УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.И. Попов, А.И. Трифанов, И.С. Лобанов, И.Ю. Попов

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Санкт-Петербург
2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Лобанов И.С., Попов А.И., Попов И.Ю., Трифанов А.И.

Типовой расчет по математической физике

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО по направлению подготовки 01.03.02, 12.03.03 в качестве учебно-методического пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования бакалавриата.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2018

Лобанов И.С., Попов А.И., Попов И.Ю., Трифанов А.И. Типовой расчет по математической физике. Учебно-методическое пособие. Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2018. – 39 с.

Рецензенты:
д.ф.-м.н., профессор факультета лазерной фотоники и оптоэлектроники Г.П. Мирошниченко;
д.ф.-м.н., профессор факультета систем управления и робототехники В.М. Уздин.

Учебно-методическое пособие содержит в себе типовой расчет по математической физике. Предназначено для студентов 3 – 4 курсов академического бакалавриата. Типовой расчет включает в себя задачи по следующим темам: “Уравнения гиперболического типа”, “Уравнения параболического типа”, “Уравнения эллиптического типа”, “Приведение уравнений к каноническому виду”, “Функция Грина дифференциального оператора”, “Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля”, “Формула Грина” и “Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области”.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

Содержание

Общие рекомендации

Типовой расчет по математической физике включает в себя задачи по следующим темам: "Уравнения гиперболического типа", "Уравнения параболического типа", "Уравнения эллиптического типа", "Приведение уравнений к каноническому виду", "Функция Грина дифференциального оператора", "Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля", "Формула Грина"и "Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области".

Для каждого задания есть 20 вариантов. Студент решает по одному заданию своего варианта из каждой темы. Номер варианта соответствует порядковому номеру в списке группы, но может быть изменен по усмотрению преподавателя.

Решения задач должны быть написаны достаточно подробно и аккуратно. Также необходимо выписать условия задач и сделать необходимые рисунки.

Сделанная работа сдается на проверку преподавателю, который в случае необходимости может потребовать защиты типового расчета: объяснить решения задач либо задать вопросы по теории. Типовой расчет снабжен краткими методическими указаниями. Так что студент может приступить к решению задач, не дожидаясь, пока соответствующий материал будет рассказан на лекции.

Задание 1. Уравнения гиперболического типа

Пример выполнения задания 1

Задача. Решить начально-краевую задачу для уравнения струны.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

с однородными граничными условиями (ГУ):

$$u\left(0, t\right) = u\left(2, t\right) = 0 \tag{2}$$

и начальными условиями (НУ)

$$u\left(x, 0\right) = 0, \;\; u'_t\left(x, 0\right) = \begin{cases} x, 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, 1 \le x \le 2. \end{cases} \tag{3}$$

Решение. Используем метод разделения переменных. Будем искать решение $u\left(x, t\right)$ данной задачи в виде произведения двух функций:

$$u\left(x, t\right) = X\left(x\right) T\left(t\right). \tag{4}$$

Здесь $X\left(x\right)$ - функция только переменной x, $T\left(t\right)$ - функция только переменной t. Подставив (4) в (1) получим следующее равенство, которое должно удовлетворяться тождественно:

$$\frac{1}{X\left(x\right)} \frac{d^2 X\left(x\right)}{dx^2} = \frac{1}{T\left(t\right)} \frac{d^2 T\left(t\right)}{dt^2}. \tag{5}$$

Фиксируя некоторое значение x и меняя t (или наоборот), получим, что правая и левая части (5) при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение:

$$\frac{1}{X\left(x\right)} \frac{d^2 X\left(x\right)}{dx^2} = \frac{1}{T\left(t\right)} \frac{d^2 T\left(t\right)}{dt^2} = \lambda. \tag{6}$$

Из (6) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения для определения функций $X\left(x\right)$ и $T\left(t\right)$:

$$\begin{cases} X''\left(x\right) - \lambda X\left(x\right) = 0, \\ T''\left(t\right) - \lambda T\left(t\right) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Из граничных условий и требования нетривиальности решения получим условия для функции $X(x)$:

$$X(0)\,T(t) = X(2)\,T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = X(2) = 0. \tag{8}$$

Таким образом, в связи с нахождением функции $X(x)$ мы приходим к простейшей задаче о собственных значениях: найти такие значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи

$$\left.\begin{aligned} &X'' - \lambda X = 0 \\ &X(0) = X(2) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Здесь необходимо рассмотреть три случая: а) $\lambda > 0$, б) $\lambda = 0$ и в) $\lambda < 0$. Можно показать, что в первых двух случаях существует только тривиальное решение $X(x) = 0$, поэтому мы подробно остановимся только на случае в). Пусть $\lambda = -p^2 < 0$, тогда корни соответствующего характеристического уравнения:

$$q^2 + p^2 = 0 \tag{10}$$

будут $q = \pm ip$. Отсюда получим общее решение уравнения (9)

$$X(x) = C\cos(px) + D\sin(px). \tag{11}$$

Удовлетворяя граничным условиям найдем:

$$X(0) = C = 0, \quad X(2) = D\sin(2p) = 0. \tag{12}$$

Из требования $X(x) \neq 0$ получим $\sin(2p) = 0$, откуда

$$p_n = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z. \tag{13}$$

Значит $X_n(x) = D\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)$ - нетривиальное решение задачи (9) Значениям p_n соответствуют следующие решения для $T(t)$:

$$T_n(t) = A_n\cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right) + B_n\sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right). \tag{14}$$

Возвращаясь к исходной задаче, заключаем, что функции $u_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t)$ являются частными решениями уравнения (1), удовлетворяющими граничным условиям (2). Общее решение

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot \cos\frac{\pi n t}{2} + B_n \cdot \sin\frac{\pi n t}{2} \right) \cdot \sin\frac{\pi n x}{2} \quad (15)$$

в силу линейности и однородности уравнения (1) также удовлетворяет этому уравнению и граничным условиям (2). Начальные условия (3) позволяют определить A_n и B_n Для этого потребуем, чтобы функция $u(x,t)$ удовлетворяла начальным условиям (3):

$$\begin{cases} u(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\frac{\pi n x}{2} = 0, \\ u'_t(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \frac{\pi n}{2} \cdot \sin\frac{\pi n x}{2} = \begin{cases} x, 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, 1 \le x \le 2. \end{cases} \end{cases} \quad (16)$$

Из первого условия (16) найдем $A_n = 0$, а из второго получим выражение для коэффициентов B_n:

$$B_n = \frac{2}{\pi n} \left(\int\limits_0^1 x \cdot \sin\frac{\pi n x}{2} dx + \int\limits_1^2 (2 - n) \cdot \sin\frac{\pi n x}{2} dx \right) = (-1)^{n+1} \frac{8}{\pi^2 n^2}. \quad (17)$$

Подставляя полученные результаты в (15), получим решение исходного уравнения:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{8}{\pi^2 n^2} \cdot \sin\frac{\pi n t}{2} \cdot \sin\frac{\pi n x}{2}. \quad (18)$$

Варианты задания 1

Решить начально-краевую задачу для уравнения струны.

1. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u'_x(4,t) = 0, \\ u(x,0) = -x, \\ u'_t(x,0) = 0; \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u'_x(6,t) = 0, \\ u(x,0) = x, \\ u'_t(x,0) = 0; \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x^2, \\ u'_t(x,0) = 0; \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} x, 0 \le x \le 1/2, \\ 1-x, 1/2 \le x \le 1, \end{cases} \\ u'_t(x,0) = 0; \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u'_x(6,t) = 0, \\ u(x,0) = x, \\ u'_t(x,0) = 0; \end{cases}$

6. $\begin{cases} 9\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u'_t(x,0) = x(1-x); \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 1-x, \\ u'_t(x,0) = 0; \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u'_t(x,0) = \begin{cases} 1, 0 \le x \le 1, \\ 2-x, 1 \le x \le 2; \end{cases} \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u(4,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u'_t(x,0) = 4-x; \end{cases}$

10. $\begin{cases} 9\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u'_x(2,t) = 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} x, 0 \le x \le 1, \\ 1, 1 \le x \le 2, \end{cases} \\ u'_t(x,0) = 0; \end{cases}$

11. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u'_t(x,0) = x; \end{cases}$

12. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1, \\ u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u'_t(x,0) = 9-x; \end{cases}$

13. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x, \\ u'_x(0,t) = u'_x(4,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u'_t(x,0) = 0; \end{cases}$

14. $$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x, \\ u\left(0, t\right) = u\left(4, t\right) = 0, \\ u\left(x, 0\right) = 0, \\ u'_t\left(x, 0\right) = 0; \end{cases}$$

15. $$\begin{cases} 4\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2, \\ u\left(0, t\right) = u\left(2, t\right) = 0, \\ u\left(x, 0\right) = 0, \\ u'_t\left(x, 0\right) = x; \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x, \\ u\left(0, t\right) = u\left(1, t\right) = 0, \\ u\left(x, 0\right) = 0, \\ u'_t\left(x, 0\right) = 0; \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2, \\ u'_x\left(0, t\right) = u'_x\left(4, t\right) = 0, \\ u\left(x, 0\right) = 0, \\ u'_t\left(x, 0\right) = 0; \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1 - x, \\ u\left(0, t\right) = u\left(4, t\right) = 0, \\ u\left(x, 0\right) = 0, \\ u'_t\left(x, 0\right) = 0; \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x + 2, \\ u\left(0, t\right) = u'_x\left(2, t\right) = 0, \\ u\left(x, 0\right) = 0, \\ u'_t\left(x, 0\right) = 0; \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4x^2, \\ u'_x\left(0, t\right) = u\left(4, t\right) = 0, \\ u\left(x, 0\right) = 0, \\ u'_t\left(x, 0\right) = 0. \end{cases}$$

Задание 2. Уравнения параболического типа

Пример выполнения задания 2

Задача. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4u, \tag{19}$$

с однородными граничными условиями

$$u'_x(-1,t) = u'_x(1,t) = 0 \tag{20}$$

и начальными условиями

$$u(x,0) = x^2. \tag{21}$$

Решение. Для удобства произведем замену переменной и положим $z = x + 1$. В этом случае граничные и начальное условия примут вид:

$$u'_z(0,t) = u'_z(2,t) = 0, \tag{22}$$

$$u(z,0) = (z-1)^2. \tag{23}$$

Теперь используем метод Фурье разделения переменных. Положим

$$u(z,t) = X(z)\,T(t), \tag{24}$$

где $X(z)$ - функция только переменой z, а $T(t)$ - функция только переменной t. После подстановки в исходное дифференциальное уравнение получим следующее равенство, которое должно удовлетворяться тождественно:

$$\frac{1}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt} + 4 = \frac{1}{X(z)}\frac{d^2X(z)}{dz^2}. \tag{25}$$

Фиксируя некоторое z и меняя t (или наоборот), получим, что правая и левая части последнего выражения при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение:

$$\frac{1}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt} + 4 = \frac{1}{X(z)}\frac{d^2X(z)}{dz^2} = \lambda. \tag{26}$$

отсюда получим два дифференциальных уравнения для определения функций $X(z)$ и $T(t)$:

$$X''(z) - \lambda X(z) = 0, \tag{27}$$

$$T'(t) + (4 - \lambda) T(t) = 0. \tag{28}$$

Из граничных условий и требования нетривиальности решения, получим условия для функции $X(z)$:

$$X'(0) = X'(2) = 0. \tag{29}$$

Таким образом, мы приходим к задаче о собственных значениях:

$$X''(z) - \lambda X(z) = 0, \tag{30}$$

$$X'(0) = X'(2) = 0. \tag{31}$$

Здесь требованию нетривиальности решения удовлетворяют случаи: $\lambda = 0$, $\lambda < 0$.

Пусть $\lambda = 0$. Тогда уравнение для функции $X(x)$ имеет вид: $X''(z) = 0$. Его решение: $X(z) = Az + B$. Удовлетворяя граничным условиям $X'(0) = X'(2) = 0$, находим $X(x) = B$. Соответствующее уравнение для функции $T(t)$ таково:

$$T'(t) + 4T(t) = 0 \tag{32}$$

Его решение:

$$T(t) = Be^{-4t} \tag{33}$$

Таким образом, мы получаем следующее решение уравнения теплопроводности при $\lambda < 0$:

$$u(x,t) = Be^{-4t} \tag{34}$$

Рассмотрим теперь случай $\lambda = -p^2 < 0$. Корни соответствующего характеристического уравнения равны $q = \pm ip$. Отсюда получим:

$$X(z) = C\cos(pz) + D\sin(pz). \tag{35}$$

и

$$X'(z) = -Cp\sin(pz) + Dp\cos(pz). \tag{36}$$

Удовлетворяя граничным условиям, найдем:

$$X'(0) = Dp = 0, \quad X'(2) = Cp\sin(2p) = 0. \tag{37}$$

Из требования $X'(z) \neq 0$ получим $\sin(2p) = 0$, откуда

$$p_n = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{38}$$

Значит

$$X_n(z) = C\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right). \tag{39}$$

