УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**А.Б. Бушуев, Ю.В. Литвинов**

# Моделирование конфликтов в двухсторонней теории игр

**Учебное пособие**

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО по направлениям подготовки 27.04.03, 15.04.06, 27.04.04 в качестве учебного пособия для реализации основных образовательных программ высшего образования магистратуры.

**Санкт-Петербург**

**2018**

А.Б. Бушуев, Ю.В.Литвинов. Моделирование конфликтов в двухсторонней теории игр – СПб: СПб НИУ ИТМО, 2018. – 41 с.


**Рецензент:**
Быстров С.В., к.т.н., доцент факультета Систем управления и робототехники Университета ИТМО.

В учебном пособии рассмотрены методы моделирования конфликтного поведения в экономических и технических системах, основанные на математической теории игр двух лиц и теории решения изобретательских задач.

Пособие предназначено для студентов (магистров) технических вузов по направлениям 27.04.03 «Системный анализ и управление» 15.04.06 «Мехатроника и робототехника», 27.04.04 «Управление в технических системах». Учебное пособие может быть полезно для краткого первичного знакомства с основными положениями линейного и нелинейного программирования, используемыми на практических занятиях, а также с задачей двухсторонней монополии при выполнении домашнего задания.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО–ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 г статус национального исследовательского университета. С 2013 г Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентноспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как программа «5 в 100». Цель Университета ИТМО–становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

## Оглавление

## Введение

Пособие предназначено для изучения дисциплин «Теория решения изобретательских задач» и «Моделирование процессов технического творчества». Новизна предлагаемого материала заключается в использовании математического аппарата теории игр двух лиц для моделирования противоречий в технических и технико-экономических системах.

Цель пособия – изучение вопросов системного анализа в задачах технического творчества для моделирования и принятия решений в конфликтных ситуациях.

В первом разделе приводятся некоторые теоретические сведения о задачах линейного и нелинейного программирования, необходимые для следующих двух разделов, и методы их решения.

Во втором разделе рассматриваются основные понятия теории матричных игр двух лиц, основной результат теории игр, осторожные и смешанные стратегии для принятия решений с риском. Материалы этого раздела используются для практических занятий и требуют элементарных навыков работы в программной среде «Mathcad».

В третьем разделе рассматривается двухсторонняя монополия, как игра с непрерывными платежными функциями и с ненулевой суммой. В первых двух параграфах раздела двухсторонняя монополия выступает как экономическая задача, находятся условия равновесия и возможности его достижения в условиях ограничений, в третьем-двухсторонняя монополия и алгоритм решения изобретательских задач. Этот раздел используется для выполнения самостоятельного домашнего задания в соответствии с заданным вариантом в виде патента-прототипа. Патент-прототип должен быть найден студентом самостоятельно по номеру в базе данных Федерального института промышленной собственности (ФИПС).

В целом пособие позволяет вырабатывать компетенции по применению системных решений в области проектирования, конструирования, разработки и управления жизненным циклом электронных средств, технических, технико-экономических и киберфизических систем.

## 1.Некоторые сведения о задачах линейного и нелинейного программирования

Для решения задач теории игр используются методы линейного и нелинейного программирования и предполагают нахождение программы действий или ходов в игре, которые дают максимальный выигрыш или минимальный проигрыш. Такие задачи сводятся к нахождению экстремума заданной функции с ограничениями. Задача программирования ставится следующим образом. <u>Заданы:</u> целевая функция $J = J(x)$, где $J$ - скалярная величина, а $x$ - $n$-мерный вектор, уравнение ограничений $G(x) \geq 0$, где $G(x)$ – векторозначная функция переменной $x$ мерностью $m$.

$$J\left(x^*\right) = \underset{G(x) \geq 0}{extr} J(x)$$

Необходимо найти такое значение $x^*$, которое дает экстремальное значение целевой функции $J(x^*)$ при ограничениях $G(x) \geq 0$, т.е. решением задачи программирования является вектор $x^*$.

Если целевая функция $J(x)$ и уравнения ограничений $G(x) \geq 0$ являются линейными относительно переменной $x$, то задача нахождения экстремума относится к задачам линейного программирования. Если целевая функция J(x) или уравнения ограничений являются нелинейными относительно переменной x, то задача нахождения экстремума относится к задачам нелинейного программирования.

Если уравнения ограничений не заданы, то задача нахождения экстремума называется задачей на безусловный экстремум, в противном случае - задачей на условный экстремум.

**Отметим важное обстоятельство: задача линейного или нелинейного программирования не всегда имеет решение.**

## 1.1. Безусловный экстремум

Из математики известно [1], что необходимым условием решения задач на безусловный экстремум
является равенство нулю первой производной от целевой функции $J(x)$ по переменной $x$, т.е.

$$\frac{\partial J\left(x\right)}{\partial x} = \text{grad } J(x) = 0$$

где первая производная от скалярной функции по векторному аргументу или градиент является также $n$ -мерным вектором

$$\text{grad } J(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial J(x)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial J(x)}{\partial x_2} \\ .... \\ \dfrac{\partial J(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Решением уравнения является вектор $x$, задающий в $n$-мерном пространстве точку, подозрительную на экстремум. Она будет максимумом целевой функции, если вторая производная от целевой функции в этой точке будет отрицательной, и минимумом - если вторая производная будет положительной. Вторая производная от скалярной функции $J(x)$ по векторному аргументу $x$ будет квадратной матрицей размером $n$ на $n$. Эта матрица **Г** называется матрицей Гессе или гессианом

$$\frac{\partial^2 J(x)}{\partial x^2} = \tilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

Так как вторая производная от целевой функции является матрицей, то условие положительности **Г** > 0 означает, что матрица **Г** является положительно определенной, а условие отрицательности второй производной **Г** < 0 означает, что матрица **Г** является отрицательно определенной. Положительная или отрицательная определенность квадратной матрицы, в том числе, и матрицы Гессе, может быть установлена по критерию Сильвестра:

**- если все главные последовательные миноры матрицы положительны, то и матрица является положительно определенной**,

**- если нечетные главные миноры отрицательны, а четные главные миноры положительны, то матрица является отрицательно определенной.**

Последовательные главные миноры матрицы находятся как определители последовательно нарастающего порядка, составленные из элементов матрицы, расположенных симметрично относительно ее главной диагонали. Например, для матрицы **Г** последовательность главных миноров равна:

$$\tilde{A}_1 = \left| \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_1 \partial x_1} \right|, \tilde{A}_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_2 \partial x_2} \end{vmatrix}, \ldots$$

$$\ldots \tilde{A}_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим пример. Пусть целевая функция равна

$$J(x) = \mathrm{x}^{\mathrm{T}} Q x + p^{\mathrm{T}} x$$

где

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} p = \begin{bmatrix} -10 \\ -22 \end{bmatrix} .$$

Находим градиент целевой функции и приравниваем его нулю:

$$\operatorname{grad} J(x) = 2Qx + P = 2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 \\ -22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Решение этой системы уравнений дает вектор

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Находим матрицу Гессе

$$\tilde{A} = 2Q = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} .$$

Главные миноры равны

$$\tilde{A}_1 = 6, \tilde{A}_2 = 6 \cdot 10 - 2 \cdot 2 = 56 .$$

Первый (нечетный) и второй (четный) главные миноры положительны, следовательно, матрица **Г** > 0, а найденная точка $x^*$ является точкой минимума.

## 1.2. Задача линейного программирования

Целевая функция задается в виде линейной формы

$$q(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n,$$

или в векторно-матричной форме

$$q(x) = C^{\mathrm{T}} x .$$

где

$$C^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix}$$

- матрица-строка постоянных коэффициентов линейной формы.

Если не заданы уравнения ограничений, то задача линейного программирования не имеет решения. Действительно, вектор-градиент от линейной целевой функции равен матрице С постоянных коэффициентов и никак не может быть равен нулевому вектору, что необходимо для экстремума. Уравнения ограничений задаются системой *m*-линейных алгебраических уравнений с *n*-неизвестными:

$$\begin{aligned} &a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ &a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{aligned}$$

причем число уравнений меньше числа неизвестных, т.е. $m < n$.

В векторно-матричном виде система может быть записана как

$$Ax=B,$$

где

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{bmatrix}$$

и коэффициенты матриц $A$ и $B$ заданы.

Кроме того, в задаче линейного программирования задаются ограничения на знак координат вектора x, обычно они должны быть неотрицательными:

$$x_i \geq 0, i=1,...n \quad .$$

В задаче необходимо найти вектор $x^*$

$$x^* : q(x^*) = \min_{\substack{Ax=B \\ x_i \geq 0, i=1,...n}} q(x)$$

для нахождения минимума целевой функции.

Для нахождения максимума знак min в формуле меняется на знак max.

Как же решать такую задачу? Если бы число уравнений $m$ равнялось числу переменных $n$, то можно было бы решить систему $Ax=B$ (конечно, при условии $\det A \neq 0$) и найти некоторое решение. Но, поскольку $m<n$, то имеется бесконечное число решений, т.е. наборов векторов $x$, которые удовлетворяют системе $Ax=B$. Учтем, что не допускаются решения с отрицательными значениями координат вектора $x$. Это несколько сокращает число возможных решений, которые называются **допустимыми**, и все же их число может быть также очень большим (принципиально, тоже до $\infty$). Из всех допустимых решений надо выбрать одно, которое минимизирует (или максимизирует) целевую функцию $q(x)$.

Намечается следующий возможный путь решения задачи. Так как $m<n$, то часть неизвестных переменных ($n-m$ штук) можно обнулить, поскольку допускаются нулевые значения переменных $x$. Тогда оставшиеся $m$ штук переменных в системе $Ax=B$ определяются однозначно (при условии $\det A \neq 0$). Если же $\det A=0$, то можно попробовать обнулить другие $n-m$ переменных и снова попробовать решить задачу. Полученное решение называется **базисным,** а $m$ штук переменных, которые дают это решение, называются **базисом**. Остальные, обнуляемые $n-m$ штук переменных, называются **свободными**. В общем случае может существовать множество базисных решений (если перебрать все возможные наборы обнуляемых и не обнуляемых переменных). Из всех базисных решений выбираем допустимые (неотрицательные значения всех координат вектора $x$). Наконец, из всех допустимых значений выбираем одно, которое дает экстремум целевой функции $q(x)$.

В случае двух свободных переменных геометрическое пояснение может быть представлено на плоскости (рис. 1.1.) Всего имеется 5 переменных в системе уравнений-ограничений, $x_1$ и $x_2$ свободные, а $x_3$, $x_4$, $x_5$ образуют базис

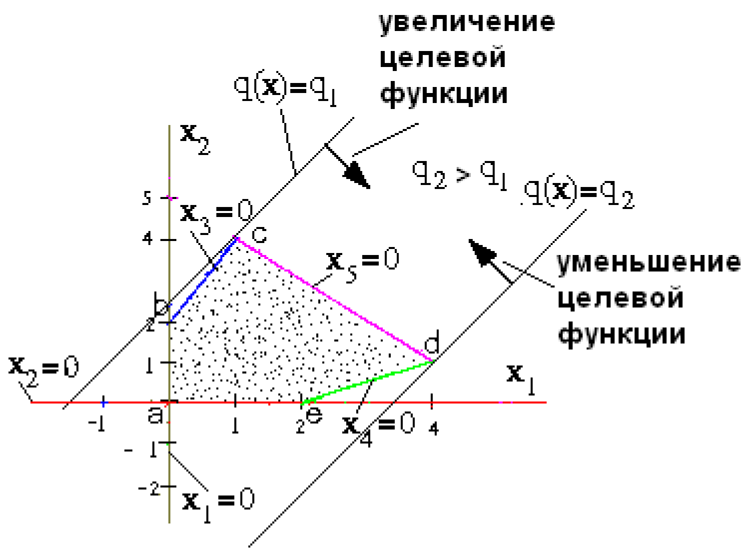


Рисунок 1.1. Геометрическое пояснение
задачи линейного программирования

Уравнения $x_1$=0 и $x_2$=0 на рис.1.1 задают оси ординат и абсцисс, а уравнения базисных переменных $x_3$=0, $x_4$=0, $x_5$=0 замыкают выпуклый многоугольник abcde, который является частным случаем симплекса. Для более высокой мерности пространства свободных переменных (больше двух) симплексом будет выпуклый многогранник. Таким образом, симплекс геометрически представляет систему линейных уравнений ограничений $Ax=B$. Линии постоянного уровня целевой функции $q(x)$=Const на рис. 1.1 представляют прямые, проходящие параллельно друг другу.

