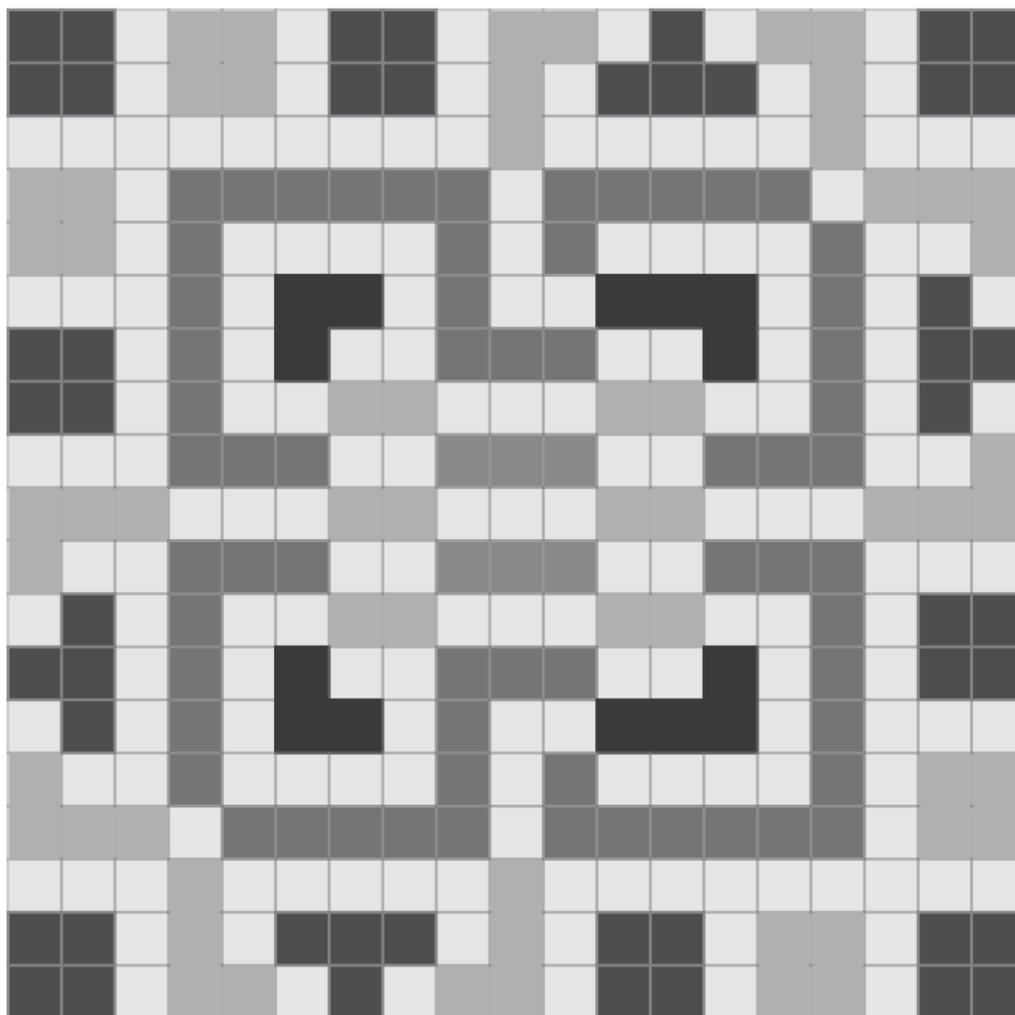


А. А. Ланцева, С. В. Иванов

**ДИСКРЕТНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ**  
Учебно-методическое пособие



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А. А. Ланцева, С. В. Иванов

## ДИСКРЕТНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Учебно-методическое пособие  
по выполнению лабораторных работ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО

по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и  
информатика в качестве учебно-методического пособия для реализации  
основных профессиональных образовательных программ высшего  
образования магистратуры

 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург  
2018

Ланцева А.А., Иванов С.В. Дискретные математические модели. Учебно-методическое пособие по выполнению лабораторных работ.

Учебно-методическое пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2018. – 33 с.

Рецензент: Митягин Сергей Александрович, к.т.н., директор Института дизайна и урбанистики Университета ИТМО

Настоящее учебно-методическое пособие составлено в соответствии с ОС Университета ИТМО 01.04.02 – Прикладная математика и информатика

Пособие содержит учебно-методические разработки, предназначенные для выполнения лабораторных работ по следующим темам: принципы моделирования; моделирование систем с дискретным временем на основе событий; стохастические модели входных данных; анализ результатов моделирования.

Учебно-методическое пособие «Методические рекомендации по выполнению лабораторных работ» предназначено для студентов, обучающихся по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика».



**Университет ИТМО** – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2018

© А.А. Ланцева, С.В. Иванов, 2018

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
Лабораторная работа № 1 Моделирование систем на базе клеточных автоматов .....	6
Лабораторная работа № 2 Модель клеточных автоматов на базе дискретных событий.....	10
Лабораторная работа № 3 Модель клеточных автоматов на базе дискретных событий с удалением событий .....	14
Лабораторная работа № 4 Сетевое моделирование на примере электрической цепи .....	17
Лабораторная работа № 5 Система массового обслуживания с одним обслуживающим устройством .....	20
Лабораторная работа № 6 Система массового обслуживания с двумя обслуживающими устройствами .....	23
Лабораторная работа № 7 Сравнение моделей с точными решениями.....	25
Лабораторная работа № 8 Оценка длины интервала моделирования .....	27
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 .....	30

## **ВВЕДЕНИЕ**

Учебно-методическое пособие разработано в соответствии с образовательным стандартом Университета ИТМО по направлению подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика».

В настоящем пособии представлены методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Дискретные математические модели».

По итогам выполнения всех работ студент должен получить теоретические знания об основных математических подходах, технологиях построения моделей дискретных систем; выборе корректных статистических моделей для генерации входных данных для моделирования; применении статистических методов для анализа результатов моделирования; а также приобрести практические навыки разработки и анализа моделей дискретных систем.

По итогам выполнения лабораторной студенту необходимо подготовить письменный отчет, содержащий основные результаты работы. Отчет должен быть оформлен согласно требованиям ГОСТ и включать титульный лист и основную часть. Образец титульного листа представлен в Приложении 1.

Обязательным элементом сдачи отчета является устная защита лабораторной работы, в рамках которой студент отвечает на вопросы из контрольного списка.

### **Оборудование и программное обеспечение необходимое для выполнения лабораторной работы:**

Студент индивидуально выполняет типовой вариант работы на персональном компьютере с операционной системой Windows 7 или выше. Высокоуровневый язык программирования выбирается студентом.

### **Письменный отчет**

Отчет по лабораторной работе представляется в печатном виде в формате, предусмотренном методическим пособием и шаблоном отчета по ЛР (приложение 1).

### **Критерии оценивания**

Защита отчета проходит в форме доклада студента по выполненной работе и ответов на вопросы преподавателя.

Основаниями для снижения количества баллов в диапазоне от 0,5 до 3 являются сдача лабораторной работы позже установленного срока.

Если оформление отчета и поведение студента во время защиты соответствуют указанным требованиям, студент получает максимальное количество баллов.

Отчет не может быть принят и подлежит доработке в случае:

- отсутствия необходимых разделов;
- отсутствия необходимого графического материала;
- некорректной обработки результатов расчёта и т.п.