Решим дифференциальное уравнение для функции $T(t)$ при $\lambda = -p_n^2$:

$$T'(t) + \left(4 + p_n^2\right)T(t) = 0. \tag{40}$$

Соответствующее характеристическое:

$$q + 4 + p_n^2 = 0, \tag{41}$$

то есть

$$T(t) = A\exp\left[\left(-p_n^2 - 4\right)t\right] = A\exp\left[-\frac{\pi^2 n^2}{4}t - 4t\right]. \tag{42}$$

Для того, чтобы решение $u(x,t)$ удовлетворило начальному условию, воспользуемся следующим свойством линейных однородных уравнений: сумма решений линейного однородного уравнения есть решение этого уравнения:

$$u(z,t) = \frac{B_0}{2}e^{-4t} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\left[-\frac{\pi^2 n^2}{4}t - 4t\right]\cos\left(\frac{\pi n z}{2}\right). \tag{43}$$

Из начального условия следует, что

$$u(z,0) = (z-1)^2 = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{\pi n z}{2}\right). \tag{44}$$

Таким образом, получили разложение функции $(z-1)^2$ в ряд по косинусам. Способ нахождения коэффициентов B_n в ряде Фурье по косинусам известен:

$$B_0 = \int_0^2 (z-1)^2\,dz = \left.\frac{(z-1)^3}{3}\right|_0^2 = \frac{2}{3}. \tag{45}$$

$$B_n = \int_0^2 (z-1)^2 \cos\left(\frac{\pi n z}{2}\right) dz. \tag{46}$$

Дважды применяя формулу интегрирования по частям, получаем выражение для B_n:

$$B_n = \frac{8}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n + 1\right), \quad n \neq 0, \tag{47}$$

Подставляя данное выражение в формулу для $u(z,t)$ и возвращаясь к исходной переменной x, получаем решение задачи:

$$u(z,t) = \frac{1}{3}e^{-4t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n + 1\right) \exp\left[-\frac{\pi^2 n^2}{4}t - 4t\right] \cos\left(\frac{\pi n z}{2}\right). \tag{48}$$

Варианты задания 2

Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности.

1. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x - x^2; \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x^2; \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin(\pi x); \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 1 - x; \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x; \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = x(2-x); \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 1 - x; \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u'_x(4,t) = 0, \\ u(x,0) = 4 - x; \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u(4,t) = 0, \\ u(x,0) = x(4 - x); \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u'_x(2,t) = 0, \\ u(x,0) = x^2; \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u(5,t) = 0, \\ u(x,0) = x; \end{cases}$

12. $\begin{cases} 5\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u(3,t) = 0, \\ u(x,0) = 3x - x^2; \end{cases}$

13. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(0,t) = u(3,t) = 0, \\ u(x,0) = 3 - x; \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u'_x(2,t) = 0, \\ u(x,0) = x^2 - 2x; \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(1,t) = u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = x - 1; \end{cases}$

16. $\begin{cases} 5\frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u'_x(-1,t) = u'_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x^2; \end{cases}$

17. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(1,t) = u'_x(2,t) = 0, \\ u(x,0) = x - 1; \end{cases}$

18. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x^2; \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u, \\ u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x - x^2; \end{cases}$

20. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u, \\ u(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = x + x^2; \end{cases}$

Задание 3. Уравнения эллиптического типа

Пример выполнения задания 3

Задача. Решить граничную задачу для уравнения Лапласа в заданной области.

$$\Delta u = 0, \quad 2 \leq r \leq 3 \tag{49}$$

с граничными условиями

$$u|_{r=2} = 4 + \sin\varphi, \quad u|_{r=3} = 5\cos 2\varphi. \tag{50}$$

Решение. Введем полярную систему координат:

$$\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases} \tag{51}$$

Перепишем оператор Лапласа в полярной системе координат:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \tag{52}$$

Решение уравнения Лапласа ищем в виде:

$$u(r,\varphi) = P(r)\,\Phi(\varphi). \tag{53}$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{r^2\left(P''(r) + \frac{1}{r}P'(r)\right)}{P(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda = const. \tag{54}$$

Отсюда сразу получаем уравнения для функций $P(r)$, $\Phi(\varphi)$:

$$\begin{cases} r^2\left(P''(r) + \frac{1}{r}P'(r)\right) = \lambda P(r), \\ \Phi''(\varphi) = -\lambda\Phi(\varphi) = 0. \end{cases} \tag{55}$$

Параметр λ может принимать различные значения: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$.

1 случай. $\lambda < 0$. Пусть $\lambda = -p^2$. Тогда $\Phi''(\varphi) = p^2\Phi(\varphi)$. Соответствующее характеристическое уравнение:

$$q^2 - p^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm p \tag{56}$$

Тогда общее решение уравнения:

$$\Phi(\varphi) = A \cdot e^{p\varphi} + B \cdot e^{-p\varphi}. \tag{57}$$

Это решение нам не подходит, так как должно быть выполнено условие периодичности: $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. Ибо при изменении угла φ на 2π функция $u(r, \varphi)$ должна вернуться к исходному значению: $u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi)$.

2 случай.

$\lambda = 0$. Тогда $\Phi'' = 0 \Leftrightarrow \Phi(\varphi) = A\varphi + B$. Из условия периодичности получаем, что $\Phi(\varphi) = B$. Решим первое уравнение из системы (55) для $\lambda = 0$:

$$r^2 \left(P''(r) + \frac{1}{r} P'(r) \right) = 0, \tag{58}$$

что эквивалентно (так как $r \neq 0$):

$$P''(r) + \frac{1}{r} P'(r) = 0 \tag{59}$$

Сделаем замену переменных: $V = P'(r)$:

$$V' + \frac{1}{r} V = 0 \Leftrightarrow \frac{dV}{dr} = -\frac{V}{r} \Leftrightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{dr}{r}$$

Интегрируя обе части уравнения, получаем:

$$ln|V| = -ln|r| + C_1 \Leftrightarrow |Vr| = e^{C_1} \Leftrightarrow V = \frac{C_2}{r},$$

то есть

$$P'(r) = \frac{C_2}{r} \Leftrightarrow P = \int \frac{C_2}{r} dr = C_2 lnr + D \quad (ln|r| = lnr,\ r > 0). \tag{60}$$

$$u = P(r) \cdot \Phi(\varphi) = (C_2 lnr + C_3)\, B = Clnr + D \tag{61}$$

3 случай. $\lambda > 0$. Пусть $\lambda = p^2$. Тогда $\Phi''(\varphi) + p^2\Phi(\varphi) = 0$. Соответствующее характеристическое уравнение:

$$q^2 + p^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm ip \tag{62}$$

Тогда общее решение уравнения:

$$\Phi(\varphi) = C\cos p\varphi + D\sin p\varphi, \quad p = 0, 1, \ldots \tag{63}$$