Для решения задачи максимизации линии перемещаются параллельно вправо вниз, пока не достигают максимального значения $q(x) = q_2$ в точке d симплекса. Координаты точки d и задают решение задачи максимума с ограничениями.

Для решения задачи минимизации линии перемещаются параллельно влево вверх, пока не достигают минимального значения $q(x) = q_1$ в точке c симплекса. Координаты точки c и задают решение задачи минимума с ограничениями.

Обратим внимание, что в системе уравнений-ограничений могут быть не только равенства, но и неравенства (или даже все неравенства), например:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

Тогда каждое неравенство приводится к эквивалентному равенству путем введения в систему дополнительной фиктивной переменной

$$x_{n+1} \geq 0 .$$

Значение ее также неизвестно и находится в результате решения задачи линейного программирования. Эта переменная вычитается из левой части неравенства

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1 \quad .$$

Так как дополнительная переменная может быть больше нуля, то ее вычитание из левой части неравенства приводит его к равенству.

Если исходное неравенство имеет знак « $\leq$ », то дополнительную переменную уже прибавляют к левой части неравенства, выравнивая его до равенства. Таким же образом все остальные неравенства приводятся к равенствам, причем для каждого неравенства нужна своя дополнительная переменная. Мерность неизвестного вектора $x$ еще больше возрастает по сравнению с числом уравнений-ограничений $m$, увеличивается и число возможных переборов базисных и свободных переменных, возрастает трудоемкость решения.

В дальнейшем будем предполагать, что все неравенства в системе уравнений- ограничений $Ax=B$ выровнены. Из наиболее известных компьютерных методов решения задачи линейного программирования является так называемый симплекс-метод [2]. Более подробно программа для решения задачи линейного программирования рассмотрена в главе 2.

### 1.3. Задача нелинейного программирования

Рассмотрим частный случай задачи нелинейного программирования, когда уравнение ограничений представляет собой строгое равенство G(x) = 0. Для нахождения точки экстремума в этом случае можно использовать метод неопределенных множителей Лагранжа. Для нахождения экстремума функции J(x) составляем функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = J(x) + \lambda^{\mathrm{T}} \cdot G(x),$$

где $\lambda$ - $m$-мерный вектор неопределенных множителей Лагранжа, $G(x)$ - функция ограничений, по сути являющаяся также $m$-мерным вектором

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ .. \\ \lambda_m \end{bmatrix} \quad G(x) = \begin{bmatrix} G_1(x) \\ G_2(x) \\ .. \\ G_m(x) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, первое уравнение ограничений будет иметь вид: $G_1(x)$ = 0, второе: $G_2(x) = 0$ и т.д. Всего будет $m$ штук уравнений-равенств. Поэтому и вектор $\lambda$ является $m$-мерным вектором.

Необходимым условием экстремума является равенство нулю первой производной от функции Лагранжа. Так как функция Лагранжа зависит от двух переменных, то находим частные производные и приравниваем их нулю

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x} = \frac{dJ(x)}{dx} + \left(\frac{G(x)}{dx}\right)^{T} \lambda = 0,$$
$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda} = G(x) = 0$$

где

$$\frac{dG}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1(x)}{\partial x_2} & .. & \frac{\partial G_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial G_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2(x)}{\partial x_2} & .. & \frac{\partial G_2(x)}{\partial x_n} \\ .. & .. & .. & .. \\ \frac{\partial G_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial G_m(x)}{\partial x_2} & .. & \frac{\partial G_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Решением этой системы уравнений Лагранжа будет вектор $x^*$ и вектор λ, при которых функция Лагранжа будет иметь экстремальное значение. Утверждается также, что тот же самый вектор $x^*$ дает и экстремальное значение исходной целевой функции $J(x)$. Действительно, если поддерживать выполнение второго уравнения системы $G(x) = 0$ (являющегося и уравнением ограничений), то функция Лагранжа $L(x,\lambda)$ и целевая функция $J(x)$ будут совпадать, поскольку от прибавления нуля значение функции не меняется.

Рассмотрим пример.

Пусть $J(x) = (x_1)^2 + (x_2)^2$, а уравнение ограничений имеет вид $0.25(x_1)^2 + (x_2)^2 = 1$. Так как в целевую функцию и в уравнения ограничений входят две переменных вектора $x$, т.е. $x_1$ и $x_2$, то вектор $x$ будет двухмерным ($n$=2).

Необходимо найти экстремум $J(x)$ при выполнении ограничений. Найдем левую часть уравнения ограничений, т.е. $G(x) = 0.25(x_1)^2 + (x_2)^2 - 1$. Так как уравнений ограничений имеется всего одно, то множитель λ Лагранжа будет скалярной величиной ($m$=1). Составим функцию Лагранжа

$$L(\mathrm{x},\lambda) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + \lambda[0.25(x_1)^2 + (x_2)^2 - 1].$$

Находим частные производные и приравниваем их нулю

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2\mathrm{x}_1 \\ 2\mathrm{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}5x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \lambda = 0,$$
$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda} = 0{,}25x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

Первое уравнение системы в скалярной форме записи превращается в два уравнения:

$$2x_1+\lambda\cdot 0{,}5\, x_1=0$$

$$2x_2+\lambda\cdot 2\, x_2=0$$

Откуда имеем решение $x_1^*=0$, которое подставляем во второе уравнение системы Лагранжа, тогда $x_2^* = \pm\, 1$, $\lambda$=-2.

Аналогично при $x_2^*=0$ имеем $x_1^*=\pm\, 2$, $\lambda$=-0.5. Множитель $\lambda$ находим из уравнений скалярной формы записи при $x_2\neq 0$ и $x_1\neq 0$.

Решение этой задачи имеет простое геометрическое построение (рис.1.2).

В плоскости координат $x_1$ и $x_2$ построим уравнение ограничений $G(x)=0$ или $0.25(x_1)^2+ (x_2)^2=1$. Нетрудно заметить, что это уравнение эллипса.

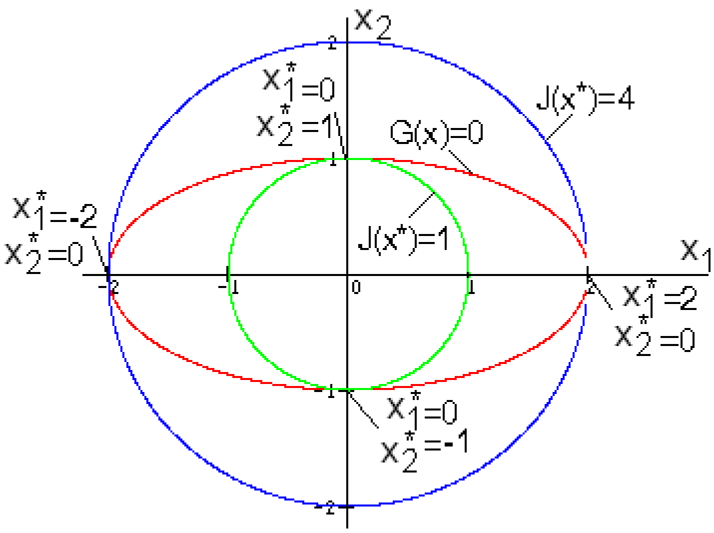


Рис.1.2. Геометрическое пояснение задачи нелинейного программирования

Если в целевую функцию подставить решение $x_1^*=0$, $x_2^*=1$ или $x_1^*=0$, $x_2^*=-1$, получим значение $J(x^*)=1$. Для построения линии постоянного уровня целевой функции $J(x)$=Const=1 значение целевой функции приравниваем 1, т.е. $(x_1)^2 + (x_2)^2=1$. Получаем уравнение окружности с радиусом, равным единице. Видно, что эта окружность вписывается в эллипс ограничений.

Если в целевую функцию подставить решение $x_1^*=2$, $x_2^*=0$ или $x_1^*=-2$, $x_2^*=0$, получим значение $J(x^*)=4$. Для построения линии постоянного уровня целевой функции $J(x)$=Const=4 значение целевой функции приравниваем 4, т.е. $(x_1)^2 + (x_2)^2=4$. Получаем уравнение окружности с радиусом, равным двум. Видно, что эта окружность описывает эллипс ограничений. Координаты оптимального вектора $x^*$ определяют точки касания описанной и вписанной геометрических фигур целевой функции относительно фигуры ограничения.

Если нет ограничений, то минимум $J(x)=0$, и линия постоянного уровня представляет собой точку в начале координат. При **максимизации** точка превращается в расширяющуюся окружность, которая, при появлении ограничений, упирается в эллипс. Поэтому задача вписывания окружности в эллипс является задачей **максимума** с ограничениями в виде равенства.

Аналогично, если нет ограничений, то максимум $J(x)=\infty$, линия постоянного уровня представляет окружность бесконечного радиуса. При **минимизации** окружность сужается, пока не сожмет эллипс. Поэтому задача описывания окружности вокруг эллипса будет задачей **минимизации** целевой функции с ограничениями в виде равенства.

Значение $\lambda$ в данном случае можно было и не находить. Однако в других задачах без определения вектора $\lambda$ не найти вектор $x^*$.

Поясним назначение вектора $\lambda$ с помощью рис.1.3.

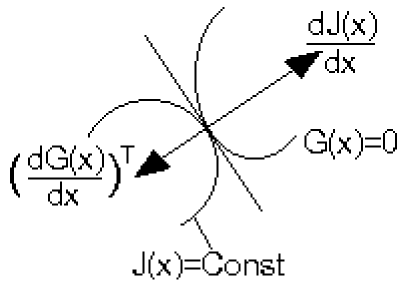


Рисунок 1.3.Точка экстремума в задаче нелинейного программирования

На рис.1.3 показано решение экстремальной задачи. Линия $G(x)=0$ задает ограничения, $J(x)$=Const - линия постоянного уровня целевой функции. Вектор-градиент $\frac{dJ(x)}{dx}$ показывает величину и направление возрастания целевой функции в точке касания. По определению он перпендикулярен касательной к целевой функции. Величина возрастания определяет степень кривизны целевой функции. Аналогично производная $\left[\frac{dG(x)}{dx}\right]^{T}$ также определяет степень кривизны и направление возрастания ограничений в транспонированном направлении. В соответствии с первым уравнением Лагранжа должно выполняться условие $\frac{dJ(x)}{dx}=-\left[\frac{dG(x)}{dx}\right]^{T}\lambda$, т.е. векторы производных должны лежать на одном направлении и быть одинаковыми по длине.

Они лежат на одном направлении, поскольку перпендикулярны одной и той касательной. Длина же каждого из векторов зависит от степени кривизны его кривой. Поскольку кривизна ограничений и целевой функции в точке касания в общем случае может быть разной, то множитель $\lambda$ выравнивает эту длину, чтобы строго выполнялось равенство

$$\frac{dJ(x)}{dx} = -\left[\frac{dG(x)}{dx}\right]^{T} \lambda$$

Если задать уравнение ограничений в виде линейной функции $a\ x_1 + b\ x_2 = 0$, а целевую функцию оставить прежней, то задача экстремума геометрически представляет собой задачу касания (рис.1.4) и является задачей максимума с ограничением в виде равенства.

