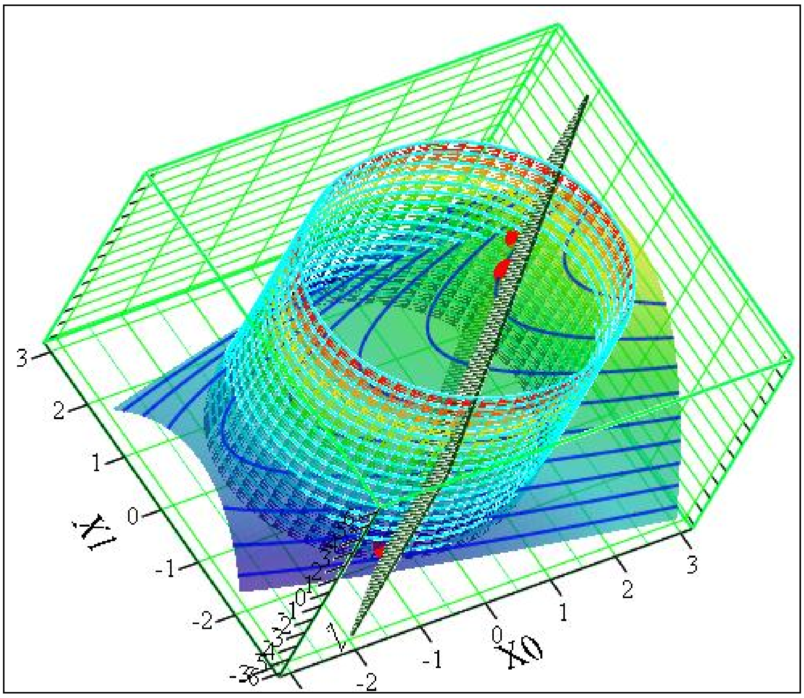
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

С.В. Рыков, И.В. Кудрявцева, С.А. Рыков,
В.А. Рыков

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ПРИМЕРАХ В ПАКЕТЕ MATHCAD 15

Часть III
Многомерная оптимизация. Аналитические методы

Учебное пособие



Санкт-Петербург

2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

С.В. Рыков, И.В. Кудрявцева, С.А. Рыков,
В.А. Рыков

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ПРИМЕРАХ В ПАКЕТЕ MATHCAD 15

Часть III
Многомерная оптимизация. Аналитические методы

Учебное пособие

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению 16.04.03 Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения
в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования магистратуры

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2018

Рыков С.В., Кудрявцева И.В., Рыков С.А., Рыков В.А. Методы оптимизации в примерах в пакете MathCAD 15. Часть 3. Многомерная оптимизация. Аналитические методы. - СПб.: Университет ИТМО, 2018. – 165 с.

Рецензент: Пронин Владимир Александрович, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой инженерного проектирования и систем жизнеобеспечения Университета ИТМО.

Пособие содержит сведения об аналитических методах многомерной оптимизации с ограничениями. Снабжено большим количеством примеров реализации оптимизационных задач рассмотренных как аналитически при построчной реализации, так и с использованием пакета MathCAD 15. При этом реализация в пакете MathCAD 15 имеет два варианта: в виде построчного решения и в виде одной многострочной функции. Предназначено для самостоятельной работы студентов вузов очной и заочной форм обучения.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Миссия университета – открывать возможности для гармоничного развития конкурентоспособной личности и вдохновлять на решение глобальных задач.

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель настоящего пособия – оказать студентам конкретную помощь в развитии умения решать задачи по курсу «Методы оптимизации». Каждый из разделов пособия содержит теоретические положения, подробное решение соответствующих задач как аналитически, так и с использованием пакета MathCAD15.

Первая часть пособия посвящена изложению основных терминов и определений, используемых при решении оптимизационных задач с ограничениями различного типа. Материал излагается с учетом терминологии и обозначений, предусмотренных программой вуза.

Во второй-пятой частях пособия изложены решения задач многомерной оптимизации с ограничениями.

В шестой части приведены задачи для самостоятельной работы.

При пользовании пособием рекомендуется следующий порядок работы. Сначала следует повторить теоретическую часть, которая изложена в начале каждого раздела пособия. Затем ознакомиться с пояснениями и решениями задач, содержащимися в пособии. И только после этого перейти к выполнению контрольных упражнений, помещенных в конце каждого раздела пособия.

1 АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОИСКА УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

1.1 Общая постановка задачи и основные определения

Требуется найти экстремум функции $f(x^*)$ на множестве допустимых значений X :Equation Chapter (Next) Section 1

$$f(x^*) = \max_{x \in X} f(x); \ f(x^*) = \min_{x \in X} f(x), \tag{1.1}$$

где $X = \left\{ x \middle| \begin{matrix} g_j(x) = 0, \ j = 1,\ldots,m; \ m < n \\ g_j(x) \le 0, \ j = m+1,\ldots,p \end{matrix} \right\}$, m и p – целые числа; $f(x)$ – целевая функция; $g_j(x) = 0, \ j = 1,\ldots,p$ – функции, задающие ограничения.

Функции $f(x)$ и $g_j(x) = 0, \ j = 1,\ldots,p$ дважды непрерывно дифференцируемы на множестве R^n. При $p = m$ задача (1.1) со смешенными ограничениями преобразуется в задачу с ограничениями типа равенства, а при $m = 0$ в задачу с ограничениями типа неравенств.

Определение 1.1. Функция:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 \, f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \, g_j(x), \tag{1.2}$$

называется **обобщенной функцией Лагранжа**, числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ – **множители Лагранжа**, $\lambda = \left(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p\right)^T$.

Классической функцией Лагранжа называется функция:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \, g_j(x). \tag{1.3}$$

Определение 1.2. **Градиент обобщенной (классической) функции Лагранжа** по x называется вектор столбец, составленный из частных производных первого порядка по $x_i, i = 1,\ldots,n$, вычисленных в заданной точке:

$$\nabla_x L(x, \lambda_0, \lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \ \nabla_x L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Определение 1.3. **Второй дифференциал обобщенной (классической) функции Лагранжа** $L(x,\lambda_0,\lambda)$, $[L(x,\lambda)]$ называется функция:

$$d^2L(x,\lambda_0,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}dx_i\,dx_j,\ \left[d^2L(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2L(x,\lambda)}{\partial x_i\,\partial x_j}dx_i\,dx_j\right]. \quad (1.5)$$

Определение 1.4. **Первым дифференциалом ограничения** $g_j(x)$ называется функция:

$$d\,g_j(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i}dx_i,\ \ j=1,...,p. \quad (1.6)$$

Определение 1.5. Ограничение $g_j(x)\le 0$ называется **активным** в точке x^*, если $g_j(x^*)=0$. Если $g_j(x^*)<0$, то ограничение называется **пассивным**.

Определение 1.6.

1. Градиенты ограничений $g_1(x),g_2(x),...,g_n(x)$ являются **линейно независимыми** в точке x^*, если равенство $\lambda_1\nabla g_1(x^*)+\lambda_2\nabla g_2(x^*)+...+\lambda_m\nabla g_m(x^*)=0$ выполняется только при $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0$.

2. Градиенты ограничений $g_1(x),g_2(x),...,g_n(x)$ являются **линейно зависимыми** в точке x^*, если равенство $\lambda_1\nabla g_1(x^*)+\lambda_2\nabla g_2(x^*)+...+\lambda_m\nabla g_m(x^*)=0$ выполняется при значениях $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ не равных нулю одновременно. В этом случае один из них есть линейная комбинация остальных коэффициентов.

3. Один вектор $\nabla g_j(x^*)$ тоже образует систему векторов: при $\nabla g_j(x^*)\ne 0$ – линейно независимую, при $\nabla g_j(x^*)=0$ – линейно зависимую.

4. Система векторов, содержащая нулевой вектор, всегда линейно зависима. Если $rang(A)=rang\left(\nabla g_1(x^*)\nabla g_2(x^*)...\nabla g_m(x^*)\right)=m$, то система векторов линейно независима. Если $rang(A)<m$, то система линейно зависима ($rang(A)$ – ранг матрицы A).

1.2 Практические примеры

Пример 1.1

Для задачи поиска условного экстремума функции $f(x)=x_1^2+x_2^2$ **на множестве** $X=\left\{x\,\middle|\,x_2^2-x_1+3=0\right\}$**, заданном ограничением** $g_1(x)=x_2^2-x_1+3=0$ **выписать функции:**

- обобщенную функцию Лагранжа;

- классическую функцию Лагранжа;

- градиент обобщенной функции Лагранжа;
- градиент классической функции Лагранжа;
- второй дифференциал обобщенной функции Лагранжа;
- второй дифференциал классической функции Лагранжа;
- первый дифференциал ограничения.

1. Обобщенная функция Лагранжа:

$$L\left(x,\lambda_0,\lambda_1\right)=\lambda_0\left(x_1^2+x_2^2\right)+\lambda_1\left(x_2^2-x_1+3\right).$$

2. Классическая функция Лагранжа:

$$L\left(x,\lambda_1\right)=x_1^2+x_2^2+\lambda_1\left(x_2^2-x_1+3\right).$$

3. Градиент обобщенной функции Лагранжа:

$$\nabla_x L\left(x,\lambda_0,\lambda_1\right)=\begin{pmatrix}2\lambda_0 x_1-\lambda_1 & 2\lambda_0 x_2+2\lambda_1 x_2\end{pmatrix}^T.$$

4. Градиент классической функции Лагранжа:

$$\nabla_x L\left(x,\lambda_1\right)=\begin{pmatrix}2x_1-\lambda_1 & 2x_2+2\lambda_1 x_2\end{pmatrix}^T.$$

5. Второй дифференциал обобщенной функции Лагранжа:

$$d^2L\left(x,\lambda_0,\lambda_1\right)=2\lambda_0 dx_1^2+\left(2\lambda_0+2\lambda_1\right)dx_2^2.$$

6. Второй дифференциал классической функции Лагранжа:

$$d^2L\left(x,\lambda_1\right)=2dx_1^2+\left(2+2\lambda_1\right)dx_2^2.$$

7. Первый дифференциал ограничения:

$$d\,g_1\left(x\right)=-dx_1+2x_2dx_2.$$

Листинг программы в пакете MathCAD15 приведен в приложении А (Рис. А 1 – Рис. А 3) стр. 59.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Размещение переменных в сопроводительном тексте.
- Просмотр результатов расчета, редактирование числа выводимых десятичных знаков и формата вывода целых чисел.
- Определение однострочной функции и ее вызов.
- Градиент функции и его символьный расчет.
- Символьные операции с производными и матрицами.
- Определение массива и доступ к элементам массива.

Пример 1.2

Классифицировать ограничения $g_1(x) = x_1 + x_2 - 3 \le 0$ в точках $x^* = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T$ и $\tilde{x} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^T$.

1. В точке $x^* = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T$ $g_1(x^*) = 0$, т.е. неравенство превратилось в равенство. Следовательно, ограничение является активным.

2. В точке $\tilde{x} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^T$ $g_1(x^*) \le 0$, т.е. неравенство осталось неравенством. Следовательно, ограничение является пассивным.

Листинг программы в пакете MathCAD15 приведен в приложении А (Рис. А 4) стр. 62.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Просмотр результатов расчета.
- Определение однострочной функции и ее вызов.
- Определение массива.

Пример 1.3

Исследовать градиенты активных ограничений $g_1(x) = -x_1 \le 0$, $g_2(x) = -x_2 \le 0$, $g_3(x) = x_2 - (1 - x_1)^3 \le 0$ в точках $x^* = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^T$ и $\tilde{x} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^T$.
Рассчитать:
- классифицировать (активные, пассивные) ограничения в исследуемых точках;
- рассчитать градиенты ограничений в исследуемых точках;
- проверить линейную зависимость ограничений в исследуемых точках.

1. Вычислить общие выражения для градиентов:

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^T,\ \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix}0 & -1\end{pmatrix}^T,\ \nabla g_3(x) = \begin{pmatrix}3(1 - x_1)^2 & 1\end{pmatrix}^T.$$

2. Классифицировать ограничения в расчетных точках.

Точка $x^* = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^T$.

$g_1(x^*) = -1$, $g_2(x^*) = 0$, $g_3(x^*) = 0$. Из расчетов видно, что ограничения 2 и 3 ($g_2(x^*)$, $g_3(x^*)$ активны, а ограничение 1 ($g_1(x^*)$) – пассивно.

Точка $\tilde{x} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^T$.

$g_1(\tilde{x}) = 0$, $g_2(\tilde{x}) = 0, g_3(\tilde{x}) = -1$. Из расчетов видно, что ограничения 1 и 2 ($g_1(\tilde{x}), g_2(\tilde{x})$) активны, а ограничение 1 ($g_3(\tilde{x})$) – пассивно.

3. Рассчитать градиенты ограничений в исследуемых точках:

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^T,\ \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix}0 & -1\end{pmatrix}^T,\ \nabla g_3(x) = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}^T.$$

4. Проверить линейную зависимость активных ограничений в исследуемых точках.

Точка $x^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$.

Вычислить ранг матрицы:

$$rank\left(\nabla g_2\left(x^*\right) \quad \nabla g_3\left(x^*\right)\right)^T = rank\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 < 2 .$$

Так как ранг матрицы меньше 2 – максимально возможной величины, то градиенты активных ограничений 2 и 3 линейно зависимы.

Точка $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$.

Вычислить ранг матрицы:

$$rank\left(\nabla g_1\left(\tilde{x}\right) \quad \nabla g_2\left(\tilde{x}\right)\right)^T = rank\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 = m ,$$

где $m = 2$ – максимальная величина ранга матрицы.

Так как ранг матрицы равен 2 – максимально возможной величине, то градиенты активных ограничений 1 и 2 линейно независимы.

Листинг программы в пакете MathCAD15 приведен в приложении А (Рис. А 5 – Рис. А 9) стр. 63.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Просмотр результатов расчета.
- Определение однострочной функции и ее вызов.
- Определение массива.
- Градиент функции и его символьный и численный расчет.
- Символьные операции с производными и матрицами.
- Функции **augment()** и **rank()**.
- Транспонирование матрицы.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование двумерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых.

1.3 Аналитические методы поиска условного экстремума с ограничениями в виде равенств

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ и функция ограничений $g_j(x) = g_j\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0$, $j = 1, 2, ..., m$, определяющие множество допустимых решений X.

Требуется определить точки $x^* \in X$ локальных минимумов и максимумов функции $f(x)$ на множестве X:

$$f\left(x^*\right) = \min_{x \in X} f(x),\ f\left(x^*\right) = \max_{x \in X} f(x), \tag{1.7}$$

где $X = \left\{ x \,\middle|\, g_j(x) = 0,\ j = 1,2,...,m;\ m < n \right\}$.

Точки x^* находятся с помощью необходимых и достаточных условий минимума и максимума первого и второго порядка при ограничениях типа равенств (порядок условий определяется порядком используемых производных). Вычисляются значения $f\left(x^*\right)$ функции в найденных точках локального экстремума.

1.3.1 Необходимые условия экстремума первого порядка

Пусть x^* есть точка локального экстремума. Тогда найдутся числа $\lambda_0^*, \lambda_1^*, ..., \lambda_m^*$, не равные одновременно нулю и такие, что выполняются следующие условия:

- условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x:

$$\frac{\partial L\left(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*\right)}{\partial x_i^*} = 0,\ i = 1,2,...,n; \tag{1.8}$$

- условие допустимости решения:

$$g_j(x^*) = 0,\ j = 1,2,...,m. \tag{1.9}$$

Если при этом градиенты $\nabla g_1\left(x^*\right), \nabla g_2\left(x^*\right), ..., \nabla g_m\left(x^*\right)$ в точке x^* линейно независимы (выполняется условие регулярности), то $\lambda_0^* \neq 0$.

Замечание 1.1.

1. Условие (1.9) можно записать в векторной форме:

$$\nabla_x L\left(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L\left(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*\right)}{\partial x_1^*} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L\left(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*\right)}{\partial x_n^*} \end{pmatrix} = 0.$$

2. Система уравнений (1.8) и (1.9) содержит $n+m$ уравнений с $n+m+1$ неизвестными λ_0^*, $\lambda^* = \left(\lambda_1^* \quad \lambda_2^* \quad ... \quad \lambda_m^*\right)^T$, $x^* = \left(x_1^* \quad x_2^* \quad ... \quad x_n^*\right)^T$. Точки x^*, удовлетворяющие системе при некоторых λ_0^* и λ^*, называются **условно-стационарными**.

3. При решении задач проверка условия регулярности затруднительна, так как точка x^* заранее неизвестна. Поэтому, как правило, рассматривают два

случая: $\lambda_0^* = 0$ и $\lambda_0^* \neq 0$. Если $\lambda_0^* \neq 0$, в системе уравнений (1.8) и (1.9) принимают $\lambda_0^* = 1$. Это эквивалентно делению системы уравнений (1.8) и (1.9) на λ_0^* и замене $\dfrac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*}$ на λ_j^*. При этом обобщенная функция Лагранжа становится классической, а система уравнений (1.8) и (1.9) примет вид

$$\frac{\partial L\left(x^*, \lambda^*\right)}{\partial x_i^*} = 0,\ i = 1, 2, ..., n; \tag{1.10}$$

$$g_j(x^*) = 0,\ j = 1, 2, ..., m. \tag{1.11}$$

В системе уравнений (1.10) и (1.11) число уравнений равно числу неизвестных.

4. Система уравнений (1.10) и (1.11) отражает тот факт, что антиградиент целевой функции в регулярной точке экстремума x^* является линейной комбинацией градиентов ограничений. С учетом (1.3) выражение (1.10) можно привести к виду:

$$\nabla f\left(x^*\right) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \nabla g_j\left(x^*\right) = 0;$$

или

$$-\nabla f\left(x^*\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \nabla g_j\left(x^*\right); \tag{1.12}$$

5. Точка экстремума, удовлетворяющая системе уравнений (1.8) и (1.9) при $\lambda_0^* \neq 0$, называется **регулярной**, а при $\lambda_0^* = 0$ – **нерегулярной**. Случай $\lambda_0^* = 0$ отражает вырожденность ограничений. При этом в обобщенной функции Лагранжа исчезает член, содержащий целевую функцию, а в необходимых условиях экстремума не используется информация, представляющая градиент целевой функции.

6. Условие допустимости решения, являющееся следствием постановки задачи (1.7), включено в (1.8), (1.9), (1.10) и (1.11) для удобства формирования алгоритма решения задачи.

1.3.2 Необходимые условия экстремума второго порядка

Пусть точка x^* – регулярная точка минимума (максимума) и имеется решение $\left(x^*, \lambda^*\right)$ системы уравнений (1.10) и (1.11). Тогда второй дифференциал классической функции Лагранжа, вычисленный в точке $\left(x^*, \lambda^*\right)$, **неотрицателен** (**неположителен**):

$$d^2 L\left(x^*, \lambda^*\right) \geq 0 \ \left(d^2 L\left(x^*, \lambda^*\right) \leq 0\right) \tag{1.13}$$

для всех $dx \in R^n$ таких, что

$$d\,g_j\left(x^*\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,g_j\left(x^*\right)}{\partial\,x_i}dx_i=0,\;\; j=1,...,m, \tag{1.14}$$

то точка x^* может быть **точкой локального минимума (максимума)**. Требуются дополнительные исследования.

1.3.3 Достаточные условия экстремума

Пусть имеется точка $\left(x^*,\lambda^*\right)$, удовлетворяющая системе уравнений (1.10) и (1.11). Если в этой точке $d^2L\left(x^*,\lambda^*\right)\geq 0$ $\left(d^2L\left(x^*,\lambda^*\right)\leq 0\right)$ для всех ненулевых $dx \in R^n$ таких, что

$$d\,g_j\left(x^*\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,g_j\left(x^*\right)}{\partial\,x_i}dx_i=0,\;\; j=1,...,m,$$

то точка x^* является **точкой локального минимума (максимума)**.

Замечание 1.2.

Достаточные и необходимые условия экстремума второго порядка проверяются в условно–стационарных точках, которые удовлетворяют системе уравнений (1.8), (1.9) при $\lambda_0^*\neq 0$ или системе уравнений (1.10) и (1.11), так как для практики, безусловно, представляет интерес случай, когда в функции Лагранжа присутствует целевая функция, экстремум которой ищется.

1.3.4 Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Составить обобщенную функцию Лагранжа:

$$L\left(x,\lambda_0,\lambda\right)=\lambda_0\,f\left(x\right)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\,g_j\left(x\right).$$

Шаг 2. Записать необходимые условия экстремума первого порядка:

- условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x:

$$\frac{\partial\,L\left(x^*,\lambda_0^*,\lambda^*\right)}{\partial\,x_i^*}=0,\;\; i=1,2,...,n; \tag{1.15}$$

- условие допустимости решения:

$$g_j(x^*)=0,\;\; j=1,2,...,m. \tag{1.16}$$

Шаг 3. Решить систему для двух случаев:

1. $\lambda_0^*=0$;

2. $\lambda_0^*\neq 0$ (при этом необходимо выражения в шаге 2 поделить на $\lambda_0^*=1$ и заменить λ_j^*/λ_0^* на λ_j^*).

В результате найти условно-стационарные точки x^*, выделив из них полученные при $\lambda_0^* \neq 0$ (они могут быть регулярными точками экстремума).

Шаг 4. Для найденных на шаге 3 точек проверить достаточные условия экстремума:

а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в точке $\left(x^*, \lambda^*\right)$:

$$d^2 L\left(x^*, \lambda^*\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L\left(x^*, \lambda^*\right)}{\partial x_i \, \partial x_j} dx_i \, dx_j ;$$

б) записать выражение (1.14) в точке x^*:

$$d\, g_j\left(x^*\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j\left(x^*\right)}{\partial x_i} dx_i = 0, \;\; j = 1, \dots, m ;$$

в) из системы уравнений в пункте а) выразить любые m дифференциалов dx_i через остальные ($n - m$) и подставить в $d^2 L\left(x^*, \lambda^*\right)$;

г) если $d^2 L\left(x^*, \lambda^*\right) > 0$ при ненулевых dx_i, то в точке x^* – условный локальный минимум.

Если $d^2 L\left(x^*, \lambda^*\right) < 0$ при ненулевых dx_i, то в точке x^* - условный локальный максимум.

Если достаточные условия экстремума не выполняются, следует проверить необходимые условия второго порядка, следуя аналогичной процедуре.

Если необходимые условия второго порядка выполняются, то требуется провести дополнительные исследования, а если не выполняются, в точке x^* нет условного экстремума.

Шаг 5. Вычислить значения функции в точках условного экстремума.

Условия экстремума приведены в табл. 1.1.

Замечание 1.3.

1. Иногда удается проверить условие линейной независимости градиентов ограничений на множестве X. Если оно выполняется, то на шаге 1 следует записать классическую функцию Лагранжа, на шаге 2 можно записать сразу систему уравнений (1.10) и (1.11), а на шаге 3 отсутствует случай $\lambda_0^* = 0$.

2. Графическое решение задачи (при $n = 2$, $m = 1$):

а) построить множество допустимых решений X;

б) построить семейство линий уровня целевой функции и найти точки их касания с кривыми, описывающими ограничения;

в) исследовать поведение целевой функции при движении вдоль ограничения к исследуемой точке и от нее. Классифицировать точки, используя определение экстремума.

Табл. 1.1. Необходимые и достаточные условия экстремума при ограничениях типа равенств

№ п/п	$\nabla_x L\left(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*\right)$	$d\,g_j\left(x^*\right)$, $j = 1,\dots,m$	$\lambda_0^* \ne 0$, $d^2 L\left(x^*, \lambda^*\right)$	$d\,g_j\left(x^*\right)$, $j = 1,\dots,m$	**Тип условно-стационарной точки** x^*
1	0	0	>0	0, $dx \ne 0$	Условный локальный минимум
2	0	0	<0	0, $dx \ne 0$	Условный локальный максимум
3	0	0	≥0	0	Может быть условный локальный минимум. Требуются дополнительные исследования
4	0	0	≤0	0	Может быть условный локальный максимум. Требуются дополнительные исследования
5	0	0	=0	0	Требуются дополнительные исследования
6	0	0	<, >0	0	Нет экстремума

1.3.5 Практические примеры

Пример 1.4

Найти экстремум функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ **на множестве**
$X = \left\{ x \middle| x_1 + x_2 - 2 = 0 \right\}$**:** $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to extr$ **;** $g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 = 0.$
Рассчитать:
1. Проверить условие регулярности.
2. Составить функцию Лагранжа.
3. Выписать необходимые условия экстремума первого порядка:
а) условие стационарности функции Лагранжа;
б) условие допустимости решения.
4. Решить систему уравнений и найти условно-стационарные точки.
5. Проверить достаточные условия экстремума второго порядка:
а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в стационарных точках;
б) записать выражение для первого дифференциала ограничения в стационарных точках;

в) рассчитать выражение из п. а), учитывая б), и определить знак второго дифференциала классической функции Лагранжа $d^2L\left(x^*,\lambda^*\right)$ в стационарных точках;
г) классифицировать условно-стационарную точку. В случае необходимости проверить необходимые условия экстремума второго порядка, по аналогии.
6. Построить графики целевой функции и ограничения и нанести условно-стационарные точки.

Ход решения задачи.

1. Проверить условие регулярности.

Градиент ограничения $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T \neq 0$ на множестве X. Следовательно, условие регулярности, т.е. независимости ограничений, выполняется (см. определение 1.6).

2. Составить функцию Лагранжа.

Можно использовать классическую функцию Лагранжа, так как условие регулярности ограничений выполняется (см. замечания 1.3, п.1).

$$L\left(x,\lambda_1\right) = f(x) + \lambda_1 g(x) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1\left(x_1 + x_2 - 2\right).$$

3. Выписать необходимые условия экстремума первого порядка.

а) $\dfrac{\partial L\left(x,\lambda_1\right)}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 = 0$, откуда $x_1 = -\dfrac{\lambda_1}{2}$. $\dfrac{\partial L\left(x,\lambda_1\right)}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 = 0$, откуда $x_2 = -\dfrac{\lambda_1}{2}$;

б) $g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 = 0$.

4. Решить систему уравнений из п.3.

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{\lambda_1}{2}; \\ x_2 = -\dfrac{\lambda_1}{2}; \\ x_1 + x_2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Найденные значения корней уравнения $x_1^* = 1$, $x_2^* = 1$, $\lambda_1 = -2$ – условно стационарных точек.

4. Проверить достаточные условия экстремума второго порядка.

а) $d^2 L\left(x^*,\lambda_1^*\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 L\left(x^*,\lambda_1^*\right)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = 2dx_1^2 + 2dx_2^2$;

б) $d g_j\left(x^*\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial g_j\left(x^*\right)}{\partial x_i} dx_i = dx_1 + dx_2 = 0$;

в) вычислить $d^2 L\left(x^*,\lambda_1^*\right)$.

Из уравнения (б) дифференциал $dx_1 = -dx_2$. Тогда $d^2 L\left(x^*, \lambda_1^*\right) = 4dx_2^2 > 0$ при $dx_2^2 \neq 0$ всегда.

г) Классифицировать условно-стационарную точку $x^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$.

Так как $d^2 L\left(x^*, \lambda_1^*\right) > 0$, то $x^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ - **точка регулярного локального условного минимума**.

Листинг программы в пакете MathCAD15 приведен в приложении А (Рис. А 10 – Рис. А 14) стр. 68.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Просмотр результатов расчета.
- Определение массива.
- Определение однострочной функции и ее вызов.
- Градиент функции и его символьный и численный расчет.
- Символьные операции с производными и матрицами.
- нахождение коней уравнений с использованием блока **Given – Find**.
- Символьную функцию **substitute**.
- Транспонирование матрицы.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование трехмерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых и точек.

Пример 1.5

Найти экстремум функции $f(x) = x_1 + x_2$ на множестве
$X = \left\{ x \middle| x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \right\}$**:** $f(x) = x_1 + x_2 \to extr$**;** $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$**.**

Рассчитать:
1. Проверить условие регулярности.
2. Составить функцию Лагранжа.
3. Выписать необходимые условия экстремума первого порядка:
а) условие стационарности функции Лагранжа;
б) условие допустимости решения.
4. Решить систему уравнений и найти условно-стационарные точки.
5. Проверить достаточные условия экстремума второго порядка.
а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в стационарных точках;
б) записать выражение для первого дифференциала ограничения в стационарных точках;
в) рассчитать выражение из п. а), учитывая б), и определить знак второго дифференциала классической функции Лагранжа $d^2 L\left(x^*, \lambda^*\right)$ **в стационарных точках;**

г) классифицировать условно-стационарную точку. В случае необходимости проверить необходимые условия экстремума второго порядка, по аналогии.
6. Построить графики целевой функции и ограничения и нанести условно-стационарные точки.

Ход решения задачи.

1. Проверить условие регулярности.

Градиент ограничения $\nabla g_1(x) = (2x_1, 2x_2)^T \neq 0$ для всех $x \in X$. Следовательно, условие регулярности, т.е. независимости ограничений, выполняется (см. определение 1.6).

2. Составить функцию Лагранжа.

Можно использовать классическую функцию Лагранжа, так как условие регулярности ограничений выполняется (см. замечания 1.3, п.1):

$$L(x, \lambda_1) = x_1 + x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 2).$$

3. Выписать необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{dL(x,\lambda_1)}{dx_1} = 1 + 2\lambda_1 x_1 = 0$, откуда $x_1 = -\dfrac{1}{2\lambda_1}$;

$\dfrac{dL(x,\lambda_1)}{dx_2} = 1 + 2\lambda_1 x_2 = 0$, откуда $x_2 = -\dfrac{1}{2\lambda_1}$;

б) $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$.

4. Решить систему уравнений из п.3.

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2\lambda_1}; \\ x_2 = -\dfrac{1}{2\lambda_1}; \\ x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Найденные значения корней уравнения: точка 1 ($x1^*$): $x_1^* = 1$, $x_2^* = 1$, $\lambda_1 = -1/2$, точка 2 ($x2^*$) $x_1^* = -1$, $x_2^* = -1$, $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$. Таким образом, найдены две условно стационарные точки.

4. Проверить достаточные условия экстремума второго порядка.

а) $d^2L(x^*, \lambda^*) = 2\lambda_1^* dx_1^2 + 2\lambda_1^* dx_2^2$, так как $\dfrac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_1^2} = \dfrac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_2^2} = 2\lambda_1{}^*$,

$\dfrac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$;

б) $dg_1(x^*) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 0$, так как $\dfrac{dg_1(x)}{dx_1} = 2x_1$, $\dfrac{dg_1(x)}{dx_2} = 2x_2$;

в) вычислить $d^2 L\left(x^*, \lambda_1^*\right)$.

Исследовать точку 1 ($x1^*$).

Из уравнения (б) дифференциал $dg_1(x1^*) = 2dx_1 + 2dx_2 = 0$, откуда $dx_1 = -dx_2$. Тогда $d^2L(x1^*) = -dx_1^2 - dx_2^2 = -2dx_2^2 < 0$ при $dx_2^2 \neq 0$ всегда.

Исследовать точку 2 ($x2^*$).

Из уравнения (б) дифференциал $dg_1(x2^*) = -2dx_1 - 2dx_2 = 0$, откуда $dx_1 = -dx_2$. Тогда $d^2L(B) = dx_1^2 + dx_2^2 = 2dx_2^2 > 0$ при $dx_2^2 \neq 0$ всегда;

г) классифицировать условно-стационарные точки.

Так как $d^2 L\left(x1^*, \lambda_1^*\right) < 0$, то $x1^* = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T$ – точка регулярного условного локального максимум.

Так как $d^2 L\left(x2^*, \lambda_1^*\right) > 0$, то $x2^* = \begin{pmatrix}-1 & -1\end{pmatrix}^T$ – точка регулярного условного локального минимум.

5. Рассчитать значения функции в точках экстремума: $f(x1^*) = 2$, $f(x2^*) = -2$.

Листинг программы в пакете MathCAD15 приведен в приложении А (Рис. А 15 – Рис. А. 21), стр. 73.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Перенос длинных формул по знаку «+», нажатием клавиш («**Ctrl**»+«**Enter**»).
- Просмотр результатов расчета.
- Определение массива.
- Определение однострочной функции и ее вызов.
- Градиент функции и его символьный и численный расчет.
- Символьные операции с производными и матрицами.
- Нахождение коней уравнений с использованием блока **Given – Find**.
- Символьную функцию **solve**, **substitute**.
- Транспонирование матрицы.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование трехмерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых и точек.

Пример 1.6

Найти экструмум функции $f(x) = x_1$ **на множестве**
$X = \left\{x \middle| x_1^2 - x_2^3 = 0\right\}$ **:** $f(x) = x_1 \to extr$ **;** $g_1(x) = x_1^2 - x_2^3 = 0$**.**

Рассчитать:

1. Проверить условие регулярности.

2. Составить функцию Лагранжа.

3. Выписать необходимые условия экстремума первого порядка:

а) условие стационарности функции Лагранжа;
б) условие допустимости решения.
4. Решить систему уравнений и найти условно-стационарные точки.
5. Проверить достаточные условия экстремума второго порядка.
а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в стационарных точках;
б) записать выражение для первого дифференциала ограничения в стационарных точках;
в) рассчитать выражение из п. а), учитывая б), и определить знак второго дифференциала классической функции Лагранжа $d^2 L(x^*, \lambda^*)$ в стационарных точках;
г) классифицировать условно-стационарную точку. В случае необходимости проверить необходимые условия экстремума второго порядка, по аналогии.
6. Построить графики целевой функции и ограничения и нанести условно–стационарные точки.

Ход решения задачи.

1. Проверить условие регулярности.

Градиент ограничения $\nabla g_1(x) = (-3x_1^2, 2x_2)^T = 0$ в точке $x^* = (0,0)^T$, следовательно, условие регулярности, т.е. независимости ограничений, не выполняется (см. определение 1.6). Необходимо пользоваться алгоритмом с использованием обобщенной функции Лагранжа.

2. Составить обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 x_1 + \lambda_1 (x_2^2 + x_1^3).$$

3. Выписать необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{dL(x, \lambda_0, \lambda_1)}{dx_1} = \lambda_0 - 3\lambda_1 x_1^2 = 0$, $\dfrac{dL(x, \lambda_0, \lambda_1)}{dx_2} = 2\lambda_1 x_2 = 0$;

б) $g_1(x) = x_2^2 - x_1^3 = 0$.

4. Решить систему уравнений из п.3:

$$\begin{cases} \lambda_0 - 3\lambda_1 x_1^2 = 0; \\ 2\lambda_1 x_2 = 0; \\ x_2^2 - x_1^3 = 0 \end{cases}$$

для двух случаев.

4.1. Первый случай $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 \neq 0$, так как все множители Лагранжа не могут быть одновременно равны нулю. Отсюда $x_1^* = x_2^* = 0$, $\lambda_0^* = 0$.

4.2. Второй случай $\lambda_0^* \neq 0$. Поделим уравнения приведенной в п.2 системы на λ_0 с заменой λ_1/λ_0 на λ_1:

$$\begin{cases} 1 - 3\lambda_1 x_1^2 = 0; \\ 2\lambda_1 x_2 = 0; \\ x_2^2 - x_1^3 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение. Если $\lambda_1 = 0$, то система несовместна. Если $x_2 = 0$, то $x_1 = 0$ и система тоже несовместна. Как видно, применение классической функции Лагранжа не дает результата.

5. Классифицировать условно стационарную точку.

Так как $\lambda_0^* = 0$, достаточные условия экстремума не проверяются. Точка $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ со значением целевой функции $f(x^*) = 0$ является точкой нерегулярного локального и глобального минимума.

Листинг программы в пакете MathCAD15 приведен в приложении А (Рис. А 22 – А. 27), стр. 80.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Перенос длинных формул по знаку «+», нажатием клавиш («**Ctrl**»+«**Enter**»).
- Просмотр результатов расчета.
- Определение массива.
- Определение однострочной функции и ее вызов.
- Градиент функции и его символьный и численный расчет.
- Символьные операции с производными и матрицами.
- Системная переменная **CTOL**.
- Нахождение коней уравнений с использованием блока **Given – Find**.
- Транспонирование матрицы.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование трехмерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых и точек.

Пример 1.7

Найти экстремум функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ **на множестве**

$X = \left\{ x \middle| (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0 \right\}$**:** $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to extr$**;** $g_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0$**.**

Рассчитать:

1. Проверить условие регулярности.

2. Составить функцию Лагранжа.

3. Выписать необходимые условия экстремума первого порядка:

а) условие стационарности функции Лагранжа;

б) условие допустимости решения.

4. Решить систему уравнений и найти условно-стационарные точки.
5. Проверить достаточные условия экстремума второго порядка.
а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в стационарных точках;
б) записать выражение для первого дифференциала ограничения в стационарных точках;
в) рассчитать выражение из п. а), учитывая б), и определить знак второго дифференциала классической функции Лагранжа $d^2 L\left(x^*,\lambda^*\right)$ в стационарных точках;
г) классифицировать условно-стационарную точку. В случае необходимости проверить необходимые условия экстремума второго порядка, по аналогии.
6. Построить графики целевой функции и ограничения и нанести условно-стационарные точки.

Ход решения задачи.

1. Проверить условие регулярности.

Проверку провести самостоятельно.

2. Составить обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda_1)=\lambda_0(x_1^2+x_2^2)+\lambda_1[(x_1-1)^2+x_2^2-4].$$

3. Выписать необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{dL(x,\lambda_0,\lambda_1)}{dx_1}=2\lambda_0x_1+2\lambda_1(x_1-1)=0$, $\dfrac{dL(x,\lambda_0,\lambda_1)}{dx_2}=2\lambda_0x_2+2\lambda_1x_2=0$;

б) $g_1(x)=(x_1-1)^2+x_2^2-4=0$.

4. Решить систему уравнений из п.3:

$$\begin{cases}2\lambda_0x_1+2\lambda_1(x_1-1)=0;\\ 2\lambda_0x_2+2\lambda_1x_2=0;\\ (x_1-1)^2+x_2^2-4=0,\end{cases}$$

для двух случаев.

4.1. Первый случай $\lambda_0=0$. Тогда $\lambda_1\neq 0$, так как все множители Лагранжа не могут быть одновременно равны нулю.

Из п.3 следует:

$$2\lambda_1(x_1-1)=0,\ 2\lambda_1x_2=0,$$

$$(x_1-1)^2+x_2^2-4=0.$$

Так как $\lambda_1\neq 0$, то из первых двух уравнений $x_1=1$, $x_2=0$. Однако при этом ограничение не выполняется: $g_1(x)=-4\neq 0$. Следовательно, система несовместна.

4.2. Второй случай $\lambda_0^* \neq 0$. Поделим уравнения приведенной в п.3 системы на λ_0 с заменой $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1:

$$\frac{dL(x,\lambda_1)}{dx_1} = 2x_1 + 2\lambda_1(x_1 - 1) = 0, \quad \frac{dL(x,\lambda_1)}{dx_2} = 2x_2(1+\lambda_1) = 0;$$

$$g_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0.$$

Рассмотрим второе уравнение:

- Если $x_2 = 0$, то из третьего уравнения следует $x_1 = 3$, $x_1 = -1$, а из первого $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$, $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ соответственно.
- Если $\lambda_1 = -1$, то первое уравнение имеет вид 2=0, т.е. система несовместна.

Таким образом, найдены две условно-стационарные точки:

$x1^*$: $x_1^* = 3$, $x_2^* = 0$, $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$; $x2^*$: $x_1^* = -1$, $x_2^* = 0$, $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$.

5. Проверить достаточные условия экстремума:

а) $d^2L(x^*,\lambda_1^*) = 2(1+\lambda_1^*)dx_1^2 + 2(1+\lambda_1^*)dx_2^2$;

б) $dg_1(x^*) = 2(x_1^* - 1)dx_1 + 2x_2^2 dx_2 = 0$.

5.1. Исследуем точку $x1^*$: $dg_1(A) = 4dx_1 + 0 = 0$, откуда $dx_1 = 0$ и $d^2L(A) = -dx_1^2 - dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \neq 0$. Поэтому в точке $x1^*$ – регулярный условный максимум.

5.2. Исследовать точку $x2^*$: $dg_1(B) = -4dx_1 + 0 = 0$, откуда $dx_1 = 0$ и $d^2L(B) = dx_1^2 + dx_2^2 = dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$. Поэтому в точке $x2^*$ – регулярный условный минимум.

6. Рассчитать значения функции в точках экстремума: $f(x1^*) = 9$, $f(x2^*) = 1$.

Листинг программы в пакете MathCAD15 приведен в приложении А (Рис. А 28 – А 34) стр. 86.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Перенос длинных формул по знаку «+», нажатием клавиш («**Ctrl**»+«**Enter**»).
- Просмотр результатов расчета.
- Определение массива.
- Определение однострочной функции и ее вызов.
- Градиент функции и его символьный и численный расчет.
- Символьные операции с производными и матрицами.
- Системная переменная **CTOL**.

- Нахождение коней уравнений с использованием блока **Given – Find**.
- Символьную функцию **solve**, **substitute**.
- Транспонирование матрицы.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование трехмерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых и точек.

Пример 1.8

Найти экстремум функции $f(x) = x_1^2 - x_2^2$ **на множестве** $X = \left\{ x \middle| x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \right\}$ **:** $f(x) = x_1^2 - x_2^2 \to extr$ **;** $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$**.**

Рассчитать:

1. Проверить условие регулярности.

2. Составить функцию Лагранжа.

3. Выписать необходимые условия экстремума первого порядка:

а) условие стационарности функции Лагранжа;

б) условие допустимости решения.

4. Решить систему уравнений и найти условно-стационарные точки.

5. Проверить достаточные условия экстремума второго порядка.

а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в стационарных точках;

б) записать выражение для первого дифференциала ограничения в стационарных точках;

в) рассчитать выражение из п. а), учитывая б), и определить знак второго дифференциала классической функции Лагранжа $d^2 L\left(x^*, \lambda^*\right)$ **в стационарных точках;**

г) классифицировать условно-стационарную точку. В случае необходимости проверить необходимые условия экстремума второго порядка, по аналогии.

6. Построить графики целевой функции и ограничения и нанести условно-стационарные точки.

Ход решения задачи.

1. Проверить условие регулярности.

Проверку провести самостоятельно.

2. Составить обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 (x_1^2 - x_2^2) + \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1).$$

3. Выписать необходимые условия экстремума первого порядка

а) $\dfrac{dL(x, \lambda_0, \lambda_1)}{dx_1} = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 x_1 = 0$, $\dfrac{dL(x, \lambda_0, \lambda_1)}{dx_2} = -2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0$;

б) $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$.

4. Решить систему уравнений из п.3:

$$\begin{cases} 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 x_1 = 0; \\ -2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0; \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

для двух случаев.

4.1. Первый случай $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 \neq 0$, так как все множители Лагранжа не могут быть одновременно равны нулю.

Из первых двух уравнений следует: $x_1 = x_1 = 0$. При этом третье уравнение не выполняется. Следовательно, система несовместна.

4.2. Второй случай $\lambda_0^* \neq 0$. Поделим уравнения приведенной в п.3 системы на λ_0 с заменой $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1:

$$\frac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_1} = 2x_1(1+\lambda_1) = 0\,,\ \frac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_2} = 2x_2(-1+\lambda_1) = 0\,, \tag{1.17}$$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\,.$$

Пусть $\lambda_1 = -1$. Тогда $x_2 = 0$, а $x_1 = \pm 1$. Пусть $\lambda_1 = 1$. Тогда $x_1 = 0$, а $x_2 = \pm 1$. Других решений система не имеет. Таким образом, имеем четыре условно-стационарные точки:

$$x1^*:\ x_1^* = 1,\ x_2^* = 0,\ \lambda_1^* = -1;\ \ x2^*:\ x_1^* = -1,\ x_2^* = 0,\ \lambda_1^* = -1;$$

$$x3^*:\ x_1^* = 0,\ x_2^* = 1,\ \lambda_1^* = 1;\ \ x4^*:\ x_1^* = 0,\ x_2^* = -1,\ \lambda_1^* = 1.$$

5. Проверить достаточные условия экстремума:

а) $d^2L(x^*,\lambda_1^*) = 2(1+\lambda_1^*)dx_1^2 + 2(\lambda_1^* - 1)dx_2^2$;

б) $dg_1(x^*) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 0$.

5.1. Исследуем точку $x1^*$: $dg_1(x1^*) = 2dx_1 = 0$, откуда получаем $dx_1 = 0$ и $d^2L(x1^*) = -4dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \neq 0$. Поэтому в точке $x1^*$ – регулярный локальный условный максимум.

5.2. Исследовать точку $x2^*$: $dg_1(x2^*) = -2dx_1 = 0$, откуда $dx_1 = 0$ и $d^2L(x2^*) = -4dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \neq 0$. Поэтому в точке $x2^*$ – регулярный локальный условный максимум.

5.3. Исследовать точку $x3^*$: $dg_1(x3^*) = 2dx_2 = 0$, откуда $dx_2 = 0$ и $d^2L(x3^*) = 4dx_1^2 > 0$ при $dx_1 \neq 0$. Поэтому в точке $x3^*$ – регулярный локальный условный минимум.

5.4. Исследовать точку $x4^*$: $dg_1(x4^*) = -2dx_2 = 0$, откуда $dx_2 = 0$ и $d^2L(x4^*) = 4dx_1^2 > 0$ при $dx_1 \neq 0$. Поэтому в точке $x4^*$ – регулярный локальный условный минимум.

6. Рассчитать значения функции в точках экстремума: $f(x1^*)=1$, $f(x2^*)=1$, $f(x3^*)=-1$, $f(x4^*)=-1$.

Листинг программы в пакете MathCAD15 приведен в приложении А (Рис. А 35 – А 44) стр. 93.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Перенос длинных формул по знаку «+», нажатием клавиш («**Ctrl**»+«**Enter**»).
- Просмотр результатов расчета.
- Определение массива.
- Определение однострочной функции и ее вызов.
- Градиент функции и его символьный и численный расчет.
- Символьные операции с производными и матрицами.
- Нахождение коней уравнений с использованием блока **Given – Find**.
- Символьную функцию **solve**, **substitute**.
- Транспонирование матрицы.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование трехмерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых и точек.

1.4 Аналитические методы поиска условного экстремума с ограничениями типа неравенств

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x)=f(x_1,...,x_n)$ и функции ограничений $g_j(x_1,...,x_n)\le 0$, $j=1,...m$, определяющие множество допустимых решений X.

Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки ее локальных минимумов и максимумов на множестве *X*:

$$f(x^*)=\min_{x\in X} f(x);\; f(x^*)=\max_{x\in X} f(x), \tag{1.18}$$

где $X=\{x\,|\,g_j(x)\le 0, j=1,...m\}$.

Находятся точки x^* локального экстремума с помощью необходимых и достаточных условий минимума и максимума первого и второго порядка при ограничениях типа неравенств (порядок условий определяется порядком используемых производных). Вычисляются значения $f(x^*)$ функций в найденных точках локального экстремума.

1.4.1 Необходимые условия минимума (максимума) первого порядка

Путь x^* – точка локального минимума (максимума), тогда найдется такое число $\lambda_0^*\ge 0$ и вектор $\lambda^*=(\lambda_1^*,...,\lambda_m^*)^T$, не равные одновременно нулю и такие, что выполняются следующие условия:

– условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x:

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda_0^* \lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \ i = 1,\dots,n; \tag{1.19}$$

– условие допустимости решения:

$$g_j(x^*) \le 0, \ j = 1,\dots,m; \tag{1.20}$$

– условие неотрицательности для условного минимума:

$$\lambda_j^* \ge 0, \ j = 1,\dots,m; \tag{1.21}$$

(условие неположительности для условного максимума: $\lambda_j^* \le 0$, $j = 1,\dots,m$);

– условие дополняющей нежесткости:

$$\lambda_j^* g_j(x^*) = 0, \ j = 1,\dots,m. \tag{1.22}$$

Если при этом градиенты активных в точке x^* ограничений линейно независимы (выполняется условие регулярности), то $\lambda_0^* \ne 0$.