Максимальное число баллов 5, минимальное – 2.

# Лабораторная работа № 1

## Моделирование систем на базе клеточных автоматов

### Цель работы

Целью данной лабораторной работы является получение студентом навыков реализации алгоритмов моделирования процессов с использованием математического аппарата клеточных автоматов.

### Краткие теоретические сведения

Клеточный автомат – дискретная модель физических явлений, в которой время и пространство дискретизированы, а число состояний также дискретизировано и конечно.

Клеточные автоматы включают идентичные по структуре и вычислительному аппарату компоненты – ячейки. Геометрически они расположены на одномерной, двумерной (и более) сетке и соединены друг с другом одинаковыми способами. Пример простейшего клеточного автомата представлен на рис. 1.1.



рисунки 1.1 –Простейший клеточный автомат

Было выявлено несколько характерных типов поведения одномерных клеточных автоматов:

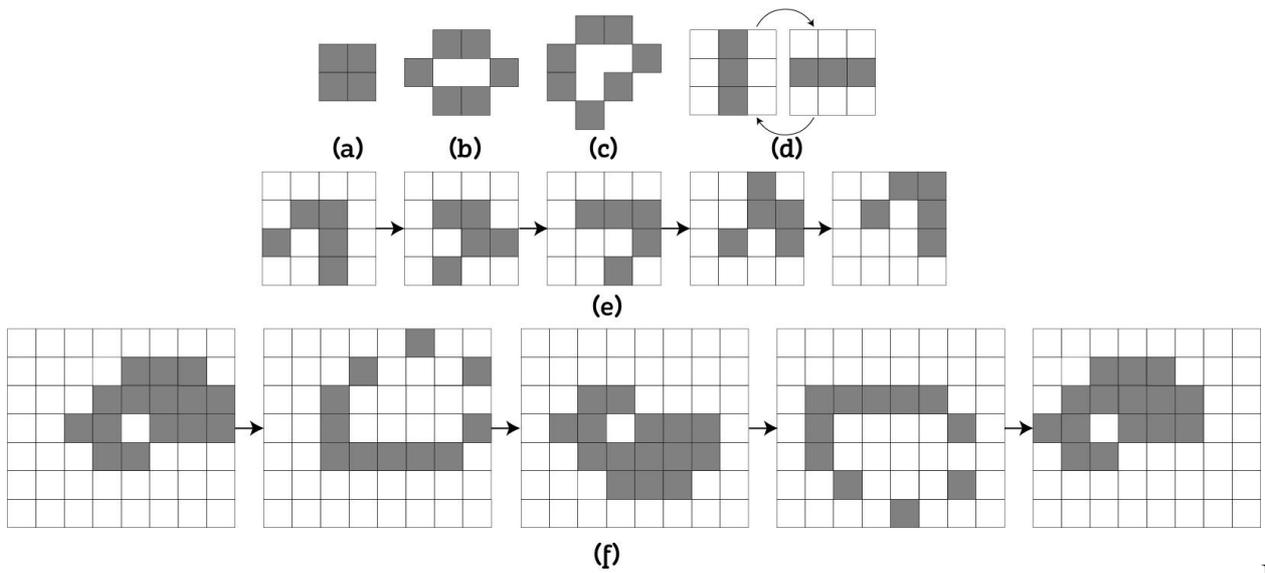
- быстрое угасание динамики, т.к. все автоматы “умирают”;
- периодическое поведение;
- хаотическое поведение;
- непредсказуемое – непериодическое, но демонстрирующее интересные повторяющиеся структуры.

*Игра “Жизнь”*. Игра проводится на двумерной сетке, возможно, бесконечного размера (рис. 1.2).

*Основные правила:*

- ячейка остается живой, если ее окружают две или три живые ячейки;
- ячейка умирает от перенаселения, если ее окружает более трех живых ячеек;
- ячейка умирает от изоляции, если у нее меньше двух живых соседей;

- мертвая ячейка становится живой, если она имеет ровно три живых соседа.



Р

исунок 1.2 – Характерные шаблоны поведения в игре “Жизнь”:  
 (a)-(c) – неподвижный; (d) – осциллирующий; (e)-(f) – зацикленный и движущиеся

### Ход работы

Пройти по всем ячейкам в сетке, применяя к каждой ячейке правила перехода между состояниями. Запомнить новые состояния и заменить старые состояния новыми после обхода всех ячеек.

Необходимо учитывать недостатки данного подхода:

- избыточный просмотр ячеек;
- избыточный объем памяти;
- невозможность моделировать на бесконечной сетке.

Пример визуализации сетки в *матричном виде* приведен на рис.1.3.

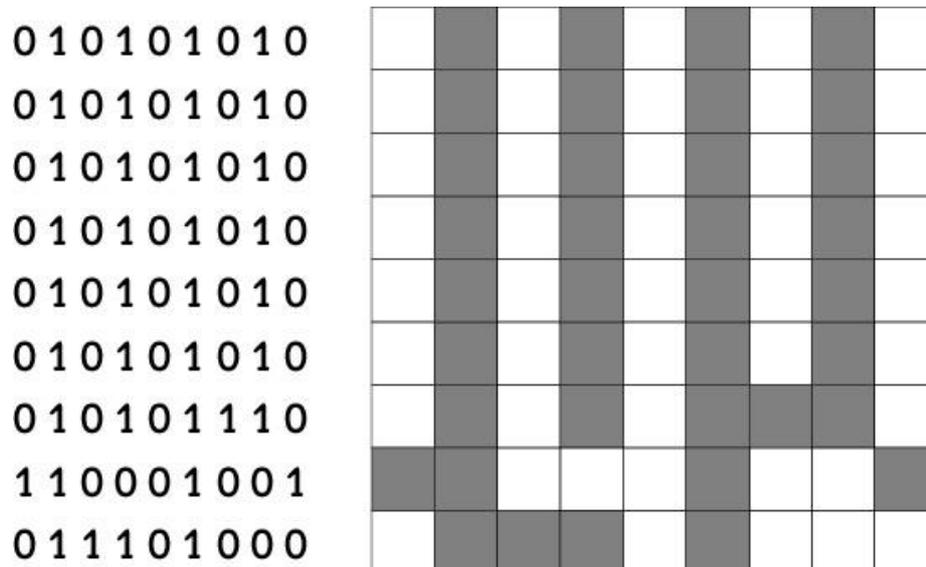


Рисунок 1.3 – Матричное представление сетки

Пример кода реализации сетки на C# представлен на рис. 1.4.

```

1  set terminal pngcairo
2  set output 'matrix.png'
3  set border linewidth 1
4  unset key
5  unset colorbox
6  set palette grey negative
7  rows = 10
8  cols =10
9  set size ratio rows*1.0/cols
10 set yrange [] reverse
11 set xtics autofred -0.5,1,cols
12 set ytics autofred -0.5,1,rows
13 set grid front linetype -1 linecolor rgb "grey"
14 set format x ""
15 set format y ""
16
17 plot 'data_example.dat' matrix with image
18 end

```

Рисунок 1.4 – Реализации сетки на C#

Пример кода для вызова визуализатора на C# приведен на рис. 1.5.

```

1 //читаем шаблон
2 StreamReader sr = new
3 StreamReader(patternSource);
4 string pattern = sr.ReadToEnd();
5 sr.Close();
6
7 //делаем замены в шаблоне
8 string plotPattern =pattern.Replace("TEXT in Script",new_text);
9
10 //записываем файлы и делаем картинку
11 File.WriteAllText(new_script,plotPattern);
12 ProcessStartInfo PSI = new ProcessStartInfo();
13 PSI.FileName = new_script;
14 using (Process exeProcess = Process.Start(PSI))
15 {
16     exeProcess.WaitForExit();
17 }

```

Ри

сунук 1.5 – Вызов визуализатора из программы

### Вопросы:

1. Определение математической модели.
2. Системный подход к описанию моделей.
3. Разница между моделированием (modeling) и симуляцией (simulation). Шаги моделирования. Является ли программа моделью?
4. Классы моделей.

