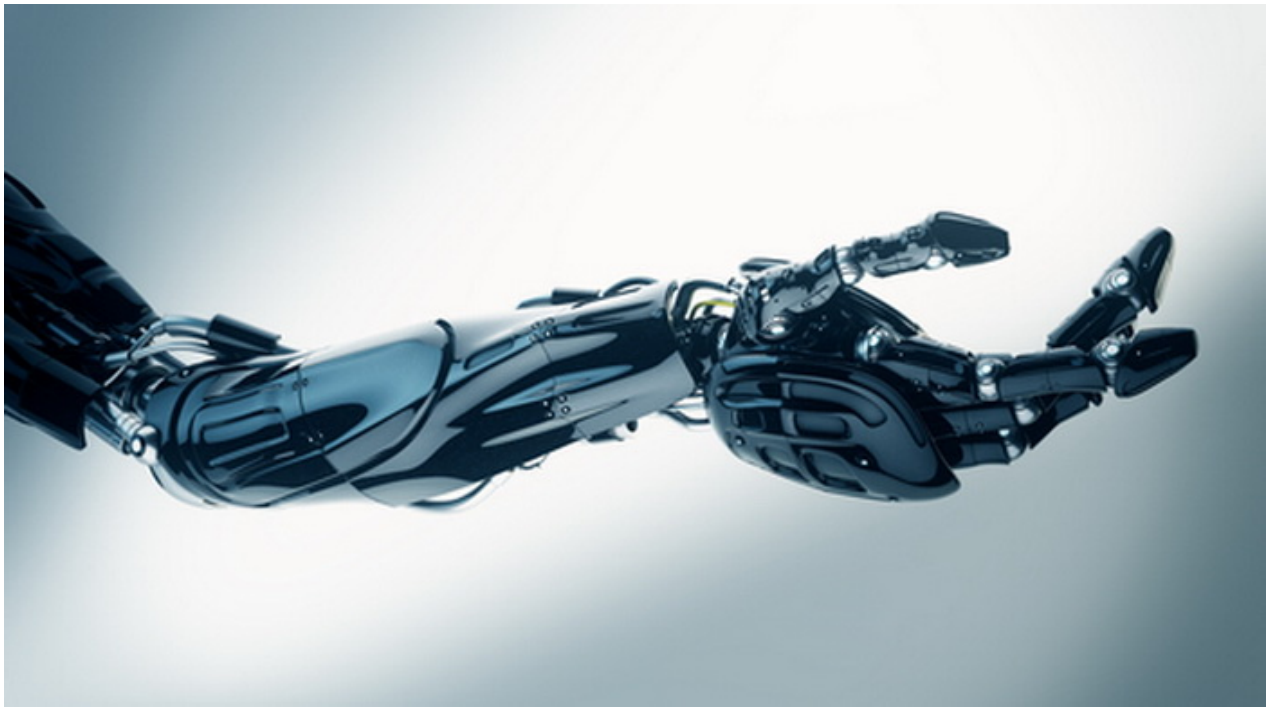
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

И.Б. Фуртат

УПРАВЛЕНИЕ С КОМПЕНСАЦИЕЙ ВОЗМУЩЕНИЙ



Санкт-Петербург
2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

И.Б. Фуртат

УПРАВЛЕНИЕ С КОМПЕНСАЦИЕЙ ВОЗМУЩЕНИЙ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО

по направлению подготовки 15.04.06 Мехатроника и робототехника

в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования магистратуры

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург
2017

И.Б. Фуртат. Управление с компенсацией возмущений. – СПб: Университет ИТМО, 2017. – 65 с.

Рецензенты:

Фрадков Александр Львович, доктор технических наук, заведующий кафедрой "Управление сложными системами" Университета ИТМО.

Соложенцев Евгений Дмитриевич, доктор технических наук, заведующий лабораторией "Интегрированные системы автоматизированного проектирования" Института проблем машиноведения РАН, профессор кафедры "Информационные технологии в экономике" Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения.

Учебное пособие посвящено разработке и исследованию современных методов компенсации неизвестных возмущений и помех измерения при управлении динамическими объектами в условиях неопределенностей. Описаны алгоритмы вспомогательного контура и метода непосредственной компенсации возмущений. Приведены примеры расчета систем управления, а также аналитические и численные исследования работоспособности полученных алгоритмов. Предложены упражнения для самостоятельного усвоения материала.

Пособие предназначено для студентов старших курсов факультета систем управления и робототехники Университета ИТМО, специализирующихся по направлению подготовки 15.04.06 Мехатроника и робототехника.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2017
© Фуртат И.Б., 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 5
Глава 1. Подавление ограниченных возмущений 6
1.1 Обзор решений 6
1.2 Постановка задачи 7
1.3 Управление структурно определенными объектами 8
1.4 Управление структурно неопределенными объектами 9
1.5 Примеры 11
1.6 Заключение 15
1.7 Приложение 15
1.8 Задания для самостоятельного решения 19
Глава 2. Компенсация возмущений 20
2.1 Обзор решений 20
2.2 Постановка задачи 21
2.3 Структура основного закона управления 22
2.4 Алгоритм компенсации возмущений 22
2.5 Пример 25
2.6 Заключение 27
2.7 Приложение 28
2.8 Задания для самостоятельного решения 32
Глава 3. Компенсация возмущений в многомерных системах при насыщении сигнала управления 33
3.1 Обзор решений 33
3.2 Постановка задачи 35
3.3 Синтез алгоритма без учета насыщения сигнала управления 35
3.4 Структура закона управления в условии насыщения входного сигнала 37
3.5 Примеры управления объектом со скалярными входом и выходом . 38
3.6 Пример управления объектом с векторным входом-выходом 40
3.7 Заключение 42
3.8 Приложение 42
3.9 Задания для самостоятельного решения 46

Глава 4. Компенсация возмущений и помех измерения 47
4.1 Обзор решений 47
4.2 Постановка задачи..... 48
4.3 Алгоритм компенсации помех измерения..... 49
4.4 Алгоритм компенсации возмущений 50
4.5 Пример..... 52
4.6 Заключение 55
4.7 Приложение 55
4.8 Задания для самостоятельного решения..... 58
Список рекомендуемой литературы..... 59

Введение

Проблема синтеза закона регулирования, позволяющего управлять неопределенными объектами, была и остается фундаментальной в теории управления. Это объясняется тем, что большинство объектов управления подвержены воздействию внутренних и внешних возмущений, которые недоступны для измерения в силу технологических особенностей или отсутствия соответствующих измерительных устройств. К тому же, параметры объекта изменяются во времени, что требует коррекции параметров управляющего устройства для сохранения качественных показателей системы, которые в такой ситуации изменяются. Поэтому актуальной задачей является разработать систему управления с фиксированными параметрами, которая не реагировала бы на внешние и внутренние неконтролируемые воздействия.

Другой проблемой является задача одновременной компенсации возмущений и помех измерения. Помехи могут быть обусловлены как влиянием внешней среды на средства измерения, так и особенностью самих измерительных устройств (абсолютная и относительная погрешности, класс точности, тип устройства и т.п.). В качестве примера можно привести управление электрическим генератором в общей энергетической сети. Возмущения связаны с изменением сопротивления линий электропередач (короткое замыкание, суточные изменение нагрузки, обледенение и т.п.), колебанием параметров сети, отклонением механической мощности, подаваемой на генератор, от номинального значения и т.д. Помехи возникают из-за погрешности измерений угла нагрузки, угловой скорости ротора и переходной ЭДС, особенно в аварийных режимах.

В данном учебном пособии рассмотрена разработка и исследование современных методов компенсации неизвестных возмущений и помех измерения при управлении динамическими объектами в условиях неопределенностей. Описаны алгоритмы вспомогательного контура и метода непосредственной компенсации возмущений. Приведены примеры расчета систем управления, а также аналитические и численные исследования работоспособности полученных алгоритмов. Предложены упражнения для самостоятельного усвоения материала.

Глава 1 написана при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-29-00142) в ИПМаш РАН. Главы 2-4 написаны при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (№ 17-08-01266).

Глава 1. Подавление ограниченных возмущений

1.1 Обзор решений

Проектирование простых схем управления в условии неопределенности и измерения только выхода объекта является актуальной задачей современной теории и практики автоматического регулирования. Для построения таких схем управления эффективными являются способы адаптивного и робастного управления, где на сегодняшний день предложено достаточно много решений. Если относительная степень объекта больше единицы, то для реализации адаптивных и робастных систем управления необходимы оценки производных входа и выхода объекта, для получения которых, как правило, используются различные динамические наблюдатели.

Для оценки вектора состояния модели объекта с известными параметрами при отсутствии внешнего возмущения широко используется наблюдатель Люенбергера [1]. В [2] предложен фильтр Калмана оценивающий вектор состояния динамической системы при использовании ряда неполных и зашумленных измерений. В условиях параметрической неопределенности модели объекта и наличия внешних возмущений в [3] был предложен робастный наблюдатель с большим коэффициентом усиления (high-gain observer). Другой вид наблюдателя с большим коэффициентом усиления позже был рассмотрен в [4]. В [5, 6] предложен робастный наблюдатель на скользящем режиме (sliding-mode observer). В [7] разработан нелинейный наблюдатель расширенного состояния (nonlinear extended state observer) основанный на обобщении наблюдателя с большим коэффициентом усиления и наблюдателя на скользящем режиме. В [8] представлен обзор наблюдателей [1, 3, 5-7], примеры расчета и реализации для динамической системы второго порядка, а также приведен сравнительный анализ для каждого наблюдателя при различных видах неопределенностей (параметрическая неопределенность, внешние возмущения и шумы).

Робастные наблюдатели [1, 3-7] нашли широкое применение при синтезе систем управления в условиях неопределенности. Например, в [9] строится закон управления с оценкой производных выхода объекта, которые реализуются с помощью динамического наблюдателя на скользящем режиме [5, 6], где порядок наблюдателя равен размерности вектора состояния модели объекта. В [10] для синтеза системы стабилизации нелинейных динамических объектов используется закон управления, зависящий от оценок производных выхода объекта, которые получены с помощью динамического наблюдателя с большим

коэффициентом усиления [3] и порядком, равным размерности вектора состояния модели. В [4] синтезируется робастный закон управления по ошибке слежения, где для оценки производных сигнала ошибки слежения используется наблюдатель с динамическим порядком, равным $\gamma - 1$, где $\gamma -$ относительная степень объекта управления. В [11] синтезирована робастная система управления с компенсацией внутренних и внешних возмущений с использованием вспомогательного контура. Для оценки производных сигнала, несущего в себе информацию о возмущениях объекта, в [11] используется динамический наблюдатель [3], порядок которого равен $\gamma - 1$.

Анализ работ [3-11] показал, что разработчики стремятся получить как простые в расчете регуляторы, так и регуляторы с невысоким динамическим порядком. Причем при управлении объектами с $\gamma > 1$ еще не получены регуляторы, у которых динамический порядок был бы меньше $\gamma - 1$. Данная глава посвящена построению простого регулятора, не содержащего динамических составляющих.

В пособии рассматривается построение робастной системы управления по выходу линейными динамическими объектами в условиях параметрической и структурной неопределенности и действия внешних ограниченных возмущений. Для оценки производных в системе управления используется наблюдатель, основанный на левых разностях. Такой подход позволяет исключить использование интегрирующих звеньев в наблюдателе, что делает его статическим. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие работоспособность алгоритма.

1.2 Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, динамические процессы в котором описываются уравнением

$$Q(p)y(t) = kR(p)u(t) + f(t), \quad p^i y(0) = y_{0i}, \quad i = 0, 1, ..., n-1, \tag{1.1}$$

где $y(t) \in R$ – регулируемая переменная, $u(t) \in R$ – сигнал управления, $f(t) \in R$ – внешнее неконтролируемое ограниченное возмущение, $Q(p)$, $R(p)$ – линейные дифференциальные операторы с неизвестными коэффициентами, $\deg Q(p) = n$, $\deg R(p) = m$, $k > 0$, $p = d / dt$ – оператор дифференцирования, y_{0i} – неизвестные начальные условия.

При решении задачи на объект управления наложены следующие ограничения.

Предположения А.

А1. *Неизвестные коэффициенты операторов $Q(p)$, $R(p)$ и число $k > 0$ принадлежат известному ограниченному множеству возможных значений Ξ.*

А2. *Многочлен $R(\lambda)$ гурвицев, где λ – комплексная переменная.*

А3. *В объекте управления доступны измерению сигналы* $u(t)$ *и* $y(t)$, *но не их производные*.

Требуется спроектировать непрерывную систему управления, обеспечивающую слежение выхода объекта $y(t)$ за эталонным сигналом $y_m(t)$ так, чтобы было выполнено целевое условие

$$|y(t) - y_m(t)| < \delta \text{ при } t > T, \tag{1.2}$$

где $y_m(t)$ – гладкая функция, ограниченная вместе со своими производными, $\delta > 0$, $T > 0$ – время переходного процесса.

1.3 Управление структурно определенными объектами

Сначала рассмотрим случай, когда порядки операторов $Q(p)$, $R(p)$ известны. Принимая во внимание уравнения (1.1) и (1.2), сформируем ошибку слежения $e(t) = y(t) - y_m(t)$ в виде

$$Q(p)e(t) = kR(p)u(t) + f(t) - Q(p)y_m(t). \tag{1.3}$$

Из постановки задачи производные $y(t)$ и $u(t)$ не доступны измерению (предположение А3), тогда зададим закон управления в форме

$$u(t) = -\alpha \sum_{i=0}^{\gamma} d_i \bar{e}^{(i)}(t), \tag{1.4}$$

где $\alpha > 0$ – параметр, выбираемый разработчиком, коэффициенты $d_0, d_1, \ldots, d_\gamma$ выбираются так, чтобы полином $D(\lambda) = d_\gamma \lambda^\gamma + d_{\gamma-1}\lambda^{\gamma-1} + \ldots + d_1\lambda + d_0$ был гурвицев, $\gamma = n - m$ – относительная степень объекта управления, $\bar{e}^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, \ldots, \gamma$ – оценка i-й производной сигнала $e(t)$. Следует отметить, что закон управления вида (1.4) использовался, например, в [4, 10]. Последующий синтез системы управления в [4, 10] осуществлялся с помощью динамических наблюдателей производных. В данной главе для дальнейшего синтеза системы управления будет использоваться алгоритм с использованием нединамического наблюдателя.

Подставим (1.4) в (1.3) и перепишем (1.3) в виде

$$F(p)e(t) = \psi(t), \tag{1.5}$$

где $F(p) = Q(p) + \alpha k R(p) D(p)$, $\psi(t) = f(t) - Q(p)y_m(t) + \alpha k R(p)\left(D(p)e(t) - \sum_{i=0}^{\gamma} d_i \bar{e}^{(i)}(t)\right)$. Поскольку известно множество Ξ (предположение А1), то всегда существуют число α и полином $D(\lambda)$ такие, что полином $F(\lambda)$ будет гурвицевым.

Для реализации закона управления (4) воспользуемся выражениями

$$\begin{gathered} \bar{e}(t) = e(t), \bar{e}^{(1)}(t) = \frac{\bar{e}(t) - \bar{e}(t-h)}{h}, \\ \bar{e}^{(2)}(t) = \frac{\bar{e}^{(1)}(t) - \bar{e}^{(1)}(t-h)}{h}, \ldots, \bar{e}^{(\gamma)}(t) = \frac{\bar{e}^{(\gamma-1)}(t) - \bar{e}^{(\gamma-1)}(t-h)}{h}. \end{gathered} \tag{6}$$

Очевидно, что с помощью уравнений (1.6) можно оценить производные сигнала $e(t)$ с использованием левых разностей. Подставив (1.6) в (1.4), получим систему управления, представленную уравнением

$$u(t) = -\alpha \sum_{i=0}^{\gamma} \left[\frac{d_i}{h^i} \sum_{j=0}^{i} (-1)^j C_i^j e(t - jh) \right]. \qquad (1.7)$$

Из уравнения (1.7) видно, что в отличие от [1-11] регулятор (1.7) не содержит динамических составляющих.

Перепишем функцию $\psi(t)$ в виде суммы $\psi(t)=\alpha k R(p) g(t)+\varphi(t)$, где $\varphi(t) = f(t) - Q(p)y_m(t)$, $g(t) = D(p)e(t) - \sum_{i=0}^{\gamma} d_i \bar{e}^{(i)}(t)$. Тогда уравнение (1.5) можно представить в виде

$$\dot{\varepsilon}(t) = A\varepsilon(t) + \alpha k B_1 g(t) + B_2 \varphi(t), \quad e(t) = L\varepsilon(t), \qquad (1.8)$$

где A, B_1, B_2 и L – матрицы, полученные при переходе от (1.5) к (1.8). Сформулируем утверждение, при выполнении условий которого закон управления (1.7) обеспечивает выполнение цели управления (1.2).

Утверждение 1.1. Пусть выполнены условия предположений А. *Существуют числа* $\alpha > 0$ *и* $h > 0$ *такие, что* $W > 0$ *и* $w_{ij} > 0$, *где* $W = Q - 2\alpha\bar{k}PB_2\underline{\rho}^{\mathrm{T}} + 2\alpha\bar{k}PB_1L\sum_{i=0}^{\gamma}\frac{d_i}{h^i} - \alpha\bar{k}\gamma(\gamma+1)\chi PB_1B_1^{\mathrm{T}}P - \frac{2\chi}{h}PB_2B_2^{\mathrm{T}}P - 0{,}5\gamma(\gamma+1)lL^{\mathrm{T}}L,$

$w_{ij} = l - 2\alpha\bar{k}\chi^{-1}\left(\frac{d_i}{h^i}C_i^j\right)^2 > 0,\ i = 1, ..., \gamma,\ j = 1, ..., i,$ $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ – *решение уравнения* $A^{\mathrm{T}}P + PA = -Q$, $Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$, $\bar{k} \geq k$, $\underline{\rho}$ – *вектор, составленный из коэффициентов многочлена* $\underline{R}(\lambda)D(\lambda)$, $\underline{R}(\lambda)$ – *многочлен с наименьшими коэффициентами полинома* $R(\lambda)$, $l > 0$, $\chi > 0$ – *достаточно малое число. Тогда система управления, представленная законом управления* (1.7), *обеспечивает выполнение целевого условия* (1.2) *и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.*

1.4 Управление структурно неопределенными объектами

Теперь рассмотрим случай, когда порядки операторов $Q(p)$ и $R(p)$ неизвестны. Для решения задачи на объект управления (1.1) дополнительно к предположениям А наложим следующее ограничение.

Предположение В. *Известна верхняя оценка* $\bar{\gamma}$ *относительной степени* γ, *т.е.* $\bar{\gamma} \geq \gamma$.

Цель управления состоит в выполнении условия (1.2).

Принимая во внимание уравнения (1.1) и (1.2), сформируем ошибку слежения $e(t) = y(t) - y_m(t)$ в виде (1.3). Зададим закон управления

$$u(t) = -\alpha \sum_{i=0}^{\bar{\gamma}} d_i \bar{e}^{(i)}(t), \qquad (1.9)$$

где коэффициенты $d_0, d_1, \ldots, d_{\bar{\gamma}}$ выбираются так, чтобы полином $D(\lambda) = d_{\bar{\gamma}}\lambda^{\bar{\gamma}} + d_{\bar{\gamma}-1}\lambda^{\bar{\gamma}-1} + \ldots + d_1\lambda + d_0$ был гурвицев. Подставив (1.9) в (1.3), получим уравнение вида (1.5). Очевидно, что всегда существует α и $D(\lambda)$ такие, что $F(\lambda)$ будет гурвицевым.

Для оценки производных сигнала $e(t)$ воспользуемся следующими уравнениями:

$$\begin{gathered}\bar{e}(t) = e(t), \bar{e}^{(1)}(t) = \frac{\bar{e}(t) - \bar{e}(t - k_1 h)}{k_1 h}, \\ \bar{e}^{(2)}(t) = \frac{\bar{e}^{(1)}(t) - \bar{e}^{(1)}(t - k_2 h)}{k_2 h}, \ldots, \bar{e}^{(\bar{\gamma})}(t) = \frac{\bar{e}^{(\bar{\gamma}-1)}(t) - \bar{e}^{(\bar{\gamma}-1)}(t - k_{\bar{\gamma}} h)}{k_{\bar{\gamma}} h}.\end{gathered} \tag{1.10}$$

Здесь $\bar{e}^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, \ldots, \bar{\gamma}$ – оценка i-й производной сигнала $e(t)$, $k_1 > k_2 > \ldots > k_{\bar{\gamma}} > 0$. Уменьшение запаздывания в каждом последующем уравнении (9) необходимо для увеличения точности оценки каждой последующей производной.

Введем множество $\Theta = \{1, \ldots, \bar{\gamma}\}$. Подставив (10) в (4), получим

$$\begin{aligned} u = -\alpha \Bigg[& d_0 e + d_1 \frac{e - e(t - k_1 h)}{k_1 h} + \ldots \\ & \ldots + d_{\bar{\gamma}} \frac{e - \sum\limits_{i_1 \in \Theta} e(t - k_{i_1} h) + \ldots + \frac{(-1)^{\bar{\gamma}}}{\bar{\gamma}!} \sum\limits_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_{\bar{\gamma}} \in \Theta, \\ i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_{\bar{\gamma}}}} e\left(t - h\left(k_{i_1} + k_{i_2} + \ldots + k_{i_{\bar{\gamma}}}\right)\right)}{h^{\bar{\gamma}} \prod\limits_{i=1}^{\bar{\gamma}} k_i} \Bigg]. \end{aligned} \tag{1.11}$$

В результате уравнение замкнутой системы будет представлено выражением (8), где матрицы A, B_1, B_2 и L получены при переходе от (5) к (8) с учетом того, что $D(\lambda) = d_{\bar{\gamma}}\lambda^{\bar{\gamma}} + d_{\bar{\gamma}-1}\lambda^{\bar{\gamma}-1} + \ldots + d_1\lambda + d_0$.

Утверждение 1.2. Пусть выполнены условия предположений А *и* В. *Существуют числа* $\alpha > 0$ *и* $h > 0$ *такие, что выполнены неравенства*

$$Q - 2\alpha\bar{k}PB_2\underline{\rho}^{\mathrm{T}} + 2\alpha\bar{k}PB_1L\left(d_0 + \sum_{i=1}^{\bar{\gamma}} \frac{d_i}{h^i \prod\limits_{j=1}^{i} k_j}\right) - 2\alpha\bar{k}\chi PB_1B_1^{\mathrm{T}}P - \frac{2\chi}{h}PB_2B_2^{\mathrm{T}}P - 0{,}5lL^{\mathrm{T}}L > 0,$$

$$l - 2\alpha\bar{k}\chi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\bar{\gamma}} \frac{d_i}{h^i \prod\limits_{j=1}^{i} k_j}\right)^2 > 0.$$

Тогда закон управления (1.11) *обеспечивает выполнение целевого условия* (1.2) *и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.*

Замечание 1.1. Синтез алгоритмов (1.7) и (1.11) осуществлялся при отсутствии помех на выходе объекта управления и помех в регуляторе. Влияние помех на оценку производных и качество регулирования в предложенном алгоритме подобно влиянию при использовании наблюдателя с большим коэффициентом усиления [8], так как наблюдатели (1.6) и (1.10) имеют малый параметр в знаменателе.

Проиллюстрируем полученные результаты на следующих примерах.

1.5 Примеры

1. Рассмотрим линеаризованную модель бокового движения самолета в режиме захода на посадку

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 85 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}12 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \rho\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \varphi\end{bmatrix}u(t),\quad y(t)=[1\quad 0\quad 0\quad 0]x(t), \tag{1.12}$$

где $x(t) = [\Delta z(t), \Delta\psi(t), \Delta\gamma(t), \Delta\omega_x(t)]^{\mathrm{T}}$ и $u(t) = \delta_Э(t)$ – вектор состояния и сигнал управления линеаризованной математической модели движения самолета без учета скольжения, $\Delta z(t)$ – величина бокового отклонения центра масс самолета от продольной оси взлетно-посадочной полосы, $\Delta\psi(t)$ – угол между продольной осью взлетно-посадочной полосы и горизонтальной проекцией вектора скорости самолета, $\Delta\gamma(t)$ – изменение угла крена самолета, $\Delta\omega_x(t)$ – изменение угловой скорости вращения самолета относительно его продольной оси, $\delta_Э(t)$ – отклонение элеронов от балансировочного положения. Модель (12) при скорости самолета 85 м/с, $\rho = -2$ и $\varphi = 3{,}4$ приведена в [12, 13]. Как и в работе [13, стр. 648] при синтезе системы управления для модели (1.12) множество Ξ определим неравенствами: $-6 \le \rho \le 2$; $1{,}7 \le \varphi \le 3{,}4$.