Замечание 1.4.

1. Точки x^*, удовлетворяющие системе (1.19), называются условно-стационарными.

2. В отличие от случая ограничений типа равенств необходимые условия экстремума первого порядка формулируются отдельно для максимума и минимума.

Необходимые условия были доказаны Ф.Джоном (F. John), а при $\lambda_0^* \ne 0$ Куном и Таккером (H.W. Kuhn, A.W. Tucker).

3. Если в решаемой задаче ограничения записаны в форме $g_j(x) \ge 0$, то их необходимо переписать в виде, используемом в (1.18): $-g_j(x) \le 0$.

4. Далее будем использовать множество индексов ограничений, активных в точке x^*, которое обозначим через J_a.

5. При решении задач поиска условного максимума можно использовать необходимые и достаточные условия минимума, применяя преобразование $f(x^*) = \max\limits_{x \in X} f(x) = -\min\limits_{x \in X}\left[-f(x)\right]$.

6. Так как точка x^* заранее неизвестна, то проверка условия регулярности затруднена, поэтому рекомендуется следовать алгоритму, описанному в п.3 замечания 1.1 (стр. 10).

7. Точка экстремума, удовлетворяющая системе (1.19) при $\lambda_0^* \ne 0$, называется регулярной, а при $\lambda_0^* = 0$ – нерегулярной. Случай $\lambda_0^* = 0$ отражает вырожденность ограничений.

8. Условие (1.19) в регулярной точке экстремума x^* отражает факт, что антиградиент целевой функции является неотрицательной (неположительной

в случае максимума) линейной комбинацией градиентов функций, образующих активные ограничения в точке x^*. Действительно, условие (1.19) с учетом (1.22) можно переписать в форме:

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \nabla g_j(x^*) = \sum_{j \in J_a} \nabla g_j(x^*).$$

9. При $\lambda_0^* \neq 0$ справедливы два важных утверждения:

1) если функция $f(x)$, $g_j(x)$, $j = 1,...,m$, выпуклые, то необходимые условия первого порядка являются одновременно и достаточными условиями глобального минимума;

2) если функции «$-f(x)$», $g_j(x^*)$, $j = 1,...,m$, выпуклые, то необходимые условия первого порядка являются одновременно и достаточными условиями глобального максимума.

В обоих случаях множество допустимых решений X выпукло.

10. Условие допустимости решения, являющееся следствием постановки задачи (1.18), включено в (1.19) для удобства формирования алгоритма решения задачи.

11. Из условия дополняющей нежесткости следует, что если ограничение в точке x^* пассивное, т.е. $g_j(x^*) < 0$, то $\lambda_j^* = 0$, а если активное, т.е. $g_j(x^*) = 0$, то $\lambda_j^* \geq 0$ (для минимума) и $\lambda_j^* \leq 0$ (для максимума).

1.4.2 Достаточные условия минимума (максимума) первого порядка

Пусть имеется точка (x^*, λ^*), удовлетворяющая системе (1.19) при $\lambda_0^* \neq 0$, число активных ограничений в точке x^* совпадает с числом *n* переменных (при этом условие регулярности выполняется). Если $\lambda_j^* > 0$ для всех $j \in J_a$, то точка – точка условного локального минимума. Если $\lambda_j^* < 0$ для всех $j \in J_a$, то $j \in J_a$ – точка условного локального максимума в задаче (1.18).

1.4.3 Необходимое условие минимума (максимума) второго порядка

Пусть x^* – регулярная точка минимума (максимума) и имеется решение (x^*, λ^*) системы (1.19). Тогда второй дифференциал классической функции Лагранжа, вычисленный в точке (x^*, λ^*), неотрицателен (неположителен):

$$d^2 L(x^*, \lambda^*) \geq 0, \ \ (d^2 L(x^*, \lambda^*) \leq 0). \qquad (1.23)$$

Для всех $dx \in R^n$ таких что

$$dg_j(x^*) = 0, \ j \in J_a, \ \lambda_j^* > 0 \ \ (\lambda_j^* < 0);$$

$$dg_j(x^*) \leq 0, \ j \in J_a, \ \lambda_j^* = 0.$$

1.4.4 Достаточное условие экстремума второго порядка

Пусть имеется точка (x^*, λ^*), удовлетворяющая системе (1.19) при $\lambda_0^* \neq 0$. Если в этой точке $d^2 L(x^*, \lambda^*) > 0$ $(d^2 L(x^*, \lambda^*) < 0)$ для всех ненулевых $dx \in R^n$ таких что:

$$dg_j(x^*) = 0,\ j \in J_a,\ \lambda_j^* > 0\ \ (\lambda_j^* < 0);$$

$$dg_j(x^*) \le 0,\ j \in J_a,\ \lambda_j^* = 0.$$

То точка x^* является точкой локального минимума (максимума) в задаче (1.18).

Замечание 1.5.

В рассматриваемой задаче замечания 1.2 (стр. 12) и замечания 1.3 (стр. 13) так же справедливы с учетом замены (1.10) и (1.11) на (1.19) – (1.22).

1.4.5 Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Составить обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x).$$

Шаг 2. Записать необходимые условия минимума (максимума) первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda_1)}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$;

б) $g_j(x^*) \le 0$, $j = 1, \ldots, m$;

в) $\lambda_j^* \ge 0$, $j = 1, \ldots, m$ (для минимума), $\lambda_j^* \le 0$, $j = 1, \ldots, m$ (для максимума);

г) $\lambda_j^* g_j(x^*) = 0$, $j = 1, \ldots, m$.

Шаг 3. Решить систему для двух случаев:

1) $\lambda_0^* = 0$;

2) $\lambda_0^* \neq 0$ (при этом поделить условия, записанные на шаге 2, на λ_0^* и заменить $\dfrac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*}$ на λ_j^*).

В результате найти условно-стационарные точки x^*, выделив из них полученные при $\lambda_0^* \neq 0$ (они могут быть регулярными точками экстремума). В каждом из двух случаев следует начинать с рассмотрения 2^m вариантов удовлетворения условия «г» дополняющей нежесткости.

Шаг 4. Для выделенных на шаге 3 точек проверить достаточные условия экстремума первого или второго порядка.

Для проверки достаточных условий первого порядка следует:

а) определить число i активных ограничений в точке x^*;

б) если $i = n$ и $\lambda_j^* > 0$ для всех $j \in J_a$, то в точке x^* – локальный минимум. Если $i = n$ и $\lambda_j^* < 0$ для всех $j \in J_a$, то в точке x^* – локальный максимум. Если $i < n$ или соответствующие множители Лагранжа не удовлетворяют достаточным условиям первого порядка, проверить достаточные условия второго порядка.

Для проверки достаточных условий второго порядка следует:

а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в точке (x^*, λ^*):

$$d^2 L(x^*, \lambda^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_i \partial x_j} \partial x_i \partial x_j;$$

б) записать условия, накладываемые на первые дифференциалы активных ограничений:

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{dg_j(x^*)}{\partial x_i} \partial x_i = 0, \ \lambda_2 \le 0, \ \lambda_j^* > 0 \ (\lambda_j^* < 0), \tag{1.24}$$

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{dg_j(x^*)}{\partial x_i} \partial x_i \le 0, \ \lambda_2 \le 0, \ \lambda_j^* = 0;$$

в) исследовать знак второго дифференциала функции Лагранжа для ненулевых dx, удовлетворяющих системе 3.. Если $d^2 L(x^*, \lambda^*) > 0$, то в точке x^* – условный локальный минимум. Если $d^2 L(x^*, \lambda^*) < 0$, то в точке x^* – условный локальный максимум.

Если достаточные условия первого и второго порядка не выполняются, следует проверить выполнение необходимых условий второго порядка, следуя аналогичной процедуре. Если они выполняются, то требуется дополнительные исследование, а если нет, то в точке x^* нет условного экстремума.

Шаг 5. Вычислить значения функции в точках условного экстремума.

Условия экстремума в задаче (1.18) приведены в табл. 1.2 и табл. 1.3.

Табл. 1.2. Необходимые и достаточные условия первого порядка в задаче поиска условного экстремума при ограничениях типа неравенств

Необходимые условия первого порядка				**Достаточные условия первого порядка** $(\lambda_0^* \ne 0)$		
№ п/п	$\nabla_x L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)$; $\lambda_j^* g_j(x^*)$, $j = 1, \dots, m$	$g_j(x^*)$, $j = 1, \dots, m$	$\lambda_0^* \ge 0$, λ_j^*, $j = 1, \dots, m$	**Число** i **активных ограничений**	λ_j^*, $j \in J_a$	**Тип условно-стационарной точки** x^*
1	0	≤ 0	≥ 0	n	> 0	Условный локальный минимум
2	0	≤ 0	≤ 0	n	> 0	Условный локальный максимум

Табл. 1.3. Необходимые и достаточные условия второго порядка в задаче поиска условного экстремума при ограничениях типа неравенств

№ п/п	$d^2L(x^*,\lambda^*)$	$dg_j(x^*)$, $j \in J_a$, $\lambda_j^* > 0$	$g_j(x^*)$, $j \in J_a$, $\lambda_j^* < 0$	$dg_j(x^*)$, $j \in J_a$, $\lambda_j^* = 0$	**Тип условно-стационарной точки** x^*
1	>0	$x_1^2 + x_2^2 \le 4$		<0	Условный локальный минимум
2	<0		$0, dx \ne 0$	≤ 0	Условный локальный максимум
3	≥ 0	0		≤ 0	Может быть условный локальный минимум, требуется дополнительное исследование
4	≤ 0		0	≤ 0	Может быть условный локальный максимум, требуется дополнительное исследование
5	$=0$	0		≤ 0	Требуется дополнительное исследование
6	$=0$		0	≤ 0	Требуется дополнительное исследование
7	$<>0$	0		≤ 0	Нет экстремума
8	$<>0$		0	≤ 0	Нет экстремума

1.4.6 Практические примеры

Пример 1.9

Найти экстремум функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ **на множестве** $X = \{x | x_1 + x_2 - 2 \le 0\}$: $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to extr$; $g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 \le 0$.

Рассчитать:

1. Составить обобщенную функцию Лагранжа.

2. Выписать необходимые условия экстремума первого порядка:

а) условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x;

б) условие допустимости решения;

в) условие неотрицательности для условного минимума (неположительности для максимума);
г) условие дополняющей нежесткости.
3. Решить систему уравнений и найти условно-стационарные точки.
4. Проверить достаточные условия экстремума первого порядка.
5. При необходимости проверить необходимые и достаточные условия второго порядка.
6. Построить графики целевой функции и ограничения и нанести условно-стационарные точки.

Ход решения задачи.

1.Составить обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda_1)=\lambda_0(x_1^2+x_2^2)+\lambda_1(x_1+x_2-2).$$

2.Выписать необходимые условия экстремума первого порядка:

а) условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x:

$$\frac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_1}=2\lambda_0 x_1+\lambda_1=0,\ \frac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_2}=2\lambda_0 x_2+\lambda_1=0;$$

б) условие допустимости решения:

$\lambda_3 \neq 0$;

в) условие неотрицательности для условного минимума (максимума):

$\lambda_1 \geq 0$ (для минимума), $\lambda_1 \leq 0$ (для максимума);

г) условие дополняющей нежесткости:

$\lambda_1(x_1+x_2-2)=0$.

3. Решить систему уравнений из п.2 для двух случаев.

3.1. Случай 1 ($\lambda_0=0$). Тогда из условий «а» следует, что $\lambda_1=0$. Это противоречит требованию утверждения 1.4 о существовании ненулевого вектора $(\lambda_0,\lambda)^T$.

3.2. Случай 2 ($\lambda_0 \neq 0$). Поделить систему, приведенную в п.2, на λ_0 и заменить $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1. Обобщенная функция Лагранжа при этом будет приведена к классической форме:

а) $\frac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_1}=2x_1+\lambda_1=0$, $\frac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_2}=2x_2+\lambda_1=0$;

б) $x_1+x_2-2 \leq 0$;

в) $\lambda_1 \geq 0$ (для минимума), $\lambda_1 \leq 0$ (для максимума);

г) $\lambda_1(x_1+x_2-2)=0$.

Из условия «г» дополняющей нежесткости следует:

1) $\lambda_1=0$ (фактически решается задача поиска безусловного экстремума). Тогда из уравнений а) следует, что $x_1^*=x_2^*=0$, $\lambda_1^*=0$ и условие «б» выполняется. Выполняются необходимые условия и для минимума, и для максимума (строки 1 и 2 в табл. 1.3).

2) $\lambda_1 \neq 0$. Тогда из системы:

$$x_1 + x_2 - 2 = 0\,,\; 2x_1 + \lambda_2 - 2 = 0\,,\; 2x_2 + 2 - \lambda_2 = 0\,.$$

Из решения системы уравнений находим: $x_1^* = x_2^* = 1$; $\lambda_1^* = -1$. Так как $\lambda_1 < 0$, то необходимое условие минимума не выполняется (в точке $\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T$ нет минимума), но выполняется необходимое условие максимума.

Таким образом, найдены две условно-стационарные точки: $x1^* = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^T$, $\lambda 1^* = 0$; $x2^* = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T$, $\lambda 2^* = -1$.

4. Проверить выполнение достаточных условий экстремума первого порядка.

В точке $x1^* = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^T$ ограничение не является активным, так как $g_1(x1^*) = -2 < 0$, поэтому достаточные условия первого порядка не удовлетворяются (строки 1 и 2 в табл. 1.3).

5. Проверить достаточные условия экстремума второго порядка.

5.1. Точка $x1^* = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^T$. Так как $g_1(x1^*) = -2 < 0$ при $dx \neq 0$, то в точке $x1^* = (0,0)^T$ регулярный локальный условный минимум (строка 1 в табл. 1.3).

Дополнительные исследования.

Вычислить матрицу Гессе. $H(x) = \begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix} \geq l1 \cdot E$, где $l1 = 2$, E – единичная матрица. Следовательно, исследуемая функция сильно выпуклая, кроме того множество $X = \left\{x \middle| x_1 + x_2 - 2 \leq 0\right\}$ выпуклое. Поэтому в точке $x1^* = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^T$ достигается глобальный условный минимум (п.9 замечания 1.4, стр. 26), а достаточные условия первого и второго порядка можно было и не проверять.

5.2. Точка $x2^* = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T$. В точке $x2^* = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T$ ограничение является активным, но $l = 1 < n = 2$, где l – число активных ограничений, n – размерность целевой функции. Поэтому достаточное условие первого порядка не выполняется.

5.3. Проверить условие второго порядка.

Проверить достаточные условия второго порядка.

Имеем:

$$d^2L(x2^*, \lambda 2^*) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2,$$

$$dg_1(x2^*) = dx_1 + dx_2 = 0 \Rightarrow dx_1 = -dx_2\,.$$

Следовательно, $d^2L(x2^*, \lambda 2^*) = 4dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$.

Так как в этой точке $\lambda_1^* = -2 < 0$, то достаточное условие второго порядка для максимума не выполняется (строка 2 в табл. 1.3).

Проверить необходимое условие максимума второго порядка.

Так как $d^2L(x2^*,\lambda2^*)=4dx_2^2\geq 0$ при любых dx_2, то необходимое условие максимума не выполняется, поэтому в точке $x2^*=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T$ максимума нет.

6. Вычислить значение функции в точке условного минимума: $f(x1^*)=0$.

Листинг программы в пакете MathCAD15 приведен в приложении Б (Рис. Б 1 – Б 8) стр. 103.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Перенос длинных формул по знаку «+», нажатием клавиш («**Ctrl**»+«**Enter**»).
- Просмотр результатов расчета.
- Определение массива.
- Определение однострочной функции и ее вызов.
- Градиент функции и его символьный и численный расчет.
- Символьные операции с производными и матрицами.
- Нахождение коней уравнений с использованием блока **Given – Find**.
- Символьные функции **solve**, **substitute**.
- Транспонирование матрицы.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование трехмерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых и точек.

Пример 1.10

Найти экстремум функции $f(x)=x_1+x_2$ **на множестве** $X=\left\{x\middle|x_1^2+x_2^2-1\leq 0\right\}$**:** $f(x)=x_1+x_2\rightarrow extr$**;** $g_1(x)=x_1^2+x_2^2-1\leq 0$**.**

Рассчитать:

1. Составить обобщенную функцию Лагранжа.

2. Выписать необходимые условия экстремума первого порядка:

а) условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x;

б) условие допустимости решения;

в) условие неотрицательности для условного минимума (неположительности для максимума);

г) условие дополняющей нежесткости.

3. Решить систему уравнений и найти условно-стационарные точки.

4. Проверить достаточные условия экстремума первого порядка.

5. При необходимости проверить необходимые и достаточные условия второго порядка.

6. Построить графики целевой функции и ограничения и нанести условно-стационарные точки.

Ход решения задачи.

1.Составить обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda_1)=\lambda_0(x_1+x_2)+\lambda_1(x_1^2+x_2^2-1).$$

2.Выписать необходимые условия экстремума первого порядка:

а) условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x:

$$\frac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_1}=\lambda_0+2x_1\lambda_1=0, \frac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_2}=\lambda_0+2x_2\lambda_1=0;$$

б) условие допустимости решения

$$x_1^2+x_2^2-1\le 0;$$

в) условие неотрицательности для условного минимума (максимума):

$\lambda_1\ge 0$ (для минимума), $\lambda_1\le 0$ (для максимума);

г) условие дополняющей нежесткости:

$$\lambda_1(x_1^2+x_2^2-1)=0.$$

3.Найти условно стационарные точки. Решить систему уравнений из п.2 для двух случаев.

3.1. Случай 1 ($\lambda_0=0$).Тогда согласно утверждению 1.4 требуется, чтобы $\lambda_1\ne 0$. При этом $x_1=x_2=0$ и не удовлетворяется условие «г» дополняющей нежесткости.

3.2. Случай 2 ($\lambda_0\ne 0$). Поделить систему, приведенную в п.2, на λ_0 и заменить $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1. Обобщенная функция Лагранжа при этом будет приведена к классической форме:

а) $\frac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_1}=1+2x_1\lambda_1=0$, $\frac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_2}=1+2x_2\lambda_1=0$;

б) $x_1^2+x_2^2-1\le 0$;

в) $\lambda_1\ge 0$ (для минимума), $\lambda_1\le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_1(x_1^2+x_2^2-1)=0$.

Из условия «г» дополняющей нежесткости следует необходимо исследовать два варианта:

1). $\lambda_1=0$ (фактически решается задача поиска безусловного экстремума). Тогда условие п.2 (а) не выполняется.

2) $\lambda_1\ne 0$. Тогда $x_1^2+x_2^2-1=0$ (п.2 (б)) и система имеет два решения:

$$1+2x_1\lambda_1=0,\ 1+2x_2\lambda_1=0,\ x_1^2+x_2^2-1=0.$$

Из решения системы уравнений находим два решения:

точка 1: $x1_1^*=x1_2^*=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lambda 1_1^*=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (в точке 1 может быть минимум);

точка 2: $x2_1^*=x2_2^*=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lambda 2_1^*=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (в точке 2 может быть максимум).

Таким образом, найдены две условно-стационарные точки: $x1^*=\left(-\sqrt{2}/2 \quad -\sqrt{2}/2\right)^T$, $\lambda 1^*=\sqrt{2}/2$; $x2^*=\left(\sqrt{2}/2 \quad \sqrt{2}/2\right)^T$, $\lambda 2^*=-\sqrt{2}/2$.

4. Проверить выполнение достаточных условий экстремума первого порядка.

В точках $x1^* = \left(-\sqrt{2}/2 \quad -\sqrt{2}/2\right)^T$ и $x2^* = \left(\sqrt{2}/2 \quad \sqrt{2}/2\right)^T$ ограничение является активным.

В условно стационарных точках $i = 1 < n = 2$. Следовательно, необходимые условия экстремума первого порядка не выполняются.

5. Проверить условия экстремума второго порядка.

$$d^2L(x^*, \lambda^*) = 2\lambda_1^* dx_1^2 + 2\lambda_1^* dx_2^2,$$
$$dg_1(x^*) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 0.$$

В точках $x1^* = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^T$ и $x2^* = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^T$ выполняется $dx_1 = -dx_2$.

5.1. Точка т.1. Так как $d^2L(x1^*) = 4\lambda_1^* dx_2^2 = 2\sqrt{2}dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$, то в точке $x1^*$ – регулярный локальный условный минимум (строка 1 в Табл. 1.3).

5.2. Точка т.2. Так как $d^2L(x2^*) = 4\lambda_1^* dx_2^2 = -2\sqrt{2}dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \neq 0$, то в точке $x2^*$ – регулярный локальный условный максимум (строка 2 в табл. 1.3).

Дополнительные исследования.

Задача поиска максимума функции $f(x)$ сводится к задачи поиска минимума путем замены знака перед функцией на противоположный $-f(x) = -x_1 - x_2$.

Вычислить матрицу Гессе функции $-f(x)$. $H(x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \geq 0$. Следовательно, исследуемая функция выпуклая, кроме того, множество $X = \left\{ x \middle| x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \right\}$ выпуклое. Поэтому в точке $x1^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ достигается глобальный условный минимум (п.9 замечаний 1.4, стр. 26), а достаточные условия первого и второго порядка можно было и не проверять. Условия второго порядка проверялись для демонстрации методики.

6. Вычислить значение функции в точке условного минимума: $f(x1^*) = -\sqrt{2}$, $f(x2^*) = \sqrt{2}$.

Листинг программы в пакете MathCAD15 приведен в приложении Б (Рис. Б 9 – Б 16) стр. 111.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Перенос длинных формул по знаку «+», нажатием клавиш («**Ctrl**»+«**Enter**»).
- Просмотр результатов расчета.
- Определение массива.
- Определение однострочной функции и ее вызов.
- Градиент функции и его символьный и численный расчет.

- Символьные операции с производными и матрицами.
- Нахождение коней уравнений с использованием блока **Given – Find**.
- Символьные функции **solve**, **substitute**.
- Транспонирование матрицы.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование трехмерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых и точек.

Пример 1.11

Найти экстремум функции $f(x)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2$ **на множестве** $X=\left\{x\middle|x_1^2+x_1^2-52\le 0\right\}$**:** $f(x)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2\to extr$**;**

$g_1(x)=x_1^2+x_1^2-52\le 0$**.**

Рассчитать:

1. Составить обобщенную функцию Лагранжа.

2. Выписать необходимые условия экстремума первого порядка:

а) условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x;

б) условие допустимости решения;

в) условие неотрицательности для условного минимума (неположительности для максимума);

г) условие дополняющей нежесткости.

3. Решить систему уравнений и найти условно-стационарные точки.

4. Проверить достаточные условия экстремума первого порядка.

5. При необходимости проверить необходимые и достаточные условия второго порядка.

6. Построить графики целевой функции и ограничения и нанести условно-стационарные точки.

Ход решения задачи.

1.Составить обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda_1)=\lambda_0[(x_1-2)^2+(x_2-3)^2]+\lambda_1[x_1^2+x_1^2-52].$$

2.Выписать необходимые условия экстремума первого порядка:

а) условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x:

$$\frac{dL(x,\lambda_0,\lambda_1)}{dx_1}=2\lambda_0(x_1-2)+2\lambda_1x_1=0,\ \frac{dL(x,\lambda_0,\lambda_1)}{dx_2}=2\lambda_0(x_2-3)+2\lambda_1x_2=0;$$

б) условие допустимости решения:

$x_1^2+x_1^2-52$;

в) условие неельности для условного минимума (максимума):

$\lambda_1\ge 0$ (для минимума), $\lambda_1\le 0$ (для максимума);

г) условие дополняющей нежесткости:

$\lambda_1(x_1^2+x_2^2-52)=0$.

3. Найти условно стационарные точки. Решить систему уравнений из п.2 для двух случаев.

3.1. Случай 1 ($\lambda_0 = 0$). Тогда согласно утверждению 3.4 требуется, чтобы $\lambda_1 \neq 0$. При этом $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и не удовлетворяется условие «г» дополняющей нежесткости. Система несовместна.

3.2. Случай 2 ($\lambda_0 \neq 0$). Поделить систему, приведенную в п.2, на λ_0 и заменить $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1. Обобщенная функция Лагранжа при этом будет приведена к классической форме:

а) $\frac{dL(x,\lambda_0,\lambda_1)}{dx_1} = 2(x_1 - 2) + 2\lambda_1 x_1 = 0$, $\frac{dL(x,\lambda_0,\lambda_1)}{dx_2} = 2(x_2 - 3) + 2\lambda_1 x_2 = 0$;

б) $x_1^2 + x_1^2 - 52 \leq 0$;

в) $\lambda_1 \geq 0$ (для минимума), $\lambda_2 \leq 0$ (для максимума);

г) $\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 52) = 0$.

Из условия «г» дополняющей нежесткости следует необходимо исследовать два варианта:

1) $\lambda_1 = 0$. Тогда $(x_1^2 + x_2^2 - 52) = 0$, и выполняются необходимые условия и для минимума и для максимума (строки 1 и 2 в табл. 1.2). Имеем условно-стационарную точку $x1^*$: $x1_1^* = 2$, $x1_2^* = 3$, $\lambda 1_1^* = 0$;

2) $\lambda_1 \neq 0$. Тогда из решения система уравнений п.2 имеется два корня.

Из решения системы уравнений находим два решения:

точка 2: $x2_1^* = 4$, $x2_2^* = 6, \lambda 2_1^* = -\frac{1}{2}$ (в точке 2 может быть максимум, т.к. $\lambda 2_1^* \leq 0$);

точка 3: $x3_1^* = -4$, $x3_2^* = -6$, $\lambda 3_1^* = -\frac{3}{2}$ (в точке 3 может быть максимум, т.к. $\lambda 3_1^* \leq 0$).

Таким образом, найдены три условно-стационарные точки: $x1^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}^T$, $\lambda 1^* = 0$; $x2^* = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}^T$, $\lambda 2^* = -\frac{1}{2}$ и $x3^* = \begin{pmatrix} -4 & -6 \end{pmatrix}^T$, $\lambda 3^* = -\frac{3}{2}$.

4.Проверить выполнение достаточных условий экстремума первого порядка для точек $x2^*$ и $x3^*$.

В обеих условно-стационарных точках ограничение превращается в равенство, т.е. активно. Так как число активных ограничений $i = 1 < 2 = n$, то условия первого порядка не выполняются. Так как функция $-f(x) = -(x_1 - 2)^2 - (x_2 - 3)^2$ не является выпуклой (доказательства провести самостоятельно), то необходимые условия не являются достаточным.

5. Проверить условия экстремума второго порядка.

$$d^2L(x^*,\lambda^*) = (2 + 2\lambda_1^*)dx_1^2 + (2 + 2\lambda_1^*)dx_2^2.$$

5.1. Точка т.1. В точке т.1 ($x1^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}^T$) ограничение не является активным. Так как $\lambda_1^* = 0$, то $d^2L(x^*,\lambda^*) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2 > 0$ при $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$.

Поэтому в точке $x1^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}^T$ – условный локальный минимум (строка 1 в табл. 3.3). Так как целевая функция $f(x)$ выпуклая и множество допустимых решений выпукло, то можно заключить, что в данном случае необходимое условие минимума является достаточным. В точке т.1 глобальный минимум (доказать самостоятельно).

5.2. Точки т.2 и т.3.

В точках $x2^* = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}^T$ и $x3^* = \begin{pmatrix} -4 & -6 \end{pmatrix}^T$ ограничение активно. Поэтому $dg_1(x^*) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2$. В точках $x3^* = \begin{pmatrix} -4 & -6 \end{pmatrix}^T$ и $x3^* = \begin{pmatrix} -4 & -6 \end{pmatrix}^T$ выполняется $dx_1 = -\dfrac{3}{2} dx_2$.

В точке $x2^* = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}^T$ $d^2L(x2^*) = \left[\left(-\dfrac{3}{2} \right) dx_2 \right]^2$ при $dx_2 \neq 0$, а $\lambda_1^* = -\dfrac{1}{2} < 0$, то достаточные условия максимума не выполняются (строка 2 в табл. 1.3). Так как $d^2L(x2^*) \geq 0$ при всех dx_2, то и необходимое условие максимума второго порядка в точке $x2^* = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}^T$ не выполняется (строка 4 в табл. 1.3). Поэтому в ней нет экстремума.

В точке $x3^* = \begin{pmatrix} -4 & -6 \end{pmatrix}^T$ $d^2L(C) = -[(-\dfrac{3}{2})dx_2]^2 - dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \neq 0$, то достаточные условия максимума выполняется. В точке $x3^* = \begin{pmatrix} -4 & -6 \end{pmatrix}^T$ условный локальный максимум (строка 2 в табл. 1.3).

6.Вычислить значение функции в точке условного минимума: $f(x1^*) = 0$, $f(x3^*) = 117$.

Листинг программы в пакете MathCAD15 приведен в приложении Б (Рис. Б 17 – Б. 26) стр. 119.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Перенос длинных формул по знаку «+», нажатием клавиш («**Ctrl**»+«**Enter**»).
- Просмотр результатов расчета.
- Определение массива.
- Определение однострочной функции и ее вызов.
- Градиент функции и его символьный и численный расчет.
- Символьные операции с производными и матрицами.
- Нахождение коней уравнений с использованием блока **Given – Find**.
- Символьные функции **solve**, **substitute**.
- Транспонирование матрицы.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование трехмерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых и точек.

1.5 Аналитические методы поиска условного экстремума со смешанными ограничениями

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f(x_1,...,x_n)$ и функции ограничений типа равенств и неравенств: $g_j(x) = 0$, $j = 1,...,m$; $g_j(x) \le 0$, $j = m+1,...,p$, определяющие множество допустимых решений X.

Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^* \in X$ ее локальных минимумов и максимумов на множестве X:

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x); f(x^*) = \max_{x \in X} f(x), \tag{1.25}$$

где $x = \left\{ x \left| \begin{matrix} g_j(x) = 0,\ j = 1,...,m; m < n \\ g_j(x) \le 0,\ j = m+1,...,p \end{matrix} \right. \right\}$.

Находятся точки x^* локального экстремума с помощью необходимых и достаточных условий минимума и максимума первого и второго порядка при смешанных ограничениях (порядок условий определяется порядком используемых производных). Вычисляются значения $f(x^*)$ функции в найденных точках локального экстремума.

1.5.1 Необходимые условия минимума (максимума) первого порядка

Пусть x^* - точка локального минимума (максимума) в задаче (1.25). Тогда найдется такое число $\lambda_0^* \ge 0$ и вектор $\lambda^* = (\lambda_1^*,...,\lambda_p^*)^T$, не равные одновременно нулю и такие, что выполняются следующие условия:

– условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x:

$$\frac{\partial L(x^*,\lambda_0^*,\lambda^*)}{\partial x_1} = 0,\ i = 1,...,n; \tag{1.26}$$

– условие допустимости решения:

$$g_j(x^*) = 0,\ \ j = 1,...,m;\ \ g_j(x^*) \le 0,\ \ j = m+1,...,p; \tag{1.27}$$

– условие неотрицательности для условного минимума:

$$\lambda_j^* \ge 0, j = m+1,..., p \tag{1.28}$$

(условие неположительности для условного максимума: $\lambda_j^* \le 0$, $j = m+1,...,p$);

– условие дополняющей нежесткости:

$$\lambda_j^* g_j(x^*) = 0,\ j = m+1,...,p. \tag{1.29}$$

Если при этом градиенты активных ограничений-неравенств и ограничений-равенств в точке x^* линейно независимы (выполняется условие регулярности), то $\lambda_0^* \neq 0$.

Замечание 1.6.

1. Пункты 1–7 замечаний 1.4 остаются справедливы и для данной задачи, если заменить (1.19) на (1.26), а необходимые условия первого порядка в параграфе 1.4.2 на аналогичные условия в данном параграфе.

2. Условие (1.26) в регулярной точке экстремума ($\lambda_0^* \neq 0$) отражает факт, что антиградиент целевой функции является неотрицательной (неположительной в случае максимума) линейной комбинацией градиентов функций, образующих активные ограничения-неравенства в точке x^* и ограничения-равенства (сравните с п.5 замечания 1.1 и п.8 замечания 1.4).

3. При $\lambda_0^* \neq 0$ справедливы два важных утверждения:

1) если функции $f(x)$, $g_j(x), j = m+1,\ldots,p$, выпуклые, а функции $g_j(x), j = 1,\ldots,m$, линейные, то необходимые условия первого порядка являются одновременно и достаточными условиями глобального минимума;

2) если функции «$-f(x)$», $g_j(x), j = m+1,\ldots,p$, выпуклые, а функции $g_j(x), j = 1,\ldots,m$, линейные, то необходимые условия первого порядка являются одновременно и достаточными условиями глобального максимума.

В обоих случаях множество допустимых решений X выпукло.

4. Следует подчеркнуть, что условия дополняющей нежесткости и знакоопределенности множителей Лагранжа записываются только для ограничений-неравенств.

5. Условие допустимости решения, являющееся следствием постановки задачи (1.25) включено в (1.26) для удобства формирования алгоритма решения.

6. Из условия дополняющей нежесткости (1.29) следует, что если ограничение-неравенство в точке x^* пассивное, т.е. $g_j(x^*) < 0$, то $\lambda_j^* = 0$, а если – активное, т.е. $g_j(x^*) = 0$, то $\lambda_j^* \geq 0$ (для минимума) и $\lambda_j^* \leq 0$ (для максимума).

1.5.2 Достаточные условия минимума (максимума) первого порядка

Пусть имеется точка (x^*, λ^*), удовлетворяющая системе (1.26) при $\lambda_0^* \neq 0$, суммарное число активных ограничений-неравенств в точке x^* и ограничений-равенств совпадает с числом n переменных (при этом условие регулярности выполняется). Если $\lambda_j^* > 0$ для всех $j \in J_a$, то точка x^* – точка условного локального минимума в задаче (1.25). Если $\lambda_j^* < 0$ для всех $j \in J_a$, то x^* – точка условного локального максимума.

1.5.3 Необходимые условия минимума (максимума) второго порядка

Пусть x^* – регулярная точка минимума (максимума) в задаче (1.25) и имеется решение (x^*, λ^*) системы (1.26). Тогда второй дифференциал классической функции Лагранжа, вычисленный в точке (x^*, λ^*), неотрицателен (неположителен):

$$d^2L(x^*, \lambda^*) \ge 0 \quad (d^2L(x^*, \lambda^*) \le 0)$$

для всех $dx \in R^n$ таких, что:

$$dg_j(x^*) = 0, j = 1,...,m \text{ и } j \in J_a,\ \lambda_j^* > 0\ \ (\lambda_j^* < 0);$$

$$dg_j(x^*) \le 0,\ j \in J_a,\ \lambda_j^* = 0,$$

то точка x^* является точкой локального минимума (максимума) в задаче (1.25).

1.5.4 Достаточные условия экстремума второго порядка

Пусть имеется точка (x^*, λ^*), удовлетворяющая системе уравнений и неравенств (1.26) – (1.29) при $\lambda_0^* \ne 0$. Если в этой точке $d^2L(x^*, \lambda^*) \ge 0$ ($d^2L(x^*, \lambda^*) \le 0$) для всех ненулевых $dx \in R^n$ таких, что:

$$dg_j(x^*) = 0, j = 1,...,m \text{ и } j \in J_a,\ \lambda_j^* > 0\ \ (\lambda_j^* < 0);$$

$$dg_j(x^*) \le 0,\ j \in J_a,\ \lambda_j^* = 0,$$

то точка x^* является точкой локального минимума (максимума) в задаче (1.25).

1.5.5 Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Составить обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j g_j(x).$$

Шаг 2. Записать необходимые условия минимума (максимума) первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = 0, i = 1,...,n$;

б) $g_j(x^*) = 0,\ j = 1,...,m;\ g_j(x^*) \le 0,\ j = m+1,...,p$;

в) $\lambda_j^* \ge 0,\ j = m+1,...,p$ (для минимума), $\lambda_j^* \le 0,\ j = m+1,...,p$ (для максимума);

г) $\lambda_j^* g_j(x^*) = 0, j = m+1,...,p$.

Шаг 3. Решить систему для двух случаев:

1) $\lambda_0^* = 0$;

2) $\lambda_0^* \ne 0$ (при этом поделить условия «а», «в», «г» на λ_0^* и заменить $\dfrac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*}$ на λ_j^*).

В результате найти условно-стационарные точки x^*, выделив из них полученные при $\lambda_0^* \neq 0$ (они могут быть регулярными точками экстремума). В каждом из двух случаев следует начинать с рассмотрения 2^{p-m} вариантов удовлетворения условия «г» дополняющей нежесткости.

Шаг 4. Для выделенных на шаге 3 точек проверить достаточные условия экстремума первого или второго порядка.

Для проверки достаточных условий первого порядка следует:

а) определить число l ограничений-равенств и активных ограничений-неравенств;

б) если $l = n$ и $\lambda_j^* > 0$ для всех $j \in J_a$, т.е. для всех активных ограничений-неравенств, то в точке x^* – локальный минимум. Если $l = n$ и $\lambda_j^* < 0$ для всех $j \in J_a$, то в точке x^* – локальный максимум. Если $l < n$ или соответствующие множители Лагранжа не удовлетворяют достаточным условиям первого порядка, проверить достаточные условия второго порядка.

Для проверки достаточных условий второго порядка следует:

а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в точке (x^*, λ^*):

$$d^2 L(x^*, \lambda^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j ;$$

б) записать условия, накладываемые на первые дифференциалы ограничений-равенств и активных в точке x^* ограничений-неравенств:

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} dx_i = 0, \ \ j = 1, \ldots, m \ \text{ и } \ j \in J_a; \ \ \lambda_j^* > 0 \ (\lambda_j^* < 0); \qquad (1.30)$$

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} dx_i \leq 0, \ \ j \in J_a, \ \ \lambda_j^* = 0;$$

в) исследовать знак второго дифференциала функции Лагранжа для ненулевых dx, удовлетворяющих (1.30). Если $d^2 L(x^*, \lambda^*) > 0$, то в точке x^* - условный локальный минимум. Если $d^2 L(x^*, \lambda^*) < 0$, то в точке x^* - условный локальный максимум. Если достаточные условия экстремума не выполняются, следует проверить выполнение необходимых условий второго порядка, следуя аналогичной процедуре. Если они выполняются, то требуется дополнительное исследование, а если нет, то в точке x^* нет условного экстремума.

Шаг 5. Вычислить значения функции в точках условного экстремума.

Условия экстремума в задаче (1.26) приведены в Табл. 1.4 и Табл. 1.5.

Замечание 1.7

В рассматриваемой задаче замечания 1.2 и пп. 1 и 3 замечания 1.3 (стр. 13) также справедливы с учетом замены (1.10) и (1.11) на (1.26) - (1.29).

Табл. 1.4. Необходимые и достаточные условия первого порядка в задаче поиска условного экстремума при смешанных ограничениях

Необходимые условия первого порядка					**Достаточные условия первого порядка**		
№ п/п	$\nabla_x L(x^*,\lambda_0^*,\lambda^*)$, $\lambda_j^* g_j(x^*)$, $j=m+1,\ldots,p$	$g_j(x^*)$, $j=1,\ldots,m$	$g_j(x^*)$, $j=m+1,\ldots,p$	$\lambda_0^* \ge 0$, λ_j^*	Число l ограниче-ний-равенств и активных ограниче-ний-неравенств	λ_j^* $j \in J_a$	Тип условно-стационар-ной точки
1	0	0	≤ 0	≤ 0	n	> 0	Условный локальный минимум
2	0	0	≤ 0	≤ 0	n	< 0	Условный локальный максимум

Табл. 1.5. Необходимые и достаточные условия второго порядка в задаче поиска условного экстремума при смешанных ограничениях

№ п/п	$d^2L(x^*,\lambda^*)$	$dg_j(x^*)$, $j=1,\ldots,m$	$dg_j(x^*)$, $j \in J_a$, $\lambda_j^* > 0$	$dg_j(x^*)$ $j \in J_a$ $\lambda_j^* < 0$	$dg_j(x^*)$ $j \in J_a$ $\lambda_j^* = 0$	Тип условно-стационарной точки x^*
1	> 0	$0, dx \ne 0$	$0, dx \ne 0$		≤ 0	Условный локальный минимум
2	< 0	$0, dx \ne 0$		$0, dx \ne 0$	≤ 0	Условный локальный максимум
3	≥ 0	0	0		≤ 0	Может быть условный локальный минимум, требуется дополнительное исследование
4	≤ 0	0		0	≤ 0	Может быть условный локальный максимум, требуется дополнительное исследование
5	$= 0$	0	0		≤ 0	Требуется дополнительное исследование
6	$= 0$	0	0	0	≤ 0	Требуется дополнительное исследование
7	$\gtrless 0$	0	0		≤ 0	Нет экстремума
8	$\gtrless 0$	0		0	≤ 0	Нет экстремума

1.5.6 Практические примеры

Пример 1.12

Найти экстремум функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ **на множестве** $X = \{x | x_1 - 1 = 0,\ x_1 + x_2 - 2 \le 0\}$**:** $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to extr$**;** $g_1(x) = x_1 - 1 = 0$**,** $g_2(x) = x_1 + x_2 - 2 \le 0$**.**

Рассчитать:

1. Составить обобщенную функцию Лагранжа.

2. Выписать необходимые условия экстремума первого порядка:

а) условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x;

б) условие допустимости решения;

в) условие неотрицательности для условного минимума (неположительности для максимума);

г) условие дополняющей нежесткости.

3. Решить систему уравнений и найти условно-стационарные точки.

4. Проверить достаточные условия экстремума первого порядка.

5. При необходимости проверить необходимые и достаточные условия второго порядка.

6. Построить графики целевой функции и ограничения и нанести условно-стационарные точки.

1. Составить обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_1(x_1 - 1) + \lambda_2(x_1 + x_2 - 2).$$

2. Выписать необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\dfrac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_2} = 2\lambda_0 x_2 + \lambda_2 = 0$;

б) $x_1 - 1 = 0$, $x_1 + x_2 - 2 \le 0$;

в) $\lambda_2 \ge 0$ (для минимума), $\lambda_2 \le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_2(x_1 + x_2 - 2) = 0$.

3. Решить систему для двух случаев ($\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \ne 0$).

3.1. Случай 1 ($\lambda_0 = 0$). Тогда $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 0$, что противоречит необходимым условиям экстремума первого порядка (все множители Лагранжа одновременно не могут равняться нулю).

3.2. Случай 2 ($\lambda_0 \ne 0$). Поделить уравнения системы, приведенной в п.2, на λ_0, заменяя $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1 и $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2. Условие «а» запишется в форме:

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_2 = 0.$$

Остальные соотношения сохранят свой вид. Рассмотрим $2^{p-m}=2$, где p - общее количество ограничений, m - количество ограничений типа равенств, варианта удовлетворения условия «г» дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_2 = 0$. Тогда $x_2 = 0$. Из ограничения следует $x_1 = 1$, а из условия «а» $\lambda_1 = -2$. Имеем условно-стационарную точку $x1^*: x1_1^* = 1, x1_2^* = 0, \lambda 1_1^* = -2, \lambda 1_2^* = 0$, в которой удовлетворяются необходимые условия и минимума, и максимума;

2) $\lambda_2 \neq 0$. Тогда имеет место система уравнений $x_1 + x_2 - 2 = 0$, $2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $2x_2 + \lambda_2 = 0$, $x_1 - 1 = 0$, решение которой дает одну условно-стационарную точку $x2^*: x2_1^* = 1, x2_2^* = 1, \lambda 2_1^* = 0, \lambda 2_2^* = -2 < 0$, в которой удовлетворяются необходимые условия максимума.

4. Проверить достаточные условия экстремума.

4.1. Исследовать точку $x1^*$.

а) достаточные условия первого порядка.

Ограничение-неравенство не является активным. Поэтому $l = 1 < n = 2$ и достаточные условия первого порядка не выполняются;

б) достаточные условия второго порядка.

Второй дифференциал классической функции Лагранжа примет вид $d^2L(A) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2$. Так как ограничение $g_2(x) \leq 0$ в точке $x1^*$ пассивно, то $dg_1(A) = dx_1 = 0$ и $d^2L(A) = 2dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$. Следовательно, в точке $x1^*$ – условный локальный минимум (строка 1 в табл. 1.5).

С другой стороны, целевая функция задачи выпуклая, ограничение-равенство – линейное, ограничение-неравенство – выпуклое. Поэтому в точке $x1^*$ достигается глобальный минимум (п.3 замечания 1.6). Достаточные условия второго порядка можно было не проверять.

Если бы искался экстремум функции $f(x) = -x_1^2 - x_2^2$, то функция «$-f(x)$» была бы выпуклой, а в точке $x1^*$ достигался бы глобальный максимум (п.3 замечания я.6).

4.2. Исследовать точку $x2^*$.

а) достаточные условия первого порядка.

Ограничение $g_2(x) \leq 0$ является активным. Поэтому $l = 2 = n = 2$. Так как $\lambda_2^* = -2 < 0$, то в точке $x2^*$ выполняются достаточные условия первого порядка (строка 2 в Табл. табл. 1.4) и она является точкой локального максимума. Из методических соображений проверим достаточные условия второго порядка;

б) достаточные условия второго порядка.

Второй дифференциал классической функции Лагранжа примет вид $d^2L(x2^*) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2$. В точке $x2^*$ ограничение $g_2(x) = 0$ активно: $dg_1(x2^*) = dx_1 = 0$, $dg_2(x2^*) = dx_1 + dx_2 = 0$. Отсюда $dx_1 = dx_2 = 0$ и $d^2L(x2^*) = 0$. Поэтому требуется дополнительное исследование (строка 6 в табл. 1.5). Из графика видно, что в точке $x2^*$ достигается условный локальный максимум, совпадающий с условным глобальным максимумом.

5. Рассчитать значения функции в точках экстремума: $f(x1^*)=1$, $f(x2^*)=2$.

Листинг программы в пакете MathCAD15 приведен в приложении В (Рис. В 1 – Рис. В 8) стр. 129.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Перенос длинных формул по знаку «+», нажатим клавиш («**Ctrl**»+«**Enter**»).
- Просмотр результатов расчета.
- Определение массива.
- Определение однострочной функции и ее вызов.
- Градиент функции и его символьный и численный расчет.
- Символьные операции с производными и матрицами.
- Нахождение коней уравнений с использованием блока **Given – Find**.
- Символьные функции **solve**, **substitute**.
- Транспонирование матрицы.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование трехмерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых и точек.

Пример 1.13

Найти экстремум функции $f(x)=x_1^2-x_2$ **на множестве**

$X=\left\{x\middle|x_1+x_2-6=0, 1-x_1\le 0,\ x_1^2+x_2^2-26\le 0\right\}: f(x)=x_1^2-x_2 \to extr,$

$g_1(x)=x_1+x_2-6=0,\ g_2(x)=1-x_1\le 0,\ g_3(x)=x_1^2+x_2^2-26\le 0$

Рассчитать:

1. Составить обобщенную функцию Лагранжа.

2. Выписать необходимые условия экстремума первого порядка:

а) условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x;

б) условие допустимости решения;

в) условие неотрицательности для условного минимума (неположительности для максимума);

г) условие дополняющей нежесткости.

3. Решить систему уравнений и найти условно-стационарные точки.

4. Проверить достаточные условия экстремума первого порядка.

5. При необходимости проверить необходимые и достаточные условия второго порядка.

6. Построить графики целевой функции и ограничения и нанести условно-стационарные точки.

