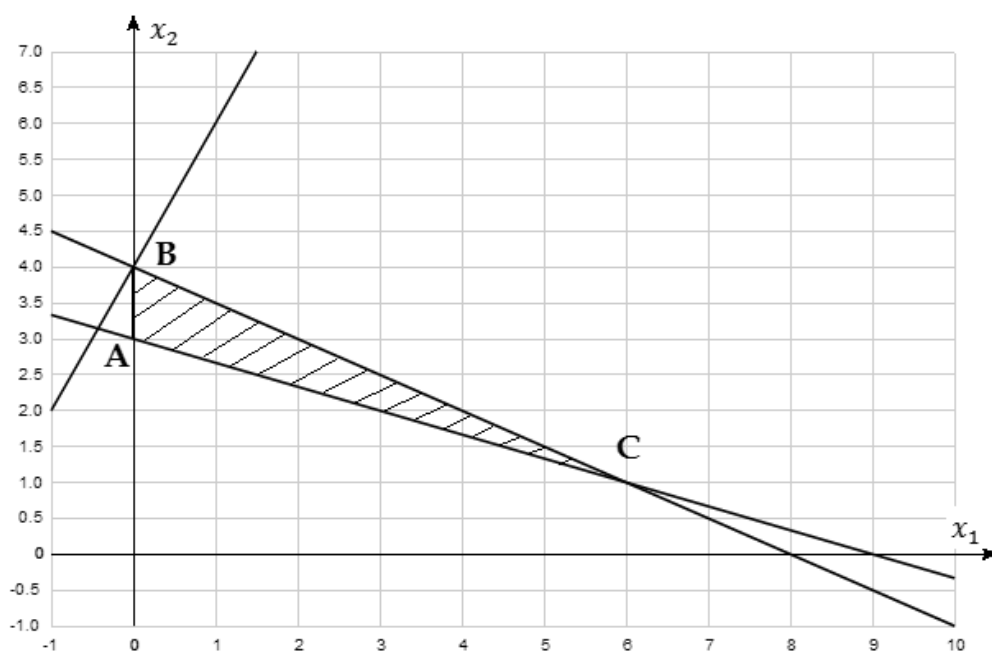


Е.Л. Богданова,

К.А. Соловейчик, К.Г. Аркина

ОПТИМИЗАЦИЯ В ПРОЕКТНОМ МЕНЕДЖМЕНТЕ: ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ



Санкт-Петербург
2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Е.Л. Богданова

К.А. Соловейчик

К.Г. Аркина

ОПТИМИЗАЦИЯ В ПРОЕКТНОМ МЕНЕДЖМЕНТЕ: ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки (специальности)

27.04.08 «Управление интеллектуальной собственностью»
в качестве учебно-методического пособия для реализации основных
профессиональных образовательных программ высшего образования
магистратуры



Санкт-Петербург

2017

Богданова Е.Л. Оптимизация в проектном менеджменте: линейное программирование: учебное пособие / Е.Л. Богданова, К.А. Соловейчик, К.Г. Аркина. – СПб.: Университет ИТМО, 2017. – 165 с.

Рецензенты: Аркин Павел Александрович, д.э.н, профессор, заместитель генерального директора по инновациям ООО «ХОЛДИНГ ЛЕНПОЛИГРАФМАШ», профессор базовой кафедры «Процессы управления наукоемкими производствами» ФГАОУВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого».

Якубсон Михаил Яковлевич, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математического анализа ФГБОУВО «Российский государственный педагогический университет имени А.И. Герцена».

Учебное пособие соответствует содержанию блока 1 структуры программы магистратуры федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 27.04.08 - Управление интеллектуальной собственностью (уровень магистратуры). Пособие имеет учебно-методическое назначение и предназначено для изучения студентами материала раздела линейное программирование дисциплины учебного плана «Проектный менеджмент». В пособии рассмотрены основные методы вычислений раздела исследования операций: линейное программирование на основании примеров в области экономики предприятия.

Рекомендовано к печати УМС ИМБИП, протокол № 5 от «10» мая 2017 г.



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2017

©Богданова Е.Л., Соловейчик К.А., Аркина К.Г., 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1. Линейное программирование. Некоторые экономические задачи, сводимые к задачам линейного программирования	13
2. Виды задач линейного программирования и способы перехода от одного вида к другому.....	16
3. Общая задача линейного программирования	21
4. Основные теоремы линейного программирования.....	22
5. Графический метод решения задач линейного программирования	24
6. Симплекс-метод	31
7. Метод искусственного базиса	46
8. Двойственность задач линейного программирования. Таблица соответствий. Достаточное условие оптимальности	52
9. Леммы Фаркаша.....	56
10. Теоремы двойственности. Критерии оптимальности.	60
11. Критерий разрешимости задачи линейного программирования	63
12. Задача о наилучшем использовании ресурсов.....	68
13. Транспортная задача. Закрытая и открытая модели	73
14. Определение опорного плана транспортной задачи	75
15. Метод северо-западного угла	77
16. Метод минимальной стоимости	79
17. Метод аппроксимации Фогеля	81
18. Метод двойного предпочтения.....	82
19. Теорема о существовании оптимального решения	83
20. Транспортные задачи с ограничениями	89
21. Задачи дробно-линейного программирования.	92
22. Графический метод решения задач дробно-линейного программирования	95
23. Сведение задачи дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования	104
24. Целочисленное линейное программирование. Графический метод решения.....	112
25. Метод ветвей и границ	117
26. Задача о назначениях.....	120
27. Динамическое программирование	126

28. Функции Беллмана. Уравнения Беллмана. Условно-оптимальные управления	131
29. Принцип Беллмана для оптимальных путей.....	133
30. Оптимальное распределение инвестиций как задача динамического программирования	136
31.Задача о замене оборудования.....	141
32.Марковские модели принятия решений	148
Список литературы	157
Приложение. Великий русский математик, академик Императорской Санкт-Петербургской Академии наук А. А. Марков.....	160

Введение

Оптимизацию в проектном менеджменте условно можно разделить на линейное и нелинейное программирование, которые объединяет общее название – исследование операций. Исследование операций – дисциплина относительно молодая, возникшая в связи с потребностью наилучшей организации экономических операций, прогнозирования исхода при принятии различных решений.

Формирование исследования операций как самостоятельной ветви прикладной математики относится к периоду 40-х и 50-х годов 20 века. Последующие полтора десятилетия были отмечены широким применением полученных фундаментальных теоретических результатов к разнообразным практическим задачам и связанным с этим переосмыслением потенциальных возможностей теории. В результате исследование операций приобрело черты классической научной дисциплины, без которой немыслимо базовое экономическое образование.

Обращаясь к задачам и проблемам, составляющим предмет исследования операций, нельзя не вспомнить о вкладе, внесенном в их решение представителями отечественной научной школы, среди которых в первую очередь должен быть назван Л. В. Канторович, ставший в 1975 г. лауреатом премии Национального банка Швеции по экономическим наукам памяти Альфреда Нобеля за свои работы по оптимальному использованию ресурсов в экономике.

Начало развития исследования операций как науки традиционно связывают с сороковыми годами двадцатого столетия. Среди первых исследований в данном направлении может быть названа работа Л. В. Канторовича "Математические методы организации и планирования производства", вышедшая в 1939 г. В зарубежной литературе отправной точкой обычно считается вышедшая в 1947 г. работа Дж. Данцига, посвященная решению линейных экстремальных задач.

Следует отметить, что не существует жесткого, устоявшегося и общепринятого определения предмета исследования операций. Часто при ответе на данный вопрос говорится, что *исследование операций* представляет собой комплекс научных методов для решения задач эффективного управления организационными системами.

Второе определение: *исследование операций* – это научная подготовка принимаемого решения, совокупность методов, предлагаемых для подготовки и нахождения самых эффективных или самых экономичных решений.

Исследование операций занимается расчетами будущих решений, позволяющих избегать серьезных ошибок, экономить силы, деньги и время.

Введем некоторые термины и некоторое количество базовых понятий.

Операция – система действий, объединенных общим замыслом и направленных на достижение конкретной цели.

Решение – выбор зависящих от нас параметров. **Оптимальное решение** – то решение, которое по тем или иным признакам предпочтительнее других.

Целевая функция (показатель эффективности) – количественный критерий, который позволяет сравнивать между собой разные по эффективности решения.

Методы оптимизации – методы построения алгоритмов нахождения экстремумов функций и точек, в которых они достигаются, при наличии ограничений и без них.

Исследование операций иногда называют **теорией принятия оптимальных решений**.

Средства исследования операций: математические модели и методы.

Математическая модель представляет собой записанную в математических символах абстракцию реального явления, конструируемую таким образом, чтобы ее анализ давал возможность проникнуть в сущность исследуемого явления.

Цель исследования операций: предварительное количественное обоснование оптимальных решений. Необходимо понимать, что предложенное решение носит рекомендательный характер, предоставляет данные, помогающие сделать выбор с учетом преимуществ и недостатков. Окончательный же выбор решения остается за тем человеком, который несет за него ответственность.

Содержание исследования операций: математический анализ оптимизационных задач, т. е. задач, в которых осуществляется процесс поиска оптимальных решений, нахождение и разработка новых и совершенствование существующих методов оптимизации.

Задача исследования операций: выявление и количественное обоснование наилучших вариантов проведения операций в условиях существования различных ограничений.

Несмотря на многообразие задач при их решении можно выделить некоторую общую последовательность этапов, через которые проходит любое операционное исследование. Как правило, это:

1. Постановка задачи.
2. Построение содержательной (вербальной) модели рассматриваемого объекта (процесса). На данном этапе происходит формализация цели управления объектом, выделение возможных управляющих воздействий, влияющих на достижение сформулированной цели, а также описание системы ограничений на управляющие воздействия.
3. Построение математической модели, т. е. перевод сконструированной вербальной модели в ту форму, в которой для ее изучения может быть использован математический аппарат.
4. Решение задач, сформулированных на базе построенной математической модели.

5. Проверка полученных результатов на их адекватность природе изучаемой системы, включая исследование влияния так называемых немодельных факторов, и возможная корректировка первоначальной модели.

6. Реализация полученного решения на практике.

Центральное место при решении задач этой дисциплины отведено вопросам, относящимся к четвертому пункту приведенной выше схемы. Это делается не потому, что он является самым важным, сложным или интересным, а потому, что остальные пункты существенно зависят от конкретной природы изучаемой системы, в силу чего для действий, которые должны производиться в их рамках, не могут быть сформулированы универсальные и содержательные рекомендации.

В самых разнообразных областях человеческой деятельности встречаются сходные между собой задачи: организация производства, эксплуатация транспорта, боевые действия, расстановка кадров, телефонная связь и т. д. Возникающие в этих областях задачи сходны между собой по постановке, обладают рядом общих признаков и решаются сходными методами.

Пример: организуется какое-то целенаправленное мероприятие (система действий), которое можно организовать тем или иным способом. Необходимо выбрать определенное решение из ряда возможных вариантов. Каждый вариант имеет преимущества и недостатки – сразу не ясно, какой из них предпочтительнее. С целью прояснить обстановку и сравнить между собой по ряду признаков различные варианты, организуется серия математических расчетов. Результаты расчетов показывают, на каком варианте целесообразнее остановиться.

Математическое моделирование в исследовании операций является, с одной стороны, очень важным и сложным, а с другой - практически не поддающимся научной формализации процессом. Заметим, что неоднократно предпринимавшиеся попытки выделить общие принципы создания математических моделей приводили либо к декларированию рекомендаций самого общего характера, трудноприложимых для решения конкретных проблем, либо, наоборот, к появлению рецептов, применимых в действительности только к узкому кругу задач. Поэтому более полезным представляется знакомство с техникой математического моделирования на конкретных примерах.

1. План снабжения предприятия.

Имеется ряд предприятий, использующих различные виды сырья; имеется ряд сырьевых баз. Базы связаны с предприятиями различными путями сообщения: железные дороги, автотранспорт, водный, воздушный транспорт. Каждый транспорт имеет свои тарифы. Требуется разработать такой план снабжения предприятий сырьем, чтобы потребности в сырье были удовлетворены при минимальных расходах на перевозки.

2. Постройка участка магистрали.

Сооружается участок железнодорожной магистрали. В нашем распоряжении определенное количество средств: людей, техники и т. п. Требуется назначить очередность работ, распределить людей и технику по участкам пути таким образом, чтобы завершить строительство в минимальные сроки.

3. Выборочный контроль продукции.

Выпускается определенный вид изделий. Для обеспечения высокого качества продукции требуется организовать систему выборочного контроля: определить размер контрольной партии, набор тестов, правила отбраковки и т. д. Требуется обеспечить заданный уровень качества продукции при минимальных расходах на контроль.

Подобные задачи встречаются в практике часто. Они имеют общие черты. В каждой задаче определена цель – цели эти похожи; заданы некоторые условия – в рамках этих условий и нужно принять решение, чтобы данное мероприятие было наиболее выгодным. В соответствии с этими общими чертами применяются и общие методы. Система методов, позволяющая обосновать оптимальность того или иного решения с помощью математического аппарата, и лежит в основе **«исследования операций»**.

Такие оптимизационные задачи носят общее название – **задачи математического программирования**.

При решении любой конкретной задачи применение методов исследования операций заключается в следующем:

- построение математических, экономических и статистических моделей для задач принятия решений и управления в сложных ситуациях в условиях неопределенности (наличие случайных факторов);
- изучение взаимосвязей, определяющих возможные последствия принятых решений. Установление критериев эффективности, позволяющих оценить преимущества того или иного варианта.

Методы исследования операций обладают рядом специфических черт. Чтобы подход к решению задач можно было считать операционным, он должен содержать следующие элементы:

1. **Ориентация на принятие решений.** Основные результаты анализа должны иметь непосредственное и полностью определенное отношение к выбору способа действий (стратегии или тактики).
2. **Оценка на основе критерия экономической эффективности.** Сравнение различных возможных вариантов действий должно основываться на количественных оценках, позволяющих однозначно определить полезность ожидаемого исхода. Количественные оценки для коммерческих фирм обычно предполагают использование таких измеримых величин, как расходы, доходы, наличие денежных средств, норма прибыли от дополнительных капиталовложений и т. д. В рекомендуемом решении должен быть достигнут оптимальный баланс с учетом всех нередко противоречивых факторов.

3. **Доверие математической модели.** Процедуры обращения с упомянутыми выше параметрами должны быть определены настолько точно, чтобы любой специалист в области системного анализа смог их трактовать совершенно однозначно. Другими словами: опираясь на одни и те же данные, различные специалисты должны получить одинаковые результаты.
4. **Необходимость использования компьютера.** Это условие отнюдь не является лишь желательным, оно скорее необходимо. Это обуславливается сложностью используемых математических моделей и большим объемом исходных данных. Вычисления могут быть громоздкими, а могут быть несложными, но в больших объемах (статистические модели).

Основные этапы применения метода исследования операций:

1. Определение цели.
2. Составление плана разработки проекта.
3. Формулировка проблемы.
4. Построение модели.
5. Разработка вычислительного метода.
6. Разработка технического задания на программу для ЭВМ, написание программного кода, перевод программного кода в программу для ЭВМ и отладка программы для ЭВМ.
7. Сбор данных.
8. Проверка модели.
9. Реализация результатов, то есть принятие решения.

К основным методам отыскания оптимальных решений и относится математическое программирование.

К математическому программированию, например, относятся:

1. **Линейное программирование:** состоит в нахождении экстремального значения линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, связывающих эти переменные.
2. **Нелинейное программирование:** целевая функция и ограничения могут быть нелинейными функциями.
3. **Целочисленное программирование:** особые случаи в задачах линейного и нелинейного программирования, когда на оптимальные решения накладывается условие целочисленности.
4. **Динамическое программирование:** для отыскания оптимального решения планируемая операция разбивается на ряд шагов (этапов) и планирование осуществляется последовательно от этапа к этапу. Однако выбор метода решения на каждом этапе производится с учетом интересов операции в целом.
5. **Теория игр:** пытается математически объяснить явления, возникающие в конфликтных ситуациях, в условиях столкновения

сторон. Такие ситуации изучаются психологией, политологией, социологией, экономикой.

Временем рождения линейного программирования принято считать 1939 г., когда была напечатана брошюра Леонида Витальевича Канторовича "Математические методы организации и планирования производства". Поскольку методы, изложенные Л. В. Канторовичем, были мало пригодны для ручного счета, а быстродействующих вычислительных машин в то время не существовало, работа Л. В. Канторовича осталась почти не замеченной. Идеи Л. В. Канторовича не встретили понимания в момент их зарождения, и его работа была прервана. Концепции Леонида Витальевича вскоре после Второй мировой войны были переоткрыты на западе. Американский экономист Т. Купманс в течение многих лет привлекал внимание математиков к ряду задач, связанных с военной тематикой. Он активно способствовал тому, чтобы был организован математический коллектив для разработки этих проблем. В итоге было осознано, что надо научиться решать задачи о нахождении экстремумов линейных функций на многогранниках, задаваемых линейными неравенствами. По предложению Купманса, этот раздел математики получил название линейного программирования.

Американский математик А. Данциг в 1947 году разработал весьма эффективный конкретный метод численного решения задач линейного программирования (он получил название **симплекс-метода**).

Важным моментом в линейном программировании является теория двойственности. **Двойственная модель** линейного программирования используется для изучения поставленной проблемы с точки зрения, отличной от той, которая исследуется в обычной прямой задаче. Прямая и двойственная модели приводят к одному и тому же решению. Единственная причина, по которой предпочтение отдается той или иной модели, состоит в том, что одну из них решить, как правило, легче, чем другую. Однако по мере все более широкого распространения пакетов прикладных программ альтернативное использование прямой или двойственной задачи становится менее существенным. Переменные двойственной модели являются для исходной, или прямой модели, теневыми ценами ресурсов. Структура двойственной и прямой задачи одинакова. Если прямая модель линейного программирования построена, из нее легко получить соответствующую двойственную модель.

Идеи линейного программирования в течение пяти-шести лет получили грандиозное распространение в мире, и имена Купманса и Данцига стали повсюду широко известны.

Свое второе рождение линейное программирование получило в начале пятидесятых годов с появлением компьютеров. Тогда началось всеобщее увлечение линейным программированием, вызвавшее, в свою очередь, развитие других разделов математического программирования.

Линейное программирование является наиболее простым и лучше всего изученным разделом математического программирования.

Задачами **нелинейного программирования** называются задачи математического программирования, в которых нелинейны и/или целевая функция, и/или ограничения в виде неравенств или равенств.

Общих способов решения, аналогичных симплекс-методу линейного программирования, для нелинейного программирования не существует.

Задачи нелинейного программирования на практике возникают довольно часто, когда, например, затраты растут непропорционально количеству закупленных или произведённых товаров.

Многие задачи нелинейного программирования могут быть приближены к задачам линейного программирования, и может быть найдено близкое к оптимальному решение. Но в целом задачи нелинейного программирования относятся к трудным вычислительным задачам. При их решении часто приходится прибегать к приближенным методам оптимизации. Мощным средством для решения задач нелинейного программирования являются численные методы. Они позволяют найти решение задачи с заданной степенью точности.

При рассмотрении целого ряда задач финансового менеджмента и бизнеса необходимо учитывать требование целочисленности используемых переменных. Такие задачи называются задачами **целочисленного программирования**. Под задачей целочисленного программирования понимается задача, в которой все или некоторые переменные должны принимать целые значения.

В том случае, когда ограничения и целевая функция задачи представляют собой линейные зависимости, задачу называют **целочисленной задачей линейного программирования**. В противном случае, когда хотя бы одна зависимость будет нелинейной, это будет **целочисленной задачей нелинейного программирования**. Особый интерес к задачам целочисленного программирования вызван тем, что во многих практических задачах необходимо находить целочисленное решение ввиду дискретности ряда значений искомых переменных.

Динамическое программирование представляет собой математический аппарат, разработанный для эффективного решения некоторого класса задач математического программирования. Этот класс характеризуется возможностью естественного (а иногда и искусственного) разбиения всей операции на ряд взаимосвязанных этапов. Термин "динамическое" в названии метода возник, видимо, потому, что этапы предполагаются разделёнными во времени. Однако этапами могут быть элементы операции, никак не связанные друг с другом показателем времени. Тем не менее, метод решения подобных многоэтапных задач применяется один и тот же, и его название стало общепринятым, хотя в некоторых источниках его называют многоэтапным программированием.

Модели динамического программирования могут применяться, например, при разработке правил управления запасами, устанавливающими момент пополнения запасов и размер пополняющего заказа; при разработке принципов календарного планирования производства и выравнивания занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию; при распределении дефицитных капиталовложений между возможными новыми направлениями их использования; при составлении календарных планов текущего и капитального ремонта сложного оборудования и его замены; при разработке долгосрочных правил замены выбывающих из эксплуатации основных фондов и т. д.

Динамическое программирование часто помогает решить задачу, переборный алгоритм для которой потребовал бы очень много времени. Этот метод использует **идею пошаговой оптимизации**. В этой идее есть принципиальная тонкость: каждый шаг оптимизируется не сам по себе, а с "оглядкой на будущее", на последствия принимаемого "шагового" решения. Оно должно обеспечить максимальный выигрыш не на данном конкретном шаге, а на всей совокупности шагов, входящих в операцию.

Теория игр – теория математических моделей принятия решений в условиях неопределенности, в условиях столкновения, конфликтных ситуациях, когда принимающий решение субъект (игрок) располагает информацией лишь о множестве возможных ситуаций, в одной из которых он в действительности находится, о множестве решений, которые он может принять, и о количественной мере того выигрыша, который он мог бы получить, выбрав в данной ситуации данную стратегию. Теория игр пытается математически объяснить явления, возникающие в конфликтных ситуациях, в условиях столкновения сторон. От той теории, которая существует в настоящее время, не следует ждать чудодейственных рецептов. Она не предписывает поведение, ведущее к выигрышу. Она лишь указывает, чего может добиться игрок в **наихудшей** для него ситуации и как он должен действовать, чтобы в этой наихудшей ситуации добиться минимального проигрыша (или максимального выигрыша).

Дисциплина Проектный менеджмент при подготовке магистров по направлению 27.04.08 – Управление интеллектуальной собственностью охватывает базовые основы науки исследования операций, в том числе линейное программирование. В ходе дальнейшего обучения отдельные разделы теории исследования операций будут изучены студентами в других дисциплинах.

1. Линейное программирование. Некоторые экономические задачи, сводимые к задачам линейного программирования

Задачи оптимального планирования, связанные с отысканием оптимума заданной целевой функции при наличии ограничений в виде линейных уравнений или линейных неравенств, относятся к задачам линейного программирования.

Линейное программирование – наиболее разработанный и широко применяемый раздел математического программирования. Это объясняется следующим:

- математические модели очень большого числа экономических задач линейны относительно искомых переменных;
- эти типы задач в настоящее время наиболее изучены;
- для них разработаны специальные конечные методы, с помощью которых эти задачи решаются, и соответствующие стандартные программы для их решения на компьютере;
- многие задачи линейного программирования, будучи решенными, нашли уже сейчас широкое практическое применение;
- некоторые задачи, которые в первоначальной формулировке не являются линейными, после ряда дополнительных ограничений и допущений могут стать линейными или могут быть приведены к такой форме, что их можно решать методами линейного программирования.

Итак, **линейное программирование** – это направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием.

Необходимым условием постановки задачи линейного программирования являются ограничения на наличие ресурсов, величину спроса, производственную мощность предприятия и другие производственные факторы.

Сущность линейного программирования состоит в **нахождении точек наибольшего или наименьшего значения некоторой функции** при определенном наборе ограничений, налагаемых на аргументы и образующих систему ограничений, которая имеет, как правило, бесконечное множество решений. Каждая совокупность значений переменных (аргументов функции F), которые удовлетворяют системе ограничений, называется **допустимым планом** задачи линейного программирования. Функция F , максимум или минимум которой определяется, называется **целевой функцией** задачи. Допустимый план, на котором достигается максимум или минимум функции F , называется **оптимальным планом** задачи.

Система ограничений, определяющая множество планов, диктуется условиями производства. Задачей линейного программирования (**ЗЛП**)

является выбор из множества допустимых планов наиболее выгодного (оптимального).

В общей постановке задача математического программирования выглядит следующим образом:

Имеются какие-то переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ и функция этих переменных $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая носит название **целевой** функции. Ставится задача: найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции $f(x)$ при условии, что переменные x принадлежат некоторой области G :

$$\begin{cases} f(x) \Rightarrow \text{ext} \\ x \in G \end{cases} \quad (1.1)$$

В зависимости от вида функции $f(x)$ и области G и различают разделы математического программирования.

Линейное программирование характеризуется тем, что
а) функция $f(x)$ является **линейной** функцией переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$,
б) область G определяется системой **линейных** равенств или неравенств.

Математическая модель любой задачи линейного программирования включает в себя:

- максимум или минимум целевой функции (критерий оптимальности);
- систему ограничений в форме линейных уравнений и неравенств;
- требование неотрицательности переменных.

Примеры задач линейного программирования.

а) задача по использованию сырья

Таблица 1.1

Виды сырья	Запасы сырья	Виды продукции	
		П ₁	П ₂
S ₁	b ₁	a ₁₁	a ₁₂
S ₂	b ₂	a ₂₁	a ₂₂
S ₃	b ₃	a ₃₁	a ₃₂
S ₄	b ₄	a ₄₁	a ₄₂
Стоимость 1 ед. продукции		C ₁	C ₂

a_{ij} – количество единиц сырья вида S_i , расходуемого на производство одной единицы продукции вида P_j ($i = 1, \dots, 4, j = 1, 2$).

Реализация x_1 единиц продукции вида P_1 и x_2 единиц продукции вида P_2 .

Конечная цель решаемой задачи – получение максимальной прибыли при реализации продукции.

при условиях

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \leq b_4 \end{array} \right\}$$

б) задача о диете

Таблица 1.2

Питательные вещества	Кол-во единиц питательных веществ, содержащихся в единице продукции вида				Количество питательного вещества в диете
	B_1	B_2	...	B_n	
N_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
N_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...
N_n	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
Стоимость единицы продукта	C_1	C_2		C_n	

a_{ij} - количество единицы питательного вещества вида N_i , содержащегося в одной единице продукта вида B_i .

$$x_1 e \partial \rightarrow B_1;$$

$$x, ed \rightarrow B;$$

...

$$x_n e\partial \rightarrow B_n$$

$$F(x) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \rightarrow \min \quad (1.2)$$

при ограничениях

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

В других ситуациях могут возникать задачи с большим количеством переменных, в систему ограничений которых, кроме неравенств, могут входить и равенства. Поэтому в наиболее общей форме задачу линейного программирования формулируют следующим образом:

[illegible]

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (1.5)$$

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow (\max) \min \quad (1.6)$$

Коэффициенты $a_{ij}, b_i, c_j, j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, m$ – любые действительные числа (возможно 0).

Итак, решения, удовлетворяющие системе ограничений (1.4) условий задачи и требованиям неотрицательности (1.5), называются **допустимыми**, а решения, удовлетворяющие одновременно и требованиям минимизации (максимализации) (1.6) целевой функции, – **оптимальными**.

2. Виды задач линейного программирования и способы перехода от одного вида к другому

Выше описанная задача линейного программирования (ЗЛП) представлена в общей форме, но одна и та же (ЗЛП) может быть сформулирована в различных эквивалентных формах. Наиболее важными формами задачи линейного программирования являются **каноническая** и **стандартная**.

В канонической форме ЗЛП является задачей на максимум (минимум) некоторой линейной функции F , ее система ограничений состоит только из равенств (уравнений). При этом переменные задачи $x_1, x_2, \dots, x_n$ являются неотрицательными:

[illegible]

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (2.2)$$

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow (\max) \min \quad (2.3)$$

К канонической форме можно преобразовать любую задачу линейного программирования.

Чтобы перейти от одной формы записи задачи линейного программирования к другой, нужно в общем случае уметь, во-первых, сводить задачу минимизации к задаче максимизации, во-вторых, переходить от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам и наоборот, в-третьих, заменять переменные, которые не подчинены условию неотрицательности.

Правило приведения ЗЛП к каноническому виду:

1. Если в исходной задаче некоторое ограничение (например, первое) было неравенством, то оно преобразуется в равенство, введением в левую часть некоторой неотрицательной переменной, причем для неравенства « $\leq$ » вводится дополнительная неотрицательная переменная со знаком «+»; в случае неравенства « $\geq$ » - со знаком «-»

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1. \quad (2.4)$$

Вводим переменную

$$x_{n+1} = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n. (2.5)$$

Тогда неравенство (2.4) запишется в виде:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1. (2.6)$$

В каждое из неравенств вводится своя “уравнивающая” переменная, после чего система ограничений становится системой уравнений.

Число вводимых дополнительных неотрицательных переменных при преобразовании ограничений-неравенств в ограничения-равенства равно числу преобразуемых неравенств.

Вводимые дополнительные переменные имеют вполне определенный экономический смысл. Так, если в ограничениях исходной задачи линейного программирования отражаются расход и наличие производственных ресурсов, то числовое значение дополнительной переменной в плане задачи, записанной в основной форме, равно объему неиспользуемого соответствующего ресурса.

4. Наконец, если исходная задача была задачей на минимум, а нам удобнее по каким-либо причинам решать задачу на максимум, то введением новой целевой функции $F_I = -F$ мы преобразуем нашу задачу на минимум функции F в задачу на максимум функции F_I .

В стандартной форме ЗЛП является задачей на максимум (минимум) линейной целевой функции. Система ограничений ее состоит из одних линейных неравенств типа " $\leq$ " или " $\geq$ ". Все переменные задачи неотрицательны.

[illegible]

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (2.7)$$

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow (\max) \min$$

Для приведения к стандартной форме задачи линейного программирования может потребоваться выполнить следующие действия:

- перейти от минимизации целевой функции к ее максимизации;
- изменить знаки правых частей ограничений;
- перейти от ограничений-равенств к неравенствам;
- избавиться от переменных, не имеющих ограничений на знак.

Таблица 2.1

Каноническая (основная) форма	Стандартная (симметрическая) форма	Общая форма
1) ограничения		
Уравнения $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_j,$ $i = 1, \dots, m$	Неравенства $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq (\geq) b_j,$ $i = 1, \dots, m$	Уравнения и неравенства $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} b_j, i = 1, \dots, m$
2) условия неотрицательности		
Все переменные $x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$	Все переменные $x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$	Часть переменных $x_j \geq 0, j = 1, \dots, s \ (s \leq n)$
3) цель задачи $F(x) = \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j$		
max или min	max или min	max или min

Задача 2.1. Привести к каноническому виду задачу

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

Решение. Введем дополнительные переменные x_3, x_4, x_5 . Причем в первое неравенство введем неотрицательную переменную x_3 со знаком минус, а во второе и в третье – со знаком плюс переменные x_4, x_5 , запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} -x_3 = 1 - x_1 + x_2 \\ x_4 = 1 - x_1 + 2x_2 \\ x_5 = 3 - x_1 - x_2 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 3 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

$$F(x) = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \max,$$

что и дает эквивалентную задачу в канонической форме.

Задача 2.2. Привести к стандартному виду задачу

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 120 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 180 \\ x_1 + x_4 = 70 \\ x_2 + x_5 = 140 \\ x_3 + x_6 = 90 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$$

$$F = 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 9x_5 + 7x_6 \rightarrow \min$$

Решение. Выразим через x_1 и x_2 остальные переменные:

$$\begin{cases} x_3 = 120 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 70 - x_1 \\ x_5 = 140 - x_2 \\ x_6 = 90 - x_3 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 120 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 70 - x_1 \\ x_5 = 140 - x_2 \\ x_6 = 90 - (120 - x_1 - x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 120 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 70 - x_1 \\ x_5 = 140 - x_2 \\ x_6 = x_1 + x_2 - 30 \end{cases}$$

Целевая функция будет выглядеть следующим образом:

$$F = 8x_1 + 5x_2 + 6(120 - x_1 - x_2) + 4(70 - x_1) + 9(140 - x_2) + 7(x_1 + x_2 - 30) \rightarrow \min$$

или, после упрощения:

$$F = 5x_1 - 3x_2 + 2050 \rightarrow \min,$$

так как $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$, то перепишем нашу систему

следующим образом:

$$\begin{cases} 120 - x_1 - x_2 \geq 0 \\ 70 - x_1 \geq 0 \\ 140 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 - 30 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 120 \\ x_1 \leq 70 \\ x_2 \leq 140 \\ x_1 + x_2 \geq 30 \end{cases}.$$

Итак, эквивалентная задача в стандартной форме будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 120 \\ x_1 \leq 70 \\ x_2 \leq 140 \\ x_1 + x_2 \geq 30 \end{cases} .$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$F = 5x_1 - 3x_2 + 2050 \rightarrow \min$$

3. Общая задача линейного программирования

Общая задача линейного программирования состоит в определении минимального (максимального) значения функции

$$F = \sum_{j=1}^n C_j x_j \quad (3.1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \dots, m \quad (3.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (3.3)$$

Общая задача имеет также векторную и матричную формы записи.

Векторная форма записи: минимизировать (максимизировать) линейную функцию $F = CX$ при ограничениях

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = A_0, X \geq 0, \quad (3.4)$$

где $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$; $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; CX – скалярное произведение; векторы

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

состоят соответственно из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

Матричная форма записи: минимизировать (максимизировать) линейную функцию $F = CX$ при ограничениях $AX = A_0, X \geq 0$, где $C =$

$(c_1, c_2, \dots, c_n)$ – матрица-строка; $A = (a_{ij})$ – матрица системы; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец, $A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ – матрица-столбец.

Определение 3.1. Система векторов $A_1, A_2, \dots, A_r$ ($r \geq 2$) называется **линейно зависимой**, если хотя бы один из векторов системы является линейной комбинацией остальных, и **линейно независимой** в противном случае.

Определение 3.2. **Планом** или допустимым решением задачи линейного программирования называется вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий условиям (3.2) и (3.3).

Определение 3.3. План $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **опорным**, если векторы A_i ($i = 1, \dots, m$), входящие в разложение (3.4) с положительными коэффициентами x_i , являются линейно независимыми.

Так как векторы A_i являются m -мерными, то из определения опорного плана следует, что число его положительных компонент не может превышать m .

Определение 3.4. Опорный план называется **невырожденным**, если он содержит m положительных компонент, в противном случае опорный план называется вырожденным.

Определение 3.5. **Оптимальным планом** или оптимальным решением задачи линейного программирования называется план, доставляющий наименьшее (наибольшее) значение линейной функции.

4. Основные теоремы линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования, записанную в векторной форме, состоящую в определении максимального значения функции

$$F = CX \quad (4.1)$$

при условиях

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = A_0, \quad (4.2)$$

$$X \geq 0, \quad (4.3)$$

где $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$; $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; CX – скалярное произведение; векторы

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

состоят соответственно из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

Свойства решений задачи линейного программирования (4.1)-(4.3) тесным образом связаны со свойствами выпуклых множеств.

Определение 4.1. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – произвольные точки евклидова пространства E_n . **Выпуклой линейной комбинацией** этих точек называется сумма $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n$, где α_i – произвольные неотрицательные числа, сумма которых равна 1.

Определение 4.2. Множество называется **выпуклым**, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и их произвольную выпуклую линейную комбинацию.

На рис. 4.1 изображено выпуклое множество (выпуклый многоугольник), а на рис. 4.2 – невыпуклое.

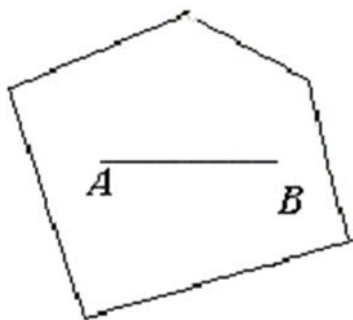


рис. 4.1

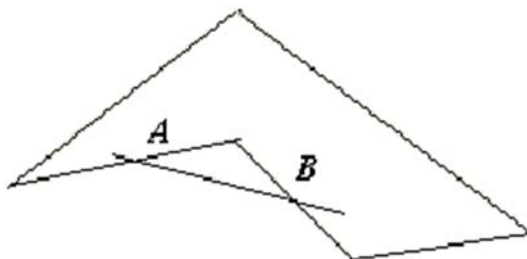


рис. 4.2

Определение 4.3. Точка выпуклого множества называется **угловой**, если она не может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации каких-нибудь двух других различных точек данного множества.

Определение 4.4. **Выпуклым многоугольником** называется выпуклое замкнутое ограниченное множество на плоскости, имеющее конечное число угловых точек.

Определение 4.5. **Выпуклым многогранником** называется замкнутое ограниченное выпуклое множество трехмерного пространства, имеющее конечное число угловых точек. Угловые точки многогранника называются его вершинами.

Теорема 4.1. Множество всех планов задачи линейного программирования является выпуклым (если оно не пусто).

Ранее говорилось, что ограничениями любой задачи линейного программирования являются либо система линейных уравнений, либо система линейных неравенств. Совокупность решений таких систем при условии их совместности, образует выпуклые множества с конечным числом угловых точек.

В частном случае, когда в систему ограничений – неравенств входят только две переменные x_1 и x_2 , это множество можно изобразить на плоскости.

Определение 4.6. **Непустое множество планов** общей задачи линейного программирования называется **многогранником решений**, а всякая угловая точка многогранника решений – вершиной.

Теорема 4.2. Если общая задача линейного программирования имеет оптимальный план, то максимальное значение целевая функция задачи принимает в одной из вершин многогранника решений. Если максимальное значение целевая функция задачи принимает более чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.

Из теоремы 4.2 следует, что поиски оптимального решения можно ограничить перебором конечного числа угловых точек (их число меньше C_n^m , где n – число неизвестных, а m – число ограничений), однако построение возможно только для двух- и трёхмерных пространств, поэтому нужны аналитические методы, позволяющие находить координаты угловых точек.

Теорема 4.3. Если известно, что система векторов $A_1, A_2, \dots, A_k$ ($k \leq n$) в разложении (4.2) линейно независима и такова, что

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_kx_k = A_0,$$

где все $x_j \geq 0$, то точка $X = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ является вершиной многогранника решений.

Теорема 4.4. Если $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вершина многогранника решений, то векторы A_j в разложении (4.2), соответствующие положительным x_j , являются линейно независимыми.

Сформулированные теоремы позволяют сделать следующие выводы:

1. Непустое множество планов общей задачи линейного программирования образует выпуклый многогранник.
2. Каждая вершина этого многогранника определяет опорный план.
3. В одной из вершин многогранника решений (т. е. для одного из опорных планов) значение целевой функции является максимальным (при условии, что функция ограничена сверху на множестве планов).
4. Если максимальное значение функция принимает более чем в одной вершине, то это же значение она принимает в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией данных вершин.

5. Графический метод решения задач линейного программирования

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования и применяется в основном при решении задач двумерного пространства и только некоторых задач трёхмерного пространства, так как довольно трудно построить многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Задачу

пространства размерности больше трёх изобразить графически вообще невозможно.

Задача линейного программирования в стандартной форме с двумя переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \end{cases} \quad (5.1)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (5.2)$$

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max(\min) \quad . \quad (5.3)$$

Эти задачи допускают простое *геометрическое истолкование*.

Рассмотрим вначале геометрическое истолкование системы ограничений задачи. Каждую совокупность значений переменных x_1, x_2 можно изобразить точкой на плоскости, если ввести систему координат и по одной оси откладывать x_1 , а по другой x_2 . Выясним, что геометрически означает совокупность решений одного отдельно взятого неравенства: $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$.

Рассмотрим прямую на плоскости с уравнением: $a_1x_1 + a_2x_2 = b$. Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости, в одной из которых справедливо наше неравенство, а в другой - противоположное. Для того чтобы проверить, какая из полуплоскостей состоит из решений нашего неравенства, следует взять точку из какой-либо полуплоскости и проверить, выполняется ли наше неравенство в этой точке. Множество решений отдельно взятого линейного неравенства представляет собой полуплоскость. Для системы из нескольких таких неравенств точки, координаты которых удовлетворяют всем неравенствам одновременно, должны находиться во всех соответствующих полуплоскостях, т. е. принадлежать теоретико-множественному пересечению этих полуплоскостей. Множество точек на плоскости, удовлетворяющих системе ограничений, составляет, таким образом, некоторую выпуклую многоугольную область (область допустимых решений). Условия неотрицательности переменных $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ приводят к тому, что эта область находится в первой координатной четверти.

При решении двумерных задач линейного программирования возможны следующие ситуации (ОДР - область допустимых решений):

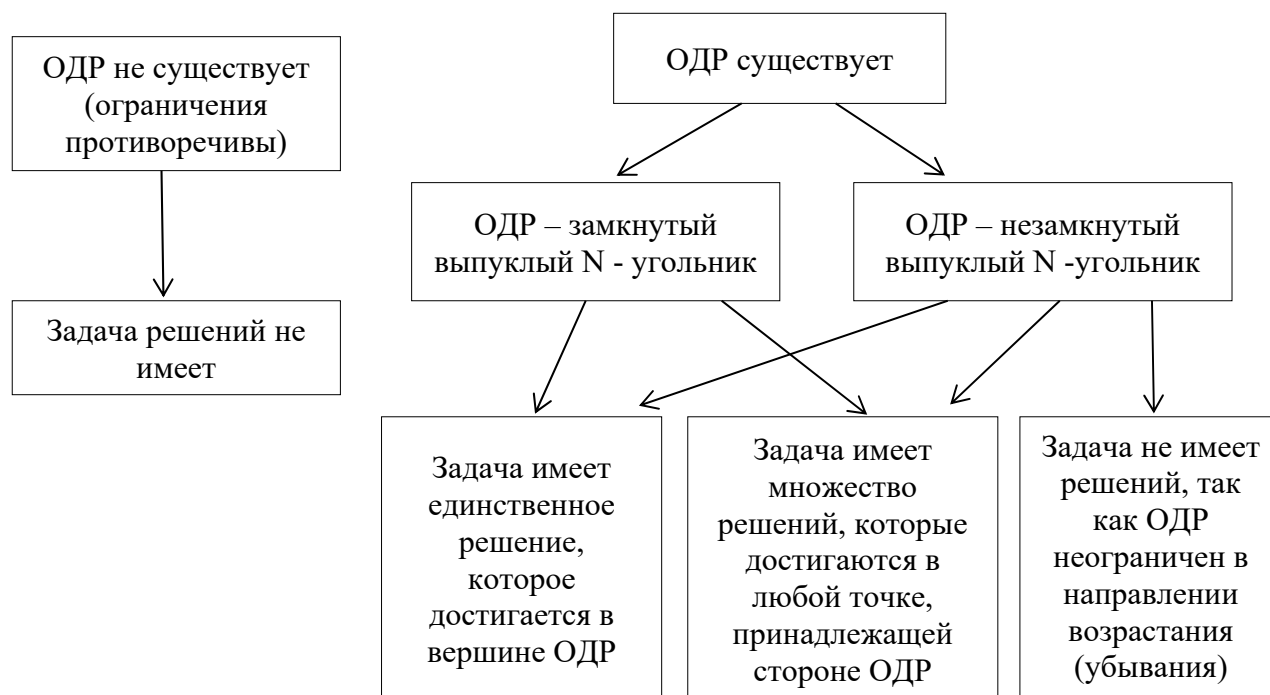


рис. 5.1

Таким образом, исходная задача линейного программирования состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в которой целевая функция F принимает максимальное значение. Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и на нем целевая функция ограничена сверху. При указанных условиях в одной из вершин многоугольника решений целевая функция принимает максимальное значение. Для определения данной вершины построим линию уровня $C_1x_1 + C_2x_2 = h$ (где h - некоторая постоянная), проходящую через многоугольник решений, и будем передвигать ее в направлении вектора $\vec{C} = (C_1, C_2)$ до тех пор, пока она не пройдет через последнюю ее общую точку с многоугольником решений. Координаты указанной точки и определяют оптимальный план данной задачи.