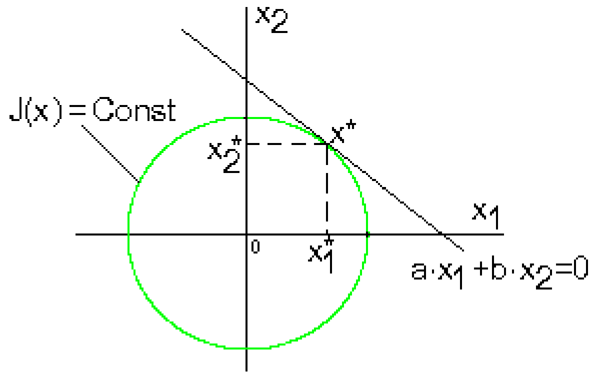


Рис.1.4. Ограничение в виде линейной функции

Решается задача аналогично. Вектор $x^*$ определяет координаты точки касания.

## 2. Введение в матричную теорию игр двух лиц

Основоположником математической теории игр является американский математик Дж. Фон Нейман [3]. Теория игр используется для моделирования конфликтных ситуаций, когда сталкиваются противоположные интересы нескольких или двух лиц. В экономике теория игр описывает явление конкуренции. В задачах технического творчества с помощью теории игр можно моделировать процесс конфликта между альтернативными свойствами технического противоречия.

Рассмотрим, как наиболее простую, игру двух сторон или лиц: игроков А и В. Игра задается правилами, в которых определяются поведение игроков или ходы, а также расплата каждой из сторон за их ходы. В дискретных играх, когда число возможных ходов образует счетное множество, игра обычно задается матрицей игры. В матрице игры записываются выигрыши или проигрыши игроков при определенных ходах. Матрица игры приведена в таблице 1.

В таблице 1 обозначения А1, А2 ... А*n* являются возможными ходами игрока А, и В1, В2 ... В*m* – возможные ходы игрока В.

Таблица 1.
Платежная матрица игры

| | B1 | B2 | … | B$m$ |
|---|---|---|---|---|
| A1 | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | … | $a_{1,m}$ |
| A2 | $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | … | $a_{2,m}$ |
| … | … | … | … | … |
| A$n$ | $a_{n,1}$ | $a_{n,2}$ | … | $a_{n,m}$ |

На пересечении строк A$i$ ($i$=1,...$n$) и столбцов ($j$=1,...$m$) находятся элементы $a_{i,j}$, которые означают расплату за ход A$i$ и ответный ход B$j$.

## 2.1. Игра с нулевой суммой. Минимаксная стратегия

В играх с нулевой суммой выигрыш игрока А равен проигрышу игрока В. Примем следующее условие: если $a_{i,j} > 0$, то это выигрыш игрока А и проигрыш игрока В, если $a_{i,j} < 0$, то это проигрыш игрока А и выигрыш игрока В.

В качестве примера рассмотрим следующую игру с нулевой суммой. Пусть игрок А имеет 3 возможных хода: А1 – игрок А ходит красной картой «в темную» (рубашкой карты вверх), А2 - игрок А ходит черной картой «в темную», А3 – игрок А ходит зеленой картой «в темную». Игрок В имеет два возможных хода: В1- игрок В ходит красной картой, В2 - игрок В ходит черной картой. После каждой игры, а в математической теории игра одна игра включает ход игрока А и ответный ход игрока В, наступает следующая расплата: если при открытии обе карты оказались одного цвета, то А выигрывает 5 рублей, долларов или каких-то 5 единиц чего-то, а игрок В проигрывает эти 5; если карты оказались красной и черной, то А проигрывает 5, а В выигрывает 5; если карты оказались зеленой и красной, то А выигрывает 4, а В проигрывает 4; если карты оказались зеленой и черной, то А проигрывает 4, а В выигрывает 4. Платеж задается матрицей в таблице 2.

Таблица 2.
Платежная матрица игры

| | B1 | B2 |
|---|---|---|
| A1 | 5 | -5 |
| A2 | -5 | 5 |
| A3 | 4 | -4 |

Матрица игры позволяет найти нижнюю W$a$ и верхнюю W$b$ цены игры. Зададим новую игру матрицей в таблице 3.

Таблица 3.

Платежная матрица игры

| | B1 | B2 | B3 | | min по строке |
|---|---|---|---|---|---|
| A1 | 2 | -3 | 4 | | -3 |
| A2 | -3 | 4 | -5 | | -5 |
| A3 | 4 | -5 | 6 | | -5 |
| | | | | | max по столбцу W*a*=-3 |
| max по столбцу | 4 | 4 | 6 | min по строке W*b*=4 | |

Как может рассуждать игрок А, разглядывая эту матрицу? «Если я буду играть А1, то могу выиграть 2 или 4, а проиграть -3; если буду играть А2, то могу выиграть 4, а проиграть -3 или -5; при ходе А3 могу выиграть 4 или 6, а проиграть -5».

Если игрок А очень осторожен, то он всегда будет ходить А1, так как в этом случае больше -3 он не проиграет никогда, как бы не отвечал игрок В1. Следовательно, величина, равная W*a*=-3, есть гарантированный результат игры для игрока А. Этот гарантированный результат игрока А называется нижней ценой игры и определяется по формуле

$$\mathrm{W}a = \max_i \min_j a_{ij} \ .$$

Рассмотрим ситуацию для игрока В. Если В будет отвечать В1, то проиграет 2 или 4, а выиграет – 3; если будет отвечать В2, то проиграет 4, а выиграет –3 или –5; если ответит В3, то выиграет – 5 , а проиграет 4 или 6. Следовательно, для игрока В гарантированный проигрыш равен 4. Гарантированный результат для игрока В называется верхней ценой игры и определяется по формуле

$$\mathrm{W}b = \min_j \max_i a_{i_j} \ .$$

Нахождение W*a* и W*b* показано в таблице 3, в последней строке и последнем столбце. Для определения W*a* сначала по строке А1 находится минимальный элемент (на пересечении А1 и В2), затем также по строке А2 находится минимальный элемент (на пересечении А2 и В3), потом минимальный элемент по строке А3 (А3 и В2). Затем из этих трех элементов выбирается максимальный элемент. Аналогично находится и W*b*, только сначала находится максимум по столбцам, а затем из этих максимальных элементов находится минимальный.

Иногда матрица игры содержит только положительные элементы $a_{i,j} > 0$. Это получается тогда, когда один игрок (А) всегда сильнее, чем другой игрок

(B). Для игрока B смысл игры заключается в том, чтобы проиграть как можно меньше, а не играть игрок B не может, поскольку между ним и игроком A есть конфликт. Игрок B вынужден принимать те или иные решения, т.е. ходить в ответ на действия (ходы) игрока A.

Даже если матрица игры имеет отрицательные элементы, то она легко приводится к эквивалентной матрице только с положительными элементами. Для этого ко всем элементам матрицы добавляется одно и то же положительное число, по крайней мере, большее или равное максимальному модулю отрицательных чисел. Например, если ко всем элементам матрицы в таблице 3 добавить число 5 или больше, то получим матрицу с положительными элементами. Добавим, например, 10. Тогда получим следующую матрицу игры:

Таблица 4.

Платежная матрица игры

| | B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|---|
| A1 | 12 | 7 | 14 |
| A2 | 7 | 14 | 5 |
| A3 | 14 | 5 | 16 |

С такой матрицей игрок A будет все время выигрывать. Чтобы расплата была эквивалентна матрице игры в таблице 3, перед началом каждой игры (хода) игрок A должен заплатить игроку B добавленное число, т.е. 10.

Когда верхняя и нижняя цены игры одинаковы, то в игре существует седловая точка (Табл. 5).

Таблица 5.

Платежная матрица игры

| | B1 | B2 | | min по строке |
|---|---|---|---|---|
| A1 | 3 | 2 | | 2 |
| A2 | 4 | 1 | | 1 |
| | | | | max по столбцу W*a*=2 |
| max по столбцу | 4 | 2 | min по строке W*b*=2 | |

Седловая точка получается при ходе A1B2. Наличие в игре седловой точки является самой выгодной ситуацией для осторожных игроков.

Правило выбора ходов, при котором каждой из играющих сторон гарантируется определенный результат, называется минимаксной или максиминной стратегией (название происходит от вида формул, по которым определяются цены игры).

Для матрицы игры в таблице 5 W*a*=2 означает, что игрок A, придерживаясь минимаксной стратегии, выиграет не менее 2, как бы не играл игрок B. Для игрока B W*b*=2 означает, что игрок B проиграет не более 2, если будет придерживаться минимаксной стратегии, как бы не играл игрок A.

Рассмотрим еще пример игры (табл. 6):

Таблица 6.

Платёжная матрица игры

| | B1 | B2 | | min по строке |
|---|---|---|---|---|
| A1 | 2 | 3 | | 2 |
| A2 | 4 | 1 | | 1 |
| | | | | max по столбцу W*a*=2 |
| max по столбцу | 4 | 3 | min по строке W*b*=3 | |

В этой игре нет седловой точки, так W*a* = 2, а W*b* = 3. Нетрудно убедиться, что минимаксной стратегией для игрока A будет все время ход A1, а для игрока B – ход B2. Это гарантирует игроку A выигрыш не менее 2, а игроку B – проигрыш не более 3. Простейшая картинка (рис.2.1.) поясняет эту ситуацию, на которой изображены линии верхней и нижней цен игры и промежуток между ними, который называется ядром игры.

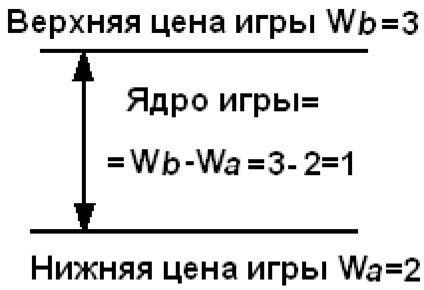


Рисунок 2.1. Ядро игры

Как видно, ядро не пустое – оно равно 1. В игре же с седловой точкой ядро пустое, поскольку верхняя и нижняя цены игры совпадают. Игроку B не понизить верхнюю цену (чтобы уменьшить гарантированный проигрыш), а игроку A не повысить нижнюю цену (чтобы поднять гарантированный выигрыш). В седловой точке игроки максимально сближаются по своим интересам, можно сказать, попадают в точку равновесия.

Если ядро не пустое, то между положениями игроков есть некоторое пространство, которое представляет интерес как для одного, так и другого игрока, чтобы его использовать с целью улучшения своего результата.

Рассмотрим ситуацию нескольких, подряд идущих игр, т.е. как бы одну многоходовую игру. Например, игрок В видит, что А все время ходит А1, и может подумать: «Зачем мне все время отвечать В2 и проигрывать 3? Лучше я отвечу ходом В1 и проиграю всего 2». И игрок В начинает рисковать, уходя от минимаксной стратегии.

Ситуация становится менее выгодной для игрока А: он стал выигрывать меньше – вместо 3 всего 2. Хотя это и гарантированный выигрыш, но на каждой игре терять 1 – может не понравиться игроку А. Тогда игрок А тоже начинает рисковать, уходя от минимаксной стратегии, и на ходы В1 будет отвечать А2, выигрывая при этом 4. Стратегия В1А2 становится очень невыгодной для игрока В – он все время проигрывает 4. Естественно, он возвращается снова к своей минимаксной стратегии, начиная на ход А2 отвечать В2. При этом игрок В проигрывает всего лишь 1. Складывается ситуация, самая невыгодная для игрока А – он не получает даже гарантированного выигрыша. Он тоже возвращается к своей минимаксной стратегии А1. Игра, в смысле стратегии, снова начинается с исходного положения и т.д.

