МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

О.В. Сильванович

Лабораторный практикум по высшей математике

Специальные кривые

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО по направлению подготовки 09.03.01, 09.03.04, 10.03.01, 11.03.03, 12.03.01, 12.03.02, 12.03.03, 12.03.05, 13.03.02, 14.03.01, 15.03.04, 15.03.06, 16.03.01, 16.03.03, 18.03.02, 19.03.01, 19.03.02, 19.03.03, 23.03.03, 24.03.02, 27.03.04, 27.03.05, 44.03.04 в качестве учебно-методического пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования бакалавриата

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2018

О.В. Сильванович. Лабораторный практикум по высшей математике. Специальные кривые. – СПб: Университет ИТМО, 2018. – 62 с.

Рецензенты: к.ф.-.м.н., доцент ОЦМ Университета ИТМО А.И. Трифанов

Пособие предназначено для студентов бакалавриата. Содержит 8 лабораторных работ по различным типам кривых. Выполнение лабораторных работ может осуществляться в любом доступном графическом редакторе или МПП (математическом пакете программ)

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО - ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО - участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект "5 в 100". Цель Университета ИТМО - становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализцию всех направлений деятельности.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Данное пособие содержит 8 лабораторных работ, в которых студенту предлагается исследовать свойства следующих специальных кривых:

- лемниската Бернулли
- овалы Кассини
- синусоидальные спирали
- кардиоида
- улитка Паскаля
- астроида
- циклоида
- гипоциклоида
- эпициклоида
- полярная роза
- эвольвента окружности
- спираль Архимеда
- логарифмическая спираль
- гиперболическая спираль
- циссоида
- верзиера (локон) Аньези
- Декартов лист
- петлевая парабола

Свойства представленных кривых, способы их задания используются при изучении геометрического и физического смысла определённых и кратных интегралов - нахождении площади области, ограниченной кривой, длины дуги кривой, массы кривой. При составлении лабораторных работ учитывалась взаимосвязь между кривыми, их характеристические свойства.

Структурно каждая лабораторная работа содержит:

- определение кривой (как ГМТ (геометрическое место точек) или как кривой, заданной определённым типом уравнения)
- краткую историческую справку о кривой
- задание (сформулированное в общем виде для некоторых параметров).

При выполнении работы студенту необходимо самостоятельно выбрать значения параметров кривой. Так как выбор этих значений носит произвольный характер, то всегда возможно получить индивидуальный вариант лабораторной работы. Задания содержат гиперссылки на рабочие листы графического редактора DESMOS - при их открытии каждый студент может изучить свойства кривой, изменяя лишь её параметры. Для создания собственного отчёта студент может воспользоваться как представленными рабочими листами в DESMOS, так и создать собственные в любом другом доступном графическом редакторе.

Методические указания по выполнению и оформлению лабораторных работ

1. Общие указания. Выполнение заданий лабораторных работ проходит в том порядке, в котором они представлены и каждое из заданий является необходимым для выполнения соответствующей лабораторной работы в целом.

Отчёт о выполнении лабораторной работы должен содержать несколько пунктов:

1. Формулировка общего задания лабораторной работы с указанием значений параметров, необходимых для выполнения работы в целом.
2. Последовательное краткое описание полученных результатов при выполнении соответствующих заданий лабораторной работы.
3. Общий вывод о проделанной работе с формулировкой основных результатов, отражающих выполнение сформулированного в п.1. общего задания лабораторной работы.

4[1]. Список литературы и адреса сайтов, которые были использованы при выполнении лабораторной работы.

Замечание о содержании отчёта:

1. Если при выполнении задания требовалось провести самостоятельные расчёты, необходимо их выполнить, оформить в электронном виде и поместить в отчёт.
2. Если при выполнении задания требовалось нарисовать один или несколько графиков, необходимо сделать их в электронном виде, сохранить их копии и представить их в итоговом отчёте о выполнении лабораторной работы.

Требования к оформлению отчёта о выполнении лабораторной работы:

1. Отчёт оформляется в электронном виде в доступном текстовом редакторе (например,WORD), шрифт Times New Roman, размер шрифта 14 пт, междустрочный интервал 1,5. Все рисунки последовательно нумеруются и подписываются.
2. На проверку преподавателю отчёт сдаётся в распечатанном (на бумаге формата А4) или электронном виде. Расчёты, выполненные студентом письменно, оформляются в электронном виде в любом математическом редакторе и вставляются в отчёт.
3. Титульный лист работы оформляется по образцу, представленному в Приложении.

Представленные в данном лабораторном практикуме работы могут выполняться в бесплатном и свободном для доступа графическом редакторе Desmos Graphing Calculator https://www.desmos.com/calculator или в любом другом доступном графическом редакторе.

---

[1] В том случае, если лекционного или практического материала по соответствующей теме было недостаточно для выполнения лабораторной работы.

Замечание (о графическом редакторе Desmos Graphing Calculator)

Выбор Desmos Graphing Calculator обусловлен несколькими причинами:

- доступность: Desmos Graphing Calculator - это облачный сервис, в основе которого лежит технология HTML5. Данная программа работает в режиме on-line на любом компьютере, планшете или смартфоне. После авторизации можно сохранять построенные графики, апплеты в виде рисунков и делиться ими в виде ссылки или картинки.
- простой интерфейс
- работа с функциями, заданными:
  - ✓ аналитически
  - ✓ параметрически
  - ✓ в полярных координатах
  - ✓ таблично
- возможность создания графических анимаций (динамических моделей кривых), анимированных цветных рисунков
- большое количество встроенных математических функций и операций:
  - ✓ тригонометрические функции
  - ✓ статистические функции
  - ✓ основные математические операции
- дополнительные возможности для преподавателя (создание виртуальных лабораторных, классов, тренажёров, геймификация обучения и многое другое - см. https://teacher.desmos.com/, http://learn.desmos.com/, http://dailydesmos.com/)

Лабораторная работа №1. *Лемниската Бернулли, овалы Кассини, синусоидальные спирали*

1. *Лемниската Бернулли*

Название данной кривой дал известный швейцарский учёный Якоб Бернулли (1655-1705), который в одной из своих работ (в 1694 г.), посвящённой приливам и отливам, использовал её в качестве вспомогательного средства. Он заметил её сходство с цифрой 8 и с узлообразной повязкой, которую он называет "лемниском" (от греч. $\lambda\eta\mu\nu\iota\sigma\chi o\zeta$ - повязка). Также в Древней Греции (Риме) «лемнискатой» называли бантик (лат. lemniscatus - украшенный лентами), с помощью которого прикрепляли венок к голове победителя на спортивных играх. Лемниската Бернулли является частным случаем ***овалов Кассини***.

Характеристическое свойство: лемниската Бернулли есть геометрическое место точек, произведение расстояний от которых до двух заданных точек (называемых фокусами) постоянно и равно квадрату половины расстояния между фокусами. Так, если в декартовой системе координат $M(x,y)$ - точки лемнискаты, $F_1(-a,0)$, $F_2(a,0)$ - фокусы этой кривой (Рис.1), то её характеристическое свойство выражается следующим соотношением:

$$|F_1M|\cdot|F_2M| = \mathrm{const} = a^2$$

Прямые $y=\pm x$ - асимптоты кривой.

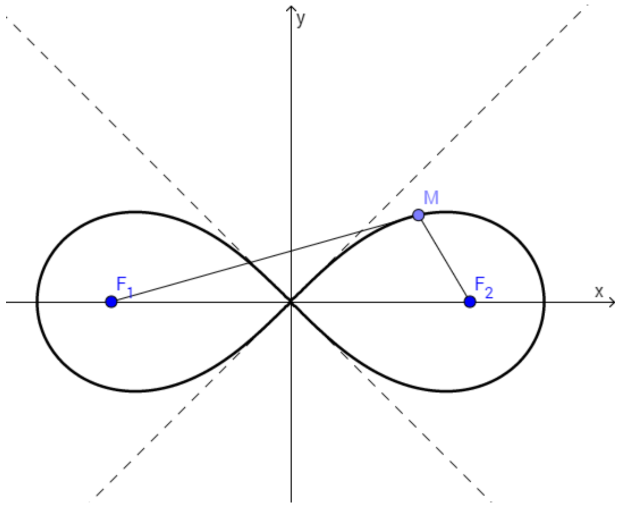


Рис.1 Лемниската Бернулли

Задание:

1. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/sfhbjpcxqg (Рис.2) и изучите аналитическое уравнение лемнискаты Бернулли: $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2), a>0$.

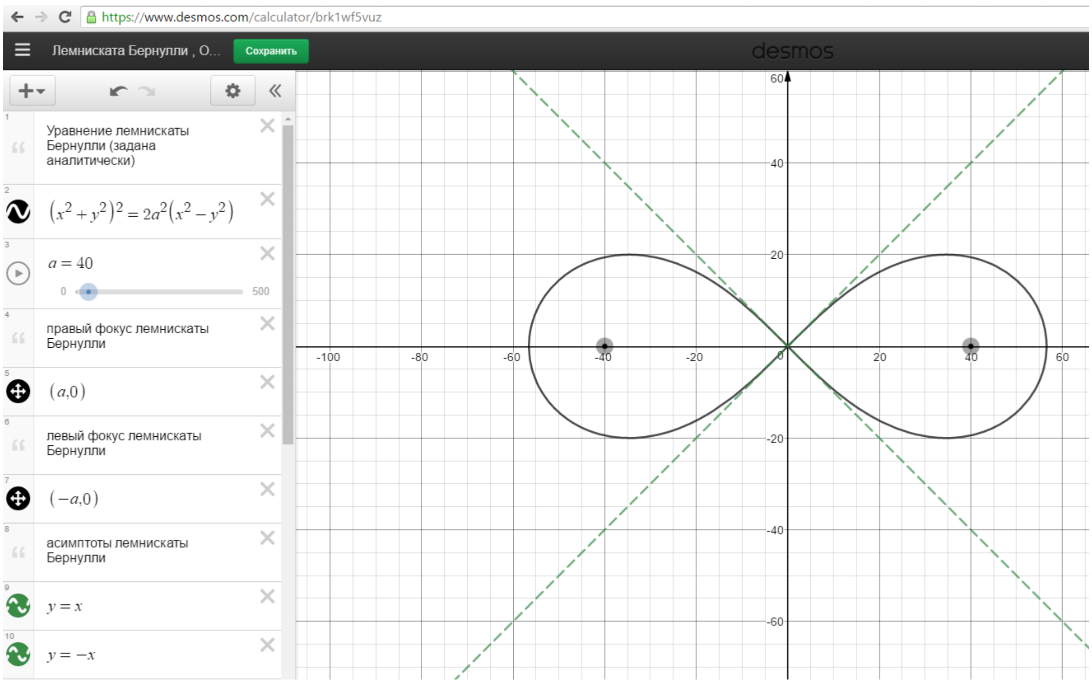


Рис.2. Лемниската Бернулли (аналитическое уравнение)

Изменяя значение параметра a посмотрите, как меняется вид кривой, её характеристические элементы (фокусы, асимптоты). Вставьте в отчёт график при некотором выбранном значении параметра a.

2. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/1v1gzltmx5 (Рис.3) и изучите полярное уравнение лемнискаты Бернулли: $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta, a > 0$. Изменяя значения параметров области построения b_1, b_2, посмотрите, как строится кривая в полярной системе координат. Постройте участок кривой при $\theta \in (b_1, b_2) : b_2 - b_1 = \dfrac{\pi}{2}, b_2, b_1 \in [0, \pi]$ и вставьте полученный график в отчёт.

3. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/mgfofqkvxj (Рис.4) - в полярной системе координат задано 7 точек лемнискаты Бернулли, расположенных на полярных лучах $\theta_1 = 0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{6}, \pi$. Обратите внимание, что на полярной плоскости построено только 5 точек из 7 - объясните, почему. Постройте лемнискату Бернулли по данным точкам, придавая параметрам b_1, b_2 в уравнении $r = a\sqrt{2\cos 2\theta}, \{b_1 < \theta < b_2\}$ (см. п.13 в списке выражений рабочей страницы https://www.desmos.com/calculator/mgfofqkvxj) соответствующие значения.

4. Напишите полярное уравнение лемнискаты Бернулли, фокусы которой расположены на луче $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Постройте график этой кривой и включите его в отчёт.

5. Сформулируйте алгоритм построения кривой на бумаге, учитывая особенности кривой (симметрию, асимптоты).

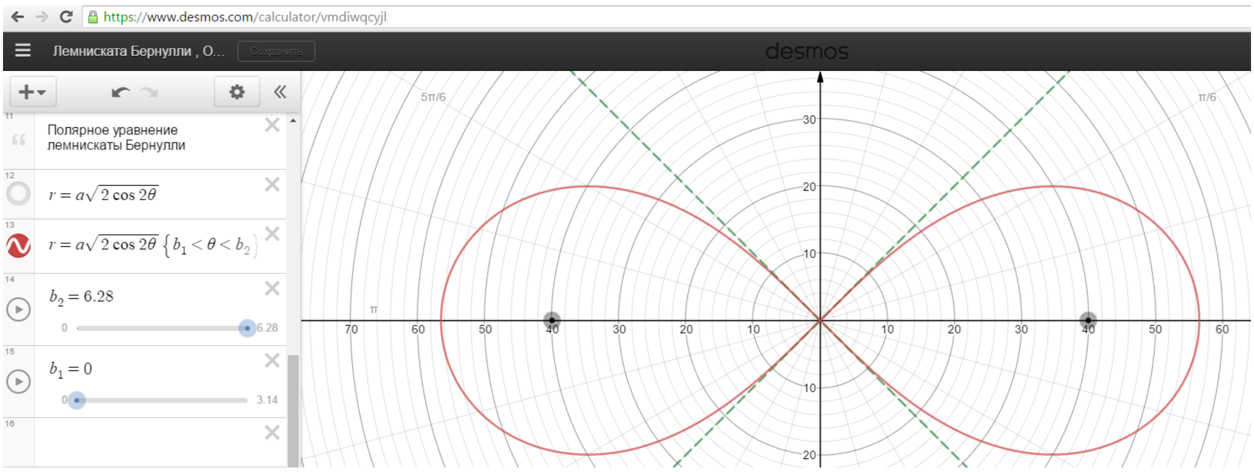


Рис.3. График лемнискаты Бернулли в полярных координатах

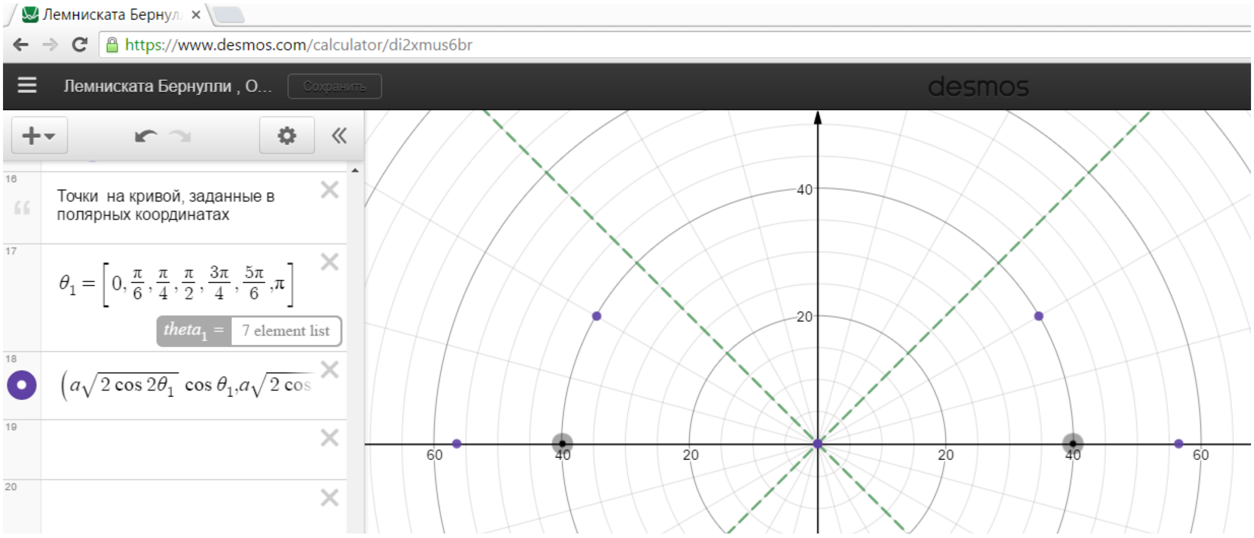


Рис.4. Точки лемнискаты Бернулли в полярных координатах

2. *Овалы Кассини*

Своё название эти кривые получили по имени их первого исследователя - астронома Джованни Кассини (1625-1712), который считал, что орбитой Земли является не эллипс, а овал.

Характеристическое свойство: Овалы Кассини - это геометрическое место точек $M(x,y)$, произведение расстояний от которых до двух фиксированных точек $F_1(-a_1,0), F_2(a_2,0)$ (см. Рис.5) есть величина постоянная: $|\mathrm{MF}_1|\cdot|MF_2|=const$.

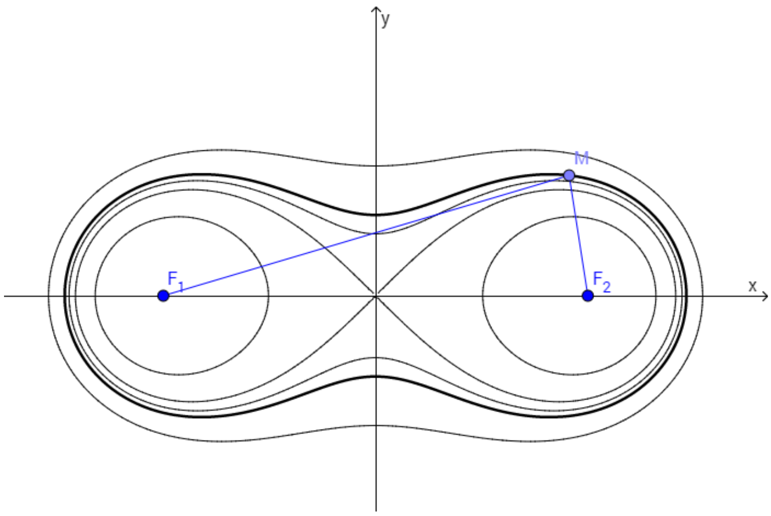


Рис.5. Овалы Кассини

Задание:

Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/fcfbty3cn9 (Рис. 6) и изучите аналитическое уравнение овалов Кассини: $\left(x^2+y^2\right)^2-2a_1{}^2\left(x^2-y^2\right)=c^4-a_1{}^4$.