Отметим, что при нахождении решения задачи (5.1)-(5.3) могут встретиться случаи, изображенные на рис. 5.2– 5.5. Рис.5.2 характеризует такой случай, когда целевая функция принимает максимальное значение в единственной точке A . Из рис. 5.3 видно, что максимальное значение целевая функция принимает в любой точке отрезка AB . На рис.5.4 изображен случай, когда целевая функция неограничена сверху на множестве допустимых решений, а на рис.5.5 – случай, когда система ограничений задачи несовместна, т. е. если система неравенств (5.1) при условии (5.2) не имеет решений.

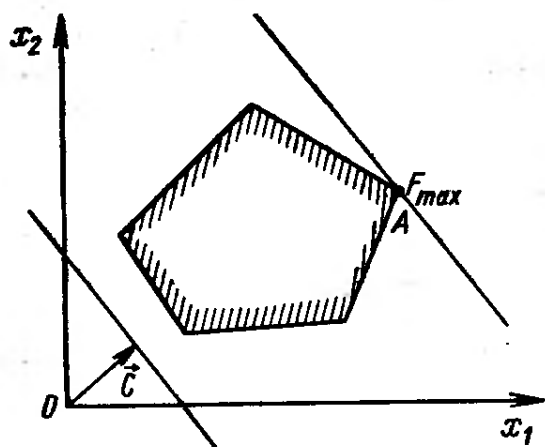


рис. 5.2

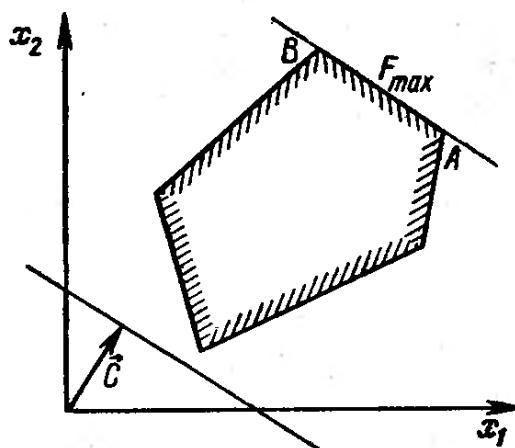


рис. 5.3

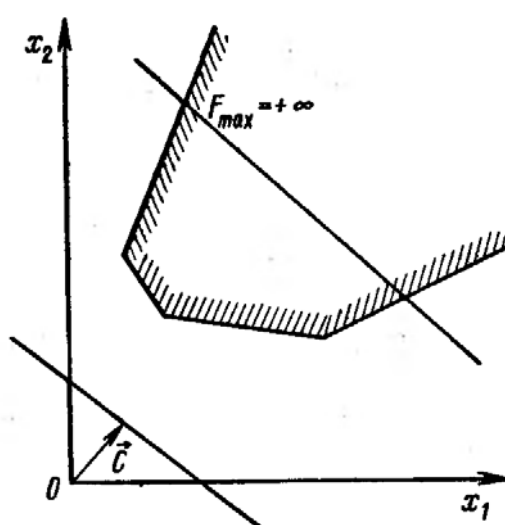


рис. 5.4

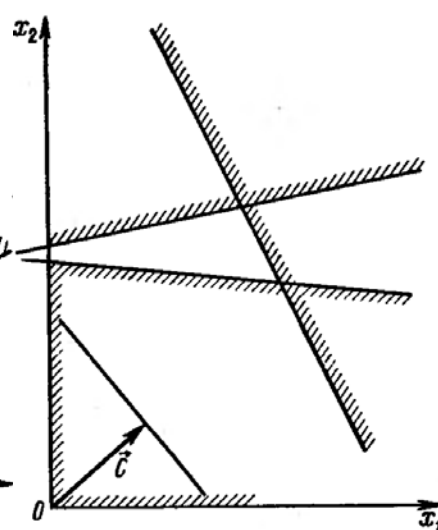


рис. 5.5

Также отметим, что нахождение минимального значения линейной функции при данной системе ограничений отличается от нахождения ее максимального значения при тех же ограничениях лишь тем, что линия уровня $C_1x_1 + C_2x_2 = h$ передвигается не в направлении вектора $\vec{C} = (C_1, C_2)$, а в противоположном направлении. Таким образом, отмеченные выше случаи, встречающиеся при нахождении максимального значения целевой функции, имеют место и при определении ее минимального значения.

Алгоритм графического метода решения ЗЛП

1. Построить область допустимых решений.
2. Если область допустимых решений является пустым множеством, то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.
3. Если область допустимых решений является непустым множеством, построить нормаль линий уровня $n = (c_1, c_2)$ и одну из линий уровня, имеющую общие точки с этой областью.

4. Линию уровня переместить до опорной прямой в задаче на максимум в направлении нормали, в задаче на минимум - в противоположном направлении.
5. Если при перемещении линии уровня по области допустимых решений в направлении, соответствующем приближению к экстремуму целевой функции, линия уровня уходит в бесконечность, то задача не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции.
6. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то для его нахождения решить совместно уравнения прямых, ограничивающих область допустимых решений и имеющих общие точки с соответствующей опорной прямой. Если целевая функция задачи достигает экстремума в двух угловых точках, то задача имеет бесконечное множество решений. Оптимальным решением является любая выпуклая линейная комбинация этих точек. После нахождения оптимальных решений вычислить значение целевой функции на этих решениях.

Задача 5.1. Пусть имеется два станка (S_1, S_2), на каждом из которых можно производить два вида продукции (P_1, P_2). Станок S_1 производит единицу продукции P_1 за 1 час, а единицу продукции P_2 - за 2 часа. Станок S_2 затрачивает на единицу продукции P_1 - 2 часа, а на единицу продукции P_2 - 1 час. Станок S_1 может работать в сутки не более 10 ч., а станок S_2 - не более 8 ч. Стоимость единицы продукции P_1 составляет C_1 руб., а стоимость единицы продукции P_2 - C_2 руб. Требуется определить такие объемы выпуска продукции P_1 и P_2 на станок, чтобы выручка от реализации производственной продукции была максимальной.

Решение. Для наглядности сведем условие задачи в таблицу 5.1.

Таблица 5.1

Вид ресурса	Число единиц ресурса, затрачиваемое на изготовление единицы продукции		Запас ресурса
	P_1	P_2	
S_1	1	2	10
S_2	2	1	8
Прибыль за единицу продукции	C_1	C_2	

Составим математическую модель задачи. Обозначим через x_1 и x_2 количества продукции P_1 и P_2 , которые планируется произвести на каждом отдельном станке. Стоимость произведенной продукции $F = c_1x_1 + c_2x_2$. Мы должны назначить x_1 и x_2 так, чтобы величина F была максимальной. Переменные x_1, x_2 не могут принимать произвольных значений. Их значения ограничены условиями производства, а именно тем, что станки могут работать ограниченное время. На изготовление продукции P_1 станок S_1 тратит

$1x_1$ часов, а на изготовление продукции $P_2 - 2x_2$ часов. Поскольку время работы станка S_1 не превосходит 10 ч, то величины x_1 и x_2 должны удовлетворять неравенству: $x_1 + 2x_2 \leq 10$. Аналогично можно получить неравенство для станка S_2 : $2x_1 + x_2 \leq 8$. Кроме того, величины x_1 и x_2 не могут быть отрицательными: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ по смыслу задачи.

Такие задачи кратко записываются следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \end{cases} \quad (5.4)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (5.5)$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max. \quad (5.6)$$

Итак, математическая модель задачи: найти такой план выпуска продукции $X = (x_1, x_2)$, удовлетворяющий системе (5.4) и условию (5.5), при котором функция (5.6) принимает максимальное значение.

Решения, удовлетворяющие системе ограничений (5.4) и требованиям неотрицательности (5.5), являются допустимыми, а решения, удовлетворяющие одновременно и требованию (5.6) – оптимальными.

Рассмотрим геометрическое истолкование задачи. Возьмем $c_1 = 1$ и $c_2 = 1$.

Математическая модель задачи:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (5.7) \\ F = 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

Построение области допустимых решений целевой функции F :

1. Построим прямоугольную систему координат. Так как, x_1 и x_2 неотрицательны, то можно ограничиться рассмотрением первого квадранта.

Рассмотрим первое ограничение: $x_1 + 2x_2 \leq 10$ (5.8)

x_1	0	10
x_2	5	0

Рассмотрим второе ограничение: $2x_1 + x_2 \leq 8$ (5.9)

x_1	0	4
x_2	8	0

Отложим полученные точки на числовых осях и найдем полуплоскости, которые соответствуют данным ограничениям.

2. Построим нормаль линий уровня $n = (c_1, c_2)$.
3. Линию уровня F переместим до опорной прямой в направлении нормали, т.к. в задаче необходимо определить максимум целевой функции.
4. Точкой максимума здесь является точка C , координаты которой определяются из системы уравнений (5.4), решая которую, получаем точку максимума $C(2,4)$, $F_{\max} = 6$. (см. рис.5.6)

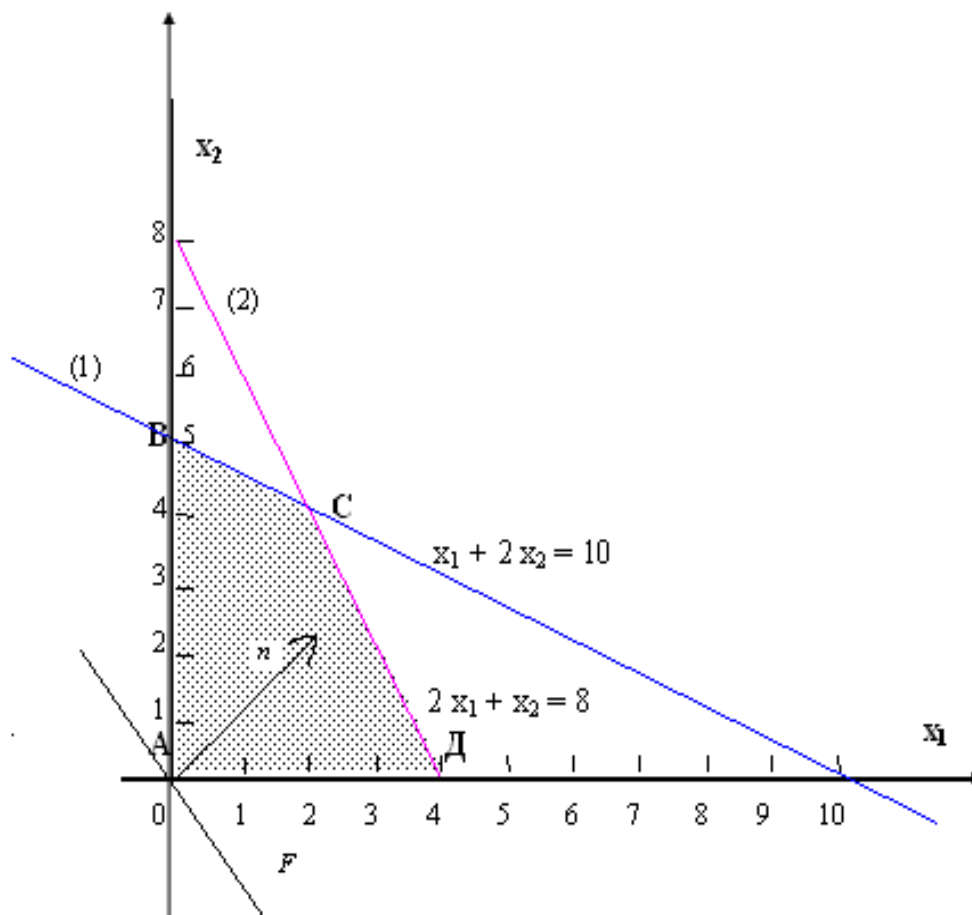


рис.5.6

Двумерные задачи линейного программирования решаются графически.

Для случая $N=3$ можно рассмотреть трехмерное пространство и целевая функция будет достигать своего оптимального значения в одной из вершин многогранника.

В общем виде, когда в задаче участвуют N неизвестных, можно сказать, что область допустимых решений, задаваемая системой ограничивающих условий, представляется **выпуклым многогранником** в n -мерном пространстве и оптимальное значение целевой функции достигается в одной или нескольких вершинах.

Для решения ЗЛП любой размерности существует универсальный способ решения задач линейного программирования, называемый **симплекс-методом**.

6. Симплекс-метод

Существует такая угловая точка многогранника решений, в которой линейная функция достигает своего наименьшего (наибольшего) значения. Каждой угловой точке многогранника решений соответствует опорный план. Каждый опорный план определяется системой m линейно независимых векторов, содержащихся в данной системе из n векторов, $A_1, A_2, \dots, A_n$. Для отыскания оптимального плана необходимо исследовать только опорные планы. Верхняя граница количества опорных планов, содержащихся в данной задаче, определяется числом сочетаний C_n^m . При больших m и n найти оптимальный план, перебирая все опорные планы задачи, очень трудно. Поэтому необходимо иметь схему, позволяющую осуществлять упорядоченный переход от одного опорного плана к другому.

Такой схемой является симплекс-метод, который позволяет, исходя из известного опорного плана задачи, за конечное число шагов получить ее оптимальный план. Каждый из шагов (или итераций) состоит в нахождении нового плана, которому соответствует меньшее значение линейной функции, чем значение этой же функции в предыдущем плане. Процесс продолжают до получения оптимального плана. Если задача не обладает планами или ее линейная функция не ограничена на многограннике решений, то симплекс-метод позволяет установить это в процессе решения.

Построение опорных планов

Пусть поставлена задача линейного программирования: найти минимальное значение функции $F = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$ при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, n),$$

где $b_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$).

Предположим сначала, что система ограничений задачи содержит m единичных векторов, причем без ограничений общности можно положить, что единичными являются первые m векторов. Тогда необходимо минимизировать линейную функцию

$$F = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n \quad (6.1)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (6.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (6.3)$$

Запишем систему (6.2) в векторной форме:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_mA_m + x_{m+1}A_{m+1} + \dots + x_nA_n = A_0, \quad (6.4)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \dots \\ a_{m,m+1} \end{pmatrix}, \dots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Векторы $A_1, A_2, \dots, A_m$ — линейно независимые единичные векторы m -мерного пространства. Они и образуют базис этого пространства. Поэтому в разложении (6.4) за базисные неизвестные выбираем $x_1, x_2, \dots, x_m$, свободные неизвестные $x_{m+1}, \dots, x_n$ приравняем нулю и, учитывая, что $b_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$), а векторы $A_1, A_2, \dots, A_m$ — единичные, получаем первоначальный план:

$$X_0 = (x_1 = b_1; x_2 = b_2; \dots; x_m = b_m; x_{m+1} = 0; \dots; x_n = 0). \quad (6.5)$$

Плану (6.5) соответствует разложение

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_mA_m = A_0, \quad (6.6)$$

где векторы $A_1, A_2, \dots, A_m$ линейно независимы, следовательно, построенный первоначальный план является и опорным.

Рассмотрим, как, исходя из первоначального опорного плана (6.5), можно построить второй опорный план.

Векторы $A_1, A_2, \dots, A_m$ образуют базис в m -мерном пространстве, поэтому каждый из данных n векторов соотношения (6.4) можно разложить по векторам базиса, причем единственным образом:

$$A_j = \sum_{i=1}^m x_{ij}A_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Предположим, что для некоторого вектора, не входящего в базис, например, для вектора A_{m+1} , положителен хотя бы один из коэффициентов $x_{i,m+1}$ в разложении

$$x_{1,m+1}A_1 + x_{2,m+1}A_2 + \dots + x_{m,m+1}A_m = A_{m+1}. \quad (6.7)$$

Зададимся некоторой величиной $\theta > 0$ (пока неизвестной), умножим на нее обе части равенства (6.7) и вычтем результат почленно из равенства (6.6).

Получаем

$$(x_1 - \theta x_{1,m+1})A_1 + (x_2 - \theta x_{2,m+1})A_2 + \dots + (x_m - \theta x_{m,m+1})A_m + \theta A_{m+1} = A_0. \quad (6.8)$$

Таким образом, вектор

$$X_1 = (x_1 - \theta x_{1,m+1}; x_2 - \theta x_{2,m+1}; \dots; x_m - \theta x_{m,m+1}; 0; 0; \dots; 0)$$

является планом, если его компоненты неотрицательны.

Так как $\theta > 0$, то все компоненты вектора X_1 , в которые входят неположительные $x_{i,m+1}$, неотрицательны. Поэтому надо рассмотреть только компоненты, включающие положительные $x_{i,m+1}$ ($i = 1, \dots, m$), т. е. необходимо определить такое $\theta > 0$, при котором для всех $x_{i,m+1} > 0$

$$x_i - \theta x_{i,m+1} \geq 0. \quad (6.9)$$

Из (6.9) получаем $\theta \leq x_i/x_{i,m+1}$, следовательно, вектор X_1 - план задачи для любого θ , удовлетворяющего условию

$$0 < \theta \leq \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}}, \quad (6.10)$$

где минимум берется по i , для которых $x_{i,m+1} > 0$.

Опорный план не может содержать $m+1$ положительных компонент, поэтому в плане X_1 необходимо обратить в ноль по крайней мере одну из компонент.

Положим в (6.10), что

$$\theta = \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}}; \quad (6.11)$$

тогда компонента плана X_1 , для которой достигается минимум, обращается в ноль. Пусть эта компонента стоит на первом месте, т. е.

$$\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}} = \frac{x_1}{x_{1,m+1}}.$$

Подставляя значение θ_0 в (6.8), имеем

$$\begin{aligned} & \left(x_1 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{1,m+1} \right) A_1 + \left(x_2 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{2,m+1} \right) A_2 + \dots + \\ & + \left(x_m - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{m,m+1} \right) A_m + \frac{x_1}{x_{1,m+1}} A_{m+1} = A_0, \end{aligned}$$

откуда получаем разложение

$$x'_2 A_2 + x'_3 A_3 + \dots + x'_m A_m + x'_{m+1} A_{m+1} = A_0,$$

которому соответствует опорный план:

$$X_1 = (0; x'_2; x'_3; \dots; x'_m; x'_{m+1}; 0; \dots; 0),$$

где $x'_i = x_i - \theta_0 x_{i,m+1}$ ($i = 2, 3, \dots, m$), $x'_{m+1} = \theta_0$.

Исключение одного вектора из базиса и включение вместо него другого с помощью θ_0 соответствуют переходу от одного базиса к другому с помощью метода Жордана-Гаусса¹, поэтому система векторов $A_2, A_3, \dots, A_m, A_{m+1}$ линейно независима и является новым базисом.

Для определения следующего опорного плана необходимо любой вектор, не входящий в базис $A_2, A_3, \dots, A_m, A_{m+1}$, разложить по векторам этого базиса, а затем определить такое $\theta_0 > 0$, при котором исключался бы один из векторов этого базиса.

Таким образом, процесс получения новых опорных планов заключается в выборе вектора, который подлежит включению в базис, и определении вектора, подлежащего исключению из базиса. Критерий, используемый для определения вектора, который включается в базис, является одним из основных элементов симплекс-метода. Заметим, что если вектор A_{m+1} подлежит включению в базис, а в его разложении (6.7) все $x_{i,m+1} \leq 0$, то, очевидно, нельзя выбрать такое $\theta > 0$, которое исключало бы один из векторов разложения (6.8). В этом случае план X_1 содержит $m+1$ положительных компонент, а система векторов $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m, A_{m+1}$ линейно зависима и определяет не угловую, а внутреннюю точку многогранника решений, в которой линейная функция не может достигать минимального значения. Это указывает на то, что гиперплоскость, соответствующая линейной функции, не может стать опорной² к многограннику решений, как далеко ни перемещать ее в направлении, обратном вектору $\vec{C}$, т. е. линейная функция не ограничена на многограннике решений.

Таким образом, если система ограничений задачи линейного программирования при неотрицательных свободных членах содержит единичный базис, то без дополнительных вычислений можно получить первоначальный опорный план, а также коэффициенты разложения векторов по векторам базиса.

¹ Методом Жордана-Гаусса называется численный метод для решения систем линейных уравнений, который позволяет с помощью элементарных преобразований за конечное число шагов найти решение (если оно существует) и при необходимости получить обратную матрицу. Суть метода состоит в том, что, рассмотрев первое уравнение, а в нем неизвестное с коэффициентом, отличным от нуля (он в дальнейшем называется разрешающим элементом), и разделив первое уравнение на этот коэффициент, с помощью первого уравнения исключают это неизвестное из всех уравнений, кроме первого. Выбрав во втором уравнении неизвестное с коэффициентом, отличным от нуля, и разделив на него второе уравнение, с помощью второго уравнения исключают другое неизвестное из всех уравнений, кроме второго, и т. д., т. е. с помощью одного уравнения производят полное исключение одного неизвестного. Процесс продолжают до тех пор, пока не будут использованы все уравнения.

² Опорной плоскостью многогранника называется плоскость, имеющая с многогранником, расположенным по одну сторону от нее, хотя бы одну общую точку.

Отыскание оптимального плана. Условие оптимальности.

Предположим, что задача линейного программирования (6.1)-(6.3) обладает планами, и каждый ее опорный план невырожден. В этом случае для опорного плана (6.5) имеем:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_m A_m = A_0, \quad (6.12)$$

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_m C_m = F(X_0), \quad (6.13)$$

где все $x_i > 0$, а $F(X_0)$ — значение линейной функции, соответствующее этому плану.

Разложение любого вектора A_j по векторам данного базиса $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ единственное:

$$x_{1j} A_1 + x_{2j} A_2 + \dots + x_{mj} A_m = A_j (j = 1, \dots, n), \quad (6.14)$$

поэтому разложению вектора A_j в базисе соответствует и единственное значение линейной функции

$$x_{1j} C_1 + x_{2j} C_2 + \dots + x_{mj} C_m = F_j (j = 1, \dots, n), \quad (6.15)$$

где F_j — значение линейной функции, если в нее вместо неизвестных подставить соответствующие коэффициенты разложения j -го вектора по векторам базиса.

Обозначим через C_j коэффициент линейной функции, соответствующий вектору A_j . Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 6.1. Если для некоторого вектора A_j выполняется условие $F_j - C_j > 0$, то план X_0 не является оптимальным, и можно построить такой план X , для которого выполняется неравенство $F(X) < F(X_0)$.

Доказательство. Умножая (6.14) и (6.15) на $\theta > 0$ и вычитая результаты соответственно из (6.12) и (6.13), получаем

$$(x_1 - \theta x_{1j}) A_1 + (x_2 - \theta x_{2j}) A_2 + \dots + (x_m - \theta x_{mj}) A_m + \theta A_j = A_0, \quad (6.16)$$

$$(x_1 - \theta x_{1j}) C_1 + (x_2 - \theta x_{2j}) C_2 + \dots + (x_m - \theta x_{mj}) C_m + \theta C_j = \\ = F(X_0) - \theta(F_j - C_j). \quad (6.17)$$

В соотношении (6.17) к обеим частям прибавлена величина θC_j для $j = 1, \dots, n$. В (6.16) $x_1, x_2, \dots, x_m$ положительны, поэтому всегда можно выбрать такое $\theta > 0$, чтобы все коэффициенты при векторах $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m, A_j$ были неотрицательными, т. е. получить новый план задачи: $X = (x_1 - \theta x_{1j}; x_2 - \theta x_{2j}; \dots; x_m - \theta x_{mj}; 0; 0; \dots; 0)$, которому согласно (6.17) соответствует значение линейной функции

$$F(X) = F(X_0) - \theta(F_j - C_j). \quad (6.18)$$

Так как по условию теоремы $F_j - C_j > 0$ и $\theta > 0$, то $F(X) < F(X_0)$.

Следствие. Если для некоторого плана X_0 разложения всех векторов A_j ($j = 1, \dots, n$) в данном базисе удовлетворяют условию

$$F_j - C_j \leq 0, \quad (6.19)$$

то план X_0 является оптимальным.

Неравенства (6.19) являются условием оптимальности плана задачи, решаемой на отыскание минимального значения линейной функции, а значения $F_j - C_j$ называются оценками плана.

Таким образом, для того чтобы план задачи на отыскание минимального значения линейной функции был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы его оценки были неположительными.

Для задачи линейного программирования (6.1)-(6.3), заключающейся в отыскании максимального значения линейной функции, справедлива следующая теорема.

Теорема 6.2. Если для некоторого вектора A_j выполняется условие $F_j - C_j < 0$, то план X_0 не является оптимальным и можно построить такой план X , для которого выполняется неравенство $F(X) > F(X_0)$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 6.1.

Следствие. Если для некоторого плана X_0 разложения всех векторов A_j ($j = 1, \dots, n$) в данном базисе удовлетворяют условию

$$F_j - C_j \geq 0, \quad (6.20)$$

то план X_0 является оптимальным.

Неравенство (6.20) - условие оптимальности плана задачи на отыскание максимального значения линейной функции.

Таким образом, для того чтобы план задачи на отыскание максимального значения линейной функции был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы его оценки были неотрицательными.

Алгоритм симплекс-метода

Как следует из теоремы 6.1, и теоремы 6.2, и следствий, начиная с исходного опорного плана задачи можно получить последовательность опорных планов, завершающихся оптимальным планом.

Продолжим рассмотрение задачи линейного программирования (6.1)-(6.3) на отыскание минимального значения линейной функции, опорный план которой $X_0 = (x_1 = b_1; x_2 = b_2; \dots; x_m = b_m; x_{m+1} = 0; \dots; x_n = 0)$ определяется системой m -мерных единичных векторов $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$. Для исследования этого опорного плана на оптимальность необходимо векторы A_j ($j = 1, \dots, n$) системы (6.2) разложить по векторам базиса $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ и подсчитать значения оценок $F_j - C_j$. Базис является единичным, поэтому коэффициентами разложения вектора A_j по базису служат его компоненты, т. е. $x_{ij} = a_{ij}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$). Дальнейшие вычисления удобнее проводить, если условия задачи и первоначальные данные, полученные после определения первого опорного плана, записать в симплексную таблицу (таблица 6.1). В столбце C базиса запишем коэффициенты линейной функции, соответствующие векторам базиса. В столбце A_0 - первоначальный опорный план X_0 , в нем же в результате вычислений получаем оптимальный план, в столбцах A_j ($j = 1, \dots, n$) записываем коэффициенты разложения j -го вектора по базису, обозначаемые

в дальнейшем через X_j . В $(m+1)$ -й строке в столбце A_0 записываем значения линейной функции $F(X_0)$, которое она принимает при найденном опорном плане, а в столбцах A_j - значения оценок $F_j - C_j$. Функции $F(X_0)$ и $F_j = F(X_j)$ находим, подставляя в линейную функцию соответственно компоненты опорного плана и коэффициенты разложения j -го вектора по векторам базиса, поэтому эти значения в таблице 6.1 можно получить как скалярное произведение:

$$F(X_0) = C_0 X_0 = \sum_{i=1}^m C_i x_i,$$

$$F_j = C_0 X_j = \sum_{i=1}^m C_i x_{ij}, j = 1, \dots, n,$$

где C_i - коэффициенты линейной функции, соответствующие векторам базиса.

Таблица 6.1

i	$\bar{o}a\bar{z}\bar{u}\bar{c}$	$C_{\bar{o}}$	A_0	C_1	C_2	$\dots$	C_l	$\dots$	C_m	C_{m+1}	$\dots$	C_j	$\dots$	C_k	$\dots$	C_n
				A_1	A_2	$\dots$	A_l	$\dots$	A_m	A_{m+1}	$\dots$	A_j	$\dots$	A_k	$\dots$	A_n
1	A_1	C_1	x_1	1	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$x_{1,m+1}$	$\dots$	x_{1j}	$\dots$	x_{1k}	$\dots$	x_{1n}
2	A_2	C_2	x_2	0	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$x_{2,m+1}$	$\dots$	x_{2j}	$\dots$	x_{2k}	$\dots$	x_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
l	A_l	C_l	x_l	0	0	$\dots$	1	$\dots$	0	$x_{l,m+1}$	$\dots$	x_{lj}	$\dots$	x_{lk}	$\dots$	x_{ln}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
m	A_m	C_m	x_m	0	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$x_{m,m+1}$	$\dots$	x_{mj}	$\dots$	x_{mk}	$\dots$	x_{mn}
$m+1$	$F_j - C_j$	F_0	0	0	$\dots$	0	0	$\dots$	0	$F_{m+1} - C_{m+1}$	$\dots$	$F_j - C_j$	$\dots$	$F_k - C_k$	$\dots$	$F_n - C_n$

После составления таблицы 6.1 просматриваем $(m+1)$ -ю строку. Если для всех $j = 1, \dots, n$ разности $F_j - C_j \leq 0$, то опорный план X_0 оптимальный и минимальное значение линейной функции равно $F(X_0)$.

Пусть одна из оценок $F_j - C_j > 0$; тогда план X_0 не является оптимальным и, включая в базис вектор, соответствующий этой оценке, можно построить другой опорный план, которому соответствует меньшее значение линейной функции.

Если положительных оценок несколько, то на основании соотношения (6.18) в базис должен быть включен вектор, которому соответствует $\max[\theta_{0j}(F_j - C_j)]$, где максимум берется по тем j , для которых $F_j - C_j > 0$ и θ_{0j} определяется для каждого j . Это дает возможность на данном шаге перейти к вершине многогранника решений, связанной с наибольшим уменьшением линейной функции и в большинстве случаев приводящей к уменьшению количества итераций, что при решении задачи «вручную» позволяет быстрее получить оптимальное решение. При решении задачи на компьютере вектор, подлежащий включению в базис, выбирается по

$\max(F_j - C_j)$. Если имеется несколько одинаковых максимальных значений $\theta_{0j}(F_j - C_j)$, то из соответствующих им векторов включается в базис прежде всего вектор, которому соответствует $\min C_j$. Если хотя бы для одной положительной оценки $F_j - C_j > 0$ коэффициенты разложения x_{ij} соответствующего вектора неположительны, то линейная функция не ограничена на многограннике решений и, выбирая θ , ее значение можно сделать сколь угодно малым; многогранник решений в этом случае представляет собой неограниченную многогранную область.

Пусть $\max[\theta_{0j}(F_j - C_j)] = \theta_{0k}(F_k - C_k)$, т. е. максимальное значение достигается для k -го вектора, $m < k \leq n$. Тогда в базис включается вектор A_k и исключается вектор, которому соответствует $\theta_{0k} = \min(x_i/x_{ik})(x_{ik} > 0)$.

Допустим, что $\theta_{0k} = \min(x_i/x_{ik}) = x_l/x_{lk}$ достигается для вектора базиса, состоящего в l -й строке; тогда вектор A_l исключается из базиса. Элемент x_{lk} называется разрешающим, а столбец и строка, на пересечении которых он находится, - направляющими. Новому опорному плану соответствует базис, состоящий из векторов $A_1, \dots, A_{l-1}, A_k, A_{l+1}, \dots, A_m$.

Чтобы вычислить новый опорный план и проверить его на оптимальность, необходимо все векторы A_0, A_j ($j = 1, \dots, n$) разложить по векторам базиса.

Первоначальный базис был единичным $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_m) = E$, поэтому

$$A_0 = x_1 A_1 + \dots + x_l A_l + \dots + x_m A_m, \quad (6.21)$$

$$A_k = x_{1k} A_1 + \dots + x_{lk} A_l + \dots + x_{mk} A_m, \quad (6.22)$$

$$A_j = x_{1j} A_1 + \dots + x_{lj} A_l + \dots + x_{mj} A_m. \quad (6.23)$$

Из (6.22) имеем

$$A_l = 1/x_{lk}(A_k - x_{1k}A_1 - \dots - x_{mk}A_m). \quad (6.24)$$

Подставляя выражение A_l в (6.21), получаем

$$A_0 = x_1 A_1 + \dots + x_l \left[\frac{1}{x_{lk}} (A_k - x_{1k}A_1 - \dots - x_{mk}A_m) \right] + \dots + x_m A_m,$$

или

$$A_0 = (x_1 - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{1k}) A_1 + \dots + \frac{x_l}{x_{lk}} A_k + \dots + (x_m - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{mk}) A_m.$$

Таким образом, новый опорный план $X_0 = (x'_1, x'_2, \dots, x'_k, \dots, x'_m)$ вычисляется по формулам

$$\begin{cases} x'_i = x_i - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{ik} (i \neq l), \\ x'_k = \frac{x_l}{x_{lk}} (i = l). \end{cases} \quad (6.25)$$

Подставляя в (6.24), в (6.23), получаем разложение вектора A_j по векторам нового базиса:

$$A_j = x'_{1j} A_1 + \dots + x'_{kj} A_k + \dots + x'_{mj} A_m,$$

где

$$\begin{cases} x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik} (i \neq l), \\ x'_{kj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}} (i = l). \end{cases} \quad (6.26)$$

Объединяя (6.25) и (6.26), находим, что новый опорный план и разложения векторов в новом базисе при $j = 0, 1, \dots, n$ определяются по формулам

$$\begin{cases} x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik} (i \neq l), \\ x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}} (i = l). \end{cases} \quad (6.27)$$

Полагая $j=k$, имеем

$$\begin{cases} x'_{ik} = x_{ik} - \frac{x_{lk}}{x_{lk}} x_{ik} = 0 \quad (i \neq l), \\ x'_{lk} = \frac{x_{lk}}{x_{lk}} = 1 \quad (i = l), \end{cases}$$

т. е. все коэффициенты разложения вектора, вводимого в базис, за исключением одного, обращаются в ноль, а коэффициент, взятый за разрешающий элемент, – в единицу. Вектору базиса соответствует оценка равная нулю, поэтому для вычисления значений $(m+1)$ -й строки также используем формулы (6.27).

Таким образом, чтобы получить коэффициенты разложения векторов A_0, A_j ($j = 1, \dots, n$) по векторам нового базиса, значения оценок нового опорного плана и значение линейной функции, нужно разделить все элементы направляющей строки на разрешающий элемент и, производя одно полное исключение по методу Жордана-Гаусса с помощью этой преобразованной строки, составить симплексную таблицу 6.2.

Формулы

$$F(X_0) = C_0 X_0; F_j - C_j = C_0 X_j - C_j \quad (6.28)$$

используют для контроля за правильностью произведенных вычислений.

Если в таблице 6.2 в $(m+1)$ -й строке все оценки $F_j - C_j \leq 0$, то полученный план X_0 является оптимальным; если же имеются положительные оценки, то отыскивают следующий опорный план.

Процесс продолжают либо до получения оптимального плана, либо до установления неограниченности линейной функции решаемой задачи. Если среди оценок оптимального плана нулевые только оценки, соответствующие базисным векторам, то это говорит о единственности оптимального плана. Если же нулевая оценка соответствует вектору, не входящему в базис, то в общем случае это означает, что оптимальный план не единственный.

Используя теорему 6.2 и ее следствие, решаем задачу линейного программирования на поиск максимального значения линейной функции.

Таблица 6.2

i	базис	C_6	A_0	C_1	C_2	...	C_l	...	C_m	C_{m+1}	...	C_j	...	C_k	...	C_n
				A_1	A_2	...	A_l	...	A_m	A_{m+1}	...	A_j	...	A_k	...	A_n
1	A_1	C_1	x'_1	1	0	...	x'_{1l}	...	0	$x'_{1,m+1}$	...	x'_{1j}	...	0	...	x'_{1n}
2	A_2	C_2	x'_2	0	1	...	x'_{2l}	...	0	$x'_{2,m+1}$	...	x'_{2j}	...	0	...	x'_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
l	A_k	C_k	x'_k	0	0	...	x'_{lk}	...	0	$x'_{l,m+1}$	...	x'_{lj}	...	1	...	x'_{ln}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	A_m	C_m	x'_m	0	0	...	x'_{ml}	...	1	$x'_{m,m+1}$	...	x'_{mj}	...	0	...	x'_{mn}
$m+1$	$F_j - C_j$		F'_0	0	0	...	$F'_l - C_l$	...	0	$F'_{m+1} - C_{m+1}$	...	$F'_j - C_j$	...	0	...	$F'_n - C_n$

При невыполнении условия оптимальности (6.20) в базис включают в первую очередь тот вектор, которому соответствует $\min[\theta_{0j}(F_j - C_j)]$, где минимум берется по тем j , для которых $F_j - C_j < 0$. Если минимальных оценок несколько, то в базис прежде всего включают вектор, которому соответствует $\max C_j$. В остальном симплексный процесс аналогичен процессу, имеющему место при отыскании минимального значения линейной функции.

Рассмотрим порядок решения задачи с помощью симплекс-таблиц на примере.

Задача 6.1 (об использовании сырья) Для производства четырех видов изделий A_1, A_2, A_3, A_4 завод должен использовать три вида сырья I, II, III, запасы которого на планируемый период составляют соответственно 1000, 600 и 150 условных единиц. В приведенной ниже таблице даны технологические коэффициенты, т. е. расход каждого вида сырья на производство единицы каждого изделия и прибыль от реализации единицы изделия каждого вида.

Таблица 6.3

Виды сырья	Запасы сырья	Технологические коэффициенты			
		A_1	A_2	A_3	A_4
I	1000	5	1	0	2
II	600	4	4	2	1
III	150	1	0	2	1
Прибыль от реализации		6	2	2,5	4

Требуется составить такой план выпуска указанных изделий, чтобы обеспечить максимальную прибыль от их реализации.

Решение. Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 количество единиц соответствующих изделий A_1, A_2, A_3, A_4 .

Тогда математическая модель задачи будет следующая:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_4 \leq 1000 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 600 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \leq 150 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

$$F = 6x_1 + 2x_2 + 2,5x_3 + 4x_4 \rightarrow \max$$

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных неотрицательных переменных (**переход к канонической форме**). В 1-м неравенстве вводим базисную переменную x_5 . Во 2-м неравенстве вводим базисную переменную x_6 . В 3-м неравенстве вводим базисную переменную x_7 .

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = 1000 \\ 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 1 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = 600 \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 1 \cdot x_7 = 150 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 7.$$

Матрица коэффициентов $A = a(ij)$ этой системы уравнений имеет вид:

5	1	0	2	1	0	0
4	2	2	1	0	1	0
1	0	2	1	0	0	1

Базисные переменные – это переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений, и притом с единичным коэффициентом.

Экономический смысл дополнительных переменных: дополнительные переменные ЗЛП обозначают излишки сырья, времени, других ресурсов, остающихся в производстве данного оптимального плана.

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x_5, x_6, x_7 .

Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план: $X_1 = (0, 0, 0, 0, 1000, 600, 150)$

Базисное решение называется допустимым, если оно неотрицательно.

Таблица 6.4

Базис	В	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
x ₅	1000	5	1	0	2	1	0	0
x ₆	600	4	2	2	1	0	1	0
x ₇	150	1	0	2	1	0	0	1
F(X ₀)	0	-6	-2	-2.5	-4	0	0	0

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

Итерация №0.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В индексной строке F(x) выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x₁, так как это наибольший коэффициент по модулю.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления b_i / a_{i1} и из них выберем наименьшее: $\min\left(\frac{1000}{5}; \frac{600}{4}; \frac{150}{1}\right) = 150$. Следовательно, 2-ая строка является ведущей. Разрешающий элемент равен 4 и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Таблица 6.5

Базис	В	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	min
x ₅	1000	5	1	0	2	1	0	0	200
x ₆	600	4	2	2	1	0	1	0	150
x ₇	150	1	0	2	1	0	0	1	150
F(X ₁)	0	-6	-2	-2.5	-4	0	0	0	0

Поскольку в последнем столбце присутствует несколько минимальных элементов 150, то номер строки выбираем по **правилу Креко**.

Метод Креко заключается в следующем. Элементы строк, имеющие одинаковые наименьшие значения min=150, делятся на предполагаемые разрешающие элементы, а результаты заносятся в дополнительные строки. За ведущую строку выбирается та, в которой раньше встретится наименьшее частное при чтении таблицы слева направо по столбцам.