Параметр p должен быть целым числом в силу условия периодичности: $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. Решим первое уравнение из системы (55) для $\lambda = p^2 > 0$:

$$r^2\left(P''(r) + \frac{1}{r}P'(r)\right) = p^2 P(r). \tag{64}$$

Функцию $P(r)$ ищем в виде: $P(r) = r^a$.

$$r^2\left(a(a-1)r^{a-2} + ar^{a-2}\right) = p^2 \cdot r^a \Leftrightarrow (a^2 - a)r^a + ar^a = p^2 \cdot r^a,$$

откуда получаем: $a^2 = p^2 \Leftrightarrow a = \pm p$. Фундаментальная система решений:

$$\begin{cases} P_1(r) = r^p, \\ P_2(r) = r^{-p}. \end{cases} \tag{65}$$

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения есть линейная комбинация функций из фундаментальной системы решений:

$$P(r) = A \cdot r^p + B \cdot r^{-p} \tag{66}$$

Итак, получили следующее решение уравнения (49):

$$u(r,\varphi) = (C \cdot cosp\varphi + D \cdot sinp\varphi)\left(A \cdot r^p + B \cdot r^{-p}\right) \tag{67}$$

Для того, чтобы удовлетворить краевым условиям (50), решение задачи будем искать в виде ряда:

$$u(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n r^{-n} + B_n r^n\right)(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi). \tag{68}$$

Найдем неизвестные коэффициенты A_n, B_n, C_n и D_n, используя данные граничные условия. При $r = 2$ имеем:

$$u(2,\varphi) = A_0 + B_0 \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n 2^{-n} + B_n 2^n\right)(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi) = 4 + \sin\varphi. \tag{69}$$

Отсюда, приравнивая соответствующие коэффициенты, получим:

$$A_0 + B_0 \ln 2 = 4, \quad \left(A_1 2^{-1} + 2B_1\right) D_1 = 1, \quad C_1 = 0. \tag{70}$$

С другой стороны:

$$u\left(3,\varphi\right) = A_0 + B_0 \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n 3^{-n} + B_n 3^n\right)\left(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi\right) = 5\cos 2\varphi.$$

и отсюда будем иметь

$$\left(A_2 2^{-2} + 3^2 B_2\right) C_2 = 5, \quad D_2 = 0.$$

В остальных случаях $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$. Используя эти условия, получим следующие системы уравнений и их решения:

$$\begin{cases} A_0 + B_0 \ln 2 = 4 \\ A_0 + B_0 \ln 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A_0 = 4 + \frac{4\ln 2}{\ln\left(3/2\right)}, \quad B_0 = -\frac{4}{\ln\left(3/2\right)};$$

$$\begin{cases} A_1'/2 + 2B_1' = 1 \\ A_1'/3 + 3B_1' = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A_1' = 18/5, \quad B_1' = -2/5;$$

$$\begin{cases} A_2'/4 + 4B_2' = 0 \\ A_2'/9 + 9B_2' = 5 \end{cases} \Rightarrow \quad A_2' = -144/13, \quad B_2' = 9/13;$$

Здесь $A_1' = A_1 D_1$, $A_2' = A_2 C_2$ и $B_1' = B_1 D_1$, $B_2' = B_2 C_2$. Теперь можно выписать решение задачи:

$$u\left(r,\varphi\right) = 4 + \frac{4\ln 2}{\ln\left(3/2\right)} - \frac{4}{\ln\left(3/2\right)}\ln r + \left(\frac{18}{5r} - \frac{2}{5}r\right)\sin\varphi + \left(-\frac{144}{13r^2} + \frac{9}{13}r^2\right)\cos 2\varphi.$$

Варианты задания 3

Решить граничную задачу для оператора Лапласа в заданной области.

1. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r \le 1, \\ u\left|_{\rho=1}\right. = \cos\phi; \end{cases}$

2. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r \le 2, \\ u\left|_{\rho=2}\right. = 2\sin\phi + \cos 2\phi; , \end{cases}$

3. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 \le r \le 2, \\ u\left|_{r=1}\right. = \sin\phi \ , \\ u\left|_{r=2}\right. = \cos\phi; \end{cases}$

4. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 2 \le r \le 3, \\ u\left|_{r=2}\right. = 1 \ , \\ u\left|_{r=3}\right. = 4\cos\phi. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 \le r \le 4, \\ u\left|_{r=1}\right. = 1 + \sin\phi \ , \\ u\left|_{r=4}\right. = 4\sin 2\phi. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 \le r \le 2, \\ u\left|_{r=1}\right. = \cos 3\phi + 1, \\ u\left|_{r=2}\right. = 3\sin\phi. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 2, \end{cases} \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, \\ u(x,0) = x - x^2, \\ u(x,2) = \begin{cases} x, 0 \le x \le 1/2, \\ 1 - x, 1/2 \le x \le 1. \end{cases} \end{cases}$

8. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1, \end{cases} \\ u(x,0) = u(x,1) = 0, \\ u(0,y) = 0, \\ u(1,y) = y^2 - y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 2, \end{cases} \\ u(x,0) = x^2 - 2x, \\ u(x,2) = u(0,y) = 0, \\ u(2,y) = y^2 - 2y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 2, \end{cases} \\ u(x,0) = \sin(\pi x), \\ u(x,2) = \sin(2\pi x), \\ u(0,y) = u(2,y) = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r \le 1, \\ u\Big|_{r=1} = \phi^2 (2\pi - \phi)^2 \ . \end{cases}$

12. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r \le 2, \\ u\left|_{r=2}\right. = \sin 2\phi + 2\cos\phi \ . \end{cases}$

13. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1, \end{cases} \\ u(x,0) = \sin(\pi x), \\ u(x,1) = \sin(2\pi x), \\ u(0,y) = \sin(3\pi y), u(1,y) = 0. \end{cases}$

14. $$\begin{cases} \Delta u = 0, & \begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 2, \end{cases} \\ u(x,0) = \sin(4\pi x), \\ u(x,2) = u(2,y) = 0, \\ u(0,y) = \sin(\pi y). \end{cases}$$

15. $$\begin{cases} \Delta u = 0, & \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 2, \end{cases} \\ u(x,0) = u(0,y) = 0, \\ u(x,2) = \sin(\pi x), \\ u(1,y) = \sin(2\pi y). \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 2 \le r \le 3, \\ u\,|_{r=2} = 4 + 3\sin\phi, \\ u\,|_{r=3} = 5\cos 2\phi. \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 \le r \le 3, \\ u\,|_{r=1} = 4\cos\phi + 1, \\ u\,|_{r=3} = 2. \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 \le r \le 4, \\ u\,|_{r=1} = 5 + 2\sin\phi, \\ u\,|_{r=4} = 4. \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 \le r \le 2, \\ u\,|_{r=1} = 5\cos\phi, \\ u\,|_{r=2} = 2\sin 2\phi + 3\cos 3\phi. \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 \le r \le 3, \\ u\,|_{r=1} = 4 + 3\cos 4\phi, \\ u\,|_{r=3} = 3\sin 2\phi. \end{cases}$$