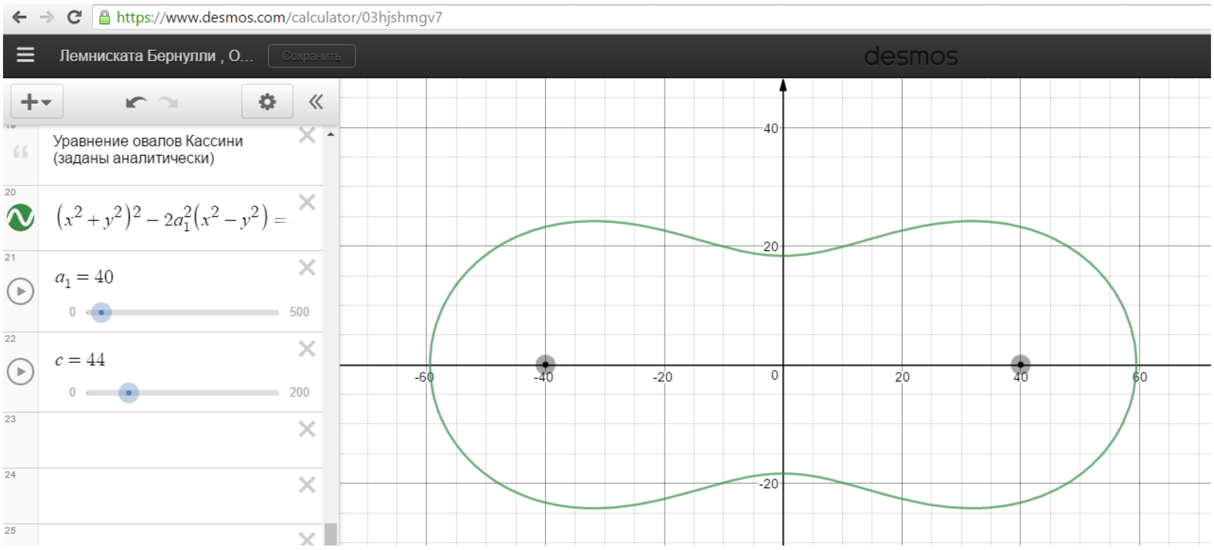


Рис.6. Овалы Кассини (аналитическое уравнение)

Для произвольно выбранного значение параметра a_1:

1. Построить график овала Кассини при $c=0$, определить название полученной кривой и включить график в отчёт.
2. Построить график овала Кассини при $0<c<a_1$. Взять несколько значений параметра c. Определить зависимость графика от изменения параметра c. Включить в отчёт три графика при фиксированных значениях параметра c.
3. Построить график овала Кассини при $a_1<c<\sqrt{2}a_1$. Взять несколько значений параметра c. Определить зависимость графика от изменения параметра c. Включить в отчёт три графика при фиксированных значениях параметра c.
4. Построить график овала Кассини при $c>\sqrt{2}a_1$. Определить зависимость графика от изменения параметра c. Включить в отчёт наиболее интересный график .

3. *Синусоидальные спирали*

Название "синусоидальные" не отражает формы этих кривых, скорее им подойдёт эпитет "цветочные" спирали.

Характеристическое свойство: данное семейство кривых задаётся в полярной координатах уравнениями:

$$r^m=a^m\sin m\varphi, m\in Q \quad \text{или} \quad r^m=a^m\cos m\varphi, m\in Q \ .$$

При различных значениях параметра m получаются разнообразные по форме кривые, среди которых много известных кривых. Так как значение $r^m=a^m\cos m\varphi, m\in Q$ не меняется при замене φ на $-\varphi$, то все синусоидальные кривые симметричны относительно полярной оси. При положительном значении параметра m кривая проходит через полюс и полностью помещается внутри круга радиуса a. При отрицательном значении параметра m радиус-вектор может принимать неограниченно большое значение, значит кривая будет иметь бесконечные ветви и не будет проходить через полюс.

Задание:

Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/rkxq0b2x9b (Рис.7) и изучите полярные уравнения синусоидальных спиралей:

$$r^m = a^m \sin m\varphi, m \in Q \text{ и } r^m = a^m \cos m\varphi, m \in Q.$$

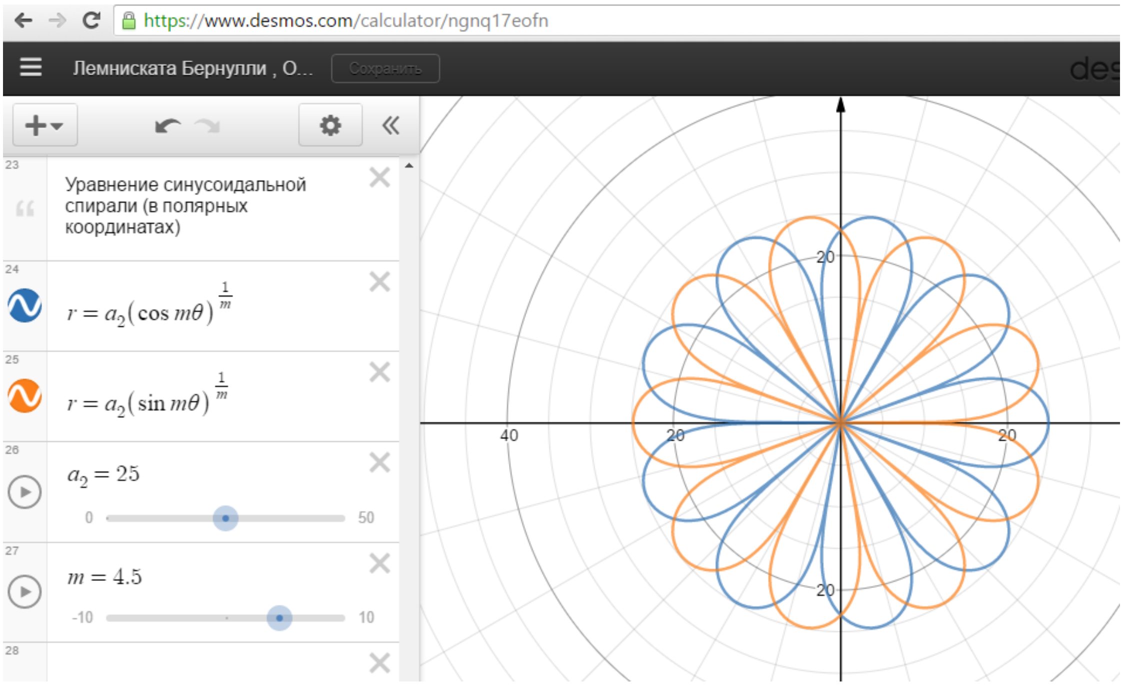


Рис.7. Синусоидальные спирали.

Для произвольно выбранного значение параметра a_2:

1. Построить график(и) кривой при $m=1$, определить название полученной кривой и включить график(и) в отчёт. Записать аналитическое уравнение полученной кривой.
2. Построить график(и) кривой при $m=-1$, определить название полученной кривой и включить график(и) в отчёт. Записать аналитическое уравнение полученной кривой.
3. Построить график(и) кривой при $m=2$, определить название полученной кривой и включить график(и) в отчёт. Записать аналитическое уравнение полученной кривой.
4. Построить график(и) кривой при $m=-2$, определить название полученной кривой и включить график(и) в отчёт. Записать аналитическое уравнение полученной кривой.
5. Построить график(и) кривой при $m=\frac{1}{2}$ - это ***кардиоида*** (см. Лабораторную работу №2) . Включить график(и) в отчёт.
6. Построить график(и) кривой при $m=-\frac{1}{2}$, определить название полученной кривой и включить график(и) в отчёт.

7. Проверить графически (при различных значениях параметра m) утверждение:
"При целом положительном m радиус-вектор является периодической функцией с периодом $\frac{2\pi}{m}$. При изменении полярного угла φ от 0 до 2π он m раз пройдёт через максимум и график будет состоять из m лепестков, каждый из которых располагается внутри угла, равного $\frac{\pi}{m}$." Включить в отчёт графики, подтверждающие данное утверждение.

8. Проверить графически (при различных значениях параметра m) утверждение:
"При целом положительном рациональном $m = \frac{p}{q}$ график будет состоять из p лепестков, которые могут пересекаться." Включить в отчёт графики, подтверждающие данное утверждение.

9. Известно, что частным случаем ***гипотрохоид*** (см. Лабораторную работу №3, п.2.) являются синусоидальные спирали. Гипотрохоида задаётся параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = R\left[(1-b)\cos(bt) + ab\cdot\cos\left((1-b)t\right)\right] \\ y = R\left[(1-b)\sin(bt) - ab\cdot\sin\left((1-b)t\right)\right] \end{cases}; a,b \in (0;+\infty)$$

Пройдите по https://www.desmos.com/calculator/iz4bw1hj2t (Рис.8), выберите произвольное значение $a: 0 < a < 1$ и $b: a = \frac{1}{b} - 1$, постройте график и включите его в отчёт.
Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/iz4bw1hj2t, выберите произвольное значение $a: a > 1$ и $b: a = \frac{1}{b} - 1$, постройте график и включите его в отчёт.

Итоговое задание к лабораторной работе №1: На основании проведённых исследований графиков лемнискаты Бернулли, овалов Кассини и синусоидальных спиралей сделать :

1. Краткий вывод о связи между этими кривыми.
2. Представить в отчёте рисунок, состоящий из нескольких лемнискат Бернулли, овалов Кассини и синусоидальных спиралей.

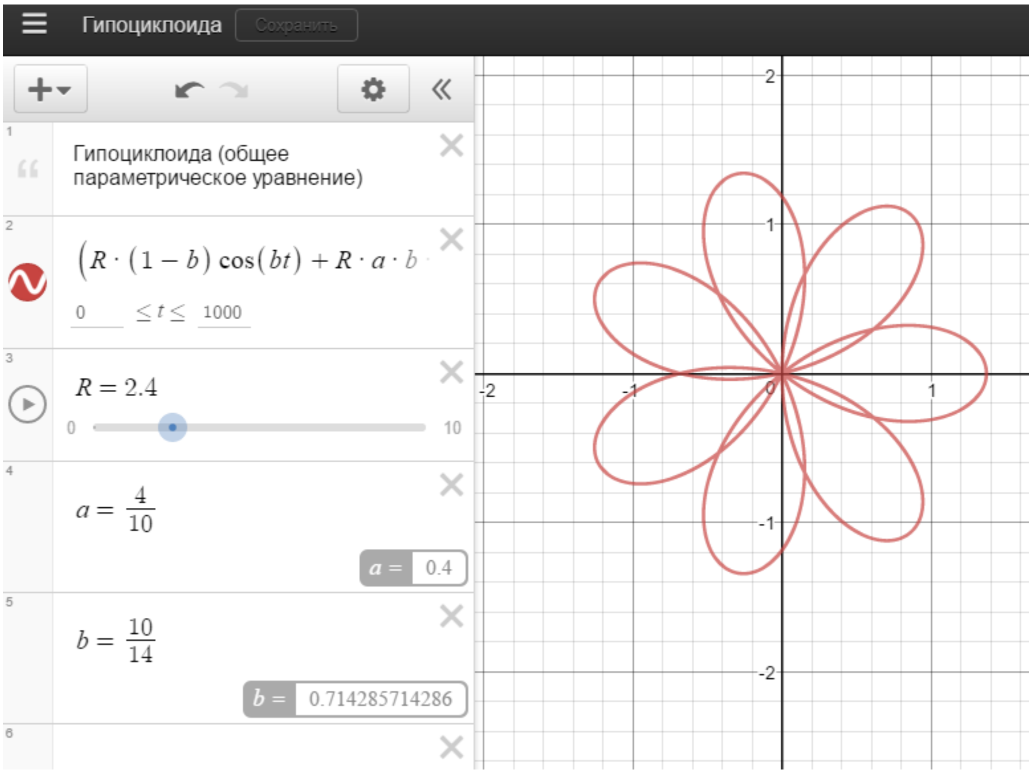


Рис.8. Синусоидальная спираль как частный случай гипотрохоиды.

Лабораторная работа №2. *Кардиоида, улитка Паскаля*

1. *Кардиоида*

Название кривой отражает её форму (греч. καρδία — сердце, греч. εἶδος — вид) - кривая "в виде сердца". Кардиоида является частным случаем ***улитки Паскаля.***

Характеристическое свойство: Кардиоида есть траектория точки, лежащей на окружности радиуса a, которая катится (без скольжения) по неподвижной окружности такого же радиуса a (см. Рис.9).

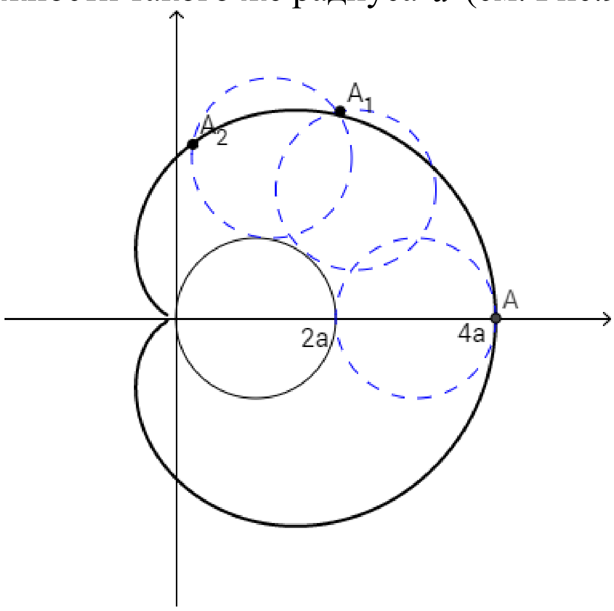


Рис. 9. Кардиоида

Задание:

1. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/ubvwxlqxuk (Рис.10) и изучите аналитическое уравнение кардиоиды

$$\left(x^2 + y^2 + 2ax\right)^2 = 4a^2(x^2 + y^2),$$

а также другие его виды:

$$\left(x^2 + y^2 - 2ax\right)^2 = 4a^2(x^2 + y^2),\ \left(x^2 + y^2 - 2ay\right)^2 = 4a^2(x^2 + y^2),$$

$$\left(x^2 + y^2 + 2ay\right)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

   1.1. Объясните, чем эти уравнения отличаются от исходного.

   1.2. Изменяя значение параметров a посмотрите, как меняется вид кривой. Сделайте вывод о зависимости вида кривой от значения параметров a. Вставьте в отчёт графики одной или нескольких кардиоид при некотором выбранном значении параметра a.

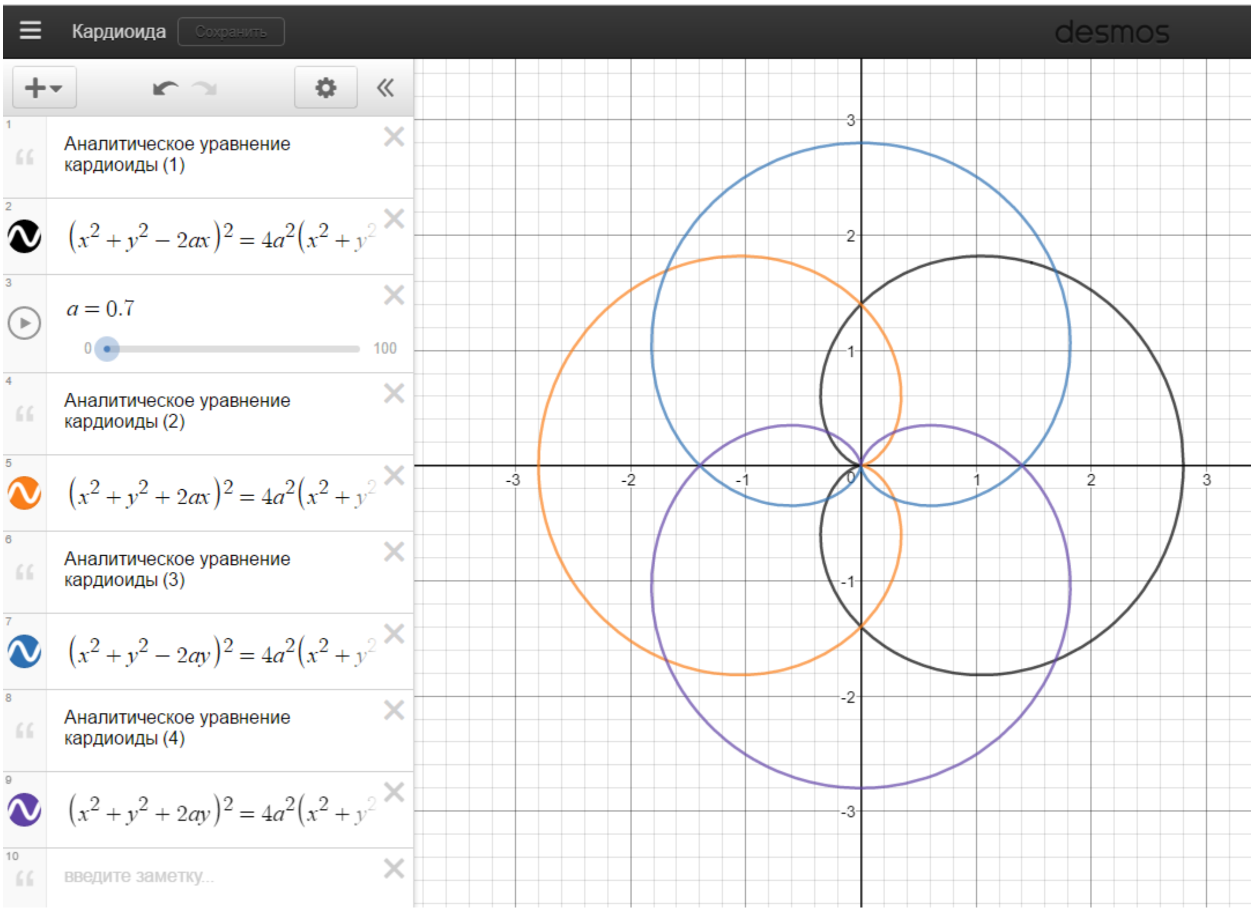


Рис.10. График кардиоиды (аналитическое задание)

2. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/6jg8d3e2s5 (Рис.11) и изучите параметрические уравнения кардиоиды:

$$\begin{cases} x = 2a\cos t + a\cos 2t + a \\ y = 2a\sin t + a\sin 2t \end{cases},\quad a \in (0,+\infty), t \in [0,2\pi],$$

$$\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t - a \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t \end{cases}, \quad a \in (0,+\infty), t \in [0,2\pi].$$

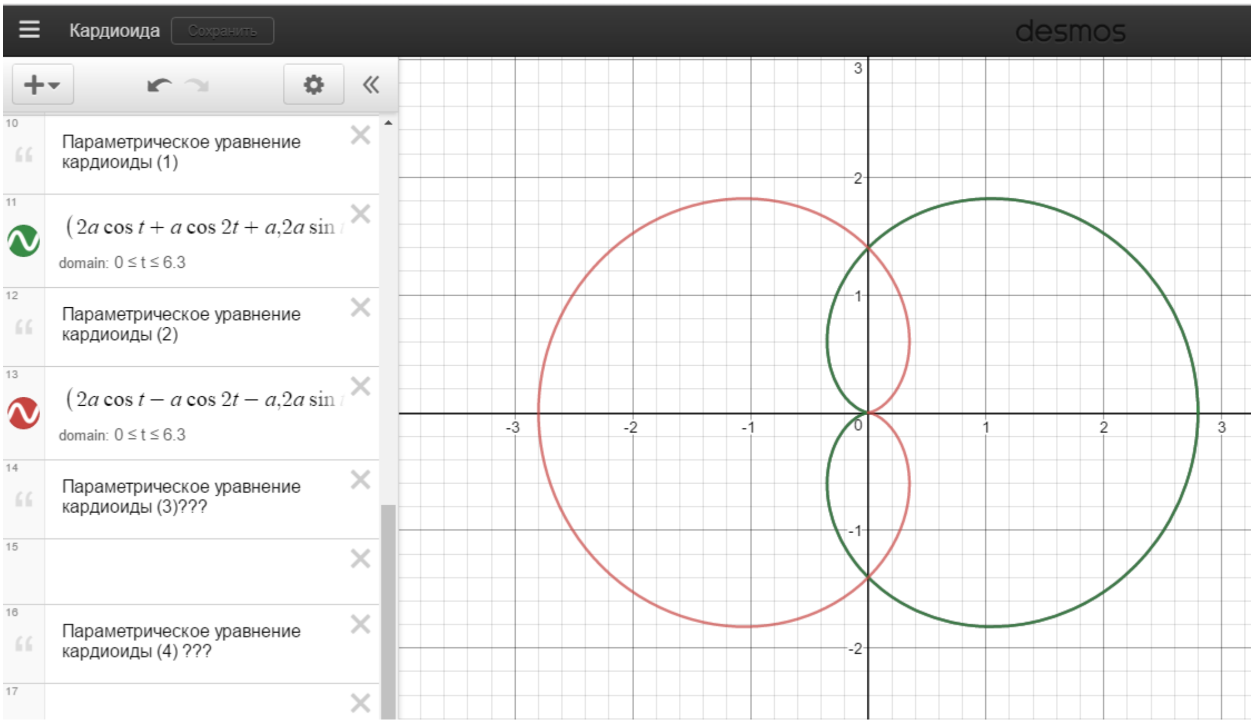


Рис.11. График кардиоиды (параметрическое задание).