1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0(x_1^2-x_2)+\lambda_1(x_1+x_2-6)+\lambda_2 1-x_1+\lambda_3(x_1^2+x_2^2-26).$$

2. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 x_1 = 0$, $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_2} = -\lambda_0 + \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0$;

б) $x_1 + x_2 - 6 = 0$, $1 - x_1 \le 0$, $x_1^2 + x_2^2 - 26 \le 0$;

в) $\lambda_2 \ge 0$, $\lambda_3 \ge 0$ (для минимума), $\lambda_2 \le 0$, $\lambda_3 \le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_2(1 - x_1) = 0$, $\lambda_3(x_1^2 + x_2^2 - 26) = 0$.

3. Решим систему для двух случаев ($\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \ne 0$).

3.1. Случай 1 ($\lambda_0 = 0$). Тогда условия «а» имеют вид:

$$\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 x_1 = 0,\ \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0.$$

Рассмотрим четыре варианта удовлетворения условия «г» дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда $\lambda_1 = 0$ и не удовлетворяется необходимым условиям минимума первого порядка;

2) $\lambda_2 \ne 0$, $\lambda_3 \ne 0$. Тогда $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 0$, что противоречит условию $\lambda_2 \ne 0$;

3) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \ne 0$. Тогда имеет место система уравнений:

$$x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0,$$

$$x_1 + x_2 - 6 = 0,$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_3 x_1 = 0,$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0.$$

Из двух последних уравнений следует: $2\lambda_3(x_2 - x_1) = 0$. Так как $\lambda_3 \ne 0$, то $x_1 = x_2$. Из двух первых уравнений следует:

$$x_1 = 1, x_2 = 5,$$

$$x_1 = 5, x_2 = 1,$$

т.е. $x_1 \ne x_2$. Поэтому система несовместна;

4) $\lambda_2 \ne 0$, $\lambda_3 \ne 0$. Тогда имеет место система уравнений:

$$x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0,$$

$$1 - x_1 = 0,$$

$$x_1 + x_2 - 6 = 0.$$

Система удовлетворяется в точке $x_1 = 1, x_2 = 5$. Условия «а» примут вид:

$$\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0,$$

$$\lambda_1 + 10\lambda_3 = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = -10\lambda_3$ и $\lambda_2 = -8\lambda_3$. Так как $\lambda_3 \ne 0$, то λ_2 и λ_3 имеют разные знаки, что противоречит условию и минимума, и максимума.

3.2. Случай 2 ($\lambda_0 \neq 0$). Поделить уравнения системы, приведенной в п.2, на λ_0 и заменить $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2, $\dfrac{\lambda_3}{\lambda_0}$ на λ_3. Условие «а» примут форму:

$$2x_1 + \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 x_1 = 0,$$

$$-1 + \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0.$$

Условия «б» – «г» сохраняют вид. Рассмотрим четыре варианта выполнения условий «г» дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда $\lambda_1 = 1$, а $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, что не удовлетворяет ограничениям «б»;

2) $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда $x_1 = 1$, а $x_2 = 5$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Получена условно-стационарная точка $x1^*: x1_1^* = 1, x1_2^* = 5, \ \lambda 1_1^* = 1, \ \lambda 1_2^* = 3$, в которой удовлетворяются необходимые условия минимума;

3) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тогда:

$$x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0,$$

$$x_1 + x_2 - 6 = 0,$$

$$2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_3 x_1 = 0,$$

$$-1 + \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0.$$

Отсюда получаем точки с координатами $x_1 = 1, x_2 = 5$ и $x_1 = 5, x_2 = 1$. В первой точке имеем:

$$2 + \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0,$$

$$-1 + \lambda_1 + 10\lambda_3 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = \dfrac{15}{4}$, $\lambda_3 = -\dfrac{11}{8}$. Получены условно-стационарные точки $x12^*$:, $x12_1^* = 1$, $x12_2^* = 5$, $\lambda 12_1^* = -\dfrac{11}{8}$, $\lambda 12_2^* = 0$, $\lambda 12_3^* = \dfrac{3}{8}$, в которых удовлетворяются необходимые условия минимума, и точка $x2^*$:, $x2_1^* = 5$, $x2_2^* = 1$, $\lambda 2_1^* = \dfrac{15}{4}$, $\lambda 2_2^* = 0$, $\lambda 2_3^* = -\dfrac{11}{8}$, в которой удовлетворяются необходимые условия максимума;

4) $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тогда:

$$x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0,$$

$$1 - x_1 = 0,$$

$$x_1 + x_2 - 6 = 0$$

выполняется в точке $x_1 = 1, x_2 = 5$. Условие «а» принимает форму:

$$2+\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3=0,$$

$$-1+\lambda_1+10\lambda_3=0.$$

Отсюда $\lambda_1=1-10\lambda_3$ и $3-8\lambda_3-\lambda_2=0$. Так как $\lambda_2\neq 0$ и $\lambda_3\neq 0$, а также они должны быть одного знака, то последнее равенство выполняется только при $\lambda_2>0$, $\lambda_3>0$, в частности, при $\lambda_3=0{,}1$; $\lambda_2=2{,}2$. При этом $\lambda_1=0$. Получили ту же условно-стационарную точку $x13^*: x13_1^*=1$, $x13_2^*=5$, $\lambda 13_1^*=0$, $\lambda 13_2^*=2.2$, $\lambda 13_3^*=0{,}1$, но с другими множетелями Лагранжа.

4. Проверить достаточные условия экстремума.

а) достаточные условия первого порядка.

Ограничение-равенство в точках $x1^*$ и $x2^*$ естественно выполняется. В точке $x1^*$ активно второе ограничение и, следовательно, $l=2=n$. Так как $\lambda_2^*=3>0$, то в точке $x1^*$ – условный локальный минимум (строка 1 в табл. 1.4). В точке $x12^*$ активно третье ограничение и поэтому $l=2=n$. Так как $\lambda_3^*=\dfrac{3}{8}>0$, то в точке $x12^*$ – условный локальный минимум. В точке $x2^*$ активно третье ограничение и, следовательно, $l=2=n$. Так как $\lambda_3^*=-\dfrac{11}{8}<0$, то в точке – условный локальный максимум (строка 2 в табл. 1.4).

б) достаточные условия второго порядка (из методических соображений).

Второй дифференциал классической функции Лагранжа примет вид $d^2L(x^*,\lambda^*)=(2+2\lambda_3)dx_1^2+2\lambda_3 dx_2^2$.

В точке $x1^*$ активно второе ограничение:

$$dg_1(x1^*)=dx_1+dx_2=0,$$

$$dg_2(x1^*)=-dx_1=0.$$

Отсюда $dx_1=dx_2=0$ и $d^2L(x1^*)=0$. Поэтому требуется дополнительное исследование (строка 5 в табл. 1.5).

В точке $x12^*$ активно третье ограничение:

$$dg_1(x12^*)=dx_1+dx_2=0,$$

$$dg_3(x12^*)=2x_1^*dx_1+2x_2^*dx_2=2dx_1+10dx_2=0.$$

Отсюда $dx_1=dx_2=0$ и $d^2L(x12^*)=0$. Поэтому тоже требуется дополнительное исследование (строка 5 в табл. 1.5).

В точке $x2^*$ активно третье ограничение:

$$dg_1(x2^*)=dx_1+dx_2=0,$$

$$dg_3(x2^*)=2x_1^*dx_1+2x_2^*dx_2=10dx_1+2dx_2=0.$$

Отсюда $dx_1 = dx_2 = 0$ и $d^2L(x2^*) = 0$. Поэтому требуется дополнительное исследование (строка 6 в табл. 1.5).

В точке $x13^*$ активны второе и третье ограничения:

$$dg_1(x13^*) = dx_1 + dx_2 = 0,$$

$$dg_2(x13^*) = -dx_1 = 0,$$

$$dg_3(x13^*) = 2dx_1 + 10dx_2 = 0.$$

Поэтому $dx_1 = dx_2 = 0$, $d^2L(x13^*) = 0$ и требуется дополнительное исследование (строка 5 в табл. 1.55).

Дополнительные исследования.

Теперь исследуем свойства целевой функции и ограничений. Ограничение-равенство – линейное. Так как целевая функция и функции второго и третьего ограничений удовлетворяют условиям:

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0,\ H_{g_2}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0,\ H_{g_3}(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0,$$

то они выпуклы. Поэтому в точке $x1^*$ – глобальный минимум (п.3 замечания 1.6). Так как функция $-f(x) = -x_1^2 + x_2$ не является выпуклой, то вывода о глобальном максимуме с помощью необходимых условий первого порядка сделать нельзя.

5. Значения функции в точках условного экстремума: $f(x1^*) = -4$, $f(x2^*) = 24$.

Листинг программы в пакете MathCAD15 приведен в приложении В (Рис. В 9 – Рис. В 23) стр. 137.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Перенос длинных формул по знаку «+», нажатием клавиш («**Ctrl**»+«**Enter**»).
- Просмотр результатов расчета.
- Определение массива.
- Определение однострочной функции и ее вызов.
- Градиент функции и его символьный и численный расчет.
- Символьные операции с производными и матрицами.
- Нахождение коней уравнений с использованием блока **Given – Find**.
- Символьные функции **solve**, **substitute**.
- Транспонирование матрицы.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование трехмерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых и точек.

Пример 1.14

Найти экстремум функции $f(x) = x_1^2 - x_2$ **на множестве**

$X = \left\{ x \middle| x_1 + x_2 - 6 = 0, 1 - x_1 \le 0,\ x_1^2 + x_2^2 - 26 \le 0 \right\}: f(x) = x_1^2 - x_2 \to extr,$

$g_1(x) = x_1 + x_2 - 6 = 0,\ g_2(x) = 1 - x_1 \le 0,\ g_3(x) = x_1^2 + x_2^2 - 26 \le 0$

Рассчитать:

1. Составить обобщенную функцию Лагранжа.

2. Выписать необходимые условия экстремума первого порядка:

а) условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x**;**

б) условие допустимости решения;

в) условие неотрицательности для условного минимума (неположительности для максимума);

г) условие дополняющей нежесткости.

3. Решить систему уравнений и найти условно-стационарные точки.

4. Проверить достаточные условия экстремума первого порядка.

5. При необходимости проверить необходимые и достаточные условия второго порядка.

6. Построить графики целевой функции и ограничения и нанести условно-стационарные точки.

1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0(x_1 - x_2^2) + \lambda_1(x_1 - x_2 - 1) + \lambda_2(x_1^2 + x_2^2 - 5).$$

2. Выпишем необходимые условия минимума и максимума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_1} = \lambda_0 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0$, $\dfrac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_2} = -2\lambda_0 x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0$;

б) $x_1 - x_2 - 1 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 - 5 \le 0$;

в) $\lambda_2 \ge 0$ (для минимума), $\lambda_2 \le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_2(x_1^2 + x_2^2 - 5) = 0$.

3. Решим систему для двух случаев ($\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \ne 0$).

3.1. Случай 1 ($\lambda_0 = 0$). Тогда условия «а» имеют вид:

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0,$$

$$-\lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0.$$

Рассмотрим два варианта удовлетворения условия «г»:

1) $\lambda_2 = 0$ Тогда $\lambda_1 = 0$ и не удовлетворяется необходимым условиям минимума первого порядка;

2) $\lambda_2 \ne 0$. Тогда система из б) и г):

$$x_1^2 + x_2^2 - 5 = 0,$$

$$x_1 - x_2 - 1 = 0$$

удовлетворяется в двух точках: $x_1 = 2, x_2 = 1$ и $x_1 = -1, x_2 = -2$. Складывая два уравнения в условии «а», получаем $2\lambda_2(x_1 + x_2) = 0$. Так как $\lambda_2 \neq 0$, то $x_1 = -x_2$, что не удовлетворяется в обеих найденных точках.

3.2. Случай ($\lambda_0 \neq 0$). Поделим уравнения системы, приведенной в п.2, на λ_0 и заменим $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\frac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2, $\frac{\lambda_3}{\lambda_0}$ на λ_3. Условие «а» принимает форму:

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0,\ \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2} = -2x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0.$$

Остальные условия сохраняют вид. Рассмотрим два варианта выполнения условий «г»:

1) $\lambda_2 = 0$. Имеем:

$$1 + \lambda_1 = 0,$$

$$-2x_2 - \lambda_1 = 0,$$

$$x_1 - x_2 - 1 = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{3}{2}$. Получили условно-стационарную точку $x1^* : x_1^* = \frac{3}{2},\ x_2^* = \frac{1}{2},\ \lambda_2^* = 0$. В ней удовлетворяется необходимое условие и минимума, и максимума;

2) $\lambda_2 \neq 0$. Имеем

$$x_1^2 + x_2^2 - 5 = 0,$$

$$x_1 + x_2 - 1 = 0,$$

$$1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0,$$

$$-2x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 = 0.$$

Получаем условно-стационарные точки: $x2^*$: $x_1^* = 2$, $x_2^* = 1$, $\lambda_1^* = -\frac{5}{3}$, $\lambda_2^* = \frac{1}{6} > 0$, $x3^*$: $x_1^* = -1$, $x_2^* = -2$, $\lambda_1^* = \frac{2}{3}$, $\lambda_2^* = \frac{5}{6} > 0$.

В этих точках удовлетворяются необходимые условия минимума.

4. Проверить достаточные условия экстремума первого порядка.

В точке $x1^*$ ограничение-неравенство не является активным, поэтому $l = 1 < n = 2$ и условия не выполняются (строки 1 и 2 в табл. 1.4).

В точках $x2^*$ и $x3^*$ ограничение-неравенство активно, поэтому $l = n = 2$. В обеих точках $\lambda_2^* > 0$, поэтому в них достигается условный локальный минимум.

5. Проверить достаточные условия экстремума второго порядка (из методических соображений).

В точке $x1^*$ ограничение-неравенство не является активным:

$$d^2L(x1^*) = 2\lambda_2^* dx_1^2 + (2\lambda_2^* - 2)dx_2^2 = -2dx_2^2,$$

$$dg_1(x1^*) = dx_1 - dx_2 = 0.$$

Отсюда $dx_1 = dx_2 = 0$ и $d^2L(x1^*) = -2dx_1^2 < 0$ при $dx_1 \neq 0$. Поэтому в точке $x1^*$ – локальный условный максимум (строка 2 в табл. 1.5).

В точках B и ограничение-неравенство активно.

В точке $x2^*$:

$$d^2L(x2^*) = \frac{1}{3}dx_1^2 - \frac{5}{3}dx_2^2,$$

$$dg_1(x2^*) = dx_1 - dx_2 = 0,$$

$$dg_2(x2^*) = 2x_1^* dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 4dx_1 + 2dx_2 = 0.$$

Отсюда $dx_1 = dx_2 = 0$ и $d^2L(x2^*) = 0$. Требуется дополнительное исследование (строка 5 в табл. 1.5).

В точке $x3^*$:

$$d^2L(x3^*) = \frac{5}{3}dx_1^2 - \frac{1}{3}dx_2^2,$$

$$dg_1(x3^*) = dx_1 - dx_2 = 0,$$

$$dg_2(x3^*) = -2dx_1 - 4dx_2 = 0.$$

Отсюда $dx_1 = dx_2 = 0$ и $d^2L(x3^*) = 0$. Требуется дополнительное исследование (строка 5 в табл. 1.5).

С другой стороны, ограничение-равенство линейное, а функции $"-f(x)" = -x_1 + x_2^2$ и $g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 5$ выпуклые, так как $H_f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \geq 0$, $H_{g_2}(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$. Поэтому в точке $x1^*$ достигается условный глобальный максимум (п.3 замечаний 1.6). Так как функция $f(x) = x_1 - x_2^2$ не является выпуклой, то о точках $x2^*$ и $x3^*$ вывод сделать нельзя (п.3 замечаний 1.6).

Если бы в задаче исследовалась функция $f(x) = -x_1 + x_2^2$, которая выпукла, то в точке $x1^*$ был бы глобальный минимум (п.3 замечаний 1.6), а о точках $x2^*$ и $x3^*$ вывод сделать нельзя. Из рисунка следует, что в точке $x2^*$ – условный локальный минимум, а в точке $x3^*$ – условный глобальный минимум.

6. Значения функции в точках экстремума: $f(x1^*) = \frac{5}{4}$, $f(x2^*) = 1$, $f(x3^*) = -5$.

Листинг программы в пакете MathCAD15 приведен в приложении В (Рис. В 24 – Рис. В 34) стр. 152.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD15:

- Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.
- Перенос длинных формул по знаку «+», нажатием клавиш («**Ctrl**»+«**Enter**»).
- Просмотр результатов расчета.
- Определение массива.
- Определение однострочной функции и ее вызов.
- Градиент функции и его символьный и численный расчет.
- Символьные операции с производными и матрицами.
- Нахождение коней уравнений с использованием блока **Given – Find**.
- Символьные функции **solve**, **substitute**.
- Транспонирование матрицы.
- Дискретный аргумент.
- Построение и редактирование трехмерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых и точек.

1.6 Задачи для самостоятельного решения

Пример 1.15

Найти безусловный экстремум целевой функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ **аналитическим методом, построить график функции и нанести расчетные точки.**

Ответ: $x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ точка локального минимума.

Пример 1.16

Найти условный экстремум целевой функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ **при ограничениях** $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0$ **и** $g_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$ **аналитическим методом, построить график функции и нанести расчетные точки.**

Ответ: $x1^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$, $\lambda 1_1^* = \frac{2}{3}$, $\lambda 1_2^* = -\frac{10}{3}$ регулярная точка условного локального минимума, $x2^* = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}^T$, $\lambda 2_1^* = -\frac{20}{3}$, $\lambda 2_2^* = -\frac{68}{3}$ регулярная точка условного локального максимума.

Пример 1.17

Найти условный экстремум целевой функции $f(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x_1 - 1 \right)^2 + x_2^2 \right]$ **при ограничениях** $g_1(x) = -x_1 + \alpha x_2^2 = 0$ **и** $g_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$ **аналитическим методом, построить график функции и нанести расчетные точки.**

Ответ: $x1^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\lambda 1_1^* = -1$. При $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$, $x1^*$ – регулярная точка условного локального минимума. При $\alpha > \dfrac{1}{2}$, $x1^*$ – регулярная точка условного локального максимума. При $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $x1^*$ - регулярная точка условного локального минимума.

$x2^* = \begin{pmatrix} \dfrac{2\alpha - 1}{2\alpha} & \sqrt{\dfrac{2\alpha - 1}{2\alpha^2}} \end{pmatrix}$, $\lambda 2_1^* = -\dfrac{1}{2\alpha}$. При $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ решения нет. При $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $x2^*$ – регулярная точка условного локального минимума. При $\alpha > \dfrac{1}{2}$, $x2^*$ – регулярная точка условного локального минимума.

$x3^* = \begin{pmatrix} \dfrac{2\alpha - 1}{2\alpha} & -\sqrt{\dfrac{2\alpha - 1}{2\alpha^2}} \end{pmatrix}$, $\lambda 3_1^* = -\dfrac{1}{2\alpha}$. При $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ решения нет. При $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $x3^*$ – регулярная точка условного локального минимума. При $\alpha > \dfrac{1}{2}$, $x3^*$ – регулярная точка условного локального минимума.

Пример 1.18

Найти условный экстремум целевой функции $f(x) = x_1$ при ограничениях $g_1(x) = -x_1 \le 0$ и $g_2(x) = x_2 - (1 - x_1)^3 \le 0$ аналитическим методом, построить график функции и нанести расчетные точки.

Ответ: $x^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\lambda_0^* = 0$ – нерегулярная точка условного локального максимума, $f(x^*) = 1$.

Пример 1.19

Найти условный экстремум целевой функции $f(x) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2$ при ограничениях $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0$ и $g_2(x) = -x_1 \le 0$, $g_3(x) = -x_2 \le 0$ аналитическим методом, построить график функции и нанести расчетные точки.

Ответ: $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, $\lambda_1^* = 1$, $\lambda_2^* = 0, \lambda_3^* = 0$ – точка условного локального и одновременно глобального минимума, $f(x^*) = 1$.

Пример 1.20

Найти условный минимум целевой функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ при ограничениях $g_1(x) = -x_1 - x_2 - x_3 + 1 \le 0$ аналитическим методом, построить график функции и нанести расчетные точки.

Ответ: $x^* = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{9}{10} & 0 \end{pmatrix}^T$, $\lambda_1^* = 0$, $\lambda_2^* = \frac{3}{5}$ – точка условного локального и одновременно глобального минимума, $f(x^*) = \frac{9}{10}$.

Пример 1.21

Найти условный максимум функции $f(x) = -8x_1^2 + 4x_1 - x_2^2 + 12x_2 - 7 \to \max$ **при ограничении** $g_1(x) = 2x_1 + 3x_2 = -6$ **аналитическим методом, построить график функции и нанести расчетные точки.**

Ответ: $x^* = \begin{pmatrix} -\frac{15}{38} & -\frac{33}{19} \end{pmatrix}^T$ – точка условного максимума.

Пример 1.22

Найти условный экстремум функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ **при ограничениях** $g_1(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3 = 0$ **и** $g_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$ **аналитическим методом, построить график функции и нанести расчетные точки.**

Ответ: $x1^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$ – точка условного минимума, $x2^* = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}^T$ – точка условного максимума.

Пример 1.23

Найти условный экстремум функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ **при ограничениях** $g_1(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3 = 0$ **и** $g_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$ **аналитическим методом, построить график функции и нанести расчетные точки.**

Ответ: $x1^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$ – точка условного минимума, $x2^* = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}^T$ – точка условного максимума.

Пример 1.24

Найти условный экстремум целевой функции $f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \to extr$ **при ограничениях** $g_1(x) = 3x_1 + 2x_2 \ge 7$**,** $g_2(x) = 10x_1 - x_2 \le 8$**,** $g_3(x) = -18x_1 + 4x_2 \ge 12$**,** $g_4(x) = x_1 \ge 0$ **и** $g_5(x) = x_2 \ge 0$ **аналитическим методом, построить график функции и нанести расчетные точки.**

Ответ: $x1^* = \begin{pmatrix} \frac{123}{101} & \frac{422}{101} \end{pmatrix}^T$ – точка условного локального минимума, $x2^* = \begin{pmatrix} 2 & 12 \end{pmatrix}^T$ – точка условного локального максимума.

Пример 1.25

Найти условный экстремум целевой функции $f(x)=6x_1-x_1^2+x_2 \to extr$ **при ограничениях** $g_1(x)=2x_1+3x_2\le 24$, $g_2(x)=x_1+2x_2\le 15$, $g_3(x)=3x_1+2x_2\ge 24$, $g_4(x)=x_2\le 4$, $g_5(x)=x_1\ge 0$ **и** $g_6(x)=x_2\ge 0$ **аналитическим методом, построить график функции и нанести расчетные точки.**

Ответ: $x1^*=\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}^T$ – точка условного локального максимума.

Пример 1.26

Найти условный экстремум целевой функции $f(x)=(x_1-4)^2+(x_2-3)^2\to extr$ **при ограничениях** $g_1(x)=2x_1+3x_2\ge 6$, $g_2(x)=3x_1-2x_2\le 18$, $g_3(x)=-x_1+2x_2\le 8$, $g_4(x)=x_1\ge 0$ **и** $g_5(x)=x_2\ge 0$ **аналитическим методом, построить график функции и нанести расчетные точки.**

Ответ: $x1^*=\begin{pmatrix}4 & 3\end{pmatrix}^T$ - точка условного локального минимум, $x2^*=\begin{pmatrix}13 & 10.5\end{pmatrix}^T$ – точка условного локального максимума.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Васильков Ю.В.** Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: Учебное пособие / Ю.В. Васильков, Н.Н. Василькова. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 256 с.
2. **Дьяконов В.П.** MathCad 11/12/13 в математике. Справочник. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 958 с.
3. **Охорзин В.А.** Прикладная математика в системе MathCAD: Учебное пособие / В.А. Охорзин. - 2-е изд. испр. и доп. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 352 с.
4. **Пантелеев А.В.** Методы оптимизации в примерах и задачах: Учебное пособие / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – 2-е изд., исправл. – М.: Высш.шк., 2005. – 544 с.
5. **Пантелеев А.В.** Методы оптимизации. Практический курс: учебное пособие с мультимедиа сопровождением / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – М.: Логос, 2011. – 424 с.
6. **Реклейтис Г**. Оптимизация в технике: в 2-х кн. Кн. 1 / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгстел. – М.: Мир, 1986. – 349 с.
7. **Рыхлов В.С., Корнев В.В., Курдюмов В.П.** Прикладные методы оптимизации. – Саратов: УЦ «Новые технологии в образовании», 2004. – 172 с.
8. **Хаммельблау Д.** Прикланое нелинейное программирование. М.: Изд. «МИР», 1975. – 534 с.
9. **Рыков С.В., Кудрявцева И.В., Рыков С.А., Рыков В.А.** Методы оптимизации в примерах в пакете MathCad 15. Ч. II. – 2015.
10. **Рыков С.В., Кудрявцева И.В., Рыков С.А., Рыков В.А.** Практикум по работе в математическом пакете MathCAD. – 2015.
11. **Кудрявцева И.В., Рыков В.А., Старков А.С., Рыков С.А., Рыков С.В.** Математика. Теория и примеры в MathCAD. – 2011.
12. **Кудрявцева И.В., Рыков В.А., Рыков С.А., Рыков С.В.** Использование MathCAD в теории матриц. – 2011.
13. **Кудрявцева И.В., Рыков В.А., Рыков С.А., Рыков С.В.** Практические занятия в пакете MathCAD по исследованию систем линейных алгебраических уравнений. – 2009.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ЛИСТИНГИ ПРИМЕРОВ В MATHCAD15. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ. ОГРАНИЧЕНИЕ В ВИДЕ РАВЕНСТВА

Задача №1.1: Для задачи поиска условного экстремума функции

$f(x) = x_1^2 + x_2^2$ на множестве $X = \{x | x_2^2 - x_1 + 3 = 0\}$, заданном ограничением $g_1(x) = x_2^2 - x_1 + 3 = 0$

Выписать:

1. обобщенную функцию Лагранжа;
2. классическую функцию Лагранжа;
3. градиент обобщенной функции Лагранжа;
4. градиент классической функции Лагранжа;
5. второй дифференциал обобщенной функции Лагранжа;
6. второй дифференциал классической функции Лагранжа;
7. первый дифференциал ограничения.

Исходная информация

$f(x) := (x_0)^2 + (x_1)^2$ - целевая функция

$g_1(x) := (x_1)^2 - x_0 + 3$ - функция, описывающая ограничение

Ход решения задачи

1. Обобщенная функция Лагранжа (x - вектор)

$$L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1) := \lambda_0 \cdot f(x) + \lambda_1 \cdot g_1(x)$$

2. Классическая функция Лагранжа (x - вектор)

$$L_{kl}(x, \lambda_1) := f(x) + \lambda_1 \cdot g_1(x)$$

3. Градиент обобщенной функции Лагранжа (x - вектор из двух элементов).

$$Gr\_L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1) := \nabla_x L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1) \to \begin{pmatrix} 2 \cdot \lambda_0 \cdot x_0 - \lambda_1 \\ 2 \cdot \lambda_0 \cdot x_1 + 2 \cdot \lambda_1 \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

4. Градиент классической функции Лагранжа (x - вектор)

$$Gr\_L_{kl}(x, \lambda_1) := \nabla_x L_{kl}(x, \lambda_1) \to \begin{pmatrix} 2 \cdot x_0 - \lambda_1 \\ 2 \cdot \lambda_1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

Рис. А 1. Листинг программы получение функций для условного экстремума (Пример 1.1 часть 1)

5. Второй дифференциал обобщенной функции Лагранжа

Вектор x необходимо задать явно, так как переменная по которой производится дифференциирование не должна содержать индексы вектора

$x := \begin{pmatrix} x0 \\ x1 \end{pmatrix}$ вектор неизвестных $\quad dx := \begin{pmatrix} dx0 \\ dx1 \end{pmatrix}$ вектор дифференциалов по переменным

Однострочная функция (Dif2_Lob) для расчета второго дифференциала обобщенной функции Лагранжа. Перевод на новую строку производится только по оператору "+" , нажатием клавиш "ctrl+Enter".

Функция расписывается явно, так как переменная по которой производится дифференциирование не должна содержать индексы вектора

$$\begin{aligned} Dif2\_Lob(x,\lambda_0,\lambda_1,dx0,dx1) := {} & \frac{d}{dx0}\frac{d}{dx0}L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1)\cdot dx_0\cdot dx_0 \ \ldots \\ & + \frac{d}{dx0}\left(\frac{d}{dx1}L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1)\right)\cdot dx_0\cdot dx_1 \ \ldots \\ & + \frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx0}L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1)\right)\cdot dx_0\cdot dx_1 \ \ldots \\ & + \frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx1}L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1)\right)\cdot dx_1\cdot dx_1 \end{aligned}$$

Значение второго дифференциала обобщенной функции Лагранжа в общем виде (символьное решение)

$$Dif2\_Lob(x,\lambda_0,\lambda_1,dx0,dx1) \rightarrow 2\cdot\lambda_0\cdot dx0^2 + (2\cdot\lambda_0 + 2\cdot\lambda_1)\cdot dx1^2$$

Рис. А 2. Листинг программы получение функций для условного экстремума (Пример 1.1 часть 2)

6. Второй дифференциал классической функции Лагранжа

$$F\_Dif2\_kl(x,\lambda_1,dx0,dx1) := \frac{d}{dx0}\frac{d}{dx0}L_{kl}(x,\lambda_1)\cdot dx_0\cdot dx_0 \ldots$$
$$+\frac{d}{dx0}\left(\frac{d}{dx1}L_{kl}(x,\lambda_1)\right)\cdot dx_0\cdot dx_1 \ldots$$
$$+\frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx0}L_{kl}(x,\lambda_1)\right)\cdot dx_0\cdot dx_1 \ldots$$
$$+\frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx1}L_{kl}(x,\lambda_1)\right)\cdot dx_1\cdot dx_1$$

Значение второго дифференциала в общем виде (символьное решение)

$$F\_Dif2\_kl(x,\lambda_1,dx0,dx1) \rightarrow 2\cdot dx0^2 + (2\cdot\lambda_1 + 2)\cdot dx1^2$$

7. Первый дифференциал ограничения.

$$F\_Dif1\_G1(x,x0,x1,dx0,dx1) := \frac{d}{dx0}g_1(x)\cdot dx0 + \frac{d}{dx1}g_1(x)\cdot dx1$$

Значение первого дифференциала в общем виде (символьное решение)

$$F\_Dif1\_G1(x,x0,x1,dx0,dx1) \rightarrow 2\cdot dx1\cdot x1 - dx0$$

Рис. А 3. Листинг программы получение функций для условного экстремума (Пример 1.1 часть 3)

Задача №1.2 Классифицировать ограничение

$g_1(x) := x_1 + x_2 - 2 \le 0$ в точках $x^* = (1,1)$ и $\tilde{x} = (0,0)$

Исходная информация

$g_1(x) := x_0 + x_1 - 2$ - исходная функция ограничения

Исследуемые точки

$x0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ точка 1 $\quad$ $x1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ точка 2

Ход решения задачи в MathCAD

1. Расчет ограничения в точке 1

$T1 := g_1(x0) \quad T1 = 0$

2. Расчет ограничения в точке 2

$T2 := g_1(x1) \quad T2 = -2$

Выводы:

1. В точке 1 неравенство ($g_1(x) \le 0$) превратилось в равенство ($g_1(x) = \blacksquare \cdot 0$), следовательно ограничение в точке 1 является активным.

2. В точке 2 неравенство ($g_1(x) \le 0$) осталось невравенством ($g_1(x) \le 0$), следовательно ограничение в точке 2 является не активным.

Рис. А 4. Листинг программы классификация ограничений (Пример 1.2 часть 1)

Задача №1.3 Исследовать градиенты (в смысле их линейной зависимости) активных ограничений в контрольных точках

$x^{*} = (1,0)^{T}$, $\tilde{x} = (0,0)^{T}$

для $g_1(x) = -x_1 \le 0,\ g_2(x) = -x_2 \le 0,\ g3(x) = x_2 - (1-x_1)^3 \le 0$

Рассчитать:

1. классифицировать (активные, пассивные) ограничения в точках 1 и 2;
2. рассчитать градиенты ограничений в общем виде (символьным способом);
3. проверить линейную зависимость активных ограничений в заданных точках;
4. построить гарфики уровней ограничений и градиентами активных ограничений в точках 1 и 2.

Исходная информация в MathCAD

$g_1(x) := -x_0 \quad g_2(x) := -x_1 \quad g_3(x) := x_1 - (1 - x_0)^3$ - исходные функции ограничений

$x0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ точка $1(\tilde{x})$ $\quad x1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ точка 2 (x^{*})

Ход решения задачи

1. Классифицировать (активные, пассивные) органиечния в точках 1 и 2

1.1 Расчет ограничения в точке 1

Ограничение 1		Ограничение 2		Ограничение 3	
$T01 := g_1(x0)$	$T01 = -1$	$T02 := g_2(x0)$	$T02 = 0$	$T03 := g_3(x0)$	$T03 = 0$

1.2 Расчет ограничения в точке 2

Ограничение 1		Ограничение 2		Ограничение 3	
$T11 := g_1(x1)$	$T11 = 0$	$T12 := g_2(x1)$	$T12 = 0$	$T13 := g_3(x1)$	$T13 = -1$

Выводы:

1. В точке 1 $x0^{T} = (1\ \ 0)$ неравенства ($g_2(x) \le 0$, $g_3(x) \le 0$) превратились в равенства ($g_2(x) = \blacksquare\cdot 0^{\blacksquare}$, $g_3(x) = \blacksquare\cdot 0^{\blacksquare}$), следовательно, ограничения 2 и 3 в точке 1 являются активными. Неравенство $g_1(x) \le 0$ осталось неравенством ($g_1(x) \le 0$), следовательно, ограничение 1 является пассивным.

2. В точке 2 $x1^{T} = (0\ \ 0)$ неравенство ($g_1(x) \le 0$, $g_2(x) \le 0$)) превратились в равенство ($g_1(x) = \blacksquare\cdot 0^{\blacksquare}$, $g_2(x) = \blacksquare\cdot 0^{\blacksquare}$), следовательно,ограничения 1и 2 являются активными. Неравенство $g_3(x) \le 0$ осталось неравенством ($g_3(x) \le 0$) , следовательно, ограничение 3 является пассивным.

Рис. А 5. Листинг программы исследование активных ограничений (Пример 1.3 часть 1)

Выводы:

1. В точке 1 $x0^T = (1\ \ 0)$ неравенства ($g_2(x) \le 0$, $g_3(x) \le 0$) превратились в равенства ($g_2(x) = \blacksquare\cdot 0^{\blacksquare}$, $g_3(x) = \blacksquare\cdot 0^{\blacksquare}$), следовательно, ограничения 2 и 3 в точке 1 являются активными. Неравенство $g_1(x) \le 0$ осталось неравенством ($g_1(x) \le 0$), следовательно, ограничение 1 является пассивным.

2. В точке 2 $x1^T = (0\ \ 0)$ неравенство ($g_1(x) \le 0$, $g_2(x) \le 0$)) превратились в равенство ($g_1(x) = \blacksquare\cdot 0^{\blacksquare}$, $g_2(x) = \blacksquare\cdot 0^{\blacksquare}$), следовательно,ограничения 1и 2 являются активными. Неравенство $g_3(x) \le 0$ осталось неравенством ($g_3(x) \le 0$) , следовательно, ограничение 3 является пассивным.

2. Градиент ограничений (выражения в общем виде, x - вектор)

$Gr\_g_1(x) := \nabla_x g_1(x) \rightarrow (-1)$ в первом ограничении используется только первый элемент вектора переменных. Если остальные переменные нули MathCAD их не выходит в виде вектора. Это **особенность** 15 версии MathCAD

$Gr\_g_2(x) := \nabla_x g_2(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $Gr\_g_3(x) := \nabla_x g_3(x) \rightarrow \begin{bmatrix} 3\cdot(x_0 - 1)^2 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Проверить линейную зависимость градиентов активных ограничений в точке 1

3.1 Расчитать значения активных ограничений в точке 1 (это второе и третье ограничения)

$gr\_t2 := Gr\_g_2(x0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $gr\_t3 := Gr\_g_3(x0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.2 Сформировать матрицу из гардиентов активных ограничений в точке 1 $(\nabla_x g_1(x)\ \ \nabla_x g_2(x))$ и определить ее ранг

$MOO1 := augment(gr\_t2, gr\_t3)$ - формирование матрицы

$RN := rank(MOO1)$ - расчет ранга матрицы

$RN = 1$ - значение ранга матрицы

Выводы: градиенты активных ограничений в точке 1 **линейно зависимы**, т.к. ранг матрицы MOO1 меньше 2 - максимального ранга матрицы MOO1

Рис. А 6. Листинг программы исследование активных ограничений (Пример 1.3 часть 2)

4. Проверить линейную зависимость градиентов активных ограничений в точке 2

4.1 Расчитать значения активных ограничений в точке 2 (это первое и второе ограничения)

$gr\_t1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ - вектор значений активного ограничения 1 формируется "вручную" (см. п.2)

$gr\_t2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ - вектор значений активного ограничения 2

4.2 Сформировать матрицу из гардиентов активных ограничений в точке 2 $\begin{pmatrix} \nabla_x g_1(x) & \nabla_x g_2(x) \end{pmatrix}$ и определить ее ранг

$MOO := augment(gr\_t1, gr\_t2)$ - формирование матрицы

$RN := rank(MOO)$ - расчет ранга матрицы

$RN = 2$ - значение ранга матрицы

Выводы: градиенты активных ограничений в точке 2 линейно **независимы**, т.к. ранг матрицы MOO равен максимуму

5. Построить линии уровня и градиенты ограничений в заданных точках

5.1 Построить линии уровня ограничений

$x0min := 0 \quad x0max := 1 \quad \Delta x := 0.01 \qquad N := \dfrac{x0max - x0min}{\Delta x}$

$i := 0..N \qquad x0\_0_i := x0min + \Delta x \cdot i$ - абсциссы для второго и третьего ограничения

$x1\_2_i := 0$ - линии уровня второго ограничения

$x1\_3_i := (1 - x0\_0_i)^3$ - линии уровня третьего ограничения

$x0\_1_i := 0$ - абсциссы для первого ограничения

$x1\_1_i := x0min + \Delta x \cdot i$ - линии уровня первого ограничения

Рис. А 7. Листинг программы исследование активных ограничений (Пример 1.3 часть 3)

5.2 Расчитать градиенты ограничений в заданных точках

Точка 1

$x0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ - координаты т.1 (исходные данные)

$gr\_t2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ - градиент активного ограничения 2 в т.1 (см. п.3)

$gr\_t3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ - градиент активного ограничения 3 в т.1 (см. п.3)

5.2.1 Расчет координат вектора градиентов активных ограничений в т.1

ограничение 2

$k\_2 := x0 + gr\_t2 \quad k\_2^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ - координаты конца вектора

$k\_gr2 := stack\left(x0^T, k\_2^T\right) \quad k\_gr2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ - координаты начала и конца вектора (первый стролбец - абсцисы, второй столбец ординаты)

ограничение 3

$k\_3 := x0 + gr\_t3 \quad k\_3^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ - координаты конца вектора

$k\_gr3 := stack\left(x0^T, k\_3^T\right) \quad k\_gr3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ - координаты начала и конца вектора (первый стролбец - абсцисы, второй столбец ординаты)

Точка 2

$x1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - координаты т.2 (исходные данные)

$gr\_t2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ - градиент активного ограничения 2 в т.2 (см. п.3)

$gr\_t1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ - градиент активного ограничения 1 в т.2 (см. п.3)

Рис. А 8. Листинг программы исследование активных ограничений (Пример 1.3 часть 4)

5.2.1 Расчет координат вектора градиентов активных ограничений в т.2

ограничение 2

k_2t2 := x1 + gr_t2 $k\_2t2^T = (0 \ \ -1)$ - координаты конца вектора

$k\_gr2t2 := stack(x1^T, k\_2t2^T)$ $k\_gr2t2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ - координаты начала и конца вектора (первый стролбец - абсцисы, второй столбец ординаты)

ограничение 3

k_1t2 := x1 + gr_t1 $k\_1t2^T = (-1 \ \ 0)$ - координаты конца вектора

$k\_gr1t2 := stack(x1^T, k\_1t2^T)$ $k\_gr1t2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ - координаты начала и конца вектора (первый стролбец - абсцисы, второй столбец ординаты)

Линии уровней и градиенты ограничений

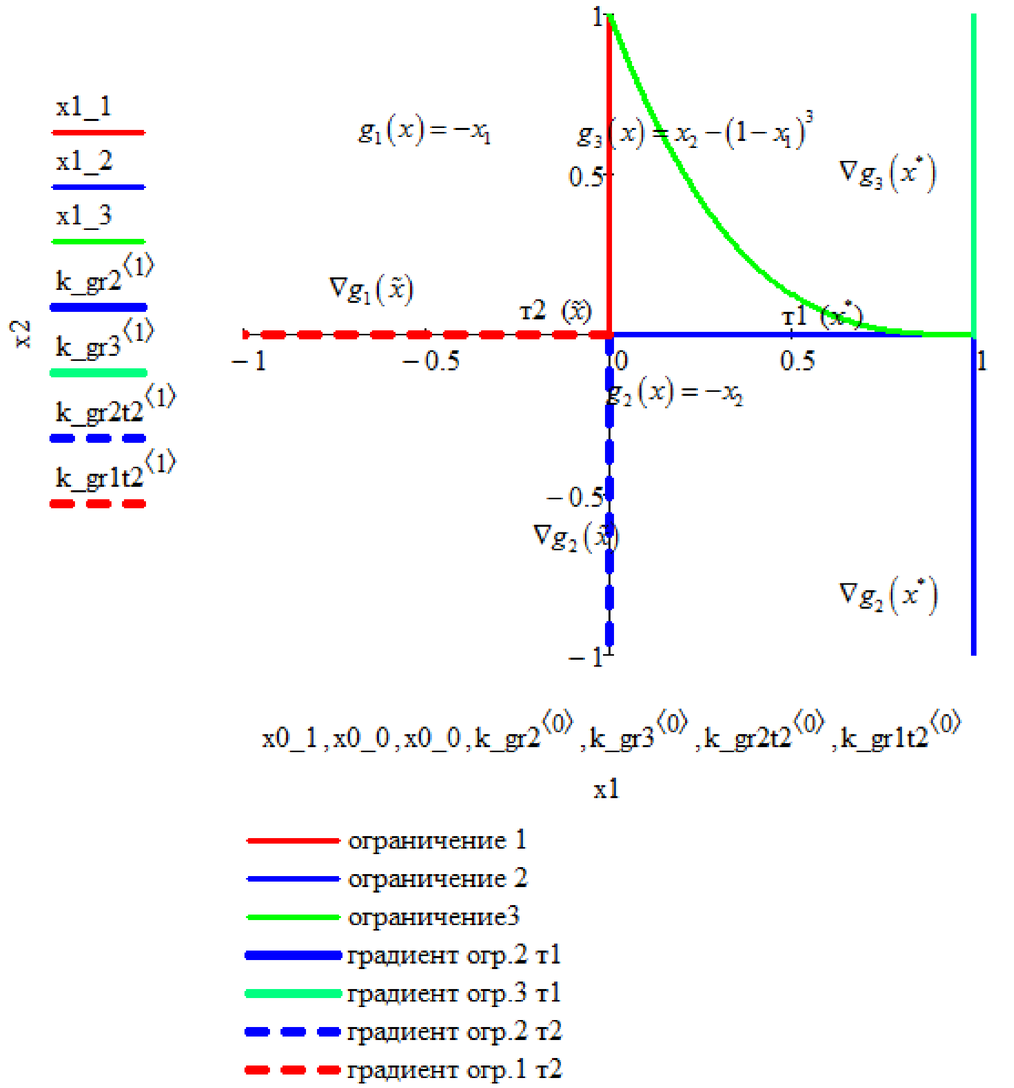


Рис. А 9. Листинг программы исследование активных ограничений (Пример 1.3 часть 5)

Задача № 1.4. Найти экстремум функции $f(x) := (x_0)^2 + (x_1)^2$ на множестве

$$X = \{x | x_1 + x_2 - 2 = 0\}: f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to extr,\ g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 = 0$$

Рассчитать:

1. Проверить условие регулярности;
2. Записать обобщенную (или классическую функцию Лагранжа)
3. Записать необходимые условия экстремума первого порядка;
4. Найти условно-стационарные точки;
5. Проверить достаточные условия экстремума второго порядка:
 а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в условно-стационарных точках,
 б) записать выражение для первого дифференциала ограничения в условно-стационарных точках,
 в) расчитать выражение из п.а), учитывая б), и определить знак второго дифференциала классической функции Лагранжа.
6. Классифицировать условно-стационарные точки;
7. При необходимости проверить необходимые условия второго порядка, по аналогии с п.6

Выводы:

1. Сделать выводы о характере условно-стационарных точек.

График. построить трехмерный график (целевой функции и ограничения) и нанести условно-стационарные точки.

Исходная информация

$f(x) := (x_0)^2 + (x_1)^2$ - исходная функция

$g_1(x) := x_0 + x_1 - 2$ - функция ограничения в виде равенства

Ход решения задачи

1. Проверить условие регулярности (линейную независимость градиентов ограничений)

Вычислить градиент ограничения

$$\nabla_x g_1(x) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вывод:

1.Градиент ограничения не равен нулю на всем множестве X, т.е. условие регулярности (линейной независимости градиентов ограничений) выполняется;
2. Для поиска условного экстремума может быть использована классическая функция Лагранжа

2. Составить классическую функцию Лагранжа

$$L_{kl}(x, \lambda_1) := f(x) + \lambda_1 \cdot g_1(x)$$

Рис. А 10. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.4 часть 1)

3. Записать необходимые условия первого порядка

3.1 Градиент классической функции Лагранжа (x - вектор)

$$Gr\_L_{kl}(x,\lambda_1) := \nabla_x L_{kl}(x,\lambda_1) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\cdot x_0 \\ \lambda_1 + 2\cdot x_1 \end{pmatrix}$$

$$g_1(x) \rightarrow x_0 + x_1 - 2$$

4. Найти условно-стационарные точки, используя блок Given-Find. Имеет место система из трех линейных уранений. Следовательно задается одно начальное приближение для поиска одного корня

$x\_01 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 := 1$ - начальные приближения

Given $Gr\_L_{kl}(x\_01,\lambda_1) = 0$ $g_1(x\_01) = 0$ $x\lambda := Find(x\_01,\lambda_1)$

$\lambda_1 := x\lambda_1$ $\lambda_1 = -2$ - коэффициент Лагранжа

$x12 := x\lambda_0$ $x12^T = (1 \ \ 1)$ - координаты условно-стационарной точки

Вывод:

1. $\lambda_1 = -2$ коэффициент Лагранжа отличен от нуля;

2. точка $x12^T = (1 \ \ 1)$ - условно-стационарной точкой

5. Проверить достаточные условия экстремума

$x := \begin{pmatrix} x0 \\ x1 \end{pmatrix}$ - вектор неизвестных $dx := \begin{pmatrix} dx0 \\ dx1 \end{pmatrix}$ - вектор дифференциалов по переменным

5.1 Второй дифференциал классической функции Лагранжа

$$F\_Dif2\_kl(x,dx,\lambda 1) := \frac{d}{dx0}\frac{d}{dx0}L_{kl}(x,\lambda 1)\cdot dx_0\cdot dx_0 \ldots$$
$$+\frac{d}{dx0}\left(\frac{d}{dx1}L_{kl}(x,\lambda 1)\right)\cdot dx_0\cdot dx_1 \ldots$$
$$+\frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx0}L_{kl}(x,\lambda 1)\right)\cdot dx_0\cdot dx_1 \ldots$$
$$+\frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx1}L_{kl}(x,\lambda 1)\right)\cdot dx_1\cdot dx_1$$

- Функция для расчета второго дифференциала обобщенной функции Лагранжа

Значение второго дифференциала классичекой функции Лагранжа в общем виде (символьное решение)

$$F\_Dif2\_kl(x,dx,\lambda 1) \rightarrow 2\cdot dx0^2 + 2\cdot dx1^2$$

Рис. А 11. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.4 часть 2)

5.2 Первый дифференциал ограничения

Функция для расчета первого дифференциала ограничения

$$F\_Dif1\_G1(x,x0,x1,dx0,dx1) := \frac{d}{dx0}g_1(x)\cdot dx0 + \frac{d}{dx1}g_1(x)\cdot dx1$$

Значение первого дифференциала ограничения в общем виде (символьное решение)

$$F\_Dif1\_G1(x,x0,x1,dx0,dx1) \rightarrow dx0 + dx1$$

5.3. Расчитать выражениедля второго диференциала классической функции Лагранжа

Выразить dx0 через dx1 и поставить во второй дифференциал кл.ф.Лагранжа

Решить уровнение первого диф.ограничения относительно dx0 в условно - стационарной точке

$$F\_Dif1\_G1(x,x0,x1,dx0,dx1) \text{ solve}, dx0 \rightarrow -dx1$$

Подставить полученное выражение во втор.диф.кл.ф.Лаганжа. Произвести замену переменных $dx0 = -dx1$ во втором диф.функ.Лагранжа

$$F\_Dif2\_kl(x,dx,\lambda 1) \text{ substitute}, dx0 = -dx1 \rightarrow 4\cdot dx1^2$$

При $dx1 \neq 0$ второй дифференциал кл.ф.Лагранжа $Dif2\_kl(x,dx,\lambda 1) > 0$ всегда.