Задание 4. Приведение уравнений к каноническому виду

Пример выполнения задания 4

Задача. Привести уравнение к каноническому виду в каждой из областей, где его тип сохраняется:

$$yu_{xx} + xu_{yy} = 0. \tag{71}$$

Решение. В первой четверти координатной плоскости и сделаем подстановку:

$$\xi = x^{3/2}, \eta = y^{3/2} \tag{72}$$

Частные производные u_x и u_y могут быть выражены в новых переменных следующим образом:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}x^{1/2} = \frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\xi^{1/3},$$
$$u_y = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial \eta}y^{1/2} = \frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\eta^{1/3}.$$

Исходное дифференциальное уравнение в новых переменных примет вид:

$$\left(\frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\xi^{2/3} + \frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial \xi}\xi^{-1/3}\right)\eta^{2/3} + \left(\frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\eta^{2/3} + \frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial \eta}\eta^{-1/3}\right)\xi^{2/3} = 0. \tag{73}$$

Поделим правую и левые части полученного уравнения на $\frac{9}{4}(\eta\xi)^{2/3}$, тогда дифференциальное уравнение примет более простой вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \tag{74}$$

что по классификации соответствует эллиптическому случаю. В третьей четверти подстановка $\xi = (-x)^{3/2}$, $\eta = (-y)^{3/2}$ приводит к точно такому же дифференциальному уравнению. Таким образом опять имеет место эллиптичность. Подстановки $\xi = (-x)^{3/2}$, $\eta = y^{3/2}$ и $\xi = x^{3/2}$, $\eta = (-y)^{3/2}$

во второй и четвертой четвертях соответственно, приводят к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \qquad (75)$$

что по классификации соответствует гиперболическому случаю. На осях дифференциальное уравнение вырождается и имеет место параболичность.

Варианты задания 4

Привести уравнение к каноническому виду в каждой из областей, где его тип сохраняется.

1. $u_{xx} + xu_{yy} = 0$;
2. $u_{xx} + yu_{yy} = 0$;
3. $u_{xx} + yu_{yy} + 1/2u_y = 0$;
4. $xu_{xx} + yu_{yy} = 0$;
5. $yu_{xx} - xu_{yy} = 0$;
6. $xu_{xx} - yu_{yy} = 0$;
7. $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$;
8. $u_{xx}\operatorname{sign}(y) + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$;
9. $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0$;
10. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$;
11. $x^2u_{xx} + y^2u_{yy} = 0$;
12. $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0$;
13. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0$;
14. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$;
15. $4y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} - 4y^2u_x = 0$;
16. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} + 16x^4u = 0$;
17. $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$;
18. $u_{xx} + 2u_{xy} + (1 - \operatorname{sign}(y))u_{yy} = 0$;
19. $u_{xx}\operatorname{sign}(y) + 2u_{xy} + u_{yy}\operatorname{sign}(x) = 0$;
20. $u_{xx}\sin^2 x - 2yu_{xy}\sin x + y^2u_{yy} = 0$.

Задание 5. Функция Грина дифференциального оператора

Пример выполнения задания 5

Задача. Построить функцию Грина (если она существует) данного дифференциального уравнения:

$$y^{(IV)} = 0 \tag{76}$$

с краевыми условиями

$$y\,(0) = y'\,(0) = y''\,(1) = y'''\,(1) = 0. \tag{77}$$

Решение. Фундаментальной системой решений этого уравнения является

$$y_1\,(x) = 1, \quad y_2\,(x) = x, \quad y_3\,(x) = x^2, \quad y_3\,(x) = x^3. \tag{78}$$

И общее решение $y\,(x)$ имеет следующий вид:

$$y\,(x) = Ay_1\,(x) + By_2\,(x) + Cy_3\,(x) + Dy_4\,(x) \tag{79}$$

Проверим, имеет ли данная краевая задача только тривиальное решение. Определим неизвестные A, B, C и D из краевых условий:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad 2C + 6D = 0, \quad 6D = 0 \tag{80}$$

и получим $A = B = C = D = 0$. Система имеет только тривиальное решение, а значит, для нее можно построить функцию Грина. Будем искать ее в следующем виде:

$$G\,(x,\xi) = \begin{cases} a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^3, 0 \le x \le \xi, \\ b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot x + b_3 \cdot x^2 + b_4 \cdot x^3, \xi \le x \le 1. \end{cases} \tag{81}$$

Здесь $a_j = a_j\,(\xi)$ и $b_j = b_j\,(\xi)$, $j = 1, 2, 3, 4$ - неизвестные функции ξ. Обозначим $c_j\,(\xi) = b_j\,(\xi) - a_j\,(\xi)$ и выпишем систему линейных уравнений для $c_j(\xi)$:

$$\begin{cases} c_1 + c_2\xi + c_3\xi^2 + c_4\xi^3 = 0, \\ c_2 + 2c_3\xi + 3c_4\xi^2 = 0, \\ 2c_3 + 6c_4\xi = 0, \\ 6c_4 = 1 \end{cases} \tag{82}$$

Решение этой системы:

$$c_1(\xi) = -\frac{1}{6}\xi^3, \quad c_2(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2, \quad c_3(\xi) = -\frac{1}{2}\xi, \quad c_4(\xi) = \frac{1}{6}. \tag{83}$$

Далее воспользуемся тем, что функция Грина должна удовлетворять краевым условиям, то есть:

$$\begin{gathered} G(0,\xi) = G'_x(0,\xi) = 0, \\ G''_{xx}(1,\xi) = G'''_{xxx}(1,\xi) = 0. \end{gathered} \tag{84}$$

Тогда для коэффициентов a_j и b_j можно найти:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad 2b_3 + 6b_4 = 0, \quad 6b_4 = 0. \tag{85}$$

Используя то, что $c_j = b_j - a_j$ окончательно находим:

$$\begin{gathered} a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \tfrac{1}{2}\xi, \quad a_4 = -\tfrac{1}{6}, \\ b_1 = -\tfrac{1}{6}\xi^3, \quad b_2 = \tfrac{1}{2}\xi^2, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = 0. \end{gathered} \tag{86}$$

Таким образом, получим искомую функцию Грина:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\xi \cdot x^2 - \frac{1}{6}x^3, 0 \le x \le \xi, \\ -\frac{1}{6}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^2 x, \xi \le x \le 1. \end{cases} \tag{87}$$