2.1. Определите для каждого из этих уравнений соответствующее аналитическое уравнение и докажите (аналитически), что они задают одну и ту же кривую.

2.2. Для одного из выбранных параметрических уравнений кардиоиды проведите поэтапное построение, разбив область определения кривой $(t \in [0,2\pi])$ на несколько отрезков, например: на 1-ом этапе строим кривую при $t \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, на 2-м - при $t \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$, на 3-ем - при $t \in \left[\frac{3\pi}{4},2\pi\right]$. Все получаемые отрезки кривой строить различными цветами. Включить полученный график в отчёт.

2.3.* Запишите параметрические уравнения для других видов аналитических уравнений кардиоиды.

3. Известно, что кардиоида (также как и улитка Паскаля) - это частный случай ***эпициклоиды*** (см. Лабораторную работу №4), (Рис.12) которая задаётся параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = R[(1+\beta)\cos(\beta t) - \alpha\beta\cdot\cos((1+\beta)t)] \\ y = R[(1+\beta)\sin(\beta t) - \alpha\beta\cdot\sin((1+\beta)t)] \end{cases}; \alpha,\beta \in (0;+\infty)$$

При $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ мы получаем параметрическое уравнение кардиоиды

$$\begin{cases} x = R\left[(1+\beta)\cos(\beta t) - \alpha\beta\cdot\cos\left((1+\beta)t\right)\right] = 2R\cos t - R\cos 2t \\ y = R\left[(1+\beta)\sin(\beta t) - \alpha\beta\cdot\sin\left((1+\beta)t\right)\right] = 2R\sin t - R\sin 2t \end{cases}$$

или (согласуя с обозначениями в п.2.) при $R = a$:

$$\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t \end{cases},$$

график которой представлен на
https://www.desmos.com/calculator/vho4bxuiht (Рис.12).

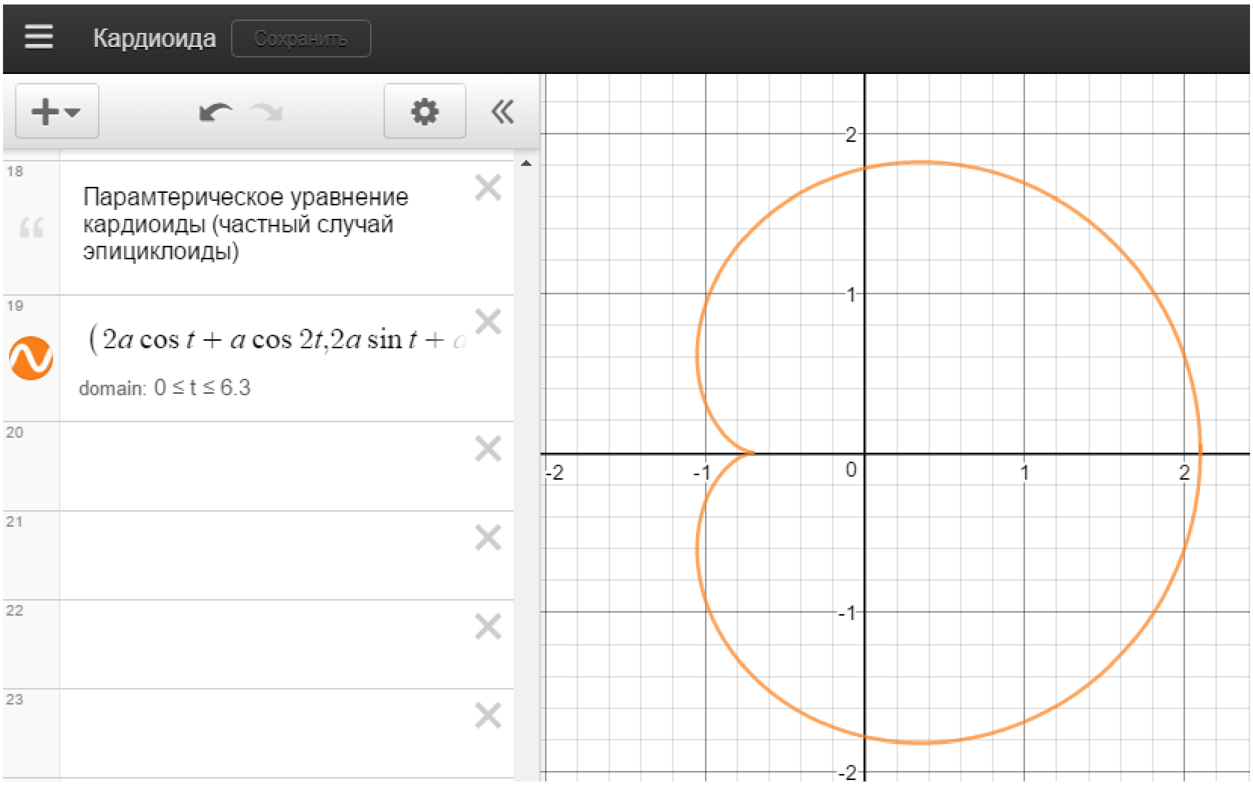


Рис.12. График кардиоиды (частный случай эпициклоиды).

3.1. Для произвольно выбранного значения параметров a построить график кардиоиды как частного случая эпициклоиды, отметив на графике неподвижную и производящую окружности. Полученный график включить в отчёт.

4. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/6wditkjqhj (Рис.13) и исследуйте полярные уравнения кардиоиды:

$$r = 2a(1+\cos\theta),\quad r = 2a(1-\sin\theta).$$

Определите для каждого из этих уравнений соответствующие аналитические уравнения. Запишите недостающие полярные уравнения.

4.1. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/xzvfwpepbk (Рис.14) и, изменяя значение параметра θ_2, посмотрите, как поэтапно строится кардиоида в полярных координатах.

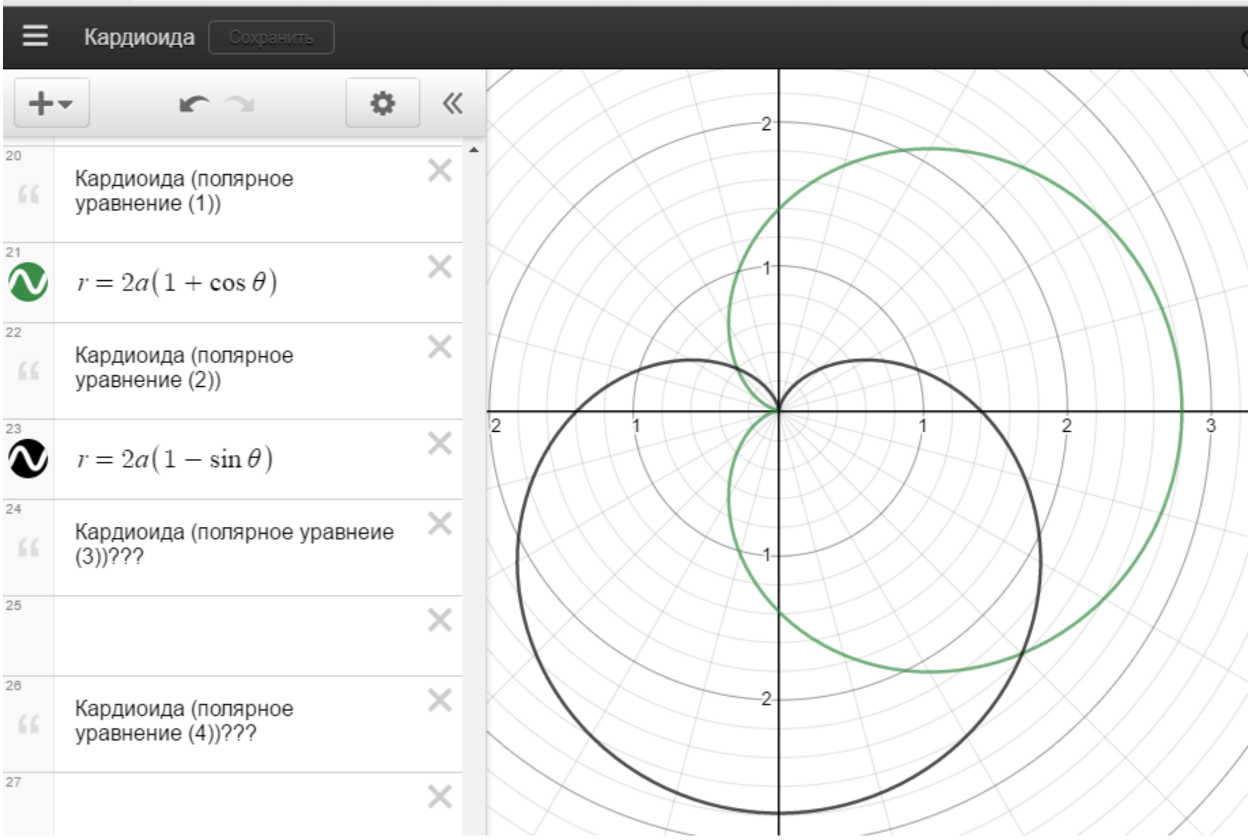


Рис.13. График кардиоиды (в полярных координатах).

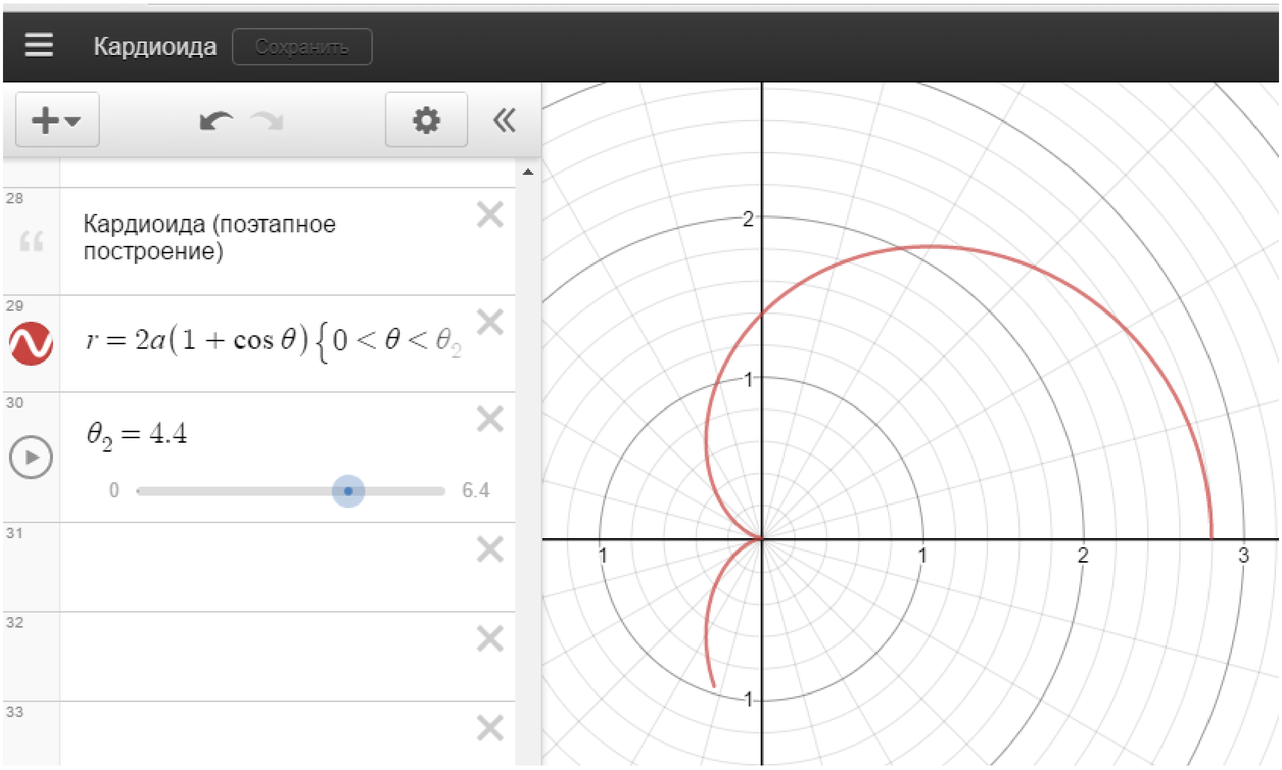


Рис. 14. Кардиоида (поэтапное построение в полярных координатах)

4.2. Выберите любое другое полярное уравнение кардиоиды и постройте часть графика при изменении полярного угла θ на угол величины $\frac{\pi}{2} \approx 1.6$, выбрав за начало отсчёта любой угол, кроме $\theta = 0$.

5. Пройдите по https://www.desmos.com/calculator/uvgg6efns3 (Рис.15) - в полярной системе координат задано 9 точек кардиоиды, расположенных на полярных лучах $\theta_1 = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi$.

6. Сформулируйте алгоритм построения графика кардиоиды на бумаге.

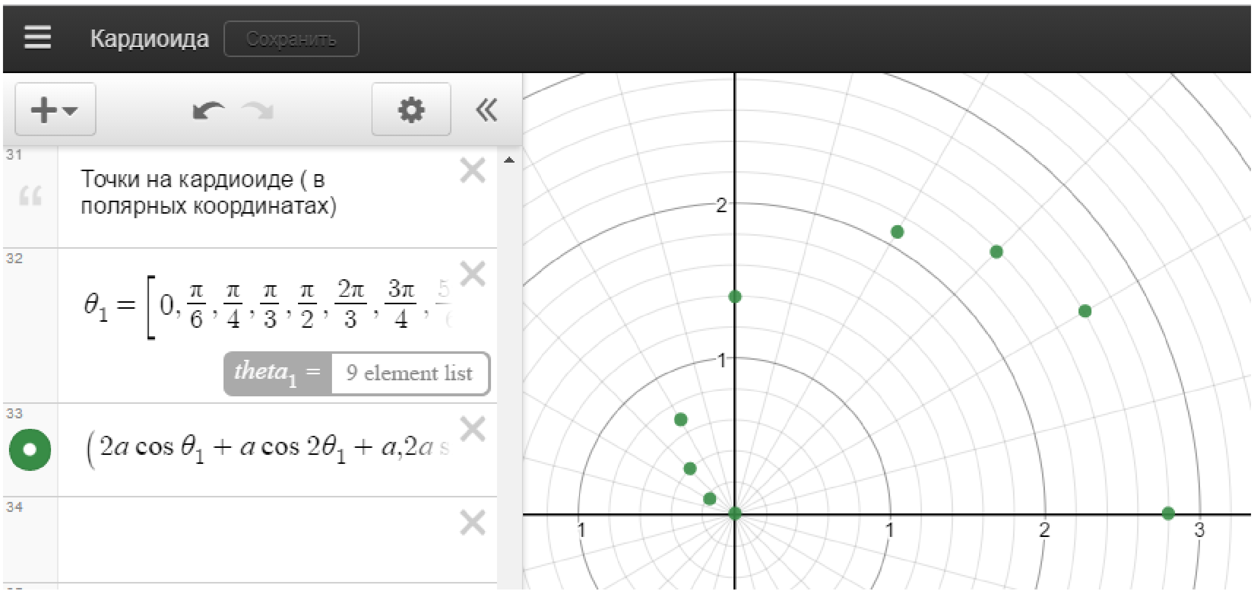


Рис.15. Точки кардиоиды в полярных координатах

2. *Улитка Паскаля*

Своё название кривая получила в честь отца известного французского математика и физика Блеза Паскаля (1623-1662) - Этьена Паскаля (председателя налогового управления г. Клермон-Ферран, любителя математики), который впервые описал эту кривую.

Характеристическое свойство: Пусть имеется окружность с радиусом a, проходящая через т.О и имеющая центр на оси Ох. Тогда улитка Паскаля есть геометрическое место точек $M(x, y)$ и $N(x, y)$, таких, что для всякого луча $\varphi = \varphi_0, \varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ выполнено равенство (см. Рис.16):

$$|MB| = |BN| = const = 2b .$$

Задание:

1. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/4bow2zrwdt (Рис.17) и изучите аналитическое уравнение улитки Паскаля

$$\left(x^2 + y^2 - 2ax\right)^2 = 4b^2(x^2 + y^2) ,$$

а также другие его виды:

$$\left(x^2+y^2+2ax\right)^2=4b^2(x^2+y^2),\ \left(x^2+y^2-2ay\right)^2=4b^2(x^2+y^2),$$
$$\left(x^2+y^2+2ay\right)^2=4b^2(x^2+y^2)$$

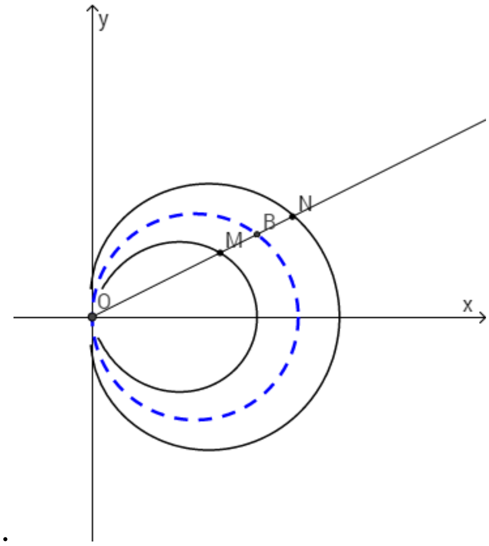


Рис.16. Улитка Паскаля.