Вывод:

1. Точка $x12^T = (1 \;\; 1)$ является **регулярной точкой локального условного минимума,**
2. Значение функции в точке локального условного минимума $f(x12) = 2$

6. Построение графиков целевой функции и ограничения и точек локального условного минимума

Построить трехмерные графики в виде поверхностей и контурных линий в диапазоне значений значений -2<x<2, -2<y<2, с шагом 0.1, нанести расчетные точки, отредактировать график как показано ниже.

Расчет исходной матрицы для постоения графика целевой функции, используя дискретный аргумент.

$F(x,y) := (x)^2 + (y)^2$ - функция для построения графика

$x_{min} := -2 \quad x_{max} := 2 \quad y_{min} := -2 \quad y_{max} := 2 \quad \Delta x := 0.1 \quad \Delta y := 0.1$

$Ni := \frac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x} \quad Nj := \frac{y_{max} - y_{min}}{\Delta y}$ - кол. точек расчета

$i := 0..Ni \; j := 0..Nj$

$x1_{i,j} := x_{min} + \Delta x\cdot i \qquad y1_{i,j} := y_{min} + \Delta y\cdot j \qquad M := \overrightarrow{F(x1, y1)}$

Рис. А 12. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.4 часть 3)

Расчет координат точки локального условного минимума (красная точка) для нанесения на график

$X12_0 := x12_0$ значение x-составляющей

$Y12_0 := x12_1$ значение y-составляющей

$Z12_0 := f(x12)$ значение z-составляющей $Z12 = (2)$

Расчет исходной матрицы для постоения графика ограничения (в виде вертикальной плоскости) используя дискретный аргумент.

$y + x - 2 = 0$ функция ограничения для построения графика

$x1_{min} := 0 \quad x1_{max} := 4 \quad y1_{min} := -4 \quad y1_{max} := 4 \quad \Delta x1 := 0.1 \quad \Delta y1 := 0.1$

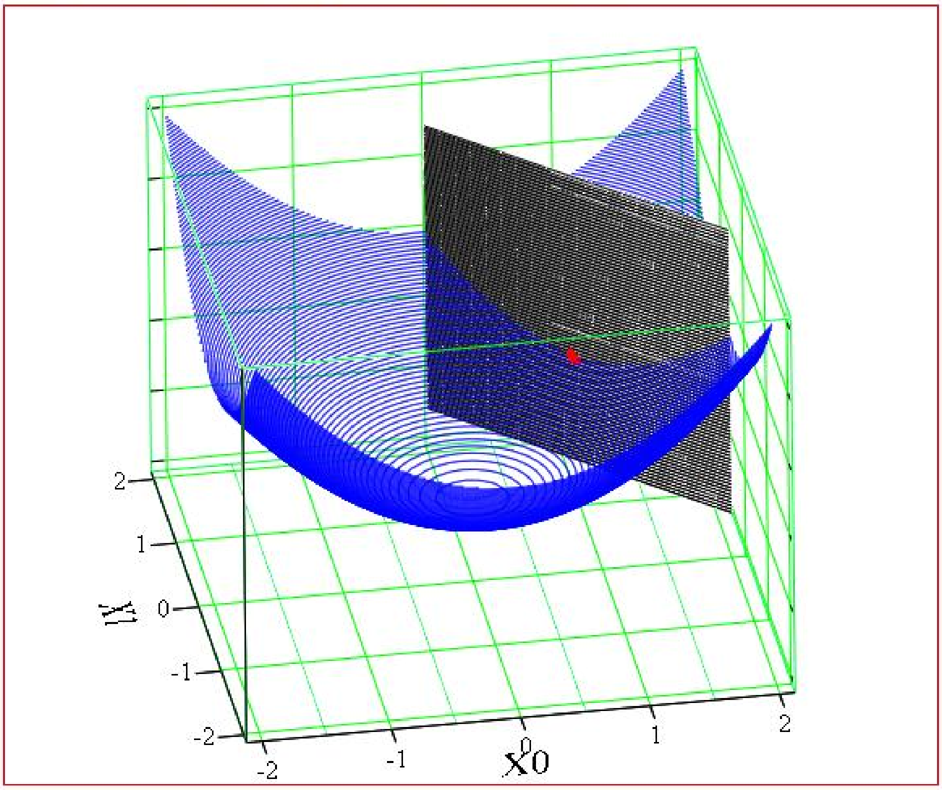
$z1_{min} := -1 \quad \Delta z1 := 0.1$

$Ni1 := \dfrac{x1_{max} - x1_{min}}{\Delta x1} \quad Nj1 := \dfrac{y1_{max} - y1_{min}}{\Delta y1} \quad Ni1 = 40 \quad Nj1 = 80$ кол. точек расчета

$i1 := 0..Ni1 \quad j1 := 0..Nj1$ дискретный аргумент

$x2_{i1,j1} := x_{min} + \Delta \; y2_{i1,j1} := -x2_{i1,j1} + 2 \quad G_{i1,j1} := z1_{min} + \Delta z1 \cdot j1$

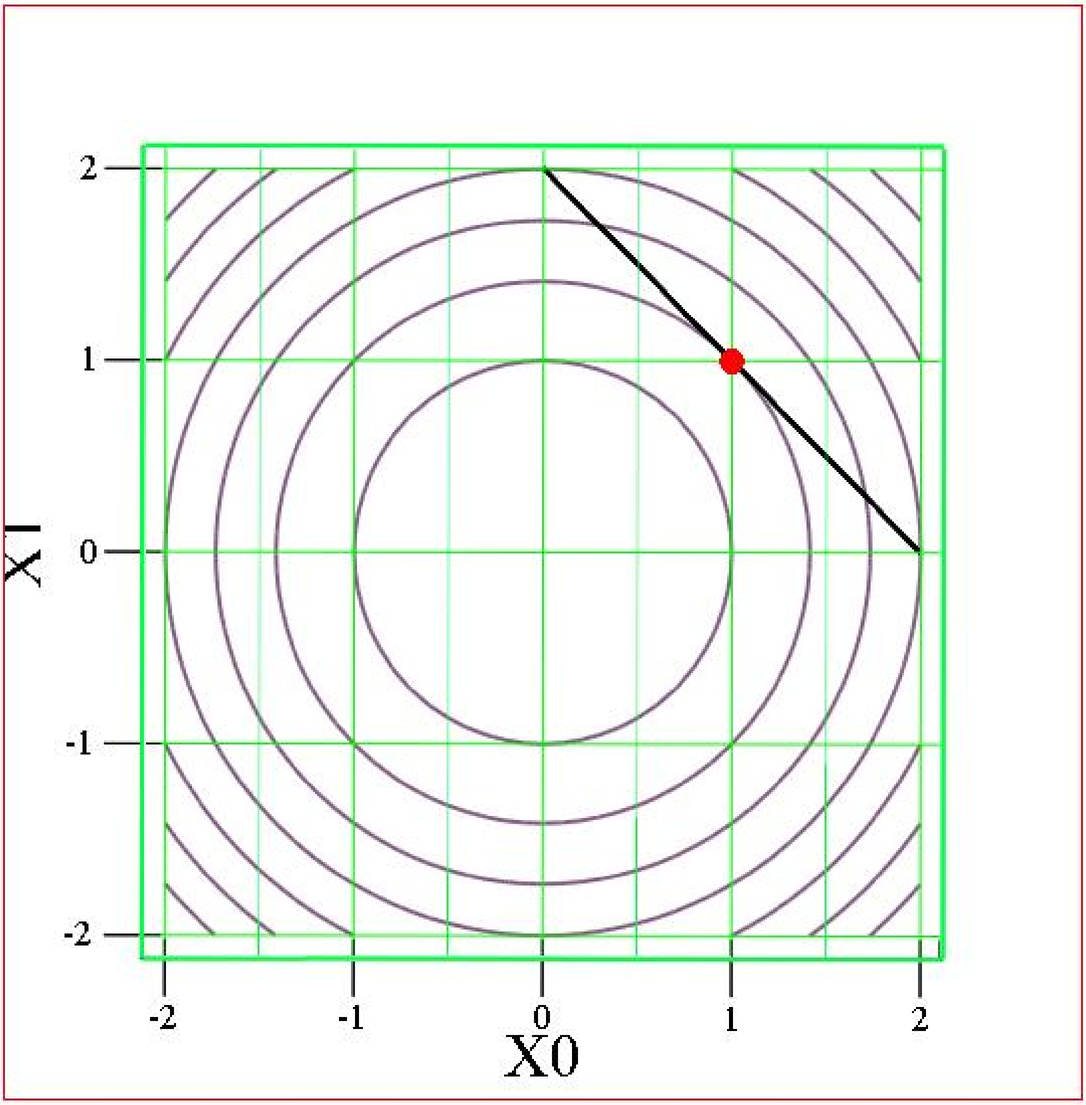
Построить трехмерный график в виде поверхности, отобразить плоскоть ограничения и нанести точку локального минимума



$(x_1, y_1, M), (X12, Y12, Z12), (x_2, y_2, G)$

Рис. А 13. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.4 часть 4)

Построить трехмерный график в виде линей уровня, отобразить плоскоть ограничения и нанести точку локального минимума



$(x_1, y_1, M), (X12, Y12, Z12), (x_2, y_2, G)$

Рис. А 14. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.4 часть 5)

Задача №1.5: Найти экстремум функцию $f(x) := x_1 + x_2$ на множестве

$$X = \left\{x \middle| x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0\right\}: f(x) = x_1 + x_2 \rightarrow extr,\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$$

Рассчитать:
1. Проверить условие регулярности;
2. Записать обобщенную (или классическую функцию Лагранжа)
3. Записать необходимые условия экстремума первого порядка;
4. Найти условно-стационарные точки;
5. Проверить достаточные условия экстремума второго порядка:

а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в условно-стационарных точках,
б) записать выражение для первого дифференциала ограничения в условно-стационарных точках,
в) расчитать выражение из п.а), учитывая б), и определить знак второго дифференциала классической функции Лагранжа.

6. Классифицировать условно-стационарные точки;
7. При необходимости проверить необходимые условия второго порядка, по аналогии с п.6

Выводы:
1. Сделать выводы о характере условно-стационарных точек.

График. построить трехмерный график (целевой функции и ограничения) и нанести условно-стационарные точки.

Исходная информация

$f(x) := x_0 + x_1$ - исходная целевая функция

$g_1(x) := (x_0)^2 + (x_1)^2 - 2$ - функция ограничение

Ход решения задачи

1. Проверить условие регулярности (линейную независимость градиентов ограничений)

$$\nabla_x g_1(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot x_0 \\ 2 \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

Вывод:
1.Градиент ограничения не равен нулю на всем множестве X, т.е. условие регулярности (линейной независимости градиентов ограничений) выполняется;
2. Для поиска условного экстремума может быть использована классическая функция Лагранжа

Рис. А 15. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.5 часть 1)

2. Составить классическую функцию Лагранжа

$$L_{kl}(x,\lambda_1) := f(x) + \lambda_1 \cdot g_1(x)$$

3. Записать необходимые условия первого порядка

3.1 Градиент классической функции Лагранжа (x - вектор)

$$Gr\_L_{kl}(x,\lambda_1) := \nabla_x L_{kl}(x,\lambda_1) \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot\lambda_1\cdot x_0 + 1 \\ 2\cdot\lambda_1\cdot x_1 + 1 \end{pmatrix}$$

3.2 Найти условно-стационарные точки, используя блок Given-Find.
Решается система нелинейных уравнений (одно из уранений - полином второго порядка) имеет два корня. Для поиска двух коней необходимо задать два начальных приближения

Расчет первой точки (т1)

$x\_01 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 := 1$ - начальные приближения для поиска первой точки

Given $Gr\_L_{kl}(x\_01,\lambda_1) = 0$ $g_1(x\_01) = 0$ $x\lambda := Find(x\_01,\lambda_1)$

$\lambda_{1\_1} := x\lambda_1$ $\lambda_{1\_1} = -0.5$ - коэффициент Лагранжа для первой точки

$x12\_1 := x\lambda_0$ $x12\_1^T = (1 \;\; 1)$
- координаты первой условно-стационарной точки

Расчет второй точки (т2)

$x\_01 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 := -1$ - начальные приближения для поиска второй точки

Given $Gr\_L_{kl}(x\_01,\lambda_1) = 0$ $g_1(x\_01) = 0$ $x\lambda := Find(x\_01,\lambda_1)$

$\lambda_{1\_2} := x\lambda_1$ $\lambda_{1\_2} = 0.5$ - коэффициент Лагранжа для второй точки

$x12\_2 := x\lambda_0$ $x12\_2^T = (-1 \;\; -1)$ - координаты второй условно-стационарной точки

Вывод: 1 Найдены две точки
2. Точка 1 имеет $\lambda_{1\_1} = -0.5$, т.е. коэффициент Лагранжа отличен от нуля. Следовательно точка т1 $x12\_1^T = (1 \;\; 1)$ является условно-стационарной точкой.
3. Точка 2 имеет $\lambda_{1\_2} = 0.5$, т.е. коэффициент Лагранжа отличен от нуля. Следовательно точка т2 $x12\_2^T = (-1 \;\; -1)$ является условно-стационарной точкой.

Рис. А 16. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.5 часть 2)

4. Проверить достаточные условия экстремума

$x := \begin{pmatrix} x0 \\ x1 \end{pmatrix}$ - вектор неизвестных $\qquad dx := \begin{pmatrix} dx0 \\ dx1 \end{pmatrix}$ - вектор дифференциалов по переменным

4.1 Второй дифференциал классической функции Лагранжа

$$\begin{aligned} Dif2\_kl(x, dx, \lambda1) := & \frac{d}{dx0}\frac{d}{dx0}L_{kl}(x,\lambda1)\cdot dx_0\cdot dx_0 \ldots \\ & + \frac{d}{dx0}\left(\frac{d}{dx1}L_{kl}(x,\lambda1)\right)\cdot dx_0\cdot dx_1 \ldots \\ & + \frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx0}L_{kl}(x,\lambda1)\right)\cdot dx_0\cdot dx_1 \ldots \\ & + \frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx1}L_{kl}(x,\lambda1)\right)\cdot dx_1\cdot dx_1 \end{aligned}$$

Функция для расчета второго дифференциала обобщенной функции Лагранжа

Значение второго дифференциала классичекой функции Лагранжа в общем виде (символьное решение)

$$Dif2\_kl(x, dx, \lambda1) \rightarrow 2\cdot\lambda1\cdot dx0^2 + 2\cdot\lambda1\cdot dx1^2$$

4.2 Первый дифференциал ограничения.

Функция ($Dif1\_G1(x, x0, x1, dx0, dx1)$) для расчета первого дифференциала ограничения ($g_1(x)$) (в общем виде) имеет вид

$$Dif1\_G1(x, x0, x1, dx0, dx1) := \frac{d}{dx0}g_1(x)\cdot dx0 + \frac{d}{dx1}g_1(x)\cdot dx1$$

Значение первого дифференциала ограничения в общем виде (символьное решение)

$$Dif1\_G1(x, x0, x1, dx0, dx1) \rightarrow 2\cdot dx0\cdot x0 + 2\cdot dx1\cdot x1$$

4.3. Исследовать первую точку

Выразить dx0 через dx1 и поставить во второй дифференциал кл.ф.Лагранжа

$x0 := x12\_1_0 = 1 \qquad x1 := x12\_1_1 = 1$ - параметры первой условно - стационарной точки (см. п.3.2)

$\lambda_{1\_1} = -0.5$

Решить уровнение первого диф.ограничения относительно dx0 в первой стационарной точке

$$Dif1\_G1(x, x0, x1, dx0, dx1) \text{ solve}, dx0 \rightarrow -dx1$$

Произвести замену переменных $dx0 = -dx1$ во втором диф.функ.Лагранжа

Рис. А 17. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.5 часть 3)

$$2\cdot\lambda 1\_1\cdot dx0^2 + 2\cdot\lambda 1\_1\cdot dx1^2 \text{ substitute}, dx0 = -dx1 \ \rightarrow 4\cdot dx1^2\cdot\lambda 1\_1$$

При $dx1 \neq 0$ второй дифференциал кл.ф.Лагранжа $Dif2\_kl(x, dx, \lambda 1) < 0$ всегда.

<u>**Вывод:**</u>

1. Точка (т1) $x12\_1^T = (1 \ \ 1)$ является **регулярной точкой локального условного максимума**
2. значение функции в точке локального условного минимума $f(x12\_1) = 2$

4.3. Исследовать вторую точку

Выразить dx0 через dx1 и поставить во второй дифференциал кл.ф.Лагранжа

$x0 := x12\_2_0 = -1$ $\qquad$ $x1 := x12\_2_1 = -1$ $\qquad$ параметры второй условно - стационарной точки (см. п.3.2)

$\lambda_{1\_2} = 0.5$

Решить уравнение первого диф.ограничения относительно dx0 во второй стационарной точке

$$Dif1\_G1(x, x0, x1, dx0, dx1) \text{ solve}, dx0 \ \rightarrow -dx1$$

Произвести замену переменных $dx0 = -dx1$ во второмдиф.функ.Лагранжа

$$2\cdot\lambda 1\_2\cdot dx0^2 + 2\cdot\lambda 1\_2\cdot dx1^2 \text{ substitute}, dx0 = -dx1 \ \rightarrow 4\cdot dx1^2\cdot\lambda 1\_2$$

При $dx1 \neq 0$ второй дифференциал кл.ф.Лагранжа $Dif2\_kl(x, dx, \lambda 1) > 0$ всегда.

<u>**Вывод:**</u>

1. Точка (т1) $x12\_2^T = (-1 \ \ -1)$ является **регулярной точкой локального условного минимума**
2. Значение функции в точке локального условного минимума $f(x12\_2) = -2$

Рис. А 18. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.5 часть 4)

5. Построение графиков и точек локального минимума

Построить трехмерный графики исследуемой функции и ограничения в виде контурных линий в диапазоне значений значений -4<x<4, -4<y<4, с шагом 0.1, нанести расчетные точки минимума и максимума, отредактировать график как показано ниже.

Расчет исходной матрицы для постоения графика функции, используя дискретный аргумент.

$F(x,y) := x + y$ исследуемая функция для построения графика

$x_{min} := -4 \quad x_{max} := 4 \quad y_{min} := -4 \quad y_{max} := 4 \quad \Delta x := 0.1 \quad \Delta y := 0.1$

$Ni := \dfrac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x} \quad Nj := \dfrac{y_{max} - y_{min}}{\Delta y}$ кол. точек расчета

$i := 0 .. Ni \; j := 0 .. Nj$

$x1_{i,j} := x_{min} + \Delta x \cdot i \; y1_{i,j} := y_{min} + \Delta y \cdot j \quad M := \overrightarrow{F(x1, y1)}$

Расчет координат первой точки (т1) локального условного минимума (красная точка) для нанесения на график

$X12_0 := x12\_1_0$ значение x-составляющей $X12 = (1)$

$Y12_0 := x12\_1_1$ значение y-составляющей $Y12 = (1)$

$Z12_0 := f(x12\_1)$ значение z-составляющей $Z12 = (2)$

Расчет координат второй точки (т2) локального условного минимума (черная точка) для нанесения на график

$X\_12_0 := x12\_2_0$ значение x-составляющей $X\_12 = (-1)$

$Y\_12_0 := x12\_2_1$ значение y-составляющей $Y\_12 = (-1)$

$Z\_12_0 := f(x12\_2)$ значение z-составляющей $Z\_12 = (-2)$

Рис. А 19. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.5 часть 5)

Расчет исходной матрицы для постоения графика ограничения используя дискретный аргумент.

$x^2 + y^2 - R = 0$ ограничение для построения графика

$R := \sqrt{2}$ радиус цилиндра (ограничения)

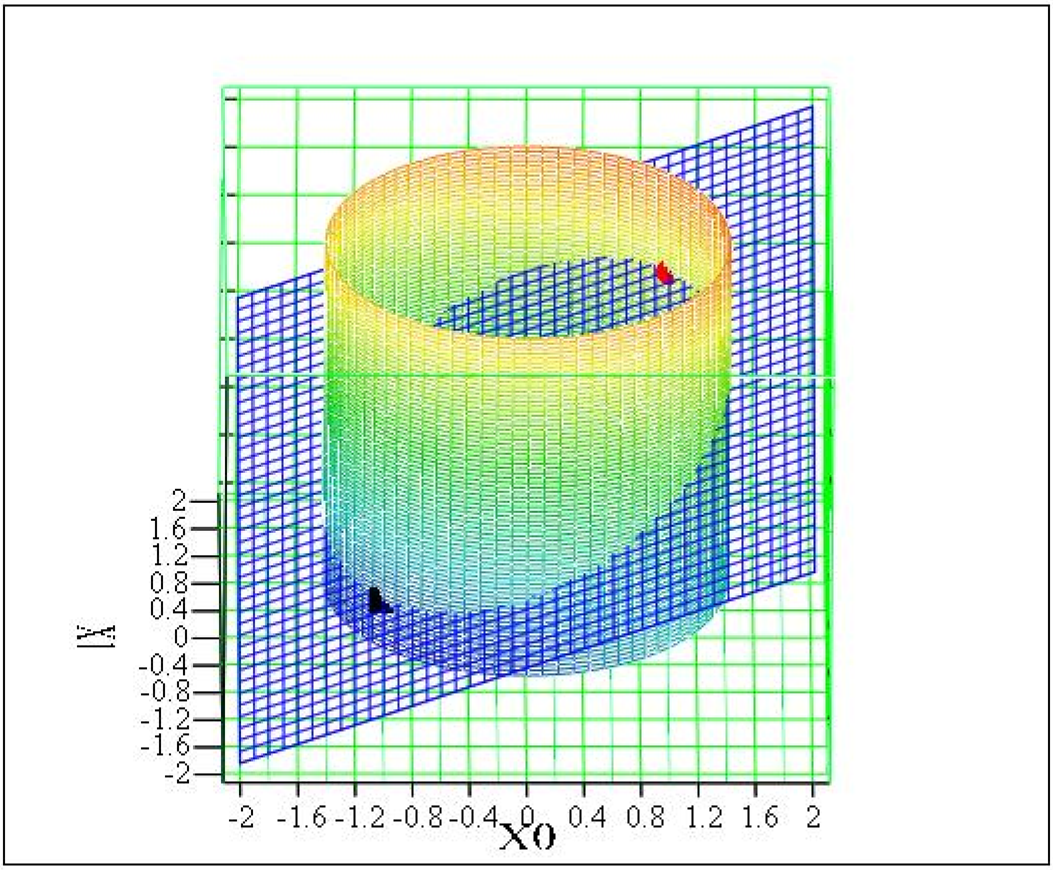
$x1_{min} := -4 \quad x1_{max} := 4 \quad \Delta x1 := 0.1 \quad z1_{min} := -3 \quad \Delta z1 := 0.1$

$Ni1 := \dfrac{x1_{max} - x1_{min}}{\Delta x1}$ кол. точек расчета $Ni1 = 80$

$i1 := 0..Ni1 \; j1 := 0..Ni1$

$x2_{i1,j1} := R\cdot\cos\left(\dfrac{2\cdot\pi\cdot i1}{Ni1}\right) \quad y2_{i1,j1} := R\cdot\sin\left(\dfrac{2\cdot\pi\cdot i1}{Ni1}\right) \quad G_{i1,j1} := z1_{min} + \Delta z1\cdot j1$

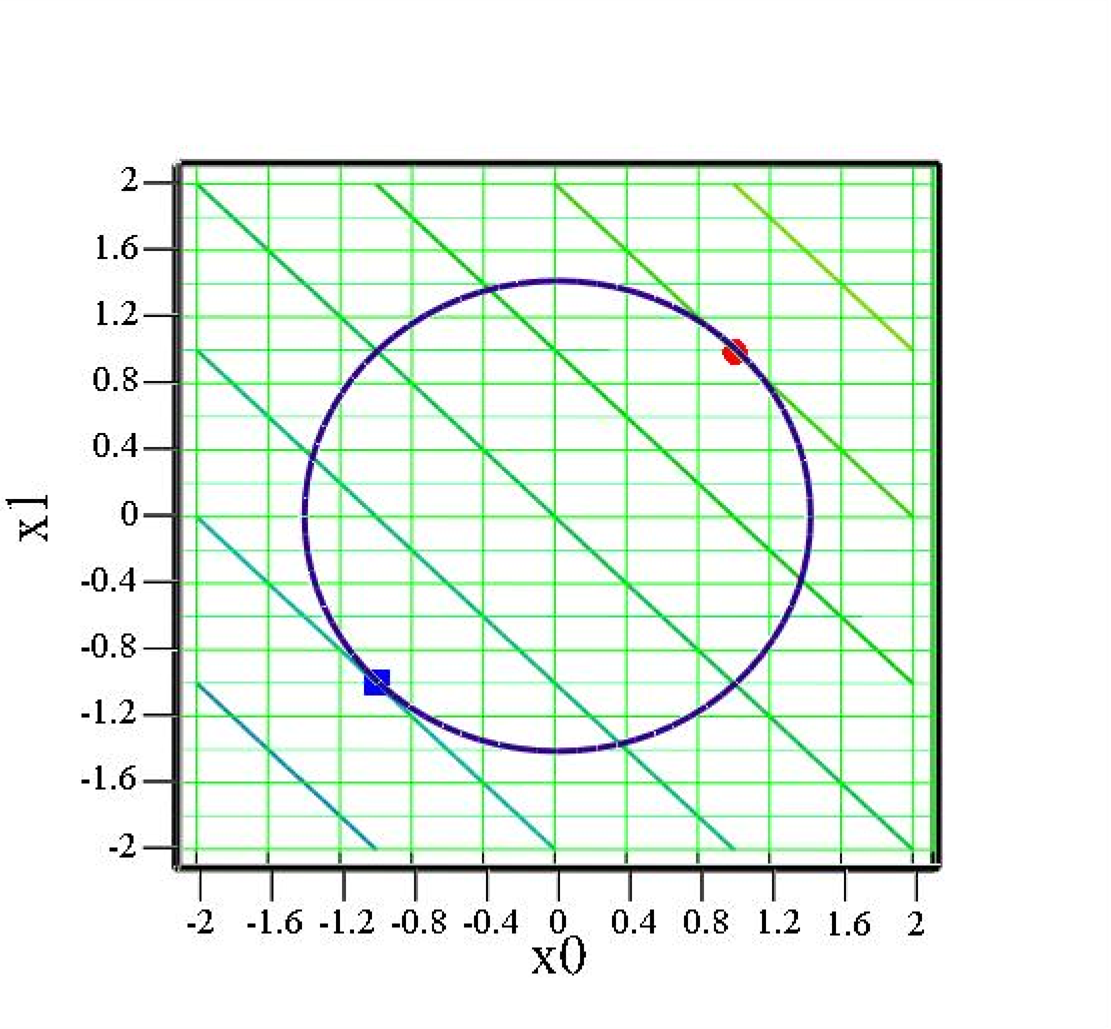
Построить трехмерный график в **виде поверхности**, отобразить плоскоть ограничения и нанести точку локального минимума



$(y_1, x_1, M), (Y12, X12, Z12), (Y\_12, X\_12, Z\_12), (y_2, x_2, G)$

Рис. А 20. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.5 часть 6)

Построить трехмерный график в виде **линий уровня**, отобразить плоскоть ограничения и нанести точку локального минимума



$(y_1, x_1, M), (Y12, X12, Z12), (Y\_12, X\_12, Z\_12), (y_2, x_2, G)$

Рис. А 21. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.5 часть 7)

Задача №1.6: Найти экстремум функции $f(x) = x_1$ на множестве

$$X = \{x | x_2^2 - x_1^3 = 0\} : f(x) = x_1 \to extr,\ g_1(x) = x_2^2 - x_1^3 = 0$$

Рассчитать:
1. Проверить условие регулярности;
2. Записать обобщенную (или классическую функцию Лагранжа)
3. Записать необходимые условия экстремума первого порядка;
4. Найти условно-стационарные точки;
5. Проверить достаточные условия экстремума второго порядка:
 а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в условно-стационарных точках,
 б) записать выражение для первого дифференциала ограничения в условно-стационарных точках,
 в) расчитать выражение из п.а), учитывая б), и определить знак второго дифференциала классической функции Лагранжа.
6. Классифицировать условно-стационарные точки;
7. При необходимости проверить необходимые условия второго порядка, по аналогии с п.6

Выводы:
1. Сделать выводы о характере условно-стационарных точек.

График. построить трехмерный график (целевой функции и ограничения) и нанести условно-стационарные точки.

Исходная информация в MathCAD

$f(x) := x_0$ - исходная функция

$g_1(x) := (x_1)^2 - (x_0)^3$ - ограничение в виде равенства

Ход решения задачи в MathCAD

1. Проверить условие регулярности (линейную независимость градиентов ограничений)

$$\nabla_x g_1(x) \to \begin{bmatrix} -3 \cdot (x_0)^2 \\ 2 \cdot x_1 \end{bmatrix}$$

Вывод:
1. Гардиент ограничения $\nabla_x g_1(x)$ равен нулю в точке $x^*=(0,0)$, условиере гулярности не выполняется, т.е. градиенты ограничений линейно зависимы;
2. Для поиска условного экстремума должна быть использована обобщенная функция Лагранжа.

2. Обобщенная функция Лагранжа (x - вектор)

$$L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1) := \lambda_0 \cdot f(x) + \lambda_1 \cdot g_1(x)$$

Рис. А 22. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.6 часть 1)

3. Записать необходимые условия экстремума первого порядка

3.1 Градиент обобщенной функции Лагранжа (x - вектор)

$$Gr\_L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1) := \nabla_x L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1) \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_0 - 3\cdot\lambda_1\cdot(x_0)^2 \\ 2\cdot\lambda_1\cdot x_1 \end{bmatrix}$$

4. Решить систему уравнений $Gr\_L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1) = 0$ **и** $g_1(x) = 0$ **для двух случаев.**

4.1. Первый случай $\lambda_0 = 0$, тогда $\lambda_1 \neq 0$, т.к. все множетели Лагранжа одновременно не могут равняться нулю.

Найти условно-стационарные точки, используя блок Given-Find. Решается система нелинейных уравнений. Ищется одна точка.

$x\_01 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 := 1$ - начальные приближения для поиска первой точки

Given $2\cdot\lambda_1\cdot x\_01_1 = 0$ $-3\cdot\lambda_1\cdot(x\_01_0)^2 = 0$

$g_1(x\_01) = 0$ $x\lambda := Find(x\_01,\lambda_1)$

$\lambda_{1\_1} := x\lambda_1$ $\lambda_{1\_1} = 1$ - коэффициент Лагранжа для условно-стационарной точки

$x12\_1 := x\lambda_0$ $x12\_1^T = (0 \;\; 0)$ - координаты условно-стационарной точки (т1)

Вывод: 1. При $\lambda_0 = 0$, достаточные условия экстремума **не проверяются**,

2. Точка (т1) $x12\_1^T = (0 \;\; 0)$ со значением целевой функции $f(x12\_1) = 0$ является точкой **нерегулярного локального условного минимума**

4.2. Второй случай $\lambda_0 \neq 0$. Поделим обобщенную функцию Лагранжа на λ_0 с заменой $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1 и получим классическую функцию Лагранжа.

Составить классическую функцию Лагранжа

$$L_{kl}(x,\lambda_1) := f(x) + \lambda_1\cdot g_1(x)$$

Рис. А 23. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.6 часть 2)

Градиент классической функции Лагранжа (x - вектор)

$$Gr\_L_{kl}(x,\lambda_1) := \nabla_x L_{kl}(x,\lambda_1) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 - 3\cdot\lambda_1\cdot(x_0)^2 \\ 2\cdot\lambda_1\cdot x_1 \end{bmatrix}$$

Проверить выполнение необходимых условий экстремума первого порядка ($Gr\_L_{kl}(xk\_01, \lambda k_1) = 0$, $g_1(xk\_01) = 0$)

$$x\_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 := 1 \qquad CTOL := 0.000001$$

Given $\quad 1 - 3\cdot\lambda_2\cdot(x\_2_0)^2 = 0 \qquad 2\cdot\lambda_2\cdot x\_2_1 = 0 \qquad (x\_2_1)^2 - (x\_2_0)^3 = 0$

$$x\lambda 1 := Find(x\_2, \lambda_2)$$

Вывод: при точности расчета $CTOL = 1 \times 10^{-6}$ решение не найдено. Система не совместна.

<u>Анализ системы уравнений:</u>

1. Рассмотрим второе уравнение. Если $\lambda_1 = 0$ то второе уранение выполняется, однако при любом x_0 первое уровнение не равно 0. Система
2. Если $x_1 = 0$, то $x_0 = 0$, что бы ограничение было активным (т.е. равно нулю в заданной точке). Тогда первое уранение не равно 0. **Вывод:** система несовместна, решения нет.

<u>5. Классифицировать условно-стационарную точку с помощью матрицы Гессе</u>

1. Из графика видно, что условно - стационарная точка является не только локальным но и глобальным условным минимумом.

2. Следовательно точка (т1) $x12\_1^T = (0 \;\; 0)$ со значением целевой функции $f(x12\_1) = 0$ является точкой **нерегулярного локального и одновременно <u>глобального</u> условного минимума**

6. Построение графиков и точек локального минимума

Построить трехмерный графики исследуемой функции и ограничения в виде контурных линий в диапазоне значений значений -4<x<4, -4<y<4, с шагом 0.1, нанести расчетные точки минимума и максимума, отредактировать график как показано ниже.

Рис. А 24. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.6 часть 3)

Расчет исходной матрицы для постоения графика функции, используя дискретный аргумент.

$F(x,y) := x$ - исследуемая функция для построения графика

$x_{min} := -4 \quad x_{max} := 4 \quad y_{min} := -4 \quad y_{max} := 4 \quad \Delta x := 0.1 \quad \Delta y := 0.1$

$$Ni := \frac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x} \qquad Nj := \frac{y_{max} - y_{min}}{\Delta y}$$

$Ni = 80 \quad Nj = 80$ - кол. точек расчета

$i := 0..Ni \qquad j := 0..Nj$ - дискретный аргумент

Матрицы для построения поверхности функции

$x1_{i,j} := x_{min} + \Delta x \cdot i \qquad y1_{i,j} := y_{min} + \Delta y \cdot j \qquad M := \overrightarrow{F(x1, y1)}$

Расчет координат первой точки (т1) локального условного минимума (красная точка) для нанесения на график

$X12_0 := x12\_1_0$	значение х-составляющей	$X12 = (0)$
$Y12_0 := x12\_1_1$	значение у-составляющей	$Y12 = (0)$
$Z12_0 := f(x12\_1)$	значение z-составляющей	$Z12 = (0)$

Расчет исходной матрицы для постоения графика ограничения используя дискретный аргумент.

$(y)^2 - (x)^3 = 0$ - ограничение для построения графика

$x1_{min} := 0 \quad x1_{max} := 4 \quad y1_{min} := -4 \quad y1_{max} := 4 \quad \Delta x1 := 0.1 \quad \Delta y1 := 0.1$

$z1_{min} := -2 \qquad \Delta z1 := 0.1$

$$Ni1 := \frac{x1_{max} - x1_{min}}{\Delta x1} \qquad Nj1 := \frac{y1_{max} - y1_{min}}{\Delta y1}$$

$Ni1 = 40 \quad Nj1 = 80$ - кол. точек расчета

$i1 := 0..Nj1 := 0..Nj1$ - дискретный аргумент

Расчет первой половины цилинда (ограничения)

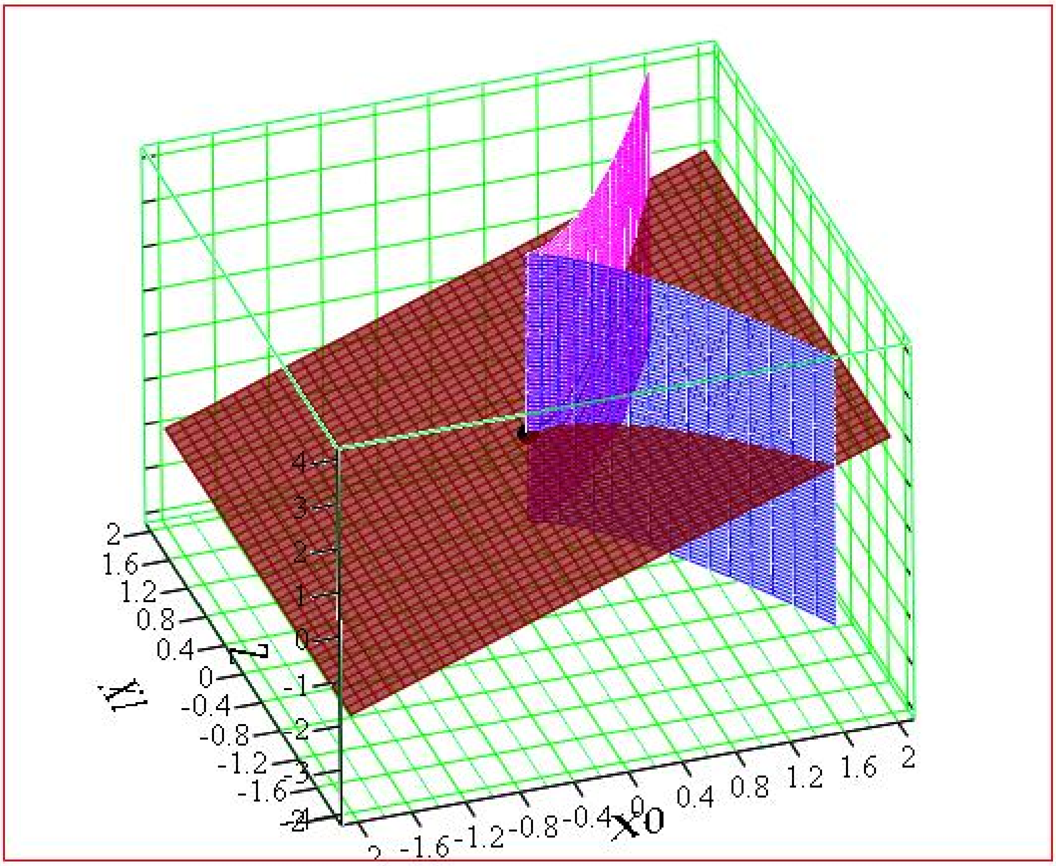
$x2_{i1,j1} := x1_{min} + \Delta x1 \cdot i1 \qquad y2_{i1,j1} := \sqrt{\left(x2_{i1,j1}\right)^3} \qquad G_{i1,j1} := z1_{min} + \Delta z1 \cdot j1$

Расчет второй половины цилинда (ограничения)

$y2\_1_{i1,j1} := -\sqrt{\left(x2_{i1,j1}\right)^3} \qquad G\_1_{i1,j1} := z1_{min} + \Delta z1 \cdot j1$

Рис. А 25. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.6 часть 4)

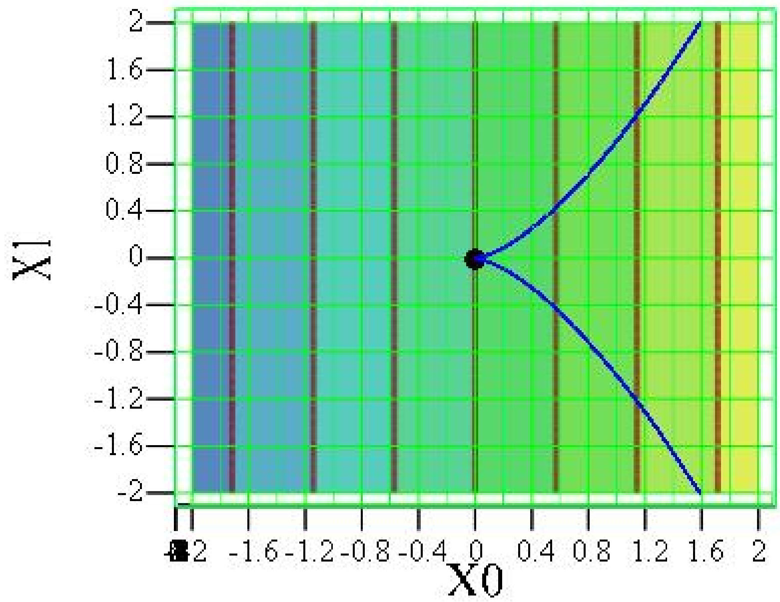
Построить трехмерный график в виде поверхности, отобразить плоскоть ограничения и нанести точку локального минимума



$(x_1, y_1, M), (X12, Y12, Z12), (x_2, y_2, G), (x_2, y_{2\_1}, G\_1)$

Рис. А 26. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.6 часть 5)

Построить трехмерный график в виде линей уровня, отобразить плоскоть ограничения и нанести точку локального минимума



$(x_1, y_1, M), (X12, Y12, Z12), (x_2, y_2, G), (x_2, y_{2\_1}, G\_1)$

Рис. А 27. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.6 часть 6)

Задача №1.7: Найти экстремум функцию $f(x)=x_1^2+x_2^2$ на множестве

$$X=\left\{x\left|(x_1-1)^2+x_2^2-4=0\right.\right\}: f(x)=x_1^2+x_2^2\to extr,\; g_1(x)=(x_1-1)^2+x_2^2-4=0$$

Рассчитать:
1. Проверить условие регулярности;
2. Записать обобщенную (или классическую функцию Лагранжа)
3. Записать необходимые условия экстремума первого порядка;
4. Найти условно-стационарные точки;
5. Проверить достаточные условия экстремума второго порядка:
 а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в условно-стационарных точках,
 б) записать выражение для первого дифференциала ограничения в условно-стационарных точках,
 в) расчитать выражение из п.а), учитывая б), и определить знак второго дифференциала классической функции Лагранжа.
6. Классифицировать условно-стационарные точки;
7. При необходимости проверить необходимые условия второго порядка, по аналогии с п.6

Выводы:
1. Сделать выводы о характере условно-стационарных точек.

График. построить трехмерный график (целевой функции и ограничения) и нанести условно-стационарные точки.

Исходная информация в MathCAD

$$f(x) := (x_0)^2 + (x_1)^2$$ - исходная функция

$$g_1(x) := (x_0-1)^2 + (x_1)^2 - 4$$ - функция ограничения

Ход решения задачи в MathCAD

1. Провергка условия регулярности (линейную независимость градиентов ограничений). Провести проверку самостоятельно.

2. Обобщенная функция Лагранжа (x - вектор)

$$L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1) := \lambda_0\cdot f(x) + \lambda_1\cdot g_1(x)$$

3. Записать необходимые условия экстремума первого порядка

3.1 Градиент обобщенной функции Лагранжа (x - вектор)

$$Gr\_L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1) := \nabla_x L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1) \to \begin{bmatrix} \lambda_1\cdot(2\cdot x_0-2)+2\cdot\lambda_0\cdot x_0 \\ 2\cdot\lambda_0\cdot x_1+2\cdot\lambda_1\cdot x_1 \end{bmatrix}$$

Рис. А 28. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.7 часть 1)

<u>4. Решить систему уравнений</u> $Gr\_L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1) = 0$, $g_1(x) = 0$ **<u>для двух случаев.</u>**

4.1. Первый случай $\lambda_0 = 0$, тогда $\lambda_1 \neq 0$, т.к. все множетели Лагранжа одновременно не могут равняться нулю.

Система уравнений имеет вид

$$\lambda_1 \cdot (2 \cdot x_0 - 2) = 0 \qquad 2 \cdot \lambda_1 \cdot x_1 = 0 \qquad (x_0 - 1)^2 + (x_1)^2 - 4 = 0$$

Из первых двух уравнений следует (т.к. $\lambda_1 \neq 0$) $x_0 = 1$ и $x_1 = 0$. Однако при этом уравнение ограничения $g_1(x) = -4 \neq 0$ не выполняется (ограничение пассивно). Следовательно **<u>система несовместна</u>**. Система не имеет решения.

4.2. Второй случай $\lambda_0 \neq 0$. Поделим обобщенную функцию Лагранжа на λ_0 с заменой $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1 и получим классическую функцию Лагранжа.

<u>2. Составить классическую функцию Лагранжа</u>

$$L_{kl}(x,\lambda_1) := f(x) + \lambda_1 \cdot g_1(x)$$

Градиент классической функции Лагранжа (x - вектор)

$$Gr\_L_{kl}(x,\lambda_1) := \nabla_x L_{kl}(x,\lambda_1) \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \cdot (2 \cdot x_0 - 2) + 2 \cdot x_0 \\ 2 \cdot \lambda_1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_1 \end{bmatrix}$$

Найти условно-стационарные точки, используя блок Given-Find. Решается система нелинейных уравнений (одно из уранений (ограничение) - полином второго порядка). Для поиска двух коней необходимо задать два начальных приближения

<u>Расчет первой точки (т1)</u>

$xk\_01 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \lambda k_1 := 1$ $\qquad$ - начальные приближения для поиска второй точки

Given $\qquad Gr\_L_{kl}(xk\_01, \lambda k_1) = 0 \qquad g_1(xk\_01) = 0$

$$x\lambda k := Find(xk\_01, \lambda k_1)$$

$\lambda k_{1\_1} := x\lambda k_1 \qquad \lambda k_{1\_1} = -0.5$ - коэффициент Лагранжа для второй точки

$xk12\_1 := x\lambda k_0 \qquad xk12\_1^T = (-1 \quad 0)$ - координаты первой условно-стационарной точки

Рис. А 29. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.7 часть 2)

Расчет второй точки (т2)

$xk\_01 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\lambda k_1 := -1$ - начальные приближения для поиска второй точки

Given $Gr\_L_{kl}(xk\_01, \lambda k_1) = 0$ $g_1(xk\_01) = 0$

$x\lambda := Find(xk\_01, \lambda k_1)$

$\lambda k_{1\_2} := x\lambda_1$ $\lambda k_{1\_2} = -1.5$ - коэффициент Лагранжа для второй точки

$xk12\_2 := x\lambda_0$ $xk12\_2^T = (3 \ \ 0)$ - координаты второй условно-стационарной точки

Вывод:

1 Найдены две точки т1 и т2

2. Точка т1 имеет $\lambda k_{1\_1} = -0.5$, т.е. коэффициент Лагранжа отличен от нуля. Следовательно точка (т1) $xk12\_1^T = (-1 \ \ 0)$ является условно-стационарной точкой.