Варианты задания 5

Построить функцию Грина (если она существует) данного дифференциального оператора:

1. $Ly = y'''$, $\quad y(0) = y'(0) = y'(1) + y(1) = y''(1) = 0$;

2. $Ly = y'''$, $\quad y(0) = y'(1) = y''(1) = 0$;

3. $Ly = y''''$ $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y(1) = 0$;

4. $Ly = y''''$ $\quad y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0$;

5. $Ly = y''''$ $\quad y'(0) = y''(0) = y'(1) = y''(1) = 0$;

6. $Ly = y''''$ $\quad y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0$;

7. $Ly = y''''$ $\quad y'(0) + y(0) = y'(0) - y(0) = y(1) = y'(1) = 0$;

8. $Ly = y''' + y''$, $\quad y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0$;

9. $Ly = y'''' + y''$, $\quad y(0) + y'(0) = y(0) - y'(0) = y(1) = y'(1) = 0$;

10. $Ly = y'''' - y''$, $\quad y(0) + 2y'(0) = y(0) + 3y'(0) = y'(1) = y''(1) = 0$;

11. $Ly = y''' + y''$, $\quad y(0) + y'(0) = y''(0) = y(1) = 0$;

12. $Ly = y'''$, $\quad y(0) = y'(0) = y(1) + y'(1) = 0$;

13. $Ly = y''' - y''$, $\quad y(0) = y(1) = y'(1) = 0$;

14. $Ly = y'''' - y'''$, $\quad y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1)$;

15. $Ly = y'''' + y'''$, $\quad y(0) - y(1) = y'(0) + y'(1) = y''(1) = 0$;

16. $Ly = y''' + y''$, $\quad 2y(0) + y'(0) = y(0) + 2y'(0) = y(1) = 0$;

17. $Ly = y'''' + 4y''$, $\quad y(0) = y'(0) = y(1) + y'(1) = y''(1) = 0$;

18. $Ly = y'''' - 4y''$, $\quad y(0) = y(0) + 2y'(0) = y(1) = y'(1) - y(1) = 0$;

19. $Ly = y'''' + 9y''$, $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y(1) = 0$;

20. $Ly = 4y'''' + y$, $\quad y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0$.

Задание 6. Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля

Пример выполнения задания 6

Задача. Построить функцию Грина для дифференциального уравнения второго порядка

$$Ly = y'' + 4y \tag{88}$$

с краевыми условиями:

$$y\left(0\right) = y\left(\pi/3\right) = 0. \tag{89}$$

Решение. В случае задачи Штурма - Лиувилля:

$$\left(p\left(x\right)y'\right)' + q\left(x\right)y = 0, \quad y\left(a\right) = y\left(b\right) = 0 \tag{90}$$

где $p\left(x\right) \neq 0$ на $[a, b]$, $p\left(x\right) \in C^{(1)}\left[a, b\right]$, $q\left(x\right) \in C\left[a, b\right]$ можно воспользоваться известным выражением для функции Грина:

$$G\left(x, \xi\right) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}, a \leq x \leq \xi, \\ \frac{y_1(\xi)y_2(x)}{p(\xi)W(\xi)}, \xi \leq x \leq b. \end{cases} \tag{91}$$

Здесь $y_1\left(x\right)$ и $y_2\left(x\right)$ - линейно независимые решения дифференциального уравнения, удовлетворяющие соответственно левому и правому граничным условиям:

$$y_1\left(a\right) = 0, \quad y_2\left(b\right) = 0, \tag{92}$$

а также условию $y'\left(a\right) \neq 0$. $W\left(x\right) = W\left[y_1\left(x\right), y_2\left(x\right)\right]$ - определитель Вронского:

$$W\left(x\right) = \begin{vmatrix} -y_1\left(x\right) & y_2\left(x\right) \\ -y_1'\left(x\right) & y_2'\left(x\right). \end{vmatrix} \tag{93}$$

Линейно независимыми решениями рассматриваемой задачи являются функции:

$$y_1\left(x\right) = \sin\left(2x\right), \quad y_2\left(x\right) = \sin\left(2x\right) + \sqrt{3}\cos\left(2x\right). \tag{94}$$

Легко проверить, что они удовлетворяют однородным граничным условиям. Вронскиан, вычисленный в точке $x = \xi$ равен:

$$W(\xi) = -\begin{vmatrix} \sin(2\xi) & \sin(2\xi) + \sqrt{3}\cos(2\xi) \\ 2\cos(2\xi) & 2\cos(2\xi) - 2\sqrt{3}\sin(2\xi) \end{vmatrix} = 2\sqrt{3}. \qquad (95)$$

Отсюда находим выражение для функции Грина:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{2\sqrt{3}}\left[\sin(2\xi) + \sqrt{3}\cos(2\xi)\right], 0 \le x \le \xi, \\ \frac{\sin(2\xi)}{2\sqrt{3}}\left[\sin(2x) + \sqrt{3}\cos(2x)\right], \xi \le x \le \pi/3. \end{cases} \qquad (96)$$

Варианты задания 6

Построить функцию Грина для дифференциального оператора второго порядка.

1. $Ly = y'' + y, \quad y'(0) = y''(\pi/2) = 0;$
2. $Ly = y'' - 4y, \quad y(0) + y'(0) = y(1) = 0;$
3. $Ly = y'' - y, \quad y(0) = y(\pi) = 0;$
4. $Ly = y'' + y, \quad y(0) = y(\pi) = 0;$
5. $Ly = y'' + 4y, \quad y(0) = y(\pi/2) = 0;$
6. $Ly = y'' + 9y, \quad y(0) = y(\pi/3) = 0;$
7. $Ly = y'' + y, \quad y(0) = y(\pi) = 0;$
8. $Ly = y'' + y, \quad y(0) = y(3\pi/2) = 0;$
9. $Ly = y'' + 4y, \quad y(0) = y(\pi) = 0;$
10. $Ly = y'' + 4y, \quad y(0) = y(\pi) + y'(\pi) = 0;$
11. $Ly = y'', \quad y(0) + y'(0) = y(1) + y'(1) = 0;$