Зададим $d_0 = 1$, $d_1 = 4$, $d_2 = 6$, $d_3 = 4$, $d_4 = 0{,}1$. Тогда закон управления (7) будет определен выражением

$$\begin{aligned}u(t) &= -\alpha\Bigg(e(t)+4\frac{e(t)-e(t-h)}{0{,}01}+6\frac{e(t)-2e(t-h)+e(t-2h)}{0{,}01^2}+\\ &+4\frac{e(t)-3e(t-h)+3e(t-2h)-e(t-3h)}{0{,}01^3}+\\ &+0{,}1\frac{e(t)-4e(t-h)+6e(t-2h)-4e(t-3h)+e(t-4h)}{0{,}01^4}\Bigg)=\\ &=-10^6\alpha\big(14{,}060401e(t)-52{,}1204e(t-h)+72{,}06e(t-2h)-\\ &-44e(t-3h)+10e(t-4h)\big).\end{aligned} \tag{1.13}$$

На рис. 1.1 приведен график эталонного сигнала $y_m(t)$. Данная функция сгенерирована с помощью модели (1.12) при условии, что

параметры в (1.12) известны, $\rho = -2$, $\varphi = 3{,}4$, $x(0) = [400, 0, 0, 0]^{\mathrm{T}}$, доступен измерению вектор состояния $x(t)$ и на вход (1.12) подан оптимальный закон управления, который минимизирует функционал $0{,}5\int_0^{\infty}\left(x^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{diag}\{6{,}26\cdot 10^{-6}, 2, 2, 31\}x(t) + 93u^2(t)\right)dt$, $y_m(t) = [1\ 0\ 0\ 0]x(t)$, см. [13].

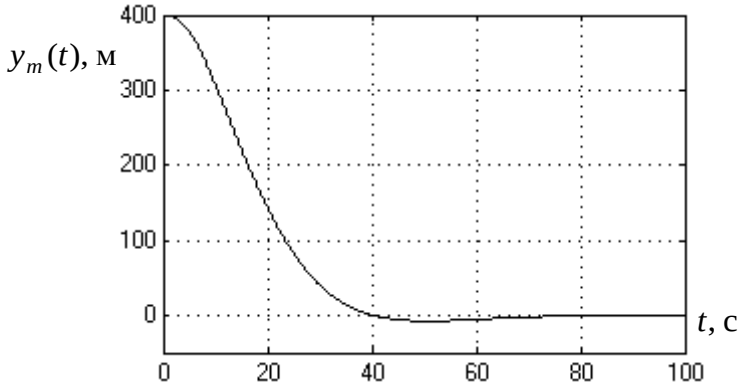


Рис. 1.1. Переходной процесс $y_m(t)$

Зададим в (1.12) $\rho = -6$, $\varphi = 1{,}7$ (по отношению к эталонной модели эффективность элеронов уменьшена вдвое) и $x(0)=[400, 0, 0, 0]^{\mathrm{T}}$. На рис. 1.2 приведены результаты моделирования по ошибке $e(t) = y(t) - y_m(t)$ при $\alpha = 0{,}003$ и $h = 0{,}01$ с; на рис. 1.3 – при $\alpha = 0{,}03$ и $h = 0{,}01$ с.

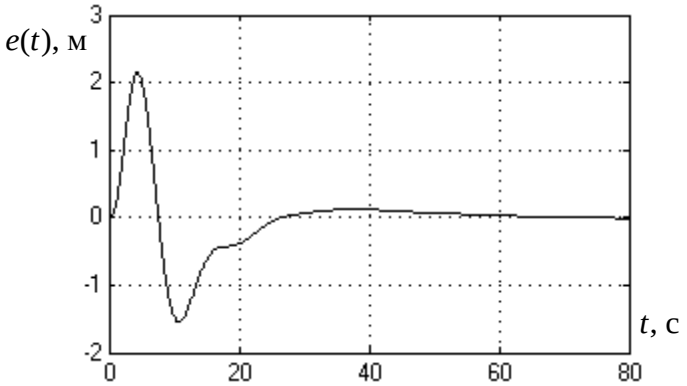


Рис. 1.2. Переходной процесс $e(t)$

Результаты моделирования показали, что переходные процессы в системе управления несущественно зависят от параметров модели объекта. Графики переходных процессов в основном зависят от выбора коэффициентов $d_0, d_1, \ldots, d_4$ и α, а также величины параметра h,

определяющего точность оценки производных сигнала $e(t)$. Так, на рис. 1.2 при $\alpha = 0{,}003$ и $h = 0{,}01$ с $|e(t)| < 0{,}001$ м при $t > 75$ с. На рис. 1.3 при $\alpha = 0{,}03$ и $h = 0{,}01$ с $|e(t)| < 3\cdot 10^{-4}$ м при $t > 65$ с. График ошибки $e(t)$ с параметрами в (1.13) $\alpha = 0{,}03$ и $h = 0{,}001$ с незначительно отличается от графика, представленного на рис. 1.3, где только $|e(t)| < 10^{-4}$ м при $t > 60$ с.

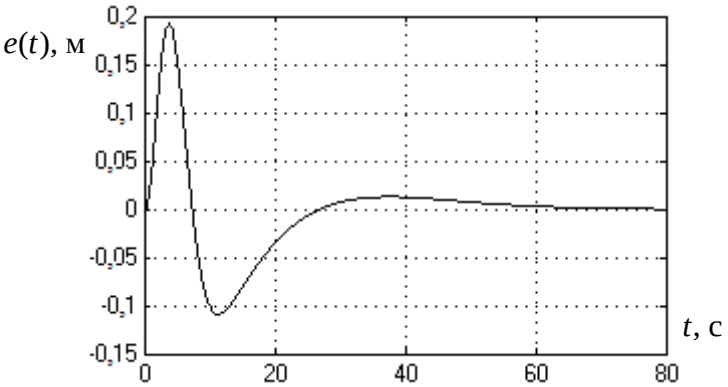


Рис. 1.3. Переходной процесс $e(t)$

2. Рассмотрим объект управления, модель которого описывается уравнением

$$\left(q_3 p^3 + q_2 p^2 + q_1 p + q_0\right) y(t) = \left(r_1 p + r_0\right) u(t) + f(t).$$

Класс неопределенности Ξ для модели (14) задан неравенствами: $0 \le q_3 \le 5$, $|q_i| \le 5$, $i = 0, 1, 2$, при $q_3 = 0$ $q_2 > 0$, $0 \le r_1 \le 1$, $2 \le r_0 \le 2{,}9$, $|f(t)| \le 10$. Из анализа множества Ξ очевидно, что относительная степень модели (1.14) может принимать значения 1, 2 и 3. Поэтому для синтеза системы управления примем $\bar{\gamma} = 3$.

Эталонный сигнал $y_m(t)$ определим выражением $y_m(t) = 1 + \sin t + \cos 2t$.

Зададим в (1.11) $h = 0{,}01$, $k_1 = 1$, $k_2 = 0{,}1$, $k_3 = 0{,}01$, $d_0 = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 0{,}04$, $d_3 = 0{,}00005$ и $\alpha = 100$. Тогда закон управления (1.11) определится в виде

$$\begin{aligned} u(t) = -100\Big[&e(t) + 10^2\left(e(t) - e(t-0{,}01)\right) + \\ &+ 4000\left(e(t) - e(t-0{,}01) - e(t-0{,}001) + e(t-0{,}011)\right) + \\ &+ 5\cdot 10^4\left(e(t) - e(t-0{,}01) - e(t-0{,}001) - e(t-0{,}0001) + e(t-0{,}011) + \right. \\ &\left. + e(t-0{,}0101) + e(t-0{,}0011) + e(t-0{,}0111)\right)\Big]. \end{aligned}$$

На рис. 1.4 приведены результаты моделирования $e(t)$, когда $q_3 = 1$, $q_2 = -5$, $q_1 = -5$, $q_0 = -5$, $r_1 = 0$, $r_0 = 2$, $f(t) = 1 + 9\sin 1{,}2t$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $\ddot{y}(0) = 1$. На рис. 1.5 приведен график $e(t)$ при тех же параметрах в (14), где только $r_1 = 1$, $r_0 = 2$. На рис. 1.6 приведен переходной процесс $e(t)$, когда в (1.14) $q_3 = 0$, $q_2 = 1$, $q_1 = -5$, $q_0 = -5$, $r_1 = 0$, $r_0 = 2$, $f(t) = 7\sin t + 8\cos 3t$,

$y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$ и на выходе объекта управления действует аддитивная помеха $0{,}1\sin 1{,}7t + 0{,}2\cos 0{,}9t$.

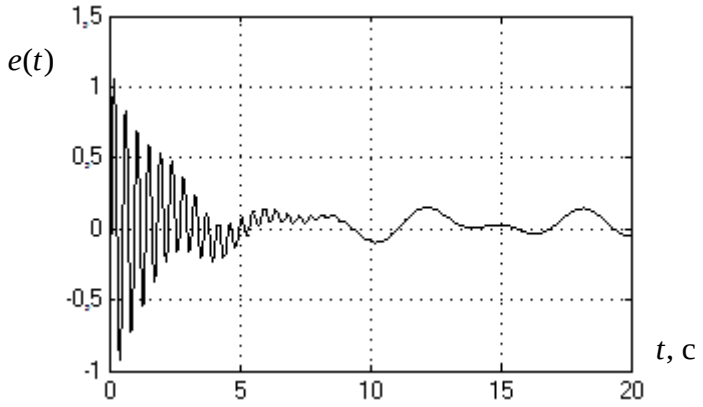


Рис. 1.4. Переходной процесс $e(t)$

Отметим, что на рис. 1.4 приведены результаты моделирования, когда порядок модели и ее относительная степень равны 3; на рис. 1.5 – когда порядок модели равен 3, а ее относительная степень равна 2; на рис. 1.6 – когда порядок модели и ее относительная степень равны 2. Анализ графиков моделирования для случая с помехой показал, что величина ошибки слежения не превосходит суммы величины δ, которая получена при отсутствии помехи, и самой помехи. Следовательно, чем меньше уровень помехи, тем меньше величина ошибки слежения.

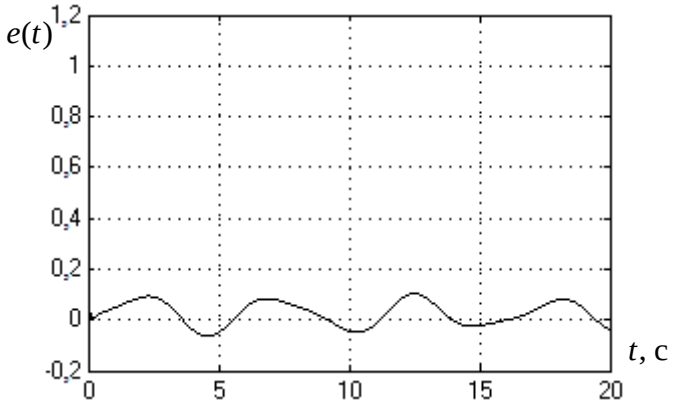


Рис. 1.5. Переходной процесс $e(t)$

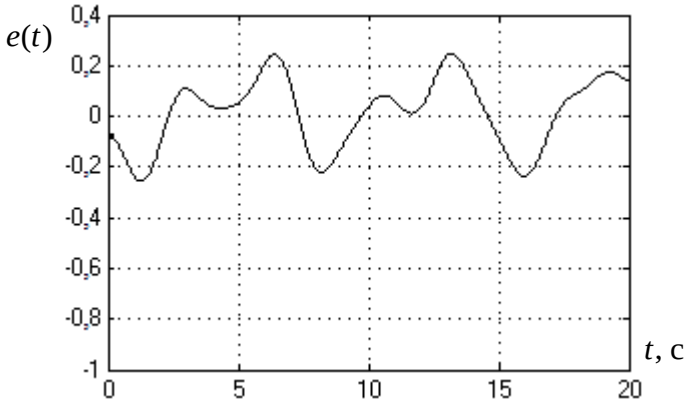


Рис. 1.6. Переходной процесс $e(t)$

1.6 Заключение

В главе 1 предложено решение задачи робастного управления линейными динамическими объектами в условиях параметрической и структурной неопределенности, а также внешних неконтролируемых ограниченных возмущений. В отличие от [1-11] в данной главе для оценки производных использовался наблюдатель, приближенное дифференцирование в котором осуществлялось с помощью левых разностей, что позволило сформировать систему управления, не содержащую динамических составляющих. Полученный алгоритм компенсирует неопределенности и возмущения с заданной точностью, зависящей от выбора коэффициентов полинома $D(\lambda)$ и коэффициента α, а также величины параметра h, определяющего точность оценки производных сигнала $e(t)$. Так как предлагаемый алгоритм управления использует звенья с запаздыванием, то их практическая реализация может быть осуществлена, например, на базе ЭВМ с использованием специального программного обеспечения, например MatLab.

1.7 Приложение

Доказательство утверждения 1.1. Для доказательства утверждения 1 воспользуемся вспомогательной леммой.

Лемма. *Рассмотрим динамическую систему*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t) + g\big(x(t), x(t-\tau_1), ..., x(t-\tau_n), \mu\big), \tag{1.14}$$

где $x(t) \in R^n$, $A \in R^{n\times n}$ *– гурвицева матрица,* $f(t) \in R^n$ *– ограниченная функция,* $\tau_i > 0$ *– время запаздывания,* $i = 1, \ldots, n$, $g(x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_n), \mu) \in R^n$ *– непрерывная функция по совокупности аргументов за исключением, может быть, случая, когда* $\mu = 0$, *причем* $g(x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_n), \mu) \to 0$

при $\mu \to 0$ *и* $g(0, \ldots, 0, \mu) = 0$. *Дополнительно функция* $g(\cdot)$ *удовлетворят условию Липшица*

$$\begin{aligned}&\left|g\left(x_1(t), x_1(t-\tau_1), ..., x_1(t-\tau_n), \mu\right) - g\left(x_2(t), x_2(t-\tau_1), ..., x_2(t-\tau_n), \mu\right)\right| \le \\ &\le L_0(\mu)\left|x_1(t) - x_2(t)\right| + L_1(\mu)\left|x_1(t-\tau_1) - x_2(t-\tau_1)\right| + ... + L_n(\mu)\left|x_1(t-\tau_n) - x_2(t-\tau_n)\right|,\end{aligned} \tag{1.15}$$

где $L_0(\mu) > 0$, $L_1(\mu) > 0$, …, $L_n(\mu) > 0$ – *липшицевы константы, причем* $\lim\limits_{\mu \to 0} L_i(\mu) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Пусть $\bar{x}(t)$ – *решение уравнения*

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + f(t), \tag{1.16}$$

где $\left|\bar{x}(t)\right| < b < \infty$. *Тогда существует* $\mu_0 > 0$ *такое, что при* $\mu \le \mu_0$ *имеем* $W_0 > 0$, $W_i > 0$ (*где* $W_0 = Q - 2\|G\| I \sum\limits_{i=0}^{n} L_i(\mu) - 2\chi G^{\mathrm{T}} G - \sum\limits_{i=1}^{n} H_i$, $W_i = H_i - 2I\|G\| L_i(\mu)$, I – *единичная матрица соответствующего порядка,* $G = G^{\mathrm{T}} > 0$ *является решением матричного уравнения* $A^{\mathrm{T}}G + GA = -Q$, $Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$, $\chi > 0$ – *достаточно малое число,* $H_i = H_i^{\mathrm{T}} > 0$ – *матрица с достаточно малыми элементами*) *и решение* $x(t, \mu)$ *исходной системы* (1.14) *удовлетворяет условию* $|x(t, \mu)| < b$. *Причем имеет место равномерный относительно* t *предельный переход*

$$\lim_{\mu \to 0} x(t, \mu) = \bar{x}(t). \tag{1.17}$$

Доказательство леммы. Введем новую функцию $\Delta(t) = x(t) - \bar{x}(t)$, характеризующую ошибку между решениями уравнений (1.14) и (1.16). Продифференцировав $\Delta(t)$ по времени вдоль траекторий решений (1.14) и (1.16), получим

$$\dot{\Delta}(t) = A\Delta(t) + g\left(\Delta(t) + \bar{x}(t), \Delta(t-\tau_1) + \bar{x}(t-\tau_1), ..., \Delta(t-\tau_n) + \bar{x}(t-\tau_n), \mu\right). \tag{1.18}$$

Сформируем функционал Ляпунова-Красовского в виде

$$V = \Delta^{\mathrm{T}}(t) G \Delta(t) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-\tau_i}^{0} \Delta^{\mathrm{T}}(t+s) H_i \Delta(t+s) ds, \tag{1.19}$$

где $G = G^{\mathrm{T}} > 0$ является решением матричного уравнения $A^{\mathrm{T}}G + GA = -Q$, $Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$, $H_i = H_i^{\mathrm{T}} > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Взяв полную производную по времени от (1.19) вдоль траекторий (1.18), получим

$$\begin{aligned}&\dot{V} = -\Delta^{\mathrm{T}}(t) Q \Delta(t) + \\ &+ 2\Delta^{\mathrm{T}}(t) G g\left(\Delta(t) + \bar{x}(t), \Delta(t-\tau_1) + \bar{x}(t-\tau_1), ..., \Delta(t-\tau_n) + \bar{x}(t-\tau_n), \mu\right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta^{\mathrm{T}}(t) H_i \Delta(t) - \Delta^{\mathrm{T}}(t-\tau_i) H_i \Delta(t-\tau_i)\right).\end{aligned} \tag{1.20}$$

Добавим и вычтем в (1.20) $2\Delta^{\mathrm{T}}(t) G g\left(\bar{x}(t), \bar{x}(t-\tau_1), ..., \bar{x}(t-\tau_n), \mu\right)$. Тогда с учетом условия (1.15) оценим (1.20) в виде

$$\dot{V} \le -\Delta^{\mathrm{T}}(t)Q\Delta(t) + 2\Delta^{\mathrm{T}}(t)Gg\left(\bar{x}(t), \bar{x}(t-\tau_1), ..., \bar{x}(t-\tau_n), \mu\right) +$$
$$+ 2L_0(\mu)\|G\|\left|\Delta(t)\right|^2 + 2L_1(\mu)\|G\|\left|\Delta(t)\right|\left|\Delta(t-\tau_1)\right| + ... + 2L_n(\mu)\|G\|\left|\Delta(t)\right|\left|\Delta(t-\tau_n)\right| + \quad (1.21)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n}\left(\Delta^{\mathrm{T}}(t)H_i\Delta(t) - \Delta^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)H_i\Delta(t-\tau_i)\right).$$

Оценим слагаемые в (1.21) в виде

$$\begin{aligned}
&2L_i(\mu)\|G\|\left|\Delta(t)\right|\left|\Delta(t-\tau_i)\right| \le 2L_i(\mu)\|G\|\left(\left|\Delta(t)\right|^2 + \left|\Delta(t-\tau_i)\right|^2\right), \quad i = 1, ..., n;\\
&2\Delta^{\mathrm{T}}(t)Gg\left(\bar{x}(t), \bar{x}(t-\tau_1), ..., \bar{x}(t-\tau_n), \mu\right) \le\\
&\le 2\chi\Delta^{\mathrm{T}}(t)GG^{\mathrm{T}}\Delta(t) + 2\chi^{-1}\left|g\left(\bar{x}(t), \bar{x}(t-\tau_1), ..., \bar{x}(t-\tau_n), \mu\right)\right|^2 \le\\
&\le 2\chi\Delta^{\mathrm{T}}(t)GG^{\mathrm{T}}\Delta(t) + \chi^{-1}\sigma(\mu),
\end{aligned} \quad (1.22)$$

где $\sigma(\mu) = 2\sup_t\left|g\left(\bar{x}(t), \bar{x}(t-\tau_1), ..., \bar{x}(t-\tau_n), \mu\right)\right|^2$ (функция $g\left(\bar{x}(t), \bar{x}(t-\tau_1), ..., \bar{x}(t-\tau_n), \mu\right)$ ограниченна в силу ограниченности $\bar{x}(t)$ по условию леммы). Так как по условию леммы функция $g(\cdot)$ равномерно сходится к нулю по $x(t)$, $x(t-\tau_1)$, …, $x(t-\tau_n)$ при $\mu\to 0$, то $\sigma(\mu)\to 0$ при $\mu\to 0$. С учетом оценок (1.22) перепишем (1.21) в виде

$$\begin{aligned}
&\dot{V} \le -\Delta^{\mathrm{T}}(t)\left(Q - 2\|G\|I\sum_{i=0}^{n}L_i(\mu) - 2\chi G^{\mathrm{T}}G - \sum_{i=1}^{n}H_i\right)\Delta(t) -\\
&- \sum_{i=1}^{n}\Delta^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)\left(H_i - 2I\|G\|L_i(\mu)\right)\Delta(t-\tau_i) + \chi^{-1}\sigma(\mu).
\end{aligned} \quad (1.23)$$

Очевидно, что существует μ_0 такое, что при $\mu \le \mu_0$ $W_0 > 0$ и $W_i > 0$. Тогда при $\mu \le \mu_0$ начиная с некоторого момента времени будет выполнена оценка $\left|\Delta(t)\right| \le \sqrt{\dfrac{\sigma(\mu)}{\chi\lambda_{\min}(W_0)}}$, где $\lambda_{\min}(\cdot)$ – наименьшая действительная часть собственных чисел соответствующей матрицы. Из последнего неравенства очевидно, что начиная с некоторого момента времени $\Delta(t)\to 0$ при $\mu\to 0$. Причем $\Delta(t)$ стремится к нулю равномерно по t, т.е. следует (1.17). Лемма доказана.

Замечание 1.2. *Лемма справедлива, если в* (1.14) $g = g\left(x(t), \mu\right)$.

Замечание 1.3. *Лемма справедлива, если в* (1.14) $\tau_i\to 0$ *при* $\mu\to 0$.

Рассмотрим уравнение (1.8). Из постановки задачи $f(t)$ – ограниченная функция, $y_m(t)$ – гладкая ограниченная функция вместе со своими производными, следовательно, функция $\varphi(t)$ ограниченная. Так как $e(t)$ – непрерывная функция, то согласно (1.6) $\bar{e}^{(1)}(t) \to pe(t)$, $\bar{e}^{(2)}(t) \to p^2e(t)$, … , $\bar{e}^{(\gamma)}(t) \to p^{\gamma}e(t)$ при $h\to 0$. Значит, $g(t)\to 0$ при $h\to 0$. Поскольку матрица A гурвицева, то для уравнения (1.8) будут выполнены условия леммы, а, значит, все переменные в системе (1.8) будут ограниченными.