### Литература

1. Wolfram S. Cellular automata: collected papers. – 1994.
2. Тоффоли Т., Марголюс Н. Машины клеточных автоматов. – Мир, 1991.
3. Hoekstra A. G. et al. Complex automata: multi-scale modeling with coupled cellular automata //Simulating complex systems by cellular automata. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2010. – С 29-57.

## Лабораторная работа № 2

### Модель клеточных автоматов на базе дискретных событий

#### Цель работы

Целью данной работы является получение студентом навыков реализации алгоритмов моделирования процессов с использованием математического аппарата клеточных автоматов на базе дискретных событий.

#### Краткие теоретические сведения

Все дискретно-событийные имитационные модели имеют ряд общих компонентов. Их логическая организация позволяет обеспечить и упростить типовые операции при программировании, отладке и последующем изменении имитационной модели. Типовая дискретно-событийная модель (рис.2.1), написанная на универсальном языке программирования, включает следующие компоненты:

состояние системы – совокупность переменных состояния, необходимых для описания системы в определенный момент времени;

часы модельного времени – переменная, указывающая текущее значение модельного времени;

список событий – список, содержащий время возникновения каждого последующего типа событий;

статистические счетчики – переменные, предназначенные для хранения статистической информации о характеристиках системы;

программа инициализации – подпрограмма, устанавливающая в исходное состояние имитационную модель в момент времени, равный нулю;

синхронизирующая программа – подпрограмма, которая отыскивает следующее событие в списке событий и затем переводит часы модельного времени на время возникновения данного события;

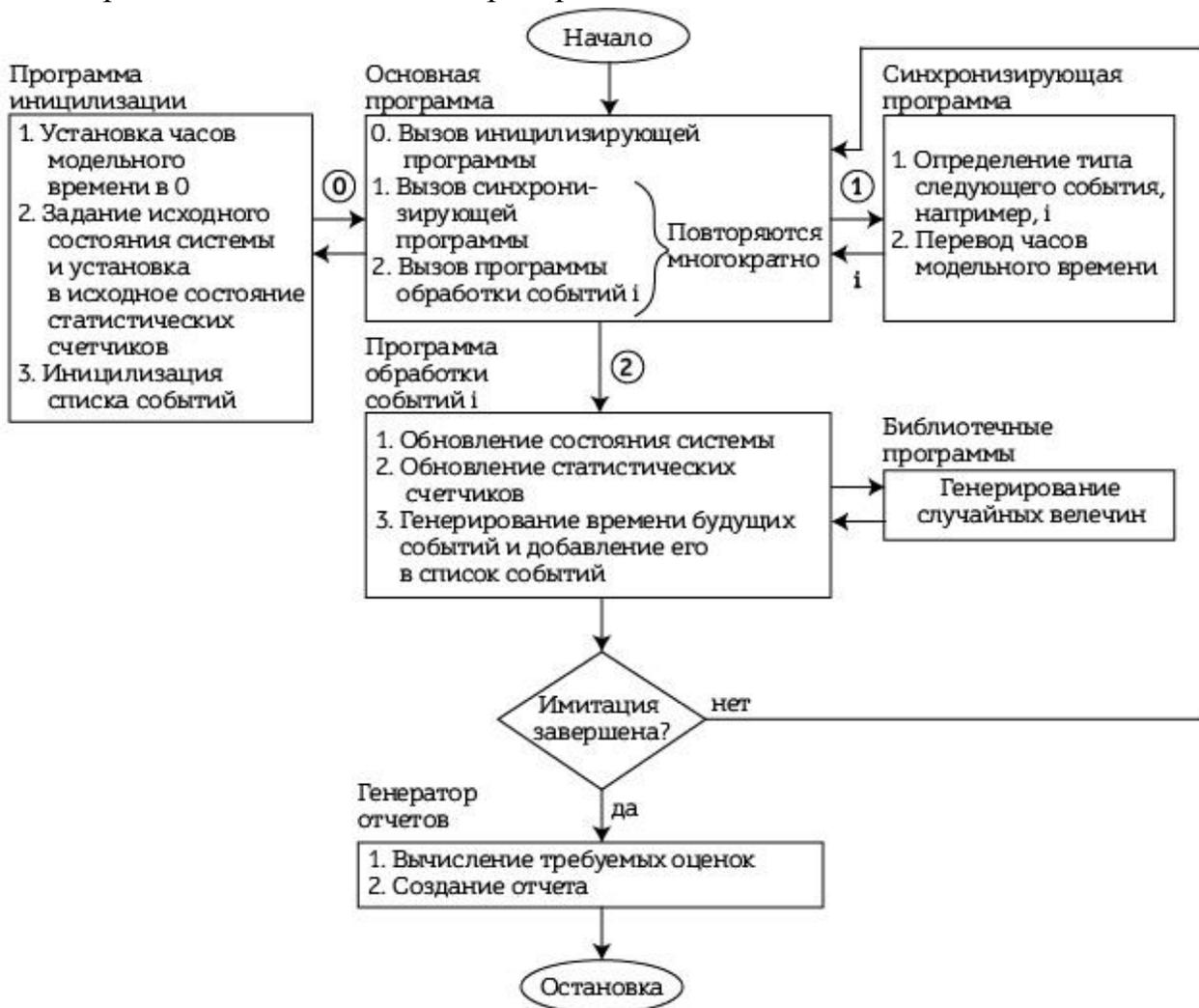
программа обработки событий – подпрограмма, обновляющая состояние системы, когда происходит событие определенного типа (для каждого типа событий реализуется своя программа обработки событий);

библиотечные программы – набор подпрограмм, применяемых для генерации случайных наблюдений из распределений вероятностей, которые были определены как часть имитационной модели;

генератор отчетов – подпрограмма, которая считывает оценки (со статистических счетчиков) критериев оценки работы и выдает отчет по окончании моделирования;

основная программа – подпрограмма, которая вызывает синхронизирующую программу, для того чтобы определить следующее

событие, а затем передает управление соответствующей событийной программе с целью обеспечения заданного обновления состояний системы. Основная программа может также контролировать необходимость прекращения моделирования и вызывать генератор отчетов по его окончанию.



Р

исунок 2.1 – Компоненты дискретно-событийной имитационной модели и их организация

### Ход работы

- Смоделировать поведение ячеек в игре “Жизнь” на основе дискретных событий;
- При визуализации делать промежуточные шаги, помечая серым ячейки, которые просматриваются на очередном шаге;
- Для “планеров” (glider) сделать “прозрачные” края, т.е. если фигура уходит, например, за правую границу, она должна появляться из-за левой границы получается тороидальная сетка (заикливание);
- Ввести два поля ячеек – текущее и следующее;
- Ввести два типа событий:

- а) просмотр одной ячейки поля и модификация ячеек в следующем;
- б) просмотр всего поля и выбор ячеек для просмотра и модификации.