С геометрической точки зрения уход от осторожной к рисковой стратегии для каждого игрока как раз и означает «вгрызание» в ядро игры со своей границы. Интересы игроков противоположны, один стремится как можно больше выиграть, а другой – как можно меньше проиграть, но объективно они могут «покусать» ядро игры каждый со своей стороны, чтобы поднять нижнюю цену игры $Wa$ (выигрыш не менее для игрока А) и опустить верхнюю цену игры $Wb$ (проигрыш не более для игрока В). Конечно, каждый старается «откусить» от ядра больше, чем противник. Но как этого добиться, зависит от степени информированности игроков о поведении друг друга. И тот и другой игрок желают знать, когда, после какой очередной игры противник меняет стратегию, т.е. узнать серию постоянно повторяющихся и чередующихся ходов противника. С другой стороны, каждый из них заинтересован сохранять свою стратегию в секрете от противника. Такая ситуация самая интересная в теории игр.

Возникает вопрос: нет ли в этой ситуации многоходовой игры какой-либо седловой точки внутри ядра? Нельзя ли прийти к какому-нибудь равновесию при отсутствии информации о возможной стратегии противника и получить гарантированный результат? Положительный ответ на эти вопросы дают так называемые смешанные стратегии и основной результат теории игр.

## 2.2. Смешанные стратегии

В смешанных стратегиях предполагается, что ходы могут выбираться двояким образом. Это - личные ходы игроков, когда они сами выбирают тот или иной ход, а также ходы, которые выбираются случайным образом. Если все ходы каждого из противников выбираются случайным образом, получается смешанная стратегия, наиболее засекреченная для противника. В матрице игры после каждого хода проставляется его вероятность: $p_i$ – вероятность хода А$i$ и $q_j$ – вероятность хода В$j$. Матрица игры со случайными ходами используется также для описания «игры» с природой. Матрица игры для смешанной стратегии имеет следующий вид (Табл. 7): Природа свои действия, ходы выбирает случайным образом, причем одни ходы могут благоприятствовать нашим действиям, а другие ходы могут вредить.

Таблица 7.

Платёжная матрица игры

| | | B1 | B2 | … | B$m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $q_1$ | $q_2$ | … | $q_m$ |
| A1 | $p_1$ | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | … | $a_{1,m}$ |
| A2 | $p_2$ | $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | … | $a_{2,m}$ |
| … | … | … | … | … | … |
| A$n$ | $p_n$ | $a_{n,1}$ | $a_{n,2}$ | … | $a_{n,m}$ |

Для вероятностей ходов каждого из игроков должно выполняться правило нормировки:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \sum_{j=1}^{m} q_j = 1 \ .$$

Для нашего примера с матрицей игры из таблицы 6 в случае использования смешанных стратегий необходимо ввести вероятности ходов А1,А2 и В1,В2. Возникает вопрос: как назначать вероятности ходов? Ответ на этот вопрос может дать основной результат теории игр. Получаем матрицу игры в таблице 8:

Таблица 8.

Платежная матрица игры

| | | B1 | B2 | | min по строке |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $q_1$ | $q_2$ | | |
| A1 | $p_1$ | 2 | 3 | | 2 |
| A2 | $p_2$ | 4 | 1 | | 1 |
| max по столбцу | | 4 | 3 | min по строке W$b$=3 | max по столбцуW$a$=2 |

Основной результат теории игр.

Если игрок А использует оптимальную смешанную стратегию, то его ожидаемый выигрыш остается постоянным и равным ν, независимо от того, какую стратегию использует игрок В. Аналогично, если игрок В использует оптимальную смешанную стратегию, то его ожидаемый проигрыш остается постоянным и равным ν, независимо от того, какую стратегию использует игрок А.

Примечание: оба игрока должны использовать только активную стратегию, т.е. вероятности каждого из возможных ходов не должны быть нулевыми.

Этот результат был получен фон Нейманом [3] и здесь приводится без доказательства.

Оптимальная смешанная стратегия определяется в результате решения задачи максимина или минимакса на протяжении уже многих игр (ходов). Величина ν называется эффективностью игры и равна:

$$\nu = \max_i \min_j \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} p_i q_j = \min_j \max_i \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} p_i q_j \ .$$

Таким образом, эффективность игры можно найти по этим формулам, если известны вероятности ходов. Однако, чаще всего, решается другая задача: найти вероятности ходов $p_i$ и $q_j$, которые дают экстремальную эффективность игры ν при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \sum_{j=1}^{m} q_j = 1, p_i \geq 0, q_j \geq 0 \ .$$

Такая задача относится к задачам на нахождение условного экстремума функции многих переменных, т.е. к задачам программирования. За много игр (ходов) величина ν будет определять гарантированный выигрыш игрока А и гарантированный проигрыш игрока В, причем по сравнению с чисто минимаксными стратегиями ν ≥ W$a$, ν ≤ W$b$. Игрок А может выиграть больше, чем W$a$, а игрок В – проиграть меньше, чем W$b$. Собственно, это и есть основной результат теории игр.

Как и любая задача линейного или нелинейного программирования, задача нахождения вероятностей, экстремизирующих ν, может иметь решения, а может и не иметь. Ответ на этот вопрос дает теорема Куна-Такера [4,5] для решения экстремальных задач с ограничениями в виде равенств и неравенств.

В частном случае, когда игра имеет всего два возможных хода у каждого из игроков, задача экстремизации решается просто – она сводится к решению системы линейных уравнений в виде равенств.

Рассмотрим снова пример игры с матрицей из таблицы 8.

Обе системы имеют по три уравнения и по три неизвестных: две вероятности и эффективность ν. Для этого случая вероятности ходов находятся из решения системы уравнений:

$$p_1 a_{11} + p_2 a_{21} = \nu$$

$$p_1 a_{12} + p_2 a_{22} = \nu$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$q_1 a_{11} + q_2 a_{12} = \nu$$

$$q_1 a_{21} + q_2 a_{22} = \nu$$

$$q_1 + q_2 = 1 \quad .$$

Решая отдельно для $p$ и $q$ эти системы, получаем решение:

$$p_1 = 0{,}75,\ \ p_2 = 0{,}25,\ \nu = 2{,}5$$

$$q_1 = 0{,}5,\ \ q_2 = 0{,}5,\ \ \nu = 2{,}5$$

Следовательно, игрок А должен ходить ходом А1 с вероятностью 0.75, а ходом А2 – с вероятностью 0.25. Игрок В должен ходить ходами В1 и В2 равновероятно, по 0.5. Практически реализовать такую игру игроком А можно с помощью урны с 4 шарами одинаковой формы: тремя белыми и одним черным. При вытаскивании белого шара игрок А делает ход А1, а при вытаскивании черного шара – ход А2. После каждого хода шар должен возвращаться в урну. Для игрока В реализовать его случайные ходы можно при помощи подбрасывания монеты.

Обратим внимание, что для этого примера нижняя цена игры (см. рис.2.1) поднялась на 0.5, а верхняя цена игры опустилась на 0.5. Нижняя и верхняя цены за множество ходов становятся равными, непустое ядро размером 1 стягивается в седловую точку, игроки А и В в среднем «разгрызают» ядро поровну.

Для случая матрицы игры размером больше 2x2 для нахождения неизвестных вероятностей решается задача линейного программирования.

Задача ставится следующим образом. Задана матрица игры М=[ $a_{i,j}$] . Необходимо найти:

1) вектор $p$ мерностью $n$ x 1 вероятностей ходов А$i$, который максимизирует эффективность игры ν при ограничениях

$$p^{\mathrm{T}} \cdot M \geq \begin{bmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\end{bmatrix} \cdot \nu,$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

$$p_i \geq 0 \quad ,$$

где - $p^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}p_1 & p_2 & \ldots & p_n\end{bmatrix}$, а единичная матрица-строка [1 1 …1] имеет размер 1x $n$.

2) вектор $q$ мерностью $m$ x 1 вероятностей ходов В$j$, который минимизирует эффективность игры ν при ограничениях

$$M \cdot q \le [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^{\mathrm{T}} \cdot v,$$
$$\sum_{j=1}^{m} q_j = 1,$$
$$q_j \ge 0 \quad ,$$

где - $q = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_m]$ , а единичная матрица-строка

[1 1 …1] имеет размер 1х $m$.

Рассмотрим пример. Задана матрица игры М, необходимо найти вероятности ходов игроков А и В, обеспечивающих оптимальную смешанную стратегию.

$$M = \begin{bmatrix} 3\,2\,4\,2 \\ 2\,1\,2\,3 \\ 3\,4\,1\,2 \end{bmatrix} .$$

Найдем вероятности ходов для игрока А. Записываем произведение

$$p^{\mathrm{T}} M = [p_1 \quad p_2 \quad p_3] \cdot \begin{bmatrix} 3\,2\,4\,2 \\ 2\,1\,2\,3 \\ 3\,4\,1\,2 \end{bmatrix} =$$
$$= [3p_1 + 2p_2 + 3p_3; 2p_1 + p_2 + 4p_3; 4p_1 + 2p_2 + p_3; 2p_1 + 3p_2 + 2p_3] .$$

Каждый элемент матрицы-строки в правой части равенств должен быть больше или равен ν:

$$3p_1 + 2p_2 + 3p_3 \ge \nu$$
$$2p_1 + p_2 + 4p_3 \ge \nu$$
$$4p_1 + 2p_2 + p_3 \ge \nu$$
$$2p_1 + 3p_2 + 2p_3 \ge \nu$$

Целевой функцией, которую надо максимизировать, является также ν. Величина ν находится в правой части неравенств, поэтому для получения целевой функции одно из неравенств приводим к эквивалентному равенству при помощи новой фиктивной переменной $p_4 \ge 0$. Возьмем, например, первое неравенство и из его левой части вычтем $p_4$. Получаем равенство, определяющее целевую функцию,

$$3p_1 + 2p_2 + 3p_3 - p_4 = \nu .$$

Остальные неравенства совместно с уравнением нормировки вероятностей образуют ограничения задачи линейного программирования, причем в их правую часть подставляется найденное значение ν.

Задача линейного программирования решается с помощью стандартной программы максимизации и минимизации функций среды Mathcad. Программа может быть написана в разных вариантах, в том числе, с использованием индексированных переменных. В первой строке задаются произвольно начальные значения вероятностей $0 \le p_i < 1$. Во второй строке определяется зависимость целевой функции от ее аргументов. Собственно программа максимизации начинается словом «Given», после которого размещаются в произвольном порядке все уравнения ограничений в виде равенства и неравенств. Вектор p содержит ответ задачи линейного программирования p1 = p2 = p3 = p4 =1/3 (Mathcad дает ответ в виде десятичной дроби с ограничением числа знаков в дробной части числа). Подстановка полученных значений p*i*=1/3 в функцию ν дает ее значение в экстремальной точке: ν = 2.3333=7/3.

Текст программы без индексированных переменных приведен на рис. 2.2.

$$p1 := 0.6 \qquad p2 := 0.2 \qquad p3 := 0.2 \qquad p4 := 0.4$$

$$\nu(p1,p2,p3,p4) := 3\cdot p1 + 2\cdot p2 + 3\cdot p3 - p4$$

Given

$$2\cdot p1 + p2 + 4\cdot p3 \ge \nu(p1,p2,p3,p4)$$

$$4\cdot p1 + 2\cdot p2 + p3 \ge \nu(p1,p2,p3,p4)$$

$$2\cdot p1 + 3\cdot p2 + 2\cdot p3 \ge \nu(p1,p2,p3,p4)$$

$$p1 + p2 + p3 = 1$$

$$p1 \ge 0 \qquad p2 \ge 0 \qquad p3 \ge 0 \qquad p4 \ge 0$$

$$p := \mathrm{Maximize}(\nu, p1, p2, p3, p4)$$

$$p = \begin{pmatrix} 0.333 \\ 0.333 \\ 0.333 \\ 0.333 \end{pmatrix} \qquad \nu\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 2.333$$

Рисунок 2.2. Программа максимизации для игрока А

Обратим внимание, что нижняя цена игры при минимаксной стратегии равна W*a*=2, оптимальная смешанная стратегия повышает нижнюю цену игры для игрока А на 1/3.