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_6 в план 1 войдет переменная x_1 . Строка, соответствующая переменной x_1 в плане 1, получена в результате деления всех элементов строки x_6 плана 0 на разрешающий элемент $PЭ=4$. На месте разрешающего элемента в плане 1 получаем 1. В остальных клетках столбца x_1 плана 1 записываем нули. Таким образом, в новом плане 1 заполнены строка x_1 и столбец x_1 . Все остальные элементы нового плана 1, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника. Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент $PЭ \cdot HЭ = СТЭ - (A \cdot B) / PЭ$, $СТЭ$ - элемент старого плана, $PЭ$ - разрешающий элемент (4), A и B - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами $СТЭ$ и $PЭ$. Представим расчет каждого элемента в виде таблицы 6.6:

Таблица 6.6

В	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$1000 - \frac{600 \cdot 5}{4} = 250$	$5 - \frac{4 \cdot 5}{4} = 0$	$1 - \frac{2 \cdot 5}{4} = -1.5$	$0 - \frac{2 \cdot 5}{4} = -2$	$2 - \frac{1 \cdot 5}{4} = 0.75$	$1 - \frac{0 \cdot 5}{4} = 1$	$0 - \frac{1 \cdot 5}{4} = -1.25$	$0 - \frac{0 \cdot 5}{4} = 0$
$600/4 = 150$	$4/4 = 1$	$2/4 = 0.5$	$2/4 = 0.5$	$1/4 = 0.25$	$0/4 = 0$	$1/4 = 0.25$	$0/4 = 0$
$150 - \frac{600 \cdot 1}{4} = 0$	$1 - \frac{4 \cdot 1}{4} = 0$	$0 - \frac{2 \cdot 1}{4} = -0.5$	$2 - \frac{2 \cdot 1}{4} = 1.5$	$1 - \frac{1 \cdot 1}{4} = 0.75$	$0 - \frac{0 \cdot 1}{4} = 0$	$0 - \frac{1 \cdot 1}{4} = -0.25$	$1 - \frac{0 \cdot 1}{4} = 1$
$0 - \frac{600(-6)}{4} = 900$	$-6 - \frac{4(-6)}{4} = 0$	$-2 - \frac{2(-6)}{4} = 1$	$-2.5 - \frac{2(-6)}{4} = 0.5$	$-4 - \frac{1(-6)}{4} = -2.5$	$0 - \frac{0(-6)}{4} = 0$	$0 - \frac{1(-6)}{4} = 1.5$	$0 - \frac{0(-6)}{4} = 0$

После преобразований получаем новую таблицу 6.7:

Таблица 6.7

Базис	В	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	250	0	-1.5	-2.5	0.75	1	-1.25	0
x_1	150	1	0.5	0.5	0.25	0	0.25	0
x_7	0	0	-0.5	1.5	0.75	0	-0.25	1
$F(x_1)$	900	0	1	0.5	-2.5	0	1.5	0

Итерация №1

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В индексной строке $F(x)$ выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_4 , так как это наибольший коэффициент по модулю.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i4} и из них выберем наименьшее: $\min\left(\frac{250}{0,75}; \frac{150}{0,25}; \frac{0}{0,75}\right) = 0$. Следовательно, 3-ая строка является ведущей. Разрешающий элемент равен (0.75) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Таблица 6.8

Базис	В	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	min
x ₅	250	0	-1.5	-2.5	0.75	1	-1.25	0	333.33
x ₁	150	1	0.5	0.5	0.25	0	0.25	0	600
x ₇	0	0	-0.5	1.5	0.75	0	-0.25	1	0
F(X2)	900	0	1	0.5	-2.5	0	1.5	0	0

4. Пересчет симплекс-таблицы

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_7 в план 2 войдет переменная x_4 . Строка, соответствующая переменной x_4 в плане 2, получена в результате деления всех элементов строки x_7 плана 1 на разрешающий элемент $PЭ=0.75$. На месте разрешающего элемента в плане 2 получаем 1. В остальных клетках столбца x_4 плана 2 записываем нули. Таким образом, в новом плане 2 заполнены строка x_4 и столбец x_4 . Все остальные элементы нового плана 2, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника. После преобразований получаем новую таблицу 6.9:

Таблица 6.9

Базис	В	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
x ₅	250	0	-1	-4	0	1	-1	-1
x ₁	150	1	0.67	0	0	0	0.33	-0.33
x ₄	0	0	-0.67	2	1	0	-0.33	1.33
F(X2)	900	0	-0.67	5.5	0	0	0.67	3.33

Итерация №2

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В индексной строке $F(x)$ выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_2 , так как это наибольший коэффициент по модулю.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления b_i / a_{i2} и из них выберем наименьшее: $\min\left(-; \frac{150}{0,67}; -\right) = 225$. Следовательно, 2-ая строка является ведущей. Разрешающий элемент равен (0.67) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Таблица 6.10

Базис	В	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	min
x_5	250	0	-1	-4	0	1	-1	-1	-
x_1	150	1	0.67	0	0	0	0.33	-0.33	225
x_4	0	0	-0.67	2	1	0	-0.33	1.33	-
$F(X_3)$	900	0	-0.67	5.5	0	0	0.67	3.33	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_1 в план 3 войдет переменная x_2 . Строка, соответствующая переменной x_2 в плане 3, получена в результате деления всех элементов строки x_1 плана 2 на разрешающий элемент $PЭ=0.67$. На месте разрешающего элемента в плане 3 получаем 1. В остальных клетках столбца x_2 плана 3 записываем нули. Таким образом, в новом плане 3 заполнены строка x_2 и столбец x_2 . Все остальные элементы нового плана 3, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника. После преобразований получаем новую таблицу 6.11:

Таблица 6.11

Базис	В	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	475	1.5	0	-4	0	1	-0.5	-1.5
x_2	225	1.5	1	0	0	0	0.5	-0.5
x_4	150	1	0	2	1	0	0	1
$F(X_3)$	1050	1	0	5.5	0	0	1	3

1. Проверка критерия оптимальности.

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи:

$$x_2 = 225$$

$$x_4 = 150$$

$$F(X) = 2 \cdot 225 + 4 \cdot 150 = 1050.$$

Ответ. Оптимальным будет решение $(0; 225; 0; 150; 475; 0; 0)$, при котором $F_{max} = 1050$, т. е. для получения наибольшей прибыли, равной 1050 денежных единиц, предприятие должно выпустить 225 единиц продукции вида A_2 , 150 единиц продукции вида A_4 (продукцию вида A_1 и A_3 в данных условиях производить невыгодно); при этом сырье типа II и III будет использовано полностью, а 475 единиц сырья типа I останутся неизрасходованными.

7. Метод искусственного базиса

Если ограничения задачи линейного программирования можно преобразовать к виду $AX \leq A_0$ при $A_0 \geq 0$, то система ограничений всегда содержит единичную матрицу. Многие задачи линейного программирования, имеющие решения, не содержат единичной матрицы и не приводятся к указанному виду. В этом случае для решения задач применяется **метод искусственного базиса**.

Рассмотрим общую задачу линейного программирования.

Найти минимальное значение линейной функции

$$F = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, n),$$

где $b_i \geq 0$ и система ограничений не содержит единичной матрицы.

Для получения единичной матрицы к каждому равенству прибавим по одной переменной $x_{n+i} \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$), которые назовем искусственными, и рассмотрим расширенную задачу, связанную с отысканием наименьшего значения линейной функции

$$\bar{F} = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n + Mx_{n+1} + \dots + Mx_{n+m}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, n + m).$$

Величина M предполагается достаточно большим положительным числом, если задача решается на отыскание минимального значения линейной функции, и достаточно малым отрицательным числом, если

находится максимальное значение линейной функции. Единичные векторы $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_{n+m}$, соответствующие искусственным переменным, образуют искусственный базис.

Для отыскания оптимального плана исходной задачи используют следующую теорему.

Теорема 7.1. Если в оптимальном плане $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ расширенной задачи искусственные переменные $x_{n+i} = 0$ ($i = 1, \dots, m$), то план $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ является оптимальным планом исходной задачи.

Доказательство. Заметим, что если план $\bar{X}$ — оптимальный план расширенной задачи, то план X — план первоначальной задачи, при этом $\bar{F}(\bar{X}) = F(X)$. Равенство значений функции следует из того, что план $\bar{X}$ от плана X отличается m последними компонентами, равными нулю.

Докажем, что план X — оптимальный план исходной задачи. Допустим, что X не является оптимальным планом. Тогда существует такой оптимальный план $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, для которого $F(X^*) < F(X)$. Отсюда для вектора $\bar{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, 0, \dots, 0)$, являющегося планом расширенной задачи, получаем

$$\bar{F}(\bar{X}^*) = F(X^*) < F(X) = \bar{F}(\bar{X}),$$

т. е.

$$\bar{F}(\bar{X}^*) < \bar{F}(\bar{X}).$$

Таким образом, план $\bar{X}$ расширенной задачи не является оптимальным, что противоречит условию теоремы.

Применение симплекс-метода к расширенной задаче обеспечивает построение плана, в котором каждая из искусственных переменных $x_{n+i} = 0$. Если первоначальная задача не обладает планами (т. е. она не совместна), то оптимальное решение расширенной задачи содержит, по крайней мере, одно $x_{n+i} > 0$.

Для отыскания оптимального плана расширенной задачи в случае, если заранее не задана величина M , применяется симплекс-метод с составлением симплексных таблиц, которые имеют на одну строку больше, чем обычная симплексная таблица. По этой $(m+2)$ -й строке определяют вектор, подлежащий включению в базис. Итерационный процесс по $(m+2)$ -й строке проводят для исключения из базиса всех искусственных векторов, затем процесс отыскания оптимального плана продолжают по $(m+1)$ -й строке.

Задача 7.1. Решить задачу линейного программирования

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4 \leq 12 \\ 4x_1 - 13x_2 + 10x_3 + 5x_4 \geq 6 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

$$F = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 8x_4 \rightarrow \min$$

Решение. Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (**переход к канонической форме**). В 1-м неравенстве вводим базисную переменную x_5 . В 2-м неравенстве вводим базисную переменную x_6 со знаком минус. В 3-м неравенстве вводим базисную переменную x_7 со знаком минус:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 12 \\ 4x_1 - 13x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 0x_5 - 1x_6 + 0x_7 = 6 \\ 3x_1 + 7x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - 1x_7 = 1 \end{cases}$$

Введем **искусственные переменные**: в 2-м равенстве вводим переменную x_8 ; в 3-м равенстве вводим переменную x_9 .

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 = 12 \\ 4x_1 - 13x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 0x_5 - 1x_6 + 0x_7 + 1x_8 + 0x_9 = 6 \\ 3x_1 + 7x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - 1x_7 + 0x_8 + 1x_9 = 1 \end{cases}$$

Для постановки задачи на минимум целевую функцию запишем так:
 $F(X) = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 8x_4 + Mx_8 + Mx_9 \rightarrow \min.$

За использование искусственных переменных, вводимых в целевую функцию, накладывается так называемый штраф величиной M , очень большое положительное число, которое обычно не задается. Полученный базис называется искусственным, а метод решения называется методом искусственного базиса.

Причем искусственные переменные не имеют отношения к содержанию поставленной задачи, однако они позволяют построить стартовую точку, а процесс оптимизации вынуждает эти переменные принимать нулевые значения и обеспечить допустимость оптимального решения.

Из уравнений выражаем искусственные переменные:

$$x_8 = 6 - 4x_1 + 13x_2 - 10x_3 - 5x_4 + x_6,$$

$$x_9 = 1 - 3x_1 - 7x_2 - x_3 + x_7,$$

которые подставим в целевую функцию:

$$F(X) = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 8x_4 + M(6 - 4x_1 + 13x_2 - 10x_3 - 5x_4 + x_6) + M(1 - 3x_1 - 7x_2 - x_3 + x_7) \rightarrow \min$$

или

$$F(X) = (2 - 7M)x_1 + (5 + 6M)x_2 + (3 - 11M)x_3 + (8 - 5M)x_4 + (M)x_6 + (M)x_7 + (7M) \rightarrow \min.$$

Матрица коэффициентов $A = a(ij)$ этой системы уравнений имеет вид:

3	6	-4	1	1	0	0	0	0
4	-13	10	5	0	-1	0	1	0
3	7	1	0	0	0	-1	0	1

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x_5, x_8, x_9 .

Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план: $X_1 = (0, 0, 0, 0, 12, 0, 0, 6, 1)$.

Базисное решение называется допустимым, если оно неотрицательно.

Таблица 7.1

Базис	В	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	12	3	6	-4	1	1	0	0	0	0
x_8	6	4	-13	10	5	0	-1	0	1	0
x_9	1	3	7	1	0	0	0	-1	0	1
$F(X_0)$	7M	-2+7M	-5-6M	-3+11M	-8+5M	0	-M	-M	0	0

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

Итерация №0.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся положительные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_3 , так как это наибольший коэффициент.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления b_i / a_{i3} и из них выберем наименьшее: $\min\left(-; \frac{6}{10}; \frac{1}{1}\right) = \frac{3}{5}$. Следовательно, 2-ая строка является

ведущей. Разрешающий элемент равен (10) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Таблица 7.2

Базис	В	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	min
x_5	12	3	6	-4	1	1	0	0	0	0	-
x_8	6	4	-13	10	5	0	-1	0	1	0	$\frac{3}{5}$
x_9	1	3	7	1	0	0	0	-1	0	1	1
$F(X_1)$	7M	-2+7M	-5-6M	-3+11M	-8+5M	0	-M	-M	0	0	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_8 в план 1 войдет переменная x_3 . Строка, соответствующая переменной x_3 в плане 1, получена в результате деления всех элементов строки x_8 плана 0 на разрешающий элемент $PЭ=10$.

На месте разрешающего элемента в плане 1 получаем 1. В остальных клетках столбца x_3 плана 1 записываем нули. Таким образом, в новом плане 1 заполнены строка x_3 и столбец x_3 . Все остальные элементы нового плана 1, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника. Получаем новую симплекс-таблицу.

Таблица 7.3

Базис	В	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	$14\frac{2}{5}$	$4\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	3	1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	0
x_3	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-1\frac{3}{10}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	0
x_9	$\frac{2}{5}$	$2\frac{3}{5}$	$8\frac{3}{10}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{10}$	-1	$-\frac{1}{10}$	1
F(X1)	$14\frac{4}{5} + 2\frac{2}{5}M$	$-\frac{4}{5} + 2\frac{3}{5}M$	$-\frac{9}{10} + 8\frac{3}{10}M$	0	$-\frac{1}{6} - M$	0	$-\frac{3}{10} + M$	-M	$\frac{3}{10} - 1\frac{1}{10}M$	0

Итерация №1.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся положительные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_2 , так как это наибольший коэффициент.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления b_i / a_{i2} и из них выберем наименьшее: $\min(14\frac{2}{5} : \frac{4}{5}, -\frac{2}{5} : 8\frac{3}{10}) = \frac{4}{83}$.

Следовательно, 3-ья строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен $(8\frac{3}{10})$ и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Таблица 7.4

Базис	В	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	$14\frac{2}{5}$	$4\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	3	1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	0
x_3	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-1\frac{3}{10}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	0
x_9	$\frac{2}{5}$	$2\frac{3}{5}$	$8\frac{3}{10}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{10}$	-1	$-\frac{1}{10}$	1
F(X1)	$14\frac{4}{5} + 2\frac{2}{5}M$	$-\frac{4}{5} + 2\frac{3}{5}M$	$-\frac{9}{10} + 8\frac{3}{10}M$	0	$-\frac{1}{6} - M$	0	$-\frac{3}{10} + M$	-M	$\frac{3}{10} - 1\frac{1}{10}M$	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_9 в план 2 войдет переменная x_2 . Строка, соответствующая переменной x_2 в плане 2, получена в результате деления всех элементов строки x_9 плана 1 на разрешающий элемент $PЭ = 8^3/10$. На месте разрешающего элемента в плане 2 получаем 1. В остальных клетках столбца x_2 плана 2 записываем нули. Таким образом, в новом плане 2 заполнены строка x_2 и столбец x_2 . Все остальные элементы нового плана 2, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Получаем новую симплекс-таблицу.

Таблица 7.5

Базис	В	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	$14^{30/83}$	$4^{29/83}$	0	0	$3^4/83$	1	$-34/83$	$8/83$	$34/83$	$-8/83$
x_3	$55/83$	$67/83$	0	1	$35/83$	0	$-7/83$	$-13/83$	$7/83$	$13/83$
x_2	$4/83$	$26/83$	1	0	$-5/83$	0	$1/83$	$-10/83$	$-1/83$	$10/83$
F(x_2)	$2^{19/83}$	$1^{82/83}$	0	0	$-7^3/83$	0	$-16/83$	$-1^6/83$	$16/83-M$	$1^6/83-M$

Итерация №2.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся положительные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_1 , так как это наибольший коэффициент.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления b_i / a_{i1} и из них выберем наименьшее: $\min (14^{30/83} : 4^{29/83}, 55/83 : 67/83, 4/83 : 26/83) = 166/1079$. Следовательно, 3-ья строка является ведущей. Разрешающий элемент равен ($26/83$) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Таблица 7.6

Базис	В	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	min
x_5	$14^{30/83}$	$4^{29/83}$	0	0	$3^4/83$	1	$-34/83$	$8/83$	$34/83$	$-8/83$	$3 \frac{9047}{29963}$
x_3	$55/83$	$67/83$	0	1	$35/83$	0	$-7/83$	$-13/83$	$7/83$	$13/83$	$\frac{4565}{5561}$
x_2	$4/83$	$26/83$	1	0	$-5/83$	0	$1/83$	$-10/83$	$-1/83$	$10/83$	$\frac{166}{1079}$
F(x_3)	$2^{19/83}$	$1^{82/83}$	0	0	$-7^3/83$	0	$-16/83$	$-1^6/83$	$16/83-M$	$1^6/83-M$	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_2 в план 3 войдет переменная x_1 . Строка, соответствующая переменной x_1 в плане 3, получена в результате деления всех элементов строки x_2 плана 2 на разрешающий элемент $РЭ=26/8$. На месте разрешающего элемента в плане 3 получаем 1. В остальных клетках столбца x_1 плана 3 записываем нули. Таким образом, в новом плане 3 заполнены строка x_1 и столбец x_1 . Все остальные элементы нового плана 3, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Получаем новую симплекс-таблицу.

Таблица 7.7

Базис	В	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	$13^{9/13}$	0	$-13 \frac{1909}{2158}$	0	$3^{23/26}$	1	$-15/26$	$1^{10/13}$	$15/26$	$-1^{10/13}$
x_3	$7/13$	0	$-2 \frac{1245}{2158}$	1	$15/26$	0	$-3/26$	$13778/89557$	$3/26$	$-13778/89557$
x_1	$166/1079$	1	$3^{5/26}$	0	$-\frac{415}{2158}$	0	$1/26$	$-5/13$	$-1/26$	$5/13$
F(X3)	$1^{12/13}$	0	$-6 \frac{747}{2158}$	0	$-6^{17/26}$	0	$-7/26$	$-4/13$	$7/26-M$	$4/13-M$

1. Проверка критерия оптимальности. Среди значений индексной строки нет положительных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи. Так как в оптимальном решении отсутствуют искусственные переменные (они равны нулю), то данное решение является допустимым. Оптимальный план можно записать так:

$$x_3 = 7/13$$

$$x_1 = 166/1079$$

$$F(X) = 3 \cdot \frac{7}{13} + 2 \cdot \frac{166}{1079} = 1 \frac{12}{13}.$$

8. Двойственность задач линейного программирования. Таблица соответствий. Достаточное условие оптимальности

Определение 8.1. Двойственная задача – это вспомогательная задача линейного программирования, формулируемая с помощью определенных правил непосредственно из условий исходной задачи, которая в этом случае называется прямой задачей линейного программирования.

Рассмотрим пару ЗЛП вида:

Таблица 8.1

Прямая задача (I)	Двойственная ей задача (II)
$F = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$	$\bar{F} = b_1y_1 + \dots + b_my_m \rightarrow \min$
$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$	$y_1 \geq 0$
.....	
$a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k$	$y_k \geq 0$
$a_{k+1,1}x_1 + \dots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}$	y_{k+1} - любое
.....	
$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$	y_m - любое
$x_1 \geq 0$	$a_{11}y_1 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1$
.....	
$x_l \geq 0$	$a_{l1}y_1 + \dots + a_{ml}y_m \geq c_l$
x_{l+1} - любое	$a_{l+1,1}y_1 + \dots + a_{l+1,m}y_m = c_{l+1}$
.....	
x_n - любое	$a_{1n}y_1 + \dots + a_{mn}y_m = c_n$

Задачу (I) называют прямой задачей ЛП, а (II) - двойственной. Ограничения задач (I) и (II), соответствующие друг другу, называются сопряженными. Заметим, что задача двойственная к (II), есть исходная прямая задача, т. е. соотношение двойственности взаимное. Поэтому можно любую из такой пары задач считать прямой, а другую - двойственной.

В этой связи полезно усвоить следующую схему соответствия.

Таблица 8.2

Прямая задача	Двойственная задача
Максимизация	Минимизация
Коэффициенты в целевой функции	Константы в правых частях ограничений
Константы в правых частях ограничений	Коэффициенты в целевой функции
i-я строка, составленная из коэффициентов при неизвестных в ограничениях	i-й столбец, составленный из коэффициентов при неизвестных в ограничениях
j-й столбец, составленный из коэффициентов при неизвестных в ограничениях	j-я строка, составленная из коэффициентов при неизвестных в ограничениях
i-е неравенство вида $\leq$ (этот знак	i-я неотрицательная переменная:

неравенства согласован с целевой функцией на максимум)	$y_i \geq 0$
i-е соотношение в виде равенства	i-я переменная y_i , не имеющая ограничения в знаке
j-я неотрицательная переменная: $x_j \geq 0$	j-е неравенство вида $\geq$ (этот знак неравенства согласован с целевой функцией на минимум)
i-я переменная x_i , не имеющая ограничения в знаке	i-е соотношение в виде равенства

Трудности в решении задач линейного программирования зависят не от количества переменных n , а от количества ограничений m , определяющих число итераций симплекс-метода. Поэтому, если прямая задача линейного программирования, еще не приведенная к стандартной форме, содержит большое количество ограничений ($m > n$), то в этом случае целесообразно перейти к двойственной задаче. Сформированная двойственная задача линейного программирования будет иметь m переменных и n ограничений, т. е. количество итераций при этом уменьшится.

Задача 8.1. Построить двойственную задачу к следующей ЗЛП:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ x_1 + x_3 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$F = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

Прежде чем приступить к построению двойственной задачи, необходимо упорядочить запись исходной: согласовать знаки неравенств в ограничениях задачи с целевой функцией. Так как целевая функция минимизируется, то неравенства должны быть записаны с помощью знака $\geq$. Для этого второе неравенство умножим на (-1) : $-2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 \geq -4$.

Теперь, вводя двойственные переменные y_1, y_2, y_3 , запишем в соответствии с указанным правилом пару двойственных задач.

Итак, задача слева - исходная прямая задача, задача справа - двойственная к исходной задаче.

Разновидностью двойственных задач линейного программирования являются двойственные симметричные задачи, в которых система ограничений как исходной, так и двойственной задач задаётся неравенствами, причём на двойственные переменные налагается условие неотрицательности.

Таблица 8.3

Прямая задача (I)	Двойственная ей задача (II)
$F = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min$ $x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6$ $-2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 \geq -4$ $x_1 + x_3 \geq 8$ $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$ x_3 - любое x_4 - любое	$\bar{F} = 6y_1 - 4y_2 + 8y_3 \rightarrow \max$ y_1 - любое $y_2 \geq 0$ $y_3 \geq 0$ $y_1 - 2y_2 + y_3 \leq 1$ $-2y_1 - 3y_2 \leq -2$ $y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 1$ $3y_1 + y_2 = -1$

Таблица 8.4

Прямая задача (I)	Двойственная ей задача (II)
$F = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$ $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$ $a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$ $x_1 \geq 0$ $x_n \geq 0$	$\bar{F} = b_1y_1 + \dots + b_my_m \rightarrow \min$ $y_1 \geq 0$ $y_m \geq 0$ $a_{11}y_1 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1$ $a_{12}y_1 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_n$

Пара двойственных задач (I) и (II) называется **парой симметрических двойственных задач**.

Не ограничивая общности, теорию двойственности можно рассматривать для пары симметрических задач, поскольку для любой ЗЛП существует эквивалентная ей стандартная ЗЛП и поэтому теоремы, справедливые для пары симметрических двойственных задач, будут справедливы для пары общих двойственных задач.

Рассмотрим пару симметрических двойственных задач в матричной форме записи.

Таблица 8.5

Прямая задача (I)	Двойственная ей задача (II)
$F = cx \rightarrow \max$ $Ax \leq b$ $x \geq 0$	$\bar{F} = by \rightarrow \min$ $y \geq 0$ $A^T y \geq c$

$$D_I = \{x \in R^n / Ax \leq b, x \geq 0\}, D_{II} = \{y \in R^m / A^T y \geq c, y \geq 0\}$$

Доказательство. Из системы ограничений задачи (I) $Ax \leq b$ и $y \geq 0$ получаем $y^T Ax \leq y^T b$.

Объединяя полученные неравенства, имеем $cx \leq y^T Ax \leq y^T b$ или $cx \leq by$.

Следствие (достаточное условие оптимальности). Если для некоторых допустимых решений $x^* \in D_I$ и $y^* \in D_{II}$ выполняется равенство значений целевых функций $cx^* = by^*$, то x^* , y^* - оптимальные решения задачи (I) и (II) соответственно.

По определению это означает, что x^* - оптимальное решение задачи (I). Аналогично доказывается, что y^* - оптимальное решение задачи (II).

9. Леммы Фаркаша

[illegible]

56

$$\lambda_1(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) + \dots + \lambda_m(a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n) + \lambda_1b_1 + \dots + \lambda_mb_m \geq 0, \text{ где } \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m \quad (9.2)$$

Определение 9.2. Неравенство вида $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b \geq 0$ называется **противоречивым**, если ему не удовлетворяет ни один вектор $x \in R^n$.

Замечание 9.1. В противоречивом неравенстве $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b \geq 0$ выполняется: 1) $b < 0$; 2) $a_j = 0, j = 1, \dots, n$

Доказательство.

1) Если $b \geq 0$, то вектор $x = (0, \dots, 0)$ удовлетворяет неравенству

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b \geq 0. \text{ Поэтому } b < 0.$$

2) Если существует j , при котором $a_j \neq 0$, то вектор $x = (0, \dots, 0, -\frac{b}{a_j}, 0, \dots, 0)$

удовлетворяет неравенству $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b \geq 0$. Поэтому $a_j = 0, j = 1, \dots, n$.

Замечание доказано.

Определение 9.3. Система (9.1) называется **несовместной**, если ей не удовлетворяет ни один вектор $x \in R^n$.

Лемма 9.1. Если система (9.1) несовместна, то существует ее каноническая комбинация, являющаяся противоречивым неравенством.

Определение 9.4. Система (9.1) называется **несовместной** при $x \geq 0$, если ей не удовлетворяет ни один вектор $x \geq 0$.

Определение 9.5. Неравенство вида $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b \geq 0$ называется **противоречивым** при $x \geq 0$, если ему не удовлетворяет ни один вектор $x \geq 0$.

Замечание 9.2. В противоречивом при $x \geq 0$ неравенстве выполняется: 1) $b < 0$; 2) $a_j = 0, j = 1, \dots, n$

Доказательство.

1) Если $b \geq 0$, то вектор $x = 0$ удовлетворяет неравенству. Следовательно $b < 0$.

2) Если существует j при котором $a_j \neq 0$, то вектор $x = (0, \dots, 0, -\frac{b}{a_j}, 0, \dots, 0)$ удовлетворяет неравенству $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b \geq 0$.

Следовательно, $a_j \leq 0, j = 1, \dots, n$.

Замечание доказано.

Лемма 9.2. Если система (9.1) несовместна при $x \geq 0$, то существует ее каноническая комбинация, являющаяся неравенством, противоречивым при $x \geq 0$.

Для $\beta \geq 0$ возможны два случая:

Случай 1. Если $\beta > 0$, то делим полученные неравенства (9.6) на β :

[illegible]

В результате получим вектор

$$x' = (\frac{\lambda_1}{\beta}, \dots, \frac{\lambda_n}{\beta}) \in D_1, F(x') > 0 \quad (9.8)$$

Это противоречит условию основной леммы.

Случай 2. Если $\beta = 0$, то система (9.6) принимает вид:

[illegible]

Рассмотрим вектор $x' = (x'_1, \dots, x'_n) \in D_1$ и положим $x_t = x' + t\lambda'$, где $t > 0$, $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \geq 0$.

Заметим, что для любого $t > 0$ вектор $x_t \in D_+$.

Действительно, подставляя координаты вектора x_i в ограничения задачи (I), получим

$$\begin{aligned} & a_{i1}(x' + t\lambda_1) + \dots + a_{in}(x'_n + t\lambda_n) = \\ & = a_{i1}x' + \dots + a_{in}x'_n + t(a_{i1}\lambda_1 + \dots + a_{in}\lambda_n) \leq b_i \end{aligned} \quad (9.10)$$

для всех $i = 1, \dots, m$.

Неотрицательность вектора x_t получается из неотрицательности компонент векторов x' , λ' и $t > 0$.

Итак, для любого $t > 0, x_t \in D_1$ значение целевой функции

$$F(x_t) = F(x' + t\lambda') = F(x') + tF(\lambda') \quad (9.11)$$

неограниченно возрастает при $t \rightarrow +\infty$, так как

$$F(\lambda') = c_1 \lambda_1 + \dots + c_n \lambda_n > 0 \quad (9.12)$$

Но по условию основной леммы для любого допустимого вектора $x \in D_I$ целевая функция ограничена $F(x) \leq M$. Получили противоречие.

В обоих случаях полученные противоречия возникли из-за того, что было предположение о несовместности системы (9.3) при $y \geq 0$, т. е. существует $y \in D_{II}$, для которого

$$F(y) = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m \leq M. \quad (9.13)$$

10. Теоремы двойственности. Критерии оптимальности

Рассмотрим пару симметричных двойственных задач.

Таблица 10.1

Прямая задача (I)	Двойственная ей задача (II)
$F = cx \rightarrow \max$ $Ax \leq b$ $x \geq 0$	$\bar{F} = by \rightarrow \min$ $y \geq 0$ $A^T y \geq c$

Теорема 10.1. (первая теорема двойственности) Если одна из пары двойственных задач (I) и (II) разрешима, то разрешима и другая задача, причем оптимальные значения целевых функций прямой и двойственной задач совпадают.

$$c_1^* x_1^* + \dots + c_n^* x_n^* = b_1^* y_1^* + \dots + b_m^* y_m^*, \quad (10.1)$$

где $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, $y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$ оптимальные планы задач (I) и (II) соответственно.

Доказательство.1. Пусть задача (I) разрешима, и пусть $x \in D_I$ и $\forall x \in D_I F(x) \leq F(x^*)$, т. е. x^* - оптимальное решение.

Обозначим: $M = F(x^*)$.

Тогда по основной лемме существует $y \in D_{II}$, для которого

$$F(y^*) \leq M = F(x^*)$$

Но по основному неравенству двойственности имеем:

$$\forall y \in D_{\Pi} \quad F(x^*) \leq F(y^*).$$

Объединяя последние два соотношения, имеем

$$\forall y \in D_{\Pi} \quad F(y^*) \leq F(x^*) \leq F(y^*)$$

откуда следует, что y^* - оптимальное решение задачи (II) и

$$F(x^*) = F(y^*)$$

2. Пусть теперь задача (II) -разрешима.

Построим эквивалентную (II) задачу

$$-by \rightarrow \max$$

$$y \geq 0 \quad (\Pi')$$

$$-A^T y \leq -c$$

Задача (II') разрешима, так как задача (II) разрешима. Тогда по пункту 1 двойственная к (II') задача:

$$-cx \rightarrow \min$$

$$-Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Но эта задача эквивалентна задаче (I). Следовательно, задача (I) разрешима.

Теорема доказана.

Первый критерий оптимальности: Решение $x^* \in D_I$ оптимально тогда и только тогда, когда существует решение $y^* \in D_{\Pi}$ такое, что

$$cx^* \leq by^*. \quad (10.2)$$

Доказательство. Необходимость следует из первой теоремы двойственности. Достаточность следует из достаточного условия оптимальности.

Теорема 10.2. (вторая теорема двойственности) Чтобы допустимые решения x , y пары двойственных задач (I) и (II) были оптимальными необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия дополняющей нежесткости:

$$1) \lambda = y^T (Ax - b) = 0, \quad (10.3)$$

$$2) \beta = (c - y^T A)x = 0. \quad (10.4)$$

Доказательство. Необходимость. По условию допустимые решения x , y - оптимальны.

$$\text{Так как } Ax \leq b, \quad y \geq 0, \quad \lambda = y^T (Ax - b) \leq 0.$$

$$\text{Так как } A^T y \geq c, \quad x \geq 0, \quad \beta = (c - y^T A)x \leq 0.$$

Так как $\lambda + \beta = y^T (Ax - b) + (c - y^T A)x = cx - by$, то из оптимальности решений x, y по первой теореме двойственности $cx = by$ и $\lambda + \beta = cx - by = 0$.

В результате имеем $\lambda + \beta > 0, \lambda \leq 0, \beta \leq 0$, откуда следует, $\lambda = 0, \beta = 0$.

Необходимость доказана.

Достаточность. По условию $\lambda = 0, \beta = 0$, откуда $\lambda + \beta = 0$. Но $\lambda + \beta = cx - by$, следовательно $cx - by = 0$, или $cx = by$.

По первой теореме двойственности получаем, что x, y - оптимальные решения задач (I) и (II). Достаточность доказана.

Допустимые решения x, y задач (I) и (II) удовлетворяют **условиям дополняющей нежесткости (УДН)**, если при подстановке этих векторов в ограничения задач (I) и (II) хотя бы одно из любой пары сопряженных неравенств обращается в равенство.

Второй критерий оптимальности (следствие из условий дополняющей нежесткости): чтобы допустимые решения x, y - пары двойственных задач (I) и (II) были оптимальны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:

$$1) \text{ если } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j < b_i, \text{ то } y_i = 0; \quad (10.5)$$

$$2) \text{ если } y_i > 0, \text{ то } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i; \quad (10.6)$$

$$3) \text{ если } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i > c_j, \text{ то } x_j = 0; \quad (10.7)$$

$$4) \text{ если } x_j > 0, \text{ то } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j. \quad (10.8)$$

Доказательство. Распишем $\lambda = y^T (Ax - b)$ и $\beta = (c - y^T A)x$ по координатам: $\lambda = \sum_{i=1}^m y_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right), \quad \beta = \sum_{j=1}^n \left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j.$

Из допустимости решений x, y следует, что $y_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right) \leq 0$,
 $i = 1, \dots, m; \left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j \leq 0, j = 1, \dots, n$.

Равенства $\lambda = 0$ и $\beta = 0$ выполняются тогда и только тогда, когда каждое слагаемое в этих равенствах равно нулю

$$y_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right) = 0, i = 1, \dots, m; \left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j = 0, j = 1, \dots, n. \quad (10.9)$$

Произведение двух сомножителей, как известно, равно нулю, тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

Следовательно, равенства (10.9) или, что тоже самое $\lambda = 0, \beta = 0$, эквивалентны условиям (10.5)-(10.8), и по второй теореме двойственности получаем справедливость утверждения.

Критерий доказан.

Замечание: условия (10.5)-(10.8) есть условия дополняющей нежесткости, поэтому критерий можно сформулировать более лаконично.

Второй критерий оптимальности: чтобы допустимые решения x, y пары двойственных задач (I), (II) были оптимальны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись УДН.

11. Критерий разрешимости задачи линейного программирования

Определение 11.1. Точной верхней гранью (супремумом) функции $F(x)$ на множестве D называется такое число M^* , что

$$1) \forall x \in D \quad F(x) \leq M^* \quad (11.1)$$

$$2) \forall M < M^* \quad \exists x \in D \quad F(x) > M \quad (11.2)$$

Лемма (о супремуме целевой функции): если для пары двойственных задач (I),(II) $M^* = \sup_{x \in D_I} F(x)$, то $\forall y \in D_{II} \quad \bar{F}(y) \geq M^*$. (11.3)

Доказательство. Предположим противное, т. е. $\exists y \in D_{II} \quad \bar{F}(y) < M^*$.

Обозначим: $M = \bar{F}(y)$.

Тогда $M < M^*$ и по определению супремума $\exists x \in D_I \quad F(x) > M = \bar{F}(y)$.

Полученное неравенство противоречит основному неравенству двойственности по которому $\forall x \in D_I \quad \forall y \in D_{II} \quad F(x) < \bar{F}(y)$.

Предположение было неверным.

Лемма доказана.

Теорема 11.1. (*критерий разрешимости*) Задача (I) (на максимум) разрешима тогда и только тогда, когда целевая функция $F(x)$ ограничена сверху на непустом допустимом множестве.

Доказательство. *Необходимость.* Если задача (I) разрешима, то $\forall x \in D_I \quad F(x) \leq F(x^*)$, где $x^* \in D_I$ - оптимальное решение.

Следовательно, $F(x)$ ограничена сверху на D_I величиной $F^* = F(x^*)$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $D_I = \emptyset$ и $F(x)$ ограничена сверху на D_I . Положим

$$M^* = \sup_{x \in D_I} F(x).$$

Тогда по лемме о супремуме целевой функции $\forall y \in D_{II} \quad \bar{F}(y) \geq M^*$, а по основной лемме параграфа 9: $\exists y^* \in D_{II} \quad \bar{F}(y^*) \leq M^*$.

В результате получаем: $\bar{F}(y^*) = M^*$ и $\forall y \in D_{II} \quad \bar{F}(y) \geq M^* = \bar{F}(y^*)$, что означает оптимальность вектора y^* для задачи (II).

Итак, задача (II) разрешима. Тогда по первой теореме двойственности и задача (I) разрешима.

Достаточность доказана.

Теорема 11.2. (*малая теорема двойственности*) Если прямая и двойственная задачи имеют хотя бы по одному допустимому решению (т. е. $D_I \neq \emptyset$, $D_{II} \neq \emptyset$), то обе задачи разрешимы.

Доказательство. Пусть $x \in D_I$, $y \in D_{II}$.

По основному неравенству двойственности $\forall x \in D_I \quad F(x) \leq \bar{F}(y) = M$, т. е. $F(x)$ ограничена сверху на допустимом множестве. Тогда по критерию разрешимости прямая задача (I) разрешима. По первой теореме двойственности разрешима и двойственная задача (II).

Теорема доказана.

Теорема 11.3. (*о неограниченности целевой функции*) Если $D_{II} = \emptyset$, то $D_I \neq \emptyset$ и $F(x)$ неограничена сверху на D_I . Обратное утверждение тоже верно.

Доказательство. Пусть $F(x)$ неограничена сверху на $D_I \neq \emptyset$. Предположим противное, т. е. $D_{II} \neq \emptyset$. Тогда $\exists y \in D_{II}$ и по основному неравенству двойственности $\forall x \in D_I \quad F(x) \leq \bar{F}(y) = M$.

Получили ограниченность функции $F(x)$, что противоречит условию. Следовательно, предположение было неверным и $D_{II} = \emptyset$.

Докажем обратное утверждение.

Пусть теперь $D_{II} = \emptyset$. Предположим противное, т. е. $F(x)$ ограничена сверху на D_I . Тогда по критерию разрешимости задача (I) разрешима, и по первой теореме двойственности задача (II) разрешима. Но тогда $D_I \neq \emptyset$. Получили противоречие.

Следовательно, предположение было неверным, и $F(x)$ неограничена сверху на D_I .

Теорема доказана.

Классификация ЗЛП

1. $D_I \neq \emptyset$, $D_{II} \neq \emptyset$. Тогда задачи (I) и (II) разрешимы.
2. $D_I \neq \emptyset$, $D_{II} = \emptyset$. Тогда задачи (I) и (II) неразрешимы. Задача (I) неразрешима из-за неограниченности целевой функции. Задача (II) неразрешима из-за пустоты допустимой области.
3. $D_I = \emptyset$, $D_{II} \neq \emptyset$. Аналогично пункту 2. (только задачи (I) и (II) меняются местами).
4. $D_I = \emptyset$, $D_{II} = \emptyset$. Тогда задачи (I) и (II) неразрешимы.

Например:

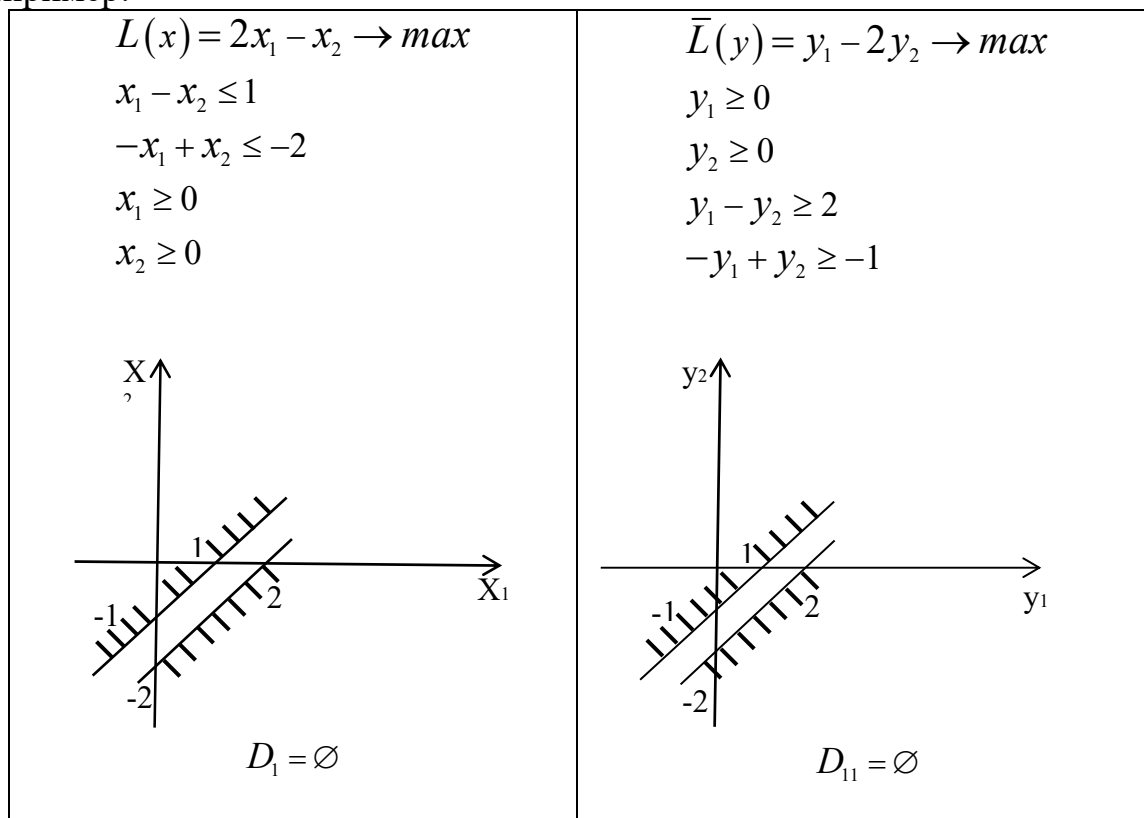


рис.11.1

Задача 11.1. Используя теоремы двойственности, решить двойственную задачу, если известно решение прямой задачи.

$$F(x) = 300x_1 + 500x_2 + 400x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 100 \\ 3x_1 + 3x_3 \leq 200 \end{cases} \quad (11.4)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Пусть решение задачи найдено одним из стандартных методов: $x^* = (40, 0, 20)$, $F^*(x) = 20000$.