Моделирование начинается с добавления события второго типа и некоторого начального текущего поля.

Событие второго типа порождает события первого типа и в конце добавляет одно событие второго типа, что обеспечивает цикл моделирования. События первого типа новых событий не порождают.

Продвижение по времени обеспечивается за счет реализации события второго типа. Для данной модели время не играет роли, важна только последовательность событий. Считается, что для каждого поля происходит смещение виртуального времени на единицу (по смыслу – это номер итерации моделирования). Все события просмотра и модификации ячеек на одной итерации считаются одновременными (т.е. имеют одинаковое модельное время). На рис. 2.2 и 2.3 приведены два примера реализации дискретных событий на языке C#:

```

/// <summary>
/// Класс для дискретно-событийного моделирования
/// </summary>
public class DEVS
{
    /// <summary>
    /// Внутренняя очередь для моделирования
    /// </summary>
    static EventsQueue EQ = new EventsQueue();

    public static double GlobalTime...

    /// <summary> ...
    public static void AddStartEvent(ModelEvent ME)...

    /// <summary>
    /// Обработать очередное событие
    /// </summary>
    public static void ProcessNextEvent()...

    /// <summary>
    /// Класс для модельного события
    /// </summary>
    public abstract class ModelEvent...
}

public abstract class ModelEvent
{
    /// <summary>
    /// Добавить данное событие в очередь
    /// </summary>
    protected void Enque()...

    /// <summary>
    /// Добавить другое событие в очередь
    /// </summary>
    /// <param name="ME">Добавляемое событие</param>
    protected static void Enque(ModelEvent ME)...

    double _eTime;

    /// <summary>
    /// Время наступления события
    /// </summary>
    public double eTime...

    /// <summary>
    /// Вывести отладочную информацию
    /// </summary>
    public void Debug()...

    /// <summary>
    /// Выполнить полезное действие
    /// </summary>
    public abstract void Execute();
}

```

P

исунок 2.2 – Пример реализации дискретных событий №1

```

// Реализация пользовательского класса события
class myEvent : DEVS.ModelEvent
{
    public override void Execute()
    {
        // .....
        AnotherEvent AE = new AnotherEvent();
        AE.eTime = this.eTime + 1; // продвижение по времени
        DEVS.ModelEvent.Enqueue(AE); // Добавление нового события в очередь
    }

// Запуск процесса моделирования
myEvent ME = new myEvent();
ME.eTime = 0; // для начала моделирования добавим одно событие типа
DEVS.AddStartEvent(ME);
while(...)
{
    DEVS.ProcessNextEvent();
}
// Вывод результата

```

Ри

сунук 2.3 – Пример реализации дискретных событий №2

### Вопросы

1. Основные шаги при построении модели.
2. Роль визуализации при построении модели и анализе результатов моделирования.
3. Преимущества моделирования как способа решения задач. Недостатки моделирования.

### Литература

1. Wolfram S. Cellular automata: collected papers. – 1994.
2. Тоффоли Т., Марголуз Н. Машины клеточных автоматов. – Мир, 1991.
3. Hoekstra A. G. et al. Complex automata: multi-scale modeling with coupled cellular automata //Simulating complex systems by cellular automata. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2010. – С 29-57.

## **Лабораторная работа № 3**

### **Модель клеточных автоматов на базе дискретных событий с удалением событий**

#### **Цель работы**

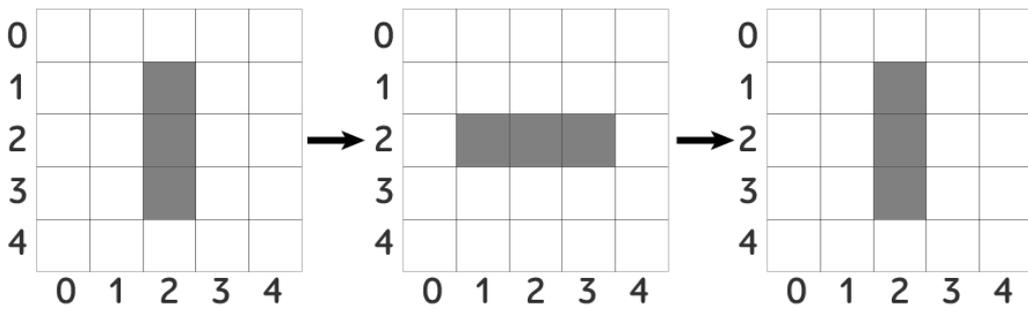
Целью данной работы является получение студентом навыков реализации алгоритмов моделирования процессов с использованием математического аппарата клеточных автоматов на базе дискретных событий и механизма удаления из очереди части событий для повышения эффективности процедуры моделирования.

#### **Краткие теоретические сведения**

Варианты реализации игры “Жизнь”:

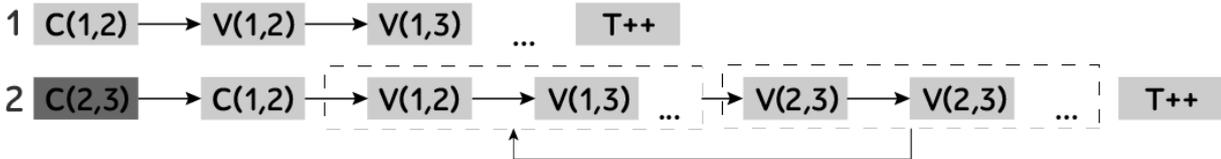
- с константным временем: сканирование на каждом шаге всего поля с применением правил к живым ячейкам и их соседям;
- с константным временем, усовершенствованная (без сканирования всего поля):
  - записать в массив координат живых ячеек;
  - на каждом шаге применять правила к живым ячейкам и их соседям;
- событийная с константным временем (вариант 1): событие – просмотр и изменение состояния ячейки в подменном поле, замена текущего поля подменным;
- событийная с константным временем (вариант 2): разбиение событий на три типа – просмотр, изменение, сдвиг по времени. Событие приводит к тому, что на следующем шаге просматриваются только измененные ячейки и их соседи. Сдвиг по времени просто фиксирует факт прохождения очередной итерации.

На рис. 3.1 и 3.2 схематически представлены стандартная событийная модель и модель с удалением.