3. Точка т2 имеет $\lambda k_{1\_2} = -1.5$, т.е. коэффициент Лагранжа отличен от нуля. Следовательно точка (т2) $xk12\_2^T = (3 \ \ 0)$ является условно-стационарной точкой.

4. Ограничение в т.1 и т.2 активны, так как в найденных точках равны нулю.

4. Проверить достаточные условия экстремума

$x := \begin{pmatrix} x0 \\ x1 \end{pmatrix}$ - вектор неизвестных $dx := \begin{pmatrix} dx0 \\ dx1 \end{pmatrix}$ - вектор дифференциалов по переменным

4.1 Второй дифференциал классической функции Лагранжа

$$\begin{aligned} Dif2\_kl(x, dx, \lambda 1) := & \frac{d}{dx0}\frac{d}{dx0} L_{kl}(x, \lambda 1) \cdot dx_0 \cdot dx_0 \ldots \\ & + \frac{d}{dx0}\left(\frac{d}{dx1} L_{kl}(x, \lambda 1)\right) \cdot dx_0 \cdot dx_1 \ldots \\ & + \frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx0} L_{kl}(x, \lambda 1)\right) \cdot dx_0 \cdot dx_1 \ldots \\ & + \frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx1} L_{kl}(x, \lambda 1)\right) \cdot dx_1 \cdot dx_1 \end{aligned}$$

функция ($Dif2\_kl(x, dx, \lambda 1)$) для расчета второго дифференциала классической функции Лагранжа (в общем виде)

Значение второго дифференциала классичекой функции Лагранжа в общем виде(символьное решение)

$Dif2\_kl(x, dx, \lambda 1) \rightarrow (2 \cdot \lambda 1 + 2) \cdot dx0^2 + (2 \cdot \lambda 1 + 2) \cdot dx1^2$

Рис. А 30. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.7 часть 3)

4.2 Первый дифференциал ограничения.

Функция $(\mathrm{Dif1\_G1}(x, x0, x1, dx0, dx1))$ для расчета первого дифференциала ограничения $(g_1(x))$ (в общем виде)

$$\mathrm{Dif1\_G1}(x, x0, x1, dx0, dx1) := \frac{d}{dx0} g_1(x) \cdot dx0 + \frac{d}{dx1} g_1(x) \cdot dx1$$

Значение первого дифференциала ограничения в общем виде (символьное решение)

$$\mathrm{Dif1\_G1}(x, x0, x1, dx0, dx1) \rightarrow dx0 \cdot (2 \cdot x0 - 2) + 2 \cdot dx1 \cdot x1$$

4.3. Исследовать первую точку

Выразить $dx0$ через $dx1$ и поставить во второй дифференциал кл.ф.Лагранжа

$x0 := -1 \qquad x1 := 0 \qquad \lambda k_{1\_1} := \frac{1}{2}$ параметры первой стационарной точки (см. п.4.2).

Решить уравнение первого диф.ограничения относительно $dx0$ в первой стационарной точке

$$\mathrm{Dif1\_G1}(x, x0, x1, dx0, dx1) \text{ solve}, dx0 \rightarrow 0$$

Следовательно $dx0 = 0$

$$dx0 \cdot (2 \cdot x0 - 2) + 2 \cdot dx1 \cdot x1 \rightarrow -4 \cdot dx0$$

Произвести замену переменных $dx0 = 0$ во втором диф.функ.Лагранжа (скопировать второй диф.функ. Лагранжа)

$$(2 \cdot \lambda 1 + 2) \cdot dx0^2 + (2 \cdot \lambda 1 + 2) \cdot dx1^2 \text{ substitute}, dx0 = 0 \rightarrow 2 \cdot dx1^2 \cdot (\lambda 1 + 1)$$

Учитывая, что $\lambda 1 := \lambda k_{1\_1} = 0.5$ второй диф.функ. Лагранжа больше нуля, так как $\left(dx1^2 > 0\right)$ при $dx1 \neq 0$ всегда.

Вывод:

1. Так как $\lambda_0 \neq 0$, точка (т1) $xk12\_1^T = (-1 \quad 0)$ является **точкой регулярного локального условного минимума**
2. Значение функции в точке локального условного минимума $f(xk12\_1) = 1$

Рис. А 31. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.7 часть 4)

4.3. Исследовать вторую точку

Выразить dx0 через dx1 и поставить во второй дифференциал кл.ф.Лагранжа

$x0 := 3 \quad x1 := 0 \qquad \lambda k_{1\_2} := -\frac{3}{2}$ параметры первой стационарной точки (см. п.4.2).

Решить уровнение первого диф.ограничения относительно dx0 во второй стационарной точке

$$\text{Dif1\_G1}(x, x0, x1, dx0, dx1) \text{ solve}, dx0 \rightarrow 0$$

Следовательно, $dx0 = 0$

Произвести замену переменных $dx0 = 0$ во втором диф.функ.Лагранжа (скопировать второй диф.функ. Лагранжа)

$$(2\cdot\lambda 1 + 2)\cdot dx0^2 + (2\cdot\lambda 1 + 2)\cdot dx1^2 \text{ substitute}, dx0 = 0 \rightarrow 3.0\cdot dx1^2$$

Учитывая, что $\lambda 1 := \lambda k_{1\_2}$ второй диф.функ. Лагранжа равен $(-dx1)^2 < 0$ при $dx1 \neq 0$ всегда.

Вывод:

1. Так как $\lambda_0 \neq 0$ точка (т2) $xk12\_2^T = (3 \quad 0)$ является **точкой регулярного локального условного максимума**
2. значение функции в точке локального условного минимума $f(xk12\_2) = 9$

5. Построение графиков и точек локального минимума

Построить трехмерный графики исследуемой функции и ограничения в виде контурных линий в диапазоне значений значений -4<x<4, -4<y<4, с шагом 0.1, нанести расчетные точки минимума и максимума, отредактировать график как показано ниже.

Расчет исходной матрицы для постоения графика функции, используя дискретный аргумент.

$F(x, y) := x^2 + y^2$ - исследуемая функция для построения графика

$x_{min} := -4 \quad x_{max} := 4 \quad y_{min} := -4 \quad y_{max} := 4 \quad \Delta x := 0.1 \quad \Delta y := 0.1$

$Ni := \frac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x} \qquad Nj := \frac{y_{max} - y_{min}}{\Delta y}$ - кол. точек расчета

$i := 0 .. Ni \; j := 0 .. Nj$

$x1_{i,j} := x_{min} + \Delta x \cdot i \; y1_{i,j} := y_{min} + \Delta y \cdot j \quad M := \overrightarrow{F(x_1, y_1)}$

Рис. А 32. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.7 часть 5)

Расчет координат первой точки (т1) локального условного минимума (красная точка) для нанесения на график

$X12_0 := xk12\_1_0$ значение x-составляющей $X12 = (-1)$

$Y12_0 := xk12\_1_1$ значение y-составляющей $Y12 = (0)$

$Z12_0 := f(xk12\_1)$ значение z-составляющей $Z12 = (1)$

Расчет координат второй точки (т2) локального условного минимума (черная точка) для нанесения на график

$X\_12_0 := xk12\_2_0$ значение x-составляющей $X\_12 = (3)$

$Y\_12_0 := xk12\_2_1$ значение y-составляющей $Y\_12 = (0)$

$Z\_12_0 := f(xk12\_2)$ значение z-составляющей $Z\_12 = (9)$

Расчет исходной матрицы для постоения графика ограничения используя дискретный аргумент.

$(x-1)^2 + y^2 - 4 = 0$ - функция ограничения для построения графика

$x1_{min} := -1$ $x1_{max} := 3$ $\Delta x1 := 0.1$ $z1_{min} := -1$ $\Delta z1 := 0.4$

$Ni1 := \dfrac{x1_{max} - x1_{min}}{\Delta x1}$ $Ni1 = 40$ - кол. точек расчета

$i1 := 0..Ni1$ $j1 := 0..Ni1$

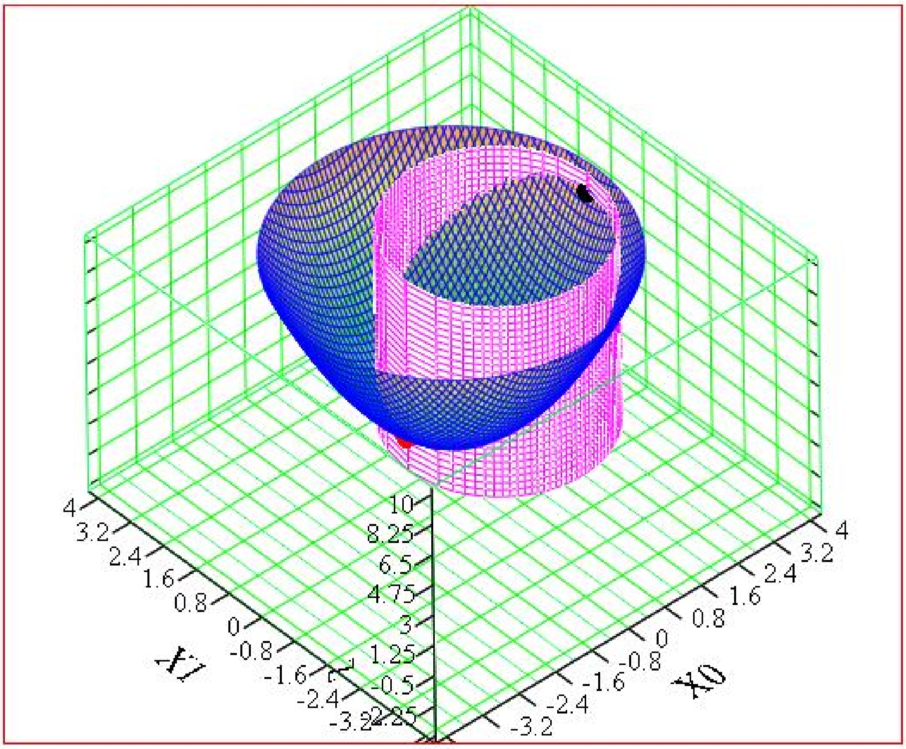
$x2_{i1,j1} := x1_{min} + \Delta x1 \cdot i1$ $y2_{i1,j1} := \sqrt{4 - \left(x2_{i1,j1} - 1\right)^2}$

$G_{i1,j1} := z1_{min} + \Delta z1 \cdot j1$

$y2\_1_{i1,j1} := -y2_{i1,j1}$ $G\_1_{i1,j1} := z1_{min} + \Delta z1 \cdot j1$

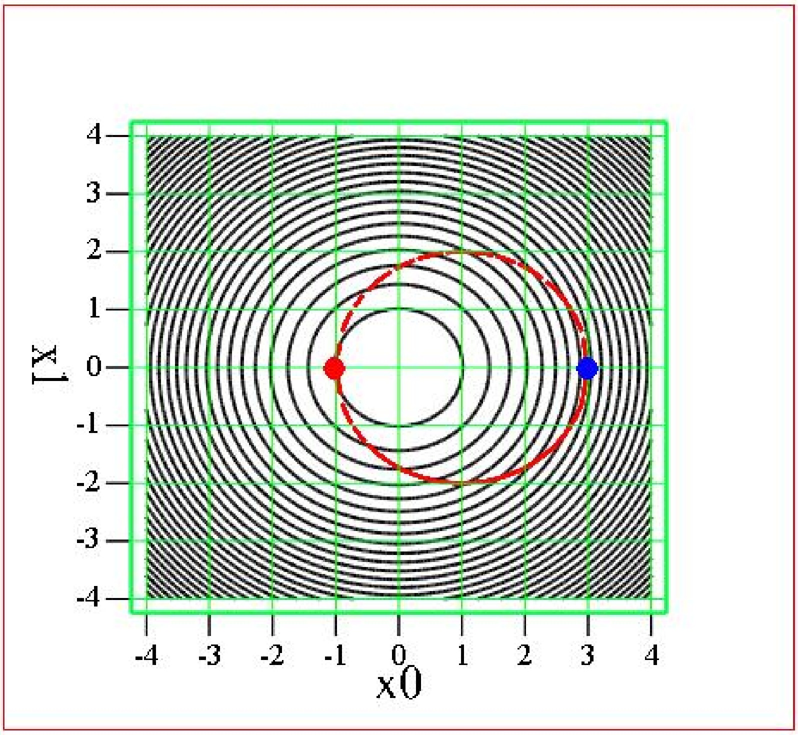
Рис. А 33. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.7 часть 6)

Построить трехмерный график в виде поверхности, отобразить плоскоть ограничения и нанести точку локального минимума



$\left(x_1, y_1, M\right), (X12, Y12, Z12), (X\_12, Y\_12, Z\_12), \left(x_2, y_2, G\right), \left(x_2, y_{2\_1}, G\_1\right)$

Построить трехмерный график в виде линей уровня отобразить плоскоть ограничения и нанести точку локального минимума



$\left(x_1, y_1, M\right), (X12, Y12, Z12), (X\_12, Y\_12, Z\_12), \left(x_2, y_2, G\right), \left(x_2, y_{2\_1}, G\_1\right)$

Рис. А 34. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.7 часть 7)

Задача №1.8 : Найти экстремум функции $f(x)=x_1^2-x_2^2$ на множестве

$$X=\{x|x_1^2+x_2^2-1=0\}: f(x)=x_1^2-x_2^2 \to extr,\ g_1(x)=x_1^2+x_2^2-1=0$$

Рассчитать:

1. Проверить условие регулярности;
2. Записать обобщенную (или классическую функцию Лагранжа)
3. Записать необходимые условия экстремума первого порядка;
4. Найти условно-стационарные точки;
5. Проверить достаточные условия экстремума второго порядка:
 а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в условно-стационарных точках,
 б) записать выражение для первого дифференциала ограничения в условно-стационарных точках,
 в) расчитать выражение из п.а), учитывая б), и определить знак второго дифференциала классической функции Лагранжа.
6. Классифицировать условно-стационарные точки;
7. При необходимости проверить необходимые условия второго порядка, по аналогии с п.6

Выводы:

1. Сделать выводы о характере условно-стационарных точек.

График. построить трехмерный график (целевой функции и ограничения) и нанести условно-стационарные точки.

Исходная информация в MathCAD

$f(x) := (x_0)^2 - (x_1)^2$ - исходная функция

$g_1(x) := (x_0)^2 + (x_1)^2 - 1$ - функция ограничения

Ход решения задачи в MathCAD

1. Проверка условия регулярности (линейную независимость градиентов ограничений).П**ровести самостоятельно.**

2. Обобщенная функция Лагранжа (x - вектор)

$$L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1) := \lambda_0 \cdot f(x) + \lambda_1 \cdot g_1(x)$$

3. Записать необходимые условия экстремума первого порядка

3.1 Градиент обобщенной функции Лагранжа (x - вектор)

$$Gr\_L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1) := \nabla_x L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1) \to \begin{pmatrix} 2\cdot\lambda_0\cdot x_0 + 2\cdot\lambda_1\cdot x_0 \\ 2\cdot\lambda_1\cdot x_1 - 2\cdot\lambda_0\cdot x_1 \end{pmatrix}$$

Рис. А 35. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.8 часть 1)

4. Решить систему уравнений $Gr\_L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1)=0$, $g_1(x)=0$ **для двух случаев.**

4.1. Первый случай $\lambda_0=0$**, тогда** $\lambda_1\neq 0$**, т.к. все множетели Лагранжа одновременно не могут равняться нулю.**

Система уравнений имеет вид (скопировать символьное решение функции $Gr\_L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1)$ и ограничение $g_1(x)$

$$2\cdot\lambda_0\cdot x_0+2\cdot\lambda_1\cdot x_0=0 \qquad 2\cdot\lambda_1\cdot x_1-2\cdot\lambda_0\cdot x_1=0 \qquad (x_0)^2+(x_1)^2-1=0$$

Из первых двух уравнений следует (т.к. $\lambda_1\neq 0$) $x_0=0$ и $x_1=0$. Однако при этом уравнение ограничения $g_1(x)=-1\neq 0$ не выполняется (ограничение пассивно). Следовательно **система несовместна**

4.2. Второй случай $\lambda_0\neq 0$**. Поделим обобщенную функцию Лагранжа на** λ_0 **с заменой** $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ **на** λ_1 **и получим классическую функцию Лагранжа.**

Составить классическую функцию Лагранжа

$$L_{kl}(x,\lambda_1):=f(x)+\lambda_1\cdot g_1(x)$$

Градиент классической функции Лагранжа (x - вектор)

$$Gr\_L_{kl}(x,\lambda_1):=\nabla_x L_{kl}(x,\lambda_1)\rightarrow\begin{pmatrix}2\cdot\lambda_1\cdot x_0+2\cdot x_0\\ 2\cdot\lambda_1\cdot x_1-2\cdot x_1\end{pmatrix}$$

Найти условно-стационарные точки, используя блок Given-Find. Решается система нелинейных уравнений (целевая функция и ограничение - полиномы второго порядка). Для поиска четырех коней необходимо задать четыре начальных приближения

Расчет первой точки (т1)

$xk\_01:=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\quad\lambda k_1:=1$ - начальные приближения для поиска второй точки

Given $\quad Gr\_L_{kl}(xk\_01,\lambda k_1)=0 \quad g_1(xk\_01)=0 \quad x\lambda k:=Find(xk\_01,\lambda k_1)$

$\lambda k_{1\_1}:=x\lambda k_1 \qquad \lambda k_{1\_1}=1$ - коэффициент Лагранжа для второй точки

$xk12\_1:=x\lambda k_0 \qquad xk12\_1^T=(0\ \ 1)$ - координаты первой условно-стационарной точки

Рис. А 36. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.8 часть 2)

Расчет второй точки (т2)

$xk\_01 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\lambda k_1 := -1$ - начальные приближения для поиска второй точки

Given $Gr\_L_{kl}(xk\_01, \lambda k_1) = 0$ $g_1(xk\_01) = 0$ $x\lambda := Find(xk\_01, \lambda k_1)$

$\lambda k_{1\_2} := x\lambda_1$ $\lambda k_{1\_2} = -1$ - коэффициент Лагранжа для второй точки

$xk12\_2 := x\lambda_0$ $xk12\_2^T = (1 \quad 0)$ - координаты второй условно-стационарной точки

Расчет первой точки (т3)

$xk\_01 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\lambda k_1 := 1$ - начальные приближения для поиска третьей точки

Given $Gr\_L_{kl}(xk\_01, \lambda k_1) = 0$ $g_1(xk\_01) = 0$ $x\lambda k := Find(xk\_01, \lambda k_1)$

$\lambda k_{1\_3} := x\lambda k_1$ $\lambda k_{1\_3} = 1$ - коэффициент Лагранжа для второй точки

$xk12\_3 := x\lambda k_0$ $xk12\_3^T = (0 \quad -1)$ - координаты первой условно-стационарной точки

Расчет второй точки (т4)

$xk\_01 := \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\lambda k_1 := -1$ - начальные приближения для поиска третьей точки

Given $Gr\_L_{kl}(xk\_01, \lambda k_1) = 0$ $g_1(xk\_01) = 0$ $x\lambda := Find(xk\_01, \lambda k_1)$

$\lambda k_{1\_4} := x\lambda_1$ $\lambda k_{1\_4} = -1$ - коэффициент Лагранжа для второй точки

$xk12\_4 := x\lambda_0$ $xk12\_4^T = (-1 \quad 0)$ - координаты второй условно-стационарной точки

Рис. А 37. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.8 часть 3)

Вывод: 1 Найдены четыре точки т1, т2, т3, т4
2. Точка т1 имеет $\lambda k_{1\_1} = 1$, т.е. коэффициент Лагранжа отличен

от нуля. Точка (т1) $xk12\_1^T = (0 \;\; 1)$ является
условно-стационарной точкой.
3. Точка т2 имеет $\lambda k_{1\_2} = -1$, т.е. коэффициент Лагранжа отличен

от нуля. Точка (т2) $xk12\_2^T = (1 \;\; 0)$ является
условно-стационарной точкой.
2. Точка т3 имеет $\lambda k_{1\_3} = 1$, т.е. коэффициент Лагранжа отличен

отнуля. Точка (т3) $xk12\_3^T = (0 \;\; -1)$ является
условно-стационарной точкой.
3. Точка т4 имеет $\lambda k_{1\_4} = -1$, т.е. коэффициентЛагранжа отличен

от нуля. Точка (т4) $xk12\_2^T = (1 \;\; 0)$ является
условно-стационарной точкой.
4. Ограничение в т.1 - т.4 активны.

4. Проверить достаточные условия экстремума

$x := \begin{pmatrix} x0 \\ x1 \end{pmatrix}$ -вектор неизвестных $dx := \begin{pmatrix} dx0 \\ dx1 \end{pmatrix}$ - вектор дифференциалов по переменным

4.1 Второй дифференциал классической функции Лагранжа

$$\begin{aligned} Dif2\_kl(x, dx, \lambda1) := {} & \frac{d}{dx0}\frac{d}{dx0}L_{kl}(x, \lambda1)\cdot dx_0\cdot dx_0 \ldots \\ & + \frac{d}{dx0}\left(\frac{d}{dx1}L_{kl}(x, \lambda1)\right)\cdot dx_0\cdot dx_1 \ldots \\ & + \frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx0}L_{kl}(x, \lambda1)\right)\cdot dx_0\cdot dx_1 \ldots \\ & + \frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx1}L_{kl}(x, \lambda1)\right)\cdot dx_1\cdot dx_1 \end{aligned}$$

функция ($Dif2\_kl(x, dx, \lambda1)$) для расчета второго дифференциала классической функции Лагранжа (в общем виде)

Значение второго дифференциала классичекой функции Лагранжа в общем виде(символьное решение)

$$Dif2\_kl(x, dx, \lambda1) \rightarrow (2\cdot\lambda1 + 2)\cdot dx0^2 + (2\cdot\lambda1 - 2)\cdot dx1^2$$

Рис. А 38. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.8 часть 4)

4.2 Первый дифференциал ограничения.

функция ($Dif1\_G1(x, x0, x1, dx0, dx1)$) для расчета первого дифференциала ограничения ($g_1(x)$) (в общем виде, символьным способом)

$$Dif1\_G1(x, x0, x1, dx0, dx1) := \frac{d}{dx0} g_1(x) \cdot dx0 + \frac{d}{dx1} g_1(x) \cdot dx1$$

Значение первого дифференциала ограничения в общем виде (символьное решение)

$$Dif1\_G1(x, x0, x1, dx0, dx1) \rightarrow 2 \cdot dx0 \cdot x0 + 2 \cdot dx1 \cdot x1$$

4.3. Исследовать первую точку (т1)

Выразить $dx1$ через $dx0$ и поставить во второй дифференциал кл.ф.Лагранжа

$x0 := 0 \quad x1 := 1 \quad \lambda k_{1\_1} = 1$ - параметры первой стационарной точки (см. п.4.2)

Решить уровнение первого диф.ограничения относительно $dx0$ в первой стационарной точке

$$Dif1\_G1(x, x0, x1, dx0, dx1) = 0 \text{ solve}, dx1 \rightarrow 0$$

Следовательно $dx1 = 0$

Произвести замену переменных $dx1 = 0$ во втором диф.функ.Лагранжа (скопировать второй диф.функ. Лагранжа)

$$(2 \cdot \lambda 1 + 2) \cdot dx0^2 + (2 \cdot \lambda 1 - 2) \cdot dx1^2 \text{ substitute}, dx1 = 0 \rightarrow 2 \cdot dx0^2 \cdot (\lambda 1 + 1)$$

Учитывая, что $\lambda 1 := \lambda k_{1\_1}$ второй диф.функ. Лагранжа равен

$(4dx0)^2 > 0$ при $dx0 \neq 0$ всегда.

Вывод:

1. Так как $\lambda_0 \neq 0$, точка (т1) $xk12\_1^T = (0 \quad 1)$ является **точкой регулярного локального условного минимума;**
2. значение функции в точке локального условного минимума $f(xk12\_1) = -1$

Рис. А 39. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.8 часть 5)

4.3. Исследовать вторую точку (т2)

Выразить dx0 через dx1 и поставить во второй дифференциал кл.ф.Лагранжа

$x0 := 1 \qquad x1 := 0 \qquad \lambda k_{1\_2} = -1$

Решить уровнение первого диф.ограничения относительно dx0 во второй стационарной точке

$$\mathrm{Dif1\_G1}(x, x0, x1, dx0, dx1) = 0 \text{ solve}, dx0 \ \rightarrow 0$$

Следовательно $dx0 = 0$

Произвести замену переменных $dx0 = 0$ во втором диф.функ.Лагранжа (скопировать второй диф.функ. Лагранжа)

$$(2\cdot\lambda 1 + 2)\cdot dx0^2 + (2\cdot\lambda 1 - 2)\cdot dx1^2 \text{ substitute}, dx0 = 0 \ \rightarrow 2\cdot dx1^2\cdot(\lambda 1 - 1)$$

Учитывая, что $\lambda 1 := \lambda k_{1\_2}$ второй диф.функ. Лагранжа равен $(-4dx1)^2 < 0$ при $dx1 \neq 0$ всегда.

Вывод:

1. Так как $\lambda_0 \neq 0$ точка (т2) $xk12\_2^T = (1 \ \ 0)$ является **точкой регулярного локального условного максимума**
2. значение функции в точке локального условного минимума $f(xk12\_2) = 1$

4.3. Исследовать третью точку (т3)

Выразить dx1 через dx0 и поставить во второй дифференциал кл.ф.Лагранжа

$x0 := 0 \qquad x1 := -1 \qquad \lambda k_{1\_3} = 1$ - параметры первой стационарной точки (см. п.4.2)

Решить уровнение первого диф.ограничения относительно dx0 в первой стационарной точке

$$\mathrm{Dif1\_G1}(x, x0, x1, dx0, dx1) = 0 \text{ solve}, dx1 \ \rightarrow 0$$

Следовательно $dx1 = 0$

Произвести замену переменных $dx1 = 0$ во втором диф.функ.Лагранжа (скопировать второй диф.функ. Лагранжа)

$$(2\cdot\lambda 1 + 2)\cdot dx0^2 + (2\cdot\lambda 1 - 2)\cdot dx1^2 \text{ substitute}, dx1 = 0 \ \rightarrow 2\cdot dx0^2\cdot(\lambda 1 + 1)$$

Учитывая, что $\lambda 1 := \lambda k_{1\_3}$ второй диф.функ. Лагранжа равен $(4dx0)^2 > 0$ при $dx0 \neq 0$ всегда.

Рис. А 40. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.8 часть 6)

Вывод:

1. Так как $\lambda_0 \neq 0$, точка (т3) $xk12\_3^T = (0 \ \ -1)$ является **точкой регулярного локального условного минимума;**
2. значение функции в точке локального условного минимума $f(xk12\_3) = -1$

4.3. Исследовать четвертую точку (т4)

Выразить dx0 через dx1 и поставить во второй дифференциал кл.ф.Лагранжа

$x0 := -1 \qquad x1 := 0 \qquad \lambda k_{1\_4} = -1$

Решить уровнение первого диф.ограничения относительно dx0 во второй стационарной точке

$$Dif1\_G1(x, x0, x1, dx0, dx1) = 0 \text{ solve}, dx0 \ \rightarrow 0$$

Следовательно $dx0 = 0$

Произвести замену переменных $dx0 = 0$ во втором диф.функ.Лагранжа (скопировать второй диф.функ. Лагранжа)

$$(2\cdot\lambda 1 + 2)\cdot dx0^2 + (2\cdot\lambda 1 - 2)\cdot dx1^2 \text{ substitute}, dx0 = 0 \ \rightarrow 2\cdot dx1^2\cdot(\lambda 1 - 1)$$

Учитывая, что $\lambda 1 := \lambda k_{1\_4}$ второй диф.функ. Лагранжа равен $(-4dx1)^2 < 0$ при $dx1 \neq 0$ всегда.

Вывод:

1. Так как $\lambda_0 \neq 0$ точка (т2) $xk12\_2^T = (1 \ \ 0)$ является **точкой регулярного локального условного максимума**
2. значение функции в точке локального условного минимума $f(xk12\_2) = 1$

5. Классифицировать условно-стационарную точку с помощью матрицы Гессе

5.1 Расчет матрицы Гессе (в матрице Гессе используется та функция с помощью которой были расчитаны условно-стационарные точки). В данном случае используется классическая функция Лагранжа при $\lambda_1 = 0$

$\lambda_1 := 0$ - коэффициент Лагранжа

$x := \begin{pmatrix} x0 \\ x1 \end{pmatrix}$ - вектор неизвестных переменных

Рис. А 41. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.8 часть 7)

$$H(x) := \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx0^2}L_{kl}(x,\lambda_1) & \frac{d}{dx0}\left(\frac{d}{dx1}L_{kl}(x,\lambda_1)\right) \\ \frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx0}L_{kl}(x,\lambda_1)\right) & \frac{d^2}{dx1^2}L_{kl}(x,\lambda_1) \end{bmatrix}$$ - функция, для расчета элементов матрицы Гессе

$H(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - символьное вычисление матрицы Гессе в общем виде

__**Вывод:**__ 1. матрица Гессе классической функции Лагранжа (при $\lambda_1 := 0$) во всех точках области допустимых значений положительно полуопределена,
2. Следовательно точки являются точками **регулярного локального и одновременно глобального условного минимума** (т1- $f(xk12\_1) = -1$, т3- $f(xk12\_3) = -1$) и **максимума** (т2- $f(xk12\_2) = 1$,т4- $f(xk12\_4) = 1$) **.**

5.2 Построение графиков и точек локального минимума

Построить трехмерный графики исследуемой функции и ограничения в виде контурных линий в диапазоне значений значений -4<x<4, -4<y<4, с шагом 0.1, нанести расчетные точки минимума и максимума, отредактировать график как показано ниже.

Расчет исходной матрицы для постоения графика функции, используя дискретный аргумент.

$F(x,y) := x^2 - y^2$ - исследуемая функция для построения графика

$x_{min} := -4$ $x_{max} := 4$ $y_{min} := -4$ $y_{max} := 4$ $\Delta x := 0.1$ $\Delta y := 0.1$

$Ni := \frac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x}$ $Nj := \frac{y_{max} - y_{min}}{\Delta y}$ - кол. точек расчета

$i := 0..Ni$ $j := 0..Nj$

$x1_{i,j} := x_{min} + \Delta x \cdot i$ $y1_{i,j} := y_{min} + \Delta y \cdot j$ $M := \overrightarrow{F(x1, y1)}$

Рис. А 42. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.8 часть 8)

Расчет координат точек (т1-т4) локального условного минимума (красные точка) для нанесения на график

$$X12 := \begin{pmatrix} xk12\_1_0 \\ xk12\_2_0 \\ xk12\_3_0 \\ xk12\_4_0 \end{pmatrix} \qquad X12 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$ - значение x-составляющих условно-стационарных точек

$$Y12 := \begin{pmatrix} xk12\_1_1 \\ xk12\_2_1 \\ xk12\_3_1 \\ xk12\_4_1 \end{pmatrix} \qquad Y12 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ - значение y-составляющих условно-стационарных точек

$$Z12 := \begin{pmatrix} f(xk12\_1) \\ f(xk12\_2) \\ f(xk12\_3) \\ f(xk12\_4) \end{pmatrix} \qquad Z12 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ - значение z-составляющих условно-стационарных точек

Расчет исходной матрицы для постоения графика ограничения используя дискретный аргумент.

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ - функция ограничения для построения графика

$x1_{min} := -1 \quad x1_{max} := 1 \quad \Delta x1 := 0.05 \quad z1_{min} := -2 \quad \Delta z1 := 0.1$

$$Ni1 := \frac{x1_{max} - x1_{min}}{\Delta x1} \qquad Ni1 = 40$$ - кол. точек расчета

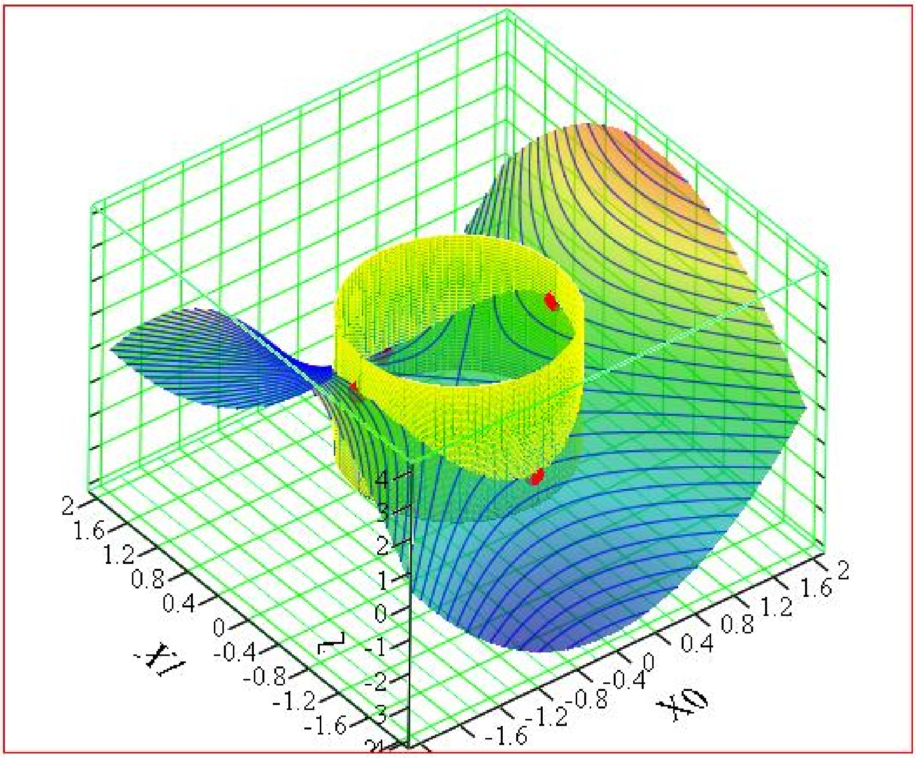
$i1 := 0..Nj1 := 0..Ni1$

$$x2_{i1,j1} := x1_{min} + \Delta x1 \cdot i1 \quad y2_{i1,j1} := \sqrt{1 - \left(x2_{i1,j1}\right)^2} \quad G_{i1,j1} := z1_{min} + \Delta z1 \cdot j1$$

$$y2\_1_{i1,j1} := -y2_{i1,j1} \qquad G\_1_{i1,j1} := z1_{min} + \Delta z1 \cdot j1$$

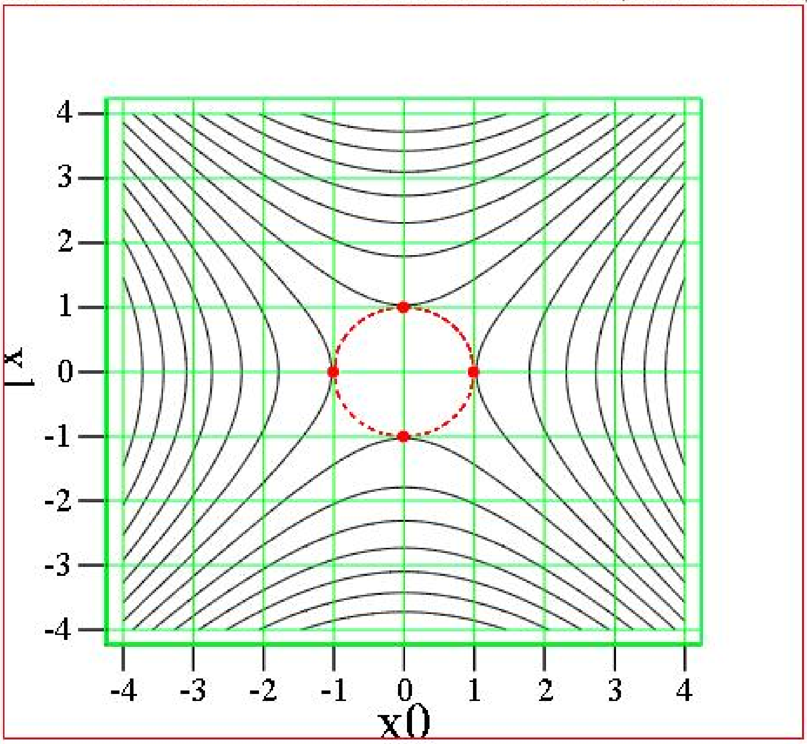
Рис. А 43. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.8 часть 9)

Построить трехмерный график в виде поверхности, отобразить плоскоть ограничения и нанести точки локального минимума и максимума



$(x_1, y_1, M), (X12, Y12, Z12), (x_2, y_{2\_1}, G\_1), (x_2, y_2, G)$

Построить трехмерный график в виде линий уровня отобразить плоскоть ограничения и нанести точки локального минимума и максимума



$(x_1, y_1, M), (X12, Y12, Z12), (x_2, y_2, G), (x_2, y_{2\_1}, G\_1)$

Рис. А 44. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде равенств (Пример 1.8 часть 10)

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. ЛИСТИНГИ ПРИМЕРОВ В MATHCAD15. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ. ОГРАНИЧЕНИЕ В ВИДЕ НЕРАВЕНСТВА

Задача №1.9: Найти экстремум функцию $= x_1^2 + x_2^2$ на множестве

$$X = \{x | x_1 + x_2 - 2 \le 0\} : f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to extr,\ g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 \le 0$$

Расчитать:

1. Записать обобщенную функцию Лагранжа.
2. Записать необходимые условия экстремума первого порядка;

а) условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x;
б) условие допустимости решения;
в) условие неотрицательности для условного минимума (не положительности для максимума);
г) условие дополняющей нежесткости.

3.Решить систему уравнений из п.2 и найти условно-стационарные точки для двух случаев ($\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$);

4. Проверить достаточные условия экстремума первого порядка.
5. При необходимости проверить необходимые и достаточные условия второго порядка.

Выводы:

1. Сделать выводы о характере условно-стационарных точек.

График. построить трехмерный график в виде поверхности и линии уровня (целевой функции и ограничения) и нанести условно-стационарные точки.

Исходная информация

$f(x) := (x_0)^2 + (x_1)^2$ - исходная функция

$g_1(x) := x_0 + x_1 - 2$ - функция ограничения-неравенства

Ход решения задачи

1. Обобщенная функция Лагранжа (x - вектор)

$$L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1) := \lambda_0 \cdot f(x) + \lambda_1 \cdot g_1(x)$$

Градиент обобщенной функции Лагранжа (x - вектор) (в общем виде, решение символьное решение)

$$Gr\_L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1) := \nabla_x L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1) \to \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_0 \cdot x_0 \\ \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_0 \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

Рис. Б 1. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.9 часть 1)

2. Необходимые условия экстремума первого порядка (теория)

а) $\nabla_x L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1) = 0$

б) $g_1(x) \le 0$

в) $\lambda_1 \ge 0$ (для минимумов), $\lambda_1 \le 0$ (для максимумов)

г) $\lambda_1 \cdot g_1(x) = 0$

3. Поиск условно-стационарных точек (используются необходимые условия первого порядка)

(Решить систему уравнений п.2 для двух случаев: $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \ne 0$).

3.1. Первый случай $\lambda_0 = 0$**, тогда из условия а) п.2 следует, что** $\lambda_1 = 0$.

Однако все множетели Лагранжа одновременно не могут равняться нулю. Система несовместно. Решения нет

3.2. Второй случай $\lambda_0 \ne 0$**. Поделим обобщенную функцию Лагранжа на** λ_0 **с заменой** $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ **на** λ_1 **и получим классическую функцию Лагранжа.**

Составить классическую функцию Лагранжа

$$L_{kl}(x, \lambda_1) := f(x) + \lambda_1 \cdot g_1(x)$$

Градиент классической функции Лагранжа (x - вектор) в общем виде, решение символьным способом.

$$Gr\_L_{kl}(x, \lambda_1) := \nabla_x L_{kl}(x, \lambda_1) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2 \cdot x_0 \\ \lambda_1 + 2 \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

3.3 Найти условно-стационарные точки, используя блок Given-Find. Решается система нелинейных уравнений

Из условия дополнительной нежесткости $\lambda_1 \cdot g_1(x) = 0$ **следует, что** λ_1 **может принимать два значения** $\lambda_1 = 0$ **и** $\lambda_1 \ne 0$

а) Вариант 1 $\lambda_1 = 0$ (фактически решается задача поиска безусловного экстремума)

$x\_01 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 := 0$ $\quad$ - начальные приближения для поиска первой точки

Given

$Gr\_L_{kl}(x\_01, \lambda_1) = 0 \quad \lambda_1 \cdot g_1(x\_01) = 0 \quad g_1(x\_01) \le 0 \quad \lambda_1 = 0$

$x\lambda := Find(x\_01, \lambda_1)$

Рис. Б 2. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.9 часть 2)

$\lambda_{1\_1} := x\lambda_1 \quad \lambda_{1\_1} = 0$ - коэффициент Лагранжа для первой точки

$x12\_1 := x\lambda_0 \quad x12\_1^T = (0 \;\; 0)$ - координаты первой условно-стационарной точки

Вывод: 1 Первая точка (т1) имеет коэффициент Лагранжа $\lambda_{1\_1} = 0$, координаты точки $x12\_1^T = (0 \;\; 0)$. Условие б) п.3 $g_1(x) = -2 \le 0$ выполняется. Следовательно выполняются небходимые условия первого порядка (см. п.2) как для минимума, так и для максимума. Точка т1 - условно-стационарная точка.

а) Вариант 2 $\lambda_1 \neq 0$.

$x\_01 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 := 0$ - начальные приближения для поиска второй точки

Given

$Gr\_L_{kl}(x\_01, \lambda_1) = 0 \qquad \lambda_1 \cdot g_1(x\_01) = 0 \qquad g_1(x\_01) \le 0 \qquad \lambda_1 \neq 0$

$x\lambda := Find(x\_01, \lambda_1)$

$\lambda_{1\_1} := x\lambda_1 \quad \lambda_{1\_1} = -2$ - коэффициент Лагранжа для второй точки

$x12\_2 := x\lambda_0 \quad x12\_2^T = (1 \;\; 1)$ - координаты второй условно-стационарной точки

Вывод: 1. При поиске минимума (используется ограничение $\lambda_1 \ge 0$) решение выходит на т1.

2. При поиске максимума ($\lambda_1 \le 0$ см.п2. в)) получаем точку (т2) с коэффициентом Лагранжа $\lambda_{1\_1} = -2$ и координатами точки $x12\_2^T = (1 \;\; 1)$. Условие б) п.3 $g_1(x) = -2 \le 0$ выполняется. Следовательно выполняются небходимые условия первого порядка (см. п.2) для максимума и точка т2 - условно-стационарная точка.

Рис. Б 3. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.9 часть 3)

3.3. Достаточные условия первого порядка (число активных ограничений равно числу переменных в задаче, λ_1 или >0 (локальный минимум) или <0 (локальный максимум))

В **<u>точке т1</u>** $x12\_1^T = (0 \;\; 0)$ ограничение пассивно, т.к. $g_1(x) = -2 \le 0$, поэтому достаточные условия первого порядка неудовлетворяются, т.е. число активных ограничений (l) меньше размерности неизвестной в целевой функции (n), $l = 0 < n = 2$.

В **<u>точке т2</u>** $x12\_2^T = (1 \;\; 1)$ ограничение активно т.к. $g_1(x) = 0$, однако достаточные условия первого порядка неудовлетворяются, т.к. число активных ограничений $l = 1 < n = 2$.

<u>4. Проверить достаточные условия экстремума второго порядка</u>

$x := \begin{pmatrix} x0 \\ x1 \end{pmatrix}$ - вектор неизвестных $\quad dx := \begin{pmatrix} dx0 \\ dx1 \end{pmatrix}$ - вектор дифференциалов по переменным

4.1 Второй дифференциал классической функции Лагранжа

$$Dif2\_kl(x, dx, \lambda 1) := \frac{d}{dx0}\frac{d}{dx0}L_{kl}(x, \lambda 1)\cdot dx_0 \cdot dx_0 \ldots + \frac{d}{dx0}\left(\frac{d}{dx1}L_{kl}(x, \lambda 1)\right)\cdot dx_0 \cdot dx_1 \ldots + \frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx0}L_{kl}(x, \lambda 1)\right)\cdot dx_0 \cdot dx_1 \ldots + \frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx1}L_{kl}(x, \lambda 1)\right)\cdot dx_1 \cdot dx_1$$

Переменная (Dif2_Lob) для расчета второго дифференциала обобщенной функции Лагранжа (в общем виде, символьным способом)

Значение второго дифференциала классичекой функции Лагранжа в общем виде (символьное решение)

$$Dif2\_kl(x, dx, \lambda 1) \rightarrow 2\cdot dx0^2 + 2\cdot dx1^2$$

4.2 Первый дифференциал ограничения.

$$Dif1\_G1(x) := \frac{d}{dx0}g_1(x)\cdot dx0 + \frac{d}{dx1}g_1(x)\cdot dx1$$ - функция для расчета первого дифференциала ограничения ($g_1(x)$)

Значение первого дифференциала ограничения в общем виде (символьное решение)

$$Dif1\_G1(x) \rightarrow dx0 + dx1$$

Рис. Б 4. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.9 часть 4)

Исследовать условно-стационарную точку т1

(Выразить dx0 через dx1 и поставить во второй дифференциал кл.ф.Лагранжа)

Решить уровнение первого диф.ограничения относительно dx0 в стационарной точке

$$\mathrm{Dif1\_G1}(x)\ \mathrm{solve}, dx0\ \rightarrow -dx1$$

Произвести замену переменных $dx0 = -dx1$ во втором диф.функ.Лагранжа

$$\mathrm{Dif2\_kl}(x, dx, \lambda1)\ \mathrm{substitute}, dx0 = -dx1\ \rightarrow 4\cdot dx1^2$$

При $dx1 \neq 0$ второй дифференциал кл.ф.Лагранжа $\mathrm{Dif2\_kl}(x, dx, \lambda1) > 0$ всегда.

<u>Вывод:</u>

1. Точка $x12\_1^T = (0\ \ 0)$ является **точкой регулярного локального условного минимума,**
2. Значение функции в точке локального условного минимума $f(x12\_1) = 0$,
3. Функция $f(x)$ и множество X (ограничения) выпуклые, поэтому в т.1 достигается глобальный условный минимум.

Доказательства п.3 выводов. Дополнительные исследования первой точки (т.1)

<u>Расчет матрицы Гессе</u>

$$x := \begin{pmatrix} x0 \\ x1 \end{pmatrix}$$ - вектор неизвестных переменных

$$H(x) := \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx0^2} f(x) & \frac{d}{dx0}\left(\frac{d}{dx1} f(x)\right) \\ \frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx0} f(x)\right) & \frac{d^2}{dx1^2} f(x) \end{bmatrix}$$ - функция, для расчета элементов матрицы Гессе

$$H(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ - символьное вычисление матрицы Гессе в общем виде

Вывод: Матрица Гессе сильно выпуклая, так как $H(x) \geq l\cdot E$, где $l = 2$, E - единичная матрица. Следовательно, точка т.1 является точкой глобального безусловного минимума.

Рис. Б 5. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.9 часть 5)

Исследовать условно-стационарную точку т2

(Выразить dx0 через dx1 и поставить во второй дифференциал кл.ф.Лагранжа)

Решить уровнение первого диф.ограничения относительно dx0 в стационарной точке

$$\mathrm{Dif1\_G1}(x)\ \mathrm{solve}, dx0\ \rightarrow -dx1$$

Произвести замену переменных $dx0 = -dx1$ во втором диф.функ.Лагранжа

$$\mathrm{Dif2\_kl}(x, dx, \lambda1)\ \mathrm{substitute}, dx0 = -dx1\ \rightarrow 4 \cdot dx1^2$$

При $dx1 \neq 0$ второй дифференциал кл.ф.Лагранжа $\mathrm{Dif2\_kl}(x, dx, \lambda1) > 0$ всегда в точке т.2.