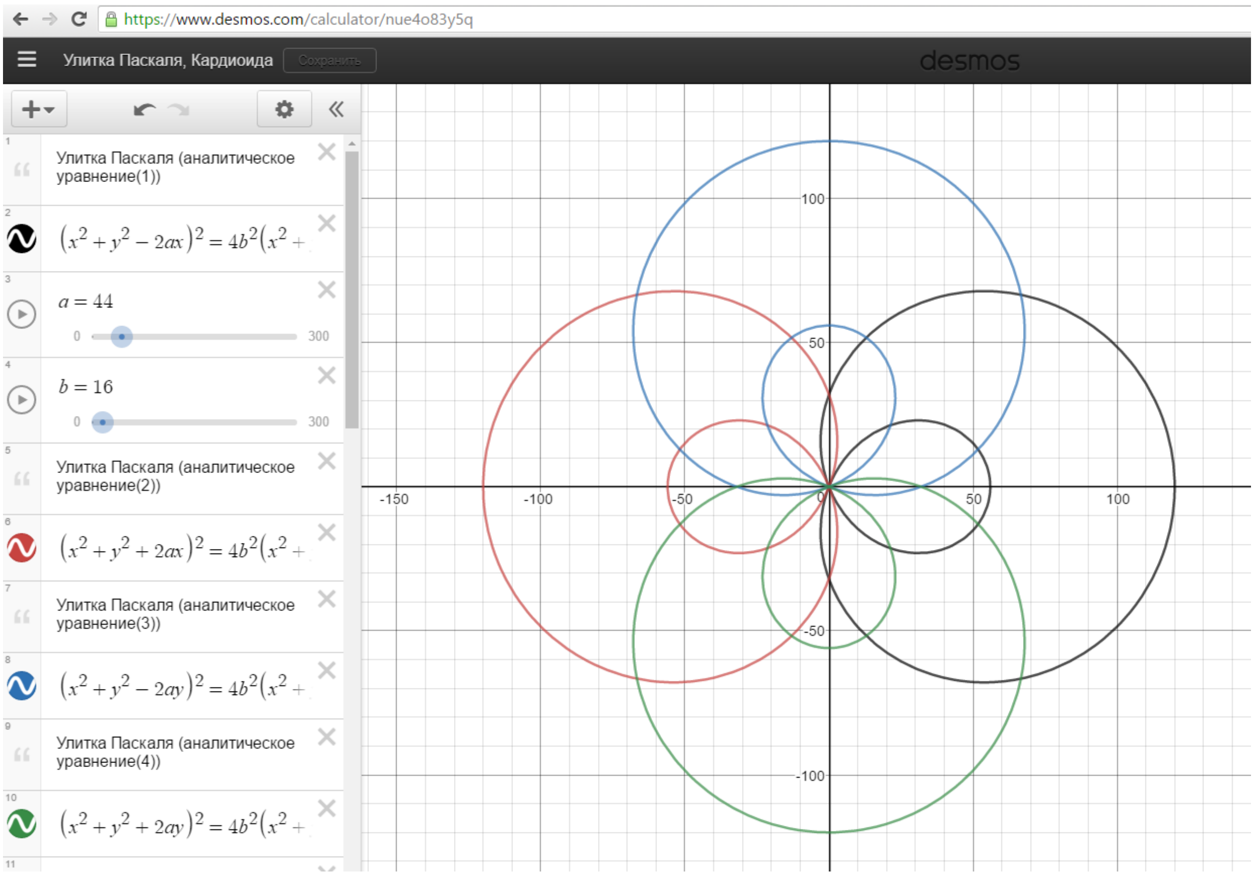


Рис.17. Графики улитки Паскаля (аналитическое задание).

1.1. Объясните, чем эти уравнения отличаются от исходного и геометрическим местом каких точек они являются.

1.2. Изменяя значение параметров a,b посмотрите, как меняется вид кривой. Сделайте вывод о зависимости вида кривой от значения параметров a,b. Вставьте в отчёт графики одной или нескольких улиток Паскаля при некоторых выбранных значениях параметров a,b, которые отражают различные виды её формы.

2. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/vczr7dga7g (Рис.18) и изучите параметрические уравнения улитки Паскаля:

$$\begin{cases} x = 2a\cos^2 t + 2b\cos t \\ y = 2a\cos t\sin t + 2b\sin 2t \end{cases}, a,b \in (0,+\infty)$$

$$\begin{cases} x = -2a\sin^2 t + 2b\sin t \\ y = -2a\cos t\sin t + 2b\cos 2t \end{cases}, a,b \in (0,+\infty)$$

2.1. Определите для каждого из этих уравнений соответствующее аналитическое уравнение и докажите (аналитически), что они задают одну и ту же кривую.

2.2. Для одного из выбранных параметрических уравнений улитки Паскаля проведите поэтапное построение, разбив область определения кривой $(t \in [0,2\pi])$ на несколько отрезков, например: на 1-ом этапе строим кривую при $t \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, на 2-м - при $t \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$, на 3-ем - при $t \in \left[\frac{3\pi}{4},2\pi\right]$. Все получаемые отрезки кривой строить различными цветами. Включить полученный график в отчёт.

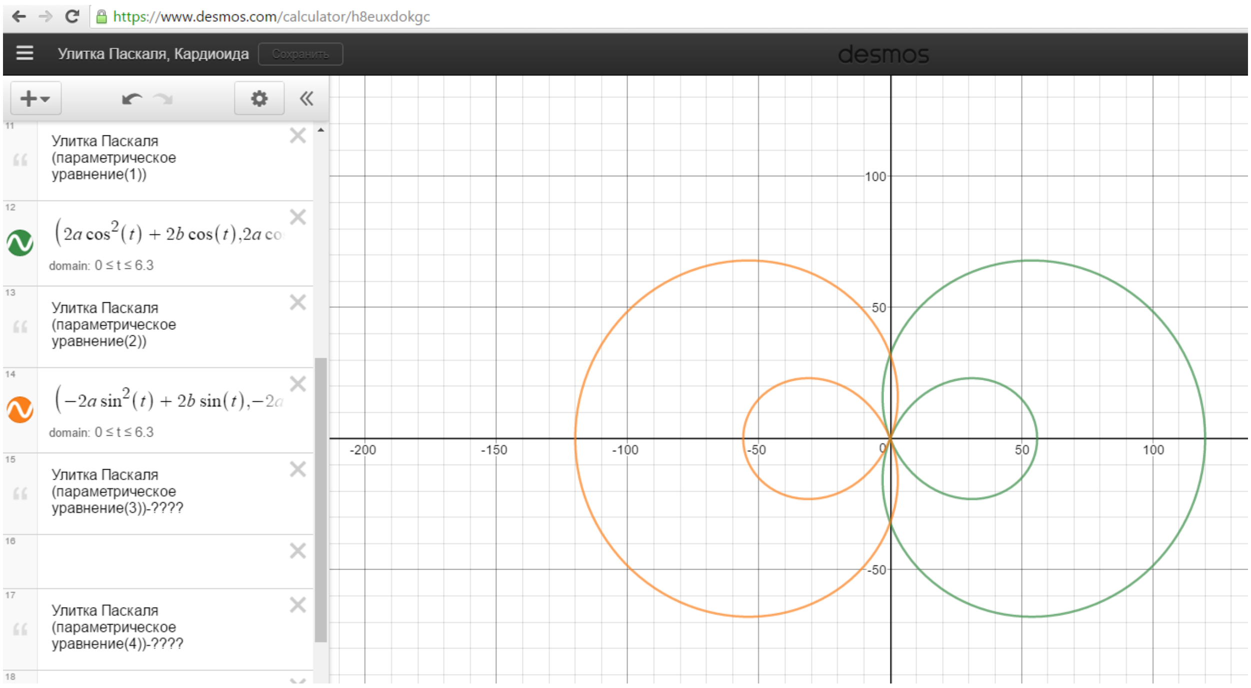


Рис.18. Графики улитки Паскаля (параметрическое задание).

2*. Запишите параметрические уравнения для других видов аналитических уравнений улитки Паскаля.

3. Известно, что улитка Паскаля - это частный случай ***эпициклоиды*** (см. Лабораторную работу №4), которая задаётся параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = R[(1+\beta)\cos(\beta t) - \alpha\beta\cdot\cos((1+\beta)t)] \\ y = R[(1+\beta)\sin(\beta t) - \alpha\beta\cdot\sin((1+\beta)t)] \end{cases}; \alpha, \beta \in (0;+\infty)$$

При $\alpha > 1$ и $\beta = 1$ мы получаем параметрическое уравнение улитки Паскаля

$$\begin{cases} x = R[(1+\beta)\cos(\beta t) - \alpha\beta\cdot\cos((1+\beta)t)] = 2R\cos t - R\alpha\cos 2t \\ y = R[(1+\beta)\sin(\beta t) - \alpha\beta\cdot\sin((1+\beta)t)] = 2R\sin t - R\alpha\sin 2t \end{cases}$$

или, обозначая $R\alpha = a$, $R = b$, его более краткую форму:

$$\begin{cases} x = 2b\cos t - a\cos 2t \\ y = 2b\sin t - a\sin 2t \end{cases}$$

график которой представлен на https://www.desmos.com/calculator/6vwv9sggun (Рис. 19).

3.1. Для произвольно выбранных значений параметров a, b построить график улитки Паскаля как частного случая эпициклоиды, отметив на графике неподвижную и производящую окружности. Полученный график включить в отчёт.

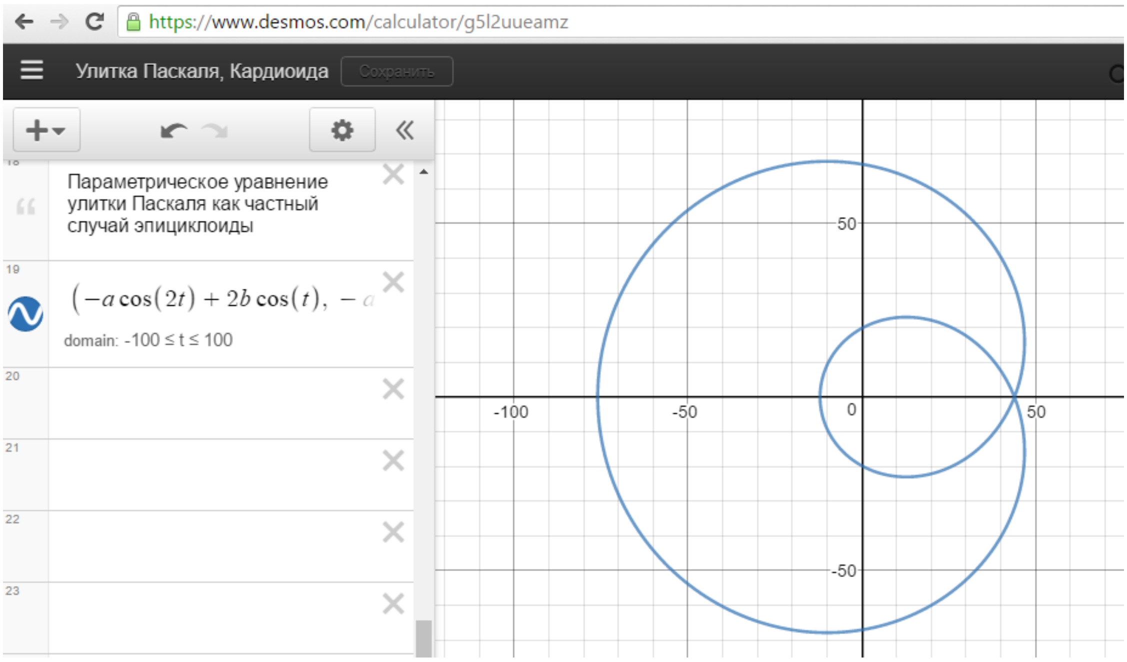


Рис.19. График улитки Паскаля (частный случай эпициклоиды).

4. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/h8egepmzto (Рис.20) и исследуйте полярные уравнения улитки Паскаля:

$$r = 2(a\cos\theta + b),\ r = 2(a\cos\theta - b),\ r = 2(b - a\sin\theta),\ r = 2(b + a\sin\theta).$$

Определите для каждого из этих уравнений соответствующие аналитические уравнения. Запишите недостающие полярные уравнения.

Итоговое задание к лабораторной работе №2: На основании проведённых исследований графиков кардиоиды и улитки Паскаля сделать:

1. Краткий вывод о связи между этими кривыми.
2. Представить в отчёте рисунок, состоящий из нескольких кардиоид и улиток Паскаля.

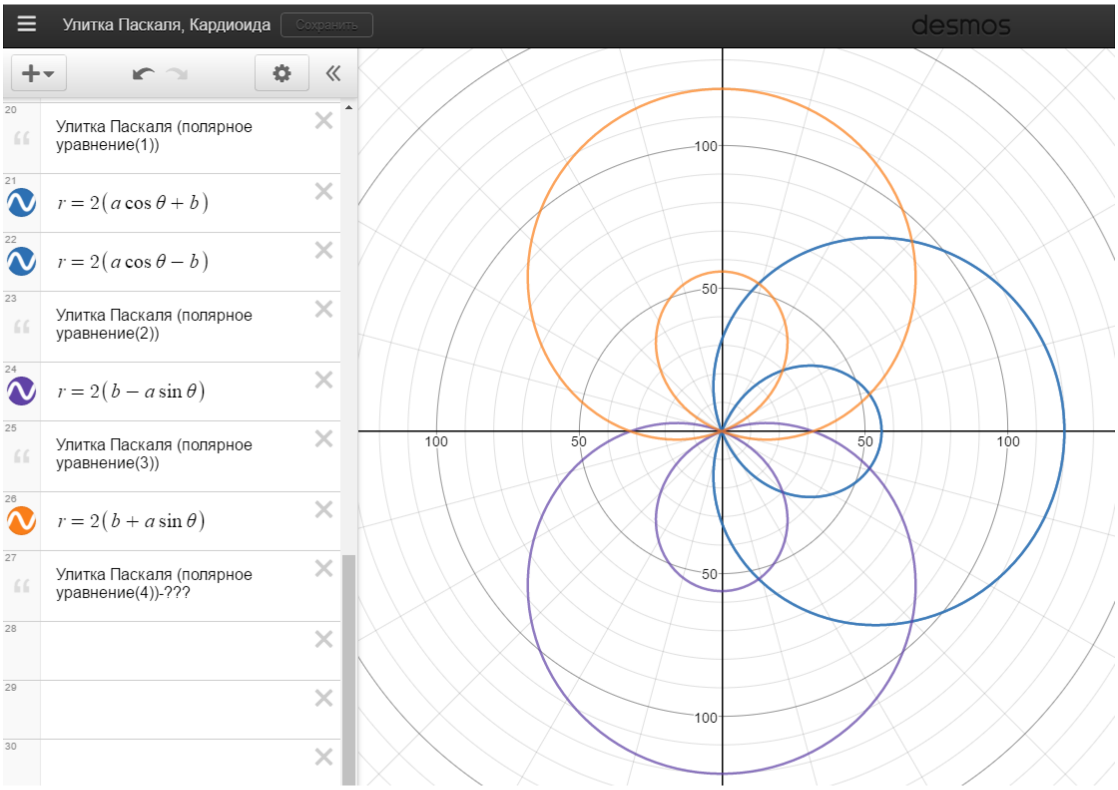


Рис.20. График улитки Паскаля (в полярных координатах).

Лабораторная работа №3. *Астроида, гипоциклоида*

1. *Астроида*

Название кривой отражает её форму (греч. $\alpha\sigma\tau\rho o\upsilon$ – звезда, $\varepsilon\iota\delta o\zeta$ – вид) - кривая "в виде звезды". Астроида является частным случаем ***гипоциклоиды.*** Интересные факты об этой кривой, её анимационную модель вы можете посмотреть на сайте http://www.kvant.info/panov/kot/kopernik.html

Характеристическое свойство: Астроида - это траектория точки, лежащей на окружности радиуса $r = a$, которая катится (без скольжения) по внутренней стороне неподвижной окружности радиуса $R = 4a$ (Рис.21).

Задание:

1. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/ozlhamoh95 (Рис.22) и изучите уравнение астроиды в декартовых координатах:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}.$$

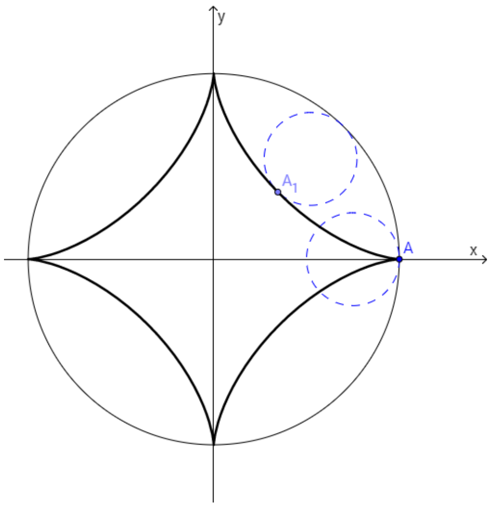


Рис. 21. Астроида

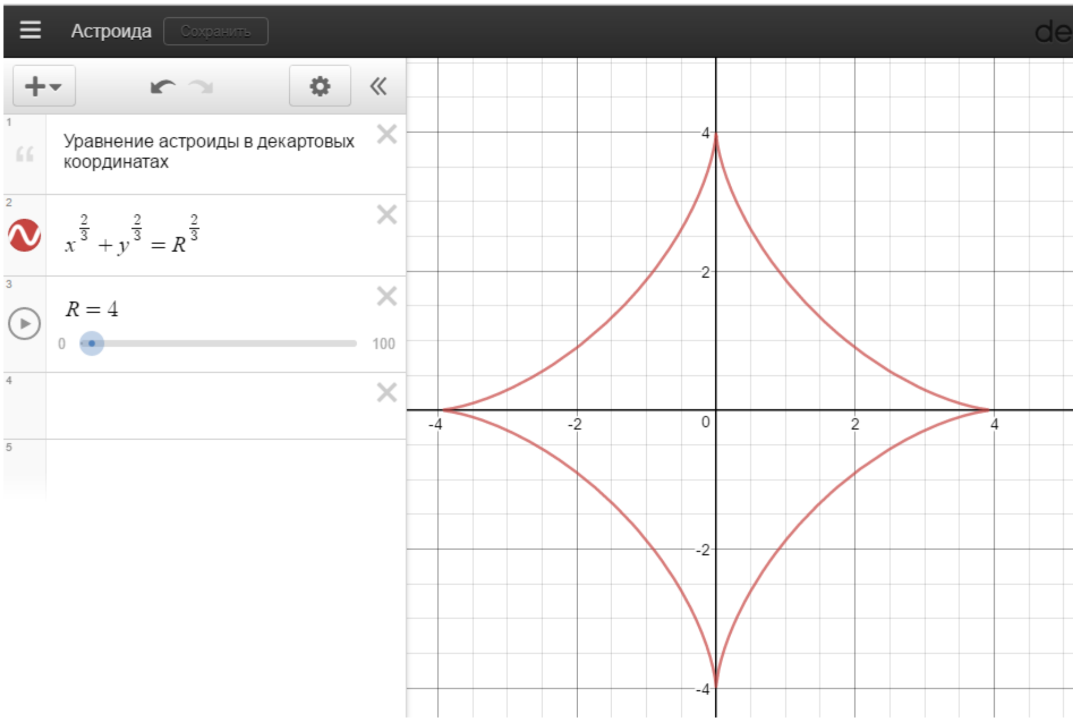


Рис.22. График астроиды (в декартовых координатах)

2. Изменяя значение параметра R посмотрите, как меняется вид кривой. Сделайте вывод о зависимости вида кривой от значения параметра R.

3. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/agfta3ixgi (Рис.23) и изучите параметрические уравнения астроиды:

3.1. Проведите поэтапное построение, разбив область определения кривой $(t\in[0,8\pi])$ на несколько отрезков, например: на 1-ом этапе строим кривую при $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, на 2-м - при $t\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, на 3-ем - при $t\in\left[\frac{3\pi}{2},8\pi\right]$. Все получаемые отрезки кривой строить различными цветами. Включить полученный график в отчёт.

3.2. Докажите (аналитически), взаимосвязь параметрического уравнения астроиды и её уравнения в декартовых координатах (см. п.1.)

$$\begin{cases} x = R\cos^3\left(\dfrac{t}{4}\right) \\ y = R\sin^3\left(\dfrac{t}{4}\right) \end{cases}, R \in (0,+\infty), t \in [0;8\pi].$$

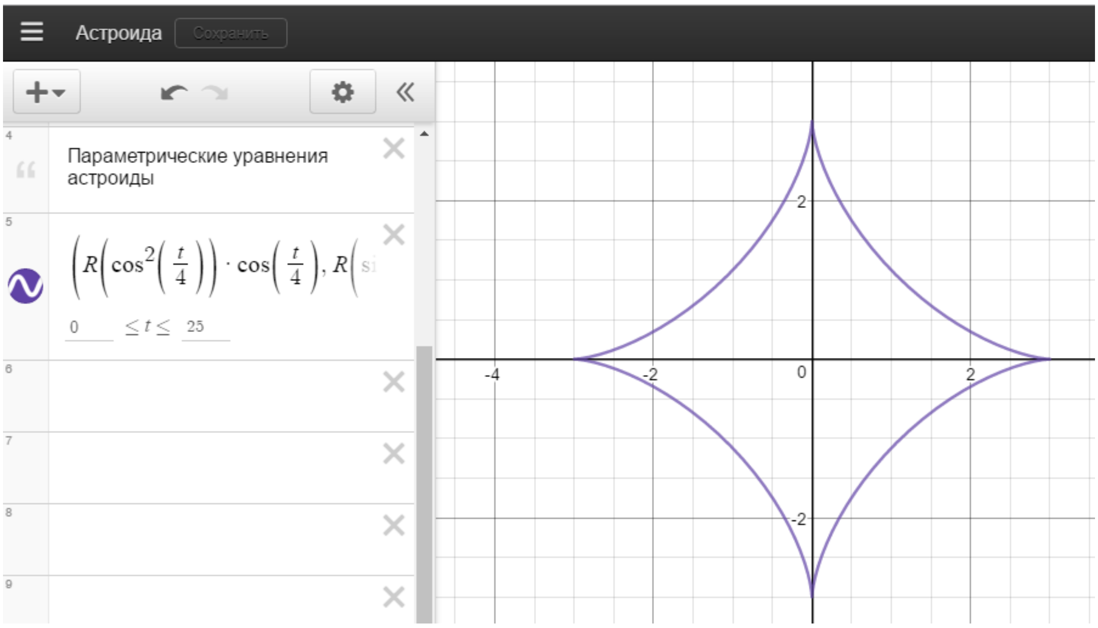


Рис.23. График астроиды (параметрическое задание).

4. Сформулируйте алгоритм построения астроиды на бумаге.

5. Известно, что астроида является частным случаем ***гипоциклоиды*** (см. ниже, п.2.), которая задаётся параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = R\left[(1-\text{b})\cos(bt) + ab\cdot\cos\left((1-b)t\right)\right] \\ y = R\left[(1-b)\sin(bt) - ab\cdot\sin\left((1-b)t\right)\right] \end{cases}; a,b \in (0,+\infty).$$

При $a=1$ и $b=\dfrac{1}{4}$ мы получаем параметрическое уравнение астроиды как частный случай гипоциклоиды:

$$\begin{cases} x = R\left(\dfrac{3}{4}\cos\dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{3t}{4}\right) \\ y = R\left(\dfrac{3}{4}\sin\dfrac{t}{4} - \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{3t}{4}\right) \end{cases},$$

график которой представлен на https://www.desmos.com/calculator/nj0iewhd4f (Рис.24)

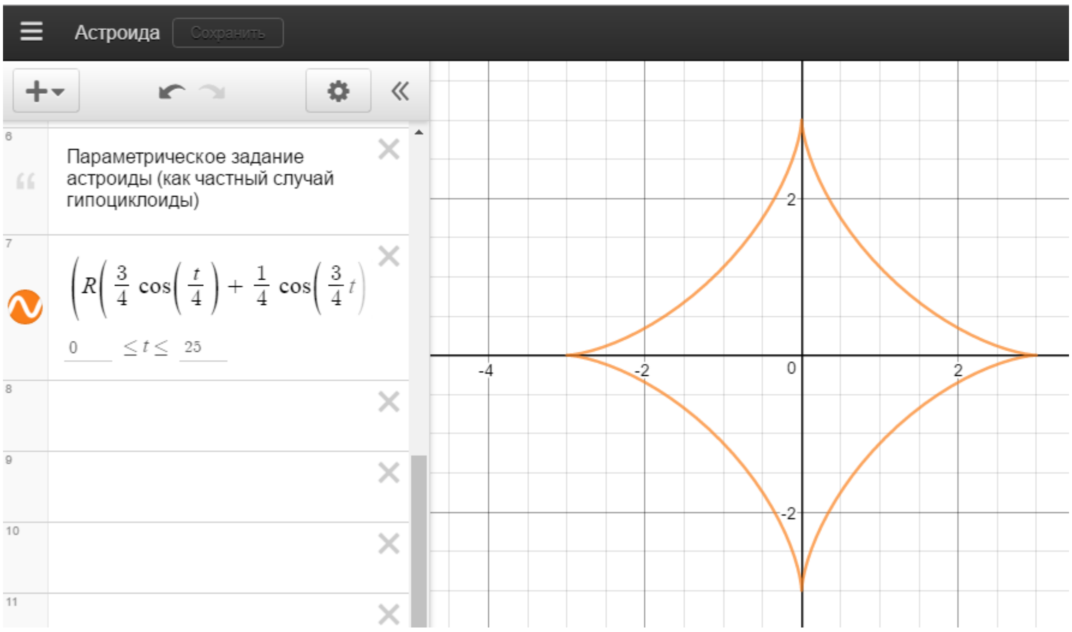


Рис.24. График астроиды (параметрическое задание как частный случай гипоциклоиды)

2. Гипоциклоида

Название кривой происходит от греческих слов ὑπό - под, внизу и κύκλος - круг, окружность, т.е. гипоциклоида - кривая "под, внизу, внутри окружности".

Задаётся параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = R\left[(1-\mathrm{b})\cos(bt) + ab\cdot\cos\left((1-b)t\right)\right] \\ y = R\left[(1-b)\sin(bt) - ab\cdot\sin\left((1-b)t\right)\right] \end{cases}; a,b \in (0,+\infty).$$

При этом при различных значениях параметра a получаем различные виды гипоциклоид. При $a=1$ - это просто ***гипоциклоида***, при $0<a<1$ - ***укороченная гипоциклоида,*** при $a>1$ - ***удлинённая гипоциклоида.*** Различия в получаемых кривых связаны с их характеристическим свойством.

Замечание: Укороченную и удлинённую гипоциклоиды называют ***гипотрохоидами.*** При определённых значениях параметров a и b гипоциклоиды вырождаются в известные кривые.

Характеристическое свойство гипоциклоид: гипоциклоида есть траектория точки M, лежащей на расстоянии $l = abR$ от центра производящей окружности радиуса $r = bR$, которая катится (без скольжения) по внутренней стороне неподвижной окружности радиуса R. От значения параметра $l = abR$ зависит вид гипоциклоиды - см. Рис. 25. В частности, при $a=1$ точка M лежит на производящей окружности.

Задание (выполняется при некотором выбранном значении R ($R>0$)):

1. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/elyxqyrg7t (Рис. 26) и изучите график гипоциклоиды, изменяя параметры a,b в уравнениях:

$$\begin{cases} x = R\left[(1-\mathrm{b})\cos(bt) + ab\cdot\cos\left((1-b)t\right)\right] \\ y = R\left[(1-b)\sin(bt) - ab\cdot\sin\left((1-b)t\right)\right] \end{cases}; a, b \in (0, +\infty).$$

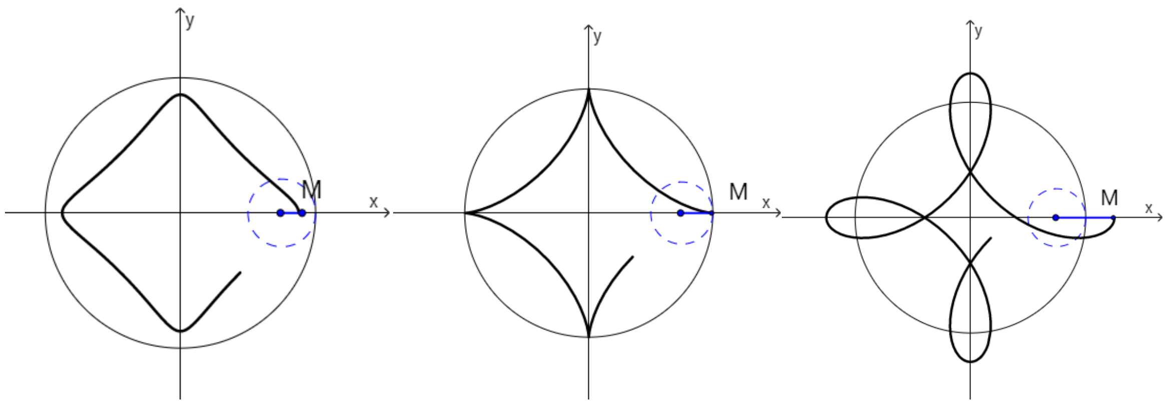


Рис.25. Укороченная гипоциклоида (а), гипоциклоида (б), удлинённая гипоциклоида (в).

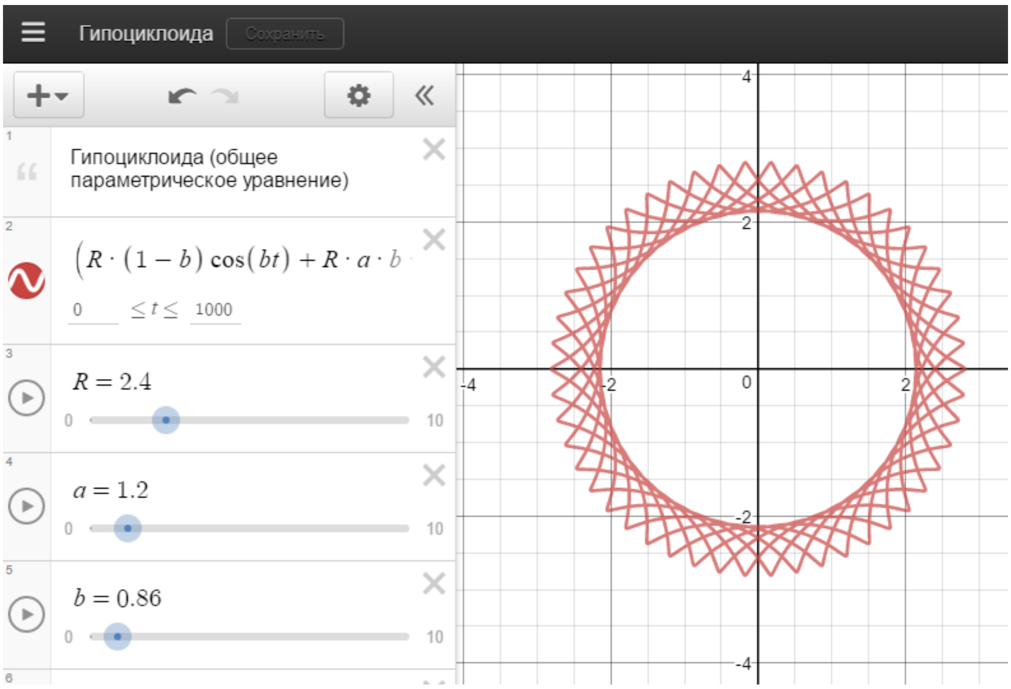


Рис.26. График гипоциклоиды (при произвольно выбранных значениях параметров a, b).

2. Исследовать ***гипоциклоиду*** (в общем уравнении гипоциклоиды значение параметра $a = 1$):

2.1. Зафиксировать значение параметра $b = \dfrac{1}{4} = 0.25$. Определить название полученной кривой. Включить полученный график в отчёт.

2.2. Зафиксировать значение параметра $b = \dfrac{1}{2} = 0.5$. Определить название полученной кривой. Включить полученный график в отчёт.

2.3. Выбрать несколько значений параметра $b=\frac{m}{n}$ - несократимая дробь $m,n\in N$. Например - см. https://www.desmos.com/calculator/3yrvyiraec (Рис. 27). Посмотреть, как меняется вид кривой в зависимости от значения $b=\frac{m}{n}$ (**Указание**. Рассмотреть $b=\frac{m}{n}$: m четные (нечётные), n - нечётные (чётные): $b>1$ и $b<1$). Включить характеризующие полученную зависимость графики в отчёт.

2.4. Выбрать несколько произвольных положительных целых значений параметра b. Включить полученные графики в отчёт.

2.5. Выбрать несколько произвольных положительных иррациональных значений параметра b. Включить полученные графики в отчёт.

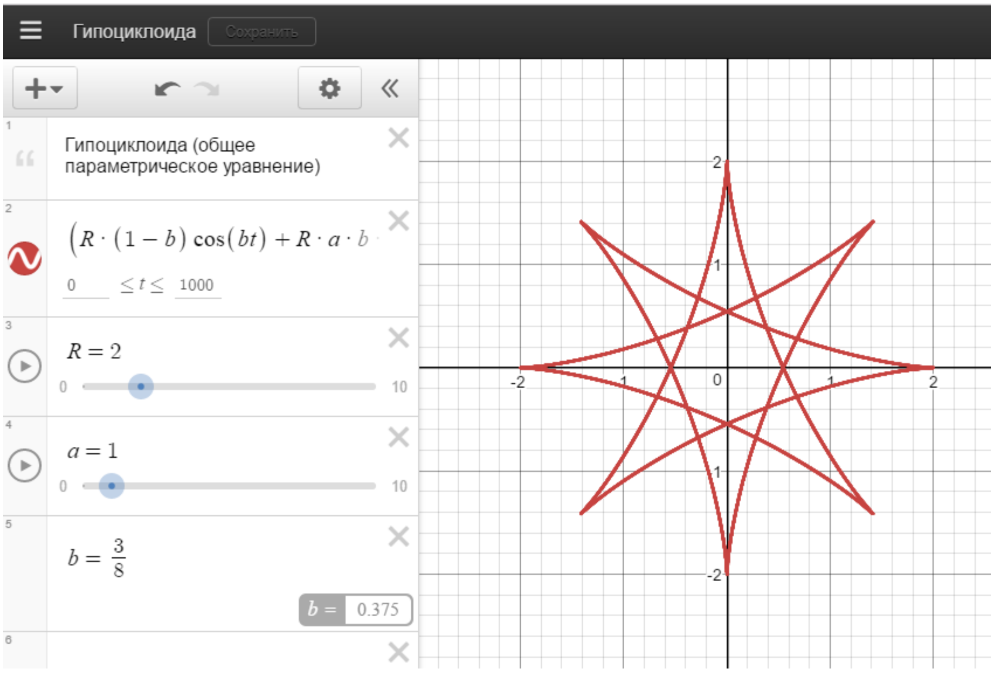


Рис.27. График гипоциклоиды при $b=\frac{3}{8}$.

3. Исследовать ***укороченную гипоциклоиду*** (в общем уравнении гипоциклоиды значение параметра $0<a<1$):

3.1. Зафиксировать значение параметра $b=\frac{1}{2}=0.5$. Определить название полученной кривой. Выписать полученные параметрические уравнения кривой. Включить полученный график в отчёт.

3.2. Выбрать несколько значений параметра $b=\frac{m}{n}$ - несократимая дробь, $m,n\in N$. Например - см. https://www.desmos.com/calculator/h9u6d1qc1n (Рис. 28).

Указание: рассмотреть графики при тех же значениях $b=\frac{m}{n}$, которые были выбраны в п.2.3. Посмотреть, как меняется вид кривой в зависимости от значения $b=\dfrac{m}{n}$. Включить характеризующие полученную зависимость графики в отчёт.

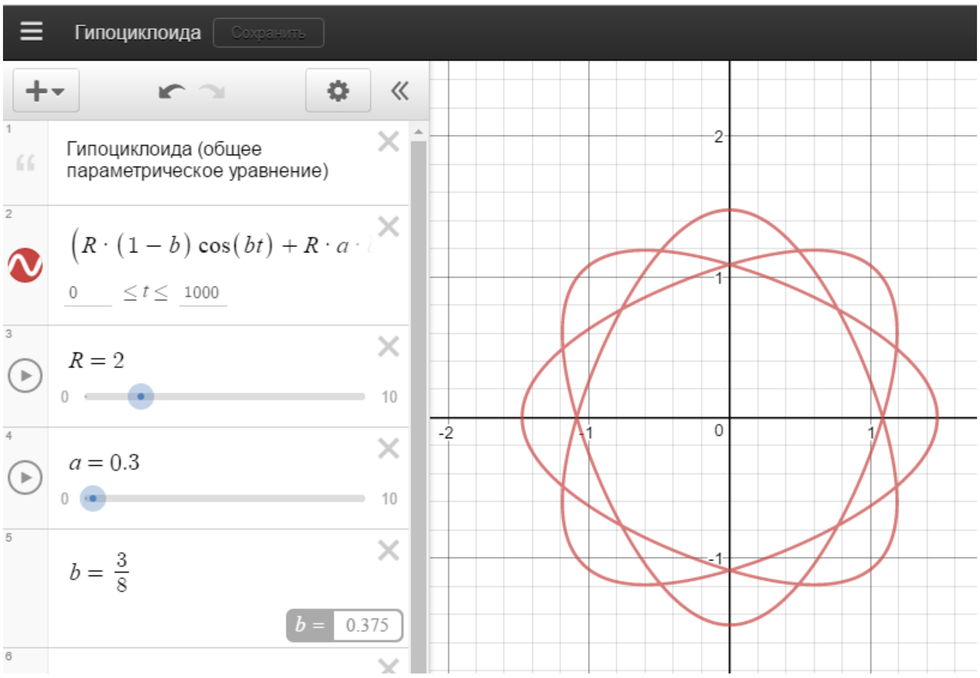


Рис.28. График укороченной гипоциклоиды при $b=\dfrac{3}{8}$.