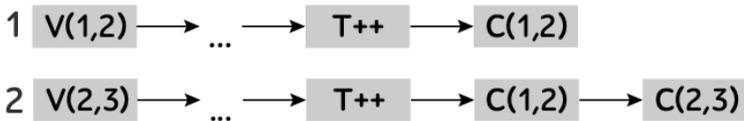


**Формирование событий**

С - изменение V - просмотр Т - сдвиг по времени

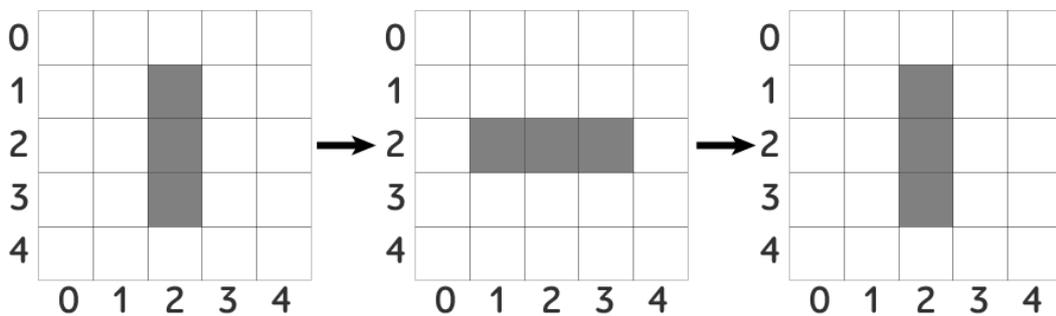


**Исполнение очереди**



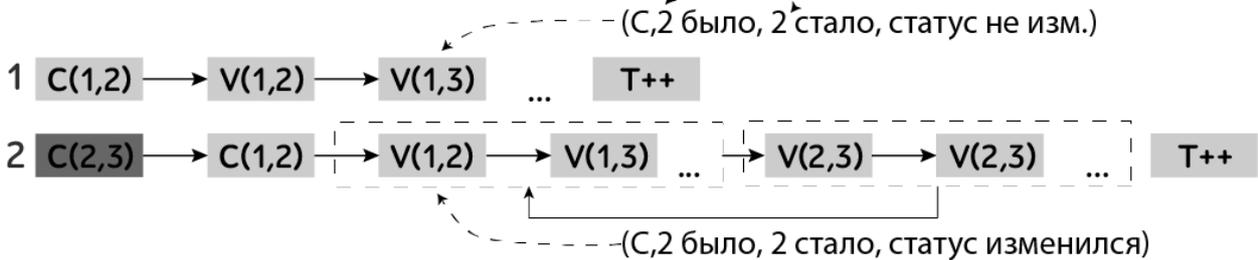
Рис

унок 3.1 – Событийная модель (истинная)

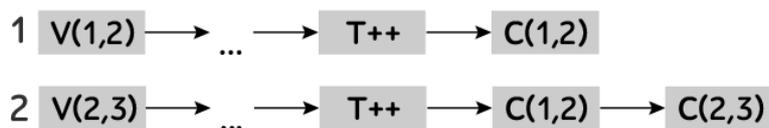


**Формирование событий**

С - изменение V - просмотр Т - сдвиг по времени



**Исполнение очереди**



**Новое событие**

Если при последнем событии «С» число живых соседей в событии «V» не поменялось и у события не поменялся статус, то оно удаляется из очереди

Р

исунок 3.2 – Событийная модель с удалением событий

## **Ход работы**

Реализовать оба варианта событийных моделей:

- а. при исполнении событий 'С' подсвечивать события 'V' для следующего шага;
- б. удалять подсветку с удаленных событий.

## **Вопросы**

1. Отличие систем с дискретным временем от моделей с непрерывным временем.
2. Интерактивная визуализация. Назовите ее отличия и преимущества относительно статической визуализации.
3. Для чего применяется дискретно-событийная модель (стандартная)?
4. Дискретно-событийная модель с удалением события.

## **Литература**

1. Лобанов А. И. Модели клеточных автоматов // Компьютерные исследования и моделирование. – 2010. – Т. 2. – №. 3. – С. 273-293.
2. Wolfram S. Cellular automata: collected papers. – 1994.
3. Тоффли Т., Марголус Н. Машины клеточных автоматов. – Мир, 1991.

## Лабораторная работа № 4

### Сетевое моделирование на примере электрической цепи

#### Цель работы

Целью данной работы является получение студентом навыков реализации алгоритмов моделирования процессов с использованием математического аппарата дискретных событий применительно к задаче расчета электрической цепи.

#### Краткие теоретические сведения

Электрическая цепь (гальваническая цепь) – совокупность устройств, элементов, предназначенных для протекания электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий “сила тока” и “напряжение”.

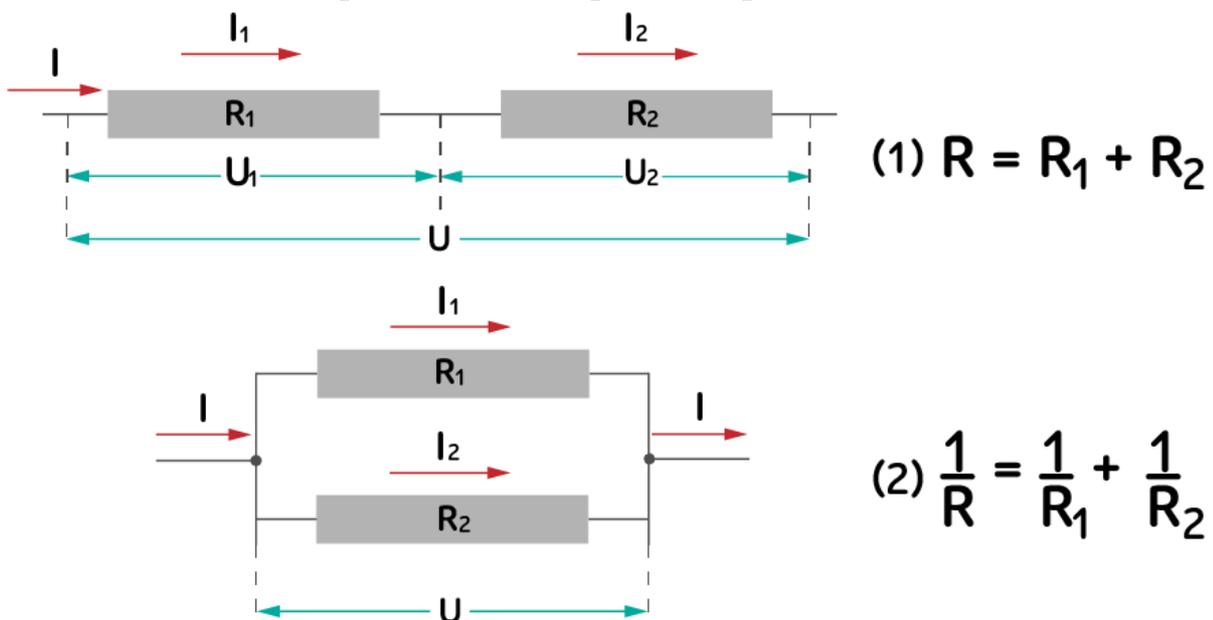
Обозначения:

$I$  – величина постоянного тока;

$R$  – сопротивление;