Вывод:

1. Так как $\lambda_1 = -2 \leq 0 - 2$, а $\mathrm{Dif2\_kl}(x, dx, \lambda1) > 0$ всегда, т.е. т2 не максимум (для максимума необходимо, чтобы $\mathrm{Dif2\_kl}(x, dx, \lambda1) < 0$). Достататочные условия второго порядка не выполняются,

5. Проверить необходимые условия экстремума второго порядка (надо, чтобы $\mathrm{Dif2\_kl}(x, dx, \lambda1) \leq 0$)

Вывод:

1. Так как $\lambda_1 = -2 \leq 0 - 2$, а $\mathrm{Dif2\_kl}(x, dx, \lambda1) > 0$ всегда, т.е. т2 не максимум (для максимума необходимо, чтобы $\mathrm{Dif2\_kl}(x, dx, \lambda1) \leq 0$). Необходимые условия второго порядка не выполняются,
2. В **т2 НЕТ максимума**

6. Построение графиков и точек локального минимума

Построить трехмерный график в виде контурных линий в диапазоне значений -2<x<2, -2<y<2, с шагом 0.1, нанести расчетные точки минимума и максимума, отредактировать график как показано ниже.

Расчет исходной матрицы для постоения графика функции, используя дискретный аргумент.

$F(x, y) := (x)^2 + (y)^2$ - функция для построения графика

Диапазон расчета и шаг расчета

$x_{min} := -2 \quad x_{max} := 2 \quad y_{min} := -2 \quad y_{max} := 2 \quad \Delta x := 0.1 \quad \Delta y := 0.1$

$Ni := \dfrac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x} \quad Nj := \dfrac{y_{max} - y_{min}}{\Delta y}$ - кол. точек расчета

$i := 0 .. Ni \ j := 0 .. Nj$ - дискретный аргумент

Рис. Б 6. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.9 часть 6)

Рассчет матриц для построения поверхности целевой функции

$x1_{i,j} := x_{min} + \Delta x \cdot i$ $\quad y1_{i,j} := y_{min} + \Delta y \cdot j$ $\quad M := \overrightarrow{F(x1, y1)}$

Расчет координат точки т.1(красная точка) для нанесения на график

$X12_0 := x12\_1_0$ значение x-составляющей

$Y12_0 := x12\_1_1$ значение y-составляющей

$Z12_0 := f(x12\_1)$ значение z-составляющей $\quad Z12 = (0)$

Расчет координат точки т2 (точка в виде креста) для нанесения на график

$X12\_1_0 := x12\_2_0$ значение x-составляющей

$Y12\_1_0 := x12\_2_1$ значение y-составляющей

$Z12\_1_0 := f(x12\_2)$ значение z-составляющей $\quad Z12\_1 = (2)$

Рассчет матриц для постоения графика ограничения используя дискретный аргумент.

$x + y - 2 = 0$ - ограничение в виде вертикальной плоскости

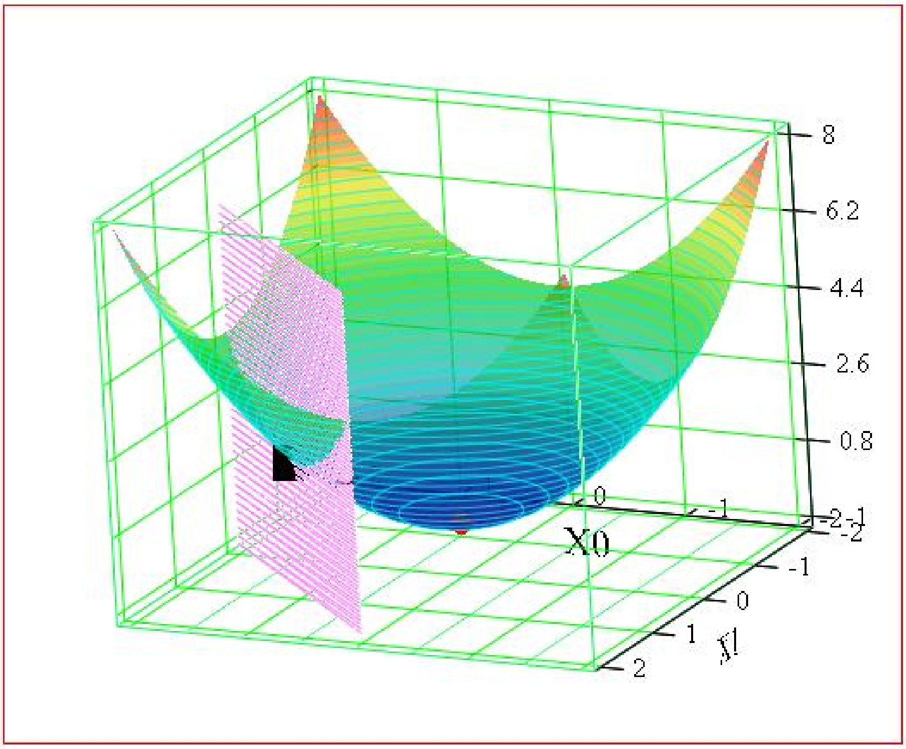
Диапазон расчета и шаг расчета (по осям x, y диапазон и шаг расчета такие же, как у целевой функции)

$z_{min} := -1 \quad \Delta z := 0.2$

$x2_{i,j} := x_{min} + \Delta x \cdot i \; y2_{i,j} := -x2_{i,j} + G_{i,j} := z_{min} + \Delta z \cdot j$

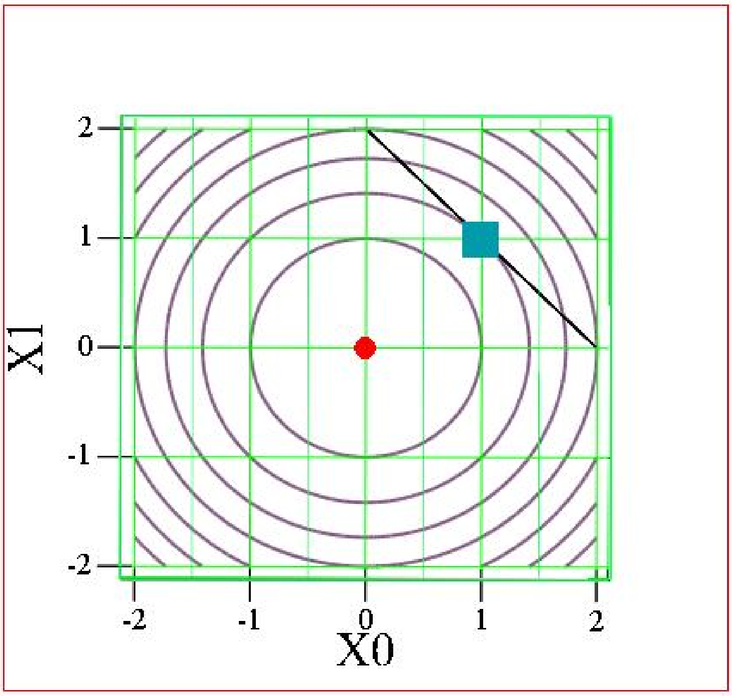
Рис. Б 7. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.9 часть 7)

Построить трехмерный график в виде поверхности, отобразить плоскоть ограничения и нанести условно стационарные точки



$(x_1, y_1, M), (X12, Y12, Z12), (x_2, y_2, G), (X12\_1, Y12\_1, Z12\_1)$

Построить трехмерный график в виде линий уровня, отобразить плоскоть ограничения и нанести условно стационарные точки



$(x_1, y_1, M), (X12, Y12, Z12), (x_2, y_2, G), (X12\_1, Y12\_1, Z12\_1)$

Рис. Б 8. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.9 часть 8)

Задача №1.10: Найти эктремум функцию $f(x) = x_1 + x_2$ на множестве

$$X = \{x | x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\}: f(x) = x_1 + x_2 \to extr,\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

Рассчитать:
1. Записать обобщенную функцию Лагранжа.
2. Записать необходимые условия экстремума первого порядка;
а) условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x;
б) условие допустимости решения;
в) условие неотрицательности для условного минимума (не положительности для максимума);
г) условие дополняющей нежесткости.
3.Решить систему уравнений из п.2 и найти условно-стационарные точки для двух случаев ($\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$);
4. Проверить достаточные условия экстремума первого порядка.
5. При необходимости проверить необходимые и достаточные условия второго порядка.

Выводы:
1. Сделать выводы о характере условно-стационарных точек.

График. построить трехмерный график в виде поверхности и линии уровня (целевой функции и ограничения) и нанести условно-стационарные точки.

Исходная информация

$f(x) := x_0 + x_1$ - исходная функция

$g_1(x) := (x_0)^2 + (x_1)^2 - 1$ - функция ограничения-неравенства

Ход решения задачи

1. Обобщенная функция Лагранжа (x - вектор)

$$L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1) := \lambda_0 \cdot f(x) + \lambda_1 \cdot g_1(x)$$

Градиент обобщенной функции Лагранжа (x - вектор) в общем виде

$$Gr\_L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1) := \nabla_x L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1) \to \begin{pmatrix} \lambda_0 + 2 \cdot \lambda_1 \cdot x_0 \\ \lambda_0 + 2 \cdot \lambda_1 \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

2. Необходимые условия экстремума первого порядка (теория)

а) $\nabla_x L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1) = 0$ - целевая функция

б) $g_1(x) \le 0$ - ограничение

в) $\lambda_1 \ge 0$ (для минимумов), $\lambda_1 \le 0$ (для максимумов)

г) $\lambda_1 \cdot g_1(x) = 0$ - условие дополняющей нежесткости

Рис. Б 9. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.10 часть 1)

3. Найти условно-стационарных точек (используются необходимые условия первого порядка)

Решить систему уравнений п.2 для двух случаев: $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$.

3.1. Первый случай $\lambda_0 = 0$. Тогда из условия п.2 а) следует, что $x_0 = x_1 = 0$, чтобы $\lambda_1 \neq 0$. Однако при этом нарушается условие п.2 г) дополняющей нежесткости.

Вывод: условно-стационарных точек не выявлено

3.2. Второй случай $\lambda_0 \neq 0$**.** Поделим обобщенную функцию Лагранжа на λ_0 с заменой $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1 и получим классическую функцию Лагранжа.

Составить классическую функцию Лагранжа

$$L_{kl}(x,\lambda_1) := f(x) + \lambda_1 \cdot g_1(x)$$

Градиент классической функции Лагранжа (x - вектор)

$$Gr\_L_{kl}(x,\lambda_1) := \nabla_x L_{kl}(x,\lambda_1) \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot\lambda_1\cdot x_0 + 1 \\ 2\cdot\lambda_1\cdot x_1 + 1 \end{pmatrix}$$

Найти условно-стационарные точки. Использовать блок Given-Find. Решается система нелинейных уравнений.

Из условия дополнительной нежесткости $\lambda_1 \cdot g_1(x) = 0$ следует, что λ_1 может принимать два значения $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_1 \neq 0$

а) **Вариант 1** $\lambda_1 = 0$.

Условие а) п.2 не ваполняется, т.к. $\nabla_x L_{kl}(x,\lambda_1) \neq 0$.

Вывод: при $\lambda_1 = 0$ условно стационарных точек не выявлено

б) **Вариант** $\lambda_1 \neq 0$.Система имеет два решения, т.к. ограничение - полином второй степени.

б1) Рассмотрим случай, когда $\lambda_1 \leq 0$, т.е. ищем точку, которая может быть максимумом

Рис. Б 10. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.10 часть 2)

$x\_01 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 := 1$ - начальные приближения для поиска первой точки

Given $Gr\_L_{kl}(x\_01, \lambda_1) = 0$ $\lambda_1 \cdot g_1(x\_01) = 0$ $\lambda_1 \le 0$ $g_1(x\_01) \le 0$

$x\lambda := Find(x\_01, \lambda_1)$

$\lambda_{1\_1} := x\lambda_1$ $\lambda_{1\_1} = -0.707$ - коэффициент Лагранжа для найденной точки

$x12\_1 := x\lambda_0$ $x12\_1^T = (0.707 \;\; 0.707)$ - координаты условно-стационарной точки (т1)

Вывод: 1. При поиске со значением $\lambda_1 \le 0$ получаем точку (т1) с коэффициентом Лагранжа $\lambda_{1\_1} = -0.707$ и координатами точки $x12\_1^T = (0.707 \;\; 0.707)$, которая может быть максимумом. 2. Условие б) п.3 $g_1(x) = 0 \le 0$ выполняется. Следовательно выполняются небходимые условия первого порядка для максимума и точка т1 - условно-стационарная точка.

б2) Рассмотрим случай, когда $\lambda_1 \ge 0$, т.е. ищем точку, которая может быть минимумом

$x\_01 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 := 1$ - начальные приближения для поиска первой точки

Given $Gr\_L_{kl}(x\_01, \lambda_1) = 0$ $\lambda_1 \cdot g_1(x\_01) = 0$ $\lambda_1 \ge 0$ $g_1(x\_01) \le 0$

$x\lambda := Find(x\_01, \lambda_1)$

$\lambda_{1\_2} := x\lambda_1$ $\lambda_{1\_2} = 0.707$ - коэффициент Лагранжа для найденной точки

$x12\_2 := x\lambda_0$ $x12\_2^T = (-0.707 \;\; -0.707)$ - координаты условно-стационарной точки (т2)

Вывод: 1. При поиске минимума (используется ограничение $\lambda_1 \ge 0$) решение выходит на т2 с коэффициентом Лагранжа $\lambda_{1\_2} = 0.707$ и координатами точки $x12\_2^T = (-0.707 \;\; -0.707)$, которая может быть минимумом

2 Условие б) п.3 $g_1(x) = 0 \le 0$ выполняется. Следовательно выполняются небходимые условия первого порядка для минимума и точка т2 - условно-стационарная точка.

Рис. Б 11. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.10 часть 3)

4 Проверить достаточные условия первого порядка (число активных ограничений равно числу переменных в задаче, λ_1 или >0 (локальный минимум) или <0 (локальный максимум))

В **<u>точке т1</u>** $x12\_1^T = (0.707 \;\; 0.707)$ ограничение активно т.к. $g_1(x) = 0$, однако достаточные условия первого порядка неудовлетворяются, т.е. число активных ограничений $1 = 0 < n = 2$, где n-число неизвестных.

В **<u>точке т2</u>** $x12\_2^T = (-0.707 \;\; -0.707)$ ограничение активно т.к. $g_1(x) = 0$, однако достаточные условия первого порядка неудовлетворяются, т.к. число активных ограничений $1 = 1 < n =$, где n-число неизвестных.

<u>5. Проверить условия экстремума второго порядка</u>

$x := \begin{pmatrix} x0 \\ x1 \end{pmatrix}$ - вектор неизвестных $\quad dx := \begin{pmatrix} dx0 \\ dx1 \end{pmatrix}$ - вектор дифференциалов по переменным

5.1 Второй дифференциал классической функции Лагранжа

$$Dif2\_kl(x,dx,\lambda1) := \frac{d}{dx0}\frac{d}{dx0}L_{kl}(x,\lambda1)\cdot dx_0\cdot dx_0 \;\ldots$$
$$+\frac{d}{dx0}\left(\frac{d}{dx1}L_{kl}(x,\lambda1)\right)\cdot dx_0\cdot dx_1 \;\ldots$$
$$+\frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx0}L_{kl}(x,\lambda1)\right)\cdot dx_0\cdot dx_1 \;\ldots$$
$$+\frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx1}L_{kl}(x,\lambda1)\right)\cdot dx_1\cdot dx_1$$

Переменная (Dif2_Lob) для расчета второго дифференциала обобщенной функции Лагранжа (в общем виде, символьным способом)

Значение второго дифференциала классичекой функции Лагранжа в общем виде (символьное решение)

$$Dif2\_kl(x,dx,\lambda1) \rightarrow 2\cdot\lambda1\cdot dx0^2 + 2\cdot\lambda1\cdot dx1^2$$

5.2 Первый дифференциал ограничения.

$$Dif1\_G1(x,dx) := \frac{d}{dx0}g_1(x)\cdot dx0 + \frac{d}{dx1}g_1($$
- функция для расчета первого дифференциала ограничения ($g_1(x)$)

Значение первого дифференциала ограничения в общем виде (символьное решение)

$$Dif1\_G1(x,dx) \rightarrow 2\cdot dx0\cdot x0 + 2\cdot dx1\cdot x1$$

Рис. Б 12. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.10 часть 4)

Исследовать условно стационарную точку т1

Выразить dx0 через dx1 и поставить во второй дифференциал
Решить уровнение первого диф.ограничения относительно dx0 в условно стационарной точке

$$\mathrm{Dif1\_G1}(x, dx)\ \mathrm{solve}, dx0 \rightarrow -\frac{dx1 \cdot x1}{x0}$$

Произвести замену переменных $dx0 = -\frac{dx1 \cdot x1}{x0}$ во втором диф.функ.Лагранжа

$\lambda 1 := \lambda_{1\_1} = -0.707$ $\quad x0 := x12\_1_0 = 0.707$ $\quad x1 := x12\_1_1 = 0.707$

$$\mathrm{Dif2\_kl}(x, dx, \lambda 1)\ \mathrm{substitute}, dx0 = -\frac{dx1 \cdot x1}{x0} \rightarrow -2.8284271247461902 8 \cdot dx1^2$$

При $dx1 \neq 0$ второй дифференциал кл.ф.Лагранжа $\mathrm{Dif2\_kl}(x, dx, \lambda 1) < 0$ всегда.

Вывод:

1. Точка $x12\_1^T = (0.707 \quad 0.707)$ является **точкой регулярного локального условного максимума,**
2. Значение функции в точке локального условного максимума $f(x12\_1) = 1.414$,
3. Функция $f(x)$ и множество X (ограничения) выпуклые, поэтому в т.1 достигается глобальный условный максимум.

Доказательства п.3 выводов. Дополнительные исследования первой точки (т.1)

Задача поиска максимума функции сводится к задачи поиска минимума путем замены знака перед функцией -f(x)

$f1(x) := -f(x)$ - исследуемая функция

Рассчет матрицы Гессе

$x := \begin{pmatrix} x0 \\ x1 \end{pmatrix}$ - вектор неизвестных переменных

Рис. Б 13. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.10 часть 5)

$$H(x) := \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx0^2} f1(x) & \frac{d}{dx0}\left(\frac{d}{dx1} f1(x)\right) \\ \frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx0} f1(x)\right) & \frac{d^2}{dx1^2} f1(x) \end{bmatrix}$$ - функция, для расчета элементов матрицы Гессе

$$H(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ - символьное вычисление матрицы Гессе в общем виде

Вывод: Матрица Гессе выпуклая, так как $H(x) \geq 0$. Следовательно, точка т.1 является точкой условного глобального максимума.

Исследовать условно-стационарную точку т2

Выразить dx0 через dx1 и поставить во второй дифференциал кл.ф.Лагранжа

Решить уровнение первого диф.ограничения относительно dx0 в условно-стационарной точке. Скопировать символьное выражения для дифференциала из п.5.2

$x0 := x12\_2_0 = -0.707$ $\quad\quad$ $x1 := x12\_2_1 = -0.707$

$$2 \cdot dx0 \cdot x0 + 2 \cdot dx1 \cdot x1 = 0 \text{ solve}, dx0 \rightarrow -1.0 \cdot dx1$$

Произвести замену переменных $dx0 = -dx1$ во втором диф.функ.Лагранжа (**скопировать символьное выражение из п.5.1**)

$$\lambda 1 := \lambda_{1\_2} = 0.707$$

$$2 \cdot \lambda 1 \cdot dx0^2 + 2 \cdot \lambda 1 \cdot dx1^2 \text{ substitute}, dx0 = -dx1 \rightarrow 2.8284271247461902 8 \cdot dx1^2$$

При $dx1 \neq 0$ второй дифференциал кл.ф.Лагранжа $Dif2\_kl(x, dx, \lambda 1) > 0$ всегда.

Вывод:

1. точка $x12\_2^T = (-0.707 \quad -0.707)$ является **точкой регулярного локального условного минимума,**
2. значение функции в точке локального условного минимума $f(x12\_1) = 1.414$,
3. Функция $f(x)$ и множество X (ограничения) выпуклые, поэтому в т.2 достигается глобальный условный минимум (доказать с использованием матрицы Гессе самостоятельно).

Рис. Б 14. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.10 часть 6)

6. Построение графиков и точек локального минимума

Построить трехмерный график в виде контурных линий в диапазоне значений -2<x<2, -2<y<2, с шагом 0.1, нанести расчетные точки экстремума, отредактировать график как показано ниже.

Расчет исходной матрицы для постоения графика функции, используя дискретный аргумент.

$F(x,y) := x + y$ - функция для построения графика

Диапазон расчета и шаг расчета

$x_{min} := -2 \quad x_{max} := 2 \quad y_{min} := -2 \quad y_{max} := 2 \quad \Delta x := 0.1 \quad \Delta y := 0.1$

$Ni := \dfrac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x} \qquad Nj := \dfrac{y_{max} - y_{min}}{\Delta y}$ - кол. точек расчета

$i := 0..Ni \qquad j := 0..Nj$ - дискретный аргумент

Расчет матриц для построения поверхности целевой функции

$x1_{i,j} := x_{min} + \Delta x \cdot i \qquad y1_{i,j} := y_{min} + \Delta y \cdot j \qquad M := \overrightarrow{F(x1,y1)}$

Расчет координат точки локального условного минимума (красная точка) для нанесения на график

$X12_0 := x12\_1_0$ значение x-составляющей

$Y12_0 := x12\_1_1$ значение y-составляющей

$Z12_0 := f(x12\_1)$ значение z-составляющей $\qquad Z12 = (1.414)$

Расчет координат точки т2 (точка в виде креста) для нанесения на график

$X12\_1_0 := x12\_2_0$ значение x-составляющей

$Y12\_1_0 := x12\_2_1$ значение y-составляющей

$Z12\_1_0 := f(x12\_2)$ значение z-составляющей $\qquad Z12\_1 = (-1.414)$

Расчет исходной матрицы для постоения графика ограничения используя дискретный аргумент.

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ - ограничение в виде вертикальной плоскости

$R := 1$ - радиус цилиндра (ограничения)

Диапазон расчета и шаг расчета

$x1_{min} := -4 \quad x1_{max} := 4 \quad \Delta x1 := 0.1 \quad z1_{min} := -5 \quad \Delta z1 := 0.1$

$Ni1 := \dfrac{x1_{max} - x1_{min}}{\Delta x1}$ - кол. точек расчета $\qquad Ni1 = 80$

$i1 := 0..Ni1 \qquad j1 := 0..Ni1$ дискретный аргумент

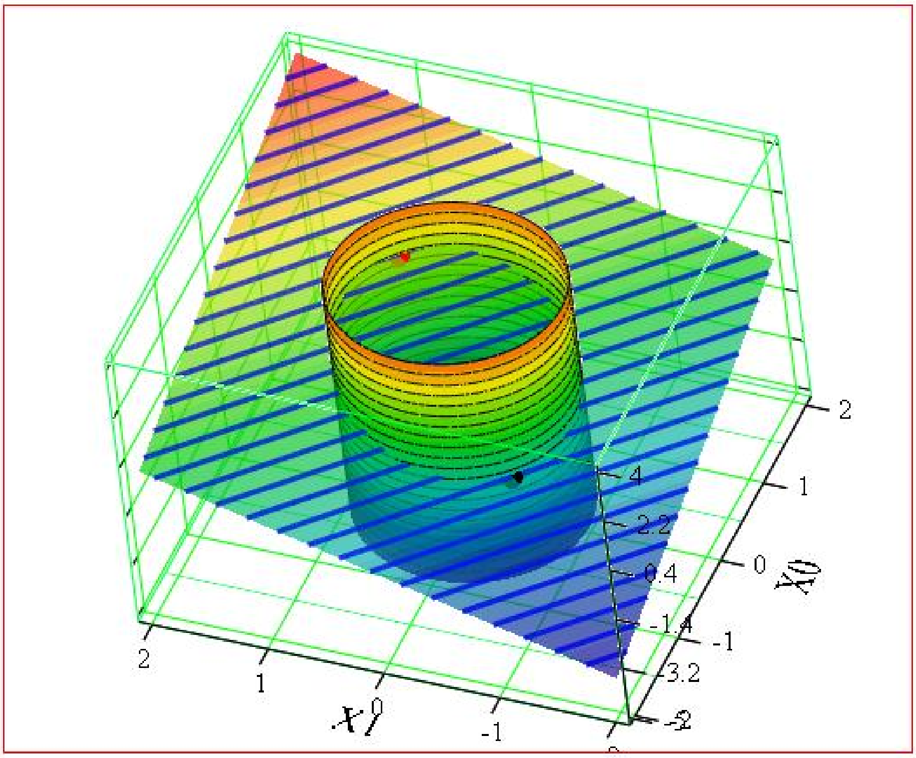
Рассчет матриц для построения поверхности ограничения

$x2_{i1,j1} := R \cdot \cos\left(\dfrac{2 \cdot \pi \cdot i1}{Ni1}\right) \qquad y2_{i1,j1} := R \cdot \sin\left(\dfrac{2 \cdot \pi \cdot i1}{Ni1}\right)$

$G_{i1,j1} := z1_{min} + \Delta z1 \cdot j1$

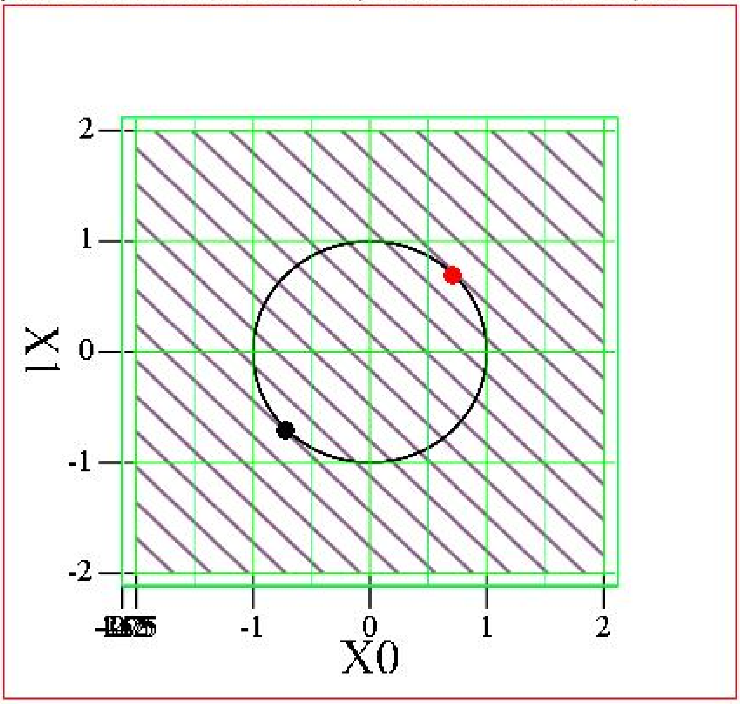
Рис. Б 15. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.10 часть 7)

Построить трехмерный график в виде поверхности, отобразить плоскоть ограничения и нанести точку локального минимума



$\left(x_1, y_1, M\right), (X12, Y12, Z12), \left(x_2, y_2, G\right), (X12\_1, Y12\_1, Z12\_1)$

Построить трехмерный график в виде линий уровня, отобразить плоскоть ограничения и нанести точку локального минимума



$\left(x_1, y_1, M\right), (X12, Y12, Z12), \left(x_2, y_2, G\right), (X12\_1, Y12\_1, Z12\_1)$

Рис. Б 16. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.10 часть 8)

Задача №1.11: Найти экстремум функцию $f(x)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2$ на множестве

$$X=\{x|x_1^2+x_2^2-52\le 0\}: f(x)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2\to extr,\ g_1(x)=x_1^2+x_2^2-52\le 0$$

Рассчитать:

1. Записать обобщенную функцию Лагранжа.
2. Записать необходимые условия экстремума первого порядка;

а) условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x;
б) условие допустимости решения;
в) условие неотрицательности для условного минимума (не положительности для максимума);
г) условие дополняющей нежесткости.

3.Решить систему уравнений из п.2 и найти условно-стационарные точки для двух случаев ($\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$);

4. Проверить достаточные условия экстремума первого порядка.
5. При необходимости проверить необходимые и достаточные условия второго порядка.

Выводы:

1. Сделать выводы о характере условно-стационарных точек.

График. построить трехмерный график в виде поверхности и линии уровня (целевой функции и ограничения) и нанести условно-стационарные точки.

Исходная информация

$f(x) := (x_0-2)^2+(x_1-3)^2$ - целевая функция

$g_1(x) := (x_0)^2+(x_1)^2-52$ - функция ограничения-неравенства

Ход решения задачи

1. Обобщенная функция Лагранжа (x - вектор)

$$L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1) := \lambda_0\cdot f(x)+\lambda_1\cdot g_1(x)$$

Градиент обобщенной функции Лагранжа (x - вектор). Символьное решение.

$$Gr\_L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1) := \nabla_x L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1) \to \begin{bmatrix} \lambda_0\cdot(2\cdot x_0-4)+2\cdot\lambda_1\cdot x_0 \\ \lambda_0\cdot(2\cdot x_1-6)+2\cdot\lambda_1\cdot x_1 \end{bmatrix}$$

Рис. Б 17. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.11 часть 1)

2. Необходимые условия экстремума первого порядка (теория)

а) $\nabla_x L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1) = 0$ - целевая функция

б) $g_1(x) \le 0$ -ограничение

в) $\lambda_1 \ge 0$ (для минимумов), $\lambda_1 \le 0$ (для максимумов)

г) $\lambda_1 \cdot g_1(x) = 0$ - условие дополняющей нежесткости

3. Найти условно-стационарных точек (используются необходимые условия первого порядка)

Решить систему уравнений п.2 для двух случаев: $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \ne 0$.

3.1. Первый случай $\lambda_0 = 0$. Тогда из условия п.2 а) следует, что $x_0 = x_1 = 0$, чтобы $\lambda_1 \ne 0$. Однако при этом нарушается условие г) п.2 дополняющей нежесткости.

Вывод: условно-стационарных точек не выявлено

3.2. Второй случай $\lambda_0 \ne 0$**.** Поделим обобщенную функцию Лагранжа на λ_0 с заменой $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1 и получим классическую функцию Лагранжа.

Составить классическую функцию Лагранжа

$$L_{kl}(x, \lambda_1) := f(x) + \lambda_1 \cdot g_1(x)$$

Градиент классической функции Лагранжа (x - вектор)

$$Gr\_L_{kl}(x, \lambda_1) := \nabla_x L_{kl}(x, \lambda_1) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot \lambda_1 \cdot x_0 + 2 \cdot x_0 - 4 \\ 2 \cdot \lambda_1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_1 - 6 \end{pmatrix}$$

Найти условно-стационарные точки. Использовать блок Given-Find. Решается система нелинейных уравнений.

Из условия дополнительной нежесткости $\lambda_1 \cdot g_1(x) = 0$ следует, что λ_1 может принимать два значения $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_1 \ne 0$

Рис. Б 18. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.11 часть 2)

а) **Рассмотрим вариант** $\lambda_1 = 0$ (фактически решается задача поиска безусловного экстремума).

$x\_01 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 := 0$ - начальные приближения для поиска первой точки

Given $Gr\_L_{kl}(x\_01, \lambda_1) = 0$ $\lambda_1 \cdot g_1(x\_01) = 0$ $\lambda_1 = 0$ $g_1(x\_01) \le 0$

$x\lambda := Find(x\_01, \lambda_1)$

$\lambda_{1\_1} := x\lambda_1$ $\lambda_{1\_1} = 0$ - коэффициент Лагранжа для найденной точки

$x12\_1 := x\lambda_0$ $x12\_1^T = (2 \quad 3)$ - координаты условно-стационарной точки (т1)

__Вывод:__ 1. При поиске со значением $\lambda_1 = 0$ получаем точку (т1) с коэффициентом Лагранжа $\lambda_{1\_1} = 0$ и координатами точки $x12\_1^T = (2 \quad 3)$, которая может быть и минимумом или максимумом.
2. Условие б) п.3 $g_1(x) = -21 \le 0$ выполняется. Следовательно выполняются небходимые условия первого порядка как для минимума, так и для максимума и точка т1 - условно-стационарная точка.

б) **Рассмотрим вариант** $\lambda_1 \ne 0$.Тогда условие дополняющей нежесткости примет вид $(x_0)^2 + (x_1)^2 - 52 = 0$. Система имеет два решения, т.к. ограничение - полином второй степени.

б1) Рассмотрим случай, когда $\lambda_1 \le 0$, т.е. ищем точку, которая может быть минимумом

$x\_01 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 := -1$ - начальные приближения для поиска второй точки

Given $Gr\_L_{kl}(x\_01, \lambda_1) = 0$ $\lambda_1 \cdot g_1(x\_01) = 0$ $\lambda_1 \le 0$ $g_1(x\_01) \le 0$

$x\lambda := Find(x\_01, \lambda_1)$

$\lambda_{1\_2} := x\lambda_1$ $\lambda_{1\_2} = -0.5$ -коэффициент Лагранжа для найденной точки

$x12\_2 := x\lambda_0$ $x12\_2^T = (4 \quad 6)$ -координаты условно-стационарной точки (т2)

Рис. Б 19. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.11 часть 3)

Вывод: 1. При поиске со значением $\lambda_1 \leq 0$ получаем точку (т2) с коэффициентом Лагранжа $\lambda_{1\_2} = -0.5$ и координатами точки

$x12\_2^T = (4 \quad 6)$, которая может быть максимумом.

2. Условие б) п.3 $g_1(x) = 0 \leq 0$ выполняется. Следовательно выполняются небходимые условия первого порядка для максимума и точка т1 - условно-стационарная точка.

б2) Рассмотрим случай, когда $\lambda_1 \leq 0$, т.е. ищем еще одну точку, которая может быть максимумом

$x\_01 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 := -1$ - начальные приближения для поиска третьей точки

Given $Gr\_L_{kl}(x\_01, \lambda_1) = 0$ $\lambda_1 \cdot g_1(x\_01) = 0$ $\lambda_1 \leq 0$ $g_1(x\_01) \leq 0$

$x\lambda := Find(x\_01, \lambda_1)$

$\lambda_{1\_3} := x\lambda_1$ $\lambda_{1\_3} = -1.5$ - коэффициент Лагранжа для найденной точки

$x12\_3 := x\lambda_0$ $x12\_3^T = (-4 \quad -6)$ - координаты условно-стационарной точки (т3)

Вывод: 1. При поиске максимум (используется ограничение $\lambda_1 \leq 0$) решение выходит на т3 с коэффициентом Лагранжа $\lambda_{1\_3} = -1.5$ и координатами точки $x12\_3^T = (-4 \quad -6)$, которая может быть максимумом.

2 Условие б) п.3 $g_1(x) = 0 \leq 0$ выполняется. Следовательно выполняются небходимые условия первого порядка для максимума и точка т3 - условно стационарная точка.

б3) Для случай, когда $\lambda_1 \geq 0$, не найдена условно-стационарная точка, которая может быть минимумом. Проверить самостоятельно.

4.4. Достаточные условия первого порядка (число активных ограничений равно числу переменных в задаче, λ_1 или >0 (локальный минимум) или <0 (локальный максимум))

В **точке т1** $x12\_1^T = (2 \quad 3)$ ограничение не активно т.к. $g_1(x) = -39 < 0$, достаточные условия первого порядка неудовлетворяются.

Рис. Б 20. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.11 часть 4)

В **точке т2** $x12\_2^T = (4 \;\; 6)$ ограничение активно т.к. $g_1(x) = 0$, однако достаточные условия первого порядка неудовлетворяются, т.к. число активных ограничений $l = 0 < n = 2$, где n-число неизвестных.

В **точке т3** $x12\_3^T = (-4 \;\; -6)$ ограничение активно т.к. $g_1(x) = 0$, однако достаточные условия первого порядка неудовлетворяются, т.к. число активных ограничений $l = 1 < n = 2$, где n-число неизвестных

Кроме того функция $-f(x) = -(x_1-2)^2 - (x_2-3)^2$

не является выпуклой, то необходимые условия первого порядка не являются достаточными

5. Проверить достаточные условия экстремума второго порядка

$x := \begin{pmatrix} x0 \\ x1 \end{pmatrix}$ - вектор неизвестных $\quad dx := \begin{pmatrix} dx0 \\ dx1 \end{pmatrix}$ - вектор дифференциалов по переменным

5.1 Второй дифференциал классической функции Лагранжа

$$\begin{aligned} Dif2\_kl(x,dx,\lambda1) := & \frac{d}{dx0}\frac{d}{dx0}L_{kl}(x,\lambda1)\cdot dx_0\cdot dx_0 \ldots \\ & + \frac{d}{dx0}\left(\frac{d}{dx1}L_{kl}(x,\lambda1)\right)\cdot dx_0\cdot dx_1 \ldots \\ & + \frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx0}L_{kl}(x,\lambda1)\right)\cdot dx_0\cdot dx_1 \ldots \\ & + \frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx1}L_{kl}(x,\lambda1)\right)\cdot dx_1\cdot dx_1 \end{aligned}$$

- функция для расчета второго дифференциала обобщенной функции Лагранжа.

Значение второго дифференциала классичекой функции Лагранжа в общем виде(символьное решение)

$$Dif2\_kl(x,dx,\lambda1) \rightarrow (2\cdot\lambda1 + 2)\cdot dx0^2 + (2\cdot\lambda1 + 2)\cdot dx1^2$$

5.2 Первый дифференциал ограничения.

$$Dif1\_G1(x,dx) := \frac{d}{dx0}g_1(x)\cdot dx0 + \frac{d}{dx1}g_1(x)\cdot dx1$$

переменная (G1) для расчета первого дифференциала ограничения ($g_1(x)$)

Значение первого дифференциала ограничения в общем виде (символьное решение)

$$Dif1\_G1(x,dx) \rightarrow 2\cdot dx0\cdot x0 + 2\cdot dx1\cdot x1$$

Рис. Б 21. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.11 часть 5)

Исследовать условно-стационарную точку т1

Выразить dx0 через dx1 и поставить во второй дифференциал кл.ф.Лагранжа

Решить уровнение первого диф.ограничения относительно dx0 в условно-стационарной точке. **Скопировать символьное выражение первого дифференциала ограничения.**

$x0 := x12\_1_0 = 2 \qquad x1 := x12\_1_1 = 3$

$$2\cdot dx0\cdot x0 + 2\cdot dx1\cdot x1 \text{ solve}, dx0 \rightarrow -\frac{3\cdot dx1}{2}$$

Произвести замену переменных $dx0 = -\frac{3\cdot dx1}{2}$ во втором

диф.функ.Лагранжа (**скопировать символьное выражение из п.5.1**)

$\lambda 1 := 0$ скопировать значение из переменной $\lambda_{1\ 1}$ а) п.4.3

$$(2\cdot\lambda 1 + 2)\cdot dx0^2 + (2\cdot\lambda 1 + 2)\cdot dx1^2 \text{ substitute}, dx0 = -\frac{3\cdot dx1}{2} \rightarrow \frac{13\cdot dx1^2}{2}$$

При $dx1 \neq 0$ второй дифференциал кл.ф.Лагранжа $Dif2\_kl(x, dx, \lambda 1) > 0$

Вывод:

1. Точка $x12\_1^T = (2 \quad 3)$ является **точкой локального условного минимума,**
2. значение функции в точке локального условного максимума $f(x12\_1) = 0$,
3. Функция $f(x)$ и множество X (ограничения) выпуклые, поэтому в т.1 достигается глобальный условный минимум (доказать с использованием матрицы Гессе самостоятельно).

Исследовать условно-стационарную точку т2

Выразить dx0 через dx1 и поставить во второй дифференциал кл.ф.Лагранжа

Решить уровнение первого диф.ограничения относительно dx0 в условно-стационарной точке. **Скопировать символьное выражение первого дифференциала ограничения.**

$x20 := x12\_2_0 = 4 \qquad x21 := x12\_2_1 = 6$

$$2\cdot dx0\cdot x20 + 2\cdot dx1\cdot x21 \text{ solve}, dx0 \rightarrow -\frac{3\cdot dx1}{2}$$

Произвести замену переменных $dx0 = -\frac{3\cdot dx1}{2}$ во втором

диф.функ.Лагранжа (**скопировать символьное выражение из п.5.1**)

$\lambda 21 := \lambda_{1\ 2} = -0.5$

$$(2\cdot\lambda 21 + 2)\cdot dx0^2 + (2\cdot\lambda 21 + 2)\cdot dx1^2 \text{ substitute}, dx0 = -\frac{3\cdot dx1}{2} \rightarrow 3.25\cdot dx1^2$$

Рис. Б 22. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.11 часть 6)

При $dx1 \neq 0$ второй дифференциал кл.ф.Лагранжа $Dif2\_kl(x, dx, \lambda 1) > 0$ всегда, $\lambda 1 = -0.5 < 0.$, таким образом достаточные условия максимума не выполняются. Так как $Dif2\_kl(x, dx, \lambda 1) \geq 0$ всегда то и необходимые условия не выполняются.

Вывод:

1. Точка $x12\_2^T = (4 \;\; 6)$ **не является** **точкой локального условного экстремума**
2. Значение функции в точке $f(x12\_2) = 13$,

Исследовать условно-стационарную точку т3

Выразить $dx0$ через $dx1$ и поставить во второй дифференциал кл.ф.Лагранжа

Решить уравнение первого диф.ограничения относительно $dx0$ в условно-стационарной точке. **Скопировать символьное выражение первого дифференциала ограничения.**

$x30 := x12\_3_0 = -4 \qquad x31 := x12\_3_1 = -6$

$$2 \cdot dx0 \cdot x0 + 2 \cdot dx1 \cdot x1 \text{ solve}, dx0 \;\rightarrow -\frac{3 \cdot dx1}{2}$$

Произвести замену переменных $dx0 = -\dfrac{3 \cdot dx1}{2}$ во втором диф.функ.Лагранжа

(**скопировать символьное выражение из п.5.1**)

$\lambda 31 := \lambda_{1\;3} = -1.5$

$$(2 \cdot \lambda 31 + 2) \cdot dx0^2 + (2 \cdot \lambda 31 + 2) \cdot dx1^2 \text{ substitute}, dx0 = -\frac{3 \cdot dx1}{2} \;\rightarrow -3.25 \cdot dx1^2$$

При $dx1 \neq 0$ второй дифференциал кл.ф.Лагранжа $Dif2\_kl(x, dx, \lambda 1) < 0$ всегда.

Вывод:

1. В точке $x12\_3^T = (-4 \;\; -6)$ достаточные условия максимума выполняются и точка является **точкой локального условного максимума,**
2. Значение функции в точке локального условного минимума $f(x12\_3) = 117$

Рис. Б 23. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.11 часть 7)

6. Построение графиков и точек локального минимума

Построить трехмерный графики исследуемой функции и ограничения в виде контурных линий в диапазоне значений -10<x<10, -10<y<10, с шагом 0.1, нанести расчетные точки минимума и максимума, отредактировать график как показано ниже.

Расчет исходной матрицы для постоения графика функции, используя дискретный аргумент.

$F(x,y) := (x-2)^2 + (y-3)^2$ - исследуемая функция для построения графика

Диапазон расчета и шаг расчета

$x_{min} := -10 \quad x_{max} := 10 \quad y_{min} := -10 \quad y_{max} := 10 \quad \Delta x := 0.1 \quad \Delta y := 0.1$

$Ni := \dfrac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x} \qquad Nj := \dfrac{y_{max} - y_{min}}{\Delta y}$ - кол. точек расчета

$i := 0..Ni \quad j := 0..Nj \quad Nj = 200$ - дискретный аргумент

Расчет матриц для построения поверхности целевой функции

$x1_{i,j} := x_{min} + \Delta x \cdot i \qquad y1_{i,j} := y_{min} + \Delta y \cdot j \quad M_{i,j} := \left(x1_{i,j} - 2\right)^2 + \left(y1_{i,j} - 3\right)^2$

Расчет координат точек (т1 и т3) локального условного минимума и максимума (красные точка) для нанесения на график

$X12 := \begin{pmatrix} x12\_1_0 \\ x12\_3_0 \end{pmatrix} \quad X12 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ - значение x-составляющих точек экстремума

$Y12 := \begin{pmatrix} x12\_1_1 \\ x12\_3_1 \end{pmatrix} \quad Y12 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ - значение y-составляющих точек экстремума

$Z12 := \begin{pmatrix} f(x12\_1) \\ f(x12\_3) \end{pmatrix} \quad Z12 = \begin{pmatrix} 0 \\ 117 \end{pmatrix}$ - значение y-составляющих точек экстремума

Рис. Б 24. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.11 часть 8)

Расчет координат условно-стационарной точки (т2), которая не является точкой экстремума (черный крест) для нанесения на график

$X\_12_0 := x12\_2_0$ $\quad X\_12 = (4)$ - значение x-составляющих условно-стационарной точки

$Y\_12_0 := x12\_2_1$ $\quad Y\_12 = (6)$ - значение y-составляющих условно-стационарной точки

$Z\_12_0 := f(x12\_2)$ $\quad Z\_12 = (13)$ - значение z-составляющих условно-стационарной точки

Расчет исходной матрицы для постоения графика ограничения используя дискретный аргумент.