3.3. Выбрать несколько произвольных положительных целых значений параметра b.

Указание: рассмотреть графики при тех же значениях b, которые были выбраны в п.2.4.
Включить полученные графики в отчёт.

3.4. Выбрать несколько произвольных положительных иррациональных значений параметра b.

Указание: рассмотреть графики при тех же значениях b, которые были выбраны в п.2.5.
Включить полученные графики в отчёт.

3.5. Для выбранного значения параметра $a: 0<a<1$ зафиксировать значение параметра $b: a=\dfrac{1}{b}-1$ и начертить график укороченной гипоциклоиды-см. https://www.desmos.com/calculator/0ugx8gtu7w.
Определить название полученной кривой. Выписать полученные параметрические уравнения кривой. Включить полученный график в отчёт.

4. Исследовать ***удлинённую гипоциклоиду*** (в общем уравнении гипоциклоиды значение параметра $a>1$):

4.1. Зафиксировать значение параметра $b = \frac{1}{2} = 0.5$. Определить название полученной кривой. Выписать полученные параметрические уравнения кривой. Включить полученный график в отчёт.

4.2. Выбрать несколько значений параметра $b = \frac{m}{n}$ - несократимая дробь, $m, n \in N$. Например - см. https://www.desmos.com/calculator/pbnvd3ql2x (Рис. 29).

Указание: рассмотреть графики при тех же значениях $b = \frac{m}{n}$, которые были выбраны в п.2.3. , п.3.2.

Посмотреть, как меняется вид кривой в зависимости от значения $b = \frac{m}{n}$. Включить характеризующие полученную зависимость графики в отчёт.

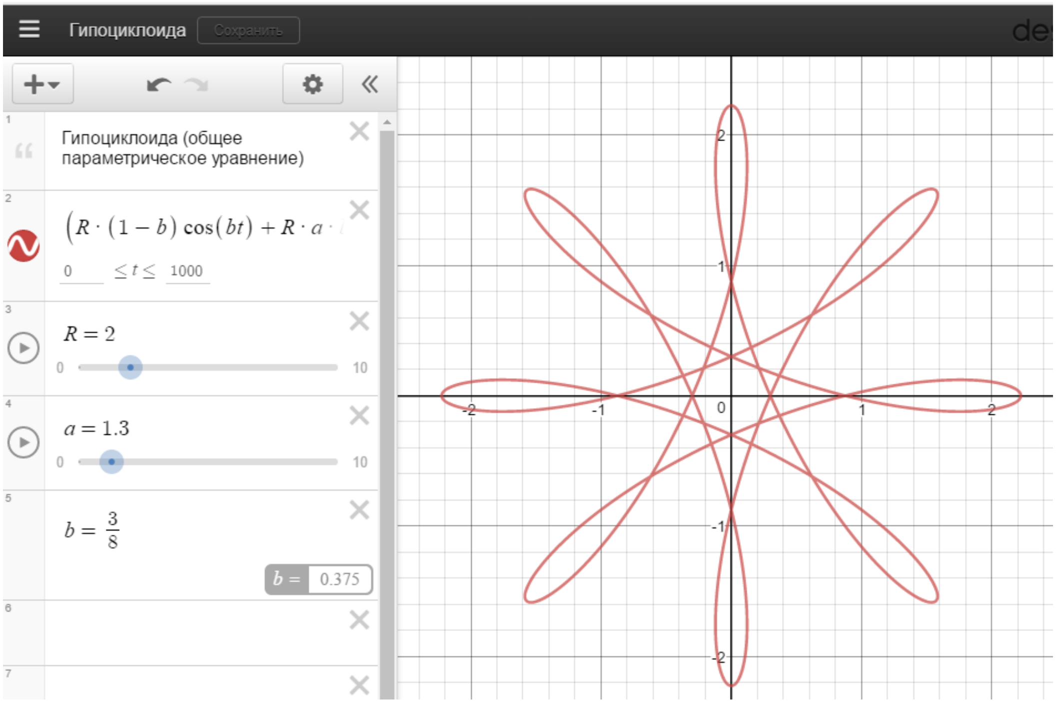


Рис.29. График удлинённой гипоциклоиды при $b = \frac{3}{8}$.

4.3. Выбрать несколько произвольных положительных целых значений параметра b.

Указание: рассмотреть графики при тех же значениях b, которые были выбраны в п.2.4., п.3.3.

Включить полученные графики в отчёт.

4.4. Выбрать несколько произвольных положительных иррациональных значений параметра b.

Указание: рассмотреть графики при тех же значениях b, которые были выбраны в п.2.5., п.3.4.

Включить полученные графики в отчёт.

4.5. Для выбранного значения параметра $a : a > 1$ зафиксировать значение параметра $b : a = \frac{1}{b} - 1$ и начертить график удлинённой гипоциклоиды. Определить название полученной кривой. Выписать полученные параметрические уравнения кривой. Включить полученный график в отчёт.

Итоговое задание к лабораторной работе №3: На основании проведённых исследований графиков астроиды и гипоциклоиды сделать:

1. Краткий вывод об особенностях графика астроиды.
2. Краткий вывод об особенностях графика циклоиды (обыкновенной, укороченной и удлинённой), об её наиболее часто встречающихся частных случаях.

Лабораторная работа №4. *Розы (полярные) или Кривые Гвидо Гранди. Эпициклоида*

1. *Розы (полярные) или Кривые Гвидо Гранди*

Своё название эти кривые получили из-за сходства своей формы с лепестками цветов, а также по имени итальянского монаха, философа, математика и инженера Гранди Луиджи Гвидо (1671-1742), который описал их в своей работе "Floris Geometrici" (1728).

Характеристическое свойство: розы описываются уравнением в полярной системе координат

$$r = a \sin k\theta, a, k > 0,$$

где при различных значениях параметра k будут получаться различные виды роз, умещающиеся в круге радиуса a.

Задание: (выполняется при некотором выбранном значении a $(a > 0)$:

1.Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/efdzwcc5dc (Рис.30) и изучите график полярных роз при различных значениях параметра k.

2.Постройте график розы при $k = 2$, $k = 3$, а также для ещё двух произвольных целых чётных и нечётных значений k. Сделать вывод о зависимости количества лепестков от значения параметра k.

3.Подробно построить график $r = \sin 3\theta$. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/rtznpoh4jw - (Рис.31) и, изменяя значение θ_1, посмотрите, как постепенно строится данная кривая. Аналитически определить область определения одного лепестка. Сформулируйте алгоритм построения всей кривой.

4.Подробно построить график $r = \sin 2\theta$. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/iygzt59tnf - (Рис.32) и, изменяя значение

θ_2, посмотрите, как постепенно строится данная кривая. Аналитически определить область определения одного лепестка. Сформулируйте алгоритм построения всей кривой.

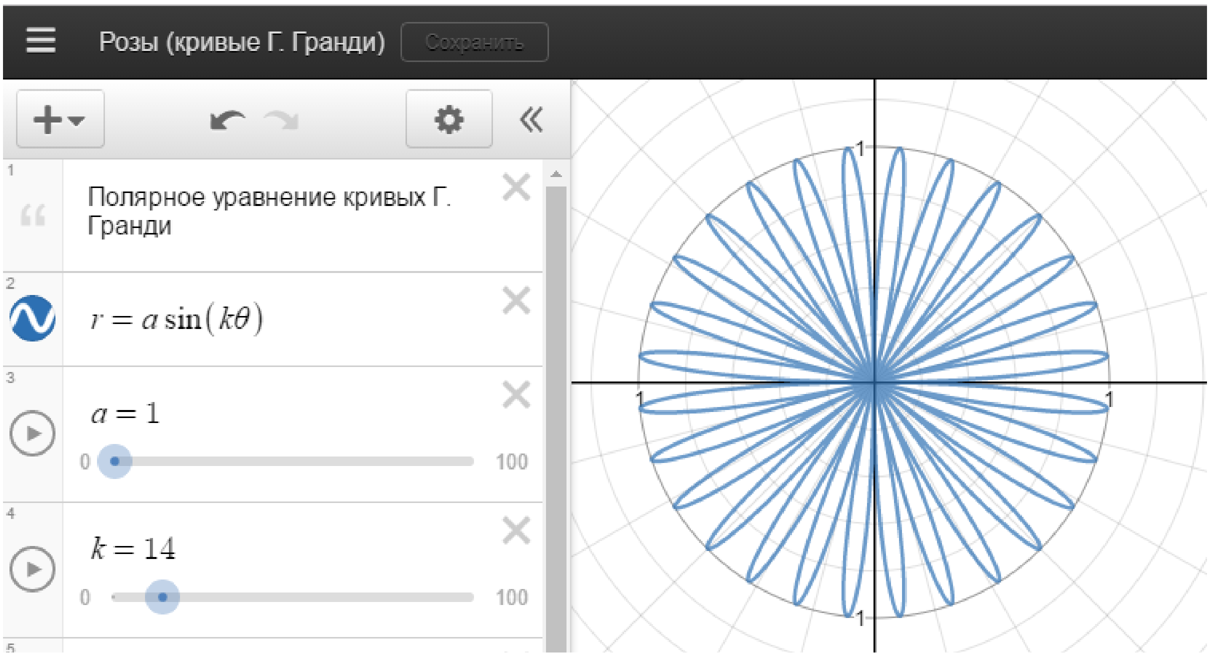


Рис. 30. График полярной розы при $k = 14$

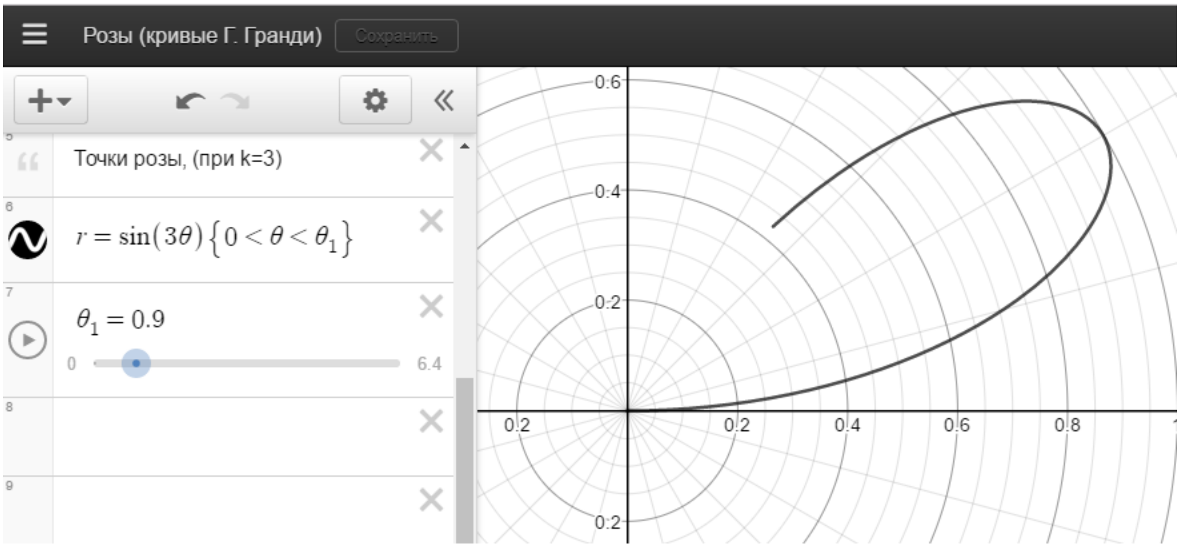


Рис.31. Часть графика розы, заданной уравнением $r = \sin 3\theta$

5. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/cck6lnv9ct (Рис.33) график розы при $k = \frac{m}{n}, n > 1$, рассмотрев отдельно случаи:

- взять произвольные нечётные значения m и n (так, чтобы k было больше и меньше 1) и построить соответствующие графики. Сделать вывод о зависимости вида и количества лепестков от значения параметра k. Включить в отчёт графики, характеризующие полученную зависимость.

- взять произвольные значения m и n (так, чтобы k было больше и меньше 1; одно из чисел m или n - чётное) и построить соответствующие графики. Сделать вывод о зависимости вида и количества лепестков от значения параметра k. Включить в отчёт графики, характеризующие полученную зависимость.

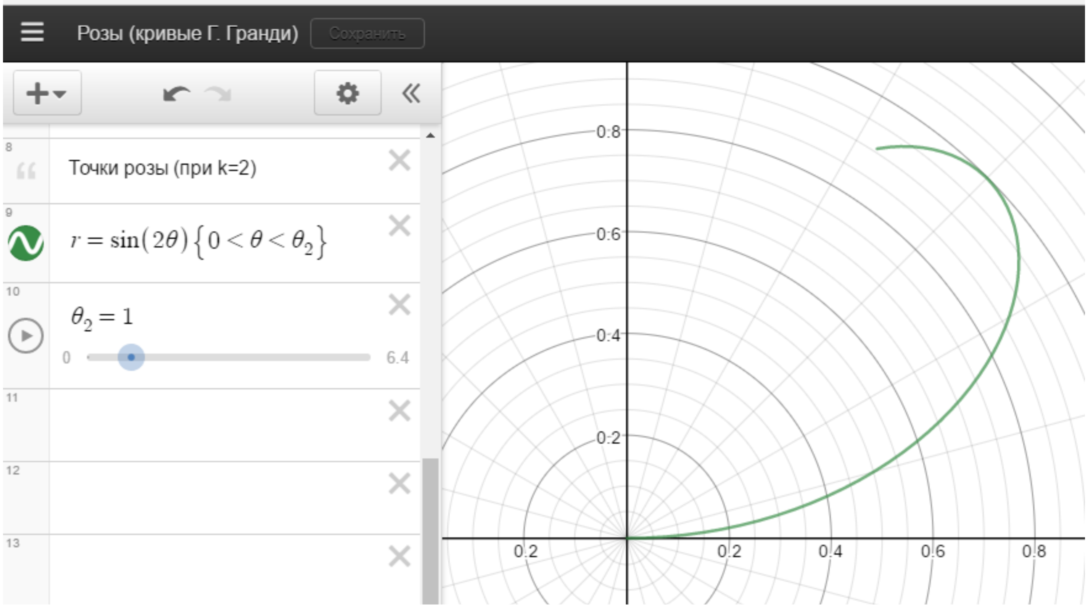
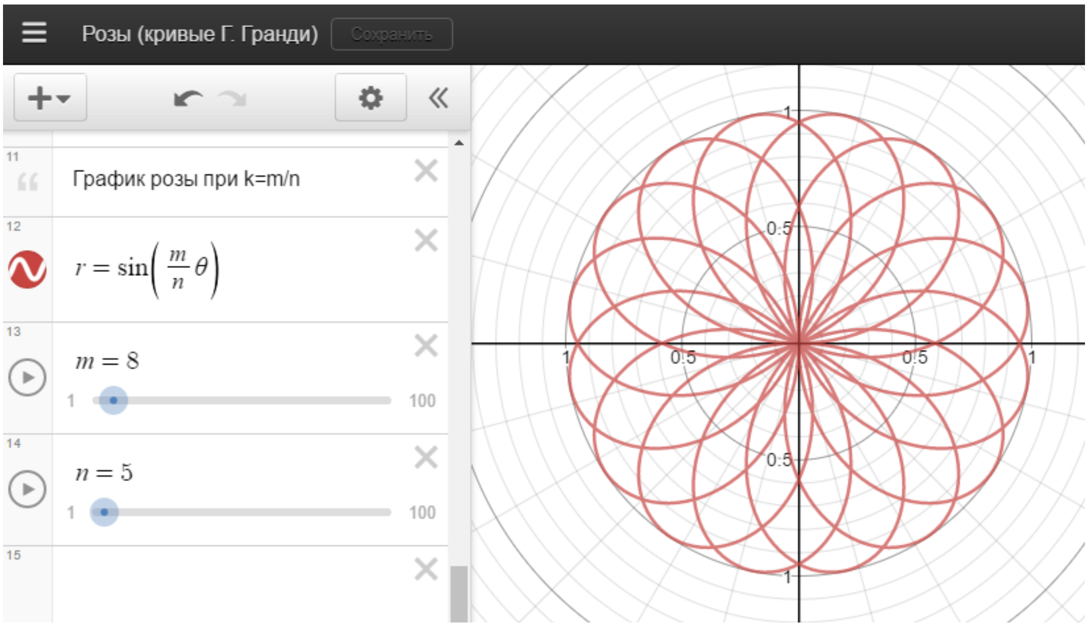


Рис. 32. Часть графика розы, заданной уравнением $r = \sin 2\theta$



- Рис.33. График розы, заданной уравнением $r = \sin\left(\frac{8}{5}\theta\right)$

6. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/vag6pb3ld4 (Рис.34) и посмотрите график розы при иррациональных значениях параметра k. Сделайте вывод о количестве лепестков розы при этих значениях. Включить в отчёт график при некотором иррациональном значении k.

7. Докажите аналитически (или графически) утверждение: "При $k>1$ - полярная роза является ***гипотрохоидой*** (см. лабораторную работу №3), при $k<1$ - ***эпитрохоидой*** (см. ч.2. Эпициклоида).