Аналогично находим вероятности ходов для игрока В:

$$M \cdot q = \begin{bmatrix} 3\,2\,4\,2 \\ 2\,1\,2\,3 \\ 3\,4\,1\,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3q_1 + 2q_2 + 4q_3 + 2q_4 \\ 2q_1 + q_2 + 2q_3 + 3q_4 \\ 3q_1 + 4q_2 + q_3 + 2q_4 \end{bmatrix}$$

$$3q_1 + 2q_2 + 4q_3 + 2q_4 \le \nu$$

$$2q_1 + q_2 + 2q_3 + 3q_4 \le \nu$$

$$3q_1 + 4q_2 + q_3 + 2q_4 \le \nu$$

Для нахождения ν к левой части первого неравенства добавляем фиктивную вероятность $q_5 \ge 0$:

$$3q_1 + 2q_2 + 4q_3 + 2q_4 + q_5 = \nu$$

Ответом являются вероятности q1=0, q2=0.25, q3=0.16667=1/6, q4=0.58333=7/12, q5=0. Минимальное значение υ=2.3333=7/3. Обратим внимание, что верхняя цена этой игры при минимаксной стратегии W*b*=3.

Таким образом, верхняя цена игры при оптимальной смешанной стратегии для игрока В понижается на 2/3. Ядро стягивается в седловую точку. Игрок В «разгрызает» 2/3 ядра, а игрок А – всего 1/3. Кроме того, вероятность q1 хода В1 для игрока В равна 0, поэтому этот ход должен быть исключен из возможных ходов игрока В.

Программа в среде Mathcad имеет вид (рис.2.3):

$q1 := 0.3 \quad q2 := 0.3 \quad q3 := 0.3 \quad q4 := 0.1 \quad q5 := 0.2$

$\nu(q1, q2, q3, q4, q5) := 3 \cdot q1 + 2 \cdot q2 + 4 \cdot q3 + 2 \cdot q4 + q5$

Given

$2 \cdot q1 + q2 + 2 \cdot q3 + 3 \cdot q4 \le \nu(q1, q2, q3, q4, q5)$

$3 \cdot q1 + 4 \cdot q2 + q3 + 2 \cdot q4 \le \nu(q1, q2, q3, q4, q5)$

$q1 + q2 + q3 + q4 = 1$

$q1 \ge 0 \quad q2 \ge 0 \quad q3 \ge 0 \quad q4 \ge 0 \quad q5 \ge 0$

$q := \mathrm{Minimize}(\nu, q1, q2, q3, q4, q5)$

$$q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 0.167 \\ 0.583 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nu\left(0, 0.25, \frac{1}{6}, \frac{7}{12}, 0\right) = 2.333$$

Рисунок 2.3. Программа минимизации для игрока В

Окончательно матрица игры для смешанной оптимальной стратегии приобретает вид, представленный в (табл. 9).

Таблица 9.

Платежная матрица игры

| | | B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|---|---|
| | | $q_1$=1/4 | $q_2$=1/6 | $q_3$=7/12 |
| A1 | $p_1$=1/3 | 2 | 4 | 2 |
| A2 | $p_{2=}$=1/3 | 1 | 2 | 3 |
| A3 | $p_{3=}$=1/3 | 4 | 1 | 2 |

### 2.3. Рандомизированное управление

Рандомизированное управление относится к практическим приложениям смешанных стратегий теории игр и используется в случае принятия решений с риском. Название «рандомизированное» происходит от слова «random», в переводе с английского означающее «случайный». В дословном переводе рандомизированное управление означает случайное управление, т.е. управление, выбираемое случайным образом.

Принятие решений заключается в выборе человеком или управляющим устройством (регулятором) одного из нескольких возможных (т.е. дискретных) управлений, подаваемых на объект управления (экономическую, техническую или какую-нибудь другую систему), причем такой выбор приходится делать неоднократно в течение времени работы системы. Например, для управления технической системой надо выбрать управляющий параметр $u$, от значения которого зависит эффективность работы системы $f(u)$. Пусть зависимость $f(u)$ имеет вид (рис.2.4)

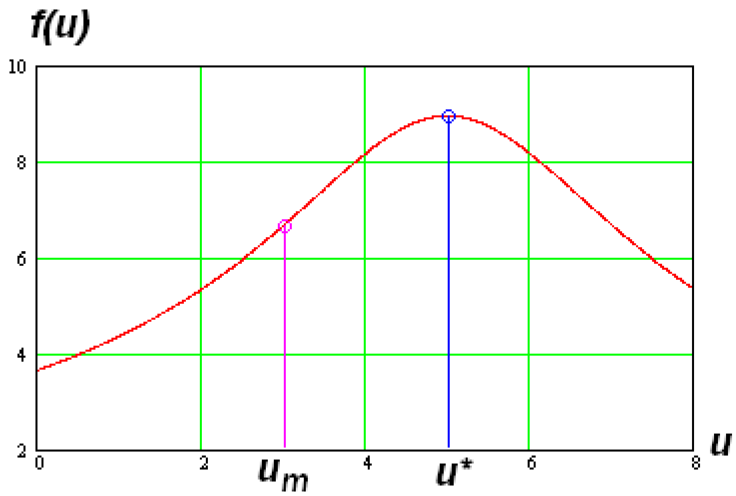


Рисунок 2.4. График эффективности работы системы

Из графика видно, что при $u$=$u$* эффективность $f$ имеет максимум. В то же время допустимые значения $u$ находятся в промежутке $0 \le u \le u_m$, т.е. управление ограничено. При рандомизированном управлении эти ограничения нарушают за счет организации управления во времени: в некоторые моменты выбирают управление, выходящее за допустимые ограничения, т.е. делают «перескок» за $u_m$, ближе к $u$*, а затем снова возвращаются в допустимые границы управления. Это позволяет улучшить процесс в среднем - за много ходов, или моментов дискретного управления. Можно получить больше эффективность, иногда выбирая рискованные ходы, но компенсируя их менее рискованными ходами.

В общем случае задача нахождения управления ставится следующим образом.

Заданы: целевая функция $f$=$f(u)$, набор допустимых управлений $u_1$, $u_2$,… $u_i$,…$u_k$, $i$=1…$k$, уравнение ограничений $g(u) \le u_m$. Необходимо найти $u_i$*, такое, что

$$f(u_i^*) = \max_{g(u) \le u_m} f(u) \quad .$$

При переходе к рандомизированному управлению целевая функция максимизируется в среднем, т.е. рандомизированная целевая функция

$$f_{\mathrm{rand}}(u) = \sum_{i=1}^{k} p(u_i) \cdot f(u_i)$$

должна стремиться к максимуму в среднем, где $p(u_i)$ вероятность выбора управления $u_i$. Ограничения на управление также должны выполняться в среднем

$$g_{\mathrm{rand}}(u) = \sum_{i-1}^{k} p(u_i) \cdot g(u_i) \le u_m \quad .$$

Кроме того, должно выполняться уравнение ограничений для вероятностей

$$\sum_{i-1}^{k} p(u_i) = 1,$$

$$0 \le p(u_i) \le 1, i = 1...k \quad .$$

Решение этой задачи линейного программирования сводится к нахождению вероятностей $p(u_i)$ «ходов», т.е. выборов управлений $u_i$.

Рассмотрим пример.

Пусть эффективность работы технической системы $f(u)$ определяется выражением

$$f(u) = \frac{20}{\sqrt{u^2 - 10u + 30}}$$

где $u$ – напряжение, периодически, по тактам подаваемое на систему. График зависимости $f(u)$ приведен на рис.2.4. Техническая реализация системы позволяет подавать на нее только дискретные по величине значения напряжения управления: $u1$ = 1В, $u2$ = 2В, $u3$ = 3В, $u4$ = 4В, $u5$ = 5В. Как видно из графика на рис.2.4, эффективность системы тем выше, чем больше напряжение управления, и при $u5$ = 5В достигается максимальная эффективность работы. Однако в среднем, за много “ходов” (тактов) выбора управлений, напряжение на системе должно быть не более 3.1В ($u_m$ = 3.1 В).

Если подавать на систему все время напряжение $u3$ = 3В, т.е. максимально эффективное из класса реализуемых и допустимых напряжений, получим среднюю эффективность $f(u3)$ =6.667.

Попробуем повысить эффективность работы системы путем подачи на нее напряжений из класса реализуемых, но иногда, случайным образом, выходящих за допустимые ограничения. Назначим “штрафы” за выбор управлений, исходя из следующих соображений. Если напряжение не превышает допустимое, то “штраф” выбираем небольшой и тем меньше, чем дальше выбранное напряжение от опасной границы $u_m$ = 3.1В. «Штраф» задается назначением ограничений: за выбор $u1$=1В будем штрафовать единицей - $g1$=1, за выбор $u2$=2В назначаем $g2$=2, за выбор $u3$=3В назначаем $g3$=3. При выходе за допустимое ограничение «штраф» должен расти и, чем дальше от границы, тем больше. Поэтому назначаем за выбор $u4$=4В “штраф» $g4$=4 и за выбор $u5$=5В «штраф» $g5$=5. Получаем линейную функцию нарастания «штрафа» по мере роста управления.

Определим, с какой вероятностью $p$ необходимо назначать управление u¡ на тактах изменения управления, чтобы получить максимальную эффективность в среднем за много ходов. Составим программу расчета в среде Mathcad (рис. 2.5)

Задание функции эффективности $f(u) := \dfrac{20}{\sqrt{u^2 - 10 \cdot u + 30}}$

Задание исходных значений допустимых напряжений (ходов) и штрафов

$u1 := 1 \quad u2 := 2 \quad u3 := 3 \quad u4 := 4 \quad u5 := 5$

$g1 := 1 \quad g2 := 2 \quad g3 := 3 \quad g4 := 4 \quad g5 := 5 \quad um := 3.1$

Задание начальных значений вероятностей ходов

$p1 := 0.2 \quad p2 := 0.2 \quad p3 := 0.2 \quad p4 := 0.2 \quad p5 := 0.2$

Задание максимизируемой функции f1

$f1(p1,p2,p3,p4,p5) := p1 \cdot f(u1) + p2 \cdot f(u2) + p3 \cdot f(u3) + p4 \cdot f(u4) + p5 \cdot f(u5)$

Начало цикла расчета, внутри которого записываются уравнения ограничений

Given

$p1 \cdot g1 + p2 \cdot g2 + p3 \cdot g3 + p4 \cdot g4 + p5 \cdot g5 \le um$

$p1 + p2 + p3 + p4 + p5 = 1 \quad p1 \ge 0 \quad p2 \ge 0 \quad p3 \ge 0 \quad p4 \ge 0 \quad p5 \ge 0$

$p := \mathrm{Maximize}(f1, p1, p2, p3, p4, p5)$

$$p = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0 \\ 0.7 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f1(0.3, 0, 0, 0.7, 0) = 7.025$$

Рисунок 2.5. Программа расчета рандомизированного управления

Из решения видно, что $u1=1В$ необходимо назначать с вероятностью $p1=0.3$, а $u4=4В$ необходимо назначать с вероятностью $p4=0.7$. Все остальные значения управлений имеют нулевую вероятность, следовательно, они не должны подаваться на систему для реализации рандомизированного управления. Значение эффективности за много тактов управления в среднем равно 7.025, т.е. больше, чем средняя эффективность (6.667) для допустимого управления $u3=3В$.