Покажем теперь, что существует такое $h > 0$, при котором алгоритм (1.7) будет обеспечивать выполнение условия (1.2). Принимая во внимание

закон управления (1.7) и структуру функции $g(t)$, перепишем первое уравнение (1.8) в виде

$$\dot{\varepsilon}(t) = A\varepsilon(t) + \alpha k B_2 \rho^{\mathrm{T}} \varepsilon(t) - \\ - \alpha k B_1 \left[\sum_{i=0}^{\gamma} \frac{d_i}{h^i} L\varepsilon(t) + \sum_{i=1}^{\gamma} \frac{d_i}{h^i} \sum_{j=1}^{i} (-1)^j C_i^j e(t - jh) \right] + B_2 \varphi(t). \tag{1.24}$$

Для этого рассмотрим функционал Ляпунова-Красовского в виде

$$V = \varepsilon^{\mathrm{T}}(t) P \varepsilon(t) + \sum_{i=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^{i} \int_{-jh}^{0} l e^2(t+s) ds. \tag{1.25}$$

Возьмем от функционала (1.25) производную по времени вдоль траекторий системы (24):

$$\dot{V} = -\varepsilon^{\mathrm{T}}(t) Q \varepsilon(t) + 2\alpha k \varepsilon^{\mathrm{T}}(t) P B_2 \rho^{\mathrm{T}} \varepsilon(t) - \\ - 2\alpha k \varepsilon^{\mathrm{T}}(t) P B_1 \left[\sum_{i=0}^{\gamma} \frac{d_i}{h^i} L\varepsilon(t) + \sum_{i=1}^{\gamma} \frac{d_i}{h^i} \sum_{j=1}^{i} (-1)^j C_i^j e(t - jh) \right] + \\ + 2\varepsilon^{\mathrm{T}}(t) P B_2 \varphi(t) + \sum_{i=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^{i} l \left(\varepsilon^T(t) L^T L \varepsilon(t) - e^2(t - jh) \right). \tag{1.26}$$

Оценим слагаемые в (1.26):

$$-2\alpha k \varepsilon^{\mathrm{T}}(t) P B_1 \sum_{i=1}^{\gamma} \frac{d_i}{h^i} \sum_{j=1}^{i} (-1)^j C_i^j e(t - jh) \le$$

$$\le 2\alpha \bar{k} \sum_{i=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^{i} \frac{d_i}{h^i} \left| \varepsilon^{\mathrm{T}}(t) P B_1 (-1)^j C_i^j e(t - jh) \right| \le$$

$$\le 2\alpha \bar{k} \sum_{i=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^{i} \left(\chi \varepsilon^{\mathrm{T}}(t) P B_1 B_1^{\mathrm{T}} P \varepsilon(t) + \chi^{-1} \left(\frac{d_i}{h^i} C_i^j \right)^2 e^2(t - jh) \right) =$$

$$= 2\alpha \bar{k} \left(0{,}5\gamma(\gamma+1) \chi \varepsilon^{\mathrm{T}}(t) P B_1 B_1^{\mathrm{T}} P \varepsilon(t) + \chi^{-1} \sum_{i=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^{i} \left(\frac{d_i}{h^i} C_i^j \right)^2 e^2(t - jh) \right);$$

$$\bar{\varphi} = 2 \sup_t \varphi^2(t);$$

$$2\varepsilon^{\mathrm{T}}(t) P B_2 \varphi(t) \le 2h^{-1} \chi \varepsilon^{\mathrm{T}}(t) P B_2 B_2^{\mathrm{T}} P \varepsilon(t) + \chi^{-1} h \bar{\varphi}.$$

С учетом оценок перепишем (1.26) в виде

$$\dot{V} \le -\varepsilon^{\mathrm{T}}(t) W \varepsilon(t) - \sum_{i=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^{i} w_{ij} e^2(t - jh) + \chi^{-1} h \bar{\varphi}. \tag{1.27}$$

Очевидно, что существуют α и h такие, что $W > 0$ и $w_{ij} > 0$. Оценим (1.27) в виде

$$\dot{V} \le -\lambda_{\min}(W) \varepsilon^{\mathrm{T}}(t) \varepsilon(t) + h\bar{\varphi}. \tag{28}$$

Из (1.28) следует, что $|e(t)| \le \sqrt{h\chi^{-1}\bar{\varphi}/\lambda_{\min}(W)}$. Следовательно, выбором α и h таким, что $W > 0$, $w_{ij} > 0$ можно обеспечить выполнение условия $\delta \le \sqrt{h\chi^{-1}\bar{\varphi}/\lambda_{\min}(W)}$ за время T. Однако величину δ невозможно сделать сколь угодно малой, так как при увеличении α и уменьшении h матрица W может стать неустойчивой. Стоит отметить, что оценки для $e(t)$ и h в

утверждении 1.1 достаточно грубые, так как при доказательстве используются грубые оценки и в (1.28) исключены слагаемые $\sum_{i=1}^{\gamma}\sum_{j=1}^{i} w_{ij} e^2(t - jh)$, участвующие в компенсации величины $h\chi^{-1}\overline{\varphi}$.

1.8 Задания для самостоятельного решения

Рассмотреть объект управления, модель которого описывается уравнением

$$\left(q_3 p^3 + q_2 p^2 + q_1 p + q_0\right) y(t) = \left(r_1 p + r_0\right) u(t) + f(t). \qquad (1.29)$$

Класс неопределенности Ξ для модели (1.29) задан неравенствами:

$0 \le q_3 \le 5$, $|q_i| \le 5$, $i = 0, 1, 2$, при $q_3 = 0$ $q_2 > 0$, $0 \le r_1 \le 1$, $2 \le r_0 \le 2{,}9$,

$|f(t)| \le 10$.

Требуется синтезировать алгоритм подавления возмущений.

Глава 2. Компенсация возмущений

2.1 Обзор решений

Одной из ключевых проблем в теории управления является регулирование объектами в условиях неопределенности. Об этом свидетельствует огромное количество публикаций на эту тему. Однако в основной их части при синтезе системы управления не учитываются ограничения на регулируемый сигнал, что в реальных условиях может привести к неработоспособности системы управления. Более того практически отсутствуют работы с аналитическим построением системы управления в условиях неопределенности и ограничений на сигнал управления.

В условиях определенности параметров объекта управления и внешних возмущений можно использовать в автоматических системах законы управления с введением ПИ или ПИД закона регулирования. Однако из-за насыщения управляющего сигнала переменные интегрирующего звена в ПИ и ПИД-регуляторах могут быть неограниченными (windup), что приводит к невыполнению поставленной цели или потери устойчивости замкнутой системы [1]. В данном случае работоспособность системы управления с ПИ-регулятором может достигаться введением контура, предотвращающего рост параметров в регуляторе (anti-windup, [2, 3]).

Одной из первых работ по управлению в условиях неопределенности и ограничениях на сигнал управления была работа [4], где накладывались ограничения на динамику поведения ошибки слежения и эталонной модели. Однако в [4] результаты с учетом ограничений не имеет строгого доказательства. Аналогичные результаты были описаны в [5], где на этапе моделирования системы, зная множество возможных значений параметров объекта, предлагалась методика задания параметров в регуляторе. В [6] для решения задачи предлагалось функцию насыщения амплитуды управления заменить на гиперболический тангенс от регулируемой переменной. В [7] предложено адаптивное управление объектами в условиях неопределенности, где для частичной компенсации ограничений на сигнал управления параллельно контуру ошибки слежения подключался контур с настраиваемым параметром для компенсации неопределенностей в матрице при сигнале управления. Отметим, что схемы управления [6, 7] работоспособны, когда доступен измерению весь вектор состояния объекта.

В данном пособии рассмотрена задача управления объектами в условиях параметрической неопределенности, внешних ограниченных

возмущений и ограничениях на сигнал управления типа насыщения, когда доступны измерению вход и выход объекта, но не его производные. Для компенсации неопределенностей использовался подход [8], основанный на введении вспомогательного контура параллельно объекту управления, который позволяет получить информацию о неопределенностях объекта управления. Предложен алгоритм формирования закона управления, который обеспечивает нахождение регулируемой переменной в заданной полосе. Получены условия на параметры объекта, эталонной модели и регулятора при выполнении которых система управления будет работоспособной. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие работоспособность приведенной схемы.

2.2 Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, динамические процессы в котором описываются уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bg(u) + Df(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad x(0) = x_0, \tag{2.1}$$

где $x(t) \in R^n$ – вектор состояния, $u(t) \in R$ и $y(t) \in R$ – вход и выход, доступные измерению, $f(t) \in R$ – неконтролируемое внешнее возмущение, причем $|f(t)| \le \bar{f}$, $\bar{f}$ – известная величина, элементы матрицы $A \in R^{n\times n}$ и коэффициенты векторов $B \in R^n$, $D \in R^n$ – неизвестные числа, $C = [1, 0, ..., 0]$ – матрица соответствующей размерности, x_0 – неизвестные начальные условия, $g(u) \in R$ – функция насыщения сигнала управления $u(t)$, которая определена выражением

$$g(u) = \bar{u}\,\mathrm{sat}\left(\frac{u(t)}{\bar{u}}\right) = \begin{cases} u(t), & |u(t)| \le \bar{u}, \\ \bar{u}\,\mathrm{sgn}(u(t)), & |u(t)| > \bar{u}. \end{cases} \tag{2.2}$$

где $\bar{u} > 0$ – величина насыщения.

Зададим эталонную модель

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m r(t), \quad y_m(t) = Cx_m(t), \quad x_m(0) = x_{m0}, \tag{2.3}$$

где $x_m(t) \in R^n$ – вектор состояния, $r(t) \in R$ – кусочно-непрерывное задающее воздействие, причем $|r(t)| \le \bar{r}$, $y_m(t) \in R$ – выход эталонной модели, матрица $A_m \in R^{n\times n}$ и вектор $B_m \in R^n$ – известны, причем A_m – гурвицева, x_{m0} – известные начальные условия.

При решении задачи на объект управления (2.1) наложим следующие ограничения.

Предположения.

1. Неизвестные элементы матрицы A и коэффициенты векторов B и D принадлежат известному ограниченному множеству Ξ. Пары (A, B) и (A, C) управляема и наблюдаема соответственно.

2. Выполнены условия: $A = A_m + B_m c_{01}^{\mathrm{T}}$, $B = B_m + B_m c_{02}$, $D = B_m c_{03}$, где $c_{01} \in R^n$, $c_{02} \in R$, $c_{03} \in R$ – неизвестные вектор и числа.

3. Числитель передаточной функции $C(\lambda I - A)^{-1} B$ – гурвицев, где λ – комплексная переменная, I – единичная матрица соответствующего порядка.

Цель управления состоит в синтезе непрерывного закона регулирования, обеспечивающего выполнение условия

$$|y(t) - y_m(t)| < \delta \text{ при } t > T, \tag{2.4}$$

где $\delta > 0$, $T > 0$ – время, необходимое для окончания переходных процессов. Также, необходимо чтобы все переменные в замкнутой системе были ограниченными.

2.3 Структура основного закона управления

В условиях насыщения сигнала управления сформируем функцию $u(t)$ в виде

$$u(t) = \frac{1}{1+\sigma}\left(u_c(t) + \sigma\tilde{u}\,\mathrm{sat}\left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}}\right)\right), \tag{2.5}$$

где $\sigma > 0$, $0 < \tilde{u} < \bar{u}$, $u_c(t)$ – новый сигнал управления, необходимый для компенсации неопределенностей модели объекта (1), sat(·) – функция насыщения.

Замечание 1. Из (2.5) очевидно, что при $|u(t)| \le \tilde{u}$ $u(t) = u_c(t)$, при $|u(t)| > \tilde{u}$ $u(t) = (1+\sigma)^{-1}(u_c(t) + \sigma\tilde{u}\,\mathrm{sgn}(u_c(t)))$, где из последнего видно, что при $\sigma < \infty$ величина $|u(t)|$ может принимать значения, больше, чем $\tilde{u}$. Однако при $\sigma \to \infty$ $u(t) \to \tilde{u}\,\mathrm{sat}\left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}}\right)$. Следовательно, при достаточно больших σ величину $\tilde{u}$ можно выбирать достаточно близкой к $\bar{u}$. Так при $\tilde{u} = \bar{u}$ и $\sigma \to \infty$ $u(t) \to \bar{u}\,\mathrm{sat}\left(\frac{u_c(t)}{\bar{u}}\right)$. В дальнейшем будет получено условие выбора величины σ для обеспечения $|u(t)| \le \bar{u}$.

Замечание 2. Из (2.5) видно, что коэффициент σ можно выбирать из условия $\sigma \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. Однако, ради простоты синтеза системы управления положим в (5) $\sigma > 0$.

2.4 Алгоритм компенсации возмущений

Принимая во внимание предположение 2, составим уравнение для ошибки $\varepsilon(t) = x(t) - x_m(t)$ в виде

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_m\varepsilon(t) + B_m u(t) + B_m\varphi(t), \quad e(t) = C\varepsilon(t), \tag{2.6}$$

где $\varphi(t) = g(u) - u(t) + c_{01}^{\mathrm{T}} x(t) + c_{02} g(u) + c_{03} f(t) - r(t)$.

Согласно [8], для выделения возмущений, действующих на объект управления, введем вспомогательный контур

$$\dot{\varepsilon}_a(t) = A_m\varepsilon_a(t) + B_m u(t), \quad e_a(t) = C\varepsilon_a(t), \quad \varepsilon_a(0) = 0, \tag{2.7}$$

где $\varepsilon_a(t) \in R^n$. С учетом (2.6) и (2.7), составим уравнение для рассогласования $\zeta(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon_a(t)$ в виде

$$\dot{\zeta}(t) = A_m\zeta(t) + B_m\varphi(t), \quad z(t) = C\zeta(t). \tag{2.8}$$

Преобразуем уравнение (2.8) к форме вход-выход

$$Q_m(p)z(t) = R_m(p)\varphi(t), \tag{2.9}$$

где $Q_m(p)$, $R_m(p)$ – линейные дифференциальные операторы, полученные при переходе от (2.8) к (2.9), $p = d/dt$ – оператор дифференцирования. Перепишем (2.5) в виде

$$u(t) = u_c(t) + \sigma\left(\tilde{u}\,\mathrm{sat}\left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}}\right) - u(t)\right). \tag{10}$$

Принимая во внимание (2.9) и (2.10), перепишем уравнение (2.6) как

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_m\varepsilon(t) + B_m\left[u_c(t) + F(p)z(t) + \frac{\tilde{Q}_m(p)}{R_m(p)}z(t) + \sigma\left(\tilde{u}\,\mathrm{sat}\left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}}\right) - u(t)\right)\right], \tag{2.11}$$

где операторы $F(p)$ и $\tilde{Q}_m(p)$ получены при выделении целой части в дробно-рациональной функции $Q_m(\lambda)/R_m(\lambda)$. Из постановки задачи производные сигналов $y(t)$ и $u(t)$ недоступны измерению, поэтому закон компенсации возмущений $u_c(t)$ зададим в виде

$$u_c(t) = -q^{\mathrm{T}}\xi(t) - \frac{\tilde{Q}_m(p)}{R_m(p)}z(t). \tag{2.12}$$

Здесь q – вектор с коэффициентами оператора $F(p)$, записанными в обратном порядке, $\xi(t) = \left[\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t), ..., \bar{z}^{(\gamma)}(t)\right]^{\mathrm{T}}$, $\bar{z}^{(i)}(t)$ – оценка i-й производной сигнала $z(t)$. Вектор $\xi(t)$ получен с помощью наблюдателя [9]:

$$\dot{\xi}(t) = G_0\xi(t) + D_0\left(\bar{z}(t) - z(t)\right), \quad \bar{z}(t) = C\xi(t), \quad \xi(0) = 0. \tag{2.13}$$

где $\xi(t) \in R^{\gamma+1}$, $G_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_\gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, I_γ – единичная матрица порядка γ, $D_0 = -\left[d_1\mu^{-1}, d_2\mu^{-2}, ..., d_{\gamma+1}\mu^{-\gamma-1}\right]^{\mathrm{T}}$, $\mu > 0$ – достаточно малая величина, $d_1, \ldots, d_{\gamma+1}$ выбираются так, чтобы матрицы $G = G_0 - \left[d_1, ..., d_{\gamma+1}\right]^{\mathrm{T}} C$ была гурвицевой. Отметим, что порядок уравнения (2.13) на единицу больше, чем это необходимо для реализации (2.13). Это сделано для упрощения преобразований при доказательстве работоспособности системы управления.

На рис. 2.1 представлена структурная схема синтезированной системы управления.

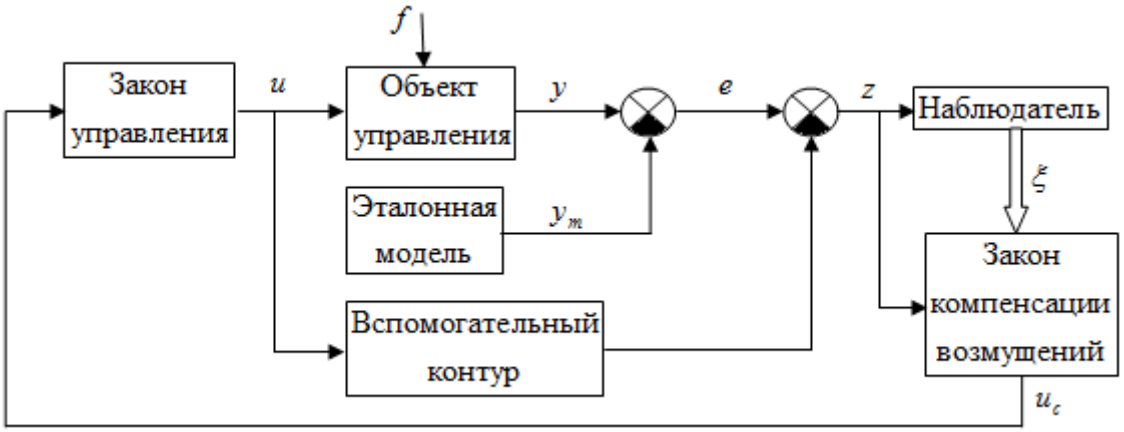


Рис. 2.1. Структурная схема системы управления.

Перед формулировкой утверждения введем следующие обозначения: $\bar{c}_{01} = \max\limits_{\Xi}(|c_{01}|)$, $\bar{c}_{02} = \max\limits_{\Xi}(c_{02})$, $\bar{c}_{03} = \max\limits_{\Xi}(c_{03})$, $\bar{x}_m = \sup\limits_{t}(|x_m(t)|)$, $\nu = \bar{c}_{01}^{-1}\left((1-\bar{c}_{02})\bar{u} - \bar{c}_{01}\bar{x}_m - \bar{c}_{03}\bar{f} - \bar{r}\right)$. Сформулируем утверждение, при выполнении условий которого алгоритм (2.5), (2.7), (2.12), (2.13) обеспечит выполнение целевого условия (2.4) и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.

Утверждение 2.1. Пусть выполнены условия предположений 1-3. Тогда существуют $\mu > 0$ и достаточно большое число $\sigma > 0$ такие, что при $\mu \le \mu_0$ и

$$\bar{c}_{03}\bar{f} + \bar{r} + \bar{c}_{01}\bar{x}_m < (1-\bar{c}_{02})\bar{u}\,,\ \bar{c}_{02} < 1, \tag{2.14}$$

$$|\varepsilon(0)| \le \nu\,, \tag{2.15}$$

система управления (2.5), (2.7), (2.12), (2.13) обеспечит выполнение цели (2.4) и ограниченность сигналов в замкнутой системе.

Замечание 2.1. Из доказательства утверждения следует, что система управления (2.5), (2.7), (2.12), (2.13) обеспечивает выполнение условия (2.4) в момент времени T с точностью

$$\delta \le \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(P)\left[\left(\varepsilon^{\mathrm{T}}(0)P\varepsilon(0) - \phi\right)e^{-\alpha T} + \phi\right]}, \tag{2.16}$$

где $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ – решение уравнения $A_m^{\mathrm{T}}P + PA_m = -Q_1$, $Q_1 = Q_1^{\mathrm{T}} > 0$, $\alpha = \min\left\{\dfrac{\lambda_{\min}(R_1)}{\lambda_{\max}(P)}, \dfrac{\lambda_{\min}(R_3)}{\lambda_{\max}(H)}\right\}$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ $(\lambda_{\min}(\cdot))$ – наибольшее (наименьшее) собственное число соответствующей матрицы, $H = H^{\mathrm{T}} > 0$ – решение уравнения $G^{\mathrm{T}}H + HG = -Q_2$, $Q_2 = Q_2^{\mathrm{T}} > 0$, $R_1 = Q - 2\sigma(1+\sigma)^{-1}\chi PB_mB_m^{\mathrm{T}}P - 2\chi PB_mq^{\mathrm{T}}T\left(PB_mq^{\mathrm{T}}T\right)^{\mathrm{T}}$, $T = \mathrm{diag}\,\{\mu^{\gamma}, \ldots, \mu, 1\}$, $R_2 = Q_2 - 2\mu_0\chi^{-1}I$, $R_3 = R_2 - Hbb^{\mathrm{T}}H$, $\phi = 2\sigma(1+\sigma)^{-1}\chi^{-1}(\tilde{u} - \bar{u})^2 + \mu_0 \sup\limits_{t}\left(z^{(\gamma+1)}(t)\right)^2$, $\chi > 0$ – достаточно малое число. При этом значение σ можно выбирать из условия

$$\sigma \geq \frac{\bar{u} + |q|\pi + \kappa\bar{c}_{01}\sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(P)v^2\|P\|\left[v^2 + 2\phi\right]} + \kappa\left(\bar{c}_{01}\bar{x}_m + \left(2 + \bar{c}_{02}\right)\bar{u} + \bar{c}_{03}\bar{f} + \bar{r}\right)}{\bar{u} - \tilde{u}}, \tag{2.17}$$

где $\pi = \sup_t\left(\left|\xi(t)\right|\right)$, $\kappa = \sup_\omega\left(\frac{\tilde{Q}_m(j\omega)}{Q_m(j\omega)}\right)$, j – мнимая единица.

Если хотя бы одно из условий (2.14), (2.15) не выполнено, то для работоспособности системы управления требуется, чтобы матрица A была гурвицевой. Тогда целевое условие (2.4) в момент времени T будет выполнено с точностью

$$\delta \leq \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(P)\left[\left(\varepsilon^{\mathrm{T}}(0)P\varepsilon(0) - \upsilon\right)e^{-\beta T} + \upsilon\right]}, \tag{2.18}$$

где $A^{\mathrm{T}}P + PA = -W$, $W = W^{\mathrm{T}} > 0$, $\beta = \min\left\{\frac{\lambda_{\min}(R_4)}{\lambda_{\max}(P)}, \frac{\lambda_{\min}(R_3)}{\lambda_{\max}(H)}\right\}$,

$R_4 = W - 4PB_mB_m^{\mathrm{T}}P > 0$, $\upsilon = \chi^{-1}\left(1 + \bar{c}_{02}\right)^2\bar{u}^2 + \chi^{-1}\left[\bar{c}_{03}\bar{f} + \bar{r} + \bar{c}_{01}\bar{x}_m\right]^2$.

Стоит отметить, что оценки (2.14)-(2.18) достаточно грубы из-за использования грубых оценок в доказательстве. Аналитический расчет оценок (2.16)-(2.18) весьма затруднителен. Однако данные оценки можно получить на этапе моделирования системы, о чем подробно описано в [5] и где приведена методика получения оценок для δ и T.

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим пример.

2.5 Пример

Рассмотрим объект управления

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}g(u) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix}f(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}x(t), \quad x(0) = x_0, \tag{2.19}$$

Множество возможных значений Ξ задано следующими неравенствами: $-1 \leq a_0 \leq 0{,}5$; $-2 \leq a_1 \leq -1$; $-3 \leq a_2 \leq 1$; $1 \leq b \leq 1{,}9$; $-1 \leq d \leq 1$. Пусть в (2.2) $\bar{u} = 1$.

Выберем в (2.3) $A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$, $B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $x_{m0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Цель управления состоит в обеспечении целевого условия (4).

Зададим $\sigma = 10^6$, $\tilde{u} = 0{,}9$ и сформируем закон управления (5) в виде

$$u(t) = \frac{1}{1 + 10^6}\left(u_c(t) + 0{,}9 \cdot 10^6\,\mathrm{sat}\left(\frac{u_c(t)}{0{,}9}\right)\right). \tag{2.20}$$

Согласно (2.7), вспомогательный контур определим уравнением

$$\dot{\varepsilon}_a(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -3 & -3\end{bmatrix}\varepsilon_a(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t),\quad e_a(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\varepsilon_a(t),\quad \varepsilon_a(0)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}. \qquad (2.21)$$

Выберем $d_1 = 3$, $d_2 = 3$, $d_3 = 1$, $\mu = 0{,}01$ и сформируем уравнения наблюдателя (2.13) в виде

$$\begin{aligned}&\dot{\xi}_1(t)=\xi_2(t)-3\cdot 100\left(\xi_1(t)-z(t)\right),\quad \dot{\xi}_2(t)=\xi_3(t)-3\cdot 100^2\left(\xi_1(t)-z(t)\right),\\ &\dot{\xi}_3(t)=-100^3\left(\xi_1(t)-z(t)\right),\quad \xi(0)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\end{aligned} \qquad (2.22)$$

где, согласно (2.6)-(2.8), функция $z(t)$ формируется в виде $z(t) = C\zeta(t) = C\varepsilon(t) - C\varepsilon_a(t) = e(t) - e_a(t)$ ($e(t) = y(t) - y_m(t)$).