Решение. Построим двойственную задачу:

$$\bar{F}(y) = 120y_1 + 100y_2 + 200y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 300 \\ 4y_1 + 4y_2 \geq 500 \\ 2y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 400 \end{cases} \quad (11.5)$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

По первой теореме двойственности задача разрешима, причем $\bar{F}^*(y) = F^*(x) = 20000$.

Найдем оптимальный план задачи $y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$, используя вторую теорему двойственности. Подставим координаты вектора x^* в ограничения задачи (11.4).

Получим

$$2x_1^* + 4x_2^* + 2x_3^* = 2 \cdot 40 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 20 = 120 = 120$$

$$x_1^* + 4x_2^* + 3x_3^* = 1 \cdot 40 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 20 = 100 = 100$$

$$3x_1^* + 3x_3^* = 3 \cdot 40 + 3 \cdot 20 = 180 < 200$$

Следовательно, в силу УДН, неравенство $y_3 \geq 0$ должно выполняться как равенство, то есть $y_3^* = 0$. Далее, так как $x_1^* = 40 > 0$, $x_3^* = 20 > 0$, то в силу УДН, $2y_1^* + 4y_2^* + 3y_3^* = 300$, $4y_1^* + 4y_2^* = 500$.

Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_3^* = 0 \\ 2y_1^* + 4y_2^* + 3y_3^* = 300 \\ 4y_1^* + 4y_2^* = 500 \end{cases}, \begin{cases} 2y_1^* + y_2^* = 300 \\ 2y_1^* + 3y_2^* = 400 \end{cases}, \begin{cases} y_3^* = 0 \\ y_2^* = 50 \\ y_1^* = 125 \end{cases}$$

Планы $x^* = (40, 0, 20)$ и $y^* = (125, 50, 0)$ удовлетворяют УДН, следовательно, в силу второй теоремы двойственности, являются оптимальными в задачах (11.4) и (11.5) соответственно.

Ответ. $y^* = (125, 50, 0)$

Задача 11.2. Исследовать вектор $x = (1, 0, 1, -1)$ на оптимальность в ЗЛП

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$F(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

Решение. Вначале надо проверить, является ли вектор x допустимым. Для этого подставляем координаты вектора в ограничения:

$$1 + 0 + 1 - 1 = 1$$

$$1 + 2 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot (-1) = -2 < 5$$

Так как второе ограничение выполняется как строгое неравенство, то в силу УДН для оптимальности вектора x необходимо выполнение равенства $y_2 = 0$.

Построим двойственную задачу:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ -y_1 - y_2 = 1 \\ -y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

$$y_2 \geq 0, y_1 - \text{любое}$$

$$\bar{F}(y) = y_1 + 5y_2 \rightarrow \min$$

Поскольку $y_2 = 0$, то из третьего и четвертого ограничений получаем $y_1 = -1$. Но по УДН из условия $x_1 = 0$ следует, что должно выполняться равенство в первом ограничении двойственной задачи: $y_1 + y_2 = 1$,

подставляя значения $y_1 = -1$, $y_2 = 0$, получим: $-1 + 0 \neq 1$,

следовательно, УДН не выполняются, и вектор $x = (1, 0, 1, -1)$ не является оптимальным в исходной задаче.

Ответ. Вектор $x = (1, 0, 1, -1)$ не является оптимальным в исходной задаче.

12. Задача о наилучшем использовании ресурсов

Пусть некоторая производственная единица (цех, завод, объединение и т. д.), исходя из конъюнктуры рынка, технических или технологических возможностей и имеющихся ресурсов может выпускать n различных видов продукции (товаров), известных под номерами, обозначаемыми индексом j , $j = 1, \dots, n$. Ее будем обозначать Π_j .

Предприятие при производстве этих видов продукции должно ограничиваться имеющимися видами ресурсов, технологий, других производственных факторов (сырья, полуфабрикатов, рабочей силы, оборудования, электроэнергии и т. д.). Все эти виды ограничивающих факторов называют ингредиентами R_i . Пусть их число равно m ; припишем им индекс $i, i = 1, \dots, m$. Они ограничены, и их количества равны соответственно $b_1, b_2, \dots, b_m$ условных единиц. Таким образом, $b = (b_1, \dots, b_i, \dots, b_m)$ - вектор ресурсов.

Известна экономическая выгода (мера полезности) производства продукции каждого вида, исчисляемая, скажем, по отпускной цене товара, его прибыльности, издержкам производства, степени удовлетворения потребностей и т. д. Примем в качестве такой меры, например, цену реализации $c_j, j = 1, \dots, n$, т. е. $c = (c_1, \dots, c_j, \dots, c_n)$ - вектор цен.

Известны также технологические коэффициенты a_{ij} , которые указывают, сколько единиц i -го ресурса требуется для производства единицы продукции j -го вида. Матрицу коэффициентов a_{ij} называют технологической и обозначают буквой A . Имеем $A = [a_{ij}]$.

Обозначим через $x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ план производства, показывающий, какие виды товаров $\Pi_1, \dots, \Pi_j, \dots, \Pi_n$ нужно производить и в каких количествах, чтобы обеспечить предприятию максимум объема реализации при имеющихся ресурсах.

Так как $c_j, j = 1, \dots, n$ - цена реализации единицы j -й продукции, цена реализованных x_j единиц будет равна $c_j x_j$, а общий объем реализации

$$Z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max. \quad (12.1)$$

Это выражение — целевая функция, которую нужно максимизировать.

Так как $a_{ij} x_j$ - расход i -го ресурса на производство x_j единиц j -й продукции, то, просуммировав расход i -го ресурса на выпуск всех n видов

продукции, получим общий расход этого ресурса, который не должен превосходить $b_i, i = 1, \dots, m$ единиц:

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \leq b_i. \quad (12.2)$$

Чтобы искомый план $x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ был реализован, наряду с ограничениями на ресурсы нужно наложить условие неотрицательности на объёмы x_j выпуска продукции: $x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$.

Таким образом, модель задачи о наилучшем использовании ресурсов примет вид:

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (12.3)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m, x_j \geq 0, j = 1, \dots, n. \quad (12.4)$$

Так как переменные x_j входят в функцию $Z(x)$ и систему ограничений только в первой степени, а показатели a_{ij}, b_i, c_j являются постоянными в планируемый период, то перед нами задача линейного программирования.

Задача 12.1. Исходя из специализации и своих технологических возможностей, предприятие может выпустить четыре вида продукции. Сбыт любого количества обеспечен. Для изготовления этой продукции используются трудовые ресурсы, полуфабрикаты и станочное оборудование. Общий объём ресурсов, расход каждого ресурса на единицу продукции приведены в таблице:

Таблица 12.1

Ресурсы		Выпускаемая продукция				Объём ресурсов
		P_1	P_2	P_3	P_4	
P_1	Трудовые ресурсы, чел-ч	4	2	2	8	4800
P_2	Полуфабрикаты, кг	2	10	6	0	2400
P_3	Станочное оборудование, станко-ч	1	0	2	1	1500
Цена единицы продукции, руб.		65	70	60	120	

Требуется определить план выпуска, доставляющий предприятию максимум прибыли. Выполнить после оптимизационный анализ решения и параметров модели.

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 – объёмы продукции P_1, P_2, P_3, P_4 , планируемые к выпуску; Z - сумма ожидаемой выручки.

Математическая модель прямой задачи:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 \leq 4800 \\ 2x_1 + 10x_2 + 6x_3 \leq 2400 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \leq 1500 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

$$Z = 65x_1 + 70x_2 + 60x_3 + 120x_4 \rightarrow \max$$

Математическая модель двойственной задачи:

$$\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 65 \\ 2y_1 + 10y_2 \geq 70 \\ 2y_1 + 6y_2 + 2y_3 \geq 60 \\ 8y_1 + y_3 \geq 120 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

$$\bar{Z} = 4800y_1 + 2400y_2 + 1500y_3 \rightarrow \min$$

По условиям задачи требуется найти:

1. Ассортимент выпускаемой продукции, обеспечивающий предприятию максимум реализации (максимум выручки).
2. Оценки ресурсов, используемых при производстве продукции.

Симплексным методом решаем прямую задачу, модель которой составлена выше в таблице. Последняя симплекс-таблица выглядит следующим образом.

Таблица 12.2

Базис	В	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
x ₄	500	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{6}$	0	1	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{24}$	0
x ₃	400	$\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{6}$	0
x ₇	1000	$\frac{7}{12}$	$2\frac{1}{6}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	1
F(x ₄)	84000	5	10	0	0	15	5	0

После второй итерации все оценки оказались неотрицательными (см. последнюю строку таблицы), значит, найденный опорный план является оптимальным: $x^* = (0, 0, 400, 500, 0, 0, 200)$, $Z^* = Z(x^*) = 84000$.

Основные переменные $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 400$, $x_4^* = 500$ показывают, что продукцию Π_1 и Π_2 выпускать нецелесообразно, а продукции Π_3 следует произвести 400 ед., Π_4 – 500 ед.

Дополнительные переменные $x_5^* = x_6^* = 0$ показывают, что ресурсы P_1 и P_2 используются полностью, а вот равенство $x_7^* = 200$ свидетельствует о том, что 200 единиц продукции P_3 осталось неиспользованным.

Выпишем из таблицы компоненты оптимального плана двойственной задачи – двойственные оценки. В канонической форме прямой задачи переменные x_1, x_2, x_3, x_4 являются свободными, а дополнительные переменные – базисными. В канонической форме двойственной задачи свободными будут переменные y_1, y_2, y_3 , а базисными – y_4, y_5, y_6, y_7 .

Соответствие между переменными примет вид

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$

Учитывая это соответствие, выпишем из индексной строки последней итерации компоненты искомого плана $y^* = (15, 5, 0, 5, 10, 0, 0)$ – двойственные оценки, $\min \bar{Z} = \max Z = 84000$.

Запишем это неравенство в развернутой форме:
 $48000 \cdot 15 + 2400 \cdot 5 + 1500 \cdot 0 = 65 \cdot 0 + 70 \cdot 0 + 60 \cdot 400 + 120 \cdot 500$.

Учитывая, что компоненты представляют собой оценки ресурсов, заключаем: при оптимальном плане оценка ресурсов, затраченных на выпуск продукции, совпадает с оценкой произведенной продукции.

Теперь установим степень дефицитности используемых ресурсов и обоснуем рентабельность оптимального плана.

Мы нашли оптимальный план $x^* = (0, 0, 400, 500, 0, 0, 200)$ выпуска продукции. При этом плане третье ограничение прямой задачи выполняется как строгое неравенство: $0 + 2 \cdot 400 + 500 = 1300 < 1500$. Это означает, что расход ресурса P_3 меньше его запаса, т. е. ресурс P_3 избыточный. Именно поэтому в оптимальном плане $y^* = (15, 5, 0, 5, 10, 0, 0)$ двойственной задачи оценка y_3^* этого ресурса равна нулю.

А вот оценки y_1^* и y_2^* ресурсов P_1 и P_2 выражаются положительными числами 15 и 5, что свидетельствует о дефицитности этих ресурсов: они при оптимальном плане используются полностью. В самом деле, ограничения по этим ресурсам выполняются как строгие равенства:
 $4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 400 + 8 \cdot 500 = 4800$, $2 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 6 \cdot 400 = 2400$.

Поскольку $15 > 5$, ресурс P_1 считается более дефицитным, чем ресурс P_2 .

На основе теоремы о дополняющей нежесткости нетрудно объяснить, почему не вошла в оптимальный план продукция Π_1 и Π_2 : первое и второе ограничения двойственной задачи выполняются как строгие неравенства:

$4 \cdot 15 + 2 \cdot 5 + 0 > 65$, $2 \cdot 15 + 10 \cdot 5 > 70$. Это означает, что оценки ресурсов, расходуемых на изготовление единицы продукции Π_1 и Π_2 , превышают оценки единицы этой продукции. Понятно, что такую продукцию выпускать предприятию невыгодно.

Что же касается продукции Π_3 и Π_4 ($x_3^* \geq 0, x_4^* \geq 0$), то выпуск ее оправдан, поскольку оценка израсходованных ресурсов совпадает с оценкой произведенной продукции: $2 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 0 = 60$, $8 \cdot 15 + 0 = 120$.

Таким образом, в оптимальный план войдет только та продукция, которая выгодна предприятию, и не войдет убыточная продукция. В этом проявляется рентабельность оптимального плана.

Рассмотрим возможность дальнейшего совершенствования оптимального ассортимента выпускаемой продукции.

Выше установлено, что ресурсы P_1 и P_2 являются дефицитными. В связи с этим на основе теоремы (об оценках) можно утверждать, что на каждую единицу ресурса P_1 , введенную дополнительно в производство, будет получена дополнительная выручка $\Delta_1 Z$, численно равная y_1^* . В самом деле, при $\Delta b_1 = 1$ получаем $\Delta_1 Z = y_1^* b_1 = 15 \cdot 1 = 15$ рублей. По тем же причинам каждая дополнительная единица ресурса P_2 обеспечит прирост $\Delta_2 Z$ выручки, равный 5 рублям. Теперь становится понятно, почему ресурс P_2 считается более дефицитным по сравнению с ресурсом P_1 : он может содействовать получению большей выручки.

Что же касается избыточного ресурса P_3 , то увеличение его запаса не приведет к росту выручки, поскольку $\Delta_3 Z = y_3^* b_3 = 0 \cdot \Delta b_3 = 0$. Из приведенных рассуждений следует, что оценки ресурсов позволяют совершенствовать план выпуска продукции.

Выясним экономический смысл оценок $y_4^*, y_5^*, y_6^*, y_7^*$ продукции $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$.

По оптимальному плану $x^* = (0, 0, 400, 500, 0, 0, 200)$ выпускать следует продукцию Π_3 и Π_4 . Оценки y_6^* и y_7^* этих видов продукции равны нулю. Что это означает, практически станет ясно, если представить оценки в развернутой записи:

$$y_6^* = (2y_1^* + 6y_2^* + 2y_3^*) - 60 = (2 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 0) - 60 = 0$$

$$y_7^* = (8y_1^* + y_3^*) - 120 = (8 \cdot 15 + 0) - 120 = 0$$

Таким образом, нулевая оценка показывает, что эта продукция является неубыточной, поскольку оценка ресурсов, расходуемых на выпуск единицы

такой продукции, совпадает с оценкой единицы изготовленной продукции.

Что же касается продукции Π_1 и Π_2 , являющейся, как установлено выше, убыточной, а потому и не вошедшей в оптимальный план, то для ее оценок $y_4^* = 5$ и $y_5^* = 10$ получаем:

$$y_4^* = (4y_1^* + 2y_2^* + y_4^*) - 65 = 70 - 65 = 5$$

$$y_5^* = (y_1^* + 10y_2^*) - 70 = 80 - 70 = 10$$

Отсюда видно, что оценка убыточной продукции показывает, насколько будет снижать каждая единица такой продукции достигнутый оптимальный уровень.

13. Транспортная задача. Закрытая и открытая модели

Частным случаем задачи линейного программирования является транспортная задача (ТЗ). ТЗ в общем виде состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправления $A_1, A_2, \dots, A_m$ в n пунктов назначения $B_1, B_2, \dots, B_n$. В качестве критерия оптимальности можно взять минимальную стоимость перевозок всего груза либо минимальное время его доставки.

Рассмотрим задачу с первым критерием, обозначив через c_{ij} - тарифы перевозок единицы груза из i -го пункта отправления в j -й пункт назначения, через a_i - запасы груза в пункте A_i , через b_j - потребности в грузе пункта B_j , x_{ij} - количество единиц груза, перевозимого из i -го пункта в j -й пункт. Составим математическую модель задачи. От i -го поставщика к j -му потребителю запланировано к перевозке x_{ij} единиц груза.

Таблица 13.1

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	...	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Соответственно, математическая постановка задачи состоит в определении минимума целевой функции

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (13.1)$$

$$\text{при условиях: } \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, j = 1, \dots, n, \quad (13.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, i = 1, \dots, m, \quad (13.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n. \quad (13.4)$$

Всякое неотрицательное решение систем уравнений (13.2)-(13.4), определяемое матрицей $X = (x_{ij})$, называют опорным планом ТЗ, а план $X^* = (x_{ij}^*)$, при котором функция Z принимает минимальное значение, называется **оптимальным планом** ТЗ.

Все данные, а затем и опорный план, удобно занести в распределительную таблицу. Если общее количество груза в пунктах отправления и общая потребность в нем в пунктах назначения совпадают, т. е.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (13.5)$$

то модель ТЗ называется **закрытой**.

Теорема 13.1. Любая транспортная задача, у которой суммарный объем запасов совпадает с суммарным объемом потребностей, имеет решение. (Для доказательства теоремы необходимо показать, что линейная функция на множестве планов при заданных условиях ограничена.)

Доказательство. Пусть

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = M > 0$$

Тогда величины $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{M}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ являются планом, так как они удовлетворяют, системе ограничений (13.2), (13.3).

Действительно, подставляя значения x_{ij} в (13.2) и (13.3), имеем

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{M} = \frac{a_i}{M} \sum_{j=1}^n b_j = \frac{a_i}{M} M = a_i, \quad (13.6)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_j}{M} = \frac{b_j}{M} \sum_{i=1}^m a_i = \frac{b_j}{M} M = b_j. \quad (13.7)$$

Выберем из значений C_{ij} наибольшее ($C' = \max C_{ij}$) и заменим в линейной функции (13.1) все коэффициенты на C' , тогда, учитывая (13.2), получаем

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \leq C' \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = C' \sum_{i=1}^m a_i = C' M.$$

Выберем из значений C_{ij} наименьшее $C'' = \min C_{ij}$ и заменим в линейной функции все коэффициенты на C'' , тогда имеем

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \geq C'' \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = C'' \sum_{i=1}^m a_i = C'' M. \quad (13.8)$$

Объединяя два последних неравенства в одно двойное, окончательно получаем $C'' M \leq Z \leq C' M$, т. е. линейная функция ограничена на множестве планов транспортной задачи.

Теорема доказана.

Если общее количество груза в пунктах отправления и общая потребность в нем в пунктах назначения не совпадают, то ТЗ называется **открытой**. Введением фиктивного потребителя (если $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$), или фиктивного отправителя (если $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$), любая задача приводится к закрытой модели (во всех фиктивных ячейках таблицы полагают $C_{ij} = 0$).

Для разрешимости задачи равенство (13.5) является необходимым и достаточным условием.

Нахождение опорных и оптимального планов ТЗ можно вести симплексным методом, но ввиду специфики ТЗ и большого ее прикладного значения разработаны специальные методы.

14. Определение опорного плана транспортной задачи

Как и при решении задачи линейного программирования симплексным методом, определение оптимального плана транспортной задачи начинают с нахождения какого-нибудь ее опорного плана. Этот план находят **методом северо-западного угла, методом минимального элемента, методом аппроксимации Фогеля или методом двойного предназначения**.

Сущность этих методов состоит в том, что опорный план находится последовательно за $n + m - 1$ шагов, на каждом из которых в таблице условий задачи заполняют одну клетку, которую называют *занятой*. Заполнение

одной из клеток обеспечивает полностью либо удовлетворение потребности в грузе одного из пунктов назначения (того, в столбце которого находится заполненная клетка), либо вывоз груза из одного из пунктов отправления (из того, в строке которого находится заполненная клетка).

В первом случае временно исключают из рассмотрения столбец, содержащий заполненную на данном шаге клетку, и рассматривают задачу, таблица условий которой содержит на один столбец меньше, чем было перед этим шагом, но то же количество строк и, соответственно, измененные запасы груза в одном из пунктов отправления (в том, за счет запасов которого была удовлетворена потребность в грузе пункта назначения на данном шаге).

Во втором случае временно исключают из рассмотрения строку, содержащую заполненную клетку, и считают, что таблица условий имеет на одну строку меньше при неизменном количестве столбцов и при соответствующем изменении потребности в грузе в пункте назначения, в столбце которого находится заполненная клетка.

После того как проделаны $n + m - 2$ описанных выше шагов, получают задачу с одним пунктом отправления и одним пунктом назначения. При этом останется свободной только одна клетка, а запасы оставшегося пункта отправления будут равны потребности оставшегося пункта назначения. Заполнив эту клетку, тем самым делают $(n+m-1)$ -ый шаг и получают искомый опорный план.

Следует заметить, что на некотором шаге (но не на последнем) может оказаться, что потребности очередного пункта назначения равны запасам очередного пункта отправления. В этом случае также временно исключают из рассмотрения либо столбец, либо строку (что-нибудь одно). Таким образом, либо запасы соответствующего пункта отправления, либо потребности данного пункта назначения считают равными нулю. Этот ноль записывают в очередную заполняемую клетку. Указанные выше условия гарантируют получение $n + m - 1$ занятых клеток, в которых стоят компоненты определенного плана, что является исходным условием для проверки последнего на оптимальность и нахождения оптимального плана.

Определение 14.1. Опорный план транспортной задачи называется невырожденным, если число базисных ячеек равно $r=n+m-1$, где m - количество строк, n - количество столбцов транспортной задачи.

Определение 14.2. Если число перевозок меньше чем $r=n+m-1$, где m - количество строк, n - количество столбцов транспортной задачи, то такой план называется вырожденным.

15. Метод северо-западного угла

При нахождении опорного плана транспортной задачи методом северо-западного угла на каждом шаге рассматривают первый из оставшихся пунктов отправления и первый из оставшихся пунктов назначения. Заполнение клеток таблицы условий начинается с левой верхней клетки для неизвестного x_{11} («северо-западный угол») и заканчивается клеткой для неизвестного x_{mn} , т. е. идет как бы по диагонали таблицы.

Задача 15.1. Пусть условия транспортной задачи заданы в таблице 15.1.

Таблица 15.1

Поставщики	Потребители					Запасы a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1	4	100
A_2	2	7	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2	200
A_4	11	8	12	16	13	300
Потребности b_j	200	200	100	100	250	850

Методом северо-западного угла составить опорный план задачи.

Решение. Не учитывая стоимости перевозки единицы груза, начинаем удовлетворение потребностей первого потребителя B_1 за счет запаса поставщика A_1 . Для этого сравниваем $a_1 = 100$ с $b_1 = 200$, $a_1 < b_1$, меньший из объемов, т. е. = 100 ед. записываем в левый нижний угол клетки A_1B_1 . Запасы первого поставщика полностью израсходованы, поэтому остальные клетки первой строки прочеркиваем. Потребности B остались неудовлетворенными на $200 - 100 = 100$ ед. Сравниваем этот остаток с запасами поставщика A_2 : так как $100 < 250$, то 100 ед. записываем в клетку A_2B_1 , чем полностью удовлетворяем потребности потребителя B_1 , а оставшиеся клетки в первом столбце прочеркиваем.

У поставщика A_2 осталось 150 ед. груза. Удовлетворяем потребителя B_2 за счет оставшегося у поставщика A_2 груза. Для этого сравниваем этот остаток с потребностями потребителя B_2 : $150 < 200$, записываем 150 ед. в клетку A_2B_2 и, так как запасы A_2 полностью израсходованы, прочеркиваем остальные клетки второй строки. Потребности B_2 остались неудовлетворенными на 50 ед. Удовлетворяем их за счет поставщика A_3 и переходим к удовлетворению B_3 за счет остатка, имеющегося у поставщика

A_3 , и т. д. Процесс продолжаем до тех пор, пока не удовлетворим всех потребителей за счет запасов поставщиков. На этом построение первоначального опорного плана заканчивается.

Таблица 15.2

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7 -	4 -	1 -	4 -	100
A_2	2 100	7 150	10 -	6 -	11	250
A_3	8 -	5 50	3 100	2 50	2 -	200
A_4	11 -	8	12	16 50	13 250	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

Таким образом, в таблице 15.2 в правых верхних углах клеток стоят числа, определяющие стоимость перевозки единицы грузов, а в левых нижних углах — числа, определяющие план перевозок, так как их сумма по строкам равна запасам соответствующего поставщика, а сумма по столбцам — потребности соответствующего потребителя.

Проверим, является ли план, построенный в таблице, опорным. Видим, что, начиная движение от занятой клетки A_1B_1 , вернуться не только в нее, но и в любую другую занятую клетку, двигаясь только по занятым ячейкам, невозможно. Следовательно, план является опорным. В то же время план невырожденный, так как содержит точно $m+n-1=4+5-1=8$ занятых клеток.

При составлении первоначального опорного плана методом северо-западного угла стоимость перевозки единицы груза не учитывалась, поэтому построенный план далек от оптимального.

Найдем общую стоимость составленного плана как сумму произведений объемов перевозок, стоящих в левом углу занятых клеток, на соответствующие стоимости в этих же ячейках:

$$Z = 100 \cdot 10 + 100 \cdot 2 + 150 \cdot 7 + 50 \cdot 5 + 100 \cdot 3 + 50 \cdot 2 + 50 \cdot 16 + 250 \cdot 13 = 6950 (\text{ед.}).$$

Если при составлении опорного плана учитывать стоимость перевозки единицы груза, то план будет значительно ближе к оптимальному.

Задача 15.2. Методом северо-западного угла составить опорный план перевозок груза из трех пунктов отправления с запасами 30, 48, 24 т. в четыре пункта назначения с потребностями 18, 27, 42, 15 т. Тарифы перевозок C_{ij} (в ден/ед.) из A_i ($i=1, 2, 3$) в B_j ($j=1, 2, 3, 4$) приведены в матрице:

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 11 & 5 \\ 11 & 8 & 13 & 7 \\ 6 & 10 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. Составим распределительную таблицу, в которой последовательно, начиная с верхнего левого угла (ячейка $A_1 B_1$) и двигаясь по диагонали таблицы, заполним клетки до $A_3 B_4$.

Таблица 15.3

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i
A_1	18 13	12 7	11	5	30
A_2	11	15 8	33 13	7	48
A_3	6	10	9 12	15 9	24
Потребности b_j	18	27	42	15	102

Данный план является опорным и невырожденным, так как содержит точно $(m + n - 1 = 4 + 3 - 1 = 6)$ заполненных клеток. Вычислим общую сумму затрат на перевозки груза по этому плану:

$$Z_1 = 18 \cdot 13 + 12 \cdot 7 + 15 \cdot 8 + 33 \cdot 13 + 9 \cdot 12 + 15 \cdot 9 = 1110 \text{ (ед.)}.$$

План не учитывал тарифов перевозок и, наверное, не будет оптимальным.

16. Метод минимальной стоимости

Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел a_i , или b_j . Затем из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя. Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Задача 16.1. Методом минимальной стоимости составить опорный план решения задачи, заданной в таблице 15.1.

Решение. В таблице 16.1 дано решение методом минимальной стоимости.

Таблица 16.1

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1 100	4	100
A_2	2 200	7 50	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2 200	200
A_4	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

Действуем следующим образом: выбираем в таблице наименьшую стоимость (это стоимость, помещенная в клетке A_1B_4) $A_1 = B_4 = 100$ ед. груза помещаем в этой клетке и исключаем из рассмотрения первую строку и четвертый столбец. В оставшейся таблице стоимостей наименьшей является стоимость, расположенная в клетке A_2B_1 и в клетке A_3B_5 . Заполняем любую из них, например, A_2B_1 . Имеем $200 < 250$, следовательно, записываем в нее **200** и исключаем из рассмотрения столбец B_1 . В клетку A_3B_5 записываем **200** ед. и исключаем из рассмотрения строку A_3 . В оставшейся таблице стоимостей снова выбираем наименьшую стоимость и продолжаем процесс до тех пор, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

В результате получен план

$X = (X_{14} = 100; X_{21} = 200; X_{22} = 50; X_{35} = 200, X_{42} = 150; X_{43} = 100; X_{45} = 50)$, остальные значения переменных равны нулю.

План состоит из семи положительных перевозок, следовательно, является вырожденным опорным планом. Определим его стоимость:

$$Z = 100 \cdot 1 + 200 \cdot 2 + 50 \cdot 7 + 200 \cdot 2 + 150 \cdot 8 + 100 \cdot 12 + 50 \cdot 13 = 4300 (\text{ед.}).$$

Стоимость плана перевозок значительно меньше, следовательно, он ближе к оптимальному.

17. Метод аппроксимации Фогеля

Данный метод состоит в следующем:

1. На каждой итерации находят разности между двумя наименьшими тарифами во всех строках и столбцах, записывая их в дополнительные столбец и строку таблицы;
2. Находят $\max \Delta c_{ij}$ и заполняют клетку с минимальной стоимостью в строке (столбце), которой соответствует данная разность.

Процесс продолжается до тех пор, пока все грузы не будут развезены по потребителям. Данный метод в ряде задач приводит к оптимальному плану.

Задача 17.1. Решим методом аппроксимации Фогеля задачу 15.2.

Решение. Составим с помощью этого метода опорный план уже рассмотренной задачи. Запишем условие в таблицу 17.1.

Таблица 17.1

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i	Δc_{ij}
A_1	13	15 ⁷	11	15 ⁵	30	2,2,4,В
A_2	11	12 ⁸	36 ¹³	7	48	1,1,5,В
A_3	18 ⁶	10	6 ¹²	9	24	3,1,2,В
Потребности b_j	18	27	42	15	102	
Δc_{ij}	5,В	1,2,В	1,1,1,В	2,В		

На первом шаге заполняем клетку $A_3 B_1$ ($\max \Delta c = 5$ и $\min c_{ij} = 6$), исключаем 1-ый столбец, отметив в дополнительной строке буквой «В» факт выполнения заказа пункта B_1 . Находим новые разности минимальных тарифов по строкам (в столбцах они не изменились) и $\max \Delta c = 2$ в 1-ой строке и в 4-ом столбце. Заполняем клетку $A_1 B_4$ и исключаем 4-й столбец и т. д. В конце остается последовательно заполнить клетки 3-го столбца остатками запасов в A_1, A_3, A_2 .

Составленный опорный план дает значение: $Z_2 = 924 < Z_1$.

Таким образом, наименьшую стоимость для задачи 15.2 имеет опорный план, полученный методом аппроксимации Фогеля, следовательно, он наиболее близок к оптимальному плану.

18.Метод двойного предпочтения

Если таблица стоимостей велика, то перебор всех элементов затруднителен. В этом случае используют метод двойного предпочтения, суть которого заключается в следующем.

В каждом столбце отмечают знаком V клетку с наименьшей стоимостью. Затем то же проделывают в каждой строке. В результате некоторые клетки имеют отметку VV . В них находится минимальная стоимость как по столбцу, так и по строке. В эти клетки помещают максимально возможные объемы перевозок, каждый раз исключая из рассмотрения соответствующие столбцы или строки. Затем распределяют перевозки по ячейкам, отмеченным знаком V . В оставшейся части таблицы перевозки распределяют по наименьшей стоимости.

Задача 18.1. Методом двойного предпочтения составить опорный план решения задачи, заданной в таблице 15.1.

Решение. Отмечаем в таблице 18.1 знаком V ячейку с наименьшей стоимостью в каждом столбце, затем - в каждой строке.

Таблица 18.1

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1 VV	4	100
A_2	2 VV	7	10	6	11	250
A_3	8	5 V	3 V	2 V	2 VV	200
A_4	11	8 V	12	16	13	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

Ячейки A_1B_4 , A_2B_1 , A_3B_5 имеют отметку VV , следовательно, с них и начинаем заполнение. Затем заполняем ячейку A_4B_2 (т.к. в столбце B_2 нет ни одной ячейки с отметкой VV). В оставшейся части таблицы последовательно заполняем ячейки по минимальной стоимости A_1B_3 , A_4B_3 , A_4B_5 .

План, полученный в таблице 18.2, является вырожденным опорным планом.

Таблица 18.2

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1 100	4	100
A_2	2 200	7	10 50	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2 200	200
A_4	11	8 200	12 50	16	13 50	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

Вычислим общую сумму затрат на перевозку груза по этому плану:
 $Z = 100 \cdot 1 + 200 \cdot 2 + 50 \cdot 10 + 200 \cdot 2 + 200 \cdot 8 + 50 \cdot 12 + 50 \cdot 13 = 4250$ (ед.)

Таким образом, для задачи 15.1 наименьшую стоимость имеет опорный план, полученный методом двойного предпочтения, и он наиболее близок к оптимальному плану.

19. Теорема о существовании оптимального решения

Пусть одним из рассмотренных методов решения ТЗ найден опорный план, содержащий $m + n - 1$ занятых клеток (в некоторых из них могут стоять нули). Поставим в соответствие каждому пункту отправления A_i некоторое число u_i , $i = 1, \dots, m$ и каждому пункту назначения B_j - число v_j , $j = 1, \dots, n$.

Эти числа назовем **потенциалами**, соответственно, пунктов отправления и пунктов назначения.

Вопрос об оптимальности опорного плана решает следующая теорема:

Теорема 19.1. Если для некоторого плана $X^* = (x_{ij})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ транспортной задачи выполняются условия:

$$1. \ u_i + v_j = c_{ij} \text{ для } x_{ij} > 0 \text{ (для занятых клеток),} \quad (19.1)$$

$$2. \ u_i + v_j < c_{ij} \text{ для } x_{ij} = 0 \text{ (для свободных клеток),} \quad (19.2)$$

то план X^* является оптимальным.

Отметим, что система (19.1) $(m+n-1)$ уравнений содержит $(m+n)$ неизвестных u_i , v_j , и потому, приравнявая одно из них, например u_i , к нулю, однозначно определим остальные неизвестные.

Для «улучшения» опорного плана (при невыполнении условия (19.2)) выбирают свободную клетку с $\max (u_i + v_j - c_{ij})$ и строят для нее **цикл пересчета** (сдвига).

Определение 19.1. **Циклом** называют замкнутую ломаную линию, все вершины которой лежат в занятых ячейках, кроме одной, расположенной в свободной клетке, подлежащей заполнению, а звенья параллельны строкам и столбцам, причем в каждой строке (столбце) лежит не более 2-х вершин. Всем вершинам поочередно приписывают знаки «+» и «-», начиная со свободной клетки. Далее, в свободную клетку помещают груз величиной λ , равной минимальному значению из всех чисел в отрицательных ячейках цикла. Во все положительные клетки прибавляется λ , из отрицательных - вычитается λ (сдвиг по циклу). Нетрудно подсчитать, насколько изменится (уменьшится) стоимость перевозок при новом плане:

$$\Delta Z = \lambda \left| \sum_{+} c_{ij} - \sum_{-} c_{ij} \right|, \quad (19.3)$$

где $\sum_{+} c_{ij}$ – сумма тарифов в положительных вершинах, $\sum_{-} c_{ij}$ – в отрицательных вершинах цикла.

Новый опорный план снова проверяют на оптимальность с помощью системы уравнений потенциалов.

Заметим, что в результате пересчета по циклу может оказаться число занятых клеток меньше, чем $m+n-1$ (план называется вырожденным). В этом случае следует заполнить числом «0» пустую клетку, имеющую минимальный тариф и не образующую с занятыми клетками замкнутого прямоугольного контура.

Задача 19.1. Проверить оптимальность опорного плана ТЗ, решенной в задаче 15.2.

Решение. Пользоваться будем опорным планом, полученный методом аппроксимации Фогеля, так как он наиболее близок к оптимальному плану.

Таблица 19.1

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i
A_1	13	15 ⁷	11	15 ⁵	30
A_2	11	12 ⁸	36 ¹³	7	48
A_3	18 ⁶	10	6 ¹²	9	24
Потребности b_j	18	27	42	15	102

Составляем систему уравнений потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 7 \\ u_1 + v_4 = 5 \\ u_2 + v_2 = 8 \\ u_2 + v_3 = 13 \\ u_3 + v_1 = 6 \\ u_3 + v_3 = 12 \end{cases}.$$

Полагая $u_1 = 0$, найдем: $u_2 = 1, u_3 = 0, v_1 = 6, v_2 = 7, v_3 = 12, v_4 = 5$.

Проверив свободные клетки, находим, что лишь в клетке A_1B_3 будет $u_1 + v_3 > 11 = c_{13}$.

Для заполнения этой клетки строим цикл пересчета (см. табл. 19.2).

Таблица 19.2

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i
A_1	13	15 ⁻⁷	⁺¹¹	15 ⁵	30
A_2	11	12 ⁺⁸	36 ⁻¹³	7	48
A_3	18 ⁶	10	6 ¹²	9	24
Потребности b_j	18	27	42	15	102

Сдвиг по циклу на 15 ед. ($\min(15, 36) = 15$) дает новый опорный план

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 27 & 21 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

при этом будет: $\Delta Z_2 = 15[(11+8)-(7+13)] = -15$ и $Z_3 = Z_2 + \Delta Z_2 = 909$ (ед.).

В системе потенциалов для этого плана лишь 1-ое уравнение заменялось равенством $u_1 + v_3 = 11$.

Тогда, положив $u_1 = 0$, находим $v_3 = 11, v_4 = 5, v_2 = 6, v_1 = -5, u_2 = 2, u_3 = 1$ убеждаемся, что для всех свободных клеток выполняется условие (**). Следовательно, план $X_3 = X_{opt}$ и $Z_{min} = 909$ (ед.).

Свойство 19.1. Если для некоторого оптимального плана $X^* = (x_{ij})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ транспортной задачи выполняется условие: $u_i + v_j = c_{ij}$ для $x_{ij} = 0$ (для свободных клеток), то существует как минимум еще один оптимальный план, для которого общая стоимость плана перевозок остается прежней, поскольку $u_i + v_j - c_{ij} = 0$.

Задача 19.2. Проверить оптимальность ТЗ, определенную таблицей 19.3.

Таблица 19.3

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	2	7	3	6	2	50
A_2	9	4	5	7	3	50
A_3	5	7	6	2	4	50
b_j	10	40	20	60	20	150

Решение. Введем построение опорного плана методом наименьшей стоимости (см. таблицу 19.4).

Таблица 19.4

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	10 2	7	20 3	6	20 2	50
A_2	9	40 4	5	10 7	0 3	50
A_3	5	7	6	50 2	4	50
b_j	10	40	20	60	20	150

Замечаем, что в результате пересчета по циклу оказалось, что число занятых клеток меньше, чем $m+n-1: 5+3-1=7 > 6$, т. е. получен вырожденный план. Следовательно, заполняем числом «0» пустую клетку A_2B_5 , т.к. она имеет минимальный тариф ($c_{25} = 3$) и не образует с занятыми клетками замкнутого прямоугольного контура.

Получаем опорный план:
$$X = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 20 & 0 & 20 \\ 0 & 40 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим общую сумму затрат на перевозку груза по этому плану:
 $Z = 10 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 7 + 0 \cdot 3 + 50 \cdot 2 = 550$ (ед.).

Составляем систему уравнений потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2 \\ u_1 + v_3 = 3 \\ u_1 + v_5 = 2 \\ u_2 + v_2 = 4 \\ u_2 + v_4 = 7 \\ u_2 + v_5 = 3 \\ u_3 + v_4 = 2 \end{cases}$$

Полагая $u_1 = 0$, найдем: $u_2 = 1, u_3 = -4, v_1 = 2, v_2 = 3, v_3 = 3, v_4 = 6, v_5 = 2$.

Проверив свободные клетки, убеждаемся, что по теореме 19.1 план оптимален, следовательно, $Z = Z_{\min}$.

Данный оптимальный план не является единственным, так как для клетки A_1B_4 сумма потенциалов равна стоимости перевозки $u_1 + v_4 = c_{14}$, и в нее по циклу можно переместить 10 ед. груза.

Задача 19.3. Составить план перевозок грузов с наименьшей общей стоимостью от четырех поставщиков A_i ($i = 1, 2, 3, 4$), соответственно, в количествах **100, 400, 100** и **100** ед. К пяти потребителям B_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$), соответственно, в количествах **50, 100, 150, 200** и **250** ед.. Стоимости перевозок единицы груза из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения являются известными величинами и задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 & 12 & 16 \\ 16 & 10 & 8 & 6 & 15 \\ 4 & 1 & 9 & 11 & 13 \\ 3 & 2 & 7 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

Решение. Вычислим суммарные запасы и потребности. Соответственно: $\sum_{i=1}^m a_i = 700, \sum_{j=1}^n b_j = 750$. Потребности превышают запасы на **50** ед. Необходимо ввести фиктивного поставщика (строка A_{m+1}), запасы которого составят $A_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i = 50$ (ед.). Получим закрытую модель ТЗ.

Заполняем распределительную таблицу методом минимальной стоимости (см. таблицу 19.5).

Таблица 19.5

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	50 ¹	6	50 ⁸	12	16	100
A_2	16	10	0 ⁸	200 ⁶	200 ¹⁵	400
A_3	4	100 ¹	9	11	13	100
A_4	3	0 ²	100 ⁷	7	15	100
A_5	0	0	0	0	50 ⁰	50
Потребности b_j	50	100	150	200	250	750

Получаем опорный план

$$X = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 & 200 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим общую сумму затрат на перевозку груза по этому плану:

$$Z = 50 \cdot 1 + 50 \cdot 8 + 0 \cdot 8 + 200 \cdot 6 + 200 \cdot 15 + 100 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 100 \cdot 7 = 5450 \text{ (ед.)}$$

Проверяем его на оптимальность, для чего составляем систему

уравнений потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 1 \\ u_1 + v_3 = 8 \\ u_2 + v_3 = 8 \\ u_2 + v_4 = 6 \\ u_2 + v_5 = 15 \\ u_3 + v_2 = 1 \\ u_4 + v_2 = 2 \\ u_4 + v_3 = 7 \\ u_5 + v_5 = 0 \end{cases}.$$

Полагая $u_1 = 0$, найдем $u_2 = 0, u_3 = -2, u_4 = -1, u_5 = -15, v_1 = 1, v_2 = 3, v_3 = 8, v_4 = 6, v_5 = 15$.