Линейная функция нарастания «штрафа» по мере подхода напряжения управления снизу к допустимой границе $um=3.1В$ и далее вверх при переходе через границу, не всегда справедлива. Действительно, зачем сильно штрафовать управление, если оно находится в допустимых границах и относительно слабо штрафовать, когда оно переходит через границу? Поэтому часто назначают нелинейно изменяющиеся функции штрафа. Например, пока управление не выходит за ограничение, штраф принимают малый и постоянный для всех $u_¡ \leq um$. Назначим $g1=g2=g3=1$, а после границы штраф существенно увеличим, приняв $g4=5$, а $g5=10$. Тогда получаем решение $p1=p2=p5=0$, $p3=0.475$, $p4=0.525$, а эффективность равна 7.453. Обратим внимание, что такое назначение управлений несколько лучше, чем первый вариант: во-первых, рисковое управление $u4$ (сверх допустимого) назначается реже (вероятность 0.525), чем раньше (вероятность 0.7); во-вторых, эффективность выше (7.453>7.025).

В общем случае, назначение штрафов представляет самостоятельную задачу и должно быть привязано к конкретной технической или экономической задаче и в некотором роде отражает искусство проектировщика систем управления.

## 3. Двухстороняя монополия в теории игр

В этой главе рассматривается модель конфликта между двумя объектами, возникающего при взаимодействии между ними. В технической системе это может быть конфликт между двумя элементами системы при обмене между ними энергией, информацией, потоками вещества, а в экономической задаче это конфликт на рынке обмена товарами и услугами. Рассмотрим сначала экономическую задачу как наиболее изученную.

Конфликт возникает между продавцом и покупателем, или, как они называются на рынке, производителем и потребителем блага (товаров или услуг). Конфликт характерен тем, что производитель и потребитель имеют как противоположные интересы, так и совпадающие. Противоположные интересы заключаются в том, что потребителю нужна низкая цена, а производителю высокая цена на товары и услуги. Совпадающие интересы заключаются в том, что одному надо продать, а другому купить товар или услугу. В теории игр как раз рассматривается вопрос поиска компромисса, при котором продажа/покупка может произойти, т.е. точка равновесия рыночной системы.

При двухсторонней монополии на рынке имеется один производитель какого-нибудь монопольного блага (продукта) и один потребитель этого блага (продукта). Все остальные потребители и производители на этом рынке действуют в условиях совершенной конкуренции, поэтому все цены на все блага, кроме монопольного, считаются заданными. Рынок совершенной конкуренции это такой рынок, на котором действует много мелких потребителей, и много мелких производителей, которые своими предложениями товаров и услуг и их покупкой, не могут существенно влиять на цену блага. Поэтому цена считается постоянной. При монополии на рынке есть как крупные производители, так и крупные потребители, которые своими действиями могут изменять цены на рынке в случае крупных закупок или продаж. Поэтому цены на монопольном рынке могут существенно изменяться. Двухсторонняя монополия есть частный случай монополизма на рынке, в некотором смысле, идеальный, как и рынок совершенной конкуренции, но позволяющий выяснить некоторые важные теоретические моменты движения к равновесию.

С точки зрения теории игр производитель может быть игроком A, а потребитель – игроком B. При сделке (игре) игроки должны договориться о цене $p$ и количестве обмениваемого блага $y$. Поэтому ходами игрока A будут назначения определенной цены $p$, а ответными ходами игрока B будут покупки за эту цену определенного количества блага $y$. Например, ходом A1 может быть назначение цены $p$ = 50 руб./кг, если благо у измеряется в кг. Ходом A2 может быть назначение цены $p$ = 52 руб./кг и так далее. Ходами B1, B2, B3 может быть покупка соответственно 3.5 кг, 5 кг, 12.36 кг продукта $y$. Так как, в принципе, цена $p$ и количество блага $y$ могут назначаться в пределах от нуля до бесконечности, то количество ходов игроков A и B образуют несчетное множество. Поэтому задать платежную матрицу с бесконечным числом строк и столбцов не удается. Такая игра уже будет непрерывной и плата за нее задается в виде непрерывных функций.

Для игрока A плата за игру или выигрыш задается функцией $Wa(p,y) = p \cdot y - C(y)$, где произведение $p \cdot y$ означает стоимость продажи количества $y$ за цену $p$ игроку B, а $C(y)$ – это издержки игрока A на производство блага $y$ (закупка сырья, материалов, энергии и т.п. у других производителей на рынке совершенной конкуренции).

Для игрока B плата за игру или выигрыш задается функцией $Wb(p,y) = R(y) - p \cdot y$, где произведение $p \cdot y$ означает стоимость покупки у игрока A количества продукта $y$ за цену $p$, а $R(y)$ – это прибыль от использования количества блага $y$ (переработка блага у как сырья и продажа на рынке совершенной конкуренции другим потребителям).

Двухсторонняя монополия не является игрой с нулевой суммой, поскольку выигрыш одного игрока не является проигрышем другого. Это было бы так, если бы мы не учитывали действие рынка совершенной конкуренции. Действительно, без учета рынка совершенной конкуренции для игрока A получаем его выигрыш $Wa(p,y) = p \cdot y$, а $C(y)=0$. Для игрока B получаем его выигрыш W$b(p,y) = -p\cdot y$, а R($y$)=0. Тогда получим игру с нулевой суммой, так как W$a(p,y)$ = - W$b(p,y)$.

Платежные функции W$a(p,y)$ и W$b(p,y)$ называются также ценами игры для игроков А и В соответственно. Перед началом игры игрок В обычно не знает вида функций C= C($y$) игрока А, а игрок А не знает вида функции R = R($y$) игрока В. Таким образом, платежные функции друг друга им не известны.

### 3.1. Этапы конфликта. Нахождение состояния равновесия

Игра или торг начинается с того, что игрок А выходит на рынок и назначает цену р за свое благо. Игрок В стремится максимизировать свой выигрыш, отвечая покупкой определенного количества у. Максимизируем W$b(p,y)$, найдя первую производную по $y$ при постоянной цене $p$ и приравняв первую производную нулю:

$$\frac{d\mathrm{W}b(p,y)}{dy} = \mathrm{R}'(y) - p = 0$$

где $\mathrm{R}'(y) = \dfrac{d\mathrm{R(y)}}{dy}$.

Тогда уравнение R’(y)=p определяет некоторую границу. Игрок А, выходя на рынок и зная, что он является монополистом, чаще всего устанавливает очень высокую цену $p$. Если окажется, что $p$ > R’($y$), то игрок В вообще ничего не купит, т.е. ответит ходом $y$=0. Такой первоначальный этап игры при ходах $p$ > R’($y$), $y$=0 называется некооперированным равновесием и, в соответствии с математической теорией игр, может продолжаться бесконечно долго.

Такой тип равновесия изучал американский математик Джон Нэш, поэтому оно иногда называется равновесием по Нэшу [4.5]. Оно характерно тем, ни один участник игры не может увеличить выигрыш, изменив свою стратегию, если другие участники своих стратегий не меняют. Действительно, игрок А может как угодно менять свои ходы, но если он остается в рамках некооперированного равновесия, то при этом выигрыша он не прибавит, так как ничего не продаст. Также и для второго игрока В, при $y$=0 при некооперированном равновесии у него получается максимальный выигрыш, а если он что-то купит, т.е. выберет какую-то стратегию $y$>0, то он только проиграет, уйдёт в «минус» относительно максимума.

Рассмотрим пример. Пусть цена игры игрока А задана платежной функцией:

$$\mathrm{W}a(p,y)=py- (y^2 + 10y +3), \quad \text{где } \mathrm{C}(y)= y^2 + 10y +3.$$

Цена игры игрока В задана платежной функцией:

$$\mathrm{W}b(p,y)= -2y^2 + 40y + 1- py, \quad \text{где } \mathrm{R}(y) = -2y^2 + 40y + 1.$$

Игрок А выходит на рынок и назначает цену на свою продукцию $p$ = 100 рублей за единицу своего блага. Игрок В ничего не покупает, т.е. отвечает ходом $y$ = 0. Определим, почему это происходит. Находим R`($y$) = - 4$y$ + 40 и приравниваем производную R`($y$) цене $p$:

$$-4y + 40 = p$$

Приняв y = 0, находим цену, определяющую границу некооперированного равновесия: $p$ = 40. Таким образом, при $p$ > 40 игрок В ничего не будет покупать. Игрок А не знает величину этой граничной цены, так как ему неизвестна функция R= R($y$), а следовательно, и производная R`($y$). Толку от такого равновесия мало, так как один участник ничего не покупает из-за слишком высокой цены, а другой ничего не продает.

Поэтому игрок А дальнейшими ходами постепенно снижает цену – начинается так называемый этап "прощупывания". Игрок А стремится узнать, сколько же блага купит игрок В за установленную цену, а игрок В хочет узнать, до какой величины игрок А будет снижать цену.

Наконец, при очередном снижении цен ($p$1 < 40 руб/ед.), игрок В покупает $y$1 единиц монопольного блага за цену $p$1 = R`($y$1), т.е. «прощупывание» состоялось. Игрок А получает некоторую информацию о соотношении между ценой и количеством блага. Принимая для себя это соотношение за установленное ограничение $p$1 - R`($y$1)=0, игрок А начинает перестраивать производство с целью выпуска такого количества блага, которое максимизирует его выигрыш. Следовательно, математически описывая эту игру, мы должны решить задачу нелинейного программирования - найти максимум W$a$($p$1,$y$1) = $p$1·$y$1 – C($y$1) при ограничении $p$1 - R`($y$1)=0.

Составляем функцию Лагранжа L$a$($p$1,$y$1,λ):

$$La(p1,y1,\lambda) = p1\cdot y1 - C(y1) + \lambda(p1 - R'(y1)).$$

Находим первые производные от функции Лагранжа по всем трем переменным и приравниваем их нулю:

$$\frac{d\mathrm{L}a(p1, y1, \lambda)}{dy1} = p1 - \mathrm{C}'(y1) - \lambda R''(y1) = 0$$

$$\frac{d\mathrm{L}a(p1, y1, \lambda)}{dp1} = y1 + \lambda = 0$$

$$\frac{d\mathrm{L}a(p1, y1, \lambda)}{d\lambda} = p1 - \mathrm{R}'(y1)$$

Из второго и третьего уравнений системы находим λ = - $y$1 , $p$1 = R`($y$1) и подставляем в первое уравнение, получаем

$$R'(y1) - C'(y1) + y1\cdot R''(y1) = 0.$$

Решая это уравнение относительно одной неизвестной, находим $y$1. Подставляя найденное значение $y$1 в третье уравнение системы, находим и цену $p$1. Пара

$p1, y1$ максимизирует выигрыш $Wa(p1, y1)$ при ограничении $p1$ - $R`(y1)=0$, учитывающем ход игрока B.

Для примера, рассмотренного ранее, получаем следующее решение. Первая производная от $R(y1)$ по $y1$ уже определена $R`(y1)= - 4y1 + 40$. Находим вторую производную: $R``(y1) =-4$, а также первую производную от $C(y1)$ по $y1$: $C`(y1) = 2y1 +10$. Подставляя найденные значения в уравнение для определения $y1$, получаем:

$$-4y1 +40 - 2y1 - 10 - 4y1 = 0.$$

Откуда $y1 = 3$, а $p1 =28$. Выигрыши игроков при ходе $p1, y1$ легко посчитать по платежным функциям: $Wa(p1,y1)=3\cdot28 - 42 = 42$, а $Wb(p1,y1)= 103 -3\cdot28= =19$. Это и есть состояние равновесия, при котором происходит покупка/продажа блага, найденное в результате этапа «прощупывания». Теоретически игра в таком состоянии равновесия, с найденной парой $p1, y1$, тоже может продолжаться в течение бесконечного числа ходов.

### 3.2. Построение перил и ядра игры

Нельзя сказать, что найденное состояние равновесия $p1, y1$ устраивает игроков, и что дальше они будут ходить этими ходами.

Игрок A недоволен тем, что за такую низкую, с его точки зрения, цену 28 руб./ед. игрок B слишком мало покупает блага. Действительно, до граничной цены в 40 руб./ед. еще есть некоторый запас. Экономически заставить игрока B покупать больше блага за 28 руб./ед. игрок A не в состоянии. Поэтому у него возникает соблазн – поднять цену.