Принимая во внимание уравнения (22) и структуры A_m, B_m и C, сформируем функцию компенсации возмущений $u_c(t)$ в виде

$$u_c(t)=-\dot{\xi}_3(t)-3\xi_3(t)-3\xi_2(t)-\xi_1(t). \qquad (2.23)$$

Теперь воспользуемся условиями (2.14) и (2.15) для задания остальных параметров. Принимая во внимание множество Ξ и параметры эталонной модели (2.3), перепишем условия (2.14) и (2.15) в виде: $\bar{f}+\bar{r}+2\sqrt{6}\bar{x}_m<0{,}1$ и $|x(0)|\le\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(0{,}1-\bar{f}-\bar{r}-2\sqrt{6}\bar{x}_m\right)$. Как отмечалось, эти условия достаточно грубые. Результаты моделирования показали, что система управления будет работоспособной, например, при $\bar{r}=0{,}3$, $\bar{x}_m=0{,}3$, $\bar{f}=0{,}4$, $|x(0)|\le 0{,}1\sqrt{3}$. Покажем работоспособность системы управления (2.20)-(2.23) для следующих параметров объекта (2.19) и эталонной модели (2.3): $a_0 = -1$, $a_1 = -3$, $a_2 = 1$, $b = 1$, $d = 1$, $f(t) = 0{,}2 + 0{,}2\sin 0{,}7t$, $x(0) = [0{,}1\ 0{,}1\ 0{,}1]^{\mathrm{T}}$ и $r(t) = 0{,}2 + \sin t$. На рис. 2.2 представлены результаты моделирования по ошибке $e(t)$, на рис. 2.3 – по $u(t)$.

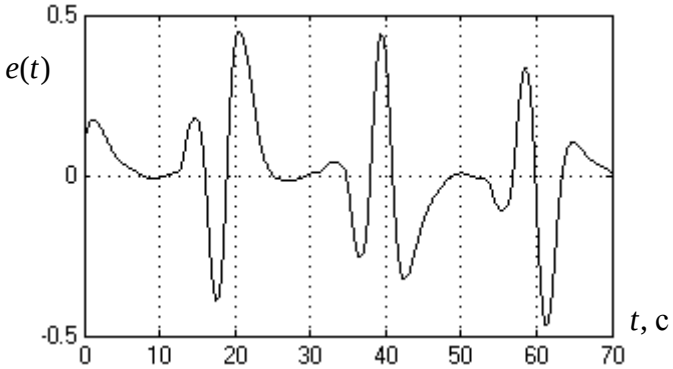


Рис. 2.2. Переходной процесс по $e(t)$

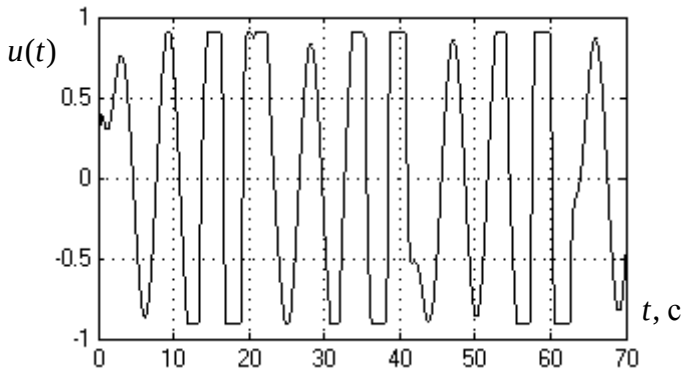


Рис. 2.3. Переходной процесс по $u(t)$

Из рис. 2.2 видно, что ошибка $e(t)$ не превышает значения 0,45 с начала функционирования системы управления, а из рис. 2.3, что сигнал управления находится в заданном отрезке [–1; 1]. Однако без использования алгоритма (2.20) (когда $u(t) = u_c(t)$ [8]) сигнал управления в начальный момент времени $u(t)$ достигает значения -10^5, и, начиная с 0,2 сек. $u(t)$ находится в отрезке [–1,15; 1,15], что недопустимо по условию задачи.

Теперь проанализируем работоспособность системы управления для всего множества Ξ. Для этого промоделируем замкнутую систему при различных комбинациях параметров объекта (2.19), взятых из следующих множеств: $a_0 \in \{-1; -0{,}5; 0; 0{,}5\}$, $a_1 \in \{-2; -1{,}5; -1\}$, $a_2 \in \{-3; -2{,}5; -2; -1{,}5; -1; -0{,}5; 0; 0{,}5; 1\}$, $b \in \{1; 1{,}5; 1{,}9\}$, $d \in \{-1; -0{,}5; 0; 0{,}5; 1\}$, $f(t) = \{0{,}2 + 0{,}1\sin 0{,}7t;\ \ 0{,}2 + 0{,}1\sin 10t;\ \ 0{,}2 + 0{,}1\sin 100t;\ \ 0{,}3\}$. Анализ результатов моделирования показал, что замкнутая система робастна по отношению к внешним возмущениям и параметрической неопределенности из заданного класса Ξ, причем ошибка $e(t)$ не превышает значения 0,8 после 3 сек. и управление $u(t)$ находится в отрезке [–1; 1].

2.6 Заключение

В главе 2 приведен синтез системы управления для объекта в условиях параметрической неопределенности, внешних ограниченных возмущений и насыщения регулируемой переменной. Предложен способ формирования сигнала управления, обеспечивающий нахождение функции управления в заданной полосе. Получены условия на параметры объекта управления, эталонной модели и регулятора при выполнении которых система управления будет работоспособной в условиях ограничений на сигнал управления. Отметим, что алгоритм, учитывающий насыщения сигнала управления, является независимым, то есть им можно дополнить любой из существующих алгоритмов.

2.7 Приложение

Доказательство утверждения 2.1. Введем вектор $\theta(t) = \left[z(t), \dot{z}(t), ..., z^{(\gamma)}(t)\right]^{\mathrm{T}}$. Принимая во внимание (2.13), составим уравнение для нормированного вектора ошибок оценивания производных $\eta(t) = T^{-1}(\xi(t) - \theta(t))$ в виде [8]:

$$\dot{\eta}(t) = \mu^{-1} G\eta(t) + bz^{(\gamma+1)}(t), \quad \bar{z}(t) - z(t) = \mu^{\gamma} C\eta(t), \tag{2.24}$$

где $b = [0, \ldots, 0, 1]^{\mathrm{T}}$. С учетом (2.12), преобразуем (2.11) к виду

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_m \varepsilon(t) + B_m \left[-q^{\mathrm{T}} T\eta(t) + \sigma\left(\tilde{u}\,\mathrm{sat}\left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}} \right) - u(t) \right) \right]. \qquad 2.\ (25)$$

Запишем уравнения (2.24) и (2.25) как

$$\begin{aligned} &\dot{\varepsilon}(t) = A_m \varepsilon(t) + B_m \left[-q^{\mathrm{T}} T\eta(t) + \sigma\left(\tilde{u}\,\mathrm{sat}\left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}} \right) - u(t) \right) \right], \\ &\mu_1 \dot{\eta}(t) = G\eta(t) + \mu_2 bz^{(\gamma+1)}(t), \end{aligned} \tag{2.26}$$

где $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Воспользуемся вспомогательной леммой [10].

Лемма. Если динамическая система описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t, \mu_1, \mu_2), \ x(t) \in R^n, \ \mu_1 > 0, \ \mu_2 > 0, \tag{27}$$

где $f(x, t, \mu_1, \mu_2)$ – непрерывная функция, липшицева по x, и при $\mu_2 = 0$ имеет ограниченную замкнутую область диссипативности

$$\Omega_x = \left\{ x : P(x) \le \overline{C} \right\}, \tag{2.28}$$

где $P(x)$ – непрерывная, кусочно-гладкая, положительно определенная функция в R^n, такая, что при некоторых $C_1 > 0$ и $\mu_0 > 0$ выполнено

$$\sup_{\mu_1, \mu_2 \le \mu_0} \left\langle \left[\frac{\partial P(x)}{\partial x} \right]^{\mathrm{T}}, f(x, t, \mu_1, 0) \right\rangle \le -C_1, \text{ при } P(x) = \overline{C}.$$

Тогда для всех достаточно малых $\mu_1 \le \mu_0$ и $\mu_2 \le \mu_0$ множество (2.28) остается областью диссипативности системы (2.27).

Лемма является обобщение первой леммы В.А. Брусина [11] для неавтономных систем. Доказательство леммы приведено в [10].

Для системы (26) возьмем функцию Ляпунова $V(t) = V(\varepsilon(t), \eta(t))$ в виде

$$V(t) = \varepsilon^{\mathrm{T}}(t) P\varepsilon(t) + \eta(t) H\eta(t), \tag{2.29}$$

где P и H определены в Замечании 3. Согласно лемме, рассмотрим (2.26) при $\mu_2 = 0$:

$$\begin{aligned} &\dot{\varepsilon}(t) = A_m \varepsilon(t) + B_m \left[-q^{\mathrm{T}} T\eta(t) + \sigma\left(\tilde{u}\,\mathrm{sat}\left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}} \right) - u(t) \right) \right], \\ &\dot{\eta}(t) = \mu_1^{-1} G\eta(t). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Из второго уравнения (2.30) следует, что функция $|\eta(t)|$ убывает экспоненциально. Далее рассмотрим три случая.

1) Предположим, что в процессе функционирования системы $|\varphi(t)| \le \tilde{u}$ и $|u_c(t)| \le \tilde{u}$. Тогда из (2.5) $u(t) = u_c(t)$, значит (2.30) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= A_m \varepsilon(t) - B_m q^{\mathrm{T}} T \eta(t), \\ \dot{\eta}(t) &= \mu_1^{-1} G \eta(t). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Доказательство работоспособности системы (2.31) приведено в [8]. Подставим значение $\varphi(t)$ в условие $|\varphi(t)| \le \tilde{u}$:

$$\left| c_{01}^{\mathrm{T}} \varepsilon(t) + c_{01}^{\mathrm{T}} x_m(t) + c_{02} u(t) + c_{03} f(t) - r(t) \right| \le \tilde{u} .$$

Оценим справа левую часть последнего неравенства в виде

$$\left| c_{01}^{\mathrm{T}} \varepsilon(t) + c_{01}^{\mathrm{T}} x_m(t) + c_{02} u(t) + c_{03} f(t) - r(t) \right| \le \bar{c}_{01} |\varepsilon(t)| + \bar{c}_{01} \bar{x}_m + \bar{c}_{02} \tilde{u} + \bar{c}_{03} \bar{f} + \bar{r} .$$

Тогда из гурвицевости матриц A_m и G следует, что производная по времени от (2.29) вдоль траекторий (2.31) будет отрицательно-определенной функцией, если разность начальных условий (2.1) и (2.3) принадлежит области

$$|\varepsilon(0)| \le \bar{c}_{01}^{-1} \left((1 - \bar{c}_{02}) \tilde{u} - \bar{c}_{01} \bar{x}_m - \bar{c}_{03} \bar{f} - \bar{r} \right). \tag{2.32}$$

При этом из правой части последнего неравенства следует, что должны быть выполнены следующие соотношения:

$$\bar{c}_{03} \bar{f} + \bar{r} + \bar{c}_{01} \bar{x}_m < (1 - \bar{c}_{02}) \tilde{u} \ \text{ и } \ \bar{c}_{02} < 1. \tag{2.33}$$

Тогда, при выполнении условий (2.32) и (2.33) цель управления (2.4) будет достигнута.

2) Рассмотрим случай, когда $\tilde{u} < |\varphi(t)| \le \bar{u}$ и $\tilde{u} < |u_c(t)| \le \bar{u}$. Тогда из (2.5) $u(t) = (1+\sigma)^{-1} \left(u_c(t) + \sigma \tilde{u} \operatorname{sgn}(u_c(t)) \right)$. С учетом последнего, перепишем первое уравнение (2.26) в виде

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_m \varepsilon(t) + \frac{\sigma}{1+\sigma} B_m \left[\tilde{u} \operatorname{sgn}(u_c(t)) - u_c(t) \right] - B_m q^{\mathrm{T}} T \eta(t). \tag{2.34}$$

Так как $\tilde{u} < |u_c(t)| \le \bar{u}$, то оценим второе слагаемое в правой части (34) как

$$\tilde{u} \operatorname{sgn}(u_c(t)) - u_c(t) \le (\tilde{u} - \bar{u}) \operatorname{sgn}(u_c(t)). \tag{2.35}$$

Разность $\bar{u} - \tilde{u}$ определяет максимальное значение возмущения, которое может воздействовать на уравнение (2.34) при условии $\tilde{u} < |u_c(t)| \le \bar{u}$. Поэтому исследуем (2.34) при возмущениях (2.35). Для этого перепишем (2.34) в виде

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_m \varepsilon(t) + \frac{\sigma}{1+\sigma} B_m (\tilde{u} - \bar{u}) \operatorname{sgn}(u_c(t)) - B_m q^{\mathrm{T}} T \eta(t). \tag{2.36}$$

Тогда полная производная от (2.29) по времени вдоль траекторий (2.36) и второго уравнения (2.30) будет выглядеть как

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -\varepsilon^{\mathrm{T}}(t) Q_1 \varepsilon(t) + \\ &+ \frac{2\sigma}{1+\sigma} \varepsilon^{\mathrm{T}}(t) P B_m (\tilde{u} - \bar{u}) \operatorname{sgn}(u_c(t)) - 2\varepsilon^{\mathrm{T}}(t) P B_m q^{\mathrm{T}} T \eta(t) - \mu_1^{-1} \eta^{\mathrm{T}}(t) Q_2 \eta^{T}(t). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Воспользуемся оценками

$$\frac{2\sigma}{1+\sigma}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)PB_m(\tilde{u}-\bar{u})\operatorname{sgn}(u_c(t))\le\frac{2\sigma}{1+\sigma}\left(\chi\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)PB_mB_m^{\mathrm{T}}P\varepsilon(t)+\chi^{-1}(\tilde{u}-\bar{u})^2\right),$$
$$2\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)PB_mq^{\mathrm{T}}T\eta(t)\le 2\chi\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)PB_mq^{\mathrm{T}}T\left(PB_mq^{\mathrm{T}}T\right)^{\mathrm{T}}\varepsilon(t)+2\chi^{-1}\eta^{\mathrm{T}}(t)\eta(t). \quad (2.38)$$

Принимая во внимание (2.38), оценим (2.37) в виде

$$\dot{V}(t)\le-\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)R_1\varepsilon(t)-\mu_1^{-1}\eta^{\mathrm{T}}(t)R_{21}\eta(t)+\frac{2\sigma}{\chi(1+\sigma)}(\tilde{u}-\bar{u})^2, \quad (2.39)$$

где $R_{21}=Q_2-2\mu_1\chi^{-1}I$. Очевидно, что всегда существуют σ, χ и μ_1 такие, что $R_1>0$ и $R_{21}>0$.

Подставим значение $\varphi(t)$ в условие $|\varphi(t)|\le\bar{u}$:

$$\left|c_{01}^{\mathrm{T}}\varepsilon(t)+c_{01}^{\mathrm{T}}x_m(t)+c_{02}u(t)+c_{03}f(t)-r(t)\right|\le\bar{u}.$$

Оценим справа левую часть неравенства

$$\left|c_{01}^{\mathrm{T}}\varepsilon(t)+c_{01}^{\mathrm{T}}x_m(t)+c_{02}u(t)+c_{03}f(t)-r(t)\right|\le\bar{c}_{01}|\varepsilon(t)|+\bar{c}_{01}\bar{x}_m+\bar{c}_{02}\bar{u}+\bar{c}_{03}\bar{f}+\bar{r}.$$

Из последнего неравенства следует, что если разность начальных условий (2.1) и (2.3) принадлежит области (2.15) и выполнены условия (2.14), то цель управления (2.4) будет выполнена при $\tilde{u}<|\varphi(t)|\le\bar{u}$ и $\tilde{u}<|u_c(t)|\le\bar{u}$. Дополнительно, условия леммы будут выполнены, если $|\varepsilon(t)|>\sqrt{2\sigma(1+\sigma)^{-1}\chi^{-1}(\tilde{u}-\bar{u})^2}$. Причем, из Замечания 1 следует, что увеличением σ можно уменьшить разность $\tilde{u}-\bar{u}$, а, следовательно, уменьшить значение $|\varepsilon(t)|$.

3) Теперь рассмотрим случай, когда $|\varphi(t)|>\bar{u}$ и $|u_c(t)|>\bar{u}$. Перепишем уравнение (6), расписав в нем функцию $\varphi(t)$ и учитывая, что при $|u_c(t)|>\bar{u}$ $g(u)=\bar{u}\operatorname{sgn}(u(t))$

$$\dot{\varepsilon}(t)=A_m\varepsilon(t)+B_mc_{01}^{\mathrm{T}}\varepsilon(t)+(1+c_{02})B_m\bar{u}\operatorname{sgn}(u(t))+B_m\left(c_{01}^{\mathrm{T}}x(t)+c_{03}f(t)-r(t)\right). \quad (2.40)$$

Так как в области $|u_c(t)|>\bar{u}$ объект (1) неуправляемый, то компенсации неопределенностей быть не может. Поэтому система (2.40) будет устойчивой, если матрица A будет гурвицевой.

Итак, выше показано, что при $\mu_2=0$ условия леммы выполнены. Найдем теперь $\mu_2>0$ такое, что система (2.5), (2.7), (2.12), (2.13) и (2.26) будет диссипативной. Положим $\mu_1=\mu_2=\mu_0>0$. Для случая $|\varphi(t)|\le\tilde{u}$ и $|u_c(t)|\le\tilde{u}$ работоспособность алгоритма доказана в [8]. Для случая $|\varphi(t)|>\bar{u}$ и $|u_c(t)|>\bar{u}$ установлено, что система управления будет работоспособна, если матрица A – гурвицева. Поэтому, особый интерес представляет случай, когда $|\varphi(t)|\le\bar{u}$ и $|u_c(t)|\le\bar{u}$. Найдем полную производную от (2.29) по времени вдоль траекторий (2.36) и второго уравнения (2.26)

$$\dot{V}(t)=-\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Q_1\varepsilon(t)+\frac{2\sigma}{1+\sigma}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)PB_m(\tilde{u}-\bar{u})\operatorname{sgn}(u_c(t))-$$
$$-2\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)PB_mq^{\mathrm{T}}T\eta(t)-\mu_0^{-1}\eta^{\mathrm{T}}(t)R_2\eta^{T}(t)+2\eta^{\mathrm{T}}(t)Hbz^{(\gamma+1)}(t). \quad (2.41)$$

Оценим последнее слагаемое в правой части (2.41) в виде

$$\eta^{\mathrm{T}}(t)Hbz^{(\gamma+1)}(t) \le \mu_0^{-1}\eta^{\mathrm{T}}(t)Hbb^{\mathrm{T}}H\eta(t) + \mu_0\left(z^{(\gamma+1)}(t)\right)^2. \qquad (2.42)$$

Принимая во внимание (2.42), оценим (2.41) как

$$\dot{V}(t) \le -\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)R_1\varepsilon(t) - \mu_0^{-1}\eta^{\mathrm{T}}(t)R_3\eta(t) + \frac{2\sigma}{\chi(1+\sigma)}\left(\tilde{u}-\bar{u}\right)^2 + \mu_0\left(z^{(\gamma+1)}(t)\right)^2. \qquad (2.43)$$

Переписав (2.43) в виде $\dot{V}(t) \le -\alpha V(t) + \phi$ и решив его относительно $V(t)$, получим

$$V(t) \le \left(V(0)-\phi\right)e^{-\alpha t} + \phi. \qquad (2.44)$$

Из (2.44) следует оценка (2.16). Из Замечания 1 следует, что увеличением σ можно уменьшить разность $\tilde{u}-\bar{u}$. Дополнительно, при уменьшении значение μ_0 уменьшается значение $\mu_0 \sup\limits_t\left(z^{(\gamma+1)}(t)\right)^2$. Следовательно, увеличением σ и уменьшением μ_0 можно уменьшить значение δ в целевом условии (2.4). Таким образом, при $|\varphi(t)| \le \bar{u}$ и $|u_c(t)| \le \bar{u}$ цель управления (2.4) будет выполнена, если справедливы оценки (2.14) и (2.15).

Теперь исследуем поведение (2.40) и второе уравнение (2.26), когда $|\varphi(t)| > \bar{u}$ и $|u_c(t)| > \bar{u}$ при условии, что матрица A гурвицева. Найдем производную от (2.29) вдоль траекторий системы (2.40) и второго уравнения (2.26)

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= -\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)W\varepsilon(t) + 2\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)PB_m\left(1+c_{02}\right)\bar{u}\,\mathrm{sgn}\left(u(t)\right) + \\ &+ 2\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)PB_m\left(c_{03}f(t) - r(t) - c_{01}^{\mathrm{T}}x_m(t)\right) - \mu_0^{-1}\eta^{\mathrm{T}}(t)Q_2\eta(t) + 2\eta^{\mathrm{T}}(t)Hbz^{(\gamma+1)}(t),\end{aligned} \qquad (2.45)$$

где $A^{\mathrm{T}}P + PA = -W$, $W = W^{\mathrm{T}} > 0$. Воспользовавшись оценками (42) и

$$2\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)PB_m\left(1+c_{02}\right)\bar{u}\,\mathrm{sgn}\left(u(t)\right) \le 2\chi\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)PB_mB_m^{\mathrm{T}}P\varepsilon(t) + 2\chi^{-1}\left(1+\bar{c}_{02}\right)^2\bar{u}^2,$$

$$2\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)PB_m\left(c_{03}f(t) - r(t) - c_{01}^{\mathrm{T}}x_m(t)\right) \le 2\chi\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)PB_mB_m^{\mathrm{T}}P\varepsilon(t) + 2\chi^{-1}\left[\bar{c}_{03}\bar{f} + \bar{r} + \bar{c}_{01}\bar{x}_m\right]^2,$$

перепишем (2.45) в виде $\dot{V}(t) \le -\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)R_4\varepsilon(t) - \mu_2^{-1}\eta^{\mathrm{T}}(t)R_3\eta(t) + \upsilon$. С учетом (2.29), перепишем последнее неравенство как

$$\dot{V}(t) \le -\beta V(t) + \upsilon. \qquad (46)$$

Решив (2.46) относительно $V(t)$, получим: $V(t) \le \left(V(0)-\phi\right)e^{-\beta t} + \upsilon$, откуда следует оценка (2.18).

Теперь определим оценку для коэффициента σ, при котором $|u(t)| \le \bar{u}$. Подставив (2.5) в условие $|u(t)| \le \bar{u}$, получим

$$\frac{1}{1+\sigma}\left|u_c(t) + \sigma\tilde{u}\,\mathrm{sat}\left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}}\right)\right| \le \bar{u}. \qquad (2.47)$$

Оценим левую часть (2.47) и потребуем выполнение условия $|u_c(t)| + \sigma\tilde{u} \le (1+\sigma)\bar{u}$. Разрешим последнее неравенство относительно σ: $\sigma \ge \dfrac{\bar{u} - |u_c(t)|}{\bar{u} - \tilde{u}}$, и оценим сверху его правую часть в виде

$$\frac{\bar{u}-|u_c(t)|}{\bar{u}-\tilde{u}} \le \frac{\bar{u}+|u_c(t)|}{\bar{u}-\tilde{u}} \le \frac{\bar{u}+|q|\pi+\kappa|\varphi(t)|}{\bar{u}-\tilde{u}} \le$$
$$\le \frac{\bar{u}+|q|\pi+\kappa\left|g(u)-u(t)+c_{01}^{\mathrm{T}}x(t)+c_{02}g(u)+c_{03}f(t)-r(t)\right|}{\bar{u}-\tilde{u}} \le$$
$$\le \frac{\bar{u}+|q|\pi+\kappa\bar{c}_{01}|\varepsilon(t)|+\kappa\left(\bar{c}_{01}\bar{x}_m+(2+\bar{c}_{02})\bar{u}+\bar{c}_{03}\bar{f}+\bar{r}\right)}{\bar{u}-\tilde{u}}.$$

Принимая во внимание (2.47), оценим $|\varepsilon(t)|$ в виде $|\varepsilon(t)| \le \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(P)V(0)[V(0)+2\phi]}$. С учетом (2.15), величину σ можно оценить в виде (2.17). Очевидно, что оценки (2.14)-(2.18) достаточно грубые, но из них видно, что существуют определенные значения параметров объекта, эталонной модели и регулятора, при которых в условиях ограничений можно обеспечить выполнение условия (2.4).