Проверив свободные клетки, находим, что получен оптимальный план.

Анализируя оптимальный план задачи, можно сделать **следующие выводы**: потребитель B_5 получает 50 ед. груза от фиктивного поставщика, следовательно, его потребности будут не удовлетворены на это же количество единиц.

Свойство 19.2. Любая выпуклая линейная комбинация двух оптимальных планов также является оптимальным планом.

Это свойство можно использовать для улучшения планирования, при этом можно учесть особенности, которые не были учтены в математической

модели задачи (ранее взятые договорные обязательства, сложившиеся традиции в отношениях и т. д).

20. Транспортные задачи с ограничениями

При решении конкретных транспортных задач приходится часто учитывать некоторые дополнительные ограничения: невозможность (запрет) поставки груза из A_i в B_j (блокировка), обеспечение пункта B_j заданным количеством a_{ij} единиц груза за счет пункта отправления A_i и т. п. В этих случаях поступают следующим образом:

1. Запрет перевозок груза из A_i в B_j осуществляется занесением в клетку A_iB_j числа $c_{ij} = M > 0$ (здесь и в последующем M – сколь угодно большое число). При оптимальном плане эта клетка будет блокирована.
2. По условию задачи требуется доставить из A_i в B_j a_{ij} единиц груза. Следует занести в начале заполнения таблицы в клетку A_iB_j число a_{ij} , считать ее в дальнейшем свободной ($c_{ij} = M$), а потребности b_j и запасы a_i уменьшить на a_{ij} . Найденный оптимальный план новой задачи будет оптимальным и для исходной (с добавлением $x_{ij} = a_{ij}$).
3. Если требуется из A_i в B_j завести груз $x_{ij} \geq 0$ - заданного числа a_{ij} , то уменьшают запасы a_i и потребности b_j на a_{ij} и находят оптимальный план новой задачи, по которому определяют и решение исходной задачи ($x_{ij}^* = a_{ij} + x_{ij}$, где $x_{ij} > 0$ - компонента плана новой задачи).
4. Иногда требуется перевезти из A_i в B_j груза не более заданного объема $x_{ij} < a_{ij}$. Тогда, чаще всего, поступают следующим образом: в таблицу вводят дополнительный столбец B^*_j с тарифами, равными тарифам столбца B_j , кроме клетки A_iB_j , где полагают $c_{ij} = M$. При этом потребности пункта B_j считаются равными a_{ij} , а B^*_j - равными $b_j - a_{ij}$.

Находят решение полученной задачи обычными методами или устанавливают ее неразрешимость.

Заметим, что исходная ТЗ разрешима лишь в том случае, когда для нее существует хотя бы один опорный план.

Задача 20.1. Выпуск продукции трех заводов A_1, A_2, A_3 составляет соответственно 260, 240 и 300 т. Потребности четырех потребителей B_1, B_2, B_3, B_4 равны соответственно 300, 200, 250 и 100 т. Известно, что продукция завода A_1 не требуется пункту B_4 , и с завода A_3 потребителю B_2 должно быть доставлено груза не более 50 т. Стоимость перевозки одной тонны продукции из A_i в B_j задана матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Определить план прикрепления потребителей к заводам, удовлетворяющий поставленным условиям и обеспечивающий минимальные затраты на транспортировку всей продукции завода.

Решение. Заметим, что $\sum_{j=1}^4 b_j - \sum_{i=1}^3 a_i = 50$ и поэтому вводим фиктивного поставщика A_4 с запасами $a_4 = 50$ и нулевыми тарифами (4-ая строка). Получим закрытую модель ТЗ.

Заполняем распределительную таблицу в следующем порядке. В клетку A_1B_4 записываем число M (блокируем), тем самым выполнив первое условие задачи. Далее в столбце B_2 записываем потребности $b_2 = 50$, остальные 150 заносим в дополнительный столбец B_5 . Все тарифы в нем такие же, как и в B_2 , лишь в клетке A_3B_5 ставим число M . Далее по принципу минимальной стоимости заполняем клетки таблицы 20.1.

Таблица 20.1

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	110 ³	⁴	⁶	M ¹	150 ⁴	260
A_2	⁵	⁷	240 ²	³	⁷	240
A_3	190 ⁴	50 ³	⁸	60 ⁶	M	300
A_4	⁰	⁰	10 ⁰	40 ⁰	⁰	50
Потребности b_j	300	200 50	250	100	150	850

Получаем опорный план:

$$X = \begin{pmatrix} 110 & 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 240 & 0 \\ 190 & 50 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 10 & 40 \end{pmatrix}.$$

Проверяем его на оптимальность, для чего составляем систему уравнений

$$\text{потенциалов: } \begin{cases} u_1 + v_1 = 3 \\ u_2 + v_3 = 2 \\ u_3 + v_1 = 4 \\ u_3 + v_2 = 3 \\ u_3 + v_4 = 6 \\ u_4 + v_3 = 0 \\ u_4 + v_4 = 0 \end{cases}.$$

Полагая $u_3 = 0$, найдем: $u_1 = -1, u_2 = -4, u_4 = -6, v_1 = 4, v_2 = 3, v_3 = 6, v_4 = 6$.

Проверив свободные клетки, убеждаемся, что для них выполняются условие (19.2) теоремы, следовательно, план X является оптимальным и $Z_{\min} = 2680$ (ед.).

Задача 20.2. В трех хранилищах горючего ежедневно хранится 175, 125 и 140 т. бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных соответственно 180, 110, 90 и 40 т. Тарифы перевозок 1 т бензина с хранилищ к заправочным станциям задаются

матрицей $C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}$. Пусть требуется завести со второго хранилища на

третью заправочную станцию горючего не менее 40. Составить такой план перевозок бензина, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Решение. Для ограничения $x_{23} \geq 40$ вычитаем 40 из запасов и потребностей.

Стоимость доставки единицы груза из каждого пункта отправления в соответствующие пункты назначения задана матрицей тарифов.

Таблица 20.2

	1	2	3	4	Запасы
1	9	7	5	3	175
2	1	2	4	6	85
3	8	10	12	1	140
Потребности	180	110	50	40	

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи: $\sum a = 175 + 85 + 140 = 400, \sum b = 180 + 110 + 50 + 40 = 380$.

Как видно, суммарная потребность груза в пунктах назначения меньше запасов груза на базах. Следовательно, модель исходной транспортной задачи является открытой. Чтобы получить закрытую модель, введем дополнительную (фиктивную) потребность равную 20 (380—400). Тарифы

перевозки единицы груза из хранилища на все заправочные станции полагаем равными нулю.

Занесем исходные данные в распределительную таблицу 20.3.

Таблица 20.3

	1	2	3	4	5	Запасы
1	9	7	5	3	0	175
2	1	2	4	6	0	85
3	8	10	12	1	0	140
Потребности	180	110	50	40	20	

Используя метод наименьшей стоимости, построим первый опорный план транспортной задачи (таблица 20.4).

Таблица 20.4

	1	2	3	4	5	Запасы
1	9	7[110]	5[50]	3	0[15]	175
2	1[85]	2	4	6	0	85
3	8[95]	10	12	1[40]	0[5]	140
Потребности	180	110	50	40	20	

В результате получен первый опорный план, который является допустимым.

Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 7, а должно быть $m + n - 1 = 7$. Следовательно, опорный план является невырожденным.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

$$F(X) = 7 \cdot 110 + 5 \cdot 50 + 0 \cdot 15 + 1 \cdot 85 + 8 \cdot 95 + 1 \cdot 40 + 0 \cdot 5 = 1905.$$

Проверим оптимальность опорного плана (таблица 20.5).

Таблица 20.5

	$v_1=8$	$v_2=7$	$v_3=5$	$v_4=1$	$v_5=0$
$u_1=0$	9	7[110]	5[50]	3	0[15]
$u_2=-7$	1[85]	2	4	6	0
$u_3=0$	8[95]	10	12	1[40]	0[5]

Опорный план является оптимальным, так как все оценки свободных клеток удовлетворяют условию $u_i + v_j \leq c_{ij}$.

Для ограничения $x_{23} \geq 40$ добавляем 40 в (2,3):

$$F(X) = 7 \cdot 110 + 5 \cdot 50 + 0 \cdot 15 + 1 \cdot 85 + 4 \cdot 40 + 8 \cdot 95 + 1 \cdot 40 + 0 \cdot 5 = 2065 \text{ (ед.)}.$$

21. Задачи дробно-линейного программирования

Одним из частных случаев математического программирования, а также одним из обобщений линейного программирования является дробно-линейное программирование, ставшее необходимым инструментом при

решении многих оптимизационных задач с удельными показателями качества.

Первые статьи, посвященные рассмотрению задач дробно-линейного программирования и разработке методов их решения, появились в начале 60-х годов 20 века. Многие работы по дробно-линейному программированию быстро получили широкую известность и породили многочисленные исследования в этой области.

При планировании производства используют показатели себестоимости продукции, рентабельности производства, среднюю стоимость одной единицы выпускаемой продукции и другие. Одни из этих показателей стремятся минимизировать, а другие – максимизировать. Задачи дробно-линейного программирования в планировании играют особую роль. Актуальность задач дробно-линейного программирования заключается в том, что возможно найти оптимальное решение производства на любой срок и на любой объем производимой продукции.

Среди оптимизационных плановых задач все большее значение приобретают такие, в которых необходимо экстремизировать удельные экономические показатели, т. е. например такие, как себестоимость, рентабельность и т. п. Но в таких случаях допустимые условия могут ничем не отличаться от допустимых условий обычной линейной задачи, а вот целевая функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой стоят линейные формы от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ - искомых планов выпуска интересующих нас товаров.

Дробно-линейное программирование - это область математического программирования, связанная с отысканием экстремальных значений (max или min) некоторой дробно-линейной целевой функции в линейной области ограничений. Задачи такого типа, вообще говоря, являются нелинейными задачами оптимизации (так как имеют целевую функцию, заданную в нелинейном виде), и решить их сразу достаточно сложно.

Рассмотрим следующую прикладную задачу. Для выполнения n различных работ могут быть использованы рабочие m квалификационных групп.

При выполнении i -й группой рабочих j -й работы выработка в единицу времени составляет c_{ij} единиц ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$).

Общее количество времени, в течение которого i -я группа рабочих может быть занята выполнением работ, не превышает a_i единиц времени, j -я работа должна быть выполнена в объеме не менее b_j единиц.

Необходимо составить такой план выполнения работ, который бы обеспечивал максимальную производительность.

$$\text{Производительность} = \frac{\sum \text{объем работ}}{\sum \text{затраты времени}}.$$

Построим модель. Пусть x_{ij} – время, затрачиваемое i -й группой рабочих для выполнения j -й работы ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$).

Тогда при плане $\{x_{ij}\}$ общий объем работ (F_1) составит:

$$F_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} .$$

Общие затраты времени (F_2) на выполнение этого объема работ определяются следующим образом:

$$F_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} .$$

При плане $\{x_{ij}\}$ общая производительность всех работ составит:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}} .$$

Сформулируем ограничения задачи:

$-j$ -я работа должна быть выполнена в объеме не менее b_j единиц, следовательно, должно иметь место:

$$\sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} \geq b_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

$-i$ -я группа рабочих может быть занята выполнением работ не более a_i единиц времени:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

Последнее естественное ограничение – это требование неотрицательности переменных: $x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$.

Окончательно модель приобретает вид:

$$\begin{aligned} \frac{F_1}{F_2} &= \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}} \rightarrow \max \\ \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} &\geq b_j, \quad (j = 1, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_i, \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_{ij} &\geq 0, \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

В практике планирования с использованием математических моделей оптимизационных задач подобные нелинейные задачи встречаются достаточно часто. Они составляют целый класс задач математического программирования – задачи дробно-линейного программирования.

Существуют методы, которые делают решение таких задач гораздо проще. К таким методам относятся графический метод и метод сведения задачи дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования путем соответствующего преобразования.

22. Графический метод решения задач дробно-линейного программирования

Общая задача дробно-линейного программирования состоит в определении максимального значения функции и имеет вид:

$$F = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j}{\sum_{j=1}^n d_j x_j} \rightarrow \max \quad (22.1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad (22.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n), \quad (22.3)$$

где c_j, d_j, b_i и a_{ij} - некоторые постоянные числа. При этом предполагается, что $\sum_{j=1}^n d_j x_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$) и $\sum_{j=1}^n d_j x_j \neq 0$ в области неотрицательных решений системы линейных уравнений (22.2). Заметим, что условие $\sum_{j=1}^n d_j x_j > 0$ не нарушает общности задачи в этой области, поскольку в том случае, когда эта величина отрицательна, знак минус всегда можно отнести к числителю.

Как и в случае основной задачи линейного программирования, свое максимальное значение целевая функция задачи (22.1)-(22.3) принимает в одной из вершин многоугольника решений, определяемой системой ограничений (22.2) и (22.3) (естественно, если задача имеет решение). Если максимальное значение целевая функция задачи (22.1) принимает более чем в одной вершине многоугольника решений, то она достигает его также во всякой точке, являющейся выпуклой комбинацией данных вершин.

Рассмотрим задачу, состоящую в определении максимального значения функции двух переменных:

$$F = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \quad (22.4)$$

при условиях

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad (22.5)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \quad (22.6)$$

Будем считать, что в области допустимых решений имеет место $d_1 x_1 + d_2 x_2 \neq 0$.

Для того чтобы найти решение задачи (22.4)-(22.6), сначала находим многоугольник решений, определяемый ограничениями (22.5) и (22.6) задачи.

Предполагая, что этот многоугольник не пуст, полагаем значение функции равным некоторому числу h . Т. е. целевая функция задачи будет принимать одно и тоже значение во всех точках прямой

$$\frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} = h. \quad (22.7)$$

Эта прямая проходит через начало координат. Чтобы найти допустимые решения, на которых целевая функция задачи принимает значение h , прямая должна иметь общие точки с многоугольником решений. Вращая

построенную прямую (22.7) вокруг начала координат, либо определяем вершину (вершины), в которой функция (22.4) принимает максимальное значение, либо устанавливаем неограниченность функции на множестве планов задачи.

Итак, поиск решения задачи (22.4)-(22.6) включает в себя следующие этапы:

1. В системе ограничений задачи знаки неравенств заменяют на знаки точных равенств и строят прямые, определяемые этими уравнениями.
2. Находят полуплоскости для каждого из неравенств системы ограничений задачи.
3. Находят многоугольник решений задачи.
4. Полагая значение целевой функции (22.4) равным некоторому постоянному числу, строят прямую (22.7).
5. Определяют точку максимума или устанавливают неразрешимость задачи.
6. В найденной точке максимума находят значение целевой функции.

Заканчивая рассмотрение нахождения решения задачи дробно-линейного программирования графическим методом, отметим, что при решении конкретных задач могут быть различные случаи.

1. Многогранник решений ограничен, максимум и минимум достигаются в его угловых точках (рис. 22.1).

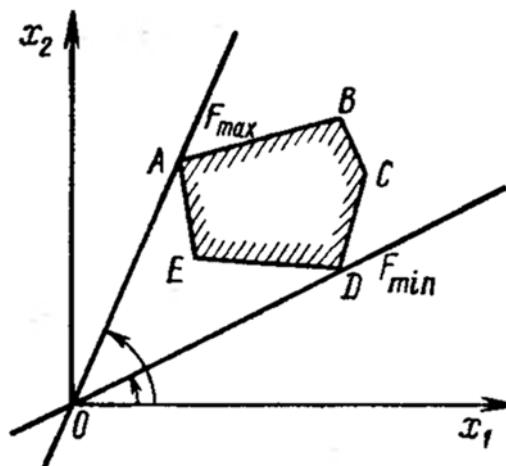


рис. 22.1

2. Многогранник решений не ограничен, но существуют вершины, в которых целевая функция задачи будет принимать соответственно максимальное и минимальное значения (рис. 22.2).

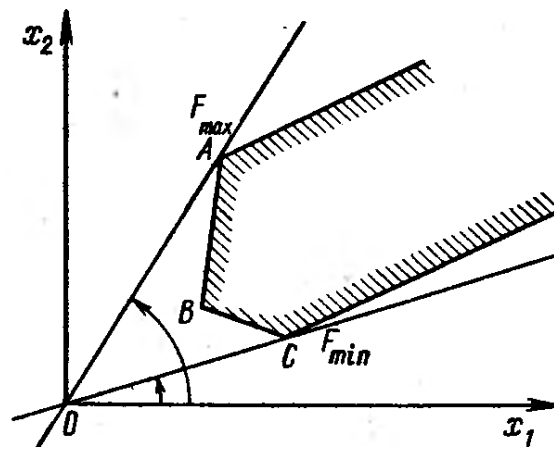


рис. 22.2

3. Многогранник решений не ограничен, и достигается один из экстремумов. К примеру, минимум достигается в одной из вершин многогранника решений, а максимум не достигается вообще, т. е. функция F имеет так называемый асимптотический максимум (рис. 22.3).

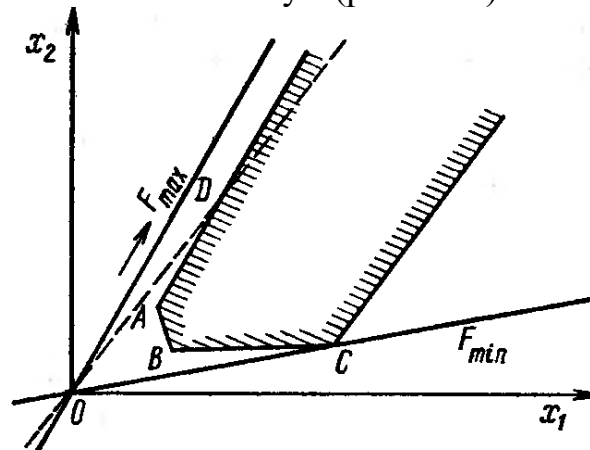


рис. 22.3

4. Многогранник решений не ограничен, максимум и минимум являются асимптотическими (рис. 22.4).

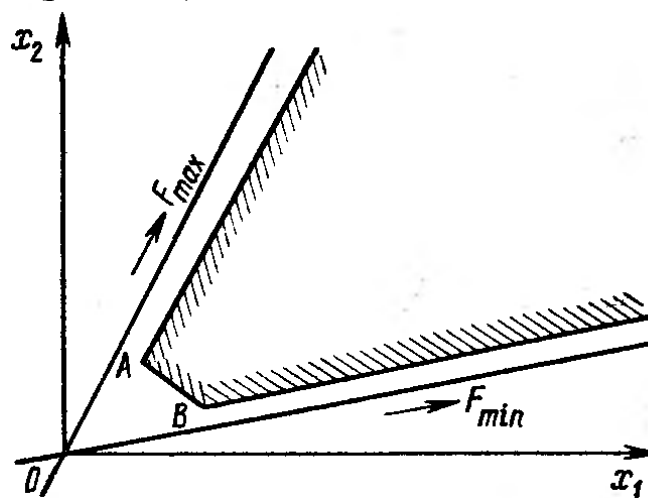


рис. 22.4

Задача 22.1. Для производства двух видов изделий А и В предприятие использует три типа технологического оборудования. Каждое из изделий должно пройти обработку на каждом из трех типов оборудования. Время

обработки каждого изделия на оборудовании данного типа представлено в таблице 22.1.

Таблица 22.1.

Тип оборудования	Затраты времени(ч.) на обработку одного изделия	
	А	В
I	2	8
II	1	1
III	12	3
Затраты на производство одного изделия (руб.)	2	3

Оборудование I и III типов предприятие может использовать не более 26 и 39 ч. При этом оборудование II типа целесообразно использовать не менее 4 ч.

Требуется определить, сколько изделий каждого вида следует изготовить предприятию, чтобы себестоимость одного изделия была минимальной.

Решение. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида А и x_2 изделий вида В. Тогда общие затраты на их производство будут равны $2x_1 + 3x_2$ руб., а себестоимость одного изделия в рублях составит

$$F = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2}. \quad (22.8)$$

Затраты времени на обработку указанного количества изделий на каждом из трех типов оборудования составят соответственно $2x_1 + 8x_2$ часов, $x_1 + x_2$ часов, $12x_1 + 3x_2$ часов. Так как предприятие может использовать оборудование I и III типов для обработки изделий вида А и В не более 26 и 39 ч., а оборудование II типа не менее 4 ч., то должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \leq 26, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ 12x_1 + 3x_2 \leq 39. \end{cases} \quad (22.9)$$

Переменные x_1 и x_2 по своему экономическому смыслу не могут принимать отрицательные значения:

$$x_1, x_2 \geq 0. \quad (22.10)$$

Таким образом, математическая постановка задачи состоит в определении неотрицательного решения системы линейных неравенств (22.9), реализующего минимум функции (22.8). Для того чтобы найти решение задачи, сначала построим многоугольник решений:

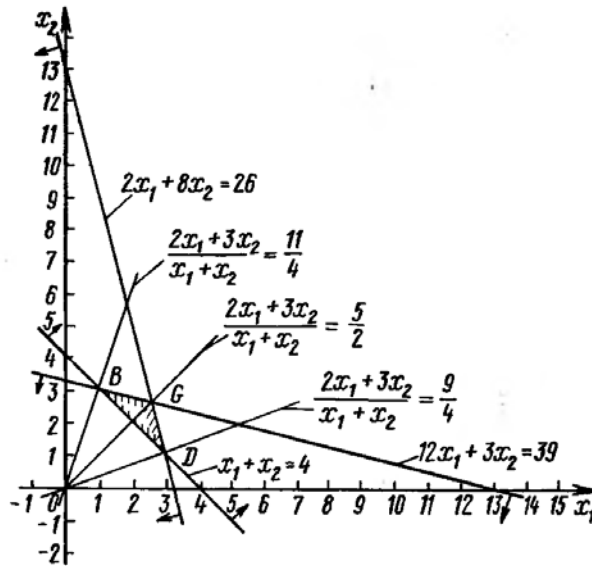


рис. 22.5

Как видно из рис. 22.5 многоугольником решений является треугольник BCD. Таким образом, функция (22.8) принимает минимальное значение в одной из трех точек B, C или D. Для того чтобы определить, в какой именно, положим значение функции F равным некоторому числу, к примеру, $11/4$.

Тогда

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = \frac{11}{4},$$

или

$$x_2 - 3x_1 = 0. \quad (22.11)$$

Уравнение (22.11) определяет прямую, проходящую через начало координат. Координаты точек, принадлежащих этой прямой и многоугольнику решений, являются планами задач, при которых значение функции (22.8) равно $11/4$. К указанным точкам, в данном случае, относится лишь одна точка B (1; 3). Ее координаты определяют план задачи, при котором значение функции равно $11/4$.

Теперь положим значение функции F равным $5/2$, т. е.

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = \frac{5}{2},$$

или

$$x_2 - x_1 = 0. \quad (22.12)$$

Уравнение (22.12), так же как и уравнение (22.11), определяет прямую, проходящую через начало координат. Ее можно рассматривать как прямую, полученную путем вращения по часовой стрелке вокруг начала координат прямой (22.11). При этом координаты точек, принадлежащих прямой (22.12) и многоугольнику решений, являются планами задач, при которых значение функции (22.8), равное $5/2$, меньше, чем в точках прямой

(22.11). Значит, если положить значение функции (22.8) равным некоторому числу h_0 :

$$F = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = h_0, \quad (22.13)$$

а прямую (22.13), проходящую через начало координат, вращать по направлению часовой стрелки вокруг начала координат, то получим прямые

$$F = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = h, \text{ где } h < h_0.$$

Найдем последнюю общую точку многоугольника решений с вращаемой прямой. Это точка $D(3; 1)$ (рис. 22.5), в которой достигается минимум функции (22.8).

Таким образом, оптимальным планом производства продукции будет план, согласно которому нужно изготовить три изделия вида А и одно изделие вида В. Себестоимость одного изделия при таком плане является минимальной и равна

$$F_{min} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 1}{3 + 1} = \frac{9}{4}.$$

При поиске угловой точки многоугольника решений, в которой целевая функция задачи будет иметь наименьшее значение, мы полагали значение функции равным некоторым двум постоянным числам и устанавливали направление вращения прямой, определяющее уменьшение значения функции. Но это можно сделать и по-другому: полагая значение функции F равным некоторому числу h , т. е.

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = h, \quad (22.14)$$

получим некоторую прямую, которая проходит через начало координат и имеет угловой коэффициент, зависящий от h . Далее, используя производную, устанавливаем направление вращения прямой (22.14) при возрастании h .

На практике дело обстоит намного проще. После того как мы нашли точки $B(1;3)$ и $D(3;1)$ (рис. 22.5), в которых функция (22.8) может принимать минимальное значение, вычислим ее значения в этих точках:

$$F(B) = F(1; 3) = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 3}{1 + 3} = \frac{11}{4},$$

$$F(D) = F(3; 1) = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 1}{3 + 1} = \frac{9}{4}.$$

Так как $F(B) > F(D)$, то можно утверждать, что в точке D целевая функция принимает минимальное значение. Также заметим, что в точке B функция F принимает максимальное значение.

Задача 22.2. Используя геометрическую интерпретацию задачи дробно-линейного программирования, найти решение следующей задачи:

$$F = \frac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2} \rightarrow \max;$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9. \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Решение. Для того чтобы найти решение задачи, сначала находим многоугольник решений, определяемый ограничениями задачи. В системе ограничений задачи знаки неравенств заменяем на знаки точных равенств, строим прямые, определяемые этими уравнениями, и находим полуплоскости для каждого из неравенств системы ограничений задачи:

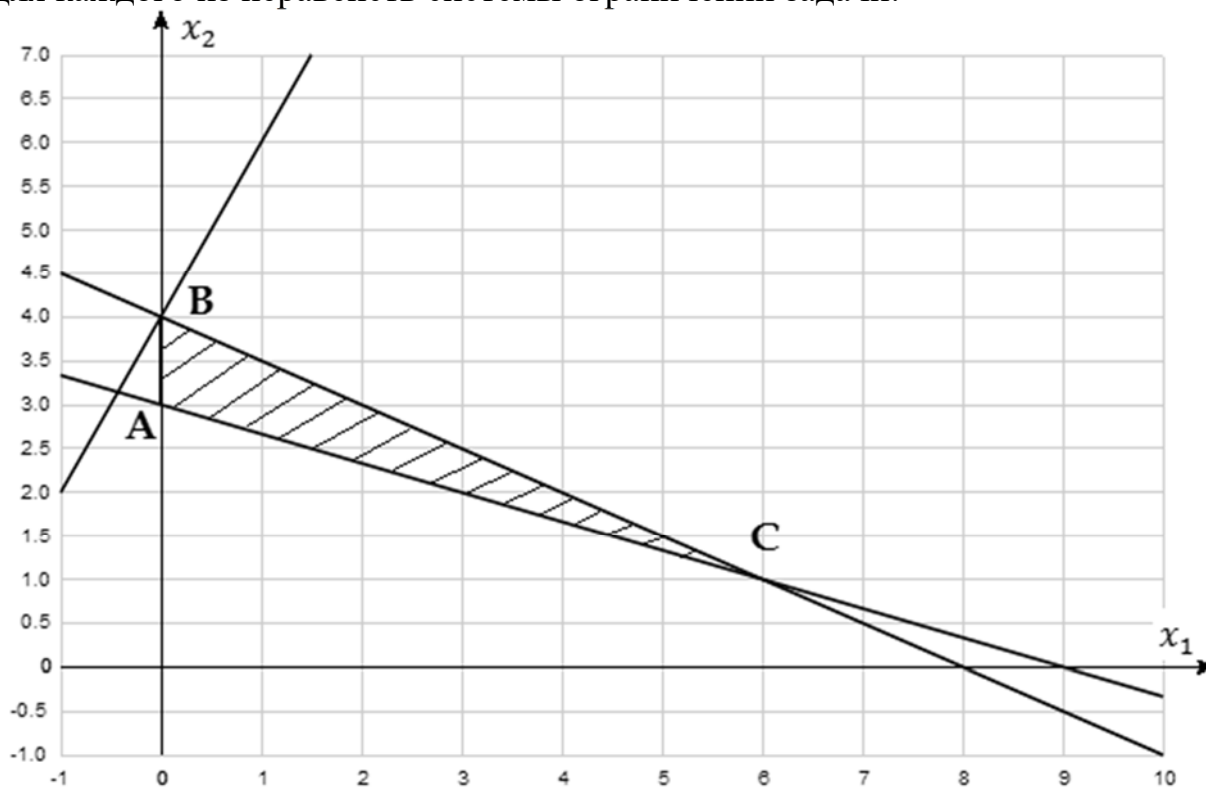


рис. 22.6

Треугольник ABC будет многоугольником решений. После того как мы нашли точки $A(0; 3)$, $B(0; 4)$ и $C(6; 1)$ (рис. 22.6), в которых функция может принимать максимальное значение, вычислим ее значения в этих точках:
 $F(A) = F(0; 3) = -1$; $F(B) = F(0; 4) = -1$; $F(C) = F(6; 1) = 2$.

Из вычислений видно, что наибольшее значение целевая функция принимает в точке C.

Ответ. $F_{max} = 2$.

Задача 22.3. Используя геометрическую интерпретацию задачи дробно-линейного программирования, найти решение следующей задачи:

$$F = \frac{-5x_1 + 4x_2}{-2x_1 - 3x_2} \rightarrow \min;$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \geq 10. \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем многоугольник решений этой задачи:

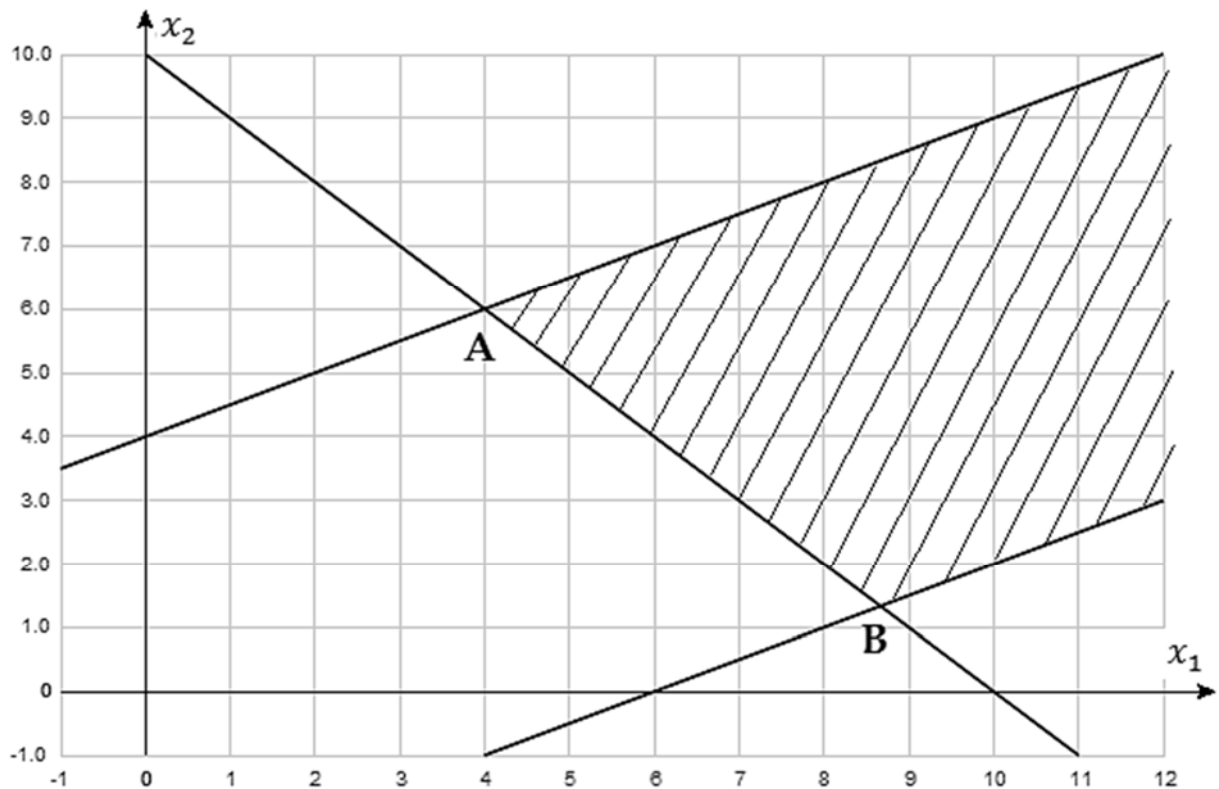


рис. 22.7

После того как мы нашли точки $A(4; 6)$ и $B(\frac{26}{3}; \frac{4}{3})$, в которых функция может принимать минимальное значение, вычислим ее значения в этих точках:

$$F(A) = F(4; 6) = -\frac{2}{13}; \quad F(B) = F\left(\frac{26}{3}; \frac{4}{3}\right) = \frac{57}{32}.$$

Так как значение $F(A) < F(B)$, то наименьшее значение функция принимает в точке A .

Ответ. $F_{\min} = -\frac{2}{13}.$

Задача 22.4. Используя геометрическую интерпретацию задачи дробно-линейного программирования, найти решение следующей задачи:

$$F = \frac{5x_1 + 3x_2}{x_1 + 3x_2} \rightarrow \max;$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 12, \\ -x_1 + 6x_2 + x_4 = 18, \\ x_1 - 3x_2 + x_5 = 3. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. (*)$$

Решение. Система ограничений данной задачи задана в виде равенств. Приведем ее к системе ограничений, заданную в виде неравенств:

$$\begin{cases} x_3 = 2x_1 + 3x_2 - 12, \\ x_4 = x_1 - 6x_2 + 18, \\ x_5 = -x_1 + 3x_2 + 3. \end{cases}$$

Из(*)получим:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 12 \geq 0, \\ x_1 - 6x_2 + 18 \geq 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 3 \geq 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ -x_1 + 6x_2 \leq 18, \\ x_1 - 3x_2 \leq 3. \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Найдем многоугольник решений задачи:

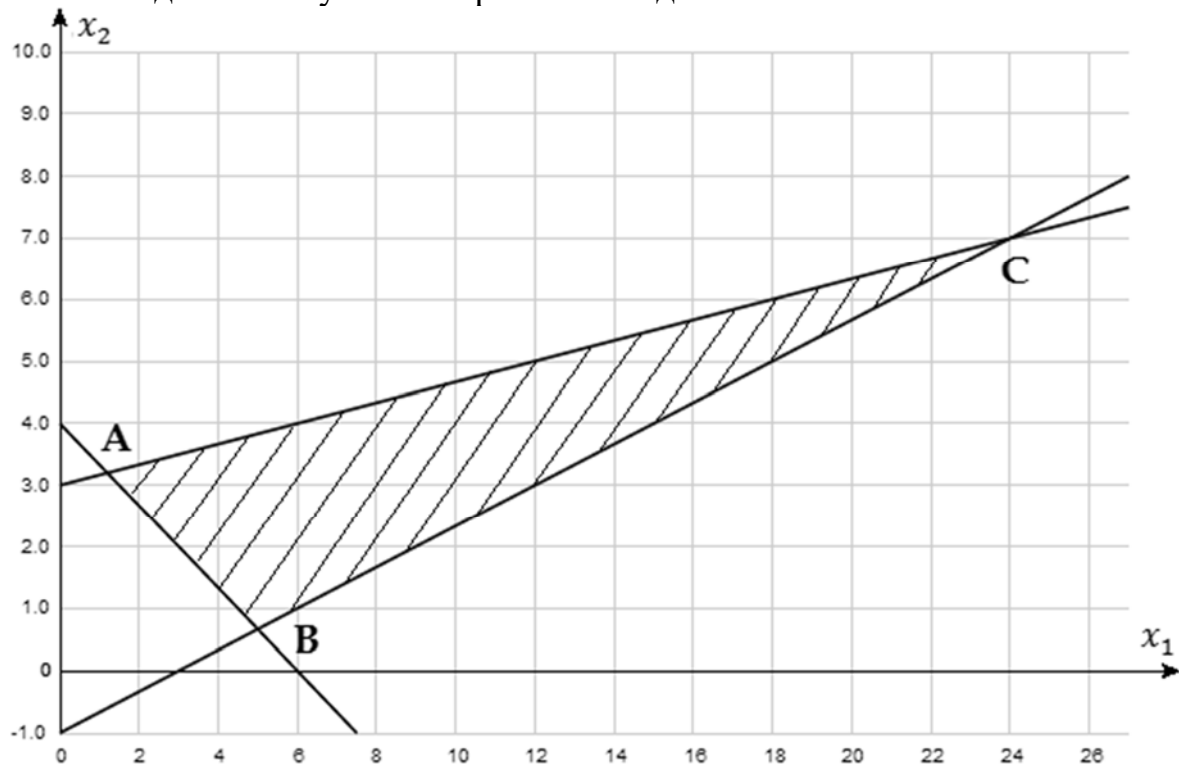


рис. 22.8

После того как мы нашли точки $A \left(\frac{6}{5}; \frac{16}{5}\right)$, $B \left(5; \frac{2}{3}\right)$ и $C (24; 7)$, в которых функция может принимать минимальное значение, вычислим ее значения в этих точках:

$$F(A) = F\left(\frac{6}{5}; \frac{16}{5}\right) = \frac{13}{9}; \quad F(B) = F\left(5; \frac{2}{3}\right) = \frac{27}{7}; \quad F(C) = F(24; 7) = \frac{47}{15}.$$

Итак, наибольшее значение функция принимает в точке B .

Теперь выразим x_3, x_4, x_5 через x_1 и x_2 .

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = \frac{2}{3}, \\ x_3 = 2x_1 + 3x_2 - 12 = 0, \\ x_4 = x_1 - 6x_2 + 18 = 19, \\ x_5 = -x_1 + 3x_2 + 3 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, получаем, что $F_{max} = F\left(5; \frac{2}{3}; 0; 19; 0\right) = \frac{27}{7}$.

Ответ. $F_{max} = F\left(5; \frac{2}{3}; 0; 19; 0\right) = \frac{27}{7}.$

23. Сведение задачи дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования

Сформулированная ранее задача (22.4)-(22.6) может быть сведена к задаче линейного программирования. Для этого примем обозначение:

$$y_0 = \left\{ \sum_{j=1}^n d_j x_j \right\}^{-1} \quad (23.1)$$

и введем новые переменные

$$y_j = y_0 x_j (j = 1, \dots, n) \quad (23.2)$$

или

$$x_j = \frac{y_j}{y_0}.$$

Из (23.1) имеем

$$y_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^n d_j x_j}$$

или

$$y_0 \sum_{j=1}^n d_j x_j = 1. \quad (23.3)$$

Подставим в выражение (23.3) $x_j = \frac{y_j}{y_0}$.

Получим $\sum_{j=1}^n d_j y_j = 1$.

Используя введенные обозначения, исходную задачу (22.4)-(22.6) сведем к следующей: найти максимум функции

$$F^* = \sum_{j=1}^n c_j y_j \quad (23.4)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (23.5)$$

$$\sum_{j=1}^n d_j y_j = 1, \quad (23.6)$$

$$y_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \text{ и } y_0 \geq 0. \quad (23.7)$$

Задача (23.4)-(23.7) является задачей линейного программирования, а значит, ее решение можно найти любым известным методом. Зная оптимальный план этой задачи, на основе соотношений (23.2) получаем оптимальный план исходной задачи (22.4)-(22.6).

Таким образом, процесс поиска решения задачи дробно-линейного программирования включает в себя следующие этапы:

1. Сводят задачу (22.4)-(22.6) к задаче линейного программирования (23.4)-(23.7).
2. Решают и находят решение задачи (23.4)-(23.7).
3. Пользуясь соотношениями (23.2), определяют оптимальный план задачи (22.4)-(22.6) и находят максимальное значение функции (22.4).

Задача 23.1. Используя метод сведения задачи дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования, найти решение следующей задачи:

$$F = \frac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow \max \quad (23.8)$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 7, \end{cases} \quad (23.9)$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_5 = 11, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases} \quad (23.10)$$

Решение. Сведем данную задачу к задаче линейного программирования. Для этого обозначим $y_0 = \frac{1}{x_1 + x_2}$ и введем новые переменные $y_j = y_0 x_j (j = 1, \dots, 5)$.

В результате приходим к следующей задаче:

$$F^* = 3y_1 - y_2 \rightarrow \max \quad (23.11)$$

при условиях

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 & & - 5y_0 = 0, \\ -y_1 + 3y_2 & + y_4 & - 7y_0 = 0, \\ 3y_1 - y_2 & & + y_5 & - 11y_0 = 0, \\ y_1 + y_2 & & & = 1, \end{cases} \quad (23.12)$$

$$y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0. \quad (23.13)$$

Задача (23.11)-(23.13) является задачей линейного программирования.

Домножим первое уравнение системы ограничений на (-1):

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 + y_3 & & + 5y_0 = 0, \\ -y_1 + 3y_2 & + y_4 & - 7y_0 = 0, \\ 3y_1 - y_2 & & + y_5 & - 11y_0 = 0, \\ y_1 + y_2 & & & = 1, \end{cases} \quad (23.14)$$

В системе (23.14) рассмотрим векторы из коэффициентов при неизвестных:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Среди векторов $A_1, \dots, A_6$ только три единичных A_3, A_4 и A_5 . Поэтому в левую часть четвертого уравнения системы ограничений (23.14) задачи добавим дополнительную неотрицательную переменную r_1 и рассмотрим расширенную задачу, состоящую в максимизации функции

$$F^* = 3y_1 - y_2 - Mr_1$$

при условиях

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 + y_3 & + 5y_0 & = 0, \\ -y_1 + 3y_2 & + y_4 & - 7y_0 & = 0, \\ 3y_1 - y_2 & + y_5 & - 11y_0 & = 0, \\ y_1 + y_2 & & + r_1 & = 1, \end{cases}$$

$$y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, r_1 \geq 0$$

или в векторной форме:

$$A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + A_4 y_4 + A_5 y_5 + A_6 y_0 + A_7 r_1 = A_0.$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы A_3, A_4, A_5 и A_7 образуют искусственный базис.