Игрок B тоже недоволен – он, может быть, и купил бы больше блага, но с его точки зрения игрок A слишком завысил цену и за ход получает выигрыш 42 рубля, а игрок B – всего 19 рублей.

Поэтому игрок B, зная, что он единственный покупатель у игрока A, может повести себя не в соответствии с уравнением $p1 = R`(y1)$, т.е. за цену 28 руб./ед. купить блага меньше, чем 3 единицы, или вообще ничего не купить. Его цель – заставить игрока A снизить цену.

Такая ситуация грозит тупиком, возвратом к некооперированному равновесию. В этот момент большое значение приобретает информация. Каждый игрок заинтересован раскрыть правила поведения, которым следует другая сторона. Можно поставить себя на место партнера и попытаться определить эти правила.

Оба игрока должны понять сразу или после «прощупывания», что им надо договориться, прийти к явному или неявному соглашению. В этом соглашении нет главного, неважно, кто назначает цену $p$, а кто - количество блага $y$. Оба игрока должны совместно найти оптимальный ход $p_{opt}, y_{opt}$.

Рассмотрим возможные ограничения, которые определят область нахождения пары $p_{opt}, y_{opt}$. В теории игр эти ограничения называются перилами или верхней или нижней ценами игры, как уже определялось ранее.

Перила должны удовлетворять следующим четырем условиям:

1) Выигрыш игрока А должен быть, по крайней мере больше или равен его издержкам при нулевом выпуске блага, т.е. W$a(p,y) \geq$ C(0). Игрок А должен оправдать свои издержки, в противном случае у него не будет никакого интереса в обмене с игроком В;
2) Выигрыш игрока В должен быть, по крайней мере больше или равен его доходу при нулевой покупке блага, т.е. W$b(p,y) \geq$ R(0). Игрок В должен иметь какой-то доход, даже если не будет обмениваться монопольным благом с игроком А. В противном случае игрок В станет банкротом;
3) Пара $p_{\text{opt}}, y_{\text{opt}}$ должна максимизировать W$a(p,y)$ при ограничении W$b(p,y)$ = W$b$o, причем величина W$b$o = const и пока неизвестна;
4) Пара $p_{\text{opt}}, y_{\text{opt}}$ должна максимизировать W$b(p,y)$ при ограничении W$a(p,y)$ = W$a$o, причем величина W$a$o = const и пока неизвестна.

Условия 3 и 4 означают, что каждый из игроков согласен на максимизацию своего выигрыша при каком-то постоянном выигрыше другого игрока. Следовательно, необходимо снова решать задачу нелинейного программирования.

Вводим функцию Лагранжа для игрока А:

$$\mathrm{L}a(p,y,\lambda) = \mathrm{W}a(p,y) + \lambda(\mathrm{W}b(p,y) - \mathrm{W}b\mathrm{o}) = p\cdot y - \mathrm{C}(y) + \lambda(\mathrm{R}(y) - p\cdot y - \mathrm{W}b\mathrm{o}).$$

Находим производные от L$a(p,y,\lambda)$ по всем трем переменным и приравниваем их нулю:

$$\frac{d\mathrm{L}a(p,y,\lambda)}{dy} = p - \mathrm{C}'(y) + \lambda R'(y) - \lambda p = 0$$

$$\frac{d\mathrm{L}a(p,y,\lambda)}{dp} = y - \lambda y = 0$$

$$\frac{d\mathrm{L}a(p,y,\lambda)}{d\lambda} = \mathrm{R}(y) - py - \mathrm{W}b\mathrm{o} = 0$$

Из второго уравнения системы получаем условие $\lambda = 1$ и подставляем его в первое уравнение. Тогда получаем следующее уравнение:

$$\mathrm{C}`(y) = \mathrm{R}`(y).$$

Его решением является оптимальное количество блага $y = y_{\text{opt}}$. Для нашего численного примера имеем

$$2y + 10 = -4y + 40$$

и $y = y_{\text{opt}} = 5$. Подставляя найденное решение $y_{\text{opt}}$ в третье уравнение системы, получаем

$$\mathrm{R}(y_{\text{opt}}) - \mathrm{p} \cdot y_{\text{opt}} - \mathrm{W}b\mathrm{o} = 0.$$

Видно, что неизвестное значение W$b$o не позволяет найти оптимальную цену $p_{\text{opt}}$.

Аналогично составляем функцию Лагранжа для игрока B:

$Lb(p,y,\lambda) = Wb(p,y) + \lambda(Wa(p,y) - Wao) = R(y) - p \cdot y + \lambda(p \cdot y - C(y) - Wao)$.

Находим производные от $Lb(p,y,\lambda)$ по всем трем переменным и приравниваем их нулю:

$$\frac{dLb(p,y,\lambda)}{dy} = R^{'}(y) - p + \lambda p - \lambda C^{'}(y) = 0$$
$$\frac{dLb(p,y,\lambda)}{dp} = -y + \lambda y = 0$$
$$\frac{dLb(p,y,\lambda)}{d\lambda} = py - C(y) - Wao = 0$$

Из первого и второго уравнений системы получаем такие же соотношения для игрока B, как и для игрока A: $\lambda = 1$, $C`(y) = R`(y)$ и $y = y_{opt} = 5$. Таким образом, игроки могут явно или неявно прийти к согласию о количестве $y_{opt}$ обмениваемого блага. Третье уравнение имеет вид

$$p \cdot y_{opt} - C(y_{opt}) - Wao = 0.$$

Также неизвестное значение $Wao$ не позволяет найти оптимальную цену $p_{opt}$.

Можно найти границы, в которых находится $p_{opt}$. Подставляя значения $p_{opt}$, $y_{opt}$ в платежные функции и используя условия 1 и 2 для перил, получаем :

$$Wa(p,y) = p_{opt}, y_{opt} - C(y_{opt}) \geq C(0)$$
$$Wb(p,y) = R(y_{opt}) - p_{opt}, y_{opt} \geq R(0)$$

Неравенства в правой части разрешаем относительно неизвестной цены:

$$\frac{C(y_{opt}) + C(0)}{y_{opt}} \leq p_{opt} \leq \frac{R(y_{opt}) - R(0)}{y_{opt}}$$

Подставляем численные значения $y_{opt}$=5, получаем

$$\frac{5^2 + 10 \cdot 5 + 3 + 3}{5} \leq p_{opt} \leq \frac{-2 \cdot 5^2 + 40 \cdot 5 + 1 - 1}{5}$$

или $16{,}2 \leq p_{opt} \leq 30$.

Таким образом, оптимальная цена лежит в интервале от 16.2 до 30 руб./ед, а оптимальное количество обмениваемого блага равно $y_{opt}$ = 5 ед.

Множество пар $p_{opt}$,$y_{opt}$ называются ядром двухсторонней монополии. Внутри ядра интересы игроков противоположны: игрок А не хочет опускать цену $p_{opt}$ ниже 30 руб./ед., а игрок В не желает покупать выше цены $p_{opt}$ =16.2 руб/ед.

Выигрыши игроков при верхней цене ядра $p_{верх}$ = 30 руб./ед. равны:
$Wa(p_{верх}, y_{opt}) = 72$ руб, $Wb(p_{верх}, y_{opt}) = 1$ руб

Выигрыши игроков при нижней цене ядра $p_{нижн}$ = 16.2 руб./ед. равны:

$Wa(p_{нижн}, y_{opt}) = 3$ руб, $Wb(p_{нижн}, y_{opt}) = 70$ руб.

На плоскости $p,y$ (рис.3.1) построим 4 линии постоянного уровня платежных функций:

$$py - C(y) = Wa(p_{верх}, y_{opt}) = 72 \text{ руб},$$
$$py - C(y) = Wa(p_{нижн}, y_{opt}) = 3 \text{ руб},$$
$$R(y) - py = Wb(p_{верх}, y_{opt}) = 1 \text{ руб},$$
$$R(y) - py = Wb(p_{нижн}, y_{opt}) = 70 \text{ руб}:$$

$$p(y) = \frac{72 + y^2 + 10 \cdot y + 3}{y}$$

$$p(y) = \frac{3 + y^2 + 10 \cdot y + 3}{y}$$

$$p(y) = \frac{-2y^2 + 40 \cdot y + 1 - 1}{y}$$

$$p(y) = \frac{-2y^2 + 40 \cdot y + 1 - 70}{y}$$

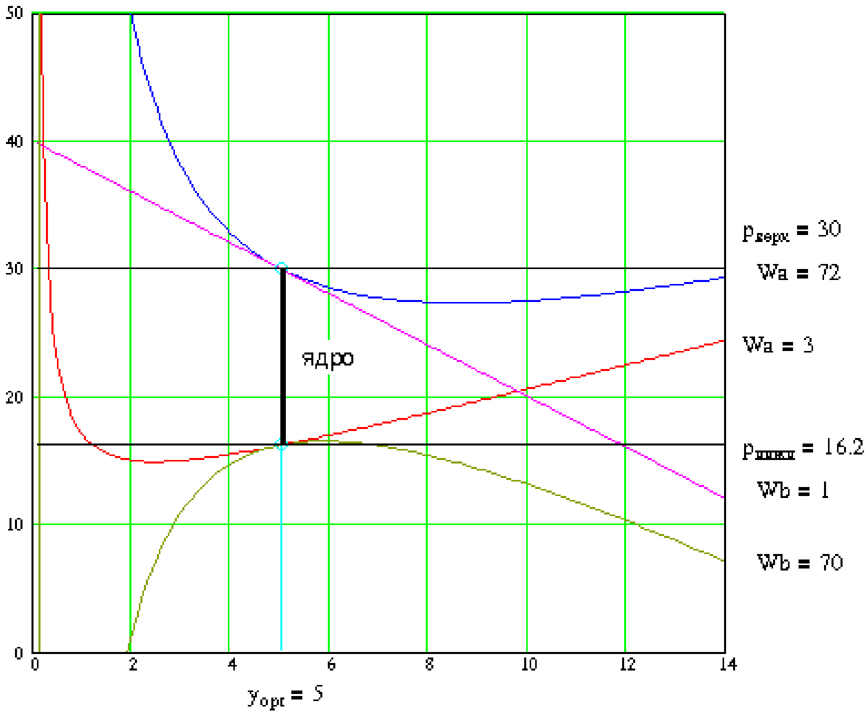


Рисунок 3.1. Ядро экономики и линии постоянного уровня платежных функций

На рис.3.1 по оси абсцисс отложено количество блага $y$, а по оси ординат цена $p$. Верхняя цена и нижняя цена образуют две, параллельные оси абсцисс линии, на уровне 30 и 16.2 соответственно. Линии постоянного уровня $Wa$=3 и $Wb$=70 касаются друг друга в точке с координатами $y = y_{opt}$, $p = p_{нижн}$ =16.2. Эта точка является нижней границей ядра двухсторонней монополии.

Линии постоянного уровня $Wa$=72 и $Wb$=1 касаются друг друга в точке с координатами у= $y_{opt}$ =5, р= $p_{верх}$ = 30. Эта точка образует верхнюю границу ядра двухсторонней монополии. Ядро является отрезком прямой между этими двумя точками, отрезком параллельным оси цен при постоянном значении $y$=5. Любое проникновение того или другого игрока внутрь ядра снижает их выигрыши по сравнению с оптимальными выигрышами, полученными в результате решения задачи нелинейного программирования. Поэтому, если они все-таки желают провести сделку, они должны договориться о цене внутри ядра. Использование угроз как средства достижения выгодной комбинации содержит риск расстроить соглашение.