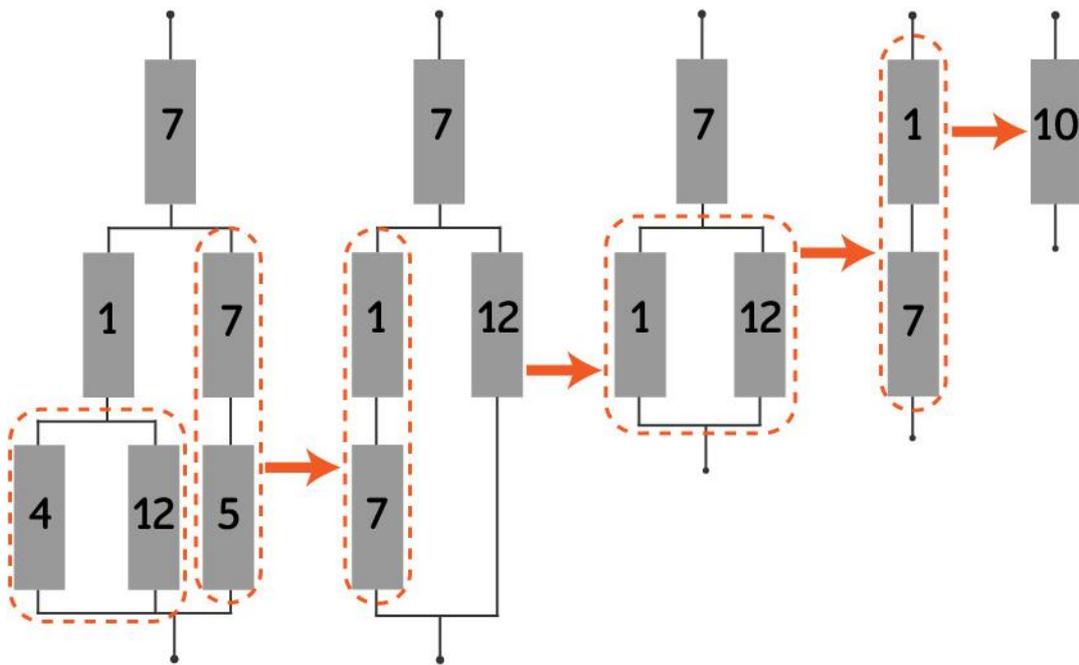
$U$  – величина электрического напряжения.

На рис. 4.1 и 4.2 приведены примеры стандартного расчета электрических цепей. Однако в рамках данного курса рассматривается расчет электрических цепей на основе дискретного моделирования (рис. 4.3).



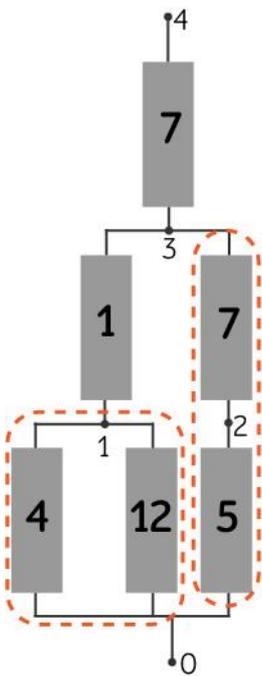
исунок 4.1 – Расчет электрических цепей: Классический подход

P



Рисун

ок 4.2 – Расчет электрических цепей: Классический подход



**Структура сети:**

$(0,1,4), (0,1,12), (0,2,5), (1,3,1), (2,3,7), (3,4,7)$

**Начальные события:**

Все события, которые относятся к сегменту, исходящему из нулевого узла

**Переходы:**

- Последовательные: выражение 1
- Параллельные: выражение 2

Рисун

ок 4.3 – Расчет электрических цепей на основе дискретного моделирования

**Ход работы**

Реализовать систему расчета электрических цепей на основе дискретно-событийного сетевого расчета сопротивлений.

В качестве основы дискретно-событийного моделирования использовать ту же библиотеку, что и для игры “Жизнь” (ЛР 1-3).

**Вопросы**

1. Дискретные случайные величины.
2. Непрерывные случайные величины.
3. Моменты распределений. Среднее и мода.
4. Полезные статистические модели в задачах моделирования.
5. Проблема ограниченности входных данных.

### **Литература**

1. Алиев Т. И. Основы моделирования дискретных систем. СПб: СПбГУИТМО, 2009.
2. Stewart R. Simulation: the practice of model development and use//Journal of Simulation. – 2004.
3. Delaney W. Dynamic models and discrete event simulation. – CRC Press, 1988. – Т. 53.
4. Banks J. et al. Discrete-event system simulation: Pearson new international edition. – Pearson Higher Ed, 2013.

## Лабораторная работа № 5

### Система массового обслуживания с одним обслуживающим устройством

#### Цель работы

Целью данной работы является получение студентом навыков реализации алгоритмов моделирования системы массового обслуживания с одним обслуживающим устройством.

#### Краткие теоретические сведения

Математический аппарат, описывающий закономерности функционирования систем, удовлетворяющих массовому спросу, в том числе образование очередей в системах такого рода, называется теорией массового обслуживания.

Система массового обслуживания (СМО) предназначена для обслуживания каких-либо заявок, поступающих в нее в случайные моменты времени.

Устройство, непосредственно обслуживающее заявку – канал обслуживания. СМО с одним устройством называется одноканальной, с несколькими обслуживающими устройствами – многоканальной.

Поступление заявки – событие. Последовательность событий на входе в СМО – входящий поток заявок, на выходе из СМО – выходящий поток заявок.

СМО бывают:

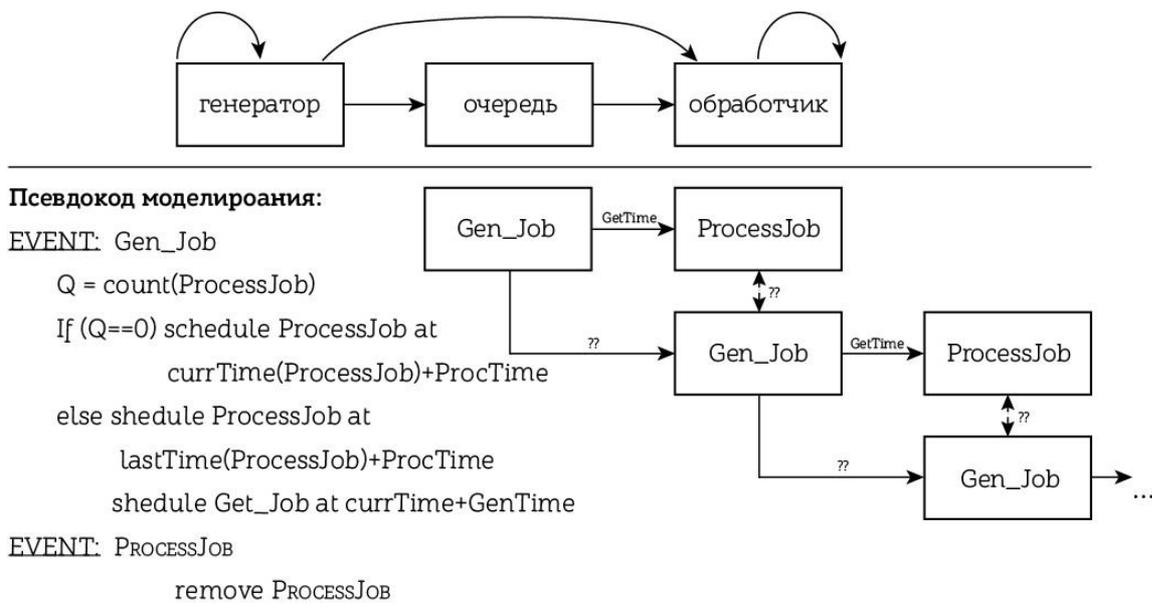
с отказами (заявка, поступившая, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает СМО);

с очередью/ с ожиданием (заявка, поступившая в момент занятости всех каналов, становится в очередь и ожидает освобождения одного из каналов обслуживания);

смешанного типа, например, с ограниченной очередью или с ограниченным временем ожидания;

открытого типа (интенсивность поступающего в СМО потока заявок не зависит от ее состояния); замкнутого типа (обслуживается ограниченный круг “клиентов”, поэтому интенсивность потока заявок существенно зависит от состояния системы).