$(y)^2 + (x)^2 = 52$ - функция ограничения для построения графика

$R_1 := \sqrt{52}$ - радиус цилиндра (ограничения)

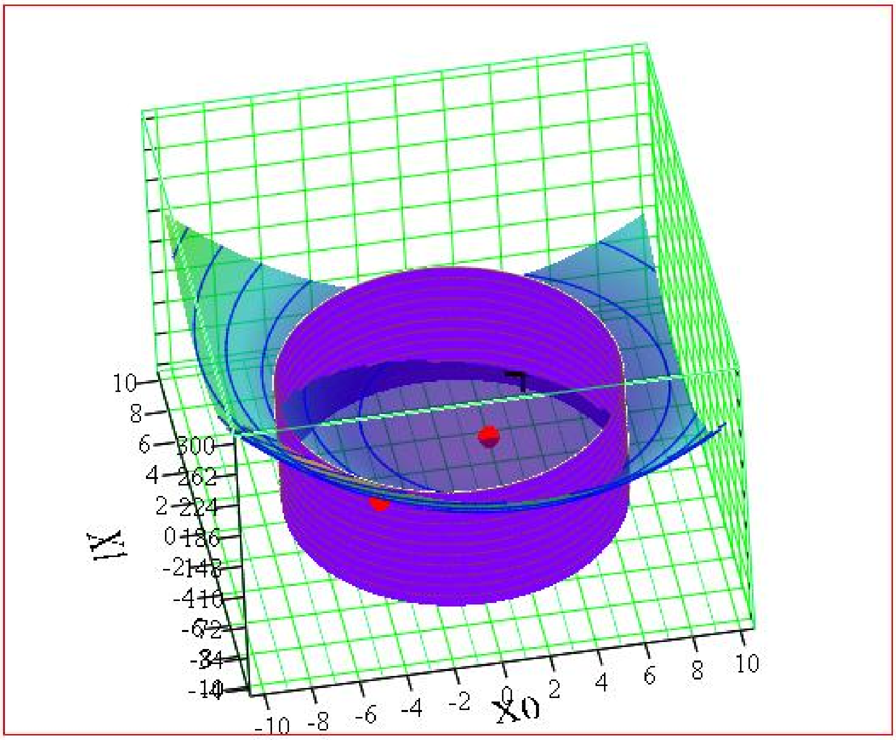
$x1_{min} := -10 \quad x1_{max} := 10 \quad \Delta x1 := 0.1 \quad z1_{min} := -5 \quad \Delta z1 := 0.7$

$Ni1 := \dfrac{x1_{max} - x1_{min}}{\Delta x1}$ кол. точек расчета $\quad Ni1 = 200$

$i1 := 0..Ni1 \qquad j1 := 0..Ni1$

$x2_{i1,j1} := R_1 \cdot \cos\left(\dfrac{2\cdot\pi\cdot i1}{Ni1}\right) \quad y2_{i1,j1} := R_1 \cdot \sin\left(\dfrac{2\cdot\pi\cdot i1}{Ni1}\right) \quad G_{i1,j1} := z1_{min} + \Delta z1 \cdot j1$

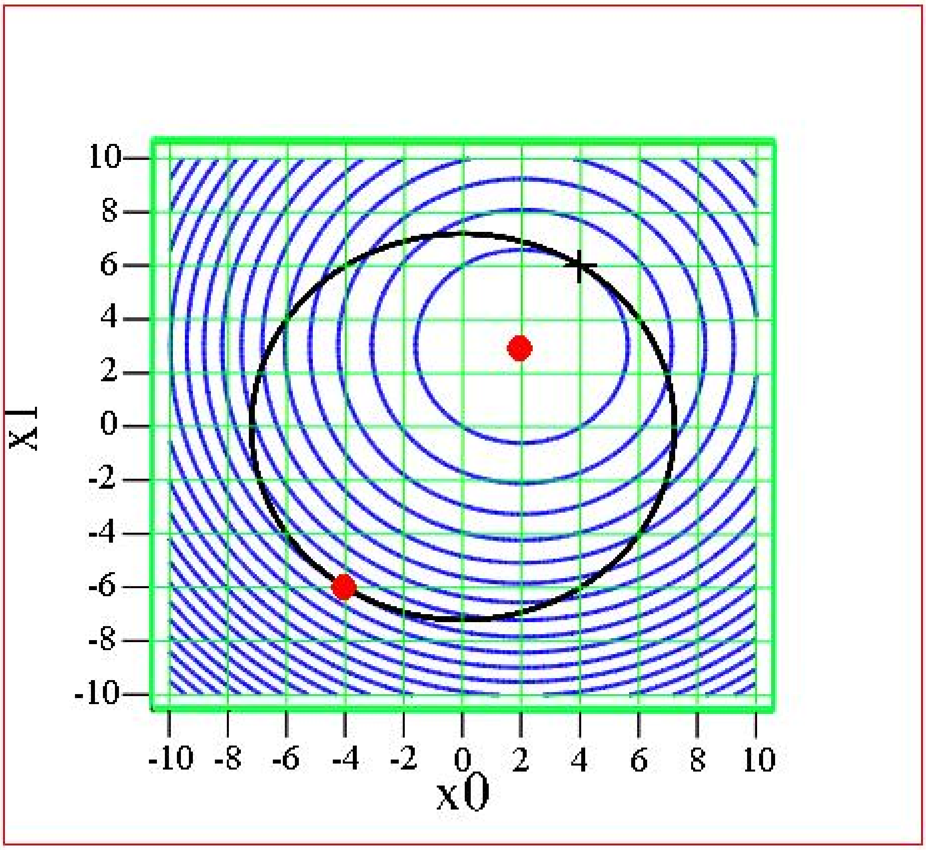
Построить трехмерный график в виде поверхности, отобразить плоскоть ограничения и нанести точку локального минимума



$(x_1, y_1, M), (X12, Y12, Z12), (x_2, y_2, G), (X\_12, Y\_12, Z\_12)$

Рис. Б 25. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств (Пример 1.11 часть 9)

Построить трехмерный график в виде линий уровня отобразить плоскоть ограничения и нанести точку локального минимума



$(x_1, y_1, M), (X12, Y12, Z12), (x_2, y_2, G), (X\_12, Y\_12, Z\_12)$

Рис. Б 26. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в виде неравенств
(Пример 1.11 часть 10)

ПРИЛОЖЕНИЕ В. ЛИСТИНГИ ПРИМЕРОВ В MATHCAD15. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ. ОГРАНИЧЕНИЕ В СМЕШАННОМ ВИДЕ

Задача №1.12 : Найти экстремум функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ на множестве

$$X = \{x | x_1 + x_2 - 2 \le 0,\ x_1 - 1 = 0\}: f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to extr,\ g_1(x) = x_1 - 1 = 0,\ g_2(x) = x_1 + x_2 - 2 \le 0$$

Рассчитать:

1. Записать обобщенную функцию Лагранжа.
2. Записать необходимые условия экстремума первого порядка;

а) условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x;

б) условие допустимости решения;

в) условие неотрицательности для условного минимума (не положительности для максимума);

г) условие дополняющей нежесткости.

3. Решить систему уравнений из п.2 и найти условно-стационарные точки для двух случаев ($\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \ne 0$);
4. Проверить достаточные условия экстремума первого порядка.
5. При необходимости проверить необходимые и достаточные условия второго порядка.

Выводы:

1. Сделать выводы о характере условно-стационарных точек.

График. построить трехмерный график в виде поверхности и линии уровня (целевой функции и ограничения) и нанести условно-стационарные точки.

Исходная информация

$f(x) := (x_0)^2 + (x_1)^2$ - целевая функция

$g_1(x) := x_0 - 1$ - функция ограничение в виде равенства

$g_2(x) := x_0 + x_1 - 2$ - функция ограничение в виде неравенства

Ход решения задачи

1. Обобщенная функция Лагранжа (x - вектор)

$$L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) := \lambda_0 \cdot f(x) + \lambda_1 \cdot g_1(x) + \lambda_2 \cdot g_2(x)$$

Градиент обобщенной функции Лагранжа (x - вектор)

$$Gr\_L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) := \nabla_x L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \to \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2 \cdot \lambda_0 \cdot x_0 \\ \lambda_2 + 2 \cdot \lambda_0 \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

Рис. В 1. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.12 часть 1)

2. Необходимые условия экстремума первого порядка (теория)

а) $\nabla_x L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1) = 0$ - условие стационарности обобщенной функции Лагранжа

б) $g_1(x) = 0$ $g_2(x) \le 0$ - условия допустимости решения

в) $\lambda_1 \ge 0$ (условие не отрицательности для минимумов), $\lambda_1 \le 0$ (условие неположительности для максимумов)

г) $\lambda_2 \cdot g_2(x) = 0$ - условие дополняющей нежесткости

3. Найти условно-стационарные точки (используются необходимые условия первого порядка)

Решить систему уравнений п.2 для двух случаев: $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \ne 0$.

3.1. Случай 1 ($\lambda_0 = 0$). Тогда из условия а) п.2 следует, что $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 0$. Однако все множетели Лагранжа одновременно не могут равняться нулю.

3.2. Случай 2 ($\lambda_0 \ne 0$). Поделим обобщенную функцию Лагранжа на λ_0 с заменой $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1 и получим классическую функцию Лагранжа.

Составить классическую функцию Лагранжа

$$L_{kl}(x, \lambda_1, \lambda_2) := f(x) + \lambda_1 \cdot g_1(x) + \lambda_2 \cdot g_2(x)$$

Градиент классической функции Лагранжа (x - вектор)

$$Gr\_L_{kl}(x, \lambda_1, \lambda_2) := \nabla_x L_{kl}(x, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2 \cdot x_0 \\ \lambda_2 + 2 \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

Найти условно-стационарные точки, используя блок Given-Find. Решается система нелинейных уравнений.

Из условия дополнительной нежесткости $\lambda_1 \cdot g_1(x) = 0$ следует, что λ_2 может иметь два значения $\lambda_2 = 0$ и $\lambda_2 \ne 0$

а) Рассмотрим вариант $\lambda_2 = 0$

$x\_01 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 := 0$ $\lambda_2 := 0$ - начальные приближения для поиска первой точки

Given

$Gr\_L_{kl}(x\_01, \lambda_1, \lambda_2) = 0$ $\lambda_2 \cdot g_2(x\_01) = 0$ $g_2(x\_01) \le 0$ $\lambda_2 = 0$

$g_1(x\_01) = 0$ $x\lambda := Find(x\_01, \lambda_1, \lambda_2)$

Рис. В 2. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.12 часть 2)

$\lambda_{1\_1} := x\lambda_1 \quad \lambda_{1\_1} = -2$ - коэффициент λ_1 Лагранжа для первой точки

$\lambda_{1\_2} := x\lambda_2 \quad \lambda_{1\_2} = 0$ - коэффициент λ_2 Лагранжа для первой точки

$x12\_1 := x\lambda_0 \quad x12\_1^T = (1 \;\; 0)$ - координаты первой условно-стационарной точки т.1

<u>Вывод:</u> 1 Первая точка (т1) имеет коэффициенты Лагранжа $\lambda_{1\_1} = -2$ и $\lambda_{1\_2} = 0$, координаты точки $x12\_1^T = (1 \;\; 0)$. Условие б) п.3 $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = -1 \le 0$ выполняется. Следовательно выполняются небходимые условия первого порядка как для минимума, так и для максимума. Точка т1 - условно-стационарная точка.

б) Рассмотрим вариант $\lambda_2 \neq 0$.

$x\_01 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 := 0 \qquad \lambda_2 := 0$ - начальные приближения для поиска первой точки

Given

$Gr\_L_{kl}(x\_01, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \qquad \lambda_2 \cdot g_2(x\_01) = 0 \qquad g_2(x\_01) \le 0 \qquad \lambda_2 \neq 0$

$g_1(x\_01) = 0 \qquad x\lambda := Find(x\_01, \lambda_1, \lambda_2)$

$\lambda_{1\_1} := x\lambda_1 \quad \lambda_{1\_1} = 0$ - коэффициент λ_1 Лагранжа для второй точки

$\lambda_{1\_2} := x\lambda_2 \quad \lambda_{1\_2} = -2$ - коэффициент λ_2 Лагранжа для второй точки

$x12\_2 := x\lambda_0 \quad x12\_2^T = (1 \;\; 1)$ - координаты второй условно-стационарной точки

<u>Вывод:</u>

1вторая точка (т2) с коэффициентами Лагранжа $\lambda_{1\_1} = 0$ и $\lambda_{1\_2} = -2$, с координатами точки $x12\_2^T = (1 \;\; 1)$. Условие б) п.3 $g_1(x) = 0 \le 0$ и $\lambda_{1\_2} < 0$ выполняется. Следовательно выполняются небходимые условия первого порядка для максимума и точка т2 - условно-стационарная точка.

3.3. Достаточные условия первого порядка (число активных ограничений равно числу переменных в задаче)

В **<u>точке т1</u>** $x12\_1^T = (1 \;\; 0)$ ограничение пассивно, т.к. $g_2(x) = -1 \neq 0$, поэтому достаточные условия первого порядка неудовлетворяются, т.е. число активных ограничений $l = 1 < n = 2$, где n-число неизвестных.

В **<u>точке т2</u>** $x12\_2^T = (1 \;\; 1)$ ограничение $g_2(x) = 0$ активно.Число активных ограничений $l = 2 < n = 2$

Так как $\lambda_{1\_2} = -2$ меньше НУЛЯ, то в точке т2 выполняются достаточные условия максимума первого порядка. Точка т2 является точкой локального максимума.

Рис. В 3. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.12 часть 3)

4. Проверить достаточные условия экстремума второго порядка

$x := \begin{pmatrix} x0 \\ x1 \end{pmatrix}$ - вектор неизвестных $dx := \begin{pmatrix} dx0 \\ dx1 \end{pmatrix}$ - вектор дифференциалов по переменным

4.1 Второй дифференциал классической функции Лагранжа

$$Dif2\_kl(x, dx, \lambda1, \lambda2) := \frac{d}{dx0}\frac{d}{dx0}L_{kl}(x, \lambda1, \lambda2)\cdot dx_0\cdot dx_0 \ldots$$
$$+ \frac{d}{dx0}\left(\frac{d}{dx1}L_{kl}(x, \lambda1, \lambda2)\right)\cdot dx_0\cdot dx_1 \ldots$$
$$+ \frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx0}L_{kl}(x, \lambda1, \lambda2)\right)\cdot dx_0\cdot dx_1 \ldots$$
$$+ \frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx1}L_{kl}(x, \lambda1, \lambda2)\right)\cdot dx_1\cdot dx_1$$

функция для расчета второго дифференциала обобщенной функции Лагранжа

Значение второго дифференциала классичекой функции Лагранжа в общем виде (символьное решение)

$$Dif2\_kl(x, dx, \lambda1, \lambda2) \rightarrow 2\cdot dx0^2 + 2\cdot dx1^2$$

4.2 Первый дифференциал ограничения .

а) **в виде равенства**

$$Dif1\_G1 := \frac{d}{dx0}g_1(x)\cdot dx0 + \frac{d}{dx1}g_1(x)\cdot dx1$$

переменная (Dif1_G1) для расчета первого дифференциала ограничения в виде равентства ($g_1(x)$)

Значение первого дифференциала ограничения в общем виде (символьное решение)

$$Dif1\_G1 \rightarrow dx0$$

б) **в виде неравенства**

$$Dif1\_G2 := \frac{d}{dx0}g_2(x)\cdot dx0 + \frac{d}{dx1}g_2(x)\cdot dx1$$

переменная (Dif1_G2) для расчета первого дифференциала для активных в точке ограничений в виде неравентства ($g_2(x)$)

Значение первого дифференциала ограничения в общем виде (символьное решение)

$$Dif1\_G2 \rightarrow dx0 + dx1$$

Рис. В 4. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.12 часть 4)

Исследовать условно-стационарную точку т1

Ограничение неравенство $g_2(x) = -1 \neq 0$ пассивно

Выразить dx0 через dx1 и поставить во второй дифференциал кл.ф.Лагранжа

Решить уровнение первого диф.ограничения-равенства относительно dx0 в стационарной точке (скопировать символьное выражение)

$dx0 \text{ solve}, dx0 \rightarrow 0$

Произвести замену переменных $dx0 = -dx1$ во втором диф.функ.Лагранжа

$2 \cdot dx0^2 + 2 \cdot dx1^2 \text{ substitute}, dx0 = 0 \rightarrow 2 \cdot dx1^2$

При $dx1 \neq 0$ второй дифференциал кл.ф.Лагранжа $Dif2\_kl(x, dx, \lambda1, \lambda2) > 0$ всегда.

Вывод:

1. Точка т1 $x12\_1^T = (1 \quad 0)$ является **точкой локального условного минимума.**
2. Значение функции в точке локального условного минимума $f(x12\_1) = 1$,
3. Функция $f(x)$, ограничения- равенство линейное, ограничение -неравенство выпуклые, поэтому в т.1 достигается глобальный условный минимум (доказать самостоятельно).

Исследовать условно-стационарную точку т2

Ограничение неравенство $g_2(x) = 0$ и ограничение равенство $g_1(x) = 0$ активны в точке т2

Из первого дифференциала ограничения равенства получили (см. исслед. т1)

$dx0 = 0$

Из первого дифференциала ограничения неравенства получили (см. а) п.4.2)

$dx0 + dx1 = 0$

тогда $dx0 = dx1 = 0$ и второй диф.кл.функции Лагранжа $Dif2\_kl(x, dx, \lambda1, \lambda2) = 0$. Требуется дополнительные исследования. Из рисунка видно, что т.2 - точка локального максимума, т.к. при приближении к точке т2 вдоль множества X функция возростает, а при движении от т2 - убывает.

Вывод:

1. Точка т2 $x12\_2^T = (1 \quad 1)$ - точка локального максимума

Рис. В 5. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.12 часть 5)

5. Построение графиков и точек локального минимума

Построить трехмерный график в виде контурных линий в диапазоне значений -2<x<2, -2<y<2, с шагом 0.1, нанести расчетные точки минимума и максимума, отредактировать график как показано ниже.

Расчет исходной матрицы для постоения графика функции, используя дискретный аргумент.

$F(x,y) := (x)^2 + (y)^2$ - функция для построения графика

Диапазон расчета и шаг расчета

$x_{min} := -2 \quad x_{max} := 2 \quad y_{min} := -2 \quad y_{max} := 2 \quad \Delta x := 0.1 \quad \Delta y := 0.1$

$Ni := \dfrac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x} \quad Nj := \dfrac{y_{max} - y_{min}}{\Delta y}$ - кол. точек расчета

$i := 0 .. Ni \quad j := 0 .. Nj$ - дискретный аргумент

Расчет матриц для построения поверхности целевой функции

$x1_{i,j} := x_{min} + \Delta x \cdot i \qquad y1_{i,j} := y_{min} + \Delta y \cdot j \qquad M := \overrightarrow{F(x1, y1)}$

Расчет координат точки локального условного минимума (красная точка) для нанесения на график

$X12_0 := x12\_1_0$ значение x-составляющей

$Y12_0 := x12\_1_1$ значение y-составляющей

$Z12_0 := f(x12\_1)$ значение z-составляющей $\qquad Z12 = (1)$

Расчет координат точки т2 (чертная точка) для нанесения на график

$X12\_1_0 := x12\_2_0$ значение x-составляющей

$Y12\_1_0 := x12\_2_1$ значение y-составляющей

$Z12\_1_0 := f(x12\_2)$ значение z-составляющей $\qquad Z12\_1 = (2)$

Расчет исходной матрицы для постоения графика ограничения-неравенства используя дискретный аргумент.

$x + y - 2 = 0$ - ограничение в виде вертикальной плоскости

Диапазон расчета и шаг расчета

$z_{min} := 0 \quad \Delta z := 0.1$ остальные параметры см. в разделе построение графика функции

Расчет матриц для построения поверхности ограничения - неравенства

$x2_{i,j} := x_{min} + \Delta x \cdot i \qquad y2_{i,j} := -x2_{i,j} + 2 \qquad G_{i,j} := z_{min} + \Delta z \cdot j$

Рис. В 6. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.12 часть 6)

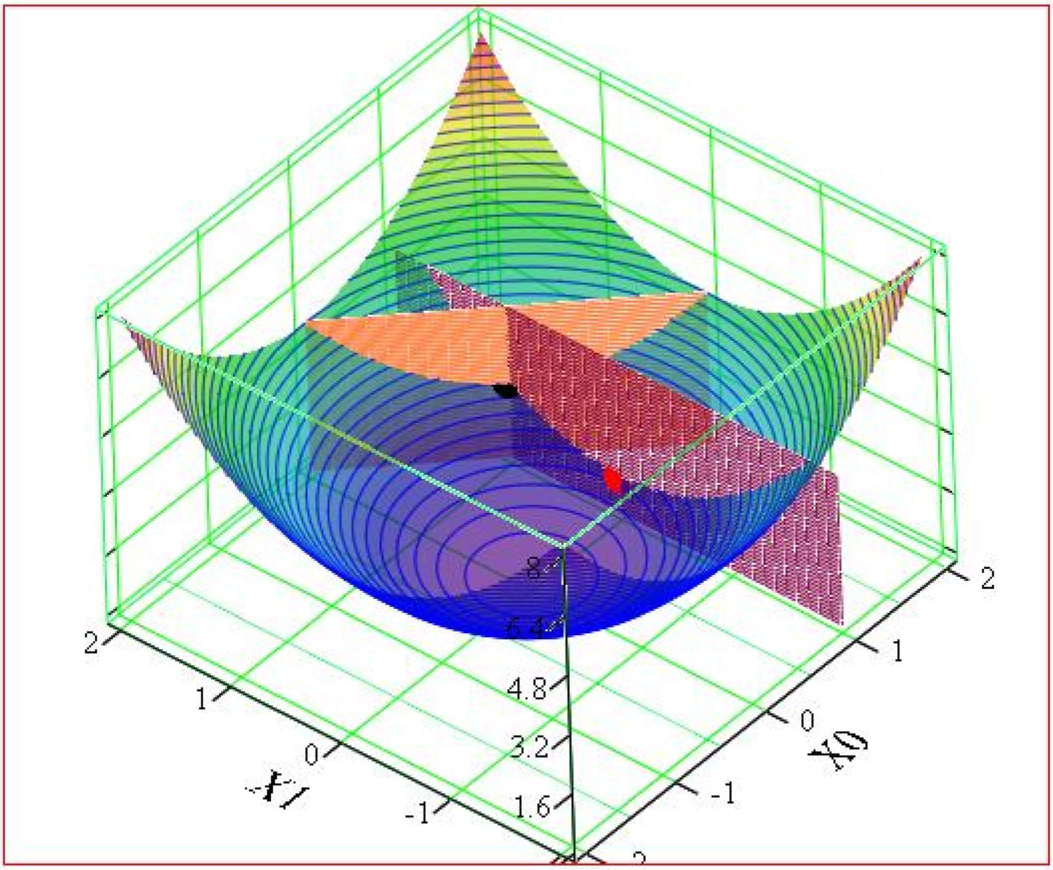
Расчет исходной матрицы для постоения графика ограничения-равенства используя дискретный аргумент.

$x - 1 = 0$ - ограничение в виде вертикальной плоскости

Расчет матриц для построения поверхности ограничения - равенства

$x3_{i,j} := 1$ $y3_{i,j} := x_{min} + \Delta x \cdot i$ $G1_{i,j} := z_{min} + \Delta z \cdot j$

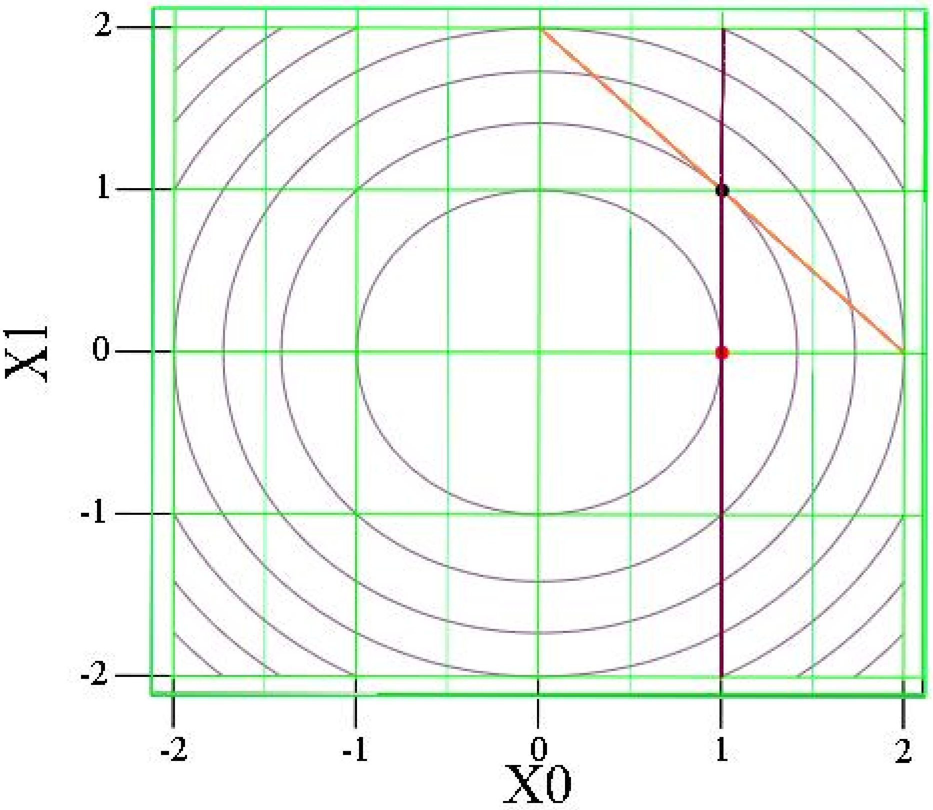
Построить трехмерный график в виде поверхности, отобразить плоскоти ограничения и нанести точки экстремумов



$(x_1, y_1, M), (X12, Y12, Z12), (x_2, y_2, G), (X12\_1, Y12\_1, Z12\_1), (x_3, y_3, G1)$

Рис. В 7. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.12 часть 7)

Построить трехмерный график в виде линий уровня, отобразить плоскот ограничений и нанести точки экстремумов



$(x_1, y_1, M), (X12, Y12, Z12), (x_2, y_2, G), (X12\_1, Y12\_1, Z12\_1), (x_3, y_3, G1)$

Рис. В 8. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.12 часть 8)

Задача №1.13: Найти экстремум функцию $f(x)=x_1^2-x_2$ на множестве

$$X=\left\{x\middle|x_1+x_2-6=0,\ 1-x_1\le 0,\ x_1^2+x_2^2-26\le 0\right\}: f(x)=x_1^2-x_2\to extr,$$

$$g_1(x)=x_1+x_2-6=0,\ \ g_2(x)=1-x_1\le 0,\ g_3(x)=x_1^2+x_2^2-26\le 0$$

Рассчитать:

1. Записать обобщенную функцию Лагранжа.
2. Записать необходимые условия экстремума первого порядка;

а) условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x;

б) условие допустимости решения;

в) условие неотрицательности для условного минимума (не положительности для максимума);

г) условие дополняющей нежесткости.

3.Решить систему уравнений из п.2 и найти условно-стационарные точки для двух случаев ($\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \ne 0$);

4. Проверить достаточные условия экстремума первого порядка.
5. При необходимости проверить необходимые и достаточные условия второго порядка.

Выводы:

1. Сделать выводы о характере условно-стационарных точек.

График. построить трехмерный график в виде поверхности и линии уровня (целевой функции и ограничения) и нанести условно-стационарные точки.

Исходная информация

$f(x) := (x_0)^2 - x_1$ - целевая функция

$g_1(x,B) := x_0 + x_1 - B \quad B := 6$ - функция ограничение в виде равенства

$g_2(x,C) := C - x_0 \quad C := 1$ - функция ограничение в виде неравенства

$g_3(x,R) := (x_0)^2 + (x_1)^2 \quad R := \sqrt{26}$ - функция ограничение в виде неравенства

Ход решения задачи

1. Обобщенная функция Лагранжа (x - вектор)

$$L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,B,C,R) := \lambda_0\cdot f(x) + \lambda_1\cdot g_1(x,B) + \lambda_2\cdot g_2(x,C) + \lambda_3\cdot g_3(x,R)$$

Градиент обобщенной функции Лагранжа (x - вектор)

$$Gr\_L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,B,C,R) := \nabla_x L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,B,C,R) \to \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\cdot\lambda_0\cdot x_0 + 2\cdot\lambda_3\cdot x_0 \\ \lambda_1 - \lambda_0 + 2\cdot\lambda_3\cdot x_1 \end{pmatrix}$$

2. Необходимые условия экстремума первого порядка (теория)

а) $\nabla_x L_{ob}(x,\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = 0$ - условие стационарности обобщенной функции Лагранжа

б) $g_1(x,B) = 0 \quad g_2(x,C) \le 0 \, g_3(x,R) \le 0$ - условия допустимости решения

Рис. В 9. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.13 часть 1)

в) $\lambda_2 \ge 0$ $\lambda_3 \ge 0$ (условие не отрицательности для минимумов), $\lambda_2 \le$ $\lambda_3 \ge 0$ (условие неположительности для максимумов)

г) $\lambda_2 \cdot g_2(x, C) = 0$ $\lambda_3 \cdot g_3(x, R) = 0$ - условие дополняющей нежесткости

<u>3. Поиск условно-стационарных точек</u> (используются необходимые условия первого порядка)

Решить систему уравнений п.3 для двух случаев: $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \ne 0$.

3.1. <u>Первый случай</u> $\lambda_0 = 0$

Градиент обобщенной функции Лагранжа в символьном виде примет вид.

$\lambda_0 := 0$ ввести значение "вручную"

$$Gr\_L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, B, C, R) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 + 2 \cdot \lambda_3 \cdot x_0 \\ \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_3 \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

Возможны **<u>четыре варианта</u>** удовлетворения условия дополнительной нежесткости г) п.3

1) $\lambda_2 := 0$, $\lambda_3 := 0$. Тогда из первого уравнения $Gr\_L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, B, C, R)$ следует, что $\lambda_1 := 0$. Это противоречит утвердению: все коэффициенты Лагранжа одновременно не должны быть равны **нулю**.

2) $\lambda_2 \ne 0$, $\lambda_3 := 0$. Тогда из второго уравнения $Gr\_L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, B, C, R)$ следует, что $\lambda_1 := 0$. Из первого уравнения $Gr\_L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, B, C, R)$ следует, что $\lambda_2 := 0$ Это противоречит утвердению: все коэффициенты Лагранжа одновременно не

3) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \ne 0$. Тогда имеем систему уравнений. Решение ищем с помощью блока Given-Find.

Изменим имена переменные в функциях, добавив в конце каждой цифру ТРИ. Это необходимо, чтобы значение у переменных присвоенных ранее не влияло на результат расчета в данном разделе.

Функция $Gr\_L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, B, C, R)$ примет вид

$\lambda_{23} := 0$ $\lambda_{03} := 0$

$$Gr\_L_{ob}(x, \lambda_{03}, \lambda_{13}, \lambda_{23}, \lambda_{33}, B, C, R) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_{13} + 2 \cdot \lambda_{33} \cdot x_0 \\ \lambda_{13} + 2 \cdot \lambda_{33} \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

Given

$\lambda_{13} + 2 \cdot \lambda_{33} \cdot x0 = 0$ $\lambda_{13} + 2 \cdot \lambda_{33} \cdot x1 = 0$

$(x0)^2 + (x1)^2 - R^2 = 0$ $x0 + x1 - B = 0$

Рис. В 10. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.13 часть 2)

$$\mathrm{Find}(x0, x1, \lambda_{13}, \lambda_{33}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вывод: Решение система уранений имеет только при $\lambda_1 := 0$, $\lambda_3 := 0$, что недопустимо.

4) $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тогда имеем систему уравнений. Решение ищем с помощью блока Given-Find

Функция $\mathrm{Gr\_L_{ob}}(x, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, B, C, R)$ примет вид. Изменим имена переменные в функциях, добавив в конце каждой цифру ЧЕТЫРЕ

Функция $\mathrm{Gr\_L_{ob}}(x, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, B, C, R)$ примет вид при , $\lambda_{04} := 0$ ввести значение коэф. Лагранжа "вручную"

$$\lambda_{04} := 0$$

$$\mathrm{Gr\_L_{ob}}(x, \lambda_{04}, \lambda_{14}, \lambda_{24}, \lambda_{34}, B, C, R) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_{14} - \lambda_{24} + 2 \cdot \lambda_{34} \cdot x_0 \\ \lambda_{14} + 2 \cdot \lambda_{34} \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

Поделим правую и левую части в уравнениях дополняющей нежесткости на коэф. Лагранжа, т.к. они не равны 0. Решая систему из трех уранений-ограничений найдем коодинаты точки x0 и x1 .

Given

$$(x0)^2 + (x1)^2 - R^2 = 0 \quad x0 + x1 - B = 0 \quad C - x0 = 0 \qquad \mathrm{Find}(x0, x1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$x0 := 1$ $\quad x1 := 5$ ввести значения "вручную"

Решим второе уравнение функции $\mathrm{Gr\_L_{ob}}(x, \lambda_{04}, \lambda_{14}, \lambda_{24}, \lambda_{34}, B, C, R)$ относительно λ_{34}

$$\lambda_{14} + 2 \cdot \lambda_{34} \cdot x1 \text{ solve}, \lambda_{34} \rightarrow -\frac{\lambda_{14}}{10}$$

Произведем замену переменных $\lambda_{34} = -\frac{\lambda_{14}}{10}$ в первом уравнении функции $\mathrm{Gr\_L_{ob}}(x, \lambda_{04}, \lambda_{14}, \lambda_{24}, \lambda_{34}, B, C, R)$

$$\lambda_{14} - \lambda_{24} + 2 \cdot \lambda_{34} \cdot x04 \text{ substitute}, \lambda_{34} = -\frac{\lambda_{14}}{10} \rightarrow \lambda_{14} - \lambda_{24} - \frac{\lambda_{14} \cdot x04}{5}$$

Решим полученное уранение относительно λ_{24}

$$\frac{4 \cdot \lambda_{14}}{5} - \lambda_{24} \text{ solve}, \lambda_{24} \rightarrow \frac{4 \cdot \lambda_{14}}{5}$$

Рис. В 11. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.13 часть 3)

Вывод: коэффициенты Лагранжа $\lambda_2 \left(\frac{4\cdot\lambda 14}{5}\right)$ и $\lambda_3 \left(-\frac{\lambda 14}{10}\right)$ имеют **разные** знаки $(\lambda_1 \neq 0)$ Следовательно, полученная точка не является **ни минимумом ни максимумом**.

3.2. Второй случай $\lambda_0 \neq 0$**.** Поделим обобщенную функцию Лагранжа на λ_0 с заменой $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1 и получим классическую функцию Лагранжа.

Составить классическую функцию Лагранжа

$$L_{kl}(x,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,B,C,R) := f(x) + \lambda_1\cdot g_1(x,B) + \lambda_2\cdot g_2(x,C) + \lambda_3\cdot g_3(x,R)$$

Градиент классической функции Лагранжа (x - вектор) примет вид

$$Gr\_L_{kl}(x,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,B,C,R) := \nabla_x L_{kl}(x,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,B,C,R) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\cdot\lambda_3\cdot x_0 + 2\cdot x_0 \\ \lambda_1 + 2\cdot\lambda_3\cdot x_1 - 1 \end{pmatrix}$$

Условия б) и г) п3 остаются без изменения.

3.2 Найти условно-стационарные точки, используя блок Given-Find. Решается система нелинейных уравнений.
Из условия дополнительной нежесткости $\lambda_2\cdot g_2(x,C) = 0$ и $\lambda_3\cdot g_3(x,R) = 0$ следует, что λ_2 и λ_3 может принимать четыре различных варианта значения.

1) Рассмотрим вариант $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Введем новые переменные для выполнения этого пункта, добавив "_1" в конце имени переменной коэф. Лагранжа

Для этого случая кл. функ. Лагранжа примет вид

$\lambda2\_1 := (\lambda3\_1 := 0$ ввести значения коэф. Лагранжа "вручную"

$$Gr\_L_{kl}(x,\lambda1\_1,\lambda2\_1,\lambda3\_1,B,C,R) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda1\_1 + 2\cdot x_0 \\ \lambda1\_1 - 1 \end{pmatrix}$$

Given

$\lambda1\_1 + 2\cdot x0 = 0 \qquad \lambda1\_1 - 1 = 0 \qquad x0 + x1 - B = 0$

$$x\lambda := Find[x0,x1,\lambda1\_1,(\lambda2\_1,\lambda3\_1)] \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{13}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рис. В 12. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.13 часть 4)

$\lambda_{1\_1} := x\lambda_2 \quad \lambda_{1\_1} = 1$ - коэффициент λ_1 Лагранжа для точки

$\lambda_{1\_2} := x\lambda_3 \quad \lambda_{1\_2} = 0$ - коэффициент λ_2 Лагранжа для точки

$\lambda_{1\_3} := x\lambda_4 \quad \lambda_{1\_3} = 0$ - коэффициент λ_3 Лагранжа для точки

$x12\_1 := \begin{pmatrix} x\lambda_0 \\ x\lambda_1 \end{pmatrix} \quad x12\_1^T = (-0.5 \quad 6.5)$ - координаты точки

Проверка выполнения ограничений б) п3.

$g_1(x12\_1, B) = 0 \qquad g_2(x12\_1, C) = 1.5 \qquad g_3(x12\_1, R) = 16.5$

<u>Вывод:</u> 1 В найденной точке с координатами $x12\_1^T = (-0.5 \quad 6.5)$, ограничение $g_1(x) = 0$ выполняется, а ограничения $g_2(x, C) = 1.5 > 0$, $g_3(x, R) = 16.50 > 0$ невыполняются. Следовательно найденная точка **не является** условно стационарной точкой.

2) Рассмотрим вариант $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$. Введем новые переменные для выполнения этого пункта, добавив "_2" в конце имени переменной коэф. Лагранжа

Для этого случая кл. функ. Лагранжа примет вид

$\lambda3\_2 := 0$ ввести значения коэф. Лагранжа "вручную"

$$Gr\_L_{kl}(x, \lambda1\_2, \lambda2\_2, \lambda3\_2, B, C, R) \to \begin{pmatrix} \lambda1\_2 - \lambda2\_2 + 2 \cdot x_0 \\ \lambda1\_2 - 1 \end{pmatrix}$$

Given

$\lambda1\_2 - \lambda2\_2 + 2 \cdot x0 = 0 \qquad \lambda1\_2 - 1 = 0 \qquad x0 + x1 - B = 0 \qquad C - x0 = 0$

$$x\lambda := \mathrm{Find}(x0, x1, \lambda1\_2, \lambda2\_2, \lambda3\_2) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_{1\_1} := x\lambda_2 \quad \lambda_{1\_1} = 1$ - коэффициент λ_1 Лагранжа для точки т.1

$\lambda_{1\_2} := x\lambda_3 \quad \lambda_{1\_2} = 3$ - коэффициент λ_2 Лагранжа для точки т.1

$\lambda_{1\_3} := x\lambda_4 \quad \lambda_{1\_3} = 0$ - коэффициент λ_3 Лагранжа для точки т.1

$x12\_2 := \begin{pmatrix} x\lambda_0 \\ x\lambda_1 \end{pmatrix} \quad x12\_2^T = (1 \quad 5)$ - координаты точки т.1

Рис. В 13. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.13 часть 5)

Проверка выполнения ограничений б) п3.

$g_1(x12\_2, B) = 0$ $g_2(x12\_2, C) = 0$ $g_3(x12\_2, R) = 0$

Проверка выполнения ограничений в) п3.

$\lambda_{1\_2} = 3\lambda_{1\_3} = 0$

Вывод: 1 В найденной точке с координатами $x12\_2^T = (1 \;\; 5)$ ограничения $g_1(x, B) = 0$, $g_2(x, C) = 0$, $g_3(x, R) = 0$ выполняются. Множители Лагранжа не отрицательные. Следовательно найденная точка т1 является **условно-стационарной** и удовлетворяет необходимым условиям **минимума.**

3) Рассмотрим вариант $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Введем новые переменные для выполнения этого пункта, добавив "_3" в конце имени переменной коэф. Лагранжа

Для этого случая кл. функ. Лагранжа примет вид

$\lambda2\_3 := 0$ ввести значения коэф. Лагранжа "вручную"

$$Gr\_L_{kl}(x, \lambda1\_3, \lambda2\_3, \lambda3\_3, B, C, R) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda1\_3 + 2\cdot\lambda3\_3\cdot x_0 + 2\cdot x_0 \\ \lambda1\_3 + 2\cdot\lambda3\_3\cdot x_1 - 1 \end{pmatrix}$$

Ищем координаты двух точек, т.к. одно из уранений квадратичное

Given

$\lambda1\_3 + 2\cdot\lambda3\_3\cdot x0 + 2\cdot x0 = 0$ $(x0)^2 + (x1)^2 - R^2 = 0$ $x0 + x1 - B = 0$

$\lambda1\_3 + 2\cdot\lambda3\_3\cdot x1 - 1 = 0$

$$x\lambda := Find(x0, x1, \lambda1\_3, \lambda2\_3, \lambda3\_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \\ -\frac{11}{4} & \frac{15}{4} \\ 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & -\frac{11}{8} \end{pmatrix}$$

Вывод: найдены еще две условно стационарные точки т.2 и т.3

Анализ ПЕРВОЙ найденной точки т.2

$\lambda_{1\_1} := x\lambda_{2,0}$ $\lambda_{1\_1} = -2.75$ - коэффициент λ_1 Лагранжа для точки т.2

$\lambda_{1\_2} := x\lambda_{3,0}$ $\lambda_{1\_2} = 0$ - коэффициент λ_2 Лагранжа для точки т.2

$\lambda_{1\_3} := x\lambda_{4,0}$ $\lambda_{1\_3} = 0.375$ - коэффициент λ_3 Лагранжа для точки т.2

$x12\_3 := \begin{pmatrix} x\lambda_{0,0} \\ x\lambda_{1,0} \end{pmatrix}$ $x12\_3^T = (1 \;\; 5)$ - координаты точки т.2

Рис. В 14. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.13 часть 6)

Проверка выполнения ограничений б) п3.

$g_1(x12\_3, B) = 0 \qquad g_2(x12\_3, C) = 0 \qquad g_3(x12\_3, R) = 0$

Проверка выполнения ограничений в) п3.

$\lambda_{1\_2} = 0 \, \lambda_{1\_3} = 0.375$

<u>Вывод:</u> 1 В найденной точке с координатами $x12\_3^T = (1 \;\; 5)$ ограничения $g_1(x, B) = 0$, $g_2(x, C) = 0$, $g_3(x, R) = 0$ выполняются. Коэффициенты Лагранжа не отрицательные $\lambda_{1\_2} = 0$ и $\lambda_{1\_3} = 0.375$

(множетель Лагранжа для ограничения -равентсва не учитывается) . Следовательно найденная точка т2 является **условно-стационарной** и удовлетворяет необходимым условиям **минимума.**

2. Координаты точки т2 совпадают с координатами точки т1

Анализ ВТОРОЙ найденной точки т.3

$\lambda 1\_1 := x\lambda_{2,1} \qquad \lambda_{1\_1} = 3.75$ - коэффициент λ_1 Лагранжа для точки т.3

$\lambda 1\_2 := x\lambda_{3,1} \qquad \lambda_{1\_2} = 0$ - коэффициент λ_2 Лагранжа для точки т.3

$\lambda 1\_3 := x\lambda_{4,1} \qquad \lambda_{1\_3} = -1.375$ - коэффициент λ_3 Лагранжа для точки т.3

$x12\_4 := \begin{pmatrix} x\lambda_{0,1} \\ x\lambda_{1,1} \end{pmatrix} \qquad x12\_4^T = (5 \;\; 1)$ - координаты точки т.3

Проверка выполнения ограничений б) п3.

$g_1(x12\_4, B) = 0 \qquad g_2(x12\_4, C) = -4 \qquad g_3(x12\_4, R) = 0$

Проверка выполнения ограничений в) п3.

$\lambda_{1\_2} = 0 \, \lambda_{1\_3} = -1.375$

<u>Вывод:</u> 1 В найденной точке с координатами $x12\_4^T = (5 \;\; 1)$ ограничения $g_1(x, B) = 0$, $g_2(x, C) = -4$, $g_3(x, R) = 0$ выполняются. Коэффициенты Лагранжа неположительны $\lambda_{1\_2} = 0$ и $\lambda_{1\_3} = -1.375$

(множетель Лагранжа для ограничения-равентсва не учитывается) Следовательно найденная точка т.3 является **условно-стационарной** и удовлетворяет необходимым условиям **максимума**

4) Рассмотрим вариант $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Введем новые переменные для выполнения этого пункта, добавив "_4" в конце имени переменной коэф. Лагранжа

Для этого случая кл. функ. Лагранжа примет вид

$$Gr\_L_{kl}(x, \lambda 1\_4, \lambda 2\_4, \lambda 3\_4, B, C, R) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda 1\_4 - \lambda 2\_4 + 2 \cdot \lambda 3\_4 \cdot x_0 + 2 \cdot x_0 \\ \lambda 1\_4 + 2 \cdot \lambda 3\_4 \cdot x_1 - 1 \end{pmatrix}$$

Рис. В 15. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.13 часть 7)

Ищем координаты точек. Скопировать символьные выражения из функции $Gr\_L_{kl}(x, \lambda1\_4, \lambda2\_4, \lambda3\_4, B, C, R)$. Так как $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$, а λ_1 может принимать любое значение, решим систему уравнений при $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_1 < 0$. В последних случаях символьного решения нет, надо использовать численный вариант метода Given-Find (проделать самостоятельно). Ниже приведен вариант решения при $\lambda_1 = 0$

Given

$$\lambda1\_4 - \lambda2\_4 + 2\cdot\lambda3\_4\cdot x0 + 2\cdot x0 = 0 \qquad (x0)^2 + (x1)^2 - R^2 = 0$$

$$C - x0 = 0 \qquad x0 + x1 - B = 0$$

$$\lambda1\_4 + 2\cdot\lambda3\_4\cdot x1 - 1 = 0 \qquad \lambda1\_4 = 0$$

$$x\lambda := \mathrm{Find}(x0, x1, \lambda1\_4, \lambda2\_4, \lambda3\_4) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ \frac{11}{5} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$\lambda1\_1 := x\lambda_2 \quad \lambda1\_1 = 0$ - коэффициент λ_1 Лагранжа для точки т.4

$\lambda1\_2 := x\lambda_3 \quad \lambda1\_2 = 2.2$ - коэффициент λ_2 Лагранжа для точки т.4

$\lambda1\_3 := x\lambda_4 \quad \lambda1\_3 = 0.1$ - коэффициент λ_3 Лагранжа для точки т.4

$x12\_5 := \begin{pmatrix} x\lambda_{0,0} \\ x\lambda_{1,0} \end{pmatrix} \qquad x12\_3^T = (1 \;\; 5)$ - координаты точки т.4

Проверка выполнения ограничений б) п3.

$g_1(x12\_5, B) = 0 \qquad g_2(x12\_5, C) = 0 \qquad g_3(x12\_5, R) = 0$

Проверка выполнения ограничений в) п3.

$\lambda1\_2 = 2.2 \qquad \lambda1\_3 = 0.1$

__Вывод:__ 1. В найденной точке с координатами $x12\_5^T = (1 \;\; 5)$ ограничения $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 0$, $g_3(x) = 0$ выполняются. Коэффициенты Лагранжа не отрицательные. Следовательно найденная точка т4 является **условно-стационарной** и удовлетворяет необходимым условиям **минимума.**
2. Точка т4 совпадает с точкой т2.