12. $Ly = y'' - 9y, \quad y\,(0) + 2y'\,(0) = 2y\,(1) + y'\,(1) = 0;$

13. $Ly = y'' + 9y, \quad y\,(0) = y'\,(\pi/2) = 0;$

14. $Ly = y'' + y/4, \quad y\,(0) = y'\,(2\pi) = 0;$

15. $Ly = y'' + y/9, \quad y\,(0) + y'\,(0) = y'\,(1) = 0;$

16. $Ly = y'' + y/4, \quad y\,(0) = y\,(1) - y'\,(1) = 0;$

17. $Ly = y'' + 4y/9, \quad y\,(0) + y'\,(0) = y\,(1) = 0;$

18. $Ly = y'' + 16y, \quad y\,(0) = y\,(1) + y'\,(1) = 0;$

19. $Ly = 4y'' + y, \quad y\,(0) = y\,(\pi) = 0;$

20. $Ly = 9y'' + y, \quad y'\,(0) = y\,(2\pi) = 0.$

Задание 7. Формула Грина

Пример выполнения задания 7

Задача. Написать формулу Грина и найти формально сопряжённое дифференциальное выражение.

$$Lu = x_1^2 x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}. \qquad (97)$$

Решение. Задача сводится к поиску дифференциального оператора M, удовлетворяющего условию

$$(Lu, v) = R + (u, Mv), \qquad (98)$$

где

$$(u, v) = \int\limits_{\Omega} u\bar{v}d\Omega, \qquad (99)$$

u, v - дважды непрерывно дифференцируемые комплекснозначные функции, $\bar{v}$ обозначает функцию, комплексно сопряжённую с v. R - интеграл по границе области Ω.

Рассмотрим формулу интегрирования по частям

$$\int\limits_{\Omega} v\frac{\partial u}{\partial x_k}d\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} uv\cos{(n, e_{x_k})}dS - \int\limits_{\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x_k}d\Omega, \qquad (100)$$

где n - единичный вектор внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$, e_{x_k} - орт оси x_k.

Формула интегрирования по частям (100) позволяет перекинуть оператор дифференцирования с функции u на функцию v. Для того, чтобы перенести действие дифференциального оператора L с функции u на функцию v, мы будем применять формулу (100) несколько раз.

$$(Lu,v)=\int\limits_{\Omega}Lu\bar{v}d\Omega=\int\limits_{\Omega}\left(x_1^2x_2\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2u}{\partial x_1\partial x_2}\right)\bar{v}d\Omega=$$

$$=\underbrace{\int\limits_{\Omega}\bar{v}x_1^2x_2\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}d\Omega}_{A}-\underbrace{\int\limits_{\Omega}\bar{v}\frac{\partial^2u}{\partial x_1\partial x_2}d\Omega}_{B}.$$

Найдём формально сопряжённые дифференциальные выражения для A и B. Соответствующие операторы назовём M_A и M_B. Результатом будет являться $M=M_A-M_B$.

$$A=\int\limits_{\Omega}\bar{v}x_1^2x_2\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}d\Omega=$$

$$=\underbrace{\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_1}\bar{v}x_1^2x_2\cos(n,x_1)dS}_{C_1}-\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\bar{v}x_1^2x_2\right)d\Omega=$$

$$=C_1-\int\limits_{\Omega}x_2\left(2x_1\bar{v}+x_1^2\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_1}\right)\frac{\partial u}{\partial x_1}d\Omega=$$

$$=C_1-\underbrace{\int\limits_{\partial\Omega}ux_2\left(2x_1\bar{v}+x_1^2\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_1}\right)\cos(n,x_1)dS}_{C_2}+$$

$$+\int\limits_{\Omega}ux_2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(2x_1\bar{v}+x_1^2\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_1}\right)d\Omega=$$

$$=C_1-C_2+\int\limits_{\Omega}u\underbrace{\left(2x_2+4x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1^2x_2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)\bar{v}}_{\overline{M_Av}}\,d\Omega.$$

Обращаем внимание, что $\overline{M_Av}=(-1)^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\bar{v}x_1^2x_2\right)$. Аналогичным образом найдём M_B.

$$B=\int\limits_{\Omega}\bar{v}\frac{\partial^2u}{\partial x_1\partial x_2}d\Omega=\underbrace{\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_2}\bar{v}\cos(n,x_1)dS}_{D_1}-\int\limits_{\Omega}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}d\Omega=$$

$$= D_1 - \underbrace{\int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_1}\cos{(n,x_2)}dS}_{D_2} + \int\limits_{\Omega} u\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial x_1\partial x_2}d\Omega = D_1 - D_2 + \int\limits_{\Omega} u\,\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\bar{v}}_{\overline{M_B v}}\,d\Omega.$$

Теперь можно записать формально сопряжённое дифференциальное выражение с учётом значений C_1, C_2, D_1, D_2, M_A и M_B. В результате получим формулу Грина:

$$(Lu,v) = \int\limits_{\partial\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}x_1^2x_2 - \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\bar{v} - 2u\bar{v}x_1x_2 - u\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_1}x_1^2x_2\right]\cos{(n,x_1)}dS +$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_2}\cos{(n,x_2)}dS + (u, Mv),$$

где M - формально сопряжённый дифференциальный оператор. Он имеет следующий вид:

$$M = M_A - M_B = 2x_2 + 4x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1^2x_2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}.$$

Варианты задания 7

Написать формулу Грина и найти формально сопряженное дифференциальное выражение:

1. $Lu = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_1^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \dfrac{x_1}{x_2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_4^2};$

2. $Lu = (x_1 - x_2 + x_3)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2} + x_2^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3\partial x_4};$

3. $Lu = \left(x_1^2 + 2x_3^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_3} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_4^2};$

4. $Lu = x_1x_2^2x_3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2x_1\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2};$

5. $Lu = (x_1 - x_4)^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2} + 3x_3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_4^2};$

6. $Lu = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - 3x_1\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_4};$

7. $Lu = \left(x_1^2 - x_3^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_4^2};$

8. $Lu = x_2^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_4} + x_1\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2};$

9. $Lu = (x_1 - x_2)^3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - x_3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_4^2};$

10. $Lu = \dfrac{x_1}{x_2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \dfrac{x_4}{x_3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2};$

11. $Lu = \left(x_1 - \dfrac{x_2}{x_3}\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_4^2};$

12. $Lu = x_1\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} + x_2^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_4};$

13. $Lu = \left(x_3^2 + x_4\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_4} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2};$

14. $Lu = x_1^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_1 x_2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{x_1}{x_2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_4};$

15. $Lu = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 3\dfrac{x_1}{x_3^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_4} + x_3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2};$

16. $Lu = x_1\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 3x_2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_4};$

17. $Lu = \dfrac{x_1}{x_2 - x_3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_4};$

18. $Lu = \left(x_1^2 - x_3^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_4};$

19. $Lu = \dfrac{x_2}{x_1}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + x_4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_4^2};$

20. $Lu = x_1^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + (x_3 + x_4)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_4}.$

Задание 8. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области

Пример выполнения задания 8

Задача. Используя метод изображений, найти функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области $D : \mathbb{R}^3, z \geq 0$.