Приравнявая свободные неизвестные к нулю: $y_1 = y_2 = y_0 = 0$, получаем первоначальный опорный план расширенной задачи:

$$Y_0 = (0; 0; 0; 0; 0; 0; 1).$$

Составим симплекс-таблицу (таблица 23.1), в которой 6 строк, и по оценкам, содержащимся в ней, проверим план на оптимальность.

Значения оценок, записанных в 5-ой и в 6-ой строках, находим по формулам (6.28):

$$F^*(Y_0) = C_6 Y_0 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-M) \cdot 1 = -M;$$

$$F_1^* - C_1 = C_6 Y_1 - C_1 = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + (-M) \cdot 1 - 3 = -3 - M;$$

$$F_2^* - C_2 = C_6 Y_2 - C_2 = 1 - M \text{ и т. д.}$$

т. е. если M заранее не фиксировано, то оценки $F_j^* - C_j$ являются линейными функциями величины M , причем функция состоит из двух слагаемых, одно из которых зависит от M , а второе – не зависит.

Для удобства вычислений в 5-ую строку запишем слагаемое, независимое от M , а в 6-ую строку – только коэффициенты при M , которые и позволяют сравнить оценки между собой.

Таблица 23.1

i	базис	C_6	A_0	$C_1 = 3$	$C_2 = -1$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = -M$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_3	0	0	-1	-1	1	0	0	5	0
2	A_4	0	0	-1	3	0	1	0	-7	0
3	A_5	0	0	3	-1	0	0	1	-11	0
4	A_7	-M	1	1	1	0	0	0	0	1
5			0	-3	1	0	0	0	0	0
6	$F_j^* - C_j$		-1	-1	-1	0	0	0	0	0

В 6-ой строке имеются две отрицательные оценки -1 и -1, поэтому опорный план Y_0 расширенной задачи не является оптимальным и его можно улучшить, включив в базис вектор, которому соответствует минимум строки 6. Т.к. минимальных оценки две, то в базис включаем вектор, которому соответствует $\max C_j$, т. е. в нашем случае вектор A_1 .

Таким образом, в базис включается вектор A_1 , а исключается вектор, которому соответствует $\min\left(\frac{0}{3}; \frac{1}{1}\right) = \min(0; 1) = 0$, т. е. вектор A_5 .

Следовательно, разрешающим элементом служит число 3, стоящее на пересечении третьей строки и первого столбца, третья строка и первый столбец являются направляющими; необходимо вектор A_1 включить в базис, а вектор A_5 исключить.

Составим вторую симплекс-таблицу (таблица 23.2).

Подсчитаем новые элементы направляющей строки. Для этого старые элементы направляющей строки разделим на разрешающий элемент (на 3), а остальные элементы таблицы посчитаем по правилу прямоугольника.

Таблица 23.2

i	базис	C_6	A_0	$C_1 = 3$	$C_2 = -1$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = -M$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_3	0	0	0	-4/3	1	0	1/3	4/3	0
2	A_4	0	0	0	8/3	0	1	1/3	-32/3	0
3	A_1	3	0	1	-1/3	0	0	1/3	-11/3	0
4	A_7	-M	1	0	4/3	0	0	-1/3	11/3	1
5	$F_j^* - C_j$		0	0	0	0	0	1	-11	0
6			-1	0	-4/3	0	0	1/3	-11/3	0

Текущий опорный план не оптимален, так как в 6-ой строке имеются отрицательные оценки $-\frac{4}{3}$ и $-\frac{11}{3}$. Включим в базис вектор, которому соответствует минимум строки 6, т. е. вектор A_6 , а исключим вектор, которому соответствует $\min\left(\frac{0}{4/3}; \frac{1}{11/3}\right) = \min\left(0; \frac{3}{11}\right) = 0$, т. е. вектор A_3 .

Таким образом, разрешающим элементом служит число $\frac{4}{3}$. Следуя алгоритму составления предыдущей симплекс-таблицы, составим третью симплекс-таблицу (таблица 23.3). Продолжаем до тех пор, пока в 6-ой строке симплекс-таблицы не будет отрицательных коэффициентов.

Таблица 23.3

i	базис	C_6	A_0	$C_1 = 3$	$C_2 = -1$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = -M$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_6	0	0	0	-1	3/4	0	1/4	1	0
2	A_4	0	0	0	-8	8	1	3	0	0
3	A_1	3	0	1	-4	11/4	0	5/4	0	0
4	A_7	-M	1	0	5	-11/4	0	-5/4	0	1
5	$F_j^* - C_j$		0	0	-11	33/4	0	15/4	0	0
6			-1	0	-5	11/4	0	5/4	0	0

Таблица 23.4

i	базис	C_6	A_0	$C_1 = 3$	$C_2 = -1$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = -M$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_6	0	1/5	0	0	1/5	0	0	1	1/5
2	A_4	0	8/5	0	0	18/5	1	1	0	8/5
3	A_1	3	4/5	1	0	11/20	0	1/4	0	4/5
4	A_2	-1	1/5	0	1	-11/20	0	-1/4	0	1/5
5	$F_j^* - C_j$		11/5	0	0	11/5	0	1	0	11/5
6			0	0	0	0	0	0	0	1

В результате третьей итерации с разрешающим элементом 5 из базиса исключен искусственный вектор A_7 , поэтому в 6-ой строке таблицы 23.4 все оценки, кроме искусственного вектора, обратились в ноль.

Опорный план $Y = (y_1 = \frac{4}{5}; y_2 = \frac{1}{5}; y_3 = 0; y_4 = \frac{8}{5}; y_5 = 0; y_0 = \frac{1}{5})$, полученный в таблице 23.4, является оптимальным планом задачи (23.11)-(23.13), так как в 5-ой строке нет отрицательных оценок.

Учитывая, что $y_j = y_0 x_j$, находим оптимальный план задачи (23.8)-(23.10):

$X = (4; 1; 0; 8; 0)$. При этом плане $F_{max} = \frac{11}{5}$.

Задача 23.2. Используя метод сведения задачи дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования, найти решение следующей задачи:

$$F = \frac{8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \rightarrow \max \quad (23.15)$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 300, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \leq 70, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 340, \end{cases} \quad (23.16)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \quad (23.17)$$

Решение. Сведем задачу (23.15)-(23.17) к задаче линейного программирования. Для этого обозначим

$$y_0 = \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}$$

и введем новые переменные $y_j = y_0 x_j (j = 1, \dots, 4)$.

В результате приходим к следующей задаче:

$$F^* = 8y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 \rightarrow \max \quad (23.18)$$

при условиях

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 - 300y_0 \leq 0, \\ y_1 + 2y_3 + y_4 - 70y_0 \leq 0, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 - 340y_0 \leq 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1, \end{cases} \quad (23.19)$$

$$y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0. \quad (23.20)$$

Задача (23.18)-(23.20) является задачей линейного программирования.

Перейдем в системе ограничений (23.19) от неравенств к уравнениям, прибавляя к левым частям первого, второго и третьего уравнения неотрицательные переменные, в результате чего придем к задаче в следующем виде:

$$F^* = 8y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 + 0 \cdot y_5 + 0 \cdot y_6 + 0 \cdot y_7 \rightarrow \max \quad (23.21)$$

при условиях

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 - 300y_0 + y_5 & = 0, \\ y_1 + 2y_3 + y_4 - 70y_0 + y_6 & = 0, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 - 340y_0 + y_7 & = 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 & = 1, \end{cases} \quad (23.22)$$

$$y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7 \geq 0. \quad (23.23)$$

В системе уравнений (23.22) рассмотрим векторы из коэффициентов при неизвестных:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} -300 \\ -70 \\ -340 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Среди векторов $A_1, \dots, A_8$ только три единичных A_5, A_6 и A_7 . Поэтому в левую часть четвертого уравнения системы ограничений (23.22) задачи добавим дополнительную неотрицательную переменную r_1 и рассмотрим расширенную задачу, состоящую в максимизации функции

$$F^* = 8y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 + 0 \cdot y_5 + 0 \cdot y_6 + 0 \cdot y_7 - Mr_1$$

при условиях

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 + y_5 - 300y_0 & = 0, \\ y_1 + 2y_3 + y_4 + y_6 - 70y_0 & = 0, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 + y_7 - 340y_0 & = 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + r_1 & = 1, \end{cases}$$

$$y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, r_1 \geq 0,$$

или в векторной форме:

$$A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3 + A_4y_4 + A_5y_5 + A_6y_6 + A_7y_7 + A_8y_0 + A_9r_1 = A_0.$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} -300 \\ -70 \\ -340 \\ 0 \end{pmatrix}, A_9 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы A_5, A_6, A_7 и A_9 образуют искусственный базис. Приравнявая свободные неизвестные к нулю: $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_0 = 0$, получаем первоначальный опорный план расширенной задачи:

$$Y_0 = (0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1).$$

Составим симплекс-таблицу (таблица 23.5), в которой 6 строк, и по оценкам, содержащимся в ней, проверим план на оптимальность.

Таблица 23.5

i	баз ис	C_6	A_0	C_1 = 8	C_2 = 3	C_3 = 2	C_4 = 1	C_5 = 0	C_6 = 0	C_7 = 0	C_8 = 0	C_9 = -M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
1	A_5	0	0	2	1	1	3	1	0	0	-300	0
2	A_6	0	0	1	0	2	1	0	1	0	-70	0
3	A_7	0	0	1	2	1	0	0	0	1	-340	0
4	A_9	-M	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1
5			0	-8	-3	-2	-1	0	0	0	0	0
6	$F_j^* - C_j$		-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0

В 6-ой строке имеются отрицательные оценки, поэтому опорный план Y_0 расширенной задачи не является оптимальным. Разрешающий элемент число 2, вектор A_1 включаем в базис, а вектор A_5 исключаем.

Составим вторую симплекс-таблицу (таблица 23.6). Для этого элементы направляющей строки разделим на разрешающий элемент (на 2), а остальные элементы таблицы посчитаем по правилу прямоугольника.

Таблица 23.6

i	баз ис	C_6	A_0	C_1 = 8	C_2 = 3	C_3 = 2	C_4 = 1	C_5 = 0	C_6 = 0	C_7 = 0	C_8 = 0	C_9 = -M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
1	A_1	8	0	1	1/2	1/2	3/2	1/2	0	0	-150	0
2	A_6	0	0	0	-1/2	3/2	-1/2	-1/2	1	0	80	0
3	A_7	0	0	0	3/2	1/2	-3/2	-1/2	0	1	-190	0
4	A_9	-M	1	0	1/2	1/2	-1/2	-1/2	0	0	150	1
5			0	0	1	2	11	4	0	0	-	0
6	$F_j^* - C_j$		-1	0	-1	-1	1	1	0	0	-150	0

Таблица 23.7

i	баз ис	C_6	A_0	C_1 = 8	C_2 = 3	C_3 = 2	C_4 = 1	C_5 = 0	C_6 = 0	C_7 = 0	C_8 = 0	C_9 = -M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
1	A_1	8	0	1	-7/16	53/16	9/16	-7/16	15/8	0	0	0
2	A_8	0	0	0	-1/160	3/160	-1/160	-1/160	1/80	0	1	0
3	A_7	0	0	0	5/16	65/16	-43/16	-27/16	19/8	1	0	0
4	A_9	-M	1	0	23/16	-37/16	7/16	7/16	-15/8	0	0	1
5			0	0	-13/2	49/2	7/2	-7/2	15	0	0	0
6	$F_j^* - C_j$		-1	0	-23/16	37/16	-7/16	-7/16	15/8	0	0	0

Таблица 23.8.

i	баз ис	C_6	A_0	C_1 = 8	C_2 = 3	C_3 = 2	C_4 = 1	C_5 = 0	C_6 = 0	C_7 = 0	C_8 = 0	C_9 = -M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
1	A_1	8	0	1	0	9	-16/5	-14/5	26/5	7/5	0	0
2	A_8	0	0	0	0	1/10	-3/50	-1/25	3/50	1/50	1	0
3	A_2	3	0	0	1	13	-43/5	-27/5	38/5	16/5	0	0
4	A_9	-M	1	0	0	-21	64/5	41/5	-64/5	-23/5	0	1
5	$F_j^* - C_j$		0	0	0	109	-262/5	-193/5	322/5	104/5	0	0
6			-1	0	0	21	-64/5	-41/5	64/5	23/5	0	0

Таблица 23.9

i	баз ис	C_6	A_0	C_1 = 8	C_2 = 3	C_3 = 2	C_4 = 1	C_5 = 0	C_6 = 0	C_7 = 0	C_8 = 0	C_9 = -M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
1	A_1	8	1/4	1	0	15/4	0	-3/4	2	1/4	0	1/4
2	A_8	0	3/640	0	0	1/640	0	-1/640	0	-1/640	1	3/640
3	A_2	3	43/64	0	1	-71/64	0	7/64	-1	7/64	0	43/64
4	A_4	1	5/64	0	0	-105/64	1	41/64	-1	-23/64	0	5/64
5			131/32	0	0	737/32	0	-161/32	12	63/32	0	131/32
6	$F_j^* - C_j$		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

В результате четвертой итерации с разрешающим элементом 64/5 из базиса исключен искусственный вектор A_9 , поэтому в 6-ой строке таблицы 23.9 все оценки, кроме искусственного вектора, обратились в ноль.

Опорный план $\bar{Y}_0^4 = (\frac{1}{4}; \frac{43}{64}; 0; \frac{5}{64}; 0; 0; 0; \frac{3}{640}; 0)$, полученный в таблице 23.9, является планом задачи (23.18)-(23.20), хотя и не оптимальным, так как в 5-ой строке имеется отрицательная оценка.

Дальнейший итерационный процесс проводим по 5-ой строке, 6-ую строку из дальнейшего рассмотрения исключаем, а величину M включаем в оценки для искусственных векторов.

Таблица 23.10

i	баз ис	C_6	A_0	C_1 = 8	C_2 = 3	C_3 = 2	C_4 = 1	C_5 = 0	C_6 = 0	C_7 = 0	C_8 = 0	C_9 = -M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
1	A_1	8	14/41	1	0	75/41	48/41	0	34/41	-7/41	0	14/41
2	A_8	0	1/205	0	0	-1/410	1/410	0	-1/410	-1/410	1	1/205
3	A_2	3	27/41	0	1	-34/41	-7/41	0	-34/41	7/41	0	27/41
4	A_5	0	5/41	0	0	-105/41	64/41	1	-64/41	-23/41	0	5/41
5	$F_j^* - C_j$		193/41	0	0	416/41	322/41	0	170/41	-35/41	0	193/41+M

Таблица 23.11

i	баз ис	C_6	A_0	C_1 = 8	C_2 = 3	C_3 = 2	C_4 = 1	C_5 = 0	C_6 = 0	C_7 = 0	C_8 = 0	C_9 = -M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
1	A_1	8	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1
2	A_8	0	1/70	0	1/70	-1/70	0	0	-1/70	0	1	1/70
3	A_7	0	27/7	0	41/7	-34/7	-1	0	-34/7	1	0	27/7
4	A_5	0	16/7	0	23/7	-37/7	1	1	-30/7	0	0	16/7
5	$F_j^* - C_j$		8	0	5	6	7	0	0	0	0	8+M

В шестой итерации (таблица 23.11) находим оптимальный план задачи (23.18)-(23.20): $Y = (y_1 = 1; y_2 = y_3 = y_4 = 0; y_0 = \frac{1}{70})$. Учитывая, что $y_j = y_0 x_j$ находим оптимальный план задачи (23.15)-(23.17): $X = (70; 0; 0; 0)$. При этом плане $F_{max} = 8$.

24. Целочисленное линейное программирование. Графический метод решения

Целочисленное программирование ориентировано на решение задач математического программирования, в которых все или некоторые переменные должны принимать только целочисленные значения. Задача называется **полностью** целочисленной, если условие целочисленности наложено на все ее переменные; когда это условие относится лишь к некоторым переменным, задача называется **частично** целочисленной. Если при этом целевая функция и функции, входящие в ограничения, линейные, то говорят, что данная задача является задачей целочисленного линейного программирования (ЦЛП).

Целочисленные задачи математического программирования возникают различными путями:

1. Существуют задачи линейного программирования, которые формально к целочисленным не относятся, но при соответствующих исходных данных всегда обладают целочисленным планом. Примеры таких задач - транспортная задача и ее модификации (задачи о назначениях, о потоках в сетях).

2. Толчком к изучению целочисленных задач в собственном смысле слова явилось рассмотрение задач линейного программирования, в которых переменные представляли физически неделимые величины. Они были названы задачами с неделимостью. Таковы, например, задачи об оптимизации комплекса средств доставки грузов, о нахождении минимального порожнего пробега автомобилей при выполнении заданного плана перевозок, об определении оптимального машинного парка и его оптимального распределения по указанным работам при условии

минимизации суммарной стоимости (машинного парка и производимых работ), о нахождении минимального количества судов для осуществления данного графика перевозок и т. п.

3. Другим важным толчком к построению теории целочисленного программирования стал новый подход к некоторым экстремальным комбинаторным задачам. В них требуется найти экстремум целочисленной линейной функции, заданной на конечном множестве элементов. Такие задачи принято называть задачами с альтернативными переменными. В качестве примеров можно назвать задачи коммивояжера (бродячего торговца), об оптимальном назначении, теории расписания или календарного планирования и задачи с дополнительными логическими условиями (например, типа «или - или», «если - то» и т. п.).

Исторически первой задачей целочисленного типа является опубликованная в 1932 г. венгерским математиком Е. Эгервари задача о назначении персонала. В 1955 г. на Втором симпозиуме по линейному программированию была рассмотрена задача о бомбардировщике, известная как задача о ранце.

В большинстве случаев целочисленные задачи сильно отличаются от своих непрерывных аналогов и требуют для решения специальных методов.

Условно методы решения задач целочисленного программирования можно разделить на три основных группы: методы отсечения, комбинаторные методы, приближенные методы.

При наличии в задаче целочисленного линейного программирования двух переменных, а в системе ограничений неравенств задача может быть решена **графическим методом**.

В системе координат $X_1O X_2$ находят область допустимых решений, строят вектор C и линию уровня. Перемещая линию уровня по направлению C для задач на максимум, определяют наиболее удаленную от начала координат точку и ее координаты.

В случае, когда координаты этой точки нецелочисленные, в области допустимых решений строят целочисленную решетку и находят на ней такие целые числа x_1 и x_2 , которые удовлетворяют системе ограничений и при которых значение целевой функции наиболее близко к экстремальному нецелочисленному решению. Координаты такой вершины и являются целочисленным решением.

Аналогично решается задача на минимум. Целочисленному минимуму целевой функции будет соответствовать координата вершины целочисленной решетки, лежащей в области допустимых решений, наиболее близкой к началу координат в направлении вектора C .

Рассмотрим алгоритм решения задачи целочисленного программирования на конкретном примере.

Задача 24.1. Для улучшения финансового положения фирма приняла решение об увеличении выпуска конкурентоспособной продукции, для чего в одном из цехов необходимо установить дополнительное оборудование,

требующее $\frac{19}{3}$ м² площади. На приобретение дополнительного оборудования фирма выделила 10 тыс. ден. ед., при этом она может купить оборудование двух видов. Приобретение одного комплекта оборудования 1-го вида стоит 1 тыс. ден. ед., 2-го вида — 3 тыс. ден. ед. Приобретение одного комплекта оборудования 1-го вида позволяет увеличить выпуск продукции в смену на 2 ед., а одного комплекта оборудования 2-го вида — на 4 ед. Зная, что для установки одного комплекта оборудования 1-го вида требуется 2 м² площади, а для оборудования 2-го вида — 1 м² площади, определить такой набор дополнительного оборудования, который дает возможность максимально увеличить выпуск продукции.

Решение. Предположим, что фирма приобретает x_1 комплектов дополнительного оборудования 1-го вида и x_2 комплектов оборудования 2-го вида.

Математическая модель задачи будет иметь вид:

$$\begin{aligned} F(x) &= 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq \frac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 \leq 10 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \in Z. \end{aligned}$$

Получим задачу целочисленного программирования. Так как неизвестных только два (x_1 и x_2), то найдем ее решение графическим способом (см. рис. 24.1).

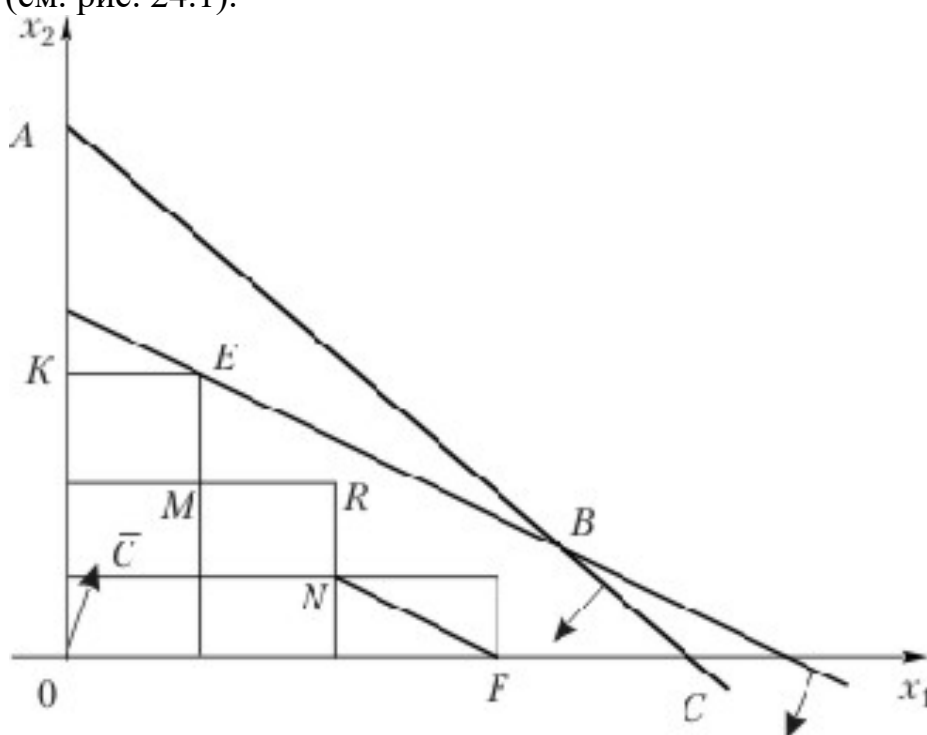


рис. 24.1

OABC — область допустимых решений (ОДР). Оптимальное решение задачи имеет в точке **B** (9/5, 41/15) при этом максимальное значение целевой функции составляет 218/15 ед. Полученное оптимальное решение не целочисленное.

Условию целочисленности переменных удовлетворяют координаты 12 точек, принадлежащих ОДР. Чтобы найти точку, координаты которой определяют решение исходной задачи, заменим многоугольник **OABC** многоугольником **OKEMNF**, содержащим все допустимые точки с целочисленными координатами.

Строим вектор $\vec{C}(2, 4)$. Линию уровня перемещаем по направлению $\vec{C}$, получим в точке **E** (1, 3) максимальное значение целевой функции $F = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 14$ (ед.).

Ответ. Фирме следует приобрести один комплект оборудования 1-го вида и три комплекта оборудования 2-го вида, что обеспечит ей при имеющихся ограничениях на производственные площади и денежные средства максимальное увеличение выпуска продукции, равное 14 ед. в смену.

Итак, один из простейших подходов при решении задач целочисленного программирования заключается в решении непрерывной модификации целочисленной задачи с последующим округлением координат полученного оптимума до допустимых целых значений. Округление в данном случае есть не что иное, как приближение. Например, если получено решение непрерывной задачи, содержащее число 10,1, то можно приближенно заменить это число на 10 (т. е. округлить до 10). Однако нет гарантии, что округленное решение будет удовлетворять ограничениям. Например, для линейной задачи с ограничениями в виде равенств округленное решение всегда не удовлетворяет этим ограничениям. Как следует из теории линейного программирования, округленное решение не может быть допустимым, поскольку это означало бы, что один и тот же базис (при условии равенства нулю небазисных переменных) определяет два различных решения задачи.

Приведем пример, который показывает возможную несостоятельность подхода, основанного на округлении оптимального решения задачи линейного программирования, полученной из исходной целочисленной задачи путем отбрасывания требований целочисленности.

Задача 24.2. Решить следующую задачу ЦЛП

$$\begin{aligned} F(x) &= -5x_1 - 2x_2 \rightarrow \min \\ &\begin{cases} 11x_1 + 4x_2 \leq 33 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \end{cases}, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \in Z. \end{aligned}$$

Решение. Отбросив требование целочисленности переменных, получим задачу линейного программирования. Решением данной задачи

является точка $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (1\frac{4}{13}, 4\frac{17}{26})$. Если рассматривать все возможные округления компонент оптимальной точки, то получим четыре возможных целочисленных точки (1, 4), (2, 4), (1, 5), (2, 5). Во-первых, из этих точек только точка (1, 4) является допустимой для исходной задачи. А во-вторых, она находится далеко от истинного оптимального решения исходной задачи $x^*=(x_1^*, x_2^*)=(3, 0)$.

Невозможно обосновать какое-либо утверждение относительно близости целочисленного решения и решения задачи без требований целочисленности, поскольку можно построить пример, показывающий, что данный подход может давать сколь угодно плохие приближения к решению исходной целочисленной задачи.

Эффект округления не слишком заметен, лишь когда искомые параметры задачи подчинены относительно нежестким ограничениям. Однако типичными для задач целочисленного программирования являются ограничения-равенства, достаточно жестко определяющие поведение релевантных переменных. Примером может служить условие $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$, где $x_i \in (0, 1)$ для всех i . В такой ситуации процедура округления не имеет смысла, и необходимо обратиться к другим алгоритмам решения.

Несостоятельность округления подчеркивается также следующими соображениями. Несмотря на то, что целочисленные переменные обычно выражают количество неделимых предметов (например, машин, людей, кораблей), возможны и другие типы спецификации этих переменных. Так, решение о финансировании некоторого проекта представляется булевой переменной x ($x=0$, если проект отклоняется, и $x=1$, если проект принимается). В этом случае бессмысленно оперировать дробными значениями величины x , и процедура округления является логически неприемлемой.

Огромное количество экономических задач носит дискретный, чаще всего целочисленный, характер, что связано, как правило, с физической неделимостью многих элементов расчета: например, нельзя построить два с половиной завода, купить полтора автомобиля и т. д. В ряде случаев такие задачи решаются обычными методами, например, симплексным методом, с последующим округлением до целых чисел. Однако такой подход оправдан, когда отдельная единица составляет очень малую часть всего объема (например, товарных запасов); в противном случае он может внести значительные искажения в действительно оптимальное решение. Поэтому разработаны специальные методы решения целочисленных задач, например, метод ветвей и границ.

25. Метод ветвей и границ

Пусть
$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (25.1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (25.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad x_j \in Z, \quad j = 1, \dots, n. \quad (25.3)$$

Первоначально находим симплексным методом или методом искусственного базиса оптимальный план задачи без учета целочисленности переменных.

Если среди компонент этого плана нет дробных чисел, то тем самым найдено искомое решение данной задачи.

Если среди компонент плана имеются дробные числа, то необходимо осуществить переход к новым планам, пока не будет найдено решение задачи.

Метод ветвей и границ основан на предположении, что наш оптимальный нецелочисленный план дает значение функции, большее, чем всякий последующий план перехода.

Пусть переменная x_i^* в плане – дробное число. Тогда в оптимальном плане ее значение будет, по крайней мере:

1. либо меньше или равно ближайшему меньшему целому числу K_i^* ;
2. либо больше или равно ближайшему большему целому числу $K_i^* + 1$.

Определяя эти числа, находим симплексным методом решение двух задач линейного программирования:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (25.4)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (25.5)$$

$$x_i^* \leq K_i^* \quad (25.6)$$

$$x_j \geq 0, \quad x_j \in Z, \quad j = 1, \dots, n. \quad (25.7)$$

и

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (25.8)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i=1, \dots, m, \quad (25.9)$$

$$x_i^* \geq K_i^* + 1 \quad (25.10)$$

$$x_j \geq 0, \quad x_j \in Z, \quad j=1, \dots, n. \quad (25.11)$$

Возможны четыре случая при решении этой пары задач:

1. Одна из задач неразрешима, а другая имеет целочисленный оптимальный план. Тогда этот план и значение целевой функции дают решение исходной задачи.
2. Одна из задач неразрешима, а другая имеет нецелочисленный оптимальный план. Тогда рассматриваем вторую задачу и в ее оптимальном плане выбираем одну из компонент, значение которой равно дробному числу, и строим две задачи, аналогичные предыдущим.
3. Обе задачи разрешимы. Одна из задач имеет оптимальный целочисленный план, а в оптимальном плане другой задачи есть дробные числа. Тогда вычисляем значения целевой функции от планов и сравниваем их между собой. Если на целочисленном оптимальном плане значение целевой функции больше или равно ее значению на плане, среди компонент которого есть дробные числа, то данный целочисленный план является оптимальным для исходной задачи и дает искомое решение.
4. Обе задачи разрешимы, и среди оптимальных планов обеих задач есть дробные числа. Тогда рассматриваем ту из задач, для которой значение целевой функции является наибольшим. И строим две задачи.

Алгоритм метода ветвей и границ:

1. Находим решение задачи линейного программирования без учета целочисленности.
2. Составляем дополнительные ограничения на дробную компоненту плана.
3. Находим решение двух задач с ограничениями на компоненту.
4. Строим в случае необходимости дополнительные ограничения, согласно возможным четырем случаям получаем оптимальный целочисленный план либо устанавливаем неразрешимость задачи.

Задача 25.1. Решить следующую задачу ЦЛП

$$\begin{aligned} F &= 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ &\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_3 + x_5 = 3 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\in Z \end{aligned}$$

Решение. Находим решение без учета целочисленности задачи симплексным методом: $x^* = \left(\frac{18}{5}; \frac{3}{5}; 0; 0; \frac{24}{5}\right)$, $F(x^*) = \frac{39}{5}$.

Рассмотрим следующую пару задач:

Задача 1: $F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_3 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

и

Задача 2: $F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_3 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Первая задача имеет оптимальный план $x_1^* = \left(3; \frac{3}{2}; 0; \frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$, вторая – неразрешима.

Проверяем на целочисленность план первой задачи.

Это условие не выполняется, поэтому строим следующие задачи:

Задача 1.1: $F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_3 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

и

Задача 1.2: $F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_3 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Задача 1.2 неразрешима, а задача 1.1 имеет оптимальный план $x_{1.1}^* = (3; 1; 2; 3; 3)$, на котором значение целевой функции $F(x_{1.1}^*) = 7$.

В результате получили, что исходная задача целочисленного программирования имеет оптимальный план $x^* = (3; 1; 2; 3; 3)$ и $F(x^*) = 7$.

Главный недостаток алгоритма метода ветвей и границ заключается в необходимости полностью решать задачи линейного программирования, ассоциированные с каждой из вершин многогранника допустимых решений. Для задач большой размерности это требует значительных и, в известной степени, неоправданных с практической точки зрения затрат времени.

Но, несмотря на недостатки данного метода, можно утверждать, что в настоящее время алгоритм метода ветвей и границ является наиболее надежным средством решения целочисленных задач, встречающихся в практических исследованиях. Это не означает, однако, что любая целочисленная задача может быть решена с помощью рассматриваемого метода.

26. Задача о назначениях

Задача о назначениях - задача о наилучшем распределении некоторого числа работ между таким же числом исполнителей. При ее решении ищут оптимальное назначение из условия максимума общей производительности, которая равна сумме производительности исполнителей.

В процессе управления производством зачастую возникают задачи назначения исполнителей на различные виды работ, например: подбор кадров и назначение кандидатов на вакантные должности, распределение источников капитальных вложений между различными проектами научно-технического развития, распределение экипажей самолетов между авиалиниями.

Задача о назначениях. Пусть имеется n исполнителей, которые могут выполнять n различных работ. Известна полезность C_{ij} , связанная с

выполнением i -м исполнителем j -й работы $j=1,...,n$, $i=1,...,n$. Необходимо назначить исполнителей на работы так, чтобы добиться максимальной полезности, при условии, что каждый исполнитель может быть назначен только на одну работу и за каждой работой должен быть закреплен только один исполнитель.

Математическая модель задачи примет вид:

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max \quad (26.1)$$

Каждый исполнитель назначается только на одну работу:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (26.2)$$

На каждую работу назначается только один исполнитель:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (26.3)$$

Условия неотрицательности и целочисленности:

$$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \{0,1\}, i=1,...,n, j=1,...,n. \quad (26.4)$$

При решении задачи о назначениях исходной информацией является таблица задачи о назначениях $c = \{c_{ij}\}$, элементами которой служат показатели эффективности назначений.

Для задачи о назначениях, записанной в стандартной форме, количество строк этой таблицы совпадает с количеством столбцов.

Таблица 26.1

Работа \ Рабочий	1	2	...	j	...	m
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1j}	...	c_{1m}
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2j}	...	c_{2m}
...	...	...	...	...	...	...
i	c_{i1}	c_{i2}	...	c_{ij}	...	c_{im}
...	...	...	...	...	...	...
m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mj}	...	c_{mm}

Результатом решения задачи о назначениях (26.1) - (26.4) является вектор $x^* = \{x_{ij}^*\}$, компоненты которого - целые числа.

Оптимальный план задачи о назначениях (26.1) - (26.4) можно представить в виде квадратной матрицы назначений, в каждой строке и в каждом столбце которой находится ровно одна единица.

Такую матрицу иногда называют матрицей перестановок. Значение целевой функции (26.1), соответствующее оптимальному плану, называют **эффективностью назначений**.

Если количество рабочих не равно количеству работ, то возникает задача о назначениях в открытой форме. В этом случае задача может быть преобразована в задачу, сформулированную в стандартной форме. Пусть m — количество работ. И пусть, например, количество рабочих n превышает количество работ m . Введем дополнительные фиктивные работы с индексами $j = m+1, \dots, n$. Коэффициенты таблицы назначений $c_{ij}, i = 1, \dots, n; j = m+1, \dots, n$, положим равными нулю. В этом случае получаем задачу, сформулированную в стандартной форме. Если в оптимальном плане этой задачи $x^*_{ij}=1$ при $j=m+1, \dots, n$, то исполнитель i назначается на выполнение фиктивной работы, т. е. остается без работы.

Заметим, что оптимальное значение целевой функции исходной задачи совпадает с оптимальным значением задачи, приведенной к стандартной форме. Поэтому эффективность назначений в результате такого преобразования не меняется.

Следует особо отметить, что задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи, в которой количество пунктов производства совпадает с количеством пунктов потребления, а все величины спроса и величины предложения равны.

Задача 26.1. Цех металлообработки получил срочный заказ на выпуск партии деталей. Для производства детали необходимо выполнить операции на четырех станках. В цехе работают четыре слесаря высокой квалификации, каждый из которых может работать на любом станке, но с различным процентом брака (процент брака известен из документации ОТК).

Таблица 26.2

Станок Рабочий	1	2	3	4
1	2,3	1,9	2,2	2,7
2	1,8	2,2	2,0	1,8
3	2,5	2,0	2,2	3,0
4	2,0	2,4	2,4	2,8

Распределите станки между рабочими таким образом, чтобы процент брака был минимальным. (Предполагается, что ОТК проверяет готовую деталь, т. е. общий процент брака определяется как сумма процентов брака, допущенного всеми рабочими.)

Вопросы:

1. На каком станке должен работать рабочий 2?
2. Чему равен минимальный общий процент брака?

Решение. Необходимо провести оптимизационные расчеты. После этого получим матрицу назначений.

Таблица 26.3

Рабочий \ Станок	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	0	1
3	0	0	1	0
4	1	0	0	0

Решение можно представить в виде таблицы 26.4.

Таблица 26.4

Рабочий	Станок	Процент брака
1	2	1,9
2	4	1,8
3	3	2,2
4	1	2,0
Итого		7,9

Ответ. 1. Рабочий 2 должен работать на станке № 4.

2. Минимальный общий процент брака равен 7,9%.

Задача 26.2. Фирма получила заказы на разработку пяти программных продуктов. На фирме работают шесть квалифицированных программистов, которым можно поручить выполнение этих заказов. Каждый из них дал оценку времени (в днях), требуемого для разработки программ. Эти оценки приведены в таблице 26.5.

Таблица 26.5

Программист \ Программа	1	2	3	4	5
Галкин	46	59	24	62	67
Палкин	47	56	32	55	70
Малкин	44	52	19	61	60
Чалкин	47	59	17	64	73
Залкинд	43	65	20	60	75
Кузьмин	41	53	28	54	68

Выполнение каждого из пяти заказов фирма решила поручить одному программисту. Ясно, что один из программистов не получит заказа. Каждому программисту, которому будет поручено выполнять заказ, фирма предложила оплату 1 тыс.руб. в день. Распределите работу между программистами, чтобы общие издержки на разработку программ были минимальными. Вопросы:

1. Чему равны минимальные издержки фирмы на выполнение всех пяти заказов?
2. Какую программу следует поручить Малкину?
3. Какую программу следует поручить Залкинду?
4. Кто из программистов не получит заказа?
5. Стало известным, что не все программисты согласились с условиями оплаты, обосновывая это тем, что имеют разную квалификацию. В

результате была достигнута договоренность о следующих размерах оплаты в день (в тыс. руб.).

Таблица 26.6

Программист	Размер оплаты
Галкин	1
Палкин	2
Малкин	1,5
Чалкин	2
Залкинд	1,5
Кузьмин	2

Изменится ли распределение работ между программистами при новых условиях оплаты труда? Каковы будут в этом случае общие минимальные издержки?

6. Кто из программистов при новых условиях не получит заказа?

Решение. В таблице 26.7 задачи о назначениях указан размер оплаты (в тыс. руб.) в случае, если программисту будет поручена соответствующая программа.

Таблица 26.7

Программа Программист	1	2	3	4	5	6 (фиктивная)
Галкин	46	59	24	62	67	0
Палкин	47	56	32	55	70	0
Малкин	44	52	19	61	60	0
Чалкин	47	59	17	64	73	0
Залкинд	43	65	20	60	75	0
Кузьмин	41	53	28	54	68	0

После проведения расчетов получается следующая матрица назначений (таблица 26.8)

Таблица 26.8

Программа Программист	1	2	3	4	5	6 (фиктивная)
Галкин	0	0	0	0	0	0
Палкин	0	0	0	1	0	0
Малкин	0	0	0	0	1	0
Чалкин	0	0	1	0	0	0
Залкинд	1	0	0	0	0	0
Кузьмин	0	1	0	0	0	0

Учитывая исходную информацию, получается следующая таблица 26.9.

Таблица 26.9

Программист	Программа	Издержки, тыс. руб.
Галкин	Фиктивная	0
Палкин	4	55
Малкин	5	60
Чалкин	3	17
Залкинд	1	43
Кузьмин	2	53
Итого		228

Из последней таблицы следует, что минимальные издержки составляют 228 тыс. руб., Малкину следует поручить программу 5, а Залкинду - программу 1. Заказа не получит Галкин.

При новых условиях оплаты труда таблица задачи о назначениях имеет следующий вид (таблица 26.10).

Таблица 26.10

Программа Программист	1	2	3	4	5	6 (фиктивная)
Галкин	46	59	24	62	67	0
Палкин	94	112	64	110	140	0
Малкин	66	78	28,5	91,5	90	0
Чалкин	94	118	34	128	146	0
Залкинд	64,5	97,5	30	90	112,5	0
Кузьмин	82	106	56	108	136	0

После проведения расчетов, получается следующая матрица назначений (таблица 26.11).

Таблица 26.11

Программа Программист	1	2	3	4	5	6 (фиктивная)
Галкин	0	0	0	0	1	0
Палкин	0	0	0	0	0	0
Малкин	0	1	0	0	0	0
Чалкин	0	0	1	0	0	0
Залкинд	0	0	0	1	0	0
Кузьмин	1	0	0	0	0	0

В таблице 26.12 представлен итоговый результат

Таблица 26.12

Программист	Программа	Издержки, тыс. руб.
Галкин	5	67
Палкин	Фиктивная	0
Малкин	2	78
Чалкин	3	34
Залкинд	4	90
Кузьмин	1	82
Итог		351

Ответ. 1. Минимальные издержки фирмы на выполнение всех пяти заказов = 228 тыс. руб.

2. Следует поручить Малкину Программу 5.

3. Следует поручить Залкинду Программу 1.

4. Не получит заказа программист Галкин.

5. Общие минимальные издержки = 351 тыс. руб.

6. При новых условиях не получит заказа программист Палкин.

27. Динамическое программирование

Словосочетание динамическое программирование впервые было использовано в 1940-х годах Р. Беллманом для описания процесса нахождения решения задачи, где ответ на одну задачу может быть получен только после решения задачи, «предшествующей» ей. Вклад Беллмана в динамическое программирование был увековечен в названии уравнения Беллмана – центрального результата теории динамического программирования.

В упрощенной формулировке динамическое программирование представляет собой направленный последовательный перебор вариантов, который обязательно приводит к глобальному максимуму (глобальному минимуму).

Слово «программирование» в словосочетании «динамическое программирование» в действительности к традиционному программированию (написанию кода) почти никакого отношения не имеет и происходит от словосочетания «математическое программирование», которое является синонимом слова «оптимизация». Поэтому слово «программа» в данном контексте скорее означает оптимальную последовательность действий для получения решения задачи. К примеру, определенное расписание событий на выставке иногда называют программой. Программирование в данном случае понимается как допустимая последовательность событий.

Динамическое программирование — раздел математического программирования, совокупность приемов, позволяющих находить оптимальные решения, основанные на вычислении последствий каждого решения и выработке оптимальной стратегии для последующих решений. Процессы принятия решений, которые строятся по такому принципу, называются многошаговыми процессами. Математически оптимизационная задача строится с помощью таких соотношений, которые последовательно связаны между собой, например, полученный результат для одного года вводится в уравнение для следующего (или, наоборот, для предыдущего) и т. д. Таким образом, можно получить на вычислительной машине результаты решения задачи для любого избранного момента времени и «следовать» дальше. Динамическое программирование применяется не обязательно для задач, связанных с течением времени. Многошаговым может быть и процесс решения вполне статической задачи. Таковы, например, некоторые задачи распределения ресурсов.