Рис. В 16. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.13 часть 8)

3.3. Достаточные условия первого порядка (число активных ограничений равно числу переменных в задаче)

В **точке т1** $x12\_2^T = (1\ \ 5)$ ограничение-равенство $g_1(x12\_2, B) = 0$ активно, ограничение-неравенсто $g_2(x12\_2, C) = 0$ активно, ограничение-неравенство $g_3(x12\_2, R) = 0$ пассивно т.к. в данном случае в условии дополняющей нежесткости для третьего ограничения положено $\lambda_3 = 0$, поэтому ,число активных ограничений $l = 2 = n = 2$, где n-число неизвестных и достаточные условия первогопорядка удовлетворяются.
2. Так как $\lambda_2 = 3 > 0$, в точке **т1 условный локальный минимум**

В **точке т2** $x12\_3^T = (1\ \ 5)$ (совпадает с т1) ограничение-равенство $g_1(x12\_3, B) = 0$ активно, ограничение-неравенсто $g_3(x12\_3, R) = 0$ активно, ограничение-неравенство $g_2(x12\_3, C) = 0$ пассивно т.к. в данном случае в условии дополняющей нежесткости для третьего ограничения положено $\lambda_2 = 0$, поэтому ,число активных ограничений $l = 2 = n = 2$, где n-число неизвестных и достаточные условия первогопорядка удовлетворяются.
2. Так как $\lambda_3 = 0.375 > 0$, в точке **т2 условный локальный минимум**

В **точке т3** $x12\_4^T = (5\ \ 1)$ ограничение-равенство $g_1(x12\_4, B) = 0$ активно, ограничение-неравенсто $g_3(x12\_3, R) = 0$ активно, ограничение-неравенство $g_2(x12\_4, C) = -4$ пассивно т.к. в данном случае в условии дополняющей нежесткости для третьего ограничения положено $\lambda_2 = 0$, поэтому ,число активных ограничений $l = 2 = n = 2$, где n-число неизвестных и достаточные условия первогопорядка удовлетворяются.
2. Так как $\lambda_3 = -1.375 < 0$, в точке **т3 условный локальный максимум**

4. Проверить достаточные условия экстремума второго порядка (из методических соображений)

$x := \begin{pmatrix} xx0 \\ xx1 \end{pmatrix}$ - вектор неизвестных (введены новые переменные для расчета, т.к. старые уже имеют значения) $dx := \begin{pmatrix} dx0 \\ dx1 \end{pmatrix}$ - вектор дифференциалов по переменным

4.1 Второй дифференциал классической функции Лагранжа

Функция (Dif2_kl) для расчета второго дифференциала классической функции Лагранжа (в общем виде, символьным способом)

$$\begin{aligned} Dif2\_kl(x, dx, \lambda1, \lambda2, \lambda3) := & \frac{d}{dxx0}\left(\frac{d}{dxx0}L_{kl}(x, \lambda1, \lambda2, \lambda3, B, C, R)\right)\cdot dx_0\cdot dx_0 \ldots \\ & + \frac{d}{dxx0}\left(\frac{d}{dxx1}L_{kl}(x, \lambda1, \lambda2, \lambda3, B, C, R)\right)\cdot dx_0\cdot dx_1 \ldots \\ & + \frac{d}{dxx1}\left(\frac{d}{dxx0}L_{kl}(x, \lambda1, \lambda2, \lambda3, B, C, R)\right)\cdot dx_0\cdot dx_1 \ldots \\ & + \frac{d}{dxx1}\left(\frac{d}{dxx1}L_{kl}(x, \lambda1, \lambda2, \lambda3, B, C, R)\right)\cdot dx_1\cdot dx_1 \end{aligned}$$

Рис. В 17. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.13 часть 9)

Значение второго дифференциала классичекой функции Лагранжа в общем виде (символьное решение)

$$\text{Dif2\_kl}(x, dx, \lambda1, \lambda2, \lambda3) \rightarrow (2\cdot\lambda3 + 2)\cdot dx0^2 + 2\cdot\lambda3\cdot dx1^2$$

4.2 Первый дифференциал ограничения

а) **в виде равенства** $g_1(x, B)$

$$\text{Dif1\_G1} := \frac{d}{dxx0} g_1(x, B)\cdot dx0 + \frac{d}{dxx1} g_1(x, B)\cdot dx1$$

переменная (Dif1_G1) для расчета первого дифференциала ограничения в виде равентства ($g_1(x, B)$)

Значение первого дифференциала ограничения в общем виде (символьное решение)

$$\text{Dif1\_G1} \rightarrow dx0 + dx1$$

б) **в виде неравенства** $g_2(x, C)$

$$\text{Dif1\_G2} := \frac{d}{dxx0} g_2(x, C)\cdot dx0 + \frac{d}{dxx1} g_2(x, C)\cdot dx1$$

переменная (Dif1_G2) для расчета первого дифференциала для активных в точке ограничений в виде неравентства ($g_2(x)$)

Значение первого дифференциала ограничения в общем виде (символьное решение)

$$\text{Dif1\_G2} \rightarrow -dx0$$

в) **в виде неравенства** $g_3(x, R)$

$$\text{Dif1\_G3} := \frac{d}{dxx0} g_3(x, R)\cdot dx0 + \frac{d}{dxx1} g_3(x, R)\cdot dx1$$

переменная (Dif1_G3) для расчета первого дифференциала для активных в точке ограничений в виде неравентства ($g_2(x)$)

Значение первого дифференциала ограничения в общем виде (символьное решение)

$$\text{Dif1\_G3} \rightarrow 2\cdot dx0\cdot xx0 + 2\cdot dx1\cdot xx1$$

Исследовать условно-стационарную точку т1

Решить систему из трех уранений (активных ограничений) (скопировать из а) п4.2 и б) п4.2) и второго диф. кл. функции Лагранжа (скопировать выражение из п.4.1 и приравнять его переменной D22).

Given

$$dx0 + dx1 = 0 \quad -dx0 = 0 \qquad D22 = (2\cdot\lambda3 + 2)\cdot dx0^2 + 2\cdot\lambda3\cdot dx1^2 \qquad \lambda3 = 0$$

$$\text{Find}(D22, dx0, dx1, \lambda3)^T \rightarrow (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$$

Рис. В 18. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.13 часть 10)

Вывод: $dx0 = dx1 = 0$, значение второго диф. кл. функции Лагранжа $D22 = 0$. Требуются дополнительные исследования.

Исследовать условно-стационарную точку т2

Решить систему из трех уранений (активных ограничений) (скопировать из а) п4.2 и в) п4.2) и второго диф. кл. функции Лагранжа (скопировать выражение из п.4.1 и приравнять его переменной D22).

Преобразуем выражение второго диф. кл. функции Лагранжа (скопировать выражение из п.4.1)

$xx0 := 1 \quad xx1 := 5$ значения координат точки вводится "вручную"

$2\cdot dx0\cdot xx0 + 2\cdot dx1\cdot xx1 \rightarrow 2\cdot dx0 + 10\cdot dx1$

Решить систему из трех уравнений

Given

$dx0 + dx1 = 0 \qquad 2\cdot dx0 + 10\cdot dx1 = 0 \qquad D22 = (2\cdot\lambda 3 + 2)\cdot dx0^2 + 2\cdot\lambda 3\cdot dx1^2$

$\lambda 3 = 0.375 \qquad \mathrm{Find}(D22, dx0, dx1, \lambda 3)^T \rightarrow (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0.375)$

Вывод: $dx0 = dx1 = 0$, значение второго диф. кл. функции Лагранжа $D22 = 0$. Требуются дополнительные исследования.

Исследовать условно-стационарную точку т3

Решить систему из трех уранений (активных ограничений) (скопировать из а) п4.2 и в) п4.2) и второго диф. кл. функции Лагранжа (скопировать выражение из п.4.1 и приравнять его переменной D22).

Преобразуем выражение второго диф. кл. функции Лагранжа (скопировать выражение из п.4.1)

$xx0 := 5 \quad xx1 := 1$ - значения координат точки вводится "вручную"

$2\cdot dx0\cdot xx0 + 2\cdot dx1\cdot xx1 \rightarrow 10\cdot dx0 + 2\cdot dx1$

Решить систему из трех уранений

Given

$dx0 + dx1 = 0 \qquad 2\cdot dx0 + 10\cdot dx1 = 0 \qquad D22 = (2\cdot\lambda 3 + 2)\cdot dx0^2 + 2\cdot\lambda 3\cdot dx1^2$

$\lambda 3 = -1.375 \qquad \mathrm{Find}(D22, dx0, dx1, \lambda 3)^T \rightarrow (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -1.375)$

Вывод: $dx0 = dx1 = 0$, значение второго диф. кл. функции Лагранжа $D22 = 0$. Требуются дополнительные исследования.

5. **Дополнительные исследования точек т1 и т3**

Исследуем свойства целевой функции и ограничений на предмет их выпуклости и линейности ограничений -равенств.

1. Ограничение-равенство $g_1(x, B) := x_0 - x_1 - B$ - линейное

2.Исследуем выпуклость функции и активных ограничений-неравенств Исследавание выпуклости функций проведем с использованием матрицы Гессе, рассчитанной в условно стационарных точках.

Рис. В 19. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.13 часть 11)

Рассчет матрицы Гессе

Функция H(f ,x) расчитывает матрицу Гессе для выражений с двумя неизвестными символьным способом. Входные параметры: f-имя функции, x-вектор переменных, используемых функцией

$$H2(f,x) := \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dxy0^2}f(x) & \frac{d}{dxy0}\left(\frac{d}{dxy1}f(x)\right) \\ \frac{d}{dxy1}\left(\frac{d}{dxy0}f(x)\right) & \frac{d^2}{dxy1^2}f(x) \end{bmatrix}$$ - функция, для расчета элементов матрицы Гессе

$$x := \begin{pmatrix} xy0 \\ xy1 \end{pmatrix}$$ - вектор неизвестных переменных

$$H2(f,x) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ - матрица Гессе исследуемой функции выпуклая

$$f2(x) := -f(x) \rightarrow x_1 - (x_0)^2$$

$$H2(f2,x) \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ - матрица Гессе функции "-f(x)" не выпуклая

$$H3(g,x) := \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dxy0^2}g(x,R) & \frac{d}{dxy0}\left(\frac{d}{dxy1}g(x,R)\right) \\ \frac{d}{dxy1}\left(\frac{d}{dxy0}g(x,R)\right) & \frac{d^2}{dxy1^2}g(x,R) \end{bmatrix}$$

$$g2(x) := C - x_0 \qquad g3(x) := (x_0)^2 + (x_1)^2 - R^2$$

$$H2(g2,x) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ - матрица Гессе ограничения-неравенства g2(x) выпукла

$$H2(g3,x) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ - матрица Гессе ограничения-неравенства g3(x) сильно выпуклая, т.к. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Условие выпуклости функции: если $H2(f,x) \geq 0$ на всем множестве допустимых значений то функция **выпуклая.**

Условие положительной полуопределенности матрицы Гессе: чтобы матрица Гессе была положительно полуопределена необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры определителя Гессе были неотрицательны.

Рис. В 20. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.13 часть 12)

Если (при $\lambda_0 \neq 0$) исследуемая функция $f(x)$ и активные огарничения-неравенства $g_2(x)$ и $g_3(x)$ **выпуклые** функции, активное ограничение-равенство $g_1(x)$- **линейная** функция, то условно стационарная точка является точкой **глобального минимум**. Следовательно в точке т.1 $x12\_2^T = (1 \quad 5)$ глобальный условный минимум.
Функция $-f(x) \rightarrow$ ■ не является выпуклой, следовательно о глобальном условном максимуме в точке т.3 $x12\_4^T = (5 \quad 1)$ с помощью необходимых условий первого порядка сделать нельзя.

6. Построение графиков и точек локального минимума

Построить трехмерный график в виде контурных линий в диапазоне значений значений -7<x<7, -7<y<7, с шагом 0.1, нанести расчетные точки минимума и максимума, отредактировать график как показано ниже.

Расчет исходной матрицы для постоения графика функции, используя дискретный аргумент.

$F(x,y) := x^2 - y$ - функция для построения графика

Диапазон расчета и шаг расчета

$x_{min} := -7 \quad x_{max} := 7 \quad y_{min} := -7 \quad y_{max} := 7 \quad \Delta x := 0.1 \quad \Delta y := 0.1$

$Ni := \frac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x} \qquad Nj := \frac{y_{max} - y_{min}}{\Delta y}$ - кол. точек расчета

$i := 0..Ni \quad j := 0..Nj$ -дискретный аргумент

Расчет матриц для построения поверхности целевой функции

$x1_{i,j} := x_{min} + \Delta x \cdot i \qquad y1_{i,j} := y_{min} + \Delta y \cdot j \qquad M := \overrightarrow{F(x1, y1)}$

Расчет координат точки локального условного минимума т.1 (красная точка) для нанесения на график

$X12_0 := x12\_2_0$ значение x-составляющей $X12_0 = 1$

$Y12_0 := x12\_2_1$ значение y-составляющей $Y12_0 = 5$

$Z12_0 := f(x12\_2)$ значение z-составляющей $Z12_0 = -4$

Расчет координат точки локального максимума т3 (черная точка) для нанесения на график

$X12\_1_0 := x12\_4_0$ значение x-составляющей $X12\_1_0 = 5$

$Y12\_1_0 := x12\_4_1$ значение y-составляющей $Y12\_1_0 = 1$

$Z12\_1_0 := f(x12\_4)$ значение z-составляющей $Z12\_1_0 = 24$

Рис. В 21. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.13 часть 13)

Если (при $\lambda_0 \neq 0$) исследуемая функция $f(x)$ и активные огарничения-неравенства $g_2(x)$ и $g_3(x)$ **выпуклые** функции, активное ограничение-равенство $g_1(x)$- **линейная** функция, то условно стационарная точка является точкой **глобального минимум**. Следовательно в точке т.1 $x12\_2^T = (1 \quad 5)$ глобальный условный минимум.

Функция $-f(x) \rightarrow$ не является выпуклой, следовательно о глобальном условном максимуме в точке т.3 $x12\_4^T = (5 \quad 1)$ с помощью необходимых условий первого порядка сделать нельзя.

6. Построение графиков и точек локального минимума

Построить трехмерный график в виде контурных линий в диапазоне значений значений -7<x<7, -7<y<7, с шагом 0.1, нанести расчетные точки минимума и максимума, отредактировать график как показано ниже.

Расчет исходной матрицы для постоения графика функции, используя дискретный аргумент.

$F(x,y) := x^2 - y$ - функция для построения графика

Диапазон расчета и шаг расчета

$x_{min} := -7 \quad x_{max} := 7 \quad y_{min} := -7 \quad y_{max} := 7 \quad \Delta x := 0.1 \quad \Delta y := 0.1$

$Ni := \dfrac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x} \quad Nj := \dfrac{y_{max} - y_{min}}{\Delta y}$ - кол. точек расчета

$i := 0..Ni \quad j := 0..Nj$ -дискретный аргумент

Расчет матриц для построения поверхности целевой функции

$x1_{i,j} := x_{min} + \Delta x \cdot i \qquad y1_{i,j} := y_{min} + \Delta y \cdot j \qquad M := \overrightarrow{F(x1, y1)}$

Расчет координат точки локального условного минимума т.1 (красная точка) для нанесения на график

$X12_0 := x12\_2_0$ значение x-составляющей $X12_0 = 1$

$Y12_0 := x12\_2_1$ значение y-составляющей $Y12_0 = 5$

$Z12_0 := f(x12\_2)$ значение z-составляющей $Z12_0 = -4$

Расчет координат точки локального максимума т3 (черная точка) для нанесения на график

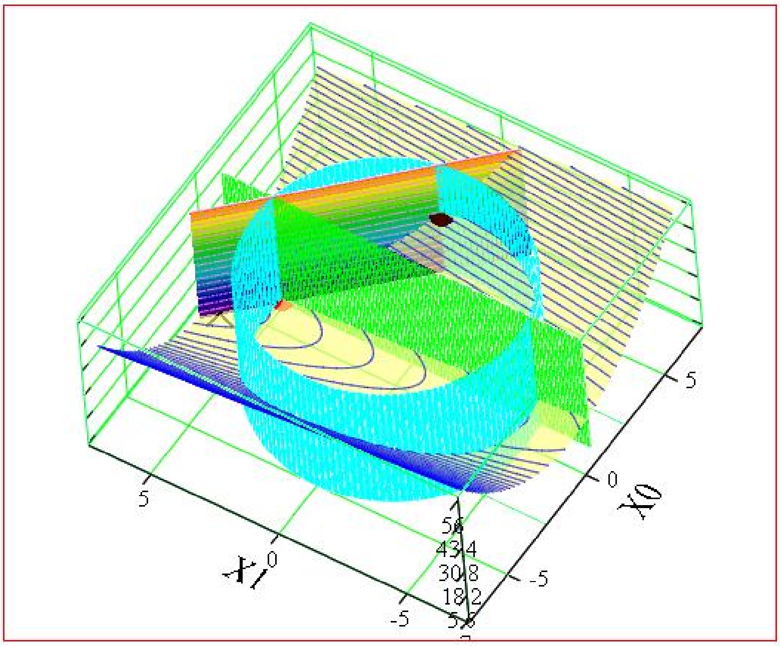
$X12\_1_0 := x12\_4_0$ значение x-составляющей $X12\_1_0 = 5$

$Y12\_1_0 := x12\_4_1$ значение y-составляющей $Y12\_1_0 = 1$

$Z12\_1_0 := f(x12\_4)$ значение z-составляющей $Z12\_1_0 = 24$

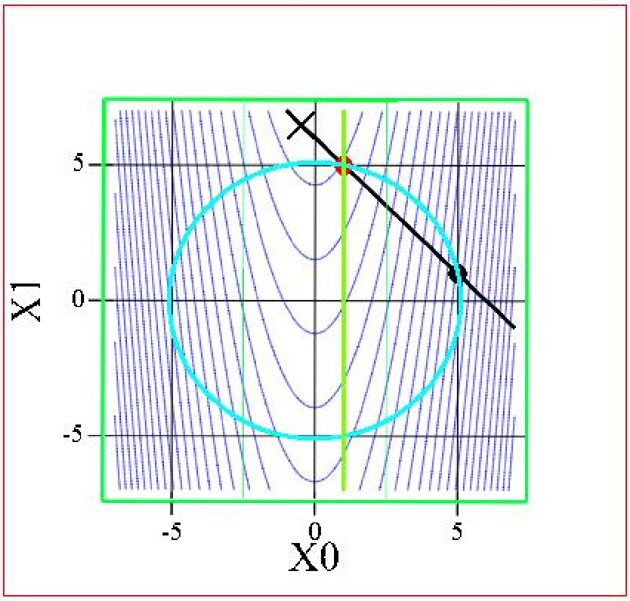
Рис. В 22. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.13 часть 14)

Построить трехмерный график в виде поверхности, отобразить поверхности ограничений и нанести расчетные точки



$(x_1, y_1, M), (X12, Y12, Z12), (x_2, y_2, G), (X12\_1, Y12\_1, Z12\_1), (x_3, y_3, G1), (x_4, y_4, G2), (X12\_2, Y12\_2, Z12\_2)$

Построить трехмерный график в виде линий уровня, отобразить поверхности ограничений и нанести расчетные точки



$(x_1, y_1, M), (X12, Y12, Z12), (x_2, y_2, G), (X12\_1, Y12\_1, Z12\_1), (x_3, y_3, G1), (x_4, y_4, G2), (X12\_2, Y12\_2, Z12\_2)$

Рис. В 23. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.13 часть 15)

Задача №1.14: Найти эктремум функции $f(x) = x_1 - x_2^2$ на множестве

$$X = \{x | x_1 - x_2 - 1 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 - 5 \le 0\} : f(x) = x_1 - x_2^2 \to extr,$$

$$g_1(x) = x_1 - x_2 - 1 = 0,\ \ g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 5 \le 0$$

Рассчитать:

1. Записать обобщенную функцию Лагранжа.
2. Записать необходимые условия экстремума первого порядка;

а) условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x;

б) условие допустимости решения;

в) условие неотрицательности для условного минимума (не положительности для максимума);

г) условие дополняющей нежесткости.

3.Решить систему уравнений из п.2 и найти условно-стационарные точки для двух случаев ($\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \ne 0$);

4. Проверить достаточные условия экстремума первого порядка.
5. При необходимости проверить необходимые и достаточные условия второго порядка.

Выводы:

1. Сделать выводы о характере условно-стационарных точек.

График. построить трехмерный график в виде поверхности и линии уровня (целевой функции и ограничения) и нанести условно-стационарные точки.

Исходная информация

$f(x) := x_0 - (x_1)^2$ - исходная функция

$D := 1$ - коэффициент

$g_1(x) := x_0 - x_1 - D$ - ограничение в виде равенства

$R := \sqrt{5}$ - радиус цилиндра

$g_2(x) := (x_0)^2 + (x_1)^2 - R^2$ - ограничение в виде неравенства

Ход решения задачи

1. Обобщенная функция Лагранжа (x - вектор)

$$L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) := \lambda_0 \cdot f(x) + \lambda_1 \cdot g_1(x) + \lambda_2 \cdot g_2(x)$$

Градиент обобщенной функции Лагранжа (x - вектор)

$$Gr\_L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) := \nabla_x L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \to \begin{pmatrix} \lambda_0 + \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 \cdot x_0 \\ 2 \cdot \lambda_2 \cdot x_1 - 2 \cdot \lambda_0 \cdot x_1 - \lambda_1 \end{pmatrix}$$

3. Необходимые условия экстремума первого порядка (теория)

а) $\nabla_x L_{ob}(x, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = 0$ - целевая функция

б) $g_1(x) = 0$ ограничение равенство $g_2(x) \le 0$ ограничение неравенство

Рис. В 24. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.14 часть 1)

в) $\lambda_1 \geq 0$ (для минимумов), $\lambda_1 \leq 0$ (для максимумов)

г) $\lambda_2 \cdot g_2(x) = 0$ - условие дополняющей нежесткости

4. Решить систему уравнений п.3 для двух случаев: $\lambda_0 = 0$ **и** $\lambda_0 \neq 0$**.**

4.1. Первый случай $\lambda_0 = 0$**,**

Тогда условие а) п.3 примет вид

$$\mathrm{Gr\_L_{ob}}(x, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \text{ substitute}, \lambda_0 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\cdot\lambda_2\cdot x_0 \\ 2\cdot\lambda_2\cdot x_1 - \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим два варианта удовлетворения условия г) п.3

а) $\lambda_2 = 0$, тогда $\lambda_1 = 0$ и вектор, т.е. все его элементы $\lambda = 0$, что **не допустимо**

б) $\lambda_2 \neq 0$, тогда из условий б) и г) имеем

$$\text{Given} \quad x0 - x1 - D = 0 \qquad (x0)^2 + (x1)^2 - R^2 = 0$$

$$x01 := \mathrm{Find}(x0, x1) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Имеем два решения при $\lambda_2 \neq 0$:

$$x12\_1 := (x01)^{\langle 0 \rangle} \qquad x12\_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x12\_2 := (x01)^{\langle 1 \rangle} \qquad x12\_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Складывая два уравнения в условии а) п.3 при $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_2 \neq 0$ (скопировав из символьного решения) получим

$$(\lambda_1 + 2\cdot\lambda_2\cdot x_0) + (2\cdot\lambda_2\cdot x_1 - \lambda_1) \text{ solve}, x_0 \rightarrow -x_1$$

То есть $x_0 = -x_1$. Однако это неудовлетворяется в двух найденных точках

Вывод: найденные точки не являются условно-стационарными

4.2. Второй случай $\lambda_0 \neq 0$**.** Поделим обобщенную функцию Лагранжа на λ_0 с заменой $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1 и получим классическую функцию Лагранжа.

Составить классическую функцию Лагранжа

$$L_{kl}(x, \lambda_1, \lambda_2) := f(x) + \lambda_1\cdot g_1(x) + \lambda_2\cdot g_2(x)$$

Градиент классической функции Лагранжа (x - вектор)

$$\mathrm{Gr\_L_{kl}}(x, \lambda_1, \lambda_2) := \nabla_x L_{kl}(x, \lambda_1, \lambda_2) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\cdot\lambda_2\cdot x_0 + 1 \\ 2\cdot\lambda_2\cdot x_1 - \lambda_1 - 2\cdot x_1 \end{pmatrix}$$

Рис. В 25. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.14 часть 2)

4.3 Найти условно-стационарные точки, используя блок Given-Find. Решается система нелинейных уравнений.

Из условия г) п3 дополнительной нежесткости $\lambda_2 \cdot g_2(x) = 0$ следует, что λ_2 может принимать два значения $\lambda_2 = 0$ и $\lambda_2 \neq 0$

а) **Рассмотрим вариант** $\lambda_2 = 0$..

Тогда классическая функция Лагранжа примет вид

$$Gr\_L_{kl}(x, \lambda_1, \lambda_2) \text{ substitute}, \lambda_2 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + 1 \\ -\lambda_1 - 2 \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

При символьном решении в блоке Given - $Find(x0, x1, \lambda_1)$ необходимо использовать "тело" функций, а не их имена. Скопировать символьное решение $Gr\_L_{kl}(x, \lambda_1, \lambda_2)$ и "тело" ограничения в виде равенства.

Given $x0 - x1 - D = 0$ $\quad \lambda_1 + 1 = 0 \quad -\lambda_1 - 2 \cdot x1 = 0$

$$x01 := Find(x0, x1, \lambda_1) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Имеем решение при $\lambda_2 = 0$:

$x12\_1 := \begin{pmatrix} x01_0 \\ x01_1 \end{pmatrix} \quad x12\_1^T = (1.5 \quad 0.5)$ - координаты т1

$\lambda_{1\_1} := x01_2 \quad \lambda_{1\_1} = -1$ - первый множетель Лагранжа

$\lambda_{2\_1} := 0$ - второй множетель Лагранжа

__Вывод:__ Получена условно-стационарную точку т1 с координатами $x12\_1^T = (1.5 \quad 0.5)$, и коэффициентами Лагранжа $\lambda_{1\_1} = -1$ и $\lambda_{2\_1} := 0$.

б) **Рассмотрим вариант** $\lambda_2 \neq 0$.Система имеет два решения, т.к. условие дополняющей нежесткости - полином второй степени. Кроме того, т.к. $\lambda_2 \neq 0$ то в этом условии можно исключить λ_2, поделив на коэффициент левую и правую часть выражения.

Рис. В 26. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.14 часть 3)

Тогда классическая функция Лагранжа примет вид

$$Gr\_L_{kl}(x,\lambda_1,\lambda_2) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\cdot\lambda_2\cdot x_0 + 1 \\ 2\cdot\lambda_2\cdot x_1 - \lambda_1 - 2\cdot x_1 \end{pmatrix}$$

б1) Рассмотрим случай, когда $\lambda_2 \geq 0$, т.е. ищем точку, которая может быть минимума

$x\_01 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 := 1$ $\lambda_2 := 1$ - начальные приближения для поиска первой точки

Given

$x\_01_0 - x\_01_1 - D = 0$ $(x\_01_0)^2 + (x\_01_1)^2 - R^2 = 0$

$\lambda_1 + 2\cdot\lambda_2\cdot x\_01_0 + 1 = 0$ $2\cdot\lambda_2\cdot x\_01_1 - \lambda_1 - 2\cdot x\_01_1 = 0$

$\lambda_2 \geq 0$

$x01 := Find(x\_01,\lambda_1,\lambda_2)$ $x01^T = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \ 0.67 \ 0.83\right]$

Имеем решение при $\lambda_2 \neq 0$

$x12\_2 := x01_0$ $x12\_2^T = (-1 \ \ -2)$ - координаты точки т2

$\lambda_{1\_2} := x01_1$ $\lambda_{1\_2} = 0.67$ - множитель Лагранжа λ_1

$\lambda_{2\_2} := x01_2$ $\lambda_{2\_2} = 0.83$ - множитель Лагранжа λ_2

Вывод: 1. При поиске со значением $\lambda_2 \geq 0$ получаем точку (т2) с коэффициентами Лагранжа $\lambda_{1\_2} = 0.67$, $\lambda_{2\_2} = 0.83$ и координатами точки $x12\_2^T = (-1 \ \ -2)$, которая может быть минимума. 2. Условие б) п.3 $g_1(x) = 0 \leq 0$ выполняется. Следовательно выполняются небходимые условия первого порядка для максимума и точка т2 - условно-стационарная точка.

б2) Рассмотрим случай, когда $\lambda_2 \geq 0$, т.е. ищем точку, которая может быть минимумом

$x\_01 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 := 1$ $\lambda_2 := 1$ -начальные приближения для поиска первой точки

Given

$x\_01_0 - x\_01_1 - D = 0$ $(x\_01_0)^2 + (x\_01_1)^2 - R^2 = 0$

$\lambda_1 + 2\cdot\lambda_2\cdot x\_01_0 + 1 = 0$ $2\cdot\lambda_2\cdot x\_01_1 - \lambda_1 - 2\cdot x\_01_1 = 0$

$\lambda_2 \geq 0$

$x01 := Find(x\_01,\lambda_1,\lambda_2)$ $x01^T = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ -1.67 \ 0.17\right]$

Рис. В 27. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.14 часть 4)

Имеем решение при $\lambda_2 \neq 0$

$x12\_3 := x01_0$ $\quad x12\_3^T = (2 \ \ 1)$ - координаты точки т3

$\lambda_{1\_3} := x01_1$ $\quad \lambda_{1\_3} = -1.67$ - множитель Лагранжа λ_1

$\lambda_{2\_3} := x01_2$ $\quad \lambda_{2\_3} = 0.17$ - множетель Лагранжа λ_2

Вывод: 1. При поиске со значением $\lambda_2 \geq 0$ получаем точку (т3) с коэффициентами Лагранжа $\lambda_{1\_2} = 0.67$, $\lambda_{2\_3} = 0.17$ и координатами точки $x12\_3^T = (2 \ \ 1)$, которая может быть минимумом. 2. Условие б) п.3 $g_1(x) = 0 \leq 0$ выполняется. Следовательно выполняются небходимые условия первого порядка для максимума и точка т3 - условно-стационарная точка.

б3) Рассмотрим случай, когда $\lambda_2 \leq 0$, т.е. ищем точку, которая может быть максимумом Решений **НЕТ**. Проверить самостоятельно.

4.4. Достаточные условия первого порядка (число активных ограничений равно числу переменных в задаче, λ_2 или >0 (локальный минимум) или <0 (локальный максимум))

В **точке т1** $x12\_1^T = (1.5 \ \ 0.5)$ ограничение не активно т.к. $g_2(x) = 2.5 < 0$, поэтому число активных ограничений $l = 1 < n = 2$, где n-число неизвестных и достаточные условия первого порядка не удовлетворяются.

В **точке т2** $x12\_2^T = (-1 \ \ -2)$ ограничение активно т.к. $g_2(x) = 0$,т.е. число активных ограничений $l = 2 = n = 2$, где n-число неизвестных, достаточные условия первого порядка выполняются. Так как $\lambda_2 \geq 0$, поэтому в т2 достигается локальный минимума

В **точке т3** $x12\_3^T = (2 \ \ 1)$ ограничение активно т.к. $g_2(x) = 0$,т.е. число активных ограничений $l = 2 = n = 2$, где n-число неизвестных, достаточные условия первого порядка выполняются. Так как $\lambda_2 \geq 0$, поэтому в т3 достигается локальный минимума

5. Проверить достаточные условия экстремума второго порядка (методические соображений)

5.1. Проверить достаточные условия экстремума второго порядка

$x := \begin{pmatrix} x0 \\ x1 \end{pmatrix}$ - вектор неизвестных $\qquad dx := \begin{pmatrix} dx0 \\ dx1 \end{pmatrix}$ - вектор дифференциалов по переменным

Рис. В 28. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.14 часть 5)

Второй дифференциал классической функции Лагранжа

Функция (Dif2_kl) для расчета второго дифференциала обобщенной функции Лагранжа

$$\mathrm{Dif2\_kl}(x,dx,\lambda1,\lambda2) := \frac{d}{dx0}\frac{d}{dx0}L_{kl}(x,\lambda1,\lambda2)\cdot dx_0\cdot dx_0 \ldots$$
$$+\frac{d}{dx0}\left(\frac{d}{dx1}L_{kl}(x,\lambda1,\lambda2)\right)\cdot dx_0\cdot dx_1 \ldots$$
$$+\frac{d}{dx1}\left[\frac{d}{dx0}\left(L_{kl}(x,\lambda1),\lambda2\right)\right]\cdot dx_0\cdot dx_1 \ldots$$
$$+\frac{d}{dx1}\left(\frac{d}{dx1}L_{kl}(x,\lambda1,\lambda2)\right)\cdot dx_1\cdot dx_1$$

Значение второго дифференциала классичекой функции Лагранжа в общем виде(символьное решение)

$$\mathrm{Dif2\_kl}(x,dx,\lambda1,\lambda2) \rightarrow 2\cdot\lambda2\cdot dx0^2 + (2\cdot\lambda2 - 2)\cdot dx1^2$$

Первый дифференциал ограничения-равенства.

$x := \begin{pmatrix} x0 \\ x1 \end{pmatrix}$ - вектор неизвестных

$dx := \begin{pmatrix} dx0 \\ dx1 \end{pmatrix}$ - вектор дифференциалов по переменным

$$\mathrm{Dif1\_G1} := \frac{d}{dx0}g_1(x)\cdot dx0 + \frac{d}{dx1}g_1(x)\cdot dx1$$

переменная (Dif1_G1) для расчета первого дифференциала ограничения ($g_1(x)$) (в общем виде, символьным способом)

Значение первого дифференциала ограничения в общем виде (символьное решение)

$$\mathrm{Dif1\_G1} \rightarrow dx0 - dx1$$

а) Исследовать условно-стационарную точку т1

Выразить dx0 через dx1 и поставить во второй дифференциал кл.ф.Лагранжа

решить уровнение первого диф.ограничения относительно dx0 в условно-стационарной точке т1

(**скопировать символьное выражение из п.5.2**)

$$dx0 - dx1 = 0 \text{ solve}, dx0 \rightarrow dx1$$

Произвести замену переменных $dx0 = -dx1$ во втором диф.функ.Лагранжа (**скопировать символьное выражение**)

$\lambda2 := 0$ скопировать значение из переменной λ_{2_1} а) п.4.3

$$2\cdot\lambda2\cdot dx0^2 + (2\cdot\lambda2 - 2)\cdot dx1^2 \text{ substitute}, dx0 = dx1 \rightarrow -2\cdot dx1^2$$

При $dx1 \neq 0$ второй дифференциал кл.ф.Лагранжа $\mathrm{Dif2\_kl}(x,dx,\lambda1) < 0$ всегда.

Рис. В 29. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.14 часть 6)

Вывод:

1. Точка $x12\_1^T = (1.5 \quad 0.5)$ является **точкой регулярного локального условного максимума ,**
2. Значение функции в точке локального условного максимума $f(x12\_1) = 1.25$.

б) Исследовать условно-стационарную точку т2

Первый дифференциал ограничения-неравенства.

$$Dif1\_G2 := \frac{d}{dx0} g_2(x) \cdot dx0 + \frac{d}{dx1} g_2(x) \cdot dx1$$

переменная (Dif1_G2) для расчета первого дифференциала ограничения-неравенства $(g_2(x))$

Значение первого дифференциала ограничения-неравенства в общем виде (символьное решение)

$$Dif1\_G2 \rightarrow 2 \cdot dx0 \cdot x0 + 2 \cdot dx1 \cdot x1$$

значение первого дифференциала ограничения-неравенства в точке т2

$x0 := -1 \quad x1 := -2$ - значения координат точки взять из $x12\_2^T = (-1 \quad -2)$

$$2 \cdot dx0 \cdot x0 + 2 \cdot dx1 \cdot x1 \rightarrow -2 \cdot dx0 - 4 \cdot dx1$$

Второй диф.функ.Лагранжа в точке т2 (**скопировать символьное выражение**)

$\lambda 2 := 0.83$ - значение второго коэф. Лагранжа т2 взять из $\lambda_{2\_2} = 0.83$

$$2 \cdot \lambda 2 \cdot dx0^2 + (2 \cdot \lambda 2 - 2) \cdot dx1^2 \rightarrow -0.34 \cdot dx1^2 + 1.66 \cdot dx0^2$$

Найти значения dx0 и dx1

Given $\quad -0.34 \cdot dx1^2 + 1.66 \cdot dx0^2 = 0 \quad dx0 - dx1 = 0 \quad -2 \cdot dx0 - 4 \cdot dx1 = 0$

$$Find(dx0, dx1) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Значение второго диф. функ. Лагранжа в т2

$x := x12\_2 \qquad dx := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda 1 := \lambda_{1\_2} \qquad \lambda 2 := \lambda_{2\_2}$

$$2 \cdot \lambda 2 \cdot (dx_0)^2 + (2 \cdot \lambda 2 - 2) \cdot (dx_1)^2 = 0$$

Вывод:

1. В точке $x12\_2^T = (-1 \quad -2)$ требуются дополнительные исследования.

в) Исследовать условно-стационарную точку т3

Рис. В 30. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.14 часть 7)

Значение первого дифференциала ограничения-равенства в общем виде (символьное решение) см. п.5.2

$$Dif1\_G1 \rightarrow dx0 - dx1$$

Значение первого дифференциала ограничения-неравенства в точке т3 в символьном виде

$x0 := 2$ $x1 := 1$ - значения координат точки взять из $x12\_3^T = (2 \quad 1)$

$$2 \cdot dx0 \cdot x0 + 2 \cdot dx1 \cdot x1 \rightarrow 4 \cdot dx0 + 2 \cdot dx1$$

Значение второго диф.функ.Лагранжа в точке т3 в символьном виде (**скопировать символьное выражение**)

$\lambda 2 := 0.17$ - значение второго коэф. Лагранжа т3 взять из $\lambda_{2\_3} = 0.17$

$$2 \cdot \lambda 2 \cdot dx0^2 + (2 \cdot \lambda 2 - 2) \cdot dx1^2 \text{ simplify } \rightarrow 0.34 \cdot dx0^2 - 1.66 \cdot dx1^2$$

Найти значения dx0 и dx1

Given $0.34 \cdot dx0^2 - 1.66 \cdot dx1^2 = 0$ $dx0 - dx1 = 0$ $4 \cdot dx0 + 2 \cdot dx1 = 0$

$$Find(dx0, dx1) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Значение второго диф. функ. Лагранжа в т2

$x := x12\_3$ $dx := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\lambda 1 := \lambda_{1\_3}$ $\lambda 2 := \lambda_{2\_3}$

$$2 \cdot \lambda 2 \cdot (dx_0)^2 + (2 \cdot \lambda 2 - 2) \cdot (dx_1)^2 = 0$$

Вывод:

1. В точке $x12\_3^T = (2 \quad 1)$ требуются дополнительные исследования.

6. Дополнительные исследования точек т.1, т2 и т3

Функция H(f ,x) расчитывает матрицу Гессе для выражений с двумя неизвестными символьным способом. Входные параметры: f-имя функции, x-вектор переменных, используемых функцией

$$H2(f, x) := \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dxy0^2} f(x) & \frac{d}{dxy0}\left(\frac{d}{dxy1} f(x)\right) \\ \frac{d}{dxy1}\left(\frac{d}{dxy0} f(x)\right) & \frac{d^2}{dxy1^2} f(x) \end{bmatrix}$$ - функция, для расчета элементов матрицы Гессе

$x := \begin{pmatrix} xy0 \\ xy1 \end{pmatrix}$ - вектор неизвестных переменных

$f2(x) := -f(x) \rightarrow (x_1)^2 - x_0$ - функции"-f(x)"

$H2(f2, x) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ - матрица Гессе функции "-f(x)" выпуклая

Рис. В 31. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.14 часть 8)

Функция для расчета матрицы Гессе ограничения неравенства

$$H3(g,x) := \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dxy0^2} g(x,R) & \frac{d}{dxy0}\left(\frac{d}{dxy1} g(x,R)\right) \\ \frac{d}{dxy1}\left(\frac{d}{dxy0} g(x,R)\right) & \frac{d^2}{dxy1^2} g(x,R) \end{bmatrix}$$

$g2(x) := (x_0)^2 + (x_1)^2 - R^2$ - второе ограничение неравенство

$H2(g2,x) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ - матрица Гессе функции ограничения 2 выпуклая

Ограничение-равенство $g_1(x) := x_0 - x_1 - D$ - линейное

Условие выпуклости функции: если $H2(f,x) \geq 0$ на всем множестве допустимых значений то функция **выпуклая.**

Условие положительной полуопределенности матрицы Гессе: чтобы матрица Гессе была положительно полуопределена необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры определителя Гессе были неотрицательны.

Вывод:

1. В точке т1 достигается условный глобальный максимум,
2. Функция $-f(x) := x_0 - (x_1)^2$ является выпуклой, следовательно в точках т2 и т3 вывод сделать нельзя.
3. Из исследования графиков следует, что в т2 - условный глобальный минимум, а в т3 - условный локальный минимум.

7. Построение графиков и точек локального минимума

Построить трехмерный графики исследуемой функции и ограничения в виде контурных линий в диапазоне значений значений -3<x<3, -3<y<3, с шагом 0.1, нанести расчетные точки минимума и максимума, отредактировать график как показано ниже.

Расчет исходной матрицы для постоения графика функции, используя дискретный аргумент.

$F(x,y) := x - y^2$ - исследуемая функция для построения графика

Диапазон расчета и шаг расчета

$x_{min} := -3 \quad x_{max} := 3 \quad y_{min} := -3 \quad y_{max} := 3 \quad \Delta x := 0.1 \quad \Delta y := 0.1$

$Ni := \frac{x_{max} - x_{min}}{\Delta x} \quad Nj := \frac{y_{max} - y_{min}}{\Delta y}$ - кол. точек расчета

$i := 0..Ni \quad j := 0..Nj$ - дискретный аргумент

$x1_{i,j} := x_{min} + \Delta x \cdot i \qquad y1_{i,j} := y_{min} + \Delta y \cdot j \qquad M := \overrightarrow{F(x1, y1)}$

Рис. В 32. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.14 часть 9)

Расчет координат первой точки (т1) локального условного минимума (красная точка) для нанесения на график

$X\_12_0 := x12\_1_0$ значение x-составляющей $X\_12_0 = 1.5$

$Y\_12_0 := x12\_1_1$ значение y-составляющей $Y\_12_0 = 0.5$

$Z\_12_0 := f(x12\_1)$ значение z-составляющей $Z\_12_0 = 1.25$

Расчет координат второй точки (т2) локального условного минимума красная точка) для нанесения на график

$X\_12_1 := x12\_2_0$ значение x-составляющей $X\_12_1 = -1$

$Y\_12_1 := x12\_2_1$ значение y-составляющей $Y\_12_1 = -2$

$Z\_12_1 := f(x12\_2)$ значение z-составляющей $Z\_12_1 = -5$

Расчет координат третьей точки (т3) локального условного минимума красная точка) для нанесения на график

$X\_12_2 := x12\_3_0$ значение x-составляющей $X\_12_2 = 2$

$Y\_12_2 := x12\_3_1$ значение y-составляющей $Y\_12_2 = 1$

$Z\_12_2 := f(x12\_3)$ значение z-составляющей $Z\_12_2 = 1$

Расчет исходной матрицы для постоения графика ограничения неравенства используя дискретный аргумент.

Диапазон расчета и шаг расчета

$x1_{min} := -3 \quad x1_{max} := 3 \quad \Delta x1 := 0.1 \quad z1_{min} := -6 \quad \Delta z1 := 0.2$

$Ni1 := \dfrac{x1_{max} - x1_{min}}{\Delta x1}$ кол. точек расчета $Ni1 = 60$

$i1 := 0..Ni1 \qquad j1 := 0..Ni1$ дискретный аргумент

$x2_{i1,j1} := R\cdot\cos\left(\dfrac{2\cdot\pi\cdot i1}{Ni1}\right) \quad y2_{i1,j1} := R\cdot\sin\left(\dfrac{2\cdot\pi\cdot i1}{Ni1}\right) \quad G_{i1,j1} := z1_{min} + \Delta z1\cdot j1$

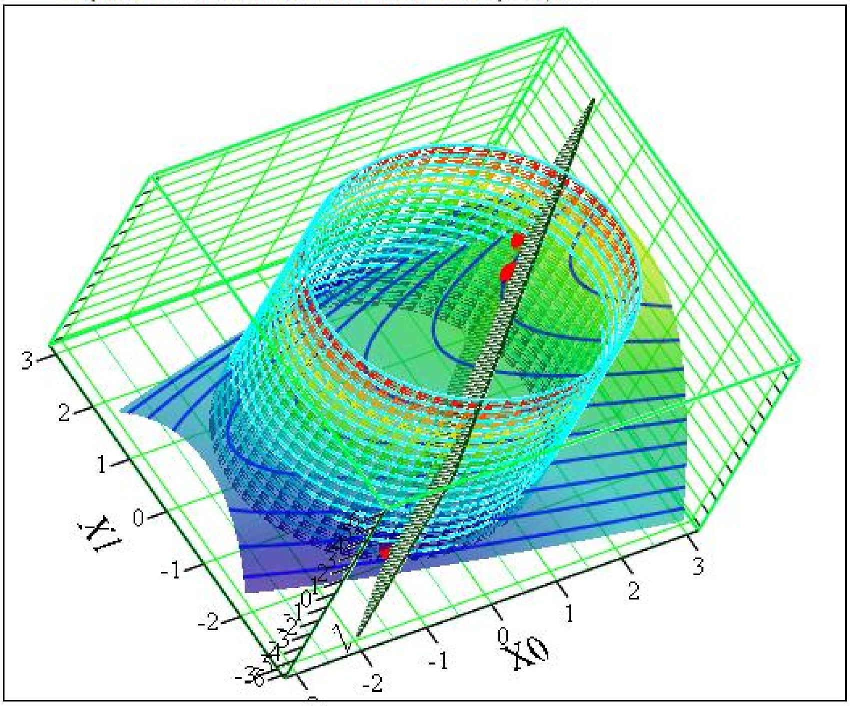
Расчет исходной матрицы для постоения графика ограничения-равенства используя дискретный аргумент.

$x - y - D = 0$ - ограничение в виде вертикальной плоскости

$x3_{i,j} := x_{min} + \Delta x\cdot i \qquad y3_{i,j} := x3_{i,j} - D \qquad G3_{i,j} := 2x1_{min} + 2\Delta y\cdot j$

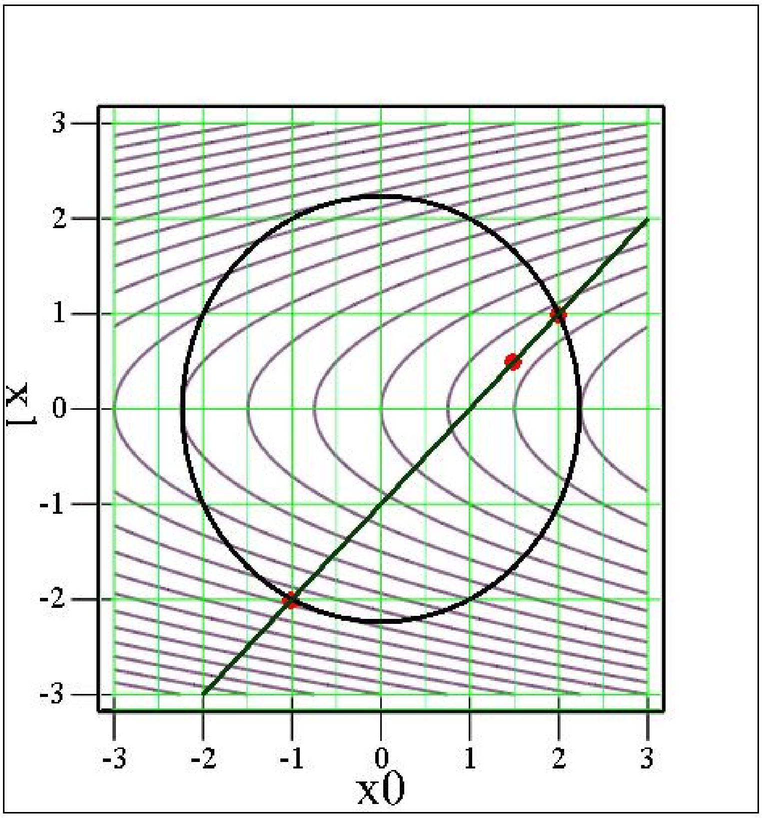
Рис. В 33. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.14 часть 10)

Построить трехмерный график в виде поверхности, отобразить ограничения и нанести точки экстремума



$(x_1, y_1, M), (X\_12, Y\_12, Z\_12), (x_2, y_2, G), (x_3, y_3, G3)$

Построить трехмерный график в виде линий уровня, отобразить ограничения и нанести точки экстремума



$(x_1, y_1, M), (X\_12, Y\_12, Z\_12), (x_2, y_2, G), (x_3, y_3, G3)$

Рис. В 34. Листинг программы поиск условного экстремума с ограничениями в смешанном виде (Пример 1.14 часть 11)

Миссия университета – открывать возможности для гармоничного развития конкурентоспособной личности и вдохновлять на решение глобальных задач.

Кафедра «Теплофизики и теоретических основ тепло- и хладотхники»
На кафедре реализуется магистерская программа по направлению 16.04.03 «Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения», профиль «Компьютерное моделирование в термодинамике»

Цели программы: реализация энергетической стратегии Российской Федерации, как приоритета в создании инновационных информационных технологий для создания энерго- и экологически эффективных термодинамических циклов и процессов тепломассообмена в системах генерации теплоты и холода

Рыков Сергей Владимирович
Кудрявцева Ирина Владимировна
Рыков Сергей Алексеевич
Рыков Владимир Алексеевич

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ПРИМЕРАХ В ПАКЕТЕ MATHCAD 15

Часть III
(Аналитические методы поиска условного экстремума)

Учебное пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49