2.8 Задания для самостоятельного решения

Рассмотреть объект управления

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ a_0 & a_1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ b\end{bmatrix}g(u)+\begin{bmatrix}0\\ d\end{bmatrix}f(t),\quad y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t),\quad x(0)=x_0.$$

Множество возможных значений Ξ задано следующими неравенствами:

$$-1 \le a_0 \le 0{,}5;\ -2 \le a_1 \le -1;\ 1 \le b \le 1{,}9;\ -1 \le d \le 1.$$

Пусть в (2.2) $\bar{u}=1$.

Выбрать

$$A_m=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -3 & -3\end{bmatrix},\ B_m=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\ \text{и}\ x_{m0}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Синтезировать алгоритм управления, обеспечивающий выполнение целевого условия (2.4).

Глава 3. Компенсация возмущений в многомерных системах при насыщении сигнала управления

3.1 Обзор решений

Одной из ключевых проблем в теории управления является регулирование объектами в условии неопределенности, когда недоступны измерению производные выхода объекта управления. Об этом свидетельствует большое количество публикаций на эту тему. Одним из эффективных способов управления объектами в условии неопределенности является робастное управление, где на сегодняшний день предложено достаточное количество решений, например, [1-6].

В [2, 3] для управления объектами в условии параметрической неопределенности и внешних возмущений используются различные модификации наблюдателей с большим коэффициентом усиления (high-gain observer) для оценки производных выхода объекта. Наличие большого коэффициента необходимо для обеспечения робастной устойчивости замкнутой системы по отношению к данным неопределенностям. Однако при рассогласовании начальных условий объекта и системы управления увеличение коэффициента усиления в наблюдателе может привести к увеличению множества значений функции управления в начальный момент времени. В [4], на базе результатов [3], получена простая схема управления, представленная последовательным соединением апериодических и форсирующих звеньев. В [5] рассмотрено решение задачи компенсации возмущений с использованием динамического вспомогательного контура, подключенного параллельно объекту управления, и наблюдателя, представленного последовательным соединением реальных дифференцирующих звеньев. Результат [5] позволил получить в [6] простой регулятор, представленный передаточной функцией, знаменатель которой содержит нулевой корень и малый параметр.

Анализ работ [2-6] показал, что представленные схемы управления отличаются лишь их частной реализацией. Поэтому, возникает задача, связанная с получением нового способа управления, который бы позволил синтезировать новый класс регуляторов, включая в себя результаты [2-6].

Следующая проблема состоит в том, что при синтезе большинства алгоритмов управления в условии неопределенности, например, в [1-6], требуется ограниченность функции управления, но границы ее множества возможных значений не фиксированы. Данное множество зависит от неизвестных начальных условий и параметров объекта управления, а также параметров системы управления. Однако на практике произвольное

множество возможных значений функции управления может привести к неработоспособности системы управления из-за присутствия реальных ограничений.

В условиях определенности параметров объекта управления и внешних возмущений можно использовать в автоматических системах законы управления с введением ПИ или ПИД закона регулирования. Однако из-за насыщения управляющего сигнала переменные интегрирующего звена в ПИ и ПИД-регуляторах могут быть неограниченными (windup), что приводит к невыполнению поставленной цели или потери устойчивости замкнутой системы [7]. В данном случае для работоспособности системы управления с ПИ-регулятором может достигаться введением контура, предотвращающего рост параметров в регуляторе (anti-windup, [8, 9]).

Впервые задача управления в условии неопределенности и насыщения сигнала управления была рассмотрена в [10]. Однако в [10] результаты, касающиеся насыщения, не имеют строгого доказательства. Аналогичный результат был описан в [5], где на этапе моделирования системы, зная множество возможных значений параметров объекта, предлагалась методика выбора параметров в регуляторе. В [11] для решения задачи функция насыщения сигнала управления заменялась гиперболическим тангенсом от сигнала управления. В [12] предложено адаптивное управление объектами в условии неопределенности, где для частичной компенсации ограничений на сигнал управления параллельно ошибке слежения вводился вспомогательный контур с настраиваемым параметром. Заметим, что результаты [11, 12] справедливы, если доступен измерению вектор состояния объекта управления.

Таким образом, следующей задачей, рассматриваемой в главе, является обобщение алгоритма, синтезированного без учета насыщения сигнала управления, на случай заданных ограничений функции управления, когда не доступны измерению производные регулируемой переменной.

В главе 3 решена задача управления линейными динамическими объектами с векторными входами и выходами в условии параметрической неопределенности, внешних возмущений, заданных ограничений на сигнал управления и недоступности измерению производных входных и выходных сигналов. Вначале предложен алгоритм управления, обеспечивающий робастность замкнутой системы по отношению к параметрическим неопределенностям и внешним возмущениям без учета ограничений на функцию управления. Показано, что предложенный алгоритм обобщает известные результаты [2-6] и позволяет синтезировать новый класс алгоритмов. Далее полученный результат обобщается для управления в условии заданных ограничений функции управления. Приведены условия на параметры модели объекта управления, эталонной

модели и регулятора при выполнении которых система управления будет работоспособной. Рассмотрены примеры моделирования, иллюстрирующие работоспособность предлагаемой схемы управления.

3.2 Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, динамические процессы в котором описываются уравнением

$$Q(p)y(t) = R(p)u(t) + f(t), \tag{3.1}$$

где $y(t) \in R^l$ – вектор регулируемых переменных, $u(t) = [u_1(t), u_2(t), ..., u_l(t)]^T \in R^l$ – вектор управления, $f(t) \in R^l$ – неконтролируемое ограниченное возмущение, $Q(p) = \begin{bmatrix} Q_{11}(p) & \dots & Q_{1l}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{l1}(p) & \dots & Q_{ll}(p) \end{bmatrix}$, $R(p) = \begin{bmatrix} R_{11}(p) & \dots & R_{1l}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{l1}(p) & \dots & R_{ll}(p) \end{bmatrix}$, $Q_{ij}(p)$, $R_{ij}(p)$ – линейные дифференциальные операторы, $\deg Q_{ij}(p) = n_{ij}$, $\deg R_{ij}(p) = m_{ij}$, причем $n_{ii} > n_{ij}$, $m_{ii} \geq m_{ij}$ при $i \neq j$, $i = \overline{1, l}$, $j = \overline{1, l}$, $p = d / dt$ – оператор дифференцирования.

Цель управления состоит в синтезе непрерывного закона регулирования, обеспечивающего выполнение условия

$$\left| y(t) - y_m(t) \right| < \delta \text{ при } t > T, \tag{3.2}$$

и нахождении сигналов $u_i(t)$ во множествах $\left| u_i(t) \right| \leq \bar{u}_i$, $i = \overline{1, l}$, где $y_m(t)$ – эталонный сигнал такой, что $\left| y_m^{(j)}(t) \right| \leq \bar{y}_m^j$, $j = \overline{1, v}$, $v = \max\limits_{i=\overline{1, l}} n_{ii}$, $\delta > 0$ – точность регулирования, $T > 0$ – время, по истечении которого должно быть выполнено неравенство (3.2), $\bar{u}_i > 0$ – известная величина. Также, необходимо чтобы все переменные в замкнутой системе были бы ограниченными. Здесь и далее под $|s(t)|$ будем понимать евклидову норму вектора $s(t)$.

Сформулированную задачу будем решать при следующих **предположениях**.

1. Неизвестные коэффициенты операторов $Q_{ij}(p)$, $R_{ij}(p)$, $i = \overline{1, l}$, $j = \overline{1, l}$, принадлежат известному ограниченному множеству Ξ.

2. Тривиальное решение уравнения $R(p)u(t) = 0$ является асимптотически устойчивым.

3. Известны числа $\bar{f}$ и $\bar{y}_m$, где $\left| f(t) \right| \leq \bar{f}$ и $\bar{y}_m = \left| \left[\bar{y}_m^1, \bar{y}_m^2, ..., \bar{y}_m^v \right]^T \right|$.

3.3 Синтез алгоритма без учета насыщения сигнала управления

Ради простоты рассмотрим сначала синтез алгоритма управления без учета насыщения регулируемой переменной. Представим операторы $Q_{ij}(p)$ и $R_{ij}(p)$ в виде следующих сумм

$$Q_{ij}(p) = Q_{ij}^{m}(p) + \Delta Q_{ij}(p), \quad R_{ij}(p) = R_{ij}^{m}(p) + \Delta R_{ij}(p), \; i = \overline{1, l}, \; j = \overline{1, l}, \quad (3.3)$$

где $Q_{ij}^{m}(p)$, $R_{ij}^{m}(p)$ – известные линейные дифференциальные операторы, $\deg Q_{ij}^{m}(p) \geq n_{ij}$, $\deg R_{ij}^{m}(p) \leq m_{ij}$, многочлены $Q_{ij}^{m}(\lambda)$, $\det Q_m(\lambda)$, $R_{ij}^{m}(\lambda)$ и $\det R_m(\lambda)$ – гурвицевы, λ – комплексная переменная,

$$Q_m(p) = \begin{bmatrix} Q_{11}^{m}(p) & \dots & Q_{1l}^{m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{l1}^{m}(p) & \dots & Q_{ll}^{m}(p) \end{bmatrix}, \qquad R_m(p) = \begin{bmatrix} R_{11}^{m}(p) & \dots & R_{1l}^{m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{l1}^{m}(p) & \dots & R_{sl}^{m}(p) \end{bmatrix}, \qquad \Delta Q_{ij}(p),$$

$\Delta R_{ij}(p)$ – линейные дифференциальные операторы с неизвестными коэффициентами, $\deg \Delta Q_{ij}(p) \leq \deg Q_{ij}^{m}(p)$, $\deg \Delta R_{ij}(p) \leq m_{ij}$.

Подставим (3) в (1) и составим уравнение для ошибки слежения $e(t) = y(t) - y_m(t)$ в виде

$$Q_m(p)e(t) = R_m(p)u(t) + \varphi(t), \quad (3.4)$$

где $\varphi(t) = D(p)f(t) - \Delta Q(p)y(t) + \Delta R(p)u(t) - Q_m(p)y_m(t)$ – функция, содержащая информацию о параметрической неопределенности и внешних возмущениях объекта (3.1), $\Delta Q(p) = \begin{bmatrix} \Delta Q_{11}(p) & \dots & \Delta Q_{1l}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta Q_{l1}(p) & \dots & \Delta Q_{ll}(p) \end{bmatrix}$,

$$\Delta R(p) = \begin{bmatrix} \Delta R_{11}(p) & \dots & \Delta R_{1l}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta R_{l1}(p) & \dots & \Delta R_{ll}(p) \end{bmatrix}.$$

Зададим закон управления в виде

$$u(t) = -\alpha^{-1}(p)R_m^{-1}(p)Q_m(p)e(t), \quad (3.5)$$

где матричный полном $\alpha(\lambda)$ порядка $l \times l$ выбирается таким, что многочлен $\det \alpha(\lambda)$ – гурвицев и каждый элемент матричной передаточной функции $\alpha^{-1}(\lambda)R_m^{-1}(\lambda)Q_m(\lambda)$ имеет неотрицательную относительную степень.

Обозначим $P(\lambda) = \det \alpha(\lambda) \det R_m(\lambda)Q(\lambda) + R(\lambda)\alpha^{*}(\lambda)R_m^{*}(\lambda)Q_m(\lambda)$, где $\alpha^{*}(\lambda)$ и $R_m^{*}(\lambda)$ присоединенные матрицы к $\alpha(\lambda)$ и $R_m(\lambda)$ соответственно. Сформулируем утверждение, при выполнении условий которого алгоритм (3.5) обеспечит выполнение целевого условия (3.2).

Утверждение 3.1. Пусть выполнены условия Предположений 1-3. Тогда существуют $\alpha(\lambda)$, $R_m(\lambda)$ и $Q_m(\lambda)$ такие, что многочлен $\det P(\lambda)$ гурвицев для любых параметров (3.1) из класса Ξ, и регулятор (3.5) обеспечивает робастную устойчивость замкнутой системы, а также выполнение целевого условия (3.2).

Замечание 3.1. Из (3.3) и (3.5) видно, что алгоритм (3.5) не требует точного знания порядков элементов матричных операторов $Q(p)$ и $R(p)$. Поэтому, алгоритм (3.5) будет работоспособен для класса линейных структурно неопределенных объектов (см., например, [13, 14]).

Замечание 3.2. Рассмотрим объект управления (1) при $u(t) \in R$ и $y(t) \in R$. Если в (3.5) $\alpha(p) = \text{const}$, то поучим результат, подобный [2, 3]; если $\alpha(p) = (Tp + 1)^{\gamma}$, где $T > 0$, то получим результат [4]. При $\alpha(p) = (\mu p + 1)^{\gamma} - 1$, где $\mu > 0$ – достаточно малое число, получим результат [6].

Таким образом, в настоящей главе получен алгоритм (3.5), устанавливающий связь между известными результатами [2-6], и позволяющий синтезировать новый класс алгоритмов за счет выбора структуры и параметров $\alpha(\lambda)$, $R_m(\lambda)$ и $Q_m(\lambda)$.

3.4 Структура закона управления в условии насыщения входного сигнала

В условии ограничения на функцию управления сформируем каждую компоненту вектора $u(t)$ в виде

$$u_i(t) = \frac{1}{1+\sigma_i}\left(u_{ci}(t) + \sigma_i \tilde{u}_i \operatorname{sat}\left(\frac{u_{ci}(t)}{\tilde{u}_i}\right)\right), \quad i = \overline{1, l}, \tag{3.6}$$

где $\sigma_i > 0$, $0 < \tilde{u}_i < \bar{u}_i$, $u_{ci}(t)$ – новый сигнал управления, необходимый для компенсации неопределенностей объекта (1).

Замечание 3.3. Из (3.6) следует, что при $|u_{ci}(t)| \le \tilde{u}_i$ $u_i(t) = u_{ci}(t)$, при $|u_{ci}(t)| > \tilde{u}_i$ $u_i(t) = \dfrac{1}{1+\sigma_i}\left(u_{ci}(t) + \sigma_i \tilde{u}_i \operatorname{sgn}(u_{ci}(t))\right)$. Тогда при $\sigma_i < \infty$ величина $|u_i(t)|$ может принимать значения, больше, чем $\tilde{u}_i$. Однако при $\sigma_i \to \infty$ $u_i(t) \to \tilde{u}_i \operatorname{sat}\left(\dfrac{u_{ci}(t)}{\tilde{u}_i}\right)$. Значит при достаточно больших σ_i величину $\tilde{u}_i$ можно выбирать достаточно близкой к $\bar{u}_i$. Так при $\tilde{u}_i = \bar{u}_i$ и $\sigma_i \to \infty$ $u_i(t) \to \bar{u}_i \operatorname{sat}\left(\dfrac{u_{ci}(t)}{\bar{u}_i}\right)$. В дальнейшем будет получено условие выбора величины σ_i в (6) для обеспечения $|u_i(t)| \le \bar{u}_i$.

Замечание 3.4. Из (3.6) видно, что коэффициент σ_i можно выбирать из условия $\sigma_i \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. Однако ради простоты синтеза системы управления положим в (3.6) $\sigma_i > 0$.

Принимая во внимание (3.5), зададим закон компенсации возмущений $u_c(t) = [u_{c1}(t), \ldots, u_{cl}(t)]^{\mathrm{T}}$ в виде

$$u_c(t) = -\alpha^{-1}(p)R_m^{-1}(p)Q_m(p)e(t). \qquad (3.7)$$

Перед формулировкой утверждения введем обозначения:

$$W_1 = \left\|Q_m^{-1}(\lambda)R_m(\lambda)\alpha(\lambda)\right\|,\ W_2 = \left\|Q_m^{-1}(\lambda)\right\|,\ W_3 = \sup_{\Xi}\left\|Q_m^{-1}(\lambda)\Delta Q(\lambda)\right\|,$$

$$W_4 = \sup_{\Xi}\left\|Q_m^{-1}(\lambda)Q(\lambda)\right\|,\ W_5 = \sup_{\Xi}\left\|Q_m^{-1}(\lambda)R(\lambda)\right\|,\ W_6 = \left\|\alpha^{-1}(\lambda)R_m^{-1}(\lambda)Q_m(\lambda)\right\|,$$

$$\varepsilon(t) = \left[e^{\mathrm{T}}(t), \dot{e}^{\mathrm{T}}(t), ..., \left(e^{(\nu)}(t)\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}},\ \bar{u} = \left|\left[\bar{u}_1, ..., \bar{u}_l\right]^{\mathrm{T}}\right|.$$

Здесь и далее под $\|W(\lambda)\|$ будем понимать H-∞ норму передаточной функции $W(\lambda)$, т.е. $\|W(\lambda)\| = \sup_{\mathrm{Re}\,\lambda \ge 0}\|W(\lambda)\|_2$.

Сформулируем утверждение, при выполнении условий которого алгоритм (3.6), (3.7) обеспечит выполнение целевого условия (3.2) и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.

Утверждение 3.2. Пусть выполнены условия Предположений 1-3 и Утверждения 1. Тогда при

$$|\varepsilon(0)| \le W_1\bar{u}, \qquad (3.8)$$

$$W_2\bar{f} + W_4\bar{y}_m \le \left(W_1 - W_3W_1 - W_5\right)\bar{u},\ W_1 - W_3W_1 - W_5 > 0, \qquad (3.9)$$

$$\sigma_i \ge \frac{\bar{u}_i + W_6\left(W_2\bar{f} + W_4\bar{y}_m + \left(W_3W_1 + W_5\right)\bar{u}\right)}{\bar{u}_i - \tilde{u}_i}, \qquad (3.10)$$

система управления (3.6), (3.7) обеспечит ограниченность сигналов в замкнутой системе и выполнение целевого условия (3.2) с точностью

$$\delta \le W_2\bar{f} + W_4\bar{y}_m + \left(W_3W_{11} + W_5\right)\bar{u}. \qquad (3.11)$$

Стоит отметить, что оценки (8)-(11) достаточно грубые из-за использования грубых оценок в доказательстве Утверждения 2. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим примеры.

3.5 Примеры управления объектом со скалярными входом и выходом

Рассмотрим объект управления со скалярным входом-выходом, динамические процессы в котором описываются уравнением

$$\left(p^3 - q_3p^2 - q_2p - q_1\right)y(t) = ru(t) + f(t). \qquad (3.12)$$

Множество Ξ задано следующими неравенствами: $-1 \le q_1 \le 2$, $-4 \le q_2 \le -3$, $-0{,}5 \le q_3 \le 1$, $1 \le r < 20$ и $\bar{f} = 0{,}4$. Цель управления состоит в обеспечении условия (3.2) и нахождении функции управления $u(t)$ во множестве [–1; 1].

Выберем $Q_m = (p+1)^3$, $R_m(p) = 1$, $\alpha(p) = (0{,}01p+1)^3 - 1$ и $\tilde{u} = 0{,}97$. Согласно (3.6) и (3.7), сформируем систему управления, представленную следующими уравнениями

$$u_c(t) = -\frac{(p+1)^3}{(0{,}01p+1)^3 - 1} e(t),$$

$$u(t) = \frac{1}{1+\sigma}\left(u_c(t) + 0{,}97\sigma\,\mathrm{sat}\left(\frac{u_c(t)}{0.97}\right)\right). \qquad (3.13)$$

Принимая во внимание множество Ξ, воспользуемся условиями (3.8)-(3.10): $|\varepsilon(0)| < 1{,}15\cdot10^{-2}$, $\bar{y}_m < 0{,}21$, $\sigma > 2{,}3\cdot10^8$. Как отмечалось, эти условия достаточно грубые. Результаты моделирования показали, что система управления будет работоспособной, например, при $\bar{y}_m = 0.4$, $|\varepsilon(0)| \le 0{,}1\sqrt{3}$ и $\sigma = 10^7$. Положим $\sigma = 10^7$. Рассмотрим объект управления (3.12) со следующими параметрами: $q_1 = -1$, $q_2 = -4$, $q_3 = 1$, $r = 1$. $f(t) = 0{,}1 + 0{,}3\sin t$, $y(0) = 0{,}1$, $\dot{y}(0) = 0{,}1$, $\ddot{y}(0) = 0{,}1$. Эталонный сигнал $y_m(t)$ изображен на рис. 3.1 а. На рис. 3.1 б представлены результаты моделирования по $e(t)$, на рис. 3.2 – по $u(t)$.

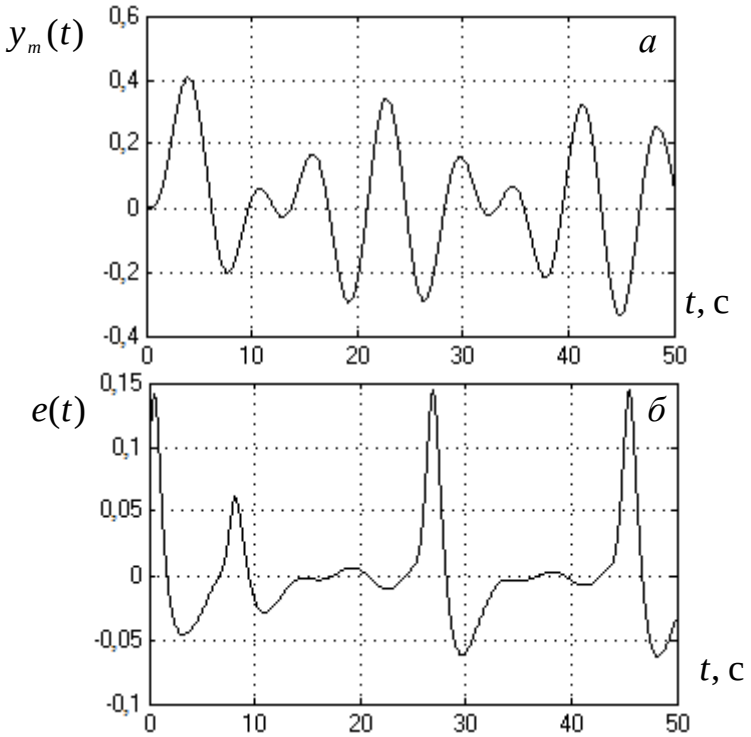


Рис. 3.1. Переходные процессы по $y_m(t)$ (рис. 3.1а) и $e(t)$ (рис. 3.1б)

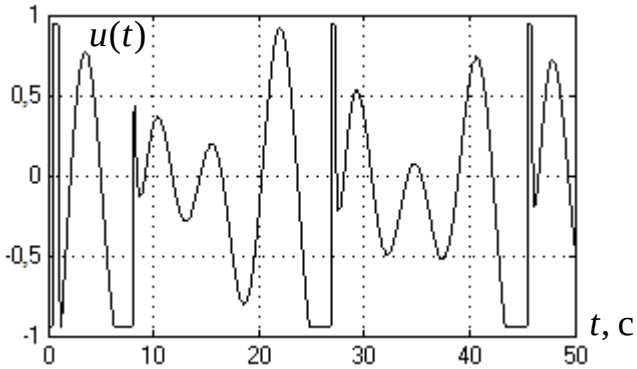


Рис. 3.2. График сигнала управления $u(t)$

Анализ результатов моделирования показал, что замкнутая система робастна по отношению к внешним возмущениям и параметрической неопределенности из заданного класса Ξ. В системе управления с начала ее функционирования динамическая ошибка не превышает значения 0,15. Из рис. 3.2 видно, что сигнал управления находится в заданном отрезке [–1; 1], тогда как без использования алгоритма (13) (то есть при $u(t) = u_c(t)$) сигнал управления $u(t)$ в начальный момент времени достигает значения -10^4, и только на 0,2 с $u(t)$ входит в отрезок [–1,12; 1,12], что недопустимо по условию задачи.