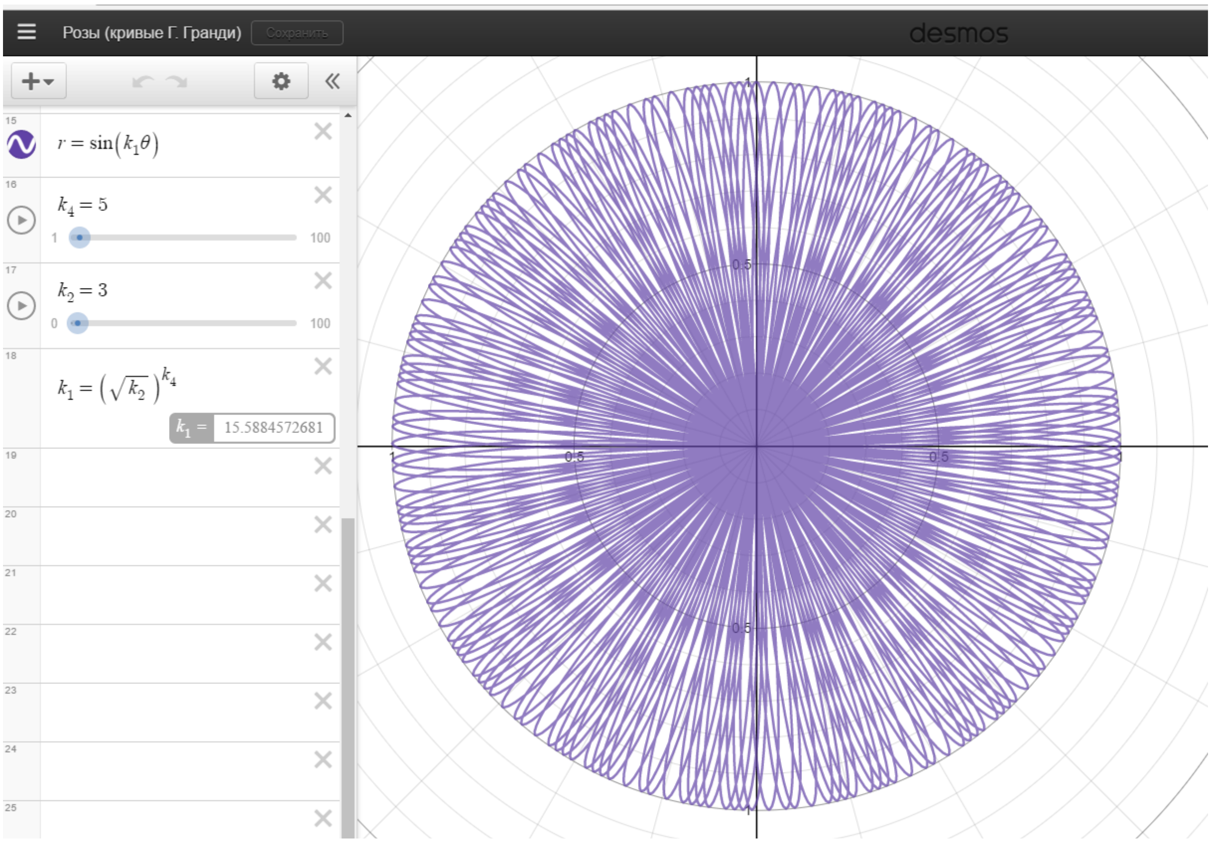


Рис.34. График розы, заданной уравнением $r=\sin\left(\sqrt{3}^5\theta\right)$

2. *Эпициклоида*

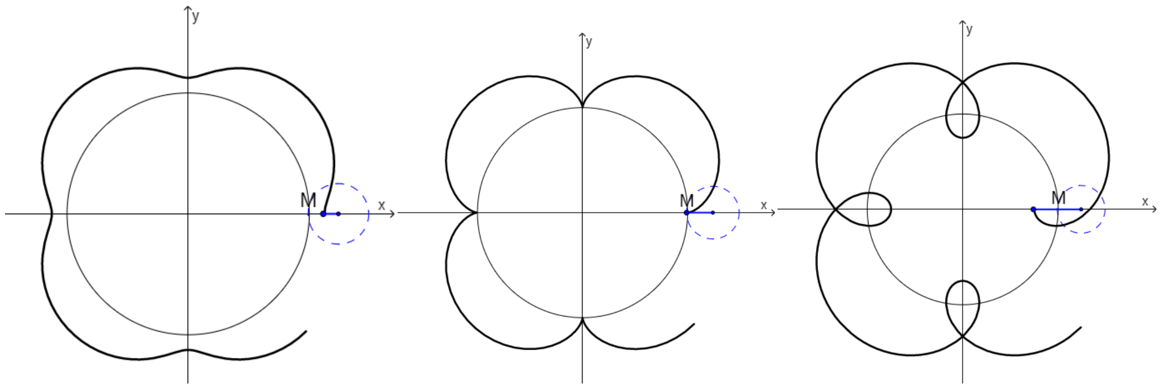
Название кривой происходит от греческих слов ἐπί - на, над и κύκλος - круг, окружность, т.е. эпициклоида - кривая "на, над окружностью".
Задаётся параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x=R\left[(1+b)\cos(bt)-ab\cdot\cos((1+b)t)\right] \\ y=R\left[(1+b)\sin(bt)-ab\cdot\sin((1+b)t)\right] \end{cases};\ a,b\in(0;+\infty)$$

При этом при различных значениях параметра a получаем различные виды эпициклоид. При $a=1$ - это просто ***эпициклоида***, при $0<a<1$ - ***укороченная эпициклоида,*** при $a>1$ - ***удлинённая эпициклоида.*** Различия в получаемых кривых связаны с их характеристическим свойством.

Замечание: Укороченную и удлинённую эпициклоиды называют ***эпитрохоидами.*** При определённых значениях параметров a и b эпициклоиды вырождаются в известные кривые.

Характеристическое свойство эпициклоид: эпициклоида есть траектория точки M, лежащей на расстоянии $l=abR$ от центра производящей окружности радиуса $r = bR$, которая катится (без скольжения) по внешней стороне неподвижной окружности радиуса R. От значения параметра $l = abR$ зависит вид эпициклоиды - см. Рис. 35. В частности, при $a = 1$ (Рис. 35 б)) точка M лежит на производящей окружности.



а) б) в)

Рис.35. Укороченная эпициклоида (а), эпициклоида (б), удлинённая эпициклоида (в).

Задание (выполняется при некотором выбранном значении R ($R > 0$)):

1. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/rqvrjk1y5m (Рис.36) и изучите график эпициклоиды, изменяя параметры a, b в уравнениях:

$$\begin{cases} x = R[(1+b)\cos(bt) - ab\cdot\cos((1+b)t)] \\ y = R[(1+b)\sin(bt) - ab\cdot\sin((1+b)t)] \end{cases}; a, b \in (0;+\infty)$$

2. Исследовать ***эпициклоиду*** (в общем уравнении эпициклоиды значение параметра $a = 1$):

2.1. Зафиксировать значение параметра $b = 1$. Определить название полученной кривой. Включить полученный график в отчёт.

2.2. Выбрать несколько значений параметра $b = \frac{m}{n}$ - несократимая дробь, $m, n \in N$. Например - см. https://www.desmos.com/calculator/jkzjomv66r (Рис.37). Посмотреть, как меняется вид кривой в зависимости от значения $b = \frac{m}{n}$.

Указание. Рассмотреть $b = \frac{m}{n}$: m четные (нечётные), n- нечётные (чётные): $b > 1$ и $b < 1$). Включить характеризующие полученную зависимость графики в отчёт.

2.4. Выбрать несколько произвольных положительных целых значений параметра b. Включить полученные графики в отчёт.

2.5. Выбрать несколько произвольных положительных иррациональных значений параметра b. Включить полученные графики в отчёт.

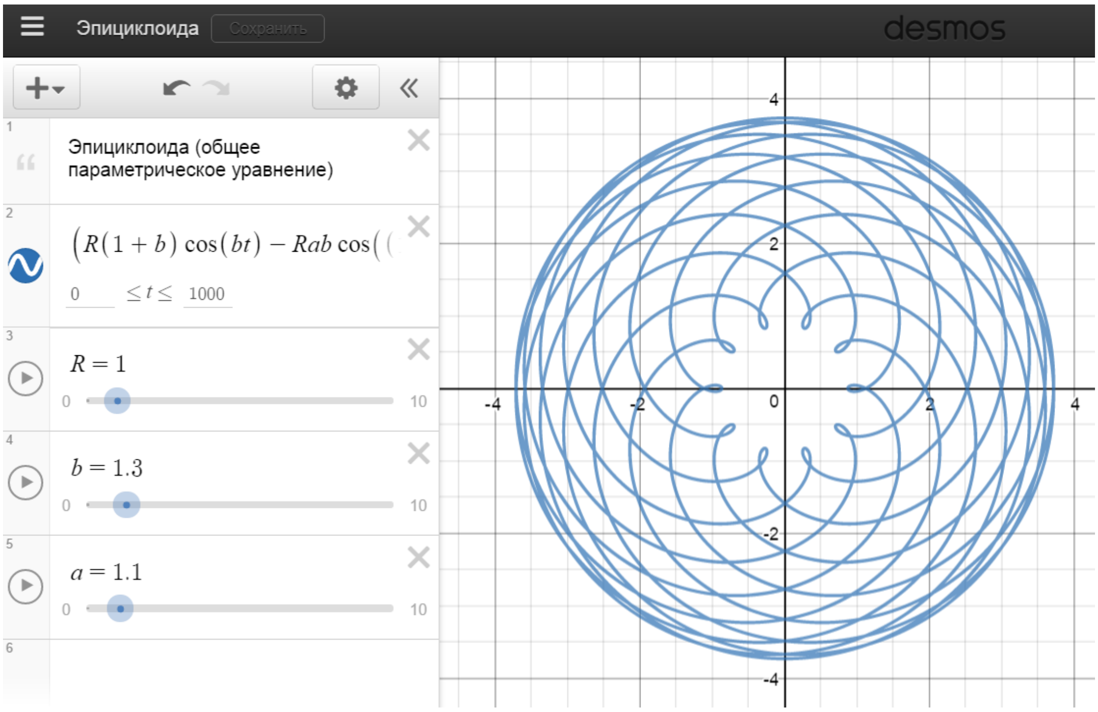


Рис.36. График эпициклоиды (при произвольно выбранных значениях параметров a, b).

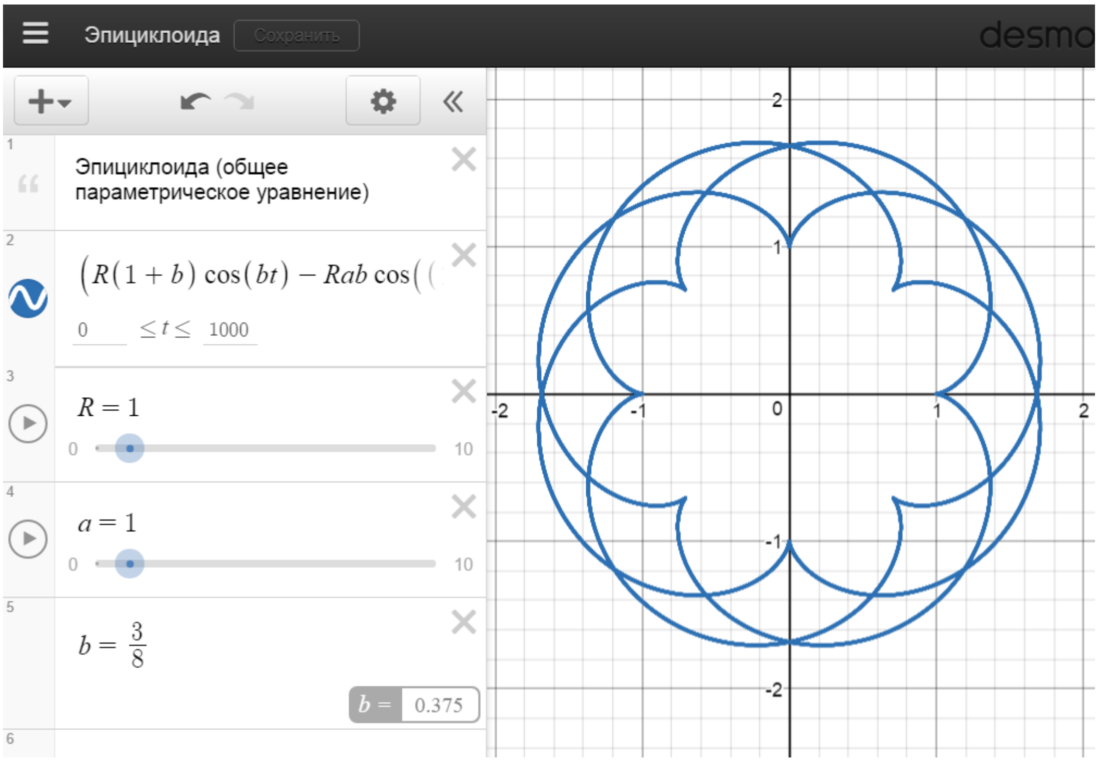


Рис.37. График эпициклоиды при $b = \dfrac{3}{8}$.

3. Исследовать ***укороченную эпициклоиду*** (в общем уравнении эпициклоиды значение параметра $0 < a < 1$):

3.1. Выбрать несколько значений параметра $b=\frac{m}{n}$ - несократимая дробь, $m,n\in N$. Например - см.https://www.desmos.com/calculator/ijfvctagk3 (Рис. 38).

Указание: рассмотреть графики при тех же значениях $b=\frac{m}{n}$, которые были выбраны в п.2.3. Посмотреть, как меняется вид кривой в зависимости от значения $b=\frac{m}{n}$. Включить характеризующие полученную зависимость графики в отчёт.

3.2. Выбрать несколько произвольных положительных целых значений параметра b .

Указание: рассмотреть графики при тех же значениях b, которые были выбраны в п.2.4. Включить полученные графики в отчёт.

3.3. Выбрать несколько произвольных положительных иррациональных значений параметра b .

Указание: рассмотреть графики при тех же значениях b, которые были выбраны в п.2.5.
Включить полученные графики в отчёт.

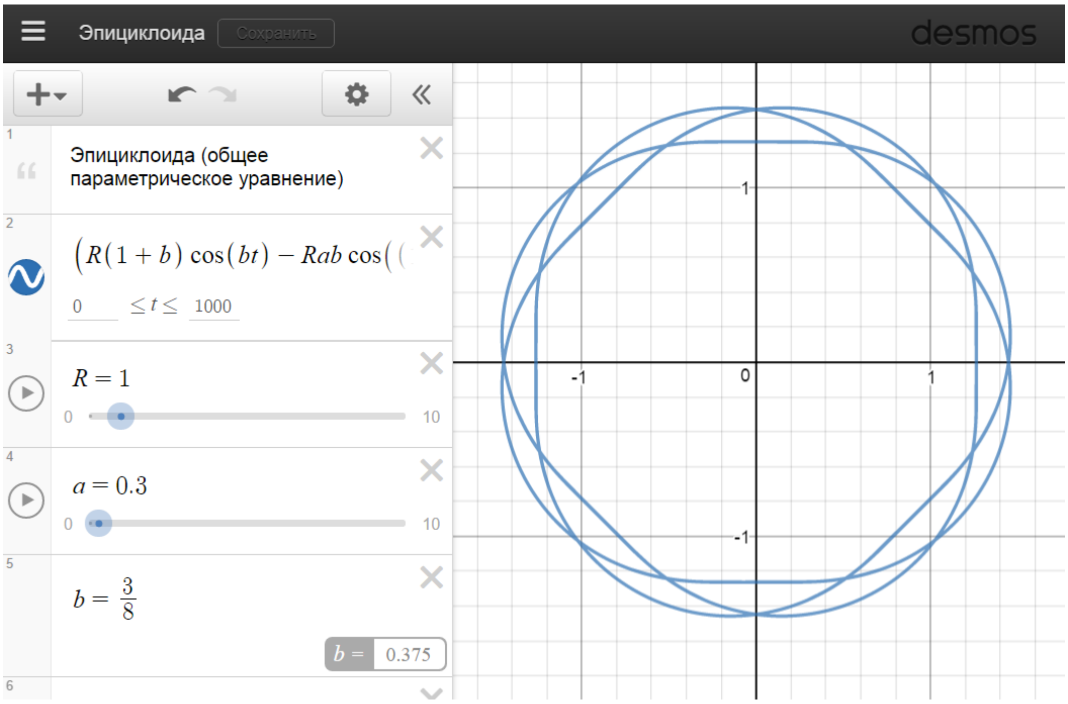


Рис.38. График укороченной эпициклоиды при $b=\frac{3}{8}$.

4. Исследовать ***удлинённую эпициклоиду*** (в общем уравнении эпициклоиды значение параметра $a>1$):

4.1. Зафиксировать значение параметра $b=1$. Определить название полученной кривой. Выписать полученные параметрические уравнения кривой. Включить полученный график в отчёт.
4.2. Для выбранного значения параметра $a: a>1$ зафиксировать значение параметра b: $Rab=1+b$ и начертить график удлинённой эпициклоиды, определить название полученной кривой. Включить полученный график в отчёт.

4.3. Выбрать несколько значений параметра $b=\frac{m}{n}$ - несократимая дробь, $m, n \in N$. Например - см. https://www.desmos.com/calculator/orez4mwrhv (Рис. 39).

Указание: рассмотреть графики при тех же значениях $b=\frac{m}{n}$, которые были выбраны в п.2.3., п.3.2.Посмотреть, как меняется вид кривой в зависимости от значения $b=\frac{m}{n}$. Включить характеризующие полученную зависимость графики в отчёт.

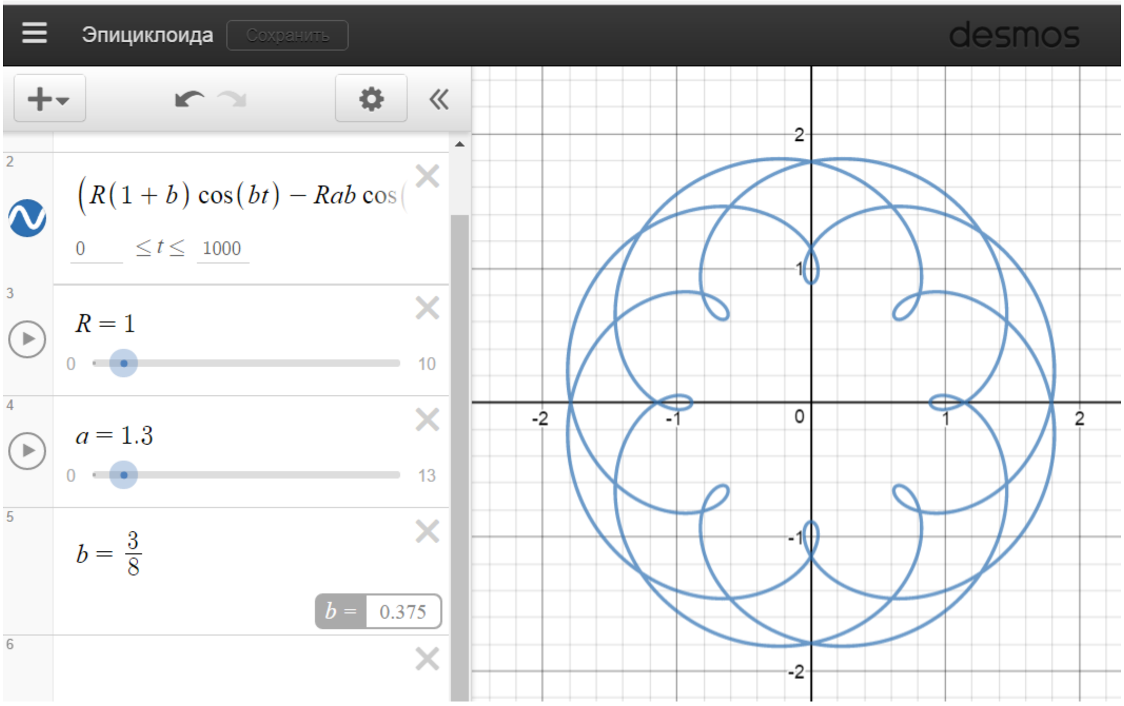


Рис.39. График удлинённой эпициклоиды при $b=\frac{3}{8}$.