На рис. 5.1 приведены схема и псевдокод системы обработчика заявок.



Рисуно

к 5.1 – Пример системы обработчика

### Ход работы

1. Построить модели обслуживания пациентов на базе дискретных событий:
  - a. Врачу назначают нового пациента каждые 10 минут;
  - b. Время обслуживания:

$$S_i = \begin{cases} 9 \text{ минут с вероятностью } 0.9 \\ 12 \text{ минут с вероятностью } 0.1 \end{cases}$$

$$E(S_i) = 9(0.9) + 12(0.1) = 9.3 \text{ минуты}$$

$$V(S_i) = E(S_i^2) - [E(S_i)]^2 = 0.81 \text{ минут}^2$$

$$\begin{array}{ll} S_1 = 9 & W_1^Q = W_2^Q = 0 \\ S_2 = 12 & W_3^Q = 22 - 20 = 2 \\ S_{3,4,5} = 9 & W_4^Q = 31 - 30 = 1 \\ \dots & W_5^Q = 0 \end{array}$$

2. Измерить среднюю и максимальную длину очереди (зависит от интервала моделирования).
3. Найти число клиентов, ожидавших в очереди более одной минуты.
4. Модифицировать модель на случай двух докторов.

### Вопросы

1. Дискретно-событийное моделирование для систем массового обслуживания.
2. Основные понятия систем с очередями.

3. Параметры моделей с очередями: скорость прихода, скорость обслуживания, количество обслуживающих устройств.

### **Литература**

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979. 432 с //Сведения об авторах Владимир Анатольевич Богатырев.
2. Бочаров П. П. и др. Стационарные характеристики системы массового обслуживания G/MSP/1/r //Автоматика и телемеханика. – 2003. – №. 2. – С. 127-142.
3. Желудков А. В., Макаров Д. В., Фадеев П. В. Исследование программных реализаций очереди на примере системы массового обслуживания //Символ науки. – 2016. – №. 11-3.

## Лабораторная работа № 6

### Система массового обслуживания с двумя обслуживающими устройствами

#### Цель работы

Целью данной работы является получение студентом навыков реализации алгоритмов моделирования системы массового обслуживания с двумя обслуживающими устройствами.

#### Краткие теоретические сведения

##### *Устойчивость поведения имитационной модели*

Для систем с бесконечным числом клиентов поступление новых клиентов рассматривается как пуассоновский процесс со средним числом поступлений  $\lambda$  в единицу времени. Это означает, что интервалы времени между событиями подчиняются экспоненциальному распределению со средним значением  $\frac{1}{\lambda}$ . Поскольку время между событиями имеет экспоненциальное распределение, такие модели называются Марковскими.

Система с очередью считается статистически устойчивой (находится в статистическом равновесии), если вероятность ее нахождения в каком-либо состоянии не зависит от времени:

$$P(L(t) = n) = P_n(t) = P_n, \quad (6.1)$$

Где  $L$  – долгосрочное среднее число клиентов в системе;  $\{P_n\}$  – устойчивое распределение числа клиентов в системе.

Для достаточно простых систем:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n. \quad (6.2)$$

Зная  $L$ , можно вычислить и другие важные параметры:

$$w = \frac{L}{\lambda};$$
$$w_Q = w - \frac{1}{\mu}; \quad (6.3)$$
$$L_Q = \lambda w_Q.$$

где  $w$  – среднее время пребывания клиента в системе;  $w_Q$  – среднее число клиентов в системе;  $L_Q$  – среднее число клиентов в очереди.

Условие устойчивости: коэффициент утилизации

$$\left(\rho = \frac{\lambda}{c\mu}\right) < 1. \quad (6.4)$$

#### Ход работы

1. Смоделировать процесс из ЛР 5 на основе дискретных событий обслуживания с двумя обслуживающими устройствами.

2. Оценить ошибку моделирования для следующих параметров:  $L, w, w_Q, L_Q$  в зависимости от числа итераций моделирования.
3. Оценить распределение числа клиентов в системе (в виде гистограммы).

### Вопросы

1. Блок схемы событий прихода клиента.
2. Блок схема событий обслуживания клиента.
3. Оценка параметров результатов моделирования: среднее время ожидания, вероятность ожидания больше определенного периода времени, среднее время обслуживания, среднее время между приходами, число обслуженных клиентов.

### Литература

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979. 432 с //Сведения об авторах Владимир Анатольевич Богатырев.
2. Бочаров П. П. и др. Стационарные характеристики системы массового обслуживания G/MSP/1/r //Автоматика и телемеханика. – 2003. – №. 2. – С. 127-142.
3. Желудков А. В., Макаров Д. В., Фадеев П. В. Исследование программных реализаций очереди на примере системы массового обслуживания //Символ науки. – 2016. – №. 11-3.

## Лабораторная работа № 7

### Сравнение моделей с точными решениями

#### Цель работы

Целью данной работы является получение студентом навыков реализации алгоритмов сравнения результатов работы моделей с точными решениями для оценки качества процедуры моделирования и возможных ошибок.

#### Краткие теоретические сведения

Пуассоновский поток (процесс) – ординарный поток однородных событий, для которого число событий в интервале  $A$  не зависит от числа событий в любых интервалах, не пересекающихся с  $A$ , и подчиняется распределению Пуассона.

Распределение Пуассона – вероятностное распределение дискретного типа, моделирует случайную величину, представляющую собой число событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят независимо друг от друга с некоторой фиксированной средней интенсивностью.

Экспоненциальное или показательное распределение – абсолютно непрерывное распределение, моделирующее время между двумя последовательными свершениями одного и того же события (листинги 7.1, 7.2).

Листинг 7.1 – Общий алгоритм генерации экспоненциального распределения

1:  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$ ;  
2:  $F(x) = R$ ;  
3:  $1 - e^{-\lambda x} = R \Rightarrow -\frac{1}{\lambda} \ln 1 - R$ ;  
4:  $X_i = F^{-1}(R_i)$ ;  
5:  $X_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(R_i), R \in \text{uniform}([0, 1])$ .

#### Ход работы

##### *Постановка задачи*

Два работника соревнуются за рабочее место. Клиенты приходят в среднем два раза в час (пуассоновский процесс). Один работник обслуживает клиентов в среднем 24 мин со стандартным отклонением 20 мин, а второй – 25 мин со стандартным отклонением 2 мин. Если средняя длина очереди является главным критерием, то какой работник будет принят на работу? Необходимо:

- 1) оценить точность определения длины очереди в зависимости от числа итераций (сравнить с точным решением);

2) построить распределение числа клиентов в очереди (в виде гистограммы).

### **Вопросы**

1. Свойства пуассоновского процесса.
2. Устойчивость поведения систем со случайным входом. Статистическое равновесие, сравнение точных оценок с результатами моделирования.

### **Литература**

1. Тупицына А. И. Методы компьютерного моделирования физических процессов и сложных систем: учебное пособие. СПб: Университет ИТМО, 2014. 42 с.
2. Кормен Т. Х., Лейзерсон Ч. И., Ривест Р. Л., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. М.: Вильямс, 2013. 1328 с.
3. Новиков Б. Ю. Методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине "Компьютерное моделирование". СПб: НИУ ИТМО, 2012. 33с.