Решение. Функция Грина ищется в виде $G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v$, где v - гармоническая в D, $M = (x, y, z)$, $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Для построения функции Грина достаточно, чтобы v удовлетворяла в D следующим условиям

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v|_{z=0} = -\frac{1}{4\pi R_{MM_0}} \end{cases}, \tag{101}$$

кроме того v должна равномерно стремиться к нулю на бесконечности.

Рассмотрим точку $M_1 = (x_0, y_0, -z_0)$, симметричную точке M_0 относительно плоскости $z = 0$ (расстояния R_{MM_0} и R_{MM_1} равны). Тогда функция

$$v = -\frac{1}{4\pi R_{MM_1}} \tag{102}$$

является гармонической в D (особенность находится в области $z < 0$), и удовлетворяет остальным двум условиям. Тем самым,

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi R_{MM_1}} \tag{103}$$

Задача. Используя метод изображений, найти функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области $D : \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 < R$.

Решение. Функция Грина ищется в виде $G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v$, где v - гармоническая в D, $M = (x, y, z)$, $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Для построения функции Грина достаточно, чтобы v удовлетворяла в D следующим условиям

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \\ v|_{\Sigma} = -\frac{1}{4\pi R_{MM_0}} \end{cases} \tag{104}$$

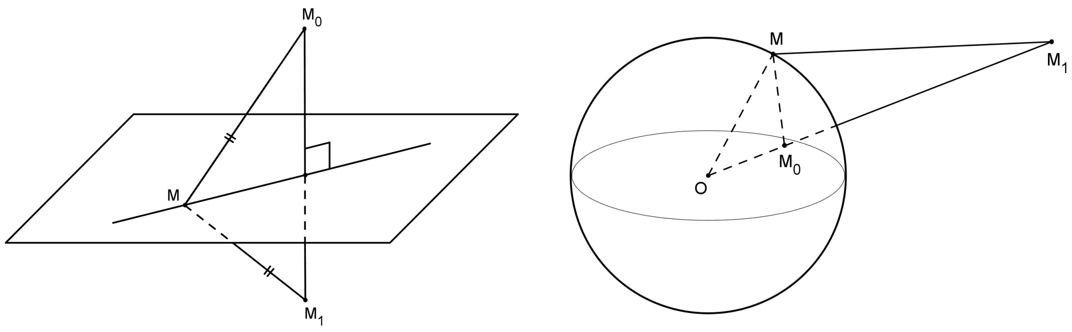

Рис. 1: к решению задания 1.

Рассмотрим точку M_1, симметричную относительно точки M_0 по правилу $R_{OM_0}R_{OM_1} = R^2$, причем точки O, M_0, M_1 лежат на одной прямой (инверсия). Покажем, что от всех точек, лежащих на поверхности Σ, расстояния до точек M_0 и M_1 пропорциональны. Это следует из подобия треугольников OM_0M и OMM_1, которое следует из того, что угол при вершине O у них общий, и стороны при этом угле относятся одинаково $\frac{R_{OM_0}}{R_{OM}} = \frac{R_{OM}}{R_{OM_1}}$, причем это отношение равно $\frac{R_{OM_0}}{R}$. Тем самым, $R_{MM_0} = \frac{R_{OM_0}}{R}R_{MM_1}$.

Тогда функции $-\frac{R}{R_{OM_0}R_{MM_1}}$ и $\frac{1}{R_{MM_0}}$ принимают одинаковые значения на Σ, а значит функция Грина запишется в виде

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} - \frac{R}{4\pi R_{OM_0}R_{MM_1}} \tag{105}$$

Варианты задания 8

Используя метод изображений, найти функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в указанной области:

1. $\mathbb{R}^3$, внутренность двугранного угла, величиной $\pi/3$;
2. $\mathbb{R}^3$, $x, y, z \geq 0$;
3. $\mathbb{R}^3$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0$;
4. $\mathbb{R}^3$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x \leq 0$;

5. $\mathbb{R}^2$, $x^2 + y^2 \le 9,\ \ y \ge 0$;
6. $\mathbb{R}^2$, $x, y \ge 0$, $y \le x/\sqrt{3}$;
7. $\mathbb{R}^2$, $x/\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3}x$;
8. $\mathbb{R}^3$, $0 \le y \le x$;
9. $\mathbb{R}^3$, $0 \le \sqrt{3}x \le y$;
10. $\mathbb{R}^3$, $0 \le x \le z$;
11. $\mathbb{R}^2$, $y \ge x$, $y \ge -x$;
12. $\mathbb{R}^3$, $x \le y \le x\sqrt{3}$;
13. $\mathbb{R}^2$, $y \ge x \ge 0$;
14. $\mathbb{R}^3$, $x/\sqrt{3} \le z \le x$;
15. $\mathbb{R}^2$, $y \ge -x$, $y \le x$;
16. $\mathbb{R}^3$, $y \ge -x$, $y \le x$;
17. $\mathbb{R}^3$, $x, y \ge 0$, $z \le 0$;
18. $\mathbb{R}^2$, $z \le 0$, $y \le x\sqrt{3}$;
19. $\mathbb{R}^3$, $x, z \ge 0$, $z \le x\sqrt{3}$;
20. $\mathbb{R}^3$, $y, z \ge 0$, $z \le y$.

Список литературы

[1] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том 2. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2017, 842 с.

[2] Блинова И.В., Попов И.Ю. Простейшие уравнения математической физики. Санкт-Петербург: СПбГУ ИТМО, 2009, 60 с.

[3] Попов И.Ю. Математическая физика. Санкт-Петербург: СПбГУ ИТМО, 2005, 104 с.

[4] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: МГУ, Наука, 2004, 798 с.

[5] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1988, 512 с.

[6] Гортинская Л.В., Панкратова Т.Ф., Понятовский В.В., Ратафьева Л.С., Рыжков А.Е., Трифанов А.И. Типовой расчет „Аналитическая геометрия“. 1 модуль. Учебно-методическое пособие. Санкт-Петербург: НИУ ИТМО, 2012, 50 с.

Миссия университета – открывать возможности для гармоничного развития конкурентоспособной личности и вдохновлять на решение глобальных задач.

МЕГАФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И УПРАВЛЕНИЯ

Мегафакультет компьютерных технологий и управления (МФКТиУ) является первым и крупнейшим мегафакультетом Университета ИТМО. Он был создан на базе одноименного факультета после присоединения различных профильных структурных подразделений в связи с потребностью консолидация научных, образовательных, инженерных и технологических ресурсов для создания национального центра компетенций международного уровня в области киберфизических систем.

Лобанов Игорь Сергеевич
Попов Антон Игоревич
Попов Игорь Юрьевич
Трифанов Александр Игоревич

Типовой расчет по математической физике

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49