3.6 Пример управления объектом с векторным входом-выходом

Пусть модель объекта управления описывается следующим уравнением

$$\begin{aligned}&\left(p^2+q_1p+q_2\right)y_1(t)+q_3y_2(t)=\left(r_1p+r_2\right)u_1(t)+r_3u_2(t)+f_1(t),\\&\left(p^2+q_4p+q_5\right)y_2(t)+\left(q_6p+q_7\right)y_1(t)=r_4u_2(t)+r_5u_1(t)+f_2(t).\end{aligned}\qquad(3.14)$$

Множество Ξ определено в виде: $q_1 \in [-1; 1]$, $q_2 \in [-1; 1]$, $q_3 \in [1; 3]$, $q_4 \in [-0.5; 2]$, $q_5 \in [-0.5; 2]$, $q_6 \in [-1; 1]$, $q_7 \in [-1; 1]$, $r_1 \in [1; 3]$, $r_2 \in [1; 3]$, $r_3 \in [0; 2]$, $r_4 \in [1; 2]$, $r_5 \in [0; 1]$ и $\bar{f} = 2$. Цель управления состоит в обеспечении условия (3.2) и нахождении функций управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ во множестве [–3,6; 3,6] и [–30; 30] соответственно.

Выберем $Q_m(p)=(p+1)^2 I_2$, $R_m(p)=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$. Тогда $R_m^{-1}(p)=\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}$.

Положим $\alpha(p)=\left[(0{,}01p+1)^2-1\right]I_2$, $\tilde{u}_1=3{,}5$, $\tilde{u}_2=29{,}5$ и $\sigma_1=\sigma_2=10^5$. Согласно (3.6) и (3.7), сформируем систему управления, представленную следующими уравнениями:

$$\begin{bmatrix}u_{c1}(t)\\u_{c2}(t)\end{bmatrix}=-\frac{(p+1)^2}{(0{,}01p+1)^2-1}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1(t)\\e_2(t)\end{bmatrix},\qquad(3.15)$$

$$u_1(t) = \frac{1}{1+10^5}\left(u_{c1}(t) + 3{,}5\cdot 10^5 \operatorname{sat}\left(\frac{u_{c1}(t)}{3{,}5}\right)\right),$$
$$u_2(t) = \frac{1}{1+10^5}\left(u_{c2}(t) + 29{,}5\cdot 10^5 \operatorname{sat}\left(\frac{u_{c1}(t)}{29{,}5}\right)\right). \qquad (3.16)$$

Рассмотрим объект управления (3.14) со следующими параметрами: $q_1 = q_2 = q_3 = 1$, $q_4 = 2$, $q_5 = 3$, $q_6 = q_7 = 1$, $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$, $r_5 = 0{,}1$, $f_1(t) = \sin 1{,}2t$, $f_2(t) = 2\sin t$, $y_1(0) = 0{,}5$, $\dot{y}_1(0) = 0{,}5$, $y_2(0) = 1$, $\dot{y}_2(0) = 1$. Пусть $y_{m1}(t) = 0{,}7 + 0{,}3\sin 0{,}7t$, $y_{m2}(t) = \sin 0{,}3t$. На рис. 3.3 представлены результаты моделирования по ошибкам $e_i(t) = y_i(t) - y_{mi}(t)$, на рис. 3.4 – по $u_i(t)$, $i = 1, 2$.

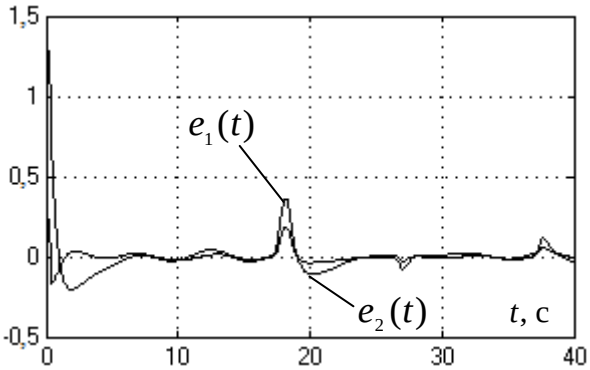


Рис. 3.3. Результаты моделирования по $e_i(t)$, $i = 1, 2$

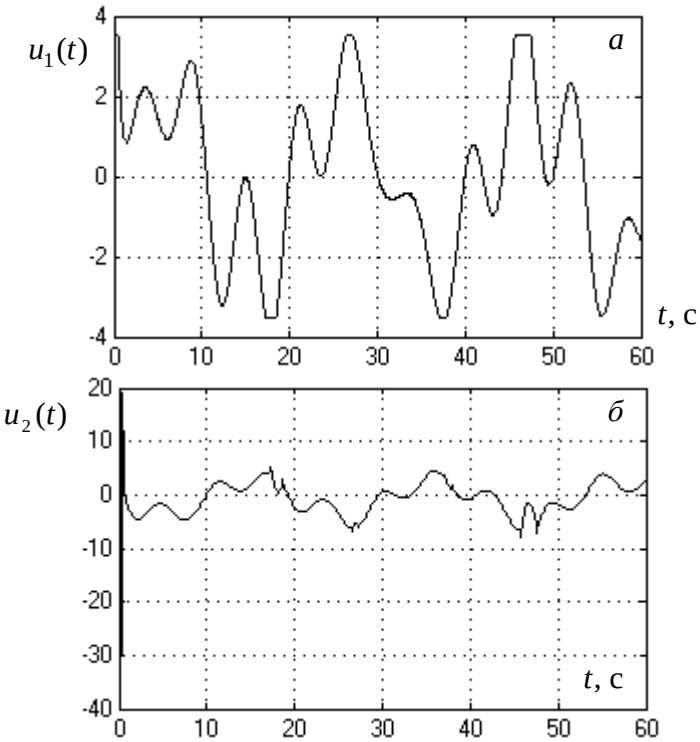


Рис. 3.4. Графики сигналов управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$

Результаты моделирования показали, что система управления робастна по отношению к внешним возмущениям и параметрической неопределенности из заданного класса Ξ. В системе управления через 1 с динамические ошибки не превышают значения 0,4. Из рис. 3.4 видно, что сигналы управления находятся в заданных множествах, тогда как без использования алгоритма (3.16) сигналы $u_1(t)$ и $u_1(t)$ в начальный момент времени достигают значений 12000 и 5000 соответственно, а после 1 с сигнал $u_1(t)$ находится в отрезке [–4,5; 4,5], что недопустимо по условию задачи.

3.7 Заключение

В главе 3 приведен синтез системы управления для линейных динамических объектов с векторными входами-выходами в условиях параметрической неопределенности, внешних возмущений и заданных ограничений на функцию управления. Предложен робастный алгоритм, обобщающий известные результаты [2-6]. Разработана схема формирования сигнала управления и получены условия на параметры объекта управления, эталонной модели и регулятора при выполнении которых система управления будет работоспособной в условии ограничений на управление. При этом алгоритм (3.6), предложенный в условии ограничений на управление, является независимым, то есть им можно дополнить любой из существующих алгоритмов, разработанных без учета ограничений.

3.8 Приложение

Доказательство утверждения 3.1. Подставим (3.5) в (3.4), и, принимая во внимание структуру функции $\varphi(t)$ и разложение (3.3), перепишем (3.4) в виде

$$Q(p)e(t) = R^{-1}(p)\alpha^{-1}(p)R_m^{-1}(p)Q_m(p)e(t) - Q(p)y_m(t) + f(t).$$

Из последнего следует уравнение связи эталонного сигнала и внешнего возмущения с ошибкой слежения, которое определено следующим выражением

$$e(t) = \frac{1}{\det P(p)} \det \alpha(p) \det R_m(p) P^*(p)\big(f(t) - Q(p)y_m(t)\big).$$

Очевидно, что для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы полином $\det P(\lambda)$ был гурвицевым для любых значений параметров объекта (3.1) из множества Ξ. Покажем, что существуют $\alpha(\lambda)$, $R_m(\lambda)$ и $Q_m(\lambda)$ такие, что будет обеспечена гурвицевость полинома $\det P(\lambda)$. Для этого сформулируем вспомогательные леммы.

Лемма 3.1. Пусть заданы многочлены $Q(\lambda)$, $T(\lambda)$ порядков n и m соответственно. Тогда существует многочлены $P(\lambda)$ и $R(\lambda)$ с порядками $k \geq 0$ и $g \geq n-1$ такие, что может быть получен произвольный многочлен $M(\lambda)$ порядка $\mu = \max\{n+k, m+g\}$, который определен следующим соотношением

$$M(\lambda) = Q(\lambda)P(\lambda) + R(\lambda)T(\lambda). \tag{3.17}$$

Доказательство леммы 3.1. Рассмотрим многочлены $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ порядков $m+z+\mu$ и $n+z+\mu$ $(z \geq 0)$ соответственно, которые обеспечивают выполнение следующего условия

$$Q(\lambda)A(\lambda) + B(\lambda)T(\lambda) = M(\lambda), \tag{3.18}$$

Представив многочлены $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ в виде $A(\lambda) = \overline{A}(\lambda)M(\lambda)$ и $B(\lambda) = M(\lambda)\overline{B}(\lambda)$, где $\deg \overline{A}(\lambda) = m+z$, $\deg \overline{B}(\lambda) = n+z$, перепишем (3.18) в виде

$$Q(\lambda)\overline{A}(\lambda)M(\lambda) + M(\lambda)\overline{B}(\lambda)T(\lambda) = M(\lambda). \tag{3.19}$$

Преобразуем $M(\lambda)\overline{B}(\lambda)$ как

$$M(\lambda)\overline{B}(\lambda) = Q(\lambda)N(\lambda) + R(\lambda), \tag{3.20}$$

где $\deg N(\lambda) = \mu + z$. Подставив (3.20) в (3.19), получим

$$Q(\lambda)\left[\overline{A}(\lambda)M(\lambda) + N(\lambda)T(\lambda)\right] + R(\lambda)T(\lambda) = M(\lambda). \tag{21}$$

Т.к. $\deg \overline{A}(\lambda)M(\lambda) = \deg N(\lambda)T(\lambda) \geq \deg P(\lambda)$, то выберем $\overline{A}(\lambda)$, $\overline{B}(\lambda)$ такими, что $\overline{A}(\lambda)M(\lambda) + N(\lambda)T(\lambda) = P(\lambda)$. Следовательно, соотношение (17) выполнено. Лемма 1 доказана.

Лемма 3.1 является обобщением Утверждения 1 в [15] и Леммы 2 в [16]. В [15, 16] рассматриваются многочлены $P(\lambda)$ и $R(\lambda)$ такие, что $\deg P(\lambda) = \deg R(\lambda) = n-1$, что сужает класс разрабатываемых алгоритмов управления. Поскольку в Лемме 1 $\deg P(\lambda) = k \geq 0$ и $\deg R(\lambda) = g \geq n-1$, то Лемму 1 можно применять к построению алгоритмов управления для структурно неопределенных объектов.

Опираясь на результаты Леммы 3.1, рассмотрим Лемму 3.2 для матричных многочленов.

Лемма 3.2. Рассмотрим матричные многочлены $Q(\lambda)$ и $T(\lambda)$ размерности $s \times s$, $\deg Q_{ij}(\lambda) = n_{ij}$, $\deg T_{ij}(\lambda) = m_{ij}$, $i = \overline{1, s}$, $j = \overline{1, s}$. Тогда существуют матричные многочлены $P(\lambda)$ и $R(\lambda)$ размерности $s \times s$ и порядков $\deg P_{ij}(\lambda) = k_{ij} \geq 0$ и $\deg R_{ij}(\lambda) = g_{ij} \geq n_{ij} - 1$ такие, что может быть выполнено следующее соотношение

$$Q(\lambda)P(\lambda) + R(\lambda)T(\lambda) = M(\lambda), \tag{3.22}$$

где $M(\lambda)$ произвольный матричный многочлен размерности $s \times s$ с порядком ij-элемента равным $\mu_{ij} = \max\limits_{r=\overline{1, s}}\{n_{ir} + k_{rj}, m_{rj} + g_{ir}\}$.

Доказательство леммы 3.2. Перепишем (3.22) в виде

$$\sum_{r=1}^{s}\left[Q_{ir}(\lambda)P_{rj}(\lambda)+R_{ir}(\lambda)T_{rj}(\lambda)\right]=M_{ij}(\lambda),\ i=\overline{1,s},\ j=\overline{1,s}.$$

Рассмотрим операторы $A_{rj}(\lambda)$ и $B_{ir}(\lambda)$ порядков $m_{rj}+z_{ij}+\mu_{ij}$ и $n_{ir}+z_{ij}+\mu_{ij}$ $(z_{ij}\geq 0)$ соответственно, такие, что выполнены следующие условия

$$\sum_{r=1}^{s}\left[Q_{ir}(\lambda)A_{rj}(\lambda)+B_{ir}(\lambda)T_{rj}(\lambda)\right]=M_{ij}(\lambda),\ i=\overline{1,s},\ j=\overline{1,s}. \quad (3.23)$$

Представив $A_{rj}(\lambda)$ и $B_{ir}(\lambda)$ в виде $A_{rj}(\lambda)=\overline{A}_{rj}(\lambda)M_{ij}(\lambda)$ и $B_{ir}(\lambda)=M_{ij}(\lambda)\overline{B}_{ir}(\lambda)$, где $\deg\overline{A}_{rj}(\lambda)=m_{rj}+z_{ij}$, $\deg\overline{B}_{ir}(\lambda)=n_{ir}+z_{ij}$, перепишем (3.23) в виде

$$\sum_{r=1}^{s}\left[Q_{ir}(\lambda)\overline{A}_{rj}(\lambda)M_{ij}(\lambda)+M_{ij}(\lambda)\overline{B}_{ir}(\lambda)T_{rj}(\lambda)\right]=M_{ij}(\lambda). \quad (3.24)$$

Преобразуем $M_{ij}(\lambda)\overline{B}_{ir}(\lambda)$ к виду

$$M_{ij}(\lambda)\overline{B}_{ir}(\lambda)=Q_{ir}(\lambda)N_{ij}(\lambda)+R_{ir}(\lambda), \quad (3.25)$$

где $\deg N_{ij}(\lambda)=\mu_{ij}+z_{ij}$. Подставив (3.25) в (3.24), получим

$$\sum_{r=1}^{s}\left[Q_{ir}(\lambda)\left(\overline{A}_{rj}(\lambda)M_{ij}(\lambda)+N_{ij}(\lambda)T_{ri}(\lambda)\right)+R_{ir}(\lambda)T_{rj}(\lambda)\right]=M_{ij}(\lambda).$$

Т.к. $\deg\overline{A}_{rj}(\lambda)M_{ij}(\lambda)=\deg N_{ij}(\lambda)T_{ri}(\lambda)\geq\deg P_{rj}(\lambda)$, то выберем $\overline{A}_{rj}(\lambda)$, $\overline{B}_{ir}(\lambda)$ такими, что $\overline{A}_{rj}(\lambda)M_{ij}(\lambda)+N_{ij}(\lambda)T_{ri}(\lambda)=P_{rj}(\lambda)$. Следовательно, (3.22) будет выполнено. Лемма 3.2 доказана.

Согласно Лемме 3.2 существуют $\alpha(\lambda)$, $Q_m(\lambda)$, $R_m(\lambda)$ такие, что можно получить произвольный многочлен $P(\lambda)$, а следовательно, обеспечить гурвицевость многочлена $\det P(\lambda)$. Причем, соответствующим выбором $\alpha(\lambda)$, $Q_m(\lambda)$, $R_m(\lambda)$ можно обеспечить требуемое значение δ в целевом условии (2).

Доказательство утверждения 3.2. Рассмотрим два случая.

1) Предположим, что в процессе функционирования системы $|u_{ci}(t)|\leq\tilde{u}_i$. Тогда из (3.6) $u_i(t)=u_{ci}(t)$, а значит, будут выполнены условия Утверждения 3.1. Выясним, при каких параметрах объекта и системы управления первый случай будет справедлив. Перепишем (3.7) в виде

$$e(t)=-Q_m^{-1}(p)R_m(p)\alpha(p)u_c(t). \quad (3.26)$$

Оценим (3.26) как $|e(t)|\leq W_1|u_c(t)|\leq W_1\tilde{u}$, где $\tilde{u}=\left|[\tilde{u}_1,...,\tilde{u}_l]^{\mathrm{T}}\right|$. Так как $|e(t)|\leq|\varepsilon(t)|$, то потребуем, чтобы оценка на $\varepsilon(0)$ находилась во множестве

$$|\varepsilon(0)|\leq W_1\tilde{u}. \quad (3.27)$$

Преобразуем уравнение (3.4) к виду

$$e(t)=Q_m^{-1}(p)\left[f(t)-\Delta Q(p)e(t)-Q(p)y_m(t)+R(p)u(t)\right]. \quad (28)$$

Оценим правую часть (3.28) как

$$Q_m^{-1}(p)\left[f(t)-\Delta Q(p)e(t)-Q(p)y_m(t)+R(p)u(t)\right]\le \\ \le W_2\bar{f}+W_3W_1\tilde{u}+W_4\bar{y}_m+W_5\tilde{u}. \tag{3.29}$$

Принимая во внимание условие $|e(t)|\le W_1\tilde{u}$ и (3.29), потребуем выполнение условия

$$W_2\bar{f}+W_3W_{11}\tilde{u}+W_4\bar{y}_m+W_5\tilde{u}\le W_1\tilde{u}\,. \tag{3.30}$$

Тогда из (3.30) следуют верхние оценки на $\bar{f}$ и $\bar{y}_m$ в виде

$$W_2\bar{f}+W_4\bar{y}_m\le(W_1-W_3W_1-W_5)\tilde{u}\,,\ W_1-W_3W_1-W_5>0\,. \tag{3.31}$$

В результате, при $|u_{ci}(t)|\le\tilde{u}_i$ и выполнении условий Утверждения 1, (3.27) и (3.31) целевое условие (3.2) будет выполнено.

2) Рассмотрим случай, когда

$$\tilde{u}_i<|u_{ci}(t)|\le\bar{u}_i\,. \tag{3.32}$$

Т.к. $|e(t)|\le|\varepsilon(t)|$ и $|u_{ci}(t)|\le\bar{u}_i$, то, с учетом (3.26) потребуем, чтобы оценка на начальные условия находилась во множестве (3.8).

Оценим правую часть (3.28) как

$$Q_m^{-1}(p)\left[f(t)-Q(p)y_m(t)-\Delta Q(p)e(t)+R(p)u(t)\right]\le \\ \le W_2\bar{f}+W_4\bar{y}_m+(W_3W_1+W_5)\bar{u}. \tag{3.33}$$

Тогда из (3.33) следует оценка (3.11). Подставив (3.33) в условие $|e(t)|\le W_1\bar{u}$, получим

$$W_2\bar{f}+W_4\bar{y}_m+(W_3W_1+W_5)\bar{u}\le W_1\bar{u}\,. \tag{34}$$

Тогда из (34) следуют оценки (9).

В результате, при $|u_{ci}(t)|\le\bar{u}_i$ и выполнении условий Утверждения 1, (3.8) и (3.9) будет выполнено целевое условие (3.2). Результирующие оценки (3.8), (3.9) следуют из того, что правые части (3.8) и (3.9) меньше, чем правые части (3.31) и (3.34) соответственно.

Теперь определим оценку для коэффициента σ_i, при котором $|u_{ci}(t)|\le\bar{u}_i$. Для этого оценим (3.6) как

$$\frac{1}{1+\sigma_i}\left(u_{ci}(t)+\sigma_i\tilde{u}_i\mathrm{sat}\left(\frac{u_{ci}(t)}{\tilde{u}_i}\right)\right)\le\bar{u}_i\,.$$

Разрешим последнее неравенство относительно σ_i:

$$\sigma_i\ge\frac{\bar{u}_i-u_{ci}(t)}{\bar{u}_i-\tilde{u}_i\mathrm{sat}\left(\dfrac{u_{ci}(t)}{\tilde{u}_i}\right)}\,.$$

Оценим сверху правую часть последнего неравенства в виде

$$\frac{\bar{u}_i-u_{ci}(t)}{\bar{u}_i-\tilde{u}_i\mathrm{sat}\left(\dfrac{u_{ci}(t)}{\tilde{u}_i}\right)}\le\frac{\bar{u}_i+|u_{ci}(t)|}{\bar{u}_i-\tilde{u}_i}\le\frac{\bar{u}_i+W_1|e(t)|}{\bar{u}_i-\tilde{u}_i}\,. \tag{3.35}$$

С учетом (3.35) и (3.11), получим результирующую оценку для σ_i в виде (3.10).

Очевидно, что оценки (3.8)-(3.9) достаточно грубые, но из них видно, что существуют определенные значения параметров объекта, эталонной модели и регулятора, при которых в условии ограничений на сигнал управления можно обеспечить выполнение целевого условия (3.2).

3.9 Задания для самостоятельного решения

Пусть модель объекта управления описывается следующим уравнением

$$\left(p^2 + q_1 p + q_2\right) y_1(t) = \left(r_1 p + r_2\right) u(t) + f(t).$$

Множество Ξ определено в виде: $q_1 \in [-1; 1]$, $q_2 \in [-1; 1]$, $r_1 \in [1; 3]$, $r_2 \in [1; 3]$ и $\bar{f} = 2$. Цель управления состоит в обеспечении условия (3.2) и нахождении управления $u(t)$ во множестве $[-3; 3]$.

Требуется разработать алгоритм управления.

Глава 4. Компенсация возмущений и помех измерения

4.1 Обзор решений

В теории и практике автоматического управления особое внимание уделяется задаче компенсации параметрических и внешних возмущений, которые отрицательно влияют на качество функционирования системы управления. Принцип компенсации возмущений основан на поиске закона управления, значение которого противоположно значению возмущений. Такой подход позволяет управлять объектами без значительного увеличения амплитуды управляющего воздействия.

В настоящее время для компенсации возмущений широко используются метод инвариантных эллипсоидов [1], метод внутренней модели возмущений [2], метод идентификации параметров синусоидальных возмущений [3], метод вложения систем [4], метод синтеза универсальных регуляторов [5], метод вспомогательного контура [6] и т.д.

Однако алгоритмы управления, разработанные на базе методов [1-6], могут не обеспечивать заданных показателей качества переходных процессов при наличии помех измерения. Это связано с тем, что для одновременной компенсации возмущений и помех требуется находить между ними компромисс с учетом особенности математической модели объекта. Помехи измерения могут быть обусловлены как влиянием внешней среды на средства измерения, так и особенностью самих измерительных устройств (абсолютная и относительная погрешности, класс точности, тип устройства и т.п.). В качестве примера можно привести управление электрическим генератором в общей энергетической сети [7-9]. Возмущения связаны с изменением сопротивления линий электропередач (короткое замыкание, суточные изменение нагрузки, обледенение и т.п.), колебанием параметров сети, отклонением механической мощности, подаваемой на генератор, от номинального значения и т.д. [9]. Помехи возникают из-за погрешности измерений угла нагрузки, угловой скорости ротора и переходной ЭДС, особенно в аварийных режимах [7, 8].

Для построения алгоритмов управления в условиях возмущений и помех измерения эффективно используются метод H_∞-оптимизации [10], модифицированный метод вспомогательного контура [6], методы анализа влияния помех измерения на качество работы замкнутой системы [11-13] и т.д. Однако работоспособность алгоритмов [6, 10-13] зависит от выполнения следующего ряда особенностей и ограничений:

1) в [6, 10-13] размерность помех измерения меньше размерности вектора состояния объекта;

2) в [6, 11-13] параметрические и внешние возмущения могут присутствовать только в определенных уравнениях модели объекта;

3) в [6, 13] используется наблюдатель с большим коэффициентом усиления (high-gain observer), поэтому из-за наличия высокочастотной составляющей в помехе измерения увеличивается погрешность оценки производных регулируемой переменной;

4) в [6, 11-13] отсутствуют аналитические условия расчет параметров алгоритма управления. Данные параметры выбираются на этапе моделирования.

В главе 4 предлагается решение, позволяющее преодолеть вышеуказанные проблемы. Рассматривается нелинейный объект управления в форме Лурье. Измерению доступен сигнал равный сумме вектора состояния объекта и помехи измерения, размерности которых совпадают, а параметрические и внешние возмущения могут присутствовать в любом уравнении модели объекта. Таким образом предложенный алгоритм работоспособен при более общих условиях на структуры матриц модели объекта, по сравнению с [6, 10] и не содержит наблюдателей производных регулируемой переменной. Получено условие расчета параметров алгоритма в виде разрешимости линейного матричного неравенства (ЛМН).