Динамическое программирование представляет собой отдельное программирование, основным направлением которого является исследование экстремальных задач. Последние предполагают использование условий целочисленности относительно искомых переменных, а область допустимых решений является конечной.

Поэтому в данном случае применяют модель общей задачи математического программирования, с ограничением $x_1, x_2, \dots, x_n$ — целочисленны.

Множество реальных задач характеризуются как дискретные. Причиной этому служит физическая неделимость некоторых факторов и объектов расчета. Так, на практике невозможно построить примерно 2,3 завода или принять на работу $1/5$ землекопа. Все отраслевые задачи составляются на основе точного количества предприятий или проектных вариантов. Что касается планирования, то здесь используются типовые размеры предприятий, типовые мощности агрегатов. Такие элементы, в свою очередь, вносят дискретность в реализацию расчетов.

Существуют так называемые плановые показатели — это годовые, месячные или суточные периоды, которые являются дискретными, раздельными. Каждый из элементов предполагает свое начало и конец.

Дискретное программирование также называют целочисленным. По этому поводу среди ученых возникают разногласия. С одной стороны, как видно из примеров, в таком программировании действительно используются целые числа, с другой — в целом дискретное программирование не является исключительно целочисленным.

Идеи динамического программирования

Планируя многошаговый процесс, необходимо выбирать управляющее воздействие на каждом шаге с учетом его будущих последствий на еще предстоящих шагах. Однако из этого правила есть исключение. Среди всех шагов существует один, который может планироваться без "заглядывания в будущее". Какой это шаг? Очевидно, последний — после него других шагов нет. Этот шаг, единственный из всех, можно планировать так, чтобы он как таковой принес наибольшую выгоду. Спланировав оптимально этот последний шаг, можно к нему пристраивать предпоследний, к предпоследнему — предпредпоследний и т. д.

Поэтому процесс динамического программирования на 1-м этапе разворачивается от конца к началу, то есть раньше всех планируется последний,

N -й шаг. А как его спланировать, если мы не знаем, чем кончился предпоследний? Очевидно, нужно сделать все возможные предположения о том, чем кончился предпоследний, $(N-1)$ -й, шаг, и для каждого из них найти такое управление, при котором выигрыш (доход) на последнем шаге был бы максимален. Решив эту задачу, мы найдем условно оптимальное управление на N -м шаге, т. е. управление, которое надо применить, если $(N-1)$ -й шаг закончился определенным образом.

Предположим, что эта процедура выполнена, то есть для каждого исхода $(N-1)$ -го шага мы знаем условно оптимальное управление на N -м шаге и соответствующий ему условно оптимальный выигрыш. Теперь мы можем оптимизировать управление на предпоследнем, $(N-1)$ -м, шаге.

Сделаем все возможные предположения о том, чем кончился предпредпоследний, то есть $(N-2)$ -й, шаг, и для каждого из этих предположений найдем такое управление на $(N-1)$ -м шаге, чтобы выигрыш за последние два шага (из которых последний уже оптимизирован) был максимален. Далее оптимизируется управление на $(N-2)$ -м шаге, и т. д.

Одним словом, на каждом шаге ищется такое управление, которое обеспечивает оптимальное продолжение процесса относительно достигнутого в данный момент состояния. Этот принцип выбора управления, называется принципом оптимальности. Само управление, обеспечивающее оптимальное продолжение процесса относительно заданного состояния, называется условно оптимальным управлением на данном шаге.

Теперь предположим, что условно оптимальное управление на каждом шаге нам известно: мы знаем, что делать дальше, в каком бы состоянии ни был процесс к началу каждого шага. Тогда мы можем найти уже не "условное", а действительно оптимальное управление на каждом шаге.

Действительно, пусть нам известно начальное состояние процесса. Теперь мы уже знаем, что делать на первом шаге: надо применить условно оптимальное управление, найденное для первого шага и начального состояния. В результате этого управления после первого шага система перейдет в другое состояние, но для этого состояния мы знаем условно оптимальное управление и т. д. Таким образом, мы найдем оптимальное управление процессом, приводящее к максимально возможному выигрышу.

Таким образом, в процессе оптимизации управления методом динамического программирования многошаговый процесс "проходится" дважды:

- первый раз — от конца к началу, в результате чего находятся условно оптимальное управление на каждом шаге и оптимальный выигрыш (тоже условный) на всех шагах, начиная с данного и до конца процесса;
- второй раз — от начала к концу, в результате чего находятся оптимальные управления на всех шагах процесса.

Можно сказать, что процедура построения оптимального управления методом динамического программирования распадается на две стадии: предварительную и окончательную. На предварительной стадии для каждого шага определяется условно оптимальное управление, зависящее от состояния системы (достигнутого в результате предыдущих шагов), и условно оптимальный выигрыш на всех оставшихся шагах, начиная с данного, также зависящий от состояния. На окончательной стадии определяется (безусловное) оптимальное управление для каждого шага. Предварительная (условная) оптимизация производится по шагам в обратном порядке: от последнего шага к первому; окончательная (безусловная) оптимизация — также по шагам, но в естественном порядке: от первого шага к последнему. Из двух стадий оптимизации несравненно более важной и трудоемкой является первая. После окончания первой стадии выполнение второй трудности не представляет: остается только "прочитать" рекомендации, уже

заготовленные на первой стадии.

Основные необходимые свойства задач, к которым возможно применить эти идеи:

1. Задача должна допускать интерпретацию как n -шаговый процесс принятия решений.
2. Задача должна быть определена для любого числа шагов и иметь структуру, не зависящую от их числа.
3. При рассмотрении k -шаговой задачи должно быть задано некоторое множество параметров, описывающих состояние системы, от которых зависят оптимальные значения переменных. Причем это множество не должно изменяться при увеличении числа шагов.
4. Выбор решения (управления) на k -м шаге не должен оказывать влияния на предыдущие решения, кроме необходимого пересчета переменных.

Задача о выборе траектории, задача последовательного принятия решения, задача об использовании рабочей силы, задача управления запасами — классические задачи динамического программирования.

Постановка задачи динамического программирования

Постановку задачи динамического программирования рассмотрим на примере инвестирования, связанного с распределением средств между предприятиями. В результате управления инвестициями система последовательно переводится из начального состояния S_0 в конечное S_n . Предположим, что управление можно разбить на n шагов, и решение принимается последовательно на каждом шаге, а управление представляет собой совокупность n пошаговых управлений. На каждом шаге необходимо определить два типа переменных - переменную состояния системы S_k и переменную управления x_k . Переменная S_k определяет, в каких состояниях может оказаться система на рассматриваемом k -м шаге. В зависимости от состояния S на этом шаге можно применить некоторые управления, характеризующиеся переменной x_k , которые удовлетворяют определенным ограничениям и называются допустимыми. Допустим $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - управление, переводящее систему из состояния S_0 в состояние S_n , а S_k - есть состояние системы на k -м шаге управления. Применение управляющего воздействия x_k на каждом шаге переводит систему в новое состояние $S_k(S, x_k)$ и приносит некоторый результат $W_k(S, x_k)$. Для каждого возможного состояния на каждом шаге среди всех возможных управлений выбирается оптимальное управление x_k^* , такое, чтобы результат, который достигается за шаги с k -го по последний n -ый, оказался бы оптимальным. Числовая характеристика этого результата называется **функцией Беллмана** $F_k(S)$ и зависит от номера шага k и состояния системы S .

Задача динамического программирования формулируется следующим образом: требуется определить такое управление $\vec{X}$, переводящее систему из

начального состояния S_0 в конечное состояние S_n , при котором целевая функция принимает наибольшее (наименьшее) значение $F(S_0, \vec{X}) \Rightarrow \text{ext}$.

Рассмотрим более подробно особенности математической модели динамического программирования:

1. задача оптимизации формулируется как конечный многошаговый процесс управления;
2. целевая функция (выигрыш) является аддитивной и равна сумме целевых функций каждого шага:
$$F = \sum_{k=1}^n F_k(S_{k-1}, x_k) \Rightarrow \text{ext};$$
3. выбор управления x_k на каждом шаге зависит только от состояния системы к этому шагу S_k , и не влияет на предшествующие шаги (нет обратной связи);
4. состояние системы S_k после каждого шага управления зависит только от предшествующего состояния системы S_{k-1} и этого управляющего воздействия x_k (отсутствие последействия) и может быть записано в виде уравнения состояния: $S_k = f_k(S_{k-1}, x_k), k = 1, \dots, n$;
5. на каждом шаге управление x_k зависит от конечного числа управляющих переменных, а состояние системы S_k зависит от конечного числа параметров;
6. оптимальное управление представляет собой вектор, определяемый последовательностью оптимальных пошаговых управлений:
$$\vec{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*),$$
 число которых и определяет количество шагов задачи.

Достоинства динамического программирования

1. Идея и метод динамического программирования наиболее приспособлены к дискретным задачам, каковыми являются задачи из экономики.
2. Метод динамического программирования применим при любом способе задания F_i и любом допустимом множестве состояний и управлений. Этого преимущества лишены классические методы оптимизации и другие вычислительные методы математического программирования.
3. Вычислительные схемы метода динамического программирования в дискретном случае связаны с перебором оптимальных значений показателя эффективности и управления на i -м шаге для всех возможных значений переменной состояния, но объем расчетов по этому методу значительно меньше, чем при прямом переборе вариантов. Это связано с тем, что на этапе условной оптимизации неудачные варианты сразу отбрасываются, а сохраняются лишь условно оптимальные на данном шаге.
4. Метод динамического программирования дает возможность анализа чувствительности к изменению исходных данных S_i и n . Фактически здесь решается не одна задача, а множество однотипных задач для различных состояний S_i и различных i ($1 \leq i \leq n$) на каждом шаге. Поэтому при изменении

исходных данных можно не решать задачу заново, а сделать лишь несложные добавления к уже выполненным расчетам, т. е. продолжить уже решенную задачу за счет увеличения числа шагов n или числа значений S_i .

28. Функции Беллмана. Уравнения Беллмана. Условно-оптимальные управления

В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности впервые сформулированный в 1953 г. американским математиком Р. Э. Беллманом: каково бы ни было состояние системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая выигрыш на данном шаге.

При решении задачи на каждом шаге выбирается управление, которое должно привести к оптимальному выигрышу. Если считать все шаги независимыми, тогда оптимальным управлением будет то управление, которое обеспечит максимальный выигрыш именно на данном шаге. Однако, например, при покупке новой техники взамен устаревшей на ее приобретение затрачиваются определенные средства, поэтому доход от ее эксплуатации в начале может быть небольшой, а в следующие годы новая техника будет приносить большой доход. И наоборот, если принято решение оставить старую технику для получения дохода в текущем году, то в дальнейшем это приведет к значительным убыткам. Этот пример демонстрирует следующий факт: в многошаговых процессах управление на каждом конкретном шаге надо выбирать с учетом его будущих воздействий на весь процесс. Кроме того, при выборе управления на данном шаге следует учитывать возможные варианты состояния предыдущего шага. Например, при определении количества средств, вкладываемых в предприятие в i -м году, необходимо знать, сколько средств осталось в наличии к i -тому году, и какой доход получен в предыдущем $(i - 1)$ -м году.

Таким образом, при выборе шагового управления необходимо учитывать следующие требования:

- 1) возможные исходы предыдущего шага S_{k-1} ;
- 2) влияние управления x_k на все оставшиеся до конца процесса шаги $(n-k)$.

В задачах динамического программирования первое требование учитывают, делая на каждом шаге условные предположения о возможных вариантах окончания предыдущего шага и проводя для каждого из вариантов условную оптимизацию.

Выполнение второго требования обеспечивается тем, что в этих задачах условная оптимизация проводится от конца процесса к началу.

Условная оптимизация

На первом этапе решения задачи, называемом условной оптимизацией, определяются **функция Беллмана** и **оптимальные управления** для всех возможных состояний на каждом шаге, начиная с последнего, в соответствии с алгоритмом обратной прогонки.

На последнем, n -м шаге оптимальное управление x_n^* определяется функцией Беллмана:

$$F(S) = \max \{ W_n(S, x_n) \}, \quad (28.1)$$

в соответствие с которой максимум выбирается из всех возможных значений x_n , причем $x_n \in X$.

Дальнейшие вычисления производятся согласно рекуррентному соотношению, связывающему функцию Беллмана на каждом шаге с этой же функцией, но вычисленной на предыдущем шаге.

В общем виде это уравнение имеет вид:

$$F_k(S) = \max_{x_k \in X} \{ W_k(S, x_k) + F_{k+1}(S^n(S, x_k)) \}. \quad (28.2)$$

Этот максимум (или минимум) определяется по всем возможным для k и S значениям переменной управления X .

Безусловная оптимизация

После того как функция Беллмана и соответствующие оптимальные управления найдены для всех шагов с n -го по первый, осуществляется второй этап решения задачи, называемый безусловной оптимизацией. Пользуясь тем, что на первом шаге ($k=1$) состояние системы известно - это ее начальное состояние S_0 , можно найти оптимальный результат за все n шагов и оптимальное управление на первом шаге x_1^* , которое этот результат доставляет. После применения этого управления система перейдет в другое состояние $S^1(S, x_1^*)$, зная которое, можно, пользуясь результатами условной оптимизации, найти оптимальное управление на втором шаге x_2^* и так далее до последнего n -го шага. Вычислительную схему динамического программирования можно строить на сетевых моделях, а также по алгоритмам прямой прогонки (от начала) и обратной прогонки (от конца к началу). Рассмотрим примеры решения различных по своей природе задач, содержание которых требует выбора переменных состояния и управления.

29. Принцип Беллмана для оптимальных путей

Математический аппарат динамического программирования, основанный на методологии пошаговой оптимизации, может быть использован при нахождении кратчайших расстояний, например, на географической карте, представленной в виде сети. Решение задачи по определению кратчайших расстояний между пунктами отправления и пунктами получения продукции по существующей транспортной сети является исходным этапом при решении таких экономических задач, как оптимальное прикрепление потребителей за поставщиками, повышение производительности транспорта за счет сокращения непроизводительного пробега и др.

Пусть транспортная сеть состоит из 10 узлов, часть из которых соединены магистралями. На рисунке показана сеть дорог и стоимости перевозки единицы груза между отдельными пунктами сети, которые проставлены у соответствующих ребер. Необходимо определить маршрут доставки груза из пункта 1 в пункт 10, обеспечивающий наименьшие транспортные расходы.

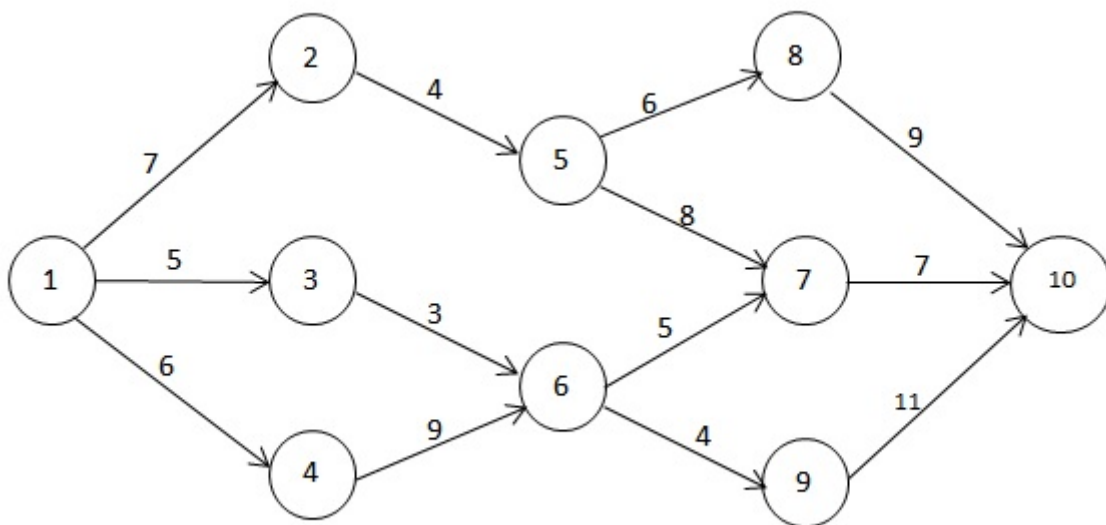


рис. 29.1

В задаче имеется ограничение: двигаться по изображенным на схеме маршрутам можно только слева направо, т. е. попав, например, в пункт 7, мы имеем право переместиться только в пункт 10 и не можем возвратиться обратно в 5-й или 6-й. Эта особенность транспортной сети дает право отнести каждый из десяти пунктов к одному из поясов. Будем считать, что пункт принадлежит k -му поясу, если из него попасть в конечный пункт ровно за k шагов, т. е. с заездом ровно в $(k-1)$ -й промежуточный пункт. Таким

образом, пункты 7, 8 и 9 принадлежат к первому поясу, 5 и 6 – ко второму, 2, 3 и 4 – к третьему и 1 – к четвертому. Тогда на k -м шаге будем находить оптимальные маршруты перевозки груза из пунктов k -го пояса до конечного пункта. Оптимизацию будем производить с конца процесса, и потому, дойдя до k -го шага, неизвестно, в каком из пунктов k -го пояса окажется груз, перевозимый из первого пункта.

Введем обозначения:

k - номер шага ($k=1, 2, 3, 4$);

i - пункт, из которого осуществляются перевозки ($i=1, 2, \dots, 9$);

j - пункт, в который доставляется груз ($j=2, 3, \dots, 10$);

C_{ij} - стоимость перевозки груза из пункта i в пункт j ;

$F_k(i)$ - минимальные затраты на перевозку груза на k -м шаге решения задачи из пункта i до конечного пункта.

Очевидно, что минимум затрат на перевозку груза из пунктов k -го пояса до пункта 10 будет зависеть от того, в каком пункте этого пояса мы оказались. Номер i пункта, принадлежащего k -му поясу, будет являться переменной состояния системы на k -м шаге. Поскольку оптимизация осуществляется с конца процесса, то, находясь в некотором пункте i k -го пояса, принимается решение о перемещении груза в один из пунктов $(k-1)$ -го пояса, а направление дальнейшего движения известно из предыдущих шагов. Номер j пункта $(k-1)$ -го пояса будет переменной управления на k -м шаге.

Для первого шага управления $(k-1)$ функция Беллмана представляет собой минимальные затраты на перевозку груза из пунктов 1-го пояса в конечный пункт, т. е. $F_1(i) = C_{i,10}$. Для последующих шагов затраты складываются из двух слагаемых: стоимости перевозки груза C_{ij} из пункта i k -го пояса в пункт j $(k-1)$ -го пояса и минимально возможных затрат на перевозку из пункта j до конечного пункта, т. е. $F_{k-1}(j)$. Таким образом, функциональное уравнение Беллмана будет иметь вид

$$F_k(i) = \min_j \{C_{ij} + F_{k-1}(j)\}. \quad (29.1)$$

Минимум затрат достигается на некотором значении j^* , которое является оптимальным направлением движения из пункта i в конечный пункт. На четвертом шаге попадаем на 4-й пояс, и состояние системы становится определенным $i=1$. Функция $F_4(1)$ представляет собой минимально возможные затраты по перемещению груза из 1-го пункта в 10-й. Оптимальный маршрут определяется в результате анализа всех шагов в обратном порядке, а выбор некоторого управления j на k -м шаге приводит к тому, что состояние системы на $(k-1)$ -м шаге становится определенным.

Задача 29.1. Решим сформулированную выше задачу, исходные данные которой приведены на рисунке 29.1.

I этап. Условная оптимизация.

1-й шаг. $k = 1$.

$$F_1(i) = C_{i,10}$$

На первом шаге в пункт 10 груз может быть доставлен из пунктов 7, 8 или 9.

Таблица 29.1

$i \backslash j$	10	$F_1(i)$	j^*
7	7	7	10
8	9	9	10
9	11	11	10

2-й шаг. $k = 2$.

Функциональное уравнение на втором шаге принимает вид:

$$F_2(i) = \min_j \{C_{ij} + F_1(j)\}.$$

Все возможные перемещения груза на втором шаге и результаты расчета приведены в следующей таблице 29.2.

Таблица 29.2

$i \backslash j$	7	8	9	$F_2(i)$	j^*
5	8+7	6+9	-	15	7;8
6	5+7	-	4+11	12	7

3-й шаг. $k = 3$.

$$F_3(i) = \min_j \{C_{ij} + F_2(j)\}$$

Таблица 29.3

$i \backslash j$	5	6	$F_3(i)$	j^*
2	4+15	-	19	5
3	-	3+12	15	6
4	-	9+12	21	6

4-й шаг. $k = 4$.

$$F_4(i) = \min_j \{C_{ij} + F_3(j)\}$$

Таблица 29.4

$i \backslash j$	2	3	4	$F_4(i)$	j^*
1	7+19	5+15	6+21	20	3

II этап. Безусловная оптимизация.

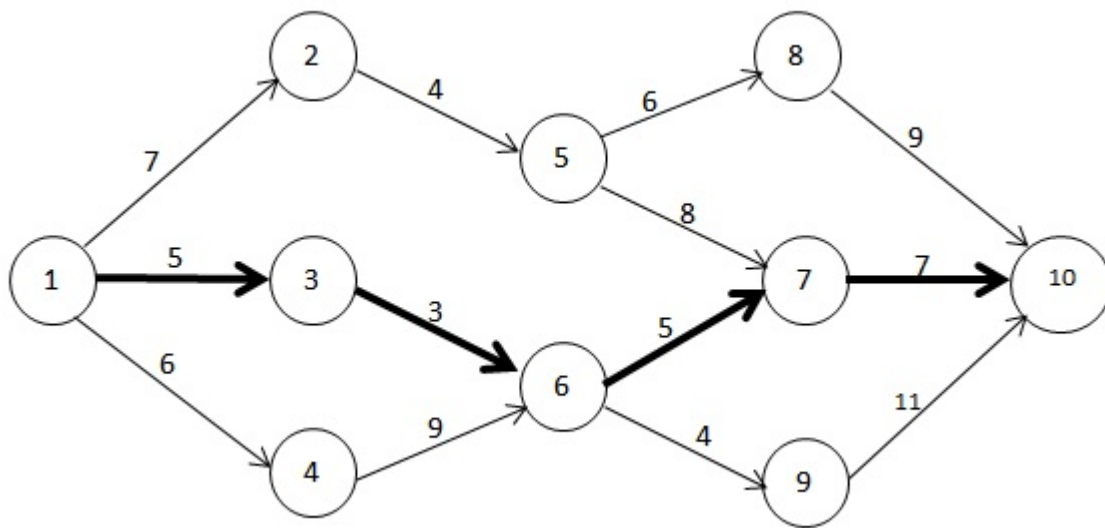


рис. 29.2

На этапе условной оптимизации получено, что минимальные затраты на перевозку груза из пункта 1 в пункт 10 составляют $F_4(1)=20$. Данный результат достигается при движении груза из 1-го пункта в 3-й. По данным табл. 29.3 из пункта 3 необходимо двигаться в пункт 6, затем - в пункт 7 (см. табл. 29.2) и из него - в конечный пункт (см. табл. 29.1). Таким образом, оптимальный маршрут доставки груза: $1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 6 \Rightarrow 7 \Rightarrow 10$. На рисунке 29.2 он показан жирными стрелками.

30. Оптимальное распределение инвестиций как задача динамического программирования

Инвестор выделяет средства в размере D условных единиц, которые должны быть распределены между n предприятиями. Каждое k -тое предприятие при инвестировании в него средств x приносит прибыль $W_k(S, x)$ условных единиц, $k=1...n$. Нужно выбрать оптимальное распределение инвестиций между предприятиями, обеспечивающее максимальную прибыль.

Выигрышем F в данной задаче является прибыль, приносимая n предприятиями.

Построение математической модели

1. Определение числа шагов. Число шагов n равно числу предприятий, в которые осуществляется инвестирование.

2. Определение состояний системы. Состояние системы на каждом шаге характеризуется количеством средств S_k , имеющихся в наличии перед данным шагом, $S \leq D$.

3. Выбор шаговых управлений. Управление на k -м шаге $x_i, i = 1, \dots, n$ является количество средств, инвестируемых в k -тое предприятие.

4. Функция выигрыша на k -м шаге:

$$W_k(S, x_k). \quad (30.1)$$

Это прибыль, которую приносит k -тое предприятие при инвестировании в него средств x_k .

$$F = \sum_{k=1}^n W_k(S, x_k), \quad (30.2)$$

следовательно, данная задача может быть решена методом динамического программирования.

5. Определение функции перехода в новое состояние.

$$S^n(S, x_k) = S - x. \quad (30.3)$$

Таким образом, если на k -м шаге система находилась в состоянии S , а выбрано управление x , то на $(k+1)$ -м шаге система будет находиться в состоянии $S - x$. Другими словами, если в наличии имеются средства в размере S у.е., и в k -тое предприятие инвестируется x у.е., то для дальнейшего инвестирования остается $(S - x)$ у.е.

6. Составление функционального уравнения для $k = n$:

$$F_n(S) = W_n(S, x_n), \quad (30.4)$$

$$x_n(S) = S. \quad (30.5)$$

На последнем шаге, т. е. перед инвестированием средств в последнее предприятие, условное оптимальное управление соответствует количеству средств, имеющихся в наличии; т. е. сколько средств осталось, столько и надо вложить в последнее предприятие. Условный оптимальный выигрыш равен доходу, приносимому последним предприятием.

7. Составление основного функционального уравнения.

Подставив в формулу (28.2) выражение (30.3), получим следующее функциональное уравнение:

$$F_k(S) = \max_{x_k \in X} \{W_k(S, x_k) + F_{k+1}(S - x)\}. \quad (30.6)$$

Поясним данное уравнение. Пусть перед k -м шагом у инвестора остались средства в размере S у.е., тогда x у.е. он может вложить в k -тое предприятие, при этом оно принесет доход $W_k(S, x_k)$, а оставшиеся $(S - x)$ у.е. - в остальные предприятия с $k+1$ -го до n -го. Условный оптимальный

выигрыш от такого вложения $F_{k+1}(S-x)$. Оптимальным будет то условное управление x , при котором сумма $W_k(S, x_k)$ и $F_{k+1}(S-x)$ максимальна.

Задача 30.1. Какова оптимальная прибыль, приносимая тремя предприятиями при инвестировании в них 5000 у.е. ($D=5000$, $n=3$). Значения $W_k(S, x_k)$, $k=1, 2, 3$ заданы в таблице 30.1.

Таблица 30.1

x_k тыс. усл. ед.	$W_1(S, x_k)$ тыс. усл. ед.	$W_2(S, x_k)$ тыс. усл. ед.	$W_3(S, x_k)$ тыс. усл. ед.
1	1,5	2	1,7
2	2	2,1	2,4
3	2,5	2,3	2,7
4	3	3,5	3,2
5	3,6	4	3,5

$$\text{Для } x_1 > x_2 \quad W_k(S, x_1) \geq W_k(S, x_2), \quad i=1, 2, 3, 4, 5. \quad (30.7)$$

Решение. Для простоты в задаче сделано предположение, что вкладываются только тысячи условных единиц.

Проведем **условную оптимизацию**.

По ее результатам заполняется таблица 30.2.

Таблица 30.2

S	$i=3$		$i=2$		$i=1$	
	$x_k(S)$	$F_k(S)$	$x_k(S)$	$F_k(S)$	$x_k(S)$	$F_k(S)$
1	1	1,7	0	2		
2	2	2,4	1	3,7		
3	3	2,7	1	4,4		
4	4	3,2	1	4,7		
5	5	3,5	1/4	5,2	2	6,4

В первой колонке таблицы записываются возможные состояния системы $S=1, \dots, 5$, в верхней строке - номера шагов $i=1, 2, 3$. На каждом шаге определяются условные оптимальные управления $x_k(S)$ и условные оптимальные выигрыши $F_k(S)$.

- Проведение условной оптимизации для последнего шага $i=3$. Функциональное уравнение на последнем шаге имеет вид:

$$F_3(S) = W_3(S, x_3), \quad (30.8)$$

$$x_3(S) = S$$

поэтому два столбца таблицы 30.2, соответствующие $i=3$, заполняются автоматически по таблице 30.1 исходных данных.

- Условная оптимизация для $i = 2$. Функциональное уравнение

$$F_2(S) = \max_{x \leq S} \{W_2(S, x_2) + F_3(S - x)\}. \quad (30.9)$$

Для проведения условной оптимизации заполним ряд вспомогательных таблиц (таблицы 30.3—30.8), соответствующих различным значениям S , т. е. различным исходам окончания предыдущего шага.

1) $S = 1$

Таблица 30.3

x	$1-x$	$W_2(S, x_k)$	$F_3(1-x)$	$W_2(S, x_k) + F_3(1-x)$
0	1	0	1,7	1,7
1	0	2	0	2

$\max_{x \leq 1} \{1, 7; 2\} = 2$, следовательно, $F_2(1) = 2$, $x_2(1) = 1$.

2) $S = 2$

Таблица 30.4

x	$2-x$	$W_2(S, x_k)$	$F_3(2-x)$	$W_2(S, x_k) + F_3(2-x)$
0	2	0	2,4	2,4
1	1	2	1,7	3,7
2	0	2,1	0	2,1

$\max_{x \leq 2} \{2, 4; 3, 7; 2, 1\} = 3, 7$, следовательно, $F_2(2) = 3, 7$; $x_2(2) = 1$

3) $S = 3$

Таблица 30.5

x	$3-x$	$W_2(S, x_k)$	$F_3(3-x)$	$W_2(S, x_k) + F_3(3-x)$
0	3	0	2,7	2,7
1	2	2	2,4	4,4
2	1	2,1	1,7	3,8
3	0	2,3	0	2,3

$\max_{x \leq 3} \{2, 7; 4, 4; 3, 8; 2, 3\} = 4, 4$, следовательно, $F_2(3) = 4, 4$; $x_2(3) = 1$

4) $S = 4$

Таблица 30.6

x	$4-x$	$W_2(S, x_k)$	$F_3(4-x)$	$W_2(S, x_k) + F_3(4-x)$
0	4	0	3,2	3,2
1	3	2	2,7	4,7
2	2	2,1	2,4	4,5
3	1	2,3	1,7	4
4	0	3,5	0	3,5

$\max_{x \leq 4} \{3, 2; 4, 7; 4, 5; 3, 5\} = 4, 7$, следовательно, $F_2(4) = 4, 7$; $x_2(4) = 1$.

5) $S = 5$

Таблица 30.7

x	$5-x$	$W_2(S, x_k)$	$F_3(5-x)$	$W_2(S, x_k) + F_3(5-x)$
0	5	0	3,5	3,5
1	4	2	3,2	5,2
2	3	2,1	2,7	4,8
3	2	2,3	2,4	4,7
4	1	3,5	1,7	5,2
5	0	4	0	4

$\max_{x \leq 5} \{3, 5; 5, 2; 4, 8; 5, 2; 4\} = 5, 2$

Для $S = 5$ $F_2(5) = 5, 2$ возможны два условных варианта управления: $x_2(5) = 1$ и $x_2(5) = 4$.

- Условная оптимизация для $i = 1$.

Перед первым шагом состояние системы известно.

$S = D = 5$ тыс. у.е., и условную оптимизацию следует проводить только для этого значения $S = 5$.

Таблица 30.8

x	$5-x$	$W_1(S, x_k)$	$F_2(5-x)$	$W_1(S, x_k) + F_2(5-x)$
0	5	0	5,2	5,2
1	4	1,5	4,7	6,2
2	3	2	4,4	6,4
3	2	2,5	3,7	6,2
4	1	3	2	5
5	0	3,6	0	3,6

$\max_{x \leq 5} \{5, 1; 6, 2; 6, 4; 6, 2; 5; 3, 6\} = 6, 4$, следовательно, $F_1(5) = 6, 4$, $x_1(5) = 2$.

Оптимальная прибыль, приносимая тремя предприятиями при инвестировании в них 5000 у.е., равна 6,4 тыс. у.е.

$$F = F_1(5) = 6, 4.$$

Проведем безусловную оптимизацию.

Ее результаты отмечены в таблице 39.2.

Для $i=1$ $S_1 = 5$ $F_1(5) = 6, 4$; $x_1^* = x_1(5) = 2$.

Для $i=2$ по формуле (39.3) $S_2 = S_1 - x_1 = 5 - 2 = 3$.

$F_2(3) = 4, 4$; $x_2^* = x_2(3) = 1$.

Для $i=3$ $S_3 = S_2 - x_2 = 3 - 1 = 2$.

$F_3(2) = 2, 4$; $x_3^* = x_3(2) = 2$.

$$x^* = (2; 1; 2).$$

Следует понимать, что полученное решение есть лишь некоторое приближение к оптимальному решению. Его можно улучшить, т. е. приблизить к оптимальному, взяв более мелкий шаг оптимизации, например, вкладывать в предприятия средства, кратные 500 у.е..

31. Задача о замене оборудования

Чем дольше механизм эксплуатируется, тем выше затраты на его обслуживание и ниже его производительность. Когда срок эксплуатации механизма достигает определенного уровня, может оказаться более выгодной его замена. Задача о замене оборудования, таким образом, сводится к определению оптимального срока эксплуатации механизма.

Предположим, что мы занимаемся заменой механизмов на протяжении n лет. В начале каждого года принимается решение либо об эксплуатации механизма еще год, либо о его замене новым.

Обозначим через $r(t)$ и $c(t)$ прибыль от эксплуатации t -летнего механизма на протяжении года и затраты на его обслуживание за тот же период. Далее пусть $s(t)$ — стоимость продажи механизма, который эксплуатировался t лет. Стоимость приобретения нового механизма остается неизменной на протяжении всех лет и равна I .

Элементы модели динамического программирования таковы:

1. Этап i представляется порядковым номером года i , $i = 1, 2, \dots, n$.
2. Варианты решения на i -м этапе (т. е. для i -го года) являются альтернативы: продолжить эксплуатацию или заменить механизм в начале i -го года.

3. Состоянием на i -ом этапе является срок эксплуатации (возраст) механизма к началу i -го года.

Пусть $f_i(t)$ – максимальная прибыль, получаемая за годы от i до n при условии, что в начале i -го года имеется механизм t -летнего возраста.

Рекуррентное уравнение имеет следующий вид:

$$f_i(t) = \max \begin{cases} r(t) - c(t) + f_{i+1}(t+1) & (1) \\ r(0) + s(t) - I - c(0) + f_{i+1}(1) & (2) \end{cases}$$

(1) – если эксплуатировать механизм

(2) – если заменить механизм.

Постановка задачи в общем виде

Рассмотрим задачу в общей постановке.

Пусть в течение периода, состоящего из n этапов, предприятие использует оборудование, которое вместе с установкой имеет стоимость I . Со временем оборудование изнашивается.

При этом:

- 1) суммарная производительность оборудования $r(t)$ снижается, так как увеличивается время, необходимое для его профилактики и ремонта;
- 2) возрастают затраты на обслуживание и ремонт $c(t)$ данного оборудования.

Требуется определить моменты (их для длительного периода эксплуатации оборудования может быть несколько), когда следует заменять старое оборудование на новое, чтобы суммарная прибыль за весь период эксплуатации оборудования была максимальной. Под прибылью имеется в виду чистый доход от продажи выпущенной продукции за вычетом стоимости обслуживания и ремонта или замены оборудования. Предполагается, что заменяемое оборудование имеет нулевую стоимость, а доход от его реализации по остаточной стоимости не учитывается. Это допущение не является принципиальным и введено для упрощения анализа.

Обозначим моменты начала каждого этапа через $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$; момент завершения всего периода — через T_n . Тогда на каждом этапе $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$ мы можем выбрать одно из двух возможных управлений:

U_1 — сохранить установленное оборудование и продолжать его эксплуатацию;

U_2 — приобрести новое оборудование и заменить старое.

Здесь следует подчеркнуть, что управленческие решения могут применяться только в моменты $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$.

Оптимальной инвестиционной политикой (стратегией управления) U^* называется совокупность таких решений $U_1^*, U_2^*, \dots, U_{n-1}^*$, в результате реализации которых рассматриваемое производство за n шагов переходит из начального S_0 состояния в конечное S_n , и при этом суммарная прибыль от эксплуатации оборудования достигает максимального значения. Состояние процесса на S_i этапе характеризуется возрастом оборудования. Максимально

возможный возраст оборудования в момент t_i равен i , а минимальный равен 1, если на предыдущем этапе произошла замена оборудования.

Прибыль f_i , получаемая на i -м этапе, зависит от состояния оборудования и сделанного нами выбора (управления) U_i :

$$f_i = f_i(t) = \begin{cases} r(t) - c(t) + f_{i+1}(t+1)U_i = U_1, & \text{если продолжать эксплуатацию оборудования} \\ r(0) - c(0) + s(t) - I + f_{i+1}(1), & U_i = U_2, \text{если приобрести новое оборудование} \end{cases} \quad (31.1)$$

где $r(0)$ — стоимость продукции, выпускаемой на новом оборудовании; $s(t)$ — стоимость продажи оборудования, который эксплуатировался t лет; I — полная стоимость нового оборудования.

Очевидно, что суммарная прибыль F , которую требуется максимизировать для разработки оптимальной инвестиционной политики, равна сумме прибылей на каждом из этапов производства. Таким образом, суммарная прибыль будет определяться по формуле:

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f_i. \quad (31.2)$$

В выражении (31.2) критерий является аддитивным. Для оптимизации подобных критериев возможно использование методов динамического программирования.

Таким образом, суть разработки оптимальной инвестиционной политики — это получение максимального значения суммарной прибыли F . Она зависит от результатов управления процессом эксплуатации оборудования на каждом шаге.

Особенностью динамического программирования является рассмотрение процесса от конца к началу, то есть сначала анализируется $n-1$ этап, ищется здесь оптимальное решение, затем то же делается на $n-2$ этапе и т. д.

Таким образом, основой математического аппарата для нахождения оптимального решения является принцип оптимальности Беллмана:

$$F_i^* = f_i(t) + f_{i+1}^* = \max_{U_i} \{f(t) + F_{i+1}(S_{i+1})\}. \quad (31.3)$$

При вычислениях с каждым из этапов ассоциирована одна управляемая переменная. Набор рекуррентных вычислительных процедур, связывающих различные этапы, обеспечивает получение оптимального решения задачи в целом при достижении последнего этапа.

Управление U_i^* выбирают следующим образом:

1) для всех возможных управлений U_i определяются значения сумм

$$F_i(S_n) = f_i(S_i, U_i) + F_{n+1}(S_{n+1}), \quad (31.4)$$

которые сравниваются между собой;

2) в качестве условно оптимального управления выбирается то управление, которое соответствует наибольшему значению $F_i(S_i)$ (при решении задачи максимизации).

Если наибольшее значение $F_i(S_i)$ получается при применении нескольких различных управлений, то все они являются условно оптимальными. В этом случае U_i^* не единственный.

При выборе управления на предпоследнем этапе (при $i=n-1$) никаких дальнейших шагов по эксплуатации оборудования не планируется, так что естественно считать $F_{n+1}(S_{i+1}) = F_n(S_n) = 0$. Тогда в сумме (31.4) остается лишь первое слагаемое.

Таким образом, процесс продвигается от конечного этапа к начальному, и на всех промежуточных шагах находятся значения:

- условно оптимальных управлений U_i^* для каждого из возможных состояний S_i ;
- оптимальное значение $F_i^*(S_i)$.

Вектор оптимального управления U^* всего процесса будет получен при объединении найденных в ходе вычислений $F_i^*(S_i)$ условно оптимальных управлений $U^*: U^* = (U_0^*, U_2^*, \dots, U_{n-1}^*)$.

Задача 31.1. Пусть требуется выработать оптимальную стратегию для эксплуатации оборудования на 6-ти летнем периоде (таблица 31.1).

Таблица 31.1

Возраст оборудования – t (лет)	0	1	2	3	4	5
Производительность оборудования – $r(t)$ (млн. руб.)	9	8	7	6	5	5
Затраты на ремонт – $c(t)$ (млн. руб.)	1	1	2	2	3	4

Стоимость нового комплекта оборудования $I = 6$ млн. руб.

Решение. Будем предполагать, что за пределами срока, представленного в таблице, эксплуатация оборудования нас не интересует.

Обозначения:

$f_i(t)$ – максимальный доход на временном отрезке $i, \dots, n$, при возрасте оборудования t лет в начале i -го года;

I – начальные затраты на приобретение и установку нового оборудования (цена нового оборудования).

Составляем уравнение Беллмана.

$$f_i(t) = \max \begin{cases} r(t) - c(t) + f_{i+1}(t+1), & \text{если эксплуатировать оборудование} \\ r(0) - c(0) - I + f_{i+1}(1), & \text{если заменить оборудование} \end{cases}$$

Приведем расчеты.

После пятого этапа эксплуатация оборудования не предусматривается, поэтому будем иметь:

Этап 5.

$$f_5(t) = \max \begin{cases} r(t) - c(t), & \text{если эксплуатировать оборудование} \\ r(0) - c(0) - I, & \text{если заменить оборудование} \end{cases}$$

Таблица 31.2

	$r(t) - c(t)$	$r(0) - c(0) - I$	Оптимальное решение	
t	старое	новое	$f_5(t)$	решение
1	8-1=7	9-6-1=2	7	с
2	7-2=5	9-6-1=2	5	с
3	6-2=4	9-6-1=2	4	с

4	5-3=2	9-6-1=2	2	с,н
5	5-4=1	9-1-6=2	2	н

Переходим к анализу процесса эксплуатации оборудования на четвертом этапе.

Этап 4.

$$f_4(t) = \max \begin{cases} r(t) - c(t) + f_5(t+1), & \text{если эксплуатировать оборудование} \\ r(0) - c(0) - I + f_5(1), & \text{если заменить оборудование.} \end{cases}$$

Таблица 31.3

	$r(t) - c(t) + f_5(t+1)$	$r(0) - c(0) - I + f_5(1)$	Оптимальное решение	
t	старое	новое	$f_4(t)$	решение
1	8-1+5=12	9-1-6+7=9	12	с
2	7-2+4=9	9-1-6+7=9	9	с,н
3	6-2+2=6	9-1-6+7=9	9	н
4	5-3+2=4	9-1-6+7=9	9	н

Теперь приступим к этапу 3. На этом этапе возраст оборудования может принимать значения 1, 2 и 3.