## Лабораторная работа № 8

### Оценка длины интервала моделирования

#### Цель работы

Целью данной работы является получение студентом навыков реализации алгоритмов оценки длины интервала моделирования для получения заданной точности оцениваемого параметра за минимальное число шагов моделирования.

#### Краткие теоретические сведения

##### *Анализ эффективности результатов моделирования*

Моделирование обычно связано с использованием случайных чисел. Результат моделирования также оказывается случайным, и оценка любого параметра модели содержит ошибку.

Цель анализа эффективности результатов моделирования – определить стандартную ошибку, или доверительный интервал для моделируемого параметра, или определить число наблюдений, необходимое для достижения требуемого уровня точности или доверительного интервала нужного размера.

##### *Эффект автокорреляции*

Рассмотрим систему обработки заказов, выходным параметром которой является переменная  $Y$  с неизвестным законом распределения, который мы хотим установить. Моделирование интервала времени в одну неделю дает один из возможных вариантов траектории выходных параметров. При увеличении интервала моделирования это, тем не менее, не позволяет применять классические статистические методы, которые подразумевают, что все значения в выборке независимы, т.к. соседние значения в траектории выходных параметров автокоррелированы (есть корреляция с предыдущими значениями).

Автокорреляция присутствует в большинстве моделей. В частности, этот эффект сказывается при выборе начальных значений. Например, наличие в системе на начальный момент времени большого числа невыполненных заказов, отражается на результате моделирования за всю неделю. Как следствие, при *некорректном* выборе начальных значений траектории выходных параметров будут иметь различные распределения.

##### *Виды моделирования для выходного анализа*

Основные виды моделирования: переходное (transient) и устойчивое (steady-state).

Переходное моделирование осуществляется до наступления определенного события, которое это моделирование обрывает.

#### *Примеры моделей переходных состояний*

1. Банк открывается в 8:30 ( $t=0$ ) и закрывается в 11:30. Число клиентов изначально равно 0, работает 8 из 11 касс. Событие завершения моделирования  $t_e=480$  мин. Необходимо смоделировать взаимодействие клиентов и кассиров в течение дня, включая поведение системы при открытии и ситуацию при закрытии банка.
2. Банк работает с 8:30 и до 13:30, но есть период наибольшей нагрузки с 11:30 до 13:30, т.е.  $t_e=120$  мин. Есть два варианта:
  - (а) определить распределение клиентов на момент времени 11:30;
  - (б) начать моделирование с 8:30 без сбора статистики и начать анализ только с 11:30.

#### *Когда моделирование должно быть прекращено?*

В примере 1, если необходимо исследовать передвижение денежных средств или автоматизированных касс, то моделирование можно продолжать далеко за пределы одного рабочего дня.

Для примера 2: если интересует долгосрочное поведение коммуникационной системы, то можно смоделировать замену вышедшего из строя компонента и продолжить моделирование до наступления следующего критического события.

Таким образом, выбор типа и периода моделирования зависит от решаемой задачи.

#### *Модели с устойчивым поведением*

Есть некоторый производственный процесс, который начиная со второго шага можно считать не зависящим от начальных условий. Относительно длинный период моделирования в 13 шагов можно считать достаточным для устойчивой оценки некоторых параметров. Однако этот результат содержит статистическую ошибку. Студент сам может принять решение, приемлем ли уровень ошибки для целей моделирования.

#### **Ход работы**

1. Модифицировать пример 1 таким образом, чтобы задавалась точность какого-либо параметра (например, утилизация обслуживающего устройства или длина очереди).
2. Сделать несколько тестовых запусков и определить число репликаций, необходимых для достижения заданной точности. Если точность не достигнута, то повторить процедуру еще раз.

3. Модифицировать пример 2 таким образом, чтобы каждый рабочий день моделировался независимо и моделирование автоматически прекращалось, когда доверительные интервалы для длины очереди перестают перекрываться. Если они продолжают перекрываться при увеличении числа итераций, нужно выдать сообщение, что при указанном критерии точности (необходимо задать заранее) нельзя судить о различиях в результатах моделирования.

### **Вопросы**

1. Эффект автокорреляции, переходные и терминальные процессы.
2. Проблема момента завершения моделирования.
3. Оценка моделей с устойчивым поведением, предсказательный интервал и доверительный интервал, достижение доверительного интервала заданной точности.

### **Литература**

1. Тупицына А. И. Методы компьютерного моделирования физических процессов и сложных систем: учебное пособие. СПб: Университет ИТМО, 2014. 42 с.
2. Кормен Т. Х., Лейзерсон Ч. И., Ривест Р. Л., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. М.: Вильямс, 2013. 1328 с.
3. Новиков Б. Ю. Методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине "Компьютерное моделирование". СПб: НИУ ИТМО, 2012. 33 с.

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**

Отчет

о выполнении лабораторной работы № X  
«Тема работы»

**Работу выполнил:**  
ст. группы <Номер группы> Фамилия И.О.

**Работу принял:**  
Иванов С.В.

Санкт-Петербург  
201\_

### **Цель работы**

Какая цель преследуется при выполнении лабораторной работы (2–3 строки).

### **Постановка задачи**

Задача, которая решается при выполнении этой лабораторной работы (1 абзац на 0.2 – 0.3 стр.).

### **Краткая теоретическая часть**

Краткие сведения о теме дисциплины, по которой выполняется лабораторная работа. Сведения об используемых методах, методиках, алгоритмах: свойства, достоинства, недостатки (не более 1 стр.).

### **Результаты**

Представление результатов (промежуточные и итоговые изображения). Краткое обсуждение результатов (что означают конкретные значения) – 1–3 стр.

### **Заключение**

Что сделано. Какие навыки и умения приобретены. Прогноз возможностей применения навыков и умений, а также полученных результатов (5–10 строк).

**Миссия Университета**– открывать возможности для гармоничного развития конкурентоспособной личности и вдохновлять на решение глобальных задач.

---

## **КАФЕДРА ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ**

<http://hpc.ifmo.ru/>

**Кафедра высокопроизводительных вычислений (ВПВ)** создана в 2010 году на факультете Информационных технологий и программирования (ФИТиП). Преподавательский коллектив кафедры ВПВ состоит из специалистов в области математического и компьютерного моделирования, обработки сверхбольших объемов данных, научной визуализации и виртуальной реальности и предметных областей.

Сотрудники кафедры принимают активное участие в реальных научных проектах мирового уровня и публикуют результаты исследований в ведущих российских и международных журналах. Собственная современная лаборатория, оснащённая уникальным оборудованием, вычислительными ресурсами и облачными сервисами, позволяет в режиме реального времени решать широкий спектр задач в области компьютерного моделирования, управления большими объёмами данных, создания ситуационных центров для принятия решений и координации работ в условиях чрезвычайных ситуаций, а также 3D визуализации исследуемых процессов и результатов экспериментов.

Кафедра Высокопроизводительных Вычислений получила сертификаты о международной и профессионально-общественной аккредитации магистерских образовательных программ от European Network for Accreditation of Engineering Education и Ассоциации инженерного образования России.

Ланцева Анастасия Андреевна  
Иванов Сергей Владимирович

## **ДИСКРЕТНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ**

**Учебно-методическое пособие**

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел  
Университета ИТМО  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49