4.2 Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, модель которого описывается уравнениями

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B\big(\psi(x) + c_0 u(t) + \varphi(x,t)\big), \tag{4.1}$$

$$z(t) = x(t) + \xi(t), \tag{4.2}$$

где $x(t) = [x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)]^{\mathrm{T}}$ – вектор состояния, $u(t) \in R$ – сигнал управления, $z(t) \in R^n$ – измеряемый сигнал, $\xi(t) = [\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)]^{\mathrm{T}}$ – ограниченная помеха измерения, $\psi(x) \in R$ и $\varphi(x, t) \in R$ – неизвестные функции такие, что $\left|\dfrac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right| \le L$ и $|\dot{\varphi}(x,t)| \le \chi_1$, $L > 0$ и $\chi_1 > 0$ (здесь и далее $|\cdot|$ – евклидова норма соответствующего вектора), $A \in R^{n\times n}$ – известная гурвицева матрица, $B = [b_1, \ldots, b_n]^{\mathrm{T}}$ – известный вектор, c_0 – неизвестный коэффициент такой, что $c_0 \in [c_{\min}, c_{\max}]$, где $c_{\min} > -1$ и $c_{\max}$ известны.

Дополнительно предположим, что $b_i \ne 0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\sup\limits_{t\ge 0}|\xi_i(t)| \le \lim\limits_{t\to\infty}\sup\limits_{t\ge 0}|\xi_k(t)|$ и $\dot{\xi}_i(t)$ – ограниченный сигнал, где $i, k \in \{1, ..., n\}$ и $i \ne k$. Обозначим $|\xi_i(t)| \le \chi_2$ и $|\dot{\xi}_i(t)| \le \chi_3$, где $\chi_2 > 0$ и $\chi_3 > 0$.

Требуется разработать алгоритм управления, который обеспечит устойчивость замкнутой системы и выполнение целевого условия

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{t\geq 0}|x(t)|\leq\delta, \tag{4.3}$$

где значение величины $\delta > 0$ будет определено в Утверждении 1.

Метод решения сформулированной задачи состоит из двух этапов. На первом этапе (раздел 4.3) будет синтезирован алгоритм оценки вектора $\tilde{\xi}=[\xi_1,...,\xi_{i-1},\xi_{i+1},...,\xi_n]^{\mathrm{T}}$, который является частью помехи измерения ξ без i-й компоненты. Зная $\tilde{\xi}$, на втором этапе (раздел 4.4) будет сформирована оценка вектора состояния $\hat{x}$ и будет разработан алгоритм компенсации параметрических и внешних возмущений. Решение задачи базируется на подходах [6, 14].

4.3 Алгоритм компенсации помех измерения

Перепишем выражение (2) в виде

$$z(t)=x(t)+\sum_{j=1}^{n}E_j\xi_j(t), \tag{4.4}$$

где $E_j=[0,...,0,1,0,...,0]^{\mathrm{T}}$ – вектор соответствующей размерности, у которого j-я компонента равна 1, а остальные нулю. Обозначим

$$\tilde{E}=[E_1,...,E_{i-1},E_{i+1},...,E_n]^{\mathrm{T}}$$

и перепишем (4.4) как

$$z(t)=x(t)+\tilde{E}\tilde{\xi}(t)+E_i\xi_i(t). \tag{4.5}$$

Исключим i-е уравнение в (5). Для этого умножим (5) слева на $\tilde{I}$, где $\tilde{I}$ – матрица размерности $(n-1)\times n$, полученная из единичной матрицы порядка n путем вычеркивания i-й строки. В результате получим

$$\tilde{z}(t)=\tilde{I}x(t)+\tilde{\xi}(t), \tag{4.6}$$

где $\tilde{z}(t)=\tilde{I}z(t)$.

Обозначим $f(x,u,t)=\psi(x)+c_0u(t)+\varphi(x,t)$. Продифференцировав (4.6) по времени вдоль траекторий системы (4.1), имеем

$$\dot{\tilde{z}}(t)=\tilde{I}Ax(t)+\tilde{I}Bu(t)+\tilde{I}Bf(x,u,t)+\dot{\tilde{\xi}}(t). \tag{4.7}$$

Выразив в (4.5) переменную $x(t)$ и подставив ее в (4.7), получим

$$\dot{\tilde{z}}(t)=\tilde{I}Az(t)-\tilde{I}A\tilde{E}\tilde{\xi}(t)-\tilde{I}A\tilde{E}_i\xi_i(t)+\tilde{I}Bu(t)+\tilde{I}Bf(x,u,t)+\dot{\tilde{\xi}}(t). \tag{4.8}$$

Введем обозначения

$$\tilde{A}=\tilde{I}A\tilde{E},\ \tilde{A}_1=\tilde{I}A,\ \tilde{A}_2=\tilde{I}AE_i,\ \tilde{B}=\tilde{I}B$$

и перепишем (4.8) в виде

$$\dot{\tilde{\xi}}(t)=\tilde{A}\tilde{\xi}(t)-\tilde{A}_1z(t)+\dot{\tilde{z}}(t)-\tilde{B}u(t)-\tilde{B}f(x,u,t)+\tilde{A}_2\xi_i(t). \tag{4.9}$$

Проинтегрировав выражение (4.9) по t, получим

$$\tilde{\xi}(t)=\int_0^t\left[\tilde{A}\tilde{\xi}(s)-\tilde{A}_1 z(s)\right]ds+\tilde{z}(t)+\tilde{\xi}(0)-\tilde{z}(0)-\int_0^t\left[\tilde{B}\big(u(s)+f(x,u,s)\big)-\tilde{A}_2\xi_i(s)\right]ds. \quad (4.10)$$

Сформируем алгоритм оценки сигнала $\tilde{\xi}(t)$ в виде

$$\hat{\xi}(t)=\int_0^t\left[\tilde{A}\hat{\xi}(s)-\tilde{A}_1 z(s)\right]ds+\tilde{z}(t)+\gamma, \quad (4.11)$$

где $\hat{\xi}(t)$ – вектор оценки сигнала $\tilde{\xi}(t)$, $\gamma\in R$ – коэффициент, выбираемый разработчиком.

Рассмотрим ошибку

$$e(t)=\tilde{\xi}(t)-\hat{\xi}(t), \quad (4.12)$$

которая характеризует качество оценивания вектора $\tilde{\xi}(t)$ с использованием алгоритма (4.11). Принимая во внимание (4.9) и (4.11), продифференцируем (4.12) по времени:

$$\dot{e}(t)=\tilde{A}e(t)-\tilde{B}\big(u(t)+f(x,u,t)\big)+\tilde{A}_2\xi_i(t). \quad (4.13)$$

Из уравнения (4.13) следует, что на величину ошибки e влияют значения сигналов ξ_i, f и u. Причем, соответствующим выбором управления u можно уменьшить влияние возмущения f на качество оценивания вектора $\tilde{\xi}$. Решению проблемы компенсации возмущения f посвящен следующий раздел.

4.4 Алгоритм компенсации возмущений

Выразим в системе (1) i-е уравнение. Для этого умножим слева (4.1) на матрицу E_i:

$$\dot{x}_i(t)=E_i^{\mathrm{T}}Ax(t)+E_i^{\mathrm{T}}Bu(t)+E_i^{\mathrm{T}}Bf(x,u,t), \quad (4.14)$$

где $x_i(t)=E_i^{\mathrm{T}}x(t)$. Найдем из (14) сигнал возмущения в виде

$$f(x,u,t)=\left(E_i^{\mathrm{T}}B\right)^{-1}\left[\dot{x}_i(t)-E_i^{T}Ax(t)-E_i^{T}Bu(t)\right]. \quad (4.15)$$

Из (4.15) следует, что для получения информации о функции $f(x, u, t)$ необходима информация о сигналах $x(t)$ и $\dot{x}_i(t)$. Однако данная информация напрямую не доступна из постановки задачи. Поэтому дальнейшие действия связаны с получением оценок данных сигналов.

В предыдущем разделе синтезирован алгоритм (4.11), который позволяет оценить часть сигнала помехи $\xi(t)$ в (4.2) в виде $\hat{\xi}(t)$. Воспользуемся функцией $\hat{\xi}(t)$ для уточнения оценки вектора состояния. Пусть $\hat{x}(t)$ – оценка $x(t)$. Принимая во внимание (4.5) и (4.12), запишем выражение для $\hat{x}(t)$ как

$$\hat{x}(t)=z(t)-\tilde{E}\hat{\xi}(t)=x(t)+\tilde{E}e(t)+E_i\xi_i(t). \quad (4.16)$$

Следуя [14], введем оценку $\hat{f}(x,u,t)$ возмущения $f(x, u, t)$ в виде

$$\hat{f}(x,u,t)=\left(E_i^{\mathrm{T}}B\right)^{-1}\left[\dot{\hat{x}}_i(t)-E_i^{\mathrm{T}}A\hat{x}(t)-\alpha(p)E_i^{\mathrm{T}}Bv(t)\right], \quad (4.17)$$

где $v(t)$ – вспомогательное управляющее воздействие, $p = d / dt$, $\alpha(p)$ – линейный дифференциальный оператор такой, что полином $1 - \alpha(\lambda)$ гурвицевый (λ – комплексная переменная) или $1 - \alpha(\lambda) = \lambda\beta(\lambda)$, где $\beta(\lambda)$ гурвицевый полином (если $\deg \alpha(\lambda) = 1$, то $\beta(\lambda)$ – положительное число). Устойчивость полинома $1 - \alpha(\lambda)$ или $\beta(\lambda)$ требуется для обеспечения устойчивости закона управления. Для компенсации возмущения введем $v(t)$ в виде

$$v(t) = -\hat{f}(\hat{x}, v). \tag{4.18}$$

Подставив (4.17) в (4.18), получим следующее выражение

$$(1 - \alpha(p))v(t) = -\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1}\left[\dot{\hat{x}}_i(t) - E_i^{\mathrm{T}} A\hat{x}(t)\right]. \tag{4.19}$$

Зададим $\alpha(p) = 1 - \mu p$, где $\mu > 0$. Проинтегрировав (4.19) по t, получим

$$v(t) = -\frac{1}{\mu}\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1}\left[\hat{x}_i(t) - E_i^{\mathrm{T}} A\int_0^t \hat{x}(s)ds - \hat{x}_i(0) + \mu E_i^{\mathrm{T}} Bv(0)\right]. \tag{4.20}$$

Для компенсации возмущения f закон управления можно выбрать в виде $u(t) = v(t)$. Как будет показано в доказательстве утверждения 1, работоспособность закона управления не зависит от точной информации о величинах $\hat{x}_i(0)$ и $v(0)$, то есть закон управления можно сформировать в виде

$$u(t) = -\frac{1}{\mu}\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1}\left[\hat{x}_i(t) - E_i^{\mathrm{T}} A\int_0^t \hat{x}(s)ds - \theta\right], \tag{4.21}$$

где $\theta \in R$ – коэффициент, выбираемый разработчиком.

Перед формулировкой утверждения введем следующие обозначения:

$$A_{21} = \frac{1+c_0}{\mu}A,\ \ A_{22} = -\frac{1+c_0}{\mu}I_n + A,\ \ A_{23} = \frac{1+c_0}{\mu}B\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1} E_i^{\mathrm{T}} A\tilde{E},$$

$$A_{43} = \frac{1+c_0}{\mu}\left[\tilde{A} - \tilde{B}\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1} E_i^{T} A\tilde{E}\right],\ \ A_{44} = -\frac{1+c_0}{\mu}I_{n-1} + \tilde{A},$$

$$F = \begin{bmatrix} \mathrm{O}_{n\times 1} \\ B \\ \mathrm{O}_{(n-1)\times 1} \\ -\tilde{B} \end{bmatrix},\ \ B_{21} = B,\ \ B_{22} = -\frac{1+c_0}{\mu}B\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1} E_i^{\mathrm{T}} AE_i,\ \ B_{23} = -\frac{1+c_0}{\mu}B\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1},$$

$$B_{41} = -\tilde{B},\ \ B_{42} = -\frac{1+c_0}{\mu}\left(\tilde{B}\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1} E_i^{\mathrm{T}} AE_i - \tilde{A}_2\right),\ \ B_{43} = \frac{1+c_0}{\mu}\tilde{B}\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1} + \tilde{A}_2,$$

$$C = \left[\mathrm{O}_{n\times n}\ I_n\ \mathrm{O}_{n\times(n-1)}\ \mathrm{O}_{n\times(n-1)}\right],$$

$$A_e = \begin{bmatrix} \mathrm{O}_{n\times n} & I_n & \mathrm{O}_{n\times(n-1)} & \mathrm{O}_{n\times(n-1)} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \mathrm{O}_{n\times(n-1)} \\ \mathrm{O}_{(n-1)\times n} & \mathrm{O}_{(n-1)\times n} & \mathrm{O}_{(n-1)\times(n-1)} & I_{n-1} \\ \mathrm{O}_{(n-1)\times n} & \mathrm{O}_{(n-1)\times n} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix},\ \ B_e = \begin{bmatrix} \mathrm{O}_{n\times 1} & \mathrm{O}_{n\times 1} & \mathrm{O}_{n\times 1} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ \mathrm{O}_{(n-1)\times 1} & \mathrm{O}_{(n-1)\times 1} & \mathrm{O}_{(n-1)\times 1} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} \end{bmatrix},$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} A_e^{\mathrm{T}} P + PA_e + 2\beta P + \tau L^2 C^{\mathrm{T}} C & PF & PB_e \\ * & -\tau & \mathrm{O}_{1\times 3} \\ * & * & -\rho I_3 \end{bmatrix}. \qquad (4.22)$$

Здесь $\mathrm{O}_{n\times l}$ – нулевая матрица размерности $n \times l$, I_n – единичная матрица порядка n, $\beta > 0$, $\rho > 0$, $\tau > 0$, $P > 0$ – положительно определенная матрица, "*" обозначает симметричный блок симметричной матрицы.

Утверждение 4.1. Рассмотрим систему управления, состоящую из объекта (4.1), (4.2), алгоритма оценки помехи (4.11) и закона управления (4.16), (4.21). Пусть для заданных чисел $\beta > 0$ и $\mu > 0$ существуют коэффициенты $\tau > 0$, $\rho > 0$ и матрица $P > 0$ такие, что выполнено линейное матричное неравенство (ЛМН) $\Psi < 0$. Тогда замкнутая система (4.1), (4.2), (4.11), (4.16), (4.21) устойчива и выполнено целевое условие (4.3), где

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho \sum_{i=1}^{3} \chi_i^2}{2\beta\lambda_{\min}(P)}}, \qquad (4.23)$$

$\lambda_{\min}(P)$ – наименьшее собственное число матрицы P.

В Утверждении 4.1 ЛМН $\Psi < 0$ зависит от неизвестного параметра c_0, который принадлежит известному отрезку $[c_{\min}, c_{\max}]$. Поэтому для проверки $\Psi < 0$ сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 4.2. ЛМН $\Psi < 0$ выполнено, если выполнены следующие два ЛМН:

$$\Psi^- < 0 \text{ и } \Psi^+ < 0, \qquad (4.24)$$

где $\Psi^- = \Psi\big|_{A_e = A_e^-,\, B_e = B_e^-}$, $\Psi^+ = \Psi\big|_{A_e = A_e^+,\, B_e = B_e^+}$, $A_e^- = A_e\big|_{c_0 = c_{\min}}$, $A_e^+ = A_e\big|_{c_0 = c_{\max}}$, $B_e^- = B_e\big|_{c_0 = c_{\min}}$, $B_e^+ = B_e\big|_{c_0 = c_{\max}}$.

4.5 Пример

Рассмотрим объект управления (4.1), (4.2), где $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $c_0 \in [-0{,}5;\ 5]$ и $L = 4{,}5$. Остальные параметры в объекте (4.1), (4.2) будут определены ниже.

Сформируем алгоритм управления. В качестве i-го уравнения выберем третье уравнение в (4.1). Тогда $\tilde{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Следовательно, $\tilde{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ и $\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Примем $\gamma = 0$ и сформируем алгоритм оценки помехи (4.11) в виде

$$\hat{\xi}(t)=\int_0^t\left(\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\hat{\xi}(s)-\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix}z(s)\right)ds+\tilde{z}(t),$$

где $\tilde{z}(t)=[z_1(t), z_2(t)]^{\mathrm{T}}$. Так как $E_i=[0\,0\,1]^{\mathrm{T}}$, то $E_i^{\mathrm{T}}B=3$ и $E_i^{\mathrm{T}}A=[-1\,0\,0]$. Зададим $\theta=0$ и определим сигнал управления (4.21) в виде

$$u(t)=-\frac{1}{3\mu}\left(\hat{x}_i(t)-\int_0^t([-1\,0\,0]\hat{x}(s))ds\right), \tag{4.25}$$

где, согласно (16), $\hat{x}(t)=z(t)-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\hat{\xi}(t)$.

Проверим условия Утверждения 2 с помощью пакета Yalmip. ЛМН, заданные (4.24), выполнены при $\mu\le 0{,}019$. Проверка моделированием в Matlab Simulink для $\psi(x)=\sum_{i=1}^{3}x_i(t)+0{,}5\cos x_i(t)$ показала, что замкнутая система сохраняет устойчивость при $\mu\le 0{,}057$. Таким образом расчет предельного значения параметра μ с использованием условий Утверждения 2 дает небольшое отклонение от предельного значения, полученного моделированием в Matlab Simulink.

Продемонстрируем качество функционирования системы управления. Зададим $\mu=0{,}01$ в (4.25). Пусть в (4.1), (4.2) $x(0)=[1\ 1\ 1]^{\mathrm{T}}$, $c_0=1$, $\psi(x)=\sum_{i=1}^{3}x_i(t)+0{,}5\cos x_i(t)$ и

$$\begin{gathered}\varphi(x,t)=5+2\sin 0{,}7t[\cos(2x_1)+\sin(1{,}1x_2)+\cos(1{,}7x_3)],\\ \xi_1(t)=1+10\sin 3t,\ \xi_2(t)=-2+7\cos 3t,\ \xi_3(t)=0{,}01\sin 0{,}8t.\end{gathered} \tag{4.26}$$

Для данных параметров система (4.1) неустойчивая. На рис. 4.1 приведены результаты переходных процессов по $x(t)$.

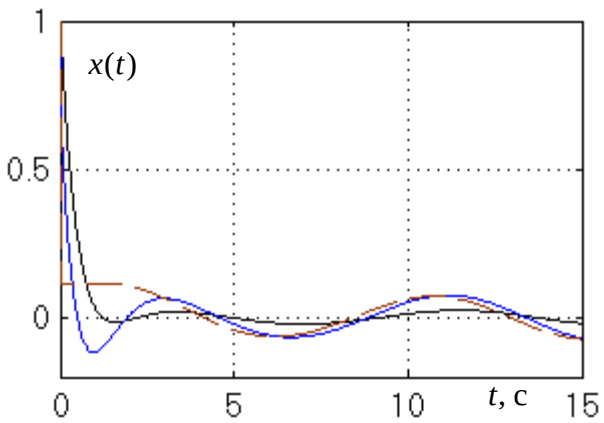


Рис. 4.1. Переходные процессы по $x(t)$ при возмущении и помехе вида (4.26)

Рассмотрим теперь работоспособность системы управления при наличии случайных составляющих в возмущении и помехе:

$$\varphi(x,t) = 5 + 2\sin 0{,}7t\left[\cos(2x_1) + \sin(1{,}1x_2) + \cos(1{,}7x_3)\right] + d_1(t),$$
$$\xi_1(t) = 1 + 10\sin 3t + d_2(t),\ \ \xi_2(t) = -2 + 7\cos 3t + d_3(t),\ \ \xi_3(t) = 0{,}01\sin 0{,}8t + d_4(t), \tag{4.27}$$

где сигналы $d_1(t)$, $d_2(t)$, $d_3(t)$ и $d_4(t)$ получены с помощью генераторов белого шума в Matlab Simulink со следующими параметрами: мощность шума (noise power) 1, 3, 5, 10^{-4} и время выборки (sample time) 0,1 (с), 0,01 (с), 0,03 (с), 0,1 (с) соответственно. На рис. 4.2 приведены результаты переходных процессов по $x(t)$.

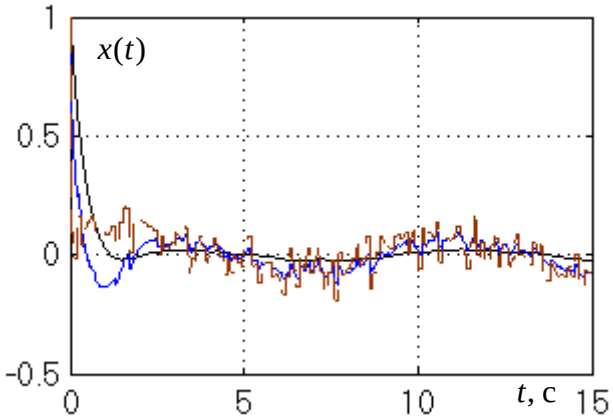


Рис. 4.2. Переходные процессы по $x(t)$ при случайных возмущении и помехе вида (4.27)

Проверим теперь качество функционирования системы управления при следующих условиях:

$$\varphi(x,t) = 5 + 2\sin 0{,}7t\left[\cos(2x_1) + \sin(1{,}1x_2) + \cos(1{,}7x_3)\right] + d_1(t),$$
$$z_1 = q_1(x_1),\ \ z_2 = q_2(x_2),\ \ z_3 = q_3(x_3), \tag{4.28}$$

где q_1, q_2 и q_3 – функции квантования по уровню с интервалами квантования 0,5, 1,3 и 0,05 соответственно. В работах [11, 12] отмечалось, что сигнал квантования по уровню можно представить в виде аддитивной помехи. На рис. 4.3 приведены результаты моделирования по $x(t)$.

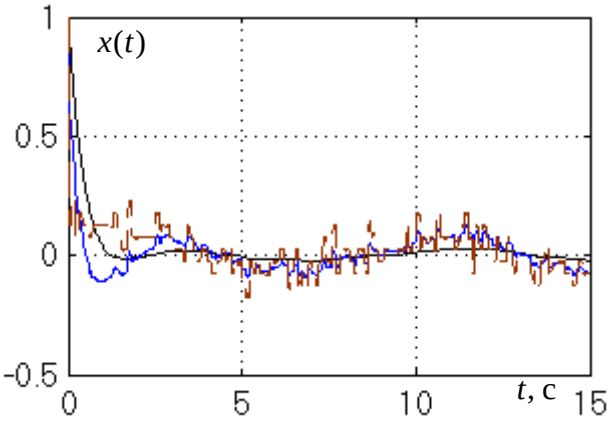


Рис. 4.3. Переходные процессы по $x(t)$ в условиях (4.28)

Результаты моделирования продемонстрировали, что расчет предельного значения параметра μ с использованием условий Утверждения 2 дает небольшое отклонение от предельного значения, полученного моделированием в Matlab Simulink. Также продемонстрирована робастность системы управления к наличию случайных составляющих в возмущении и сигналах помехи. Как видно из рис. 4.1-4.3 величина δ в (4.3) не превышает значения 0,37 спустя 3 (с) с начала моделирования во всех трех случаях.

4.6 Заключение

Получен алгоритм компенсации возмущений и помех измерения, действующих на нелинейные динамические объекты с неизвестными параметрами. В отличие от существующих результатов, предложенный алгоритм работоспособен в условиях помех измерения, размерности которых равны размерности вектора состояния, не используется наблюдатель производных, а параметрические и внешние возмущения могут присутствовать в любом уравнении модели объекта. Получены условия расчета параметров алгоритма управления для обеспечения устойчивости замкнутой системы. Результаты моделирования подтвердили результаты аналитических расчетов и эффективность предложенной схемы управления.

4.7 Приложение

Доказательство утверждения 4.1. Доказательство утверждения 4.1 разделим на четыре шага. На шаге 1 будет получено уравнение по переменной x с учетом (4.1), (4.13), (4.15)-(4.18), (4.20), (4.21). На шаге 2 будет получено уравнение по переменной e с учетом (4.1), (4.13), (4.15)-(4.18), (4.20), (4.21). На базе полученных уравнений по переменным x и e на шаге 3 будет сформировано уравнение замкнутой системы и проведен анализ его устойчивости. На шаге 4 будет показана ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.