Этап 3.

$$f_3(t) = \max \begin{cases} r(t) - c(t) + f_4(t+1), & \text{если эксплуатировать оборудование} \\ r(0) - c(0) - I + f_4(1), & \text{если заменить оборудование.} \end{cases}$$

Таблица 31.4

	$r(t) - c(t) + f_4(t+1)$	$r(0) - c(0) - I + f_4(1)$	Оптимальное решение	
t	старое	новое	$f_3(t)$	решение
1	8-1+6=16	9-1-6+12=14	16	с
2	7-2+9=14	9-1-6+12=14	14	с, н
3	6-2+9=13	9-1-6+12=14	14	н

Этап 2.

$$f_2(t) = \max \begin{cases} r(t) - c(t) + f_3(t+1), & \text{если эксплуатировать оборудование} \\ r(0) - c(0) - I + f_3(1), & \text{если заменить оборудование.} \end{cases}$$

Таблица 31.5

	$r(t) - c(t) + f_3(t+1)$	$r(0) - c(0) - I + f_3(1)$	Оптимальное решение	
t	старое	новое	$f_2(t)$	решение
1	8-1+14=21	9-1-6+16=18	21	с
2	7-2+14=19	9-1-6+16=18	19	с

Этап 1.

$$f_1(t) = \max \begin{cases} r(t) - c(t) + f_2(t+1), & \text{если эксплуатировать оборудование} \\ r(0) - c(0) - I + f_2(1), & \text{если заменить оборудование.} \end{cases}$$

Таблица 31.6

	$r(t) - c(t) + f_2(t+1)$	$r(0) - c(0) - I + f_2(1)$	Оптимальное решение	
t	старое	новое	$f_1(t)$	решение
1	8-1+19=26	9-1-6+21=23	26	с

Оптимальное решение: $f_1(t) = 26, (с, с, н, с, с)$

Лучше учесть и доходы от нового оборудования. Они равны $r(0) - c(0) = 8$.

Окончательно получаем оптимальное решение в более привычном виде: $f_0(t) = 34 (н, с, с, н, с, с)$.

Значение $f_0(t) = 34$ — наибольшая прибыль, которую можно получить при эксплуатации оборудования в данном примере.

По результатам рассмотренного примера можно сделать следующий вывод. Оборудование нужно заменить один раз по истечении трех лет эксплуатации. Максимальная прибыль при этом составит 34 млн. руб.

Задача 31.2. Компания планирует определить оптимальную политику замены используемого в настоящее время трехлетнего механизма на протяжении следующих 4 лет ($n = 4$), т. е. вплоть до начала пятого года. Таблица 31.7 содержит относящиеся к задаче данные. Компания требует обязательной замены механизма, который находится в эксплуатации 6 лет. Стоимость нового механизма равна 100 000 долл.

Таблица 31.7

Возраст t без учета первых 3-х лет (года)	Возраст t^* с учетом 3-х лет (года)	Прибыль $r(t)$ (долл.)	Стоимость обслуживания $c(t)$ (долл.)	Остаточная стоимость $s(t)$ (долл.)
0		20000	200	-
1	3	19000	600	80000
2	4	18500	1200	60000
3	5	17200	1500	50000
4	6	15500	1700	30000
5	7	14000	1800	10000
6	8	12200	2200	5000

Решение. Определение допустимых значений возраста механизма на каждом этапе является нетривиальной задачей. На рис. 31.1 представлена рассматриваемая задача замены оборудования в виде сети. В начале первого года имеется механизм, эксплуатирующийся 3 года (на графике рис. 31.1 по оси Y откладывается возраст механизма). Мы можем либо заменить его, купить новое (**З**) или (**Н**), либо эксплуатировать старое (**С**) на протяжении следующего года. Если механизм заменили, то в начале второго года его возраст будет равен одному году, в противном случае его возраст будет 4 года. Такой же подход используется в начале каждого года, начиная со второго по четвертый.

Если однолетний механизм заменяется в начале второго или третьего года, то заменивший его механизм к началу следующего года также будет однолетним. К тому же в начале 4-го года 6-летний механизм обязательно должен быть заменен, если он еще эксплуатируется; в конце 4-го года все

механизмы продаются (**П**) в обязательном порядке. На схеме сети также видно, что в начале второго года возможны только механизмы со сроком эксплуатации 1 или 4 года. В начале третьего года механизм может иметь возраст 1, 2 или 5 лет, а в начале четвертого — 1, 2, 3 или 6 лет.

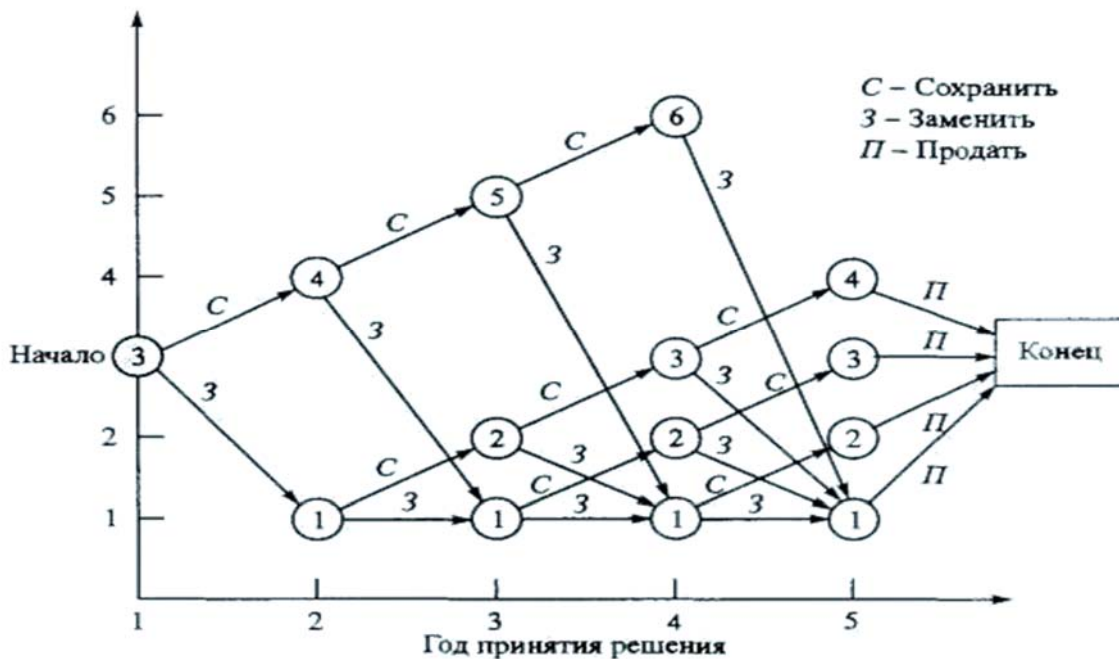


рис. 31.1

Решение данной задачи эквивалентно поиску маршрута максимальной длины (т. е. приносящего максимальную прибыль) от начала первого года к концу четвертого в сети, показанной на рис. 31.1. При решении таких задач часто используют табличную форму записи. (Числовые данные в таблице кратны тысячам долларов.)

Этап 4.

Таблица 31.8

	С	Н	Оптимальное решение	
t	$r(t) + s(t+1) - c(t)$	$r(0) + s(t) + s(1) - c(0) - I$	$f_4(t)$	Решение
1	$19,0 + 60 - 0,6 = 78,4$	$20 + 80 + 80 - 0,2 - 100 = 79,8$	79,8	Н
2	$18,5 + 50 - 1,2 = 67,3$	$20 + 60 + 80 - 0,2 - 100 = 59,8$	67,3	С
3	$17,2 + 30 - 1,5 = 45,7$	$20 + 50 + 80 - 0,2 - 100 = 49,8$	49,8	Н
4	Необходима замена	$20 + 5 + 80 - 0,2 - 100 = 4,8$	4,8	Н

Этап 3.

Таблица 31.9

	С	Н	Оптимальное решение	
t	$r(t) - c(t) + f_4(t+1)$	$r(0) + s(t) - c(0) - I + f_4(1)$	$f_3(t)$	Решение
1	$19,0 - 0,6 + 67,3 = 85,7$	$20 + 80 - 0,2 - 100 + 79,8 = 79,6$	85,7	С
2	$18,5 - 1,2 + 49,8 = 67,1$	$20 + 60 - 0,2 - 100 + 79,8 = 59,6$	67,1	С

5	$14,0 - 1,8 + 4,8 = 17,0$	$20 + 10 - 0,2 - 100 + 79,8 = 9,6$	17,0	Н
---	---------------------------	------------------------------------	------	---

Этап 2.

Таблица 31.10

	С	Н	Оптимальное решение	
t	$r(t) - c(t) + f_3(t+1)$	$r(0) + s(t) - c(0) - I + f_3(1)$	$f_2(t)$	Решение
1	$19,0 - 0,6 + 67,1 = 85,5$	$20 + 80 - 0,2 - 100 + 85,7 = 85,5$	85,5	С или Н
4	$15,5 - 1,7 + 19,6 = 33,4$	$20 + 30 - 0,2 - 100 + 85,7 = 35,5$	35,5	Н

Этап 1.

Таблица 31.11

	С	Н	Оптимум	
t	$r(t) - c(t) + f_2(t+1)$	$r(0) + s(t) - c(0) - I + f_2(1)$	$f_1(t)$	Решение
3	$17,2 - 1,5 + 35,5 = 51,2$	$20 + 50 - 0,2 - 100 + 85,5 = 55,3$	55,3	Н

На рис. 31.2 показана последовательность получения оптимального решения. В начале первого года оптимальным решением при $t = 3$ является замена механизма. Следовательно, новый механизм к началу второго года будет находиться в эксплуатации 1 год. При $t = 1$ в начале второго года оптимальным решением будет либо использование, либо замена механизма. Если он заменяется, то новый к началу третьего года будет находиться в эксплуатации 1 год, иначе механизм будет иметь возраст 2 года. Описанный процесс продолжается до тех пор, пока не будет определено оптимальное решение для четвертого года.

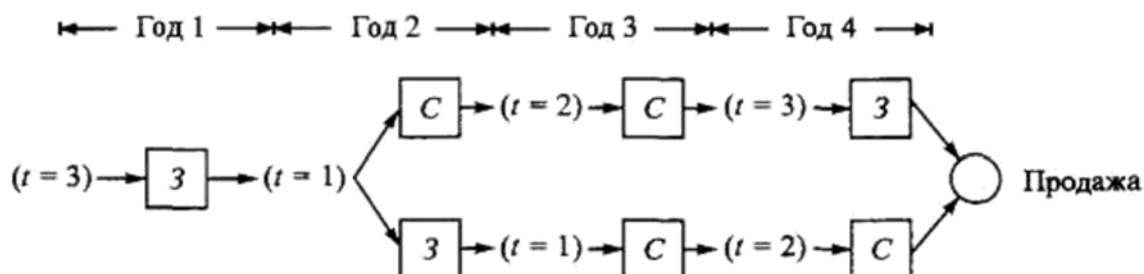


рис.31.2

Следовательно, начиная с первого года эксплуатации механизма, альтернативными оптимальными стратегиями относительно замены механизма будут **(Н, С, С, Н)** и **(Н, Н, С, С)**. Общая прибыль составит 55 300 долл.

32.Марковские модели принятия решений

Определение 32.1. Марковский процесс – это процесс, протекающий в некоторой системе, при котором для каждого момента времени поведение

системы в будущем зависит только от состояния системы в данный момент и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние.

Определение 32.2. Случайная цепь – это случайный процесс $X(t)$ с дискретным временем и дискретным множеством значений.

Определение 32.3. Простая марковская цепь – это случайная цепь, для которой в каждый момент времени закон распределения $X(t_k)$ вполне определяется значением $X(t_{k-1})$ и не зависит от предыдущих значений.

Марковская задача принятия решений – это задача математического программирования к многошаговым задачам принятия решений в условиях риска, в которой процесс изменения состояния любой изучаемой системы является марковским процессом с конечным множеством возможных состояний и дискретным временем.

Математические модели, приводящие к таким задачам, называют марковскими моделями принятия решений.

В марковских моделях принятия решений поощрения (доход, потери) задают матрицей доходов.

Определение 32.4. Матрица доходов – это матрица, элементами которой являются доходы (положительные значения) или затраты (отрицательные значения), возникающие вследствие перехода системы из одного возможного состояния в другое.

Определение 32.5. Матрица переходных вероятностей – это матрица, каждый элемент p_{ij} которой является вероятностью перехода из состояния S_i в состояние S_j .

Матрицы переходных вероятностей и матрицы доходов зависят от стратегий, т. е. допустимых решений, которыми располагает лицо, принимающее решения.

Основная цель — определение оптимальной стратегии (оптимального решения), максимизирующей ожидаемый доход за конечное или бесконечное число этапов марковского процесса изменения состояния изучаемой системы.

Рассмотрим некоторую динамическую систему S с возможными дискретными состояниями $S_j, j = 1, 2, \dots, m$, которая в фиксированные последовательные моменты времени $t_1 < t_2 < \dots$ случайным образом переходит скачком (мгновенно) из одного возможного состояния в другое или остается в прежнем. При этом будем предполагать, что сам процесс изменения состояния изучаемой системы S является марковским процессом, т. е. вероятность перехода системы S в любое возможное состояние в момент времени t_i определяется состоянием, достигнутым в момент времени t_{i-1} , и не зависит от того, когда и как она пришла в это состояние. Фиксированные моменты времени t_i принято называть шагами (или этапами) марковского скалярного процесса изменения состояния системы S .

Для удобства дальнейших рассуждений некоторый момент времени $t_0 < t_1$ будем считать начальным и введем случайное событие s^i , состоящее в том, что после i этапов исходная система S находится в состоянии S_k , $k = 1, 2, \dots, m$. При этом $i = 0$ соответствует начальному этапу, и при любом фиксированном i события s_k^i , $k = 1, 2, \dots, m$, образуют полную группу событий. Поэтому

$$\sum_{k=1}^m P[s_k^i] = 1, i = 1, 2, \dots, N.$$

Кроме того, вектор

$$p(i) = \left(P[s_1^i], P[s_2^i], \dots, P[s_m^i] \right)^T$$

является вектором вероятностей состояний системы S после i этапов при $i = 1, 2, \dots, N$ и вектором начальных вероятностей состояний системы S при $i = 0$.

В соответствии с исходными допущениями условная вероятность реализации случайного события s_k^i при условии s_j^{i-1} зависит от принятого после $(i-1)$ -го этапа решения $X_{n_{i-1}}$ из множества G допустимых решений.

Таким образом,

$$p_{jk}(i / X_{n_{i-1}}) = P[s_k^i / s_j^{i-1}; X_{n_{i-1}}],$$

и матрица переходных вероятностей

$$P(i / X_{n_{i-1}}) = p_{jk}(i / X_{n_{i-1}}).$$

При этом нетрудно убедиться в том, что верны следующие утверждения:

а) сумма элементов любой строки матрицы переходных вероятностей $P(i / X_{n_{i-1}})$ равна единице;

б) вектор вероятностей состояний изучаемой системы S после i этапов равен произведению транспонированной матрицы переходных вероятностей $P(i / X_{n_{i-1}})$ на вектор вероятностей состояний после $(i-1)$ -го этапа, т. е.

$$p(i) = P^T(i / X_{n_{i-1}}) \cdot p(i-1).$$

Из приведенных рассуждений следует, что в общем случае вектор вероятностей состояний системы S после N этапов зависит от вектора начальных вероятностей ее состояний $p(0)$ и вектора $(X_{n_0} X_{n_1} \dots X_{n_{N-1}})^T \in G^N$, который называют вектором решений.

Действительно,

$$p(N) = P^T(N / X_{n_{N-1}}) \cdot p(N-1) = P^T(N / X_{n_{N-1}}) \cdot P^T(N-1 / X_{n_{N-2}}) \cdot p(N-2) = \dots \\ \dots = P^T(N / X_{n_{N-1}}) \cdot P^T(N-1 / X_{n_{N-2}}) \dots P^T(1 / X_{n_0}) \cdot p(0).$$

С переходом системы S из одного состояния в другое связана матрица дохода $R(i / X_{n_{i-1}}) = (r_{jk}(i / X_{n_{i-1}})) \in M_m(R)$, в которой элемент $r_{jk}(i / X_{n_{i-1}})$ есть доход (положительное значение) или убыток (отрицательное значение) за i -й этап. При этом доход или убыток за i -й этап связан лишь с переходом системы из состояния S_j , в котором она находилась после $(i-1)$ -го этапа, в состояние S_k при принятии решения $X_{n_{i-1}} \in G$.

Величина

$$n_j(X_{n_{i-1}}) = \sum_{k=1}^m p_{jk}(i / X_{n_{i-1}}) r_{jk}(i / X_{n_{i-1}}) \quad (32.1)$$

определяет ожидаемый доход за i -й этап, если после $(i-1)$ -го этапа система находилась в состоянии S_j , и было принято решение $X_{n_{i-1}} \in G$. Заметим, что ожидаемый доход связан лишь с переходами системы из одного возможного состояния в другое при фиксированном допустимом решении.

Далее в качестве принципа оптимальности, совпадающего в рассматриваемом случае с критерием оптимальности, использована максимизация ожидаемого дохода за N этапов. При этом специфика решения задачи прежде всего связана с тем, будет ли число этапов N конечным или нет. В соответствии с этим рассматривают задачи принятия решений с конечным горизонтом планирования, когда $N < \infty$, или с бесконечным горизонтом планирования, когда $N = \infty$.

Необходимо отметить, что лицо, принимающее решения, может интересоваться величиной ожидаемого дохода при заранее определенной стратегии поведения в случае того или иного состояния системы. Так, например, лицо, принимающее решения, может считать, что если после $(i-1)$ -го этапа система находится в состоянии S_j , то безотносительно к конкретному значению j всегда необходимо принимать решение $X^* \in G$. В этом случае говорят, что процесс принятия решений описывается стационарными стратегиями. При этом каждой стационарной стратегии будут соответствовать свои матрицы переходных вероятностей и доходов.

При конечном горизонте планирования $N < \infty$ марковскую задачу принятия решений можно представить как задачу динамического программирования.

Для доказательства введем следующее определение: **оптимальный ожидаемый доход $f_i(j)$** – это наилучший доход в смысле используемого

принципа оптимальности за этапы с номерами $i, i+1, \dots, N$ при условии, что после $(i-1)$ -го этапа изучаемая система S находится в состоянии S_j , где $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Так как горизонт планирования конечен, то для оптимальных ожидаемых доходов должны быть выполнены естественные условия:

$$f_{N+1}(j) \equiv 0, j = 1, 2, \dots, m.$$

Оптимальный ожидаемый доход $f_i(j)$ на этапах с номерами $i, i+1, \dots, N$ складывается из двух составляющих. Первая составляющая — оптимальный ожидаемый доход на $(i+1)$ -м этапе, обусловленный одним лишь переходом системы S из состояния S_j , в котором она находилась на i -м этапе, в любое допустимое состояние $S_k, k = 1, 2, \dots, m$, на $(i+1)$ -м этапе (рисунок 32.1).

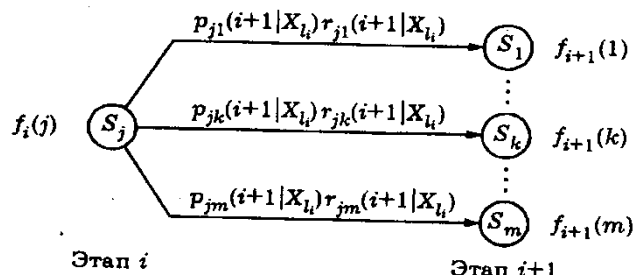


рис. 32.1

Эта составляющая равна

$$\max_{X_{m_i} \in G} v_j(X_{n_i}),$$

$$v_j(X_{n_{i-1}}) = \sum_{k=1}^m p_{jk}(i+1/X_{n_i}) r_{jk}(i+1/X_{n_i}),$$

где $p_{jk}(i+1/X_{n_i})$ - условная вероятность того, что после $(i+1)$ -го этапа система S будет находиться в состоянии S_k , если после i этапов она находилась в состоянии S_j , и было принято допустимое решение X_{n_i} ; $r_{jk}(i+1/X_{n_i})$ - доход или убыток, связанный лишь с переходом системы из состояния S_j , в котором она находилась после i этапов, в состояние S_k на $(i+1)$ -м этапе в результате принятия решения X_{n_i} из множества допустимых решений G .

Вторая составляющая оптимального ожидаемого дохода $f_i(j)$ определяется совокупностью оптимальных ожидаемых доходов $f_{i+1}(k)$,

$k=1, 2, \dots, m$ с учетом переходных вероятностей $p_{jk}(i+1 / X_{n_i}), k=1,2,\dots,m$

$$\max_{X_{m_i \in G}} \sum_{k=1}^m p_{jk}(i+1 / X_{n_i}) f_{i+1}(k).$$

В результате проведенных рассуждений мы приходим к рекуррентному уравнению динамического программирования с конечным числом этапов, связывающему оптимальные ожидаемые доходы $f_i(j), j=1, 2, \dots, m$ и $f_{i+1}(k), k=1, 2, \dots, m$:

$$f_i(j) = \max_{X_{m_i \in G}} \left\{ v_j(X_{n_i}) + \sum_{k=1}^m p_{jk}(i+1 / X_{n_i}) f_{i+1}(k) \right\},$$

$i=1, 2, \dots, N-1, j=1, 2, \dots, m$.

При этом напомним, что $f_{N+1}(k) \equiv 0, k=1, 2, \dots, m$ и

$$v_j(X_{n_{i-1}}) = \sum_{k=1}^m p_{jk}(i+1 / X_{n_i}) r_{jk}(i+1 / X_{n_i}), j=1, 2, \dots, m.$$

Рассмотрим задачу, которая может быть полезна при анализе актуальных прикладных задач (управление запасами, замена оборудования, контроль и регулирование емкости водохранилища и т. д.).

Задача 32.1. Каждый год в начале сезона садовник проводит химический анализ почвы на своем участке и по его результатам оценивает продуктивность сада на новый сезон как хорошую, удовлетворительную или плохую (таблица 32.1). Оценка состояния сада позволяет садовнику принять одно из допустимых решений: обойтись без дополнительной обработки или провести обработку, включающую, например, внесение удобрений. Это требует дополнительных затрат, а цель садовника — получить максимальный доход. Он планирует прекратить занятие садоводством через три года и за этот период хочет получить максимальный доход. Какова его оптимальная стратегия поведения?

Решение. По результатам многолетних наблюдений садовник установил, что продуктивность сада в текущем году можно считать зависящей лишь от состояния почвы в предыдущем году. Таким образом, процесс изменения состояния почвы представляет собой марковский процесс с тремя возможными состояниями и дискретным временем.

Таблица 32.1

Продуктивность почвы	Состояние системы
Хорошая	S_1
Удовлетворительная	S_2
Плохая	S_3

Множество допустимых решений $G = \{X_1, X_2\}$, где X_1 — решение не вносить удобрений, а X_2 — решение внести удобрения. Таким образом, для $i=1, 2, \dots, N$ матрица переходных вероятностей равна

$$P(i / X_{n_{i-1}}) = \begin{cases} P_1, X_{n_{i-1}} = X_1 \\ P_2, X_{n_{i-1}} = X_2. \end{cases}$$

Пусть в рассматриваемой задаче матрица переходных вероятностей является постоянной:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где номера строк и столбцов — это номера состояний системы S_1, S_2, S_3 (см. таблицу 32.1) в текущем и последующем годах, соответственно. Так, например, если в текущем $(i-1)$ -м году состояние почвы хорошее, то вероятность ее перехода в плохое состояние в последующем i -м году равна $p_{13}(i) = P[s_3^i / s_1^{i-1}] = 0,3$.

Садовник может принять решение о применении удобрений с целью повышения продуктивности сада, т. е. с целью улучшения состояния почвы, так как в противном случае переходные вероятности не изменятся. Если же садовник принял решение о применении удобрений, то переходные вероятности задаются матрицей:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,05 & 0,4 & 0,55 \end{pmatrix},$$

наглядно иллюстрирующей улучшение состояния почвы в последующие годы. А матрица дохода имеет вид

$$R(i / X_{n_{i-1}}) = \begin{cases} R_1, X_{n_{i-1}} = X_1 \\ R_2, X_{n_{i-1}} = X_2 \end{cases}, \text{ где } R_1 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом случае горизонт планирования $N = 3$, а элементы матриц доходов и переходных вероятностей не зависят от номера этапа.

Воспользовавшись матрицами P_1, P_2, R_1, R_2 и их независимостью от номера этапа, вычислим ожидаемые доходы (32.1), обусловленные одним лишь переходом изучаемой системы S из одного возможного состояния в другое, при различных вариантах допустимых решений из множества G :

$$v_1(X_1) = 0,2 \cdot 7 + 0,5 \cdot 6 + 0,3 \cdot 3 = 5,3,$$

$$v_2(X_1) = 0 \cdot 0 + 0,5 \cdot 5 + 0,5 \cdot 1 = 3,$$

$$v_3(X_1) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = -1,$$

$$v_1(X_2) = 0,3 \cdot 6 + 0,6 \cdot 5 + 0,1 \cdot (-1) = 4,7,$$

$$v_2(X_2) = 0,1 \cdot 7 + 0,6 \cdot 4 + 0,3 \cdot 0 = 3,1,$$

$$v_3(X_2) = 0,05 \cdot 6 + 0,4 \cdot 3 + 0,55 \cdot (-2) = 0,4.$$

Для наглядности воспользуемся табличным алгоритмом решения рассматриваемой задачи (таблица 32.2 - этап 3, соответствующий $f_3(j)$, таблица 32.3 - этап 2, соответствующий $f_2(j)$, таблица 32.4 - этап 1, соответствующий $f_1(j)$). При этом нумерация этапов „с конца” обусловлена определением оптимального ожидаемого дохода $f_i(j)$.

Этап 3.

Таблица 32.2

j	$v_j(X_k)$		Оптимальный ожидаемый доход $f_3(j)$	Оптимальное решение
	$k=1$	$k=2$		
1	5,3	4,7	5,3	X_1
2	3	3,1	3,1	X_2
3	-1	0,4	0,4	X_3

Этап 2.

Таблица 32.3

j	$v_j(X_k) + \sum_{l=1}^3 p_{jl}(i+1/X_k) \cdot f_3(l)$		$f_2(j)$	Оптимальное решение
	$k=1$	$k=2$		
1	$5,3 + 0,2 \cdot 5,3 + 0,5 \cdot 3,1 + 0,3 \cdot 0,4 = 8,03$	$4,7 + 0,3 \cdot 5,3 + 0,6 \cdot 3,1 + 0,1 \cdot 0,4 = 8,19$	8,19	X_2
2	$3 + 0 \cdot 5,3 + 0,5 \cdot 3,1 + 0,5 \cdot 0,4 = 4,75$	$3,1 + 0,1 \cdot 5,3 + 0,6 \cdot 3,1 + 0,3 \cdot 0,4 = 5,61$	5,61	X_2
3	$-1 + 0 \cdot 5,3 + 0 \cdot 3,1 + 1 \cdot 0,4 = -0,6$	$0,4 + 0,05 \cdot 5,3 + 0,4 \cdot 3,1 + 0,55 \cdot 0,4 = 2,125$	2,125	X_2

Этап 1.

Таблица 32.4

j	$v_j(X_k) + \sum_{l=1}^3 p_{jl}(i+1/X_k) \cdot f_2(l)$		$f_1(j)$	Оптимальное решение
	$k=1$	$k=2$		
1	$5,3 + 0,2 \cdot 8,19 + 0,5 \cdot 5,61 + 0,3 \cdot 2,125 = 10,38$	$4,7 + 0,3 \cdot 8,19 + 0,6 \cdot 5,61 + 0,1 \cdot 2,125 = 10,74$	10,74	X_2
2	$3 + 0 \cdot 8,19 + 0,5 \cdot 5,61 + 0,5 \cdot 2,125 = 6,87$	$3,1 + 0,1 \cdot 8,19 + 0,6 \cdot 5,61 + 0,3 \cdot 2,125 = 7,92$	7,92	X_2
3	$-1 + 0 \cdot 8,19 + 0 \cdot 5,61 + 1 \cdot 2,125 = 1,13$	$0,4 + 0,05 \cdot 8,19 + 0,4 \cdot 5,61 + 0,55 \cdot 2,125 = 4,23$	4,23	X_2

Из оптимального решения следует, что первые два года садовник должен применять удобрения при любом состоянии системы, т. е. вне зависимости от результатов химического анализа почвы (первые два года оптимальным является допустимое решение X_2 для всех возможных состояний), но на последнем этапе (третий год) ему следует применять удобрения лишь при удовлетворительном (S_2) и плохом (S_3) состояниях почвы. В этом случае суммарный ожидаемый доход составит 10,74 при хорошем состоянии почвы в начале первого года, 7,92 — при удовлетворительном и 4,23 — при плохом состоянии почвы в начале первого года.

Список литературы

1. *Абрамов Л. М.* Математическое программирование / Л. М. Абрамов, В.Ф.Капустин. – Л., Изд-Ленингр. ун-та, 1976.
2. *Акулич И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. – М.: Высшая школа, 1993.
3. *Афанасьев М. Ю.* Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: Учебное пособие / М. Ю. Афанасьев, Б. П. Суворов. – М.:ИНФРА-М, 2003.
4. *Ашманов С. А.* Линейное программирование / С. А. Ашманов. – М.: Наука, 1981.
5. *Баканов М. И.* Теория экономического анализа: Учебник. -4-е изд., доп. и перераб. / М. И. Баканов, А. Д. Шеремет. – М.: Финансы и статистика, 2000.
6. *Баканов М. И.* Экономический анализ: ситуации, тесты, примеры, задачи, выбор оптимальных решений, финансовое прогнозирование: Учеб. Пособие / М.И.Баканов, А. Д. Шеремет. – М.: Финансы и статистика, 1999.
7. *Банди Б.* Основы линейного программирования: Пер. с англ. / Б. Банди.- М.: Радио и связь, 1989.
8. *Беллман Р.* Прикладные задачи динамического программирования / Р. Беллман, С. Дрейфус; перевод с англ. Н. М. Митрофановой. — М.: Наука, 1965.
9. *Вентцель Е. С.* Элементы динамического программирования / Е. С. Вентцель. – М.: Наука, 1964.
10. *Гасс С.* Линейное программирование / С. Гасс. - М.: Физматгиз, 1961.
11. *Габасов Р.* Методы линейного программирования. Ч.1. Общие задачи / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Минск: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1977.
12. *Габасов Р.* Методы линейного программирования. Ч.2. Транспортные задачи / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Минск: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1977.
13. *Глухов В. В.* Математические методы и модели для менеджмента /В.В.Глухов, М.Д.Медников, С.Б.Коробко - СПб.: Издательство “Лань”, 2000.
14. *Гольштейн Е. Г.* Линейное программирование, теория, методы и приложения / Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. – М.: Наука, 1969.
15. *Грешилов А. А.* Прикладные задачи математического программирования: Учеб. Пособие / А. А. Грешилов. – 2-е изд. – М.: Логос, 2006.
16. *Грин, Д.* Математические методы анализа алгоритмов / Д. Грин. - Д.~Кнут. — М.:Мир, 1987.
17. *Дудорин В. И.* Моделирование в задачах управления производством/В. И. Дудорин. – М.:Статистика, 1980.

18. Исследования операций в экономике: учебное пособие для ВУЗов / под ред. Кремера Н. Ш. – М.: Банки и Биржи, ЮНИТИ, 1997.
19. Жолобов Д. А. Введение в математическое программирование: Учебное пособие/Д. А. Жолобов. – М.: МИФИ, 2008.
20. Карасев А. И. Математические методы и модели в планировании/ А. И. Карасев, Н. Ш. Кремер, Т. И. Савельева. – М.: Экономика, 1987.
21. Карманов В. Г. Математическое программирование/В. Г. Карманов. – М.: Наука, 1986.
22. Ковалев М. М. Дискретная оптимизация. Целочисленное программирование/М. М. Ковалев. – М.: "Едиториал УРСС", 2003.
23. Колемаев В. А. Математическая экономика/В.А.Колемаев. – М.: Юнити, 1998.
24. Красс М. С. Математические методы и модели для магистрантов экономики: Учебное пособие /М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2006.
25. Кузнецов А. В. Высшая математика. Математическое программирование /А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – М.: Выш. шк., 1994. – 286 с.: ил.
26. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование: Учеб. Пособие /Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко / 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1980.
27. Лотов А. В. Введение в экономико-математическое моделирование/ А. В. Лотов. – М.: Наука, 1984.
28. Ляшенко И. Н. Линейное и нелинейное программирование / И. Н. Ляшенко, Е. А. Карагодова, Н. В. Черникова, Н. З. Шор. – Киев.: Издательское объединение "Вища школа", 1975.
29. Морозов В. В. Исследование операций в задачах и упражнениях /В. В. Морозов, А. Г. Сухарев, В. В. Федоров. – М., 1986.
30. Пантелеев А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах: Учебное пособие /А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – М.: Высшая Школа, 2005.
31. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. — М.: Мир, 1985.
32. Ромакин М. И. Оптимизация планирования производства: экономико-математические модели и методы/ М. И. Ромакин. – М.: Финансы и статистика, 1981.
33. Солодовников А. С. Введение в линейную алгебру и линейное программирование/А.С.Солодовников. – М.: Изд. "Просвещение", 1966.
34. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования: В 2-х т. Т.1: Пер с англ. / А. Схрейвер. – М.: Мир, 1991.
35. Таха Х. А. Введение в исследование операций. Кн.1 и 2/ Х. А. Таха. – М.: Мир, 1985.
36. Терехов Л. Л. Экономико-математические методы. – М.: Статистика, 1972.

37. Тынкевич М. А. Экономико-математические методы (исследование операций). Изд. 2, испр. и доп. / М. А. Тынкевич. – Кемерово, 2000.
38. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование / Дж. Хедли. – М.: Мир, 1967.
39. Черноруцкий И. Г. Методы оптимизации в теории управления: Учеб. Пособие / И. Г. Черноруцкий. – СПб.: Питер, 2004.
40. Y(x).ru Сервис онлайн построения графиков. Предназначен для онлайн построения графиков функций (обычных и параметрических) и графиков по точкам (графиков по значениям). Режим доступа: <http://www.yotx.ru> Дата обращения 12.08.2016.
41. Математическое бюро МатБюро[Электронный ресурс]/ Полезные материалы: учебники, программы, сайты, формулы – Режим доступа: <http://www.matburo.ru/useful.php>. Дата обращения 12.08.2016.
42. Экономико-математические методы. Электронный учебник. Режим доступа: <http://www.math.mrsu.ru/text/method/index.htm> Дата обращения 12.08.2016.

Приложение. Великий русский математик, академик Императорской Санкт-Петербургской Академии наук А. А. Марков

Андрей Андреевич Марков (2 июня 1856 – 20 июля 1922) – русский математик, академик, внёсший большой вклад в теорию вероятностей, математический анализ и теорию чисел.

Марков родился в Рязани. Он был сыном чиновника Андрея Григорьевича Маркова, служившего в Лесном департаменте в чине коллежского советника.

В 1874 году Марков поступил в Императорский Санкт-Петербургский университет, где слушал лекции Чебышева, влияние которого отразилось на всей его научной деятельности. Слушал он также лекции профессоров Коркина и Золотарева, которые помимо лекций вели кружковые занятия с лучшими студентами. 31 мая 1878 года Марков окончил Императорский Санкт-Петербургский университет по математическому разряду физико-математического факультета со степенью кандидата. В том же году был награжден золотой медалью за сочинение на предложенную факультетом тему "Об интегрировании дифференциальных уравнений при помощи непрерывных дробей" и был оставлен при Императорском Санкт-Петербургском университете «для приготовления к профессорскому званию».

В 1880 году Марков защитил знаменитую магистерскую диссертацию "О бинарных квадратичных формах положительного определителя", сразу выдвинувшую его в первые ряды русских математиков. В 1881 году он защитил докторскую диссертацию "О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей".

В 1880 году началась преподавательская деятельность Маркова в Императорском Санкт-Петербургском университете в качестве приват-доцента. В учебных 1880/81 и 1881/82 годах он читал повторительный курс дифференциального и интегрального исчислений. В 1883 году ему был передан курс "Введения в анализ", до того читавшийся профессорами Сохоцким и Поссе. В том же году из университета ушел Чебышев, и Марков первый раз читал курс теории вероятностей. С учебного 1885/86 года он читал этот курс непрерывно из года в год.

13 декабря 1886 года, по предложению Чебышева, Марков был избран адъюнктом Императорской Санкт-Петербургской Академии наук, 3 марта 1890 года – экстраординарным академиком, 2 марта 1896 года – ординарным академиком. В 1886 году он был назначен экстраординарным профессором Императорского Санкт-Петербургского университета, а в 1893 году – ординарным. В 1905 году Марков вышел в отставку со званием заслуженного профессора, но курс теории вероятностей продолжал читать практически до самой своей смерти.

Марков является первооткрывателем обширного класса стохастических процессов с дискретной и непрерывной временной компонентой, названных

его именем. Марковские процессы обладают следующим (марковским) свойством: следующее состояние процесса зависит вероятностно только от текущего состояния. В то время, когда эта теория была построена, она считалась весьма абстрактной, однако в настоящее время практические применения данной теории чрезвычайно многочисленны. Теория цепей Маркова выросла в огромную и весьма важную область научных исследований – теорию марковских случайных процессов, которая в свою очередь представляет основу общей теории стохастических процессов. Марков существенно продвинул классические исследования предшественников, касающиеся закона больших чисел и центральной предельной теоремы теории вероятностей, а также распространил их и на цепи Маркова.

Марков своим открытием (как и затем Колмогоров, предложивший строгую теоретико-вероятностную формулировку на основе теории меры) сделал крупнейший вклад в теорию случайных процессов и теорию вероятностей вообще.

Как и все выдающиеся русские математики, Андрей Андреевич Марков занимался многими проблемами математического анализа. В общем списке его научных трудов работы по математическому анализу составляют более одной третьей части. Внимание Маркова привлекали теория непрерывных дробей, исчисление конечных разностей, теория интерполирования функций, экстремальные задачи в функциональных пространствах, проблема моментов, теория ортогональных многочленов, квадратурные формулы, дифференциальные уравнения, теория функций, наименее уклоняющихся от нуля, и другие вопросы. По многим разделам математического анализа Марков получил выдающиеся результаты, которые играют важную роль и в наши дни. Марков воспринял идеи своего учителя Чебышева и занимался решением многих задач, поставленных в его трудах. Классические работы Чебышева и Маркова о предельных величинах интегралов составили основы теории моментов и теории экстремальных задач в функциональных пространствах.

Работ по теории чисел у Маркова сравнительно немного – 15, но они имеют непреходящее значение для этой теории. Сюда относится, прежде всего, магистерская диссертация «О бинарных квадратичных формах положительного определителя». Она примыкала к исследованиям Коркина и Золотарева и была высоко оценена Чебышевым. Диссертация посвящена проблеме арифметических минимумов неопределенных бинарных квадратичных форм. В последующих статьях рассматривается проблема арифметических минимумов неопределенных тернарных и кватернарных квадратичных форм. Идеи и результаты Маркова оказали большое влияние на дальнейшее развитие теории чисел.

Имя Маркова носят следующие математические объекты:

- неравенство Маркова,
- теорема Маркова,

- цепь Маркова,
- эргодическая теорема Маркова,
- марковский процесс,
- марковское свойство,
- марковский процесс принятия решений.

Миссия университета – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

КАФЕДРА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ И УПРАВЛЕНИЯ ИННОВАЦИЯМИ

Кафедра была основана в 2007 г. Основная цель кафедры - подготовка грамотных специалистов в области охраны результатов интеллектуальной деятельности. С 2006 г. кафедра ИСиУИ является платформой опорной организации Роспатента в Северо-Западном федеральном округе. Кафедра ведет учебную, научную, проектную и международную деятельность, которая координируется и экспертируется Экспертным Советом по интеллектуальной собственности Северо-Западного федерального округа. Учебная деятельность ведется по программам магистратуры, программам дополнительного профессионального образования и программам Летних школ. Научно-исследовательская деятельность кафедры ведется в рамках открытой в 2008 г. научной школы «Модернизация инновационной среды в целях эффективного развития российской экономики», основанной в 2008 г. профессором, д.э.н., Е.Л.Богдановой и Секции «Интеллектуальная собственность и инноватика» Дома Учёных им. М.Горького Российской Академии Наук, которая функционирует с 2011 г. С сентября 2011 г. кафедра ИСиУИ входит в проект Роспатента и ВОИС по созданию сети Центров поддержки технологий и инноваций – Technology and Innovation Support Centers, целью которых является упрощение доступа к техническим знаниям и повышение эффективности использования патентной информации в ряде стран, в региональных и областных центрах научно-технической информации. Работа кафедры по данному направлению представлена в справочнике Роспатента. В 2011 г. почетным знаком Роспатента «Во благо России» награждена заведующий кафедрой ИСиУИ Богданова Е.Л. В 2014 г. благодаря активному содействию кафедры Университет ИТМО был награжден высшей наградой Всемирной организации интеллектуальной собственности для Инновационных Предприятий (WIPO Trophy for Innovative Enterprises) в качестве признания вклада Университета в развитие инновационного и технического творчества и содействия развития и охраны интеллекту-

альной собственности мира. В 2015 г. ведущие преподаватели кафедры награждены дипломами, серебряными и золотыми орденами Салона изобретений и инновационных технологий «Архимед 2015», а в 2016 г. – серебряными и золотыми орденами Салона изобретений и инновационных технологий "Архимед 2016", Почетный знак Салона «Гранд Архимед» вручен заведующей кафедрой ИСиУИ Богдановой Е.Л.

Богданова Елена Леонардовна
Соловейчик Кирилл Александрович
Аркина Ксения Георгиевна

Оптимизация в проектном менеджменте: линейное программирование

Учебное пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49