Возможности соглашения внутри ядра связаны уже не с экономическими, а с политическими соображениями. Дело в том, что выигрыши $Wa$ и $Wb$ не всегда соизмеримы друг с другом и даже не всегда определены однозначно, т.е. выигрыши могут измеряться не только в денежных единицах. Например, в случае, когда игроки являются потребителями, т.е. обмениваются разными благами, необходимыми для потребления, то выигрыш каждого игрока задается функцией полезности, которую извлекает игрок от игры, а соизмерить функции полезности игроков весьма трудно. Например, если значение функции полезности для игрока А $Sa(y1)$=20, а $Sa(y2)$=40, то можно сделать лишь вывод, что выбор $y2$ предпочтительнее для игрока А, чем выбор $y1$. Если значение функции полезности для игрока В $Sb(y3)$=50, то это не значит, что выбор $y3$ предпочтительнее, чем $y2$, хотя $Sb(y3) > Sa(y2)$. Нельзя сравнивать функции полезности разных игроков. Говорят, что выигрыши нетрансферабельны, т.е. не обмениваются друг на друга.

### 3.3. Игровая модель конфликта в изобретательской задаче

При решении изобретательской задачи в рамках АРИЗ [6] математический аппарат двухсторонней монополии может быть применен к двум альтернативным сторонам технического или физического противоречий, к инструменту и изделию, взаимодействующими в конфликтной паре. В функциональных и информационно-энергетических схемах [7] модель передачи, обмена, преобразования функций, энергии, информации, потоков вещества между двумя элементами структуры может рассматриваться как двухсторонняя монополия. Обосновано это тем, что в структурных схемах обычно ищут так называемое «узкое место, слабое звено», место наиболее обострённых противоречий, разрешив которые и получают новое изобретательское решение. Остальные элементы структуры, до и после «узкого места» могут рассматриваться как «рынок совершенной конкуренции», если использовать экономический термин, т.е. они нужны для обеспечения работоспособности монопольной пары, но основной конфликт сосредоточен внутри монополии между игроками.

Рассмотрим пример известной изобретательской задачи о запайке ампул с лекарством [8,9] Ампулы с жидким лекарством, установленные в деревянной кассете, подаются конвейером под газовые горелки, которые оплавляют капилляры ампул (рис.3.2, сверху). Нежелательным эффектом является брак при запайке, возникающий от неравномерного горения пламени в горелках. Техническое противоречие (ТП) формулируется следующим образом: если пламя сильное, то запайка хорошая, но перегревается и портится лекарство (ТП-1): если пламя слабое, то запайка плохая, не герметичная, но зато не перегревается лекарство (ТП-2). Решением задачи по АРИЗу является установка максимальной величины пламени и помещение ампул в воду.

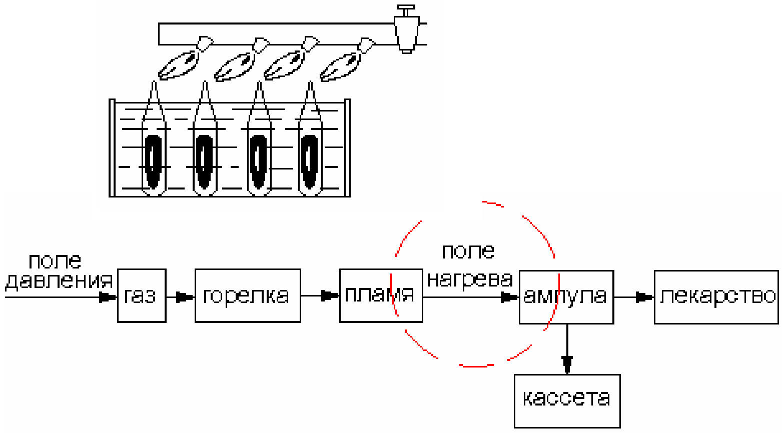


Рисунок 3.2. Запайка ампул с лекарством,
сверху - конструкция, информационно-энергетическая схема – снизу

Информационно-энергетическая схема (рис. 3.2, снизу) представляет собой последовательность преобразований и передачи энергии входного газового потока, под давлением, поступающего в газовую горелку, пламя которой действует полем нагрева на стеклянную ампулу, а ампула нагревает лекарство внутри. «Узкое место» схемы заключено на рис. 3.2 в круг. Оно определено в ходе решения задачи по АРИЗ выбором конфликтной пары – инструмента (пламя) и двойного изделия (ампула + лекарство).

Составим игровую модель в виде двухсторонней монополии для «узкого места». По аналогии с экономической задачей введём двух игроков – А и В, производителя и потребителя (или продавца и покупателя). Естественным кандидатом для игрока А является инструмент, в данном случае, пламя, передающее поле нагрева изделию – ампуле с лекарством. Изделие поэтому назначаем игроком В.

Далее возникает вопрос: а что же считать ходами игроков, какие их действия? Поскольку в двухсторонней монополии в экономике ходы задаются численно (назначение определённой цены $p$ и количество $y$ проданного/купленного товара), то и в изобретательской задаче необходимо найти величины, которые численно характеризуют действия игроков –

инструмента и изделия. Очевидно, это некоторые физические величины, определяющие положительные и отрицательные свойства процесса запайки.

Если решается задача в логике «или-или» в АРИЗ, то из двух ТП выбирается одно: или ТП-1, или ТП-2. В примере у Альшуллера и Селюцкого [8] выбирается ТП-1, поскольку главная производственная функция – хорошая запайка, определяемая названием задачи. Следующим шагом АРИЗ является усиление конфликта – назначение крайнего состояния инструмента, т.е. очень сильного пламени, и на шаге 1.6 АРИЗ85В окончательно формулируется: очень сильное пламя отлично запаивает ампулу, необходимо ввести Х-элемент, который бы не мешал очень сильному пламени, и не допускал бы перегрева лекарства, устранял перегрев.

Таким образом, к шагу 1.6. в мышлении изобретателя информационно передаются два свойства ТП: хорошее – отличная запайка, и плохое – перегрев лекарства. Заметим, что если задача решается в логике «и-и» Бартини [10], то необходимо учитывать факторы, только положительно влияющие на технологический процесс, именно их и надо обеспечить в решении задачи. Для данного примера – это отличная запайка и не перегрев лекарства.

Отличная запайка обеспечивается очень сильным пламенем. Как физически задать действие очень сильного пламени? Здесь возможны разные варианты, например, задать длинный язычок пламени горелки, высокую температуру пламени, долгое время запайки. В системе кинематических величин Бартини физические величины – длина, статистическая температура, время имеют размерности соответственно $L^1T^0$, $L^5T^{-4}$, $L^0T^1$. Такими же физическими величинами можно задать и вредное свойство – перегрев лекарства, которое достигается большой протяженностью части ампулы с капилляром, находящейся в пламени, измеряемой в единицах длины, высокой температурой ампулы, большим временем её нагрева.

По аналогии с экономической двухсторонней монополией мы должны определить, что же, какую физическую величину, игрок А, он же продавец, он же инструмент, «продаёт» или лучше сказать, передаёт, в технической задаче, игроку В, покупателю, изделию, а игрок В её получает. Ответ следующий – в информационно-энергетической схеме передаётся энергия и информация, Физическая величина «энергия» задаётся своей размерностью, в системе СИ это джоуль, или ватт-секунда, а в системе Бартини энергия, она же статистическая температура, задается размерностью $L^5T^{-4}$. Информацией является количественное значение энергии, например, 10 джоулей, т.е. информация без энергии не передаётся, и любая энергия несет какую-либо информацию.

Математическая модель хаотического аттрактора передачи наследственной информации от ведущего гомеостата «инструмент-изделие» к ведомому гомеостату «изделие-Х-элемент» при решении задачи в АРИЗ представлена в разделе 2.2.2 [10].

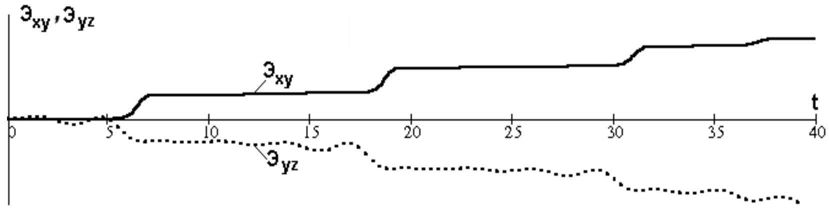


Рисунок 3.3. Графики изменения энергий ведущего $Э_{xy}$ и ведомого $Э_{xz}$ гомеостатов

Из графиков на рисунке 3.3. видно, что энергия $Э_{xz}$ ведомого гомеостата является зеркальным отображением энергии $Э_{xy}$ ведущего гомеостата с учетом хаотических погрешностей. С философской точки зрения передача информации между материальными объектами есть создание зеркального отражения, «отпечатка», на которое затрачивается энергия.

Поэтому в платежную функцию игрока А, инструмента, энергию включаем с положительным знаком, чем больше передано энергии, тем лучше запайка, т.е. $Wa = Э$ , а в платежную функцию игрока В, изделия, энергию включаем с отрицательным знаком $Wb = -Э$, чем больше получено энергии, тем больше перегрев лекарства. По сути, такие платежные функции соответствуют платежным функциям в экономической задаче $Wa(p,y) = p{\cdot}y - C(y)$ и $Wb(p,y) = R(y) - p{\cdot}y$, слагаемое $+p{\cdot}y$ есть +Э, а слагаемое $-p{\cdot}y$ есть – Э с точностью до множителя цены $p$. Следовательно, приравнивая энергию Э количеству обмениваемого товара $y$, т.е. $Э = y$, получаем $Wa(p,Э) = p{\cdot}Э - C(Э)$ и $Wb(p,Э) = R(Э) - p{\cdot}Э$ платежные функции игры, где ходами игрока А будет назначение платы $p$ за энергию в рублях, а ходами игрока В будет потребление определенного количества энергии Э в киловатт-часах, как обычно принято в экономических расчётах. Слагаемое C(Э) в первой платежной функции означает затраты первого игрока на производство энергии Э, включающие стоимость газа, оборудования для запайки (с не запаянными ампулами и лекарством), затраты на его эксплуатацию, а слагаемое R(Э) во второй платежной функции это доход второго игрока, полученный от реализации запаянных ампул с лекарством. Далее задачу можно рассматривать как чисто экономическую как в параграфе 3.2., т.е. зная функции C(Э) и R (Э), найти точку равновесия, сколько продукции выгодно выпускать при заданных на рынке совершенной конкуренции ценах на сырье, оборудование и готовую продукцию.

## Литература


1. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. Издательство: Лань. Издание: 6-е изд. испр. ISBN 978-5-8114-0572-5; 2009 г. Кол-во страниц: 688.
2. Трухан А.А., Ковтуненко В.Г. Линейная алгебра и линейное программирование. Издательство: Лань. Издание: 1-е изд. ISBN 978-5-8114-2744-4; 2018 г. Кол-во страниц: 316
3. Дж. фон Нейман, О.Моргенштерн. Теория игр и экономическое поведение. Перев. с англ. под ред. и с доб. Н.Н.Воробьева. М. изд-во "Наука", 1970, 708 с.

4. Мазалов В.В.Математическая теория игр и приложения. Издательство: Лань. Издание: 3-е изд., стер. ISBN 978-5-8114-1025-5; 2017 г. Кол-во страниц: 448
5. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Сборник задач и упражнений по теории игр. Издательство: Лань. Издание: 2-е изд., испр. и доп. ISBN 978-5-8114-1665-3; 2014 г. Кол-во страниц: 304.
6. Альтшуллер Г.С. Найти идею. Введение в теорию решения изобретательских задач. – Петрозаводск: "Скандинавия", 2004. – 208 с.
7. Половинкин А.И. Основы инженерного творчества. Учеб. пособие - 3-е изд., стер. - СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2007. - 361 с.
8. Альтшуллер Г.С., Селюцкий А.Б. Крылья для Икара: Как решать изобретательские задачи. – Петрозаводск: Карелия, 1980. – 224 с.
9. Бушуев А.Б., Математическое моделирование процессов технического творчества – СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. – 181 с.
10. Бушуев А.Б. , Применение методов технического творчества в инновационной деятельности– СПб: СПбГУ ИТМО, 2011. – 124 с