Шаг 1. Из (4.20) и (4.21) следует, что $u(t)$ и $v(t)$ отличаются на константу $\varsigma = \frac{1}{\mu}\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1}\left[\theta - \hat{x}_i(0) + \mu E_i^{\mathrm{T}} B u(0)\right]$, то есть

$$u(t) - v(t) = \varsigma. \tag{4.29}$$

Принимая во внимание (4.15) и (4.17), перепишем (4.18) в виде

$$\begin{gathered} v(t) = -\psi(x) - c_0 u(t) - \varphi(x,t) - \\ - \left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1}\left[\dot{\hat{x}}_i(t) - \dot{x}_i(t)\right] + \left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1} E_i^{\mathrm{T}} A\left[\hat{x}(t) - x(t)\right] - u(t) + \alpha(p) v(t). \end{gathered} \tag{4.30}$$

Пологая $\alpha(p) = 1 - \mu p$ и учитывая (4.29), перепишем (4.30) как

$$(1+c_0+\mu p)u(t) = -\psi(x) - \varphi(x,t) - \left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1}\left(\dot{\hat{x}}_i(t) - \dot{x}_i(t) - E_i^{\mathrm{T}} A\left[\hat{x}(t) - x(t)\right]\right).$$

С учетом (4.30) и (4.15), составим следующее выражение

$$\begin{gathered}(1+c_0+\mu p)(u(t)+f(x,u,t)) = \mu p(\psi(x)+\varphi(t)) - \\ -(1+c_0)\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1}\left(\dot{\xi}_i(t) - E_i^{\mathrm{T}} A\left[\tilde{E}e(t) + E_i\xi_i(t)\right]\right).\end{gathered} \tag{4.31}$$

Умножим слева (4.1) на оператор $(1+c_0+\mu p)$ и, с учетом (4.31), перепишем (4.1) в виде

$$\begin{gathered}(1+c_{02}+\mu p)(\dot{x}(t) - Ax(t)) = \\ B\left[\mu p(\psi(x)+\varphi(t)) - (1+c_0)\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1}\left(\dot{\xi}_i(t) - E_i^{\mathrm{T}} A\left[\tilde{E}e(t) + E_i\xi_i(t)\right]\right)\right].\end{gathered} \tag{4.32}$$

Преобразуем (4.32) к виду

$$\begin{gathered}\ddot{x}(t) = \frac{1}{\mu}\left(-I_n - c_0 I_n + \mu A\right)\dot{x}(t) + \frac{1}{\mu}(1+c_0)Ax(t) + B\dot{\psi}(x) \\ + B\dot{\varphi}(t) - \frac{1}{\mu}(1+c_0)B\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1}\left(\dot{\xi}_i(t) - E_i^{\mathrm{T}} A\tilde{E}e(t) + E_i^{\mathrm{T}} AE_i\xi_i(t)\right).\end{gathered} \tag{4.33}$$

Обозначим $\eta_1(t) = x(t)$, $\eta_2(t) = \dot{x}(t)$ и, с учетом обозначений (4.22), перепишем дифференциальное уравнение (4.33) в виде следующей системы

$$\begin{gathered}\dot{\eta}_1(t) = \eta_2(t), \\ \dot{\eta}_2(t) = A_{21}\eta_1(t) + A_{22}\eta_2(t) + A_{23}e(t) + B\dot{\psi}(\eta_1) + B_{21}\dot{\varphi}(t) + B_{22}\xi_i(t) + B_{23}\dot{\xi}_i(t).\end{gathered} \tag{4.34}$$

Шаг 2. Умножим слева (4.13) на оператор $(1+c_{02}+\mu p)$ и, с учетом (4.31), перепишем (4.13) как

$$\begin{gathered}(1+c_0+\mu p)\left(\dot{e}(t) - \tilde{A}e(t)\right) = -\tilde{B}\left(\mu p(\psi(x)+\varphi(t))\right) + \\ + \tilde{B}(1+c_0)\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1}\left(\dot{\xi}_i(t) - E_i^{\mathrm{T}} A\left[\tilde{E}e(t) + E_i\xi_i(t)\right]\right) + (1+c_0+\mu p)\tilde{A}_2\xi_i(t).\end{gathered} \tag{4.35}$$

Преобразуем (4.35) к виду

$$\begin{gathered}\ddot{e}(t) = \frac{1}{\mu}\left(-I_{n-1} - c_0 I_{n-1} + \mu\tilde{A}\right)\dot{e}(t) + \\ + \frac{1}{\mu}\left[(1+c_0)\tilde{A} - \tilde{B}(1+c_0)\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1} E_i^{\mathrm{T}} A\tilde{E}\right]e(t) - \tilde{B}\dot{\psi}(x) \\ - \tilde{B}\dot{\varphi}(t) + \frac{1}{\mu}\tilde{B}(1+c_0)\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1}\left(\dot{\xi}_i(t) - E_i^{\mathrm{T}} AE_i\xi_i(t)\right) + \\ + \frac{1}{\mu}(1+c_0)\tilde{A}_2\xi_i(t) + \tilde{A}_2\dot{\xi}_i(t).\end{gathered} \tag{4.36}$$

Обозначим $\sigma_1(t) = e(t)$, $\sigma_2(t) = \dot{e}(t)$ и, с учетом обозначений (4.22), преобразуем уравнение (36) к следующей системе

$$\begin{gathered}\dot{\sigma}_1(t) = \sigma_2(t), \\ \dot{\sigma}_2(t) = A_{43}\sigma_1(t) + A_{44}\sigma_2(t) - \tilde{B}\dot{\psi}(\eta_1) + B_{41}\dot{\varphi}(t) + B_{42}\xi_i(t) + B_{43}\dot{\xi}_i(t).\end{gathered} \tag{4.37}$$

Шаг 3. Введем векторы $x_e = \mathrm{col}\{\eta_1, \eta_2, \sigma_1, \sigma_2\}$ и $d = \left[\dot{\varphi}, \xi_i, \dot{\xi}_i\right]^{\mathrm{T}}$. Принимая во внимание обозначения (4.22), объединим системы (4.34) и (4.37) в виде

$$\dot{x}_e(t) = A_e x_e(t) + F\dot{\psi}(\eta_1) + B_e d(t). \tag{4.38}$$

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = x_e^{\mathrm{T}}(t)Px_e(t). \tag{4.39}$$

Вычислим производную от (39) вдоль траекторий системы (4.38):

$$\dot{V} = x_e^{\mathrm{T}}(t)\left(A_e^T P + PA_e\right)x_e(t) + 2x_e^{\mathrm{T}}(t)PF\dot{\psi}(\eta_1) + 2x_e^{\mathrm{T}}(t)PB_e d(t). \tag{4.40}$$

Найдем условие, при котором будет выполнено неравенство

$$\dot{V} + 2\beta V - \rho d^{\mathrm{T}} d \le 0. \tag{4.41}$$

Для этого, принимая во внимание (4.39) и (4.40), перепишем (4.41) в виде

$$\begin{gathered} x_e^{\mathrm{T}}(t)\left(A_e^T P + PA_e\right)x_e(t) + 2x_e^{\mathrm{T}}(t)PF\dot{\psi}(\eta_1) + \\ + 2x_e^{\mathrm{T}}(t)PB_e d(t) + 2\beta x_e^{\mathrm{T}}(t)Px_e(t) - \rho d^{\mathrm{T}}(t)d(t) \le 0. \end{gathered} \tag{4.42}$$

С учетом того, что $\dot{\psi}(\eta_1) = \dfrac{\partial\psi(x)}{\partial x}Cx_e$ и $\left|\dfrac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right| \le L$, рассмотрим оценку для нелинейной функции $\dot{\psi}^2(\eta_1)$ в виде

$$\dot{\psi}^2(\eta_1) \le L^2 x_e^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} C x_e. \tag{4.43}$$

Ведем вектор $z = col\{x_e, \dot{\psi}(\eta_1), d\}$ и перепишем (4.42) и (4.43) как

$$z^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A_e^{\mathrm{T}}P + PA_e + 2\beta P & PF & PB_e \\ * & 0 & \mathrm{O}_{1\times 3} \\ * & * & -\rho I_3 \end{bmatrix} z \le 0 \text{ и } z^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} L^2 C^{\mathrm{T}} C & \mathrm{O}_{2(2m-1)\times 1} & \mathrm{O}_{2(2m-1)\times 3} \\ * & -1 & \mathrm{O}_{1\times 3} \\ * & * & \mathrm{O}_{3\times 3} \end{bmatrix} z \ge 0. \tag{4.44}$$

Согласно S-процедуре, для одновременного выполнения условий (4.44) достаточно, чтобы было выполнено ЛМН $\Psi < 0$. Таким образом (4.41) выполнено при $\Psi < 0$, а значит, вектор x_e – предельно ограниченный. С другой стороны, разрешая (4.41) относительно V и учитывая (4.39), найдем следующее предельное соотношение $\lim\limits_{t\to\infty}\sup\limits_{t\ge 0}\left(x_e^{\mathrm{T}}Px_e\right) \le \dfrac{\rho\bar{d}^2}{2\beta}$. С учетом того, что $\lambda_{\min}(P)x^{\mathrm{T}}x \le \lambda_{\min}(P)x_e^{\mathrm{T}}x_e \le x_e^{\mathrm{T}}Px_e$ получим оценку для δ в виде (4.23).

Шаг 4. Поскольку вектор x_e предельно ограниченный, то сигналы x, $\dot{x}$, e и $\dot{e}$ предельно ограниченные. Ограниченность сигналов z, $\tilde{z}$ и $\dot{z}_i$ следует из (4.5), (4.6) и ограниченности ξ, $\dot{\xi}_i$. Сигналы $\hat{x}$ и $\dot{\hat{x}}$ ограничены из (4.16). Из (31) следует ограниченность сигнала u. Ограниченность $\int\limits_0^t \hat{x}(s)ds$ следует из (4.21). Сигнал $\hat{\xi}$ ограничен из (4.12). Таким образом, функция $\int\limits_0^t\left[\tilde{A}\hat{\xi}(s) - \tilde{A}_1 z(s)\right]ds$ ограничена из (4.11). Следовательно, все сигналы ограничены в замкнутой системе.

Доказательство утверждения 4.2. Перепишем матрицы A_e и B_e в виде

$$A_e = A_0 + \frac{1+c_0}{\mu}A_1 \text{ и } B_e = B_0 + \frac{1+c_0}{\mu}B_1, \tag{4.45}$$

где

$$A_0 = \begin{bmatrix} \mathrm{O}_{n\times n} & I_n & \mathrm{O}_{n\times(n-1)} & \mathrm{O}_{n\times(n-1)} \\ \mathrm{O}_{n\times n} & A & \mathrm{O}_{n\times(n-1)} & \mathrm{O}_{n\times(n-1)} \\ \mathrm{O}_{(n-1)\times n} & \mathrm{O}_{(n-1)\times n} & \mathrm{O}_{(n-1)\times(n-1)} & I_{n-1} \\ \mathrm{O}_{(n-1)\times n} & \mathrm{O}_{(n-1)\times n} & \mathrm{O}_{(n-1)\times(n-1)} & \widetilde{A} \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{O}_{n\times n} & \mathrm{O}_{n\times n} & \mathrm{O}_{n\times(n-1)} & \mathrm{O}_{n\times(n-1)} \\ A & -I_n & B\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1} E_i^{\mathrm{T}} A\widetilde{E} & \mathrm{O}_{n\times(n-1)} \\ \mathrm{O}_{(n-1)\times n} & \mathrm{O}_{(n-1)\times n} & \mathrm{O}_{(n-1)\times(n-1)} & \mathrm{O}_{(n-1)\times(n-1)} \\ \mathrm{O}_{(n-1)\times n} & \mathrm{O}_{(n-1)\times n} & \widetilde{A} - \widetilde{B}\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1} E_i^{T} A\widetilde{E} & -I_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} \mathrm{O}_{n\times 1} & \mathrm{O}_{n\times 1} & \mathrm{O}_{n\times 1} \\ B & \mathrm{O}_{n\times 1} & \mathrm{O}_{n\times 1} \\ \mathrm{O}_{(n-1)\times 1} & \mathrm{O}_{(n-1)\times 1} & \mathrm{O}_{(n-1)\times 1} \\ -\widetilde{B} & \mathrm{O}_{(n-1)\times 1} & \widetilde{A}_2 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{O}_{n\times 1} & \mathrm{O}_{n\times 1} & \mathrm{O}_{n\times 1} \\ \mathrm{O}_{n\times 1} & -B\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1} E_i^{\mathrm{T}} AE_i & -B\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1} \\ \mathrm{O}_{(n-1)\times 1} & \mathrm{O}_{(n-1)\times 1} & \mathrm{O}_{(n-1)\times 1} \\ \mathrm{O}_{(n-1)\times 1} & -\widetilde{B}\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1} E_i^{\mathrm{T}} AE_i + \widetilde{A}_2 & \widetilde{B}\left(E_i^{\mathrm{T}} B\right)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Из (4.22) следует, что матрица Ψ аффинна по матрицам системы (4.38). Из (4.45) следует, что матрицы A_e и B_e аффинны по параметру c_0. Таким образом, согласно замечанию 2 в [15], для проверки ЛМН $\Psi < 0$ достаточно вычислить Ψ в вершинах $c_0 \in [c_{\min}, c_{\max}]$, то есть достаточно проверить два ЛМН (4.24).

4.8 Задания для самостоятельного решения

Рассмотрим объект управления (4.1), (4.2), где $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $c_0 \in [1; 10]$ и $L = 3$. Пусть $\lim\limits_{t\to\infty} \sup\limits_{t\geq 0} \left|\xi_i(t)\right| < \lim\limits_{t\to\infty} \sup\limits_{t\geq 0} \left|\xi_k(t)\right|$, где $i, k \in \{1, ..., 4\}$, $i \neq k$ выполнено для $i = 4$.

Синтезировать алгоритм компенсации возмущений и помех измерения.

Список рекомендуемой литературы

Список литературы к главе 1

1. *Luinberger D.* Observers for multivariable systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1966. Vol. AC-11. No. 2. P. 190-197.

2. *Kalman R.E.* A new approach to linear filtering and prediction problems // Trans. ASME – J. Basic Engineer. 1960. No. 82 (Ser. D). P. 35-45.

3. *Esfandiary F., Khalil H.K.* Output feedback stabilization of fully linearizable systems // Int. J. Control. 1992. Vol. 56. No. 5. P. 1007-1037.

4. *Бобцов А.А.* Алгоритм робастного управления в задаче слежения за эталонным сигналом // Автоматика и телемеханика. 2003. №. 6. С. 104-113.

5. *Slotine J.J.E., Hedrick J.K., Misawa E.A.* On sliding observers for nonlinear systems // J. Dynam. Syst., Measurement, Control. 1987. Vol. 109. P. 245-252.

6. *Utkin V.I.* Sliding-modes in control optimization. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

7. *Han J.* A class of extended state observers for uncertain system // Control Decision. 1995. Vol. 10. No. 1. P. 85-88.

8. *Wang W., Gao Z.* A comparison study of advanced state observer design techniques // Proc. Amer. Control Conf. 2003. P. 4754-4759.

9. *Veluvolu K.C., Kim M.Y., Lee D.* Nonlinear sliding mode high-gain observers for fault estimation // International Journal of Syst. Sci. 2011. Vol. 42. No. 7. P. 1065-1074.

10. *Atassi A.N., Khalil H.K.* A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1999. Vol. 44. No. 9. P. 1672-1687.

11. *Цыкунов А.М.* Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. 2007. № 7. С. 103-115.

12. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969.

13. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во науч. лит-ры Н.Ф. Бочкаревой, 2006.

Список литературы к главе 2

1. *Lozier J.C.* A steady-state approach to the theory of saturable servo systems // IRE Trans. on Automatic Control. – 1956. – P. 19-39.

2. *Kapasouris P., Athans M.* Multivariable Control Systems with Saturating Actuators Antireset Windup Strategies // Proc. American Control Conf. Boston, 2004. – P. 1579-1584.

3. *Edwards C., Postlethwaite I.* Anti-windup and Bumpless-transfer Schemes // Automatica. – 1998. – Vol. 34. – No. 2. – P. 199-210.

4. *Monopoli R.* Adaptive Control for Systems for Hard Saturation // Proc. 14th IEEE Conf. on Decision and Control. Houston, 1975. – P. 841-842.

5. *Цыкунов А.М.* Адаптивное и робастное управление динамическими объектами. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

6. *Wen C., Zhou J., Liu Z., Su H.* Robust Adaptive Control of Uncertain Nonlinear Systems in the Presence of Input Saturation and External Disturbance // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2011. – Vol. 56. – No. 7. – P. 1672-1678.

7. *Schwager M., Annaswamy A.M.* Direct Adaptive Control of Multi-Input Plants with Magnitude Saturation Constrains // Proc. 44th IEEE Conf. on Decision and Control, and the European Control Conf. Seville, 2005. – P. 783-788.

8. *Цыкунов А.М.* Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 7. – С. 103-115.

9. *Atassi A.N., Khalil H.K.* A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1999. – Vol. 44. – No. 9. – P. 1672-1687.

10. *Furtat I., Fradkov A., Tsykunov A.* Robust synchronization of linear dynamical networks with compensation of disturbances // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2014. – Vol. 24. – No.17. – P. 2774-2784.

11. *Брусин В.А.* Об одном классе сингулярно возмущенных адаптивных систем. 1 // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 4. – С. 119-127.

Список литературы к главе 3

1. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб: Наука, 2000.

2. *Atassi A.N., Khalil H.K.* A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE Trans. on Automat. Control. – 1999. – Vol. 44. – No. 9. – P. 1672-1687.

3. *Бобцов А.А.* Синтез закона управления для стабилизации нелинейной системы по измерениям выхода // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2004. – № 3. – С. 40-45.

4. *Бобцов А.А., Шаветов С.В.* Управление по выходу линейным параметрически неопределенным объектом в условиях возмущающих воздействий и неучтенной динамики // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. – 2011. – № 1 (71). – С. 33-39.

5. *Цыкунов А.М.* Алгоритм робастного управления нестационарным линейным объектом с компенсацией возмущений // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2008. – № 4. – С. 33-40.

6. *Цыкунов А.М.* Алгоритм робастного управления линейными динамическими объектами по выходу // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2010. – № 3. – С. 9-14.

7. *Lozier J.C.* A steady-state approach to the theory of saturable servo systems // IRE Trans. on Automatic Control. – 1956. – P. 19-39.

8. *Kapasouris P., Athans M.* Multivariable Control Systems with Saturating Actuators Antireset Windup Strategies // American Control Conf. Boston, 2004. – P. 1579-1584.

9. *Edwards C., Postlethwaite I.* Anti-windup and Bumpless-transfer Schemes // Automatica. – 1998. – Vol. 34. – No. 2. – P. 199-210.

10. *Monopoli R.* Adaptive Control for Systems for Hard Saturation // 14th IEEE Conf. on Decision and Control. Houston, TX, 1975. – P. 841–842.

11. *Wen C., Zhou J., Liu Z., Su H.* Robust Adaptive Control of Uncertain Nonlinear Systems in the Presence of Input Saturation and External Disturbance // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2011. – Vol. 56. – No. 7. – P. 1672–1678.

12. *Schwager M., Annaswamy A.M.* Direct Adaptive Control of Multi-Input Plants with Magnitude Saturation Constrains // 44th IEEE Conf. on Decision and Control, and the European Control Conf. Seville, Spain, 2005. – P. 783–788.

13. *Фуртат И.Б., Цыкунов А.М.* Робастное управление нестационарными нелинейными структурно неопределенными объектами // Проблемы управления. – 2008. – № 5. – С. 2-7.

14. *Фуртат И.Б., Цыкунов А.М.* Адаптивное управление объектами с неизвестной относительной степенью // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 6. – С. 109-118.

15. *Feuer A., Morse A.S.* Adaptive control of single-input, single-output linear systems // IEEE Trans. on Automat. Control. – 1978. – Vol. AC-23. – No. 4. – P. 557-569.

Narendra K.S., Valavani L.S. Stable Adaptive Controller Design – Direct Control // IEEE Trans. on Automat. Control. – 1978. – Vol. AC-23. – No. 4. – P. 570-583.

Список литературы к главе 4

1. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 5. – С. 72–90.
2. *Никифоров В.О.* Нелинейная система управления с компенсацией внешних детерминированных возмущений // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1997. – № 4. – С. 69–73.
3. *Fedele G., Ferrise A.* Biased Sinusoidal Disturbance Compensation With Unknown Frequency // IEEE Trans. on Automat. Control. – 2013. – Vol. 58. – No. 12. – P. 3207–3212.
4. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. – Калуга: Изд-во научной лит-ры. Н.Ф. Бочкаревой, 2006.
5. *Проскурников А.В., Якубович В.А.* Универсальные регуляторы в задачах оптимального управления с эталонной моделью при неизвестных внешних сигналах // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2012. – № 2. – С. 49.
6. *Цыкунов А.М.* Робастное управление с компенсацией возмущений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012.
7. *Guo G., Hill D.J., Wang Y.* Nonlinear output stabilization control for multimachine power systems // IEEE Trans. on Circuits and Systems, part 1. – 2000. – Vol. 47. – No. 1. – P. 46–53.
8. *Chen Y., Liu F., Mei S., Ma J.* Toward adaptive robust state estimation based on MCC by using the generalized Gaussian density as kernel functions // Electrical Power and Energy Systems. – 2015. – Vol. 71. – P. 297–304.
9. *Беляев А.Н., Смоловик С.В., Фрадков А.Л., Фуртат И.Б.* Робастное управление электрическим генератором при нестационарной механической мощности // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2013. – № 5. – С. 78-86.
10. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления. – М.: Изд-во МТТУ им. Н.Э. Баумана, под ред. Егупова Н.Д. 2002.
11. *Baillieul J.* Feedback Coding for Information-Based Control: Operating Near the Data Rate Limit // Proc. 41st IEEE Conf. Decision Control, ThP02-6, Las Vegas, Nevada, USA, 2002. – P. 3229–3236.
12. *Delchamps D.F.* Extracting State Information from a Quantized Output Record // System Control Letters. – 1989. – Vol. 13. – P. 365–372.
13. *Furtat I.B., Fradkov A.L., Liberzon D.* Compensation of disturbances for MIMO systems with quantized output // Automatica. – 2015. – Vol. 60. – P. 239–244.

14. *Фуртат И.Б.* Алгоритм робастного управления линейными объектами с векторными входами-выходами в условии насыщения сигнала управления // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2016. – №9. – Т. 17. – С. 579–587.

15. *Fridman E.* A refined input delay approach to sampled-data control // Automatica. – 2010. – Vol. 46. – P. 421–427.

Миссия университета – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

КАФЕДРА «УПРАВЛЕНИЕ СЛОЖНЫМИ СИСТЕМАМИ»

Базовая магистерская кафедра «Управление сложными системами» (БМК УСС) создана в 2014 году на базе одноименной лаборатории Института проблем машиноведения Российской академии наук (ИПМаш РАН). БМК УСС создана на базе научной организации и ее основная миссия - приобщать молодежь к научным исследованиям, внедрять в учебный процесс в ИТМО научные результаты высокого мирового уровня, воспитывать современных востребованных специалистов в увлекательной области кибернетики и систем управления. Для выполнения этой миссии преподаватели кафедры стремятся вести научную работу на высоком мировом уровне и привлекают магистрантов и аспирантов к работе по грантам и программам, выполняемым в лаборатории УСС ИПМаш РАН.

НАУЧНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ КАФЕДРЫ:

- разработка систем адаптивного и робастного управления сложными системами;
- разработка алгоритмов управления механическими, мехатронными и электроэнергетическими системами.

В лаборатории УСС ИПМаш РАН ведутся также исследования в областях:

- управление нелинейными колебаниями и хаосом;
- управление сетевыми системами с учетом информационных и вычислительных ограничений,
- с приложениями к задачам управления электроэнергетическими сетями, группами беспилотных летательных аппаратов и мобильных роботов, мехатронными вибрационными установками, к нейрообратной связи.

Фуртат Игорь Борисович

Управление с компенсацией возмущений

Учебное пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49