4.3. Выбрать несколько произвольных положительных целых значений параметра b.
Указание: рассмотреть графики при тех же значениях b, которые были выбраны в п.2.4., п.3.3.
Включить полученные графики в отчёт.
4.4. Выбрать несколько произвольных положительных иррациональных значений параметра b.

Указание: рассмотреть графики при тех же значениях b, которые были выбраны в п.2.5., п.3.4.
Включить полученные графики в отчёт.

Итоговое задание к лабораторной работе №4: На основании проведённых исследований графиков полярных роз и эпициклоиды сделать:

1. Краткий вывод об особенностях графиков полярных роз.
2. Краткий вывод об особенностях графика эпициклоиды (обыкновенной, укороченной и удлинённой), об её наиболее часто встречающихся частных случаях.

Лабораторная работа №5. *Циклоида*

Название кривой дал Галилео Галилей (1564-1642) и оно означало "напоминающая о круге"(от греч. κυκλοειδής — круглый). Немного позже этой кривой занялись французы (Б. Паскаль, М.Мерсен), которые называли её "руллетой" или "трохоидой" (от греч. τροχοειδής - колёсообразный). Циклоида обладает рядом замечательных свойств (например, она является кривой скорейшего спуска (брахистохроной)). Другие интересные свойства этой кривой можно найти здесь http://www.etudes.ru/ru/etudes/cycloid/.

Циклоида параметрическими уравнениями:

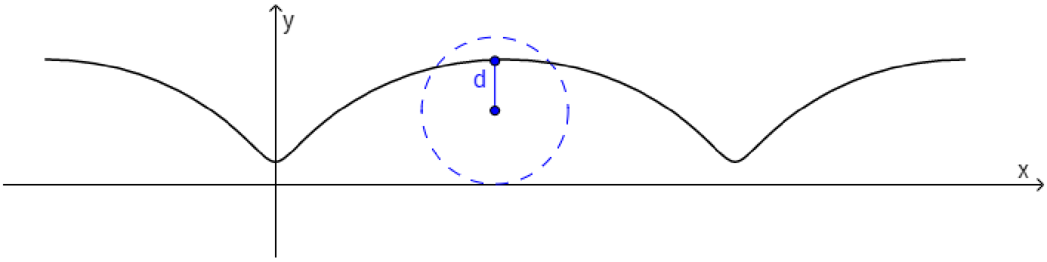
$$\begin{cases} x = R(t - a\sin t) \\ y = R(1 - a\cos t) \end{cases}; a \in (0;+\infty), t \in (-\infty;+\infty)$$

При этом при различных значениях параметра a получаем различные виды циклоид. При $a = 1$ - это просто ***циклоида***, при $0 < a < 1$ - ***укороченная циклоида,*** при $a > 1$ - ***удлинённая циклоида.*** Различия в получаемых кривых связаны с их характеристическим свойством.

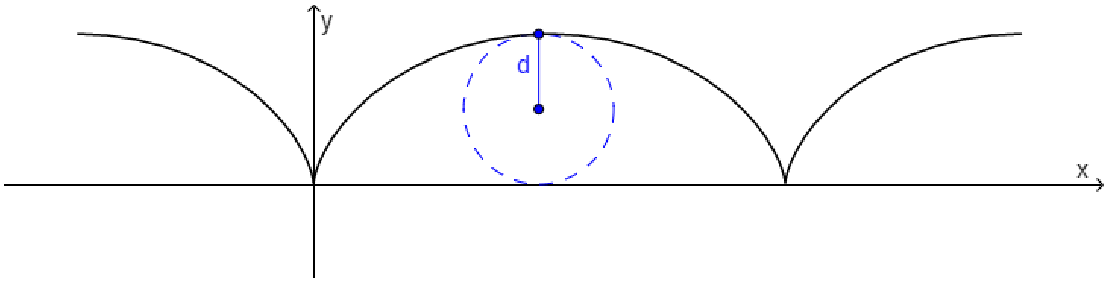
Замечание: 1.Укороченную и удлинённую циклоиды называют ***трохоидами*** (т.к. вычерчивающая такие кривые точка не лежит на окружности (как в случае с обычной циклоидой), а лежит как бы на спице колеса, по греч. τροχοειδής - колёсообразный).
2. Если прямую (по которой катится производящая окружность) заменить неподвижной окружностью радиуса R, то вычерчивающая точка опишет кривую, называемую "циклоидальной". Если производящая окружность катится по внутренней стороне неподвижной окружности, то получаем ***гипоциклоиду*** (от греч "гипо" - под, см. Лабораторную работу №3), если по внешней - ***эпициклоиду*** (от греч. "эпи" - над чем-либо, см Лабораторную работу №4.).

Характеристическое свойство циклоид: циклоида есть траектория точки, лежащей на расстоянии $d = aR$ от центра производящей окружности радиуса R, которая без скольжения катится по прямой. При различных значениях параметра a мы получаем различные виды циклоид - см. Рис.40.

а)



б)



в)

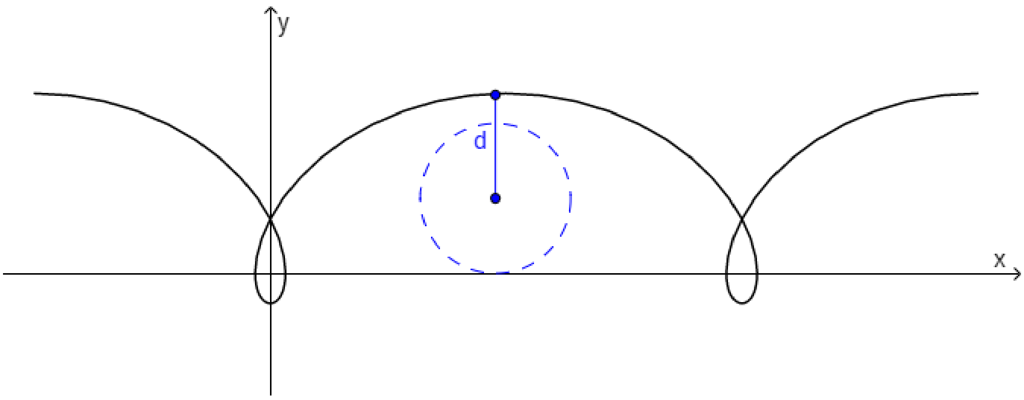


Рис.40. Укороченная циклоида (а), циклоида (б), удлинённая циклоида (в).

Задание (выполняется при некотором выбранном значении R ($R > 0$)):

1. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/wiatgmemyo (Рис. 41) и изучите график циклоиды, изменяя параметр a в уравнениях:

$$\begin{cases} x = R(t - a\sin t) \\ y = R(1 - a\cos t) \end{cases}; a \in (0;+\infty), t \in (-\infty;+\infty)$$

2. Зафиксировать три значения параметра a ($a = 1$, $0 < a < 1$, $a > 1$) и для каждого из них:

   2.1. Проведите поэтапное построение графика циклоиды, разбив часть области определения кривой $(t \in R)$ на несколько отрезков, например: пусть $t \in [-\pi, 7\pi]$, тогда на 1-ом этапе строим кривую при $t \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, на 2-м - при $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, на 3-ем - при $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, на 4-м - при $t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 7\pi\right]$.

Все получаемые отрезки кривой строить различными цветами. Включить полученные графики в отчёт.

2.2. Построить одну арку циклоиды.

Итоговое задание к лабораторной работе №5. На основании выполненной лабораторной работы сделать вывод об особенностях графика циклоиды, выработать алгоритм её построения на бумаге.

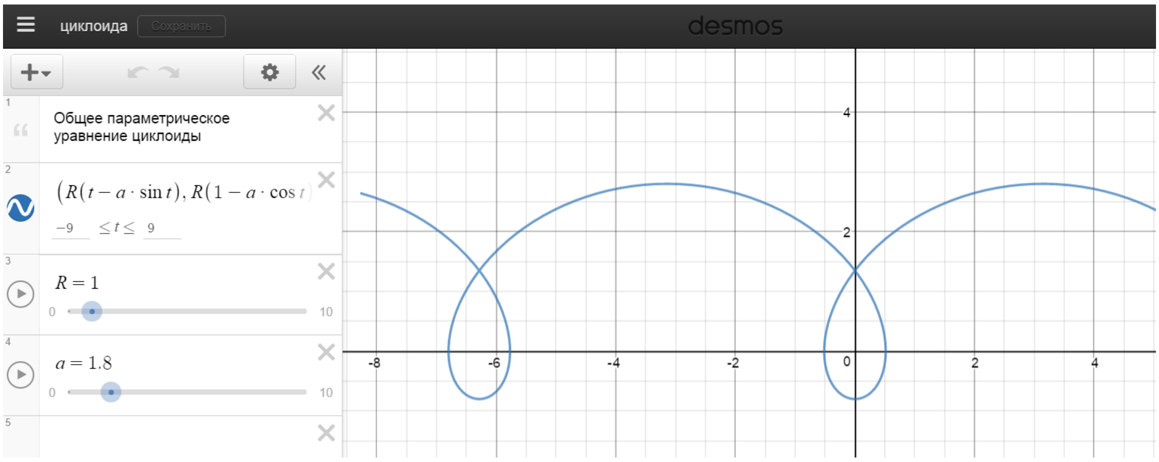


Рис.41. График циклоиды (при при произвольно выбранных значениях параметров R, a).

Лабораторная работа №6. *Эвольвента окружности*

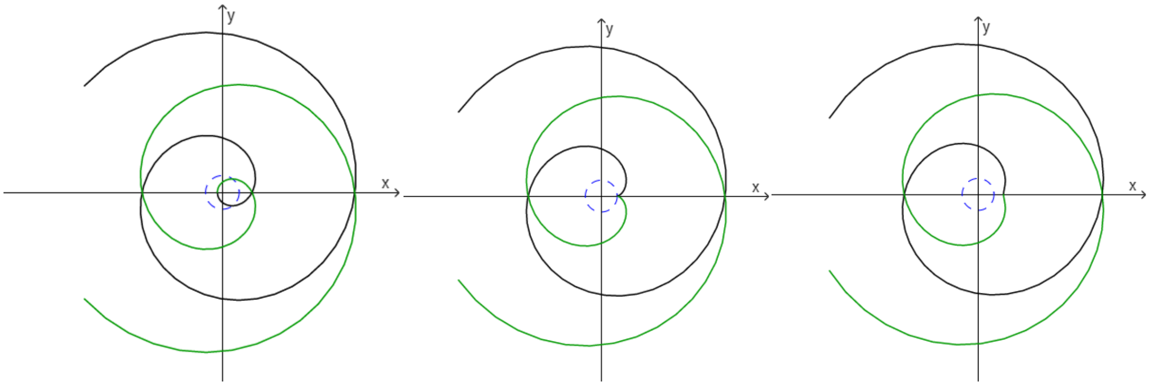
Название "эвольвента" происходит от лат. evolvens - разворачивающийся и связано со способом построения эвольвенты: чтобы построить эвольвенту какой-либо кривой, нужно изготовить шаблон заданной кривой, закрепить в некоторой его точке конец нерастяжимой нити и обмотать его вокруг шаблона кривой. На другом конце нити закрепить чертящее устройство (например, карандаш). Если начать развёртывать нить, оставляя её всё время в натянутом состоянии, то карандаш начертит эвольвенту. Например, эвольвенту окружности можно построить, намотав (или размотав) нить на катушку радиуса R.

Эвольвента (обобщённая) окружности задаётся параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = (R+h)\cos t + Rt\sin t \\ y = (R+h)\sin t - Rt\cos t \end{cases}; R>0; h,t \in (-\infty;+\infty)$$

При различных значениях параметра h получают различные виды эвольвент окружности: $h=0$ - ***эвольвента окружности***, $h>0$ - ***удлинённая эвольвента окружности***, $h<0$ - ***укороченная эвольвента окружности***. Различия в получаемых кривых связаны с их характеристическим свойством.

Характеристическое свойство эвольвенты: эвольвента есть траектория точки M, лежащей на прямой, которая без скольжения катится по неподвижной окружности радиуса R; укороченная и удлинённая эвольвенты есть траектории точки M, лежащей не на производящей прямой, а на расстоянии h от неё - см. Рис. 42. Эвольвента имеет две ветви: положительная ветвь ($t > 0$) получается при перекатывании производящей прямой против хода часовой стрелки (линия чёрного цвета, Рис.42.) и отрицательная ветвь ($t < 0$) - при перекатывании по ходу часовой стрелки (линия синего цвета, Рис.42)



а) б) в)

Рис. 42. Укороченная эвольвента (а), эвольвента (б), удлинённая эвольвента (в) окружности радиуса R.

Также можно дать математическое определение: эвольвента - это кривая, геометрическим местом центров кривизны которой является другая кривая - ***эволюта.*** Касательные к эволюте являются нормалями к эвольвенте. Эвольвента может быть построена "обкатыванием" по эволюте без скольжения прямой, касательной к эволюте.

Задание (выполняется при некотором выбранном значении R ($R > 0$)):

1. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/asv0lhs7j7 (Рис. 43) и изучите график эвольвенты, изменяя параметр h в уравнениях:

$$\begin{cases} x = (R+h)\cos t + Rt\sin t \\ y = (R+h)\sin t - Rt\cos t \end{cases}; R > 0; h, t \in (-\infty; +\infty)$$

2. Зафиксировать значение параметра $h = 0$ и нарисовать график эвольвенты окружности. На графике отметить производящую окружность. Включить полученный график в отчёт.

3. Зафиксировать значение параметра $h < 0$ и нарисовать график укороченной эвольвенты окружности. На графике отметить производящую окружность. Нарисовать три графика укороченной эвольвенты при $R = |-h|, R > |-h|$, $R < |-h|$. Включить полученные графики в отчёт. Сделать вывод о зависимости графика укороченной эвольвенты окружности от выбранных значений параметров R и h.

4. Зафиксировать значение параметра $h>0$ и нарисовать график удлинённой эвольвенты окружности. На графике отметить производящую окружность. Нарисовать три графика удлинённой эвольвенты окружности при $R=h, R>h$, $R<h$. Включить полученные графики в отчёт. Сделать вывод о зависимости графика удлинённой эвольвенты окружности от выбранных значений параметров R и h.

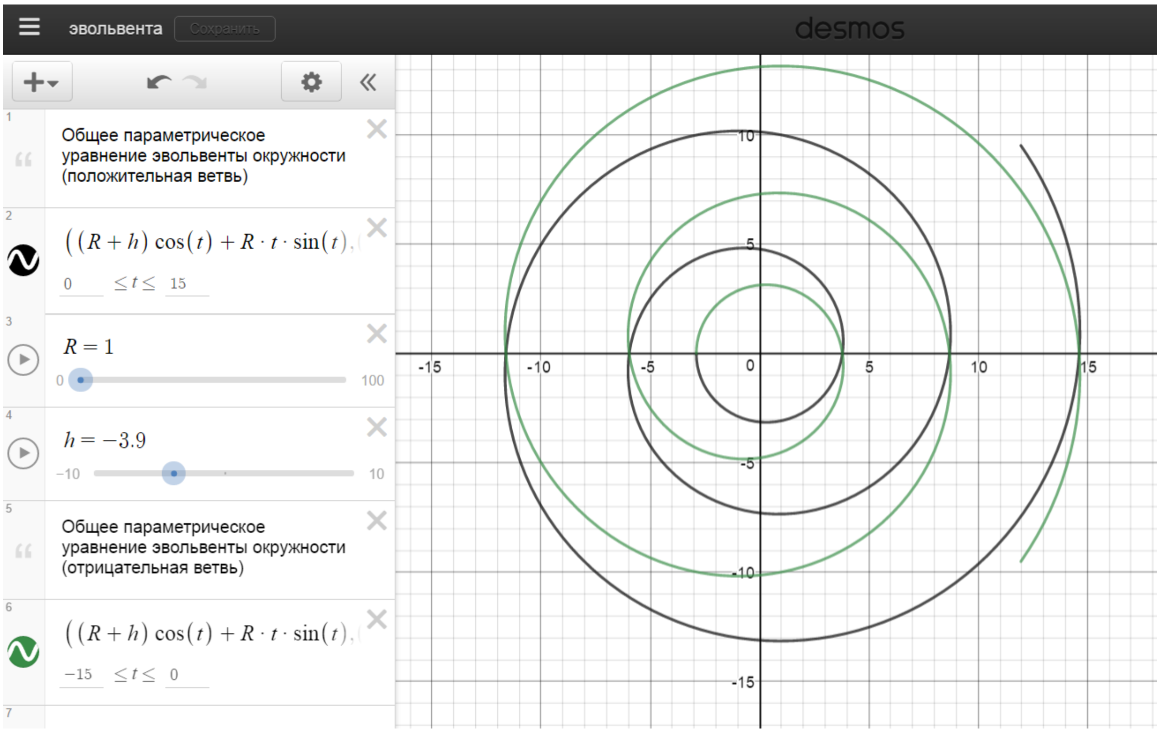


Рис.43. График эвольвенты окружности (при при произвольно выбранных значениях параметров *R, h*).

Итоговое задание к лабораторной работе №6.

На основании выполненной лабораторной работы сделать вывод об особенностях графика обобщённой эвольвенты окружности, выработать алгоритм её построения на бумаге.

Лабораторная работа №7. *Спирали: логарифмическая, гиперболическая, Архимеда*

7.1. Спираль Архимеда

Своё название эта спираль получила в честь древнегреческого физика, математика и философа Архимеда (287 - 212 гг. до н.э). По одной из версий, его привлекла форма спирально завитой раковины, при изучении которой Архимед и вывел уравнение кривой. По другой версии, он проводил опыты с компасом и его стрелкой. Полученную спираль Архимед описывал кинематически, как траекторию равномерного движения точки по равномерно вращающемуся вокруг своего начала лучу.

Спираль Архимеда задаётся в полярных координатах уравнением

$$r = a\varphi, a > 0.$$

Характеристическое свойство: Спираль Архимеда есть траектория точки M, равномерно движущейся по лучу OA в направлении от т. O к т. A. Сам луч OA при этом равномерно вращается вокруг т. O по часовой или против часовой стрелки (см. Рис.44). Поэтому спираль Архимеда состоит из двух ветвей, симметричных относительно оси Oy - одна ветвь получается при $\varphi > 0$, вторая - при $\varphi < 0$ (см. Рис. 45., кривая чёрного и синего цвета соответственно). Расстояние между двумя соседними точками, лежащими на одном полярном луче, постоянно и равно $2\pi a$ ($AM = 2\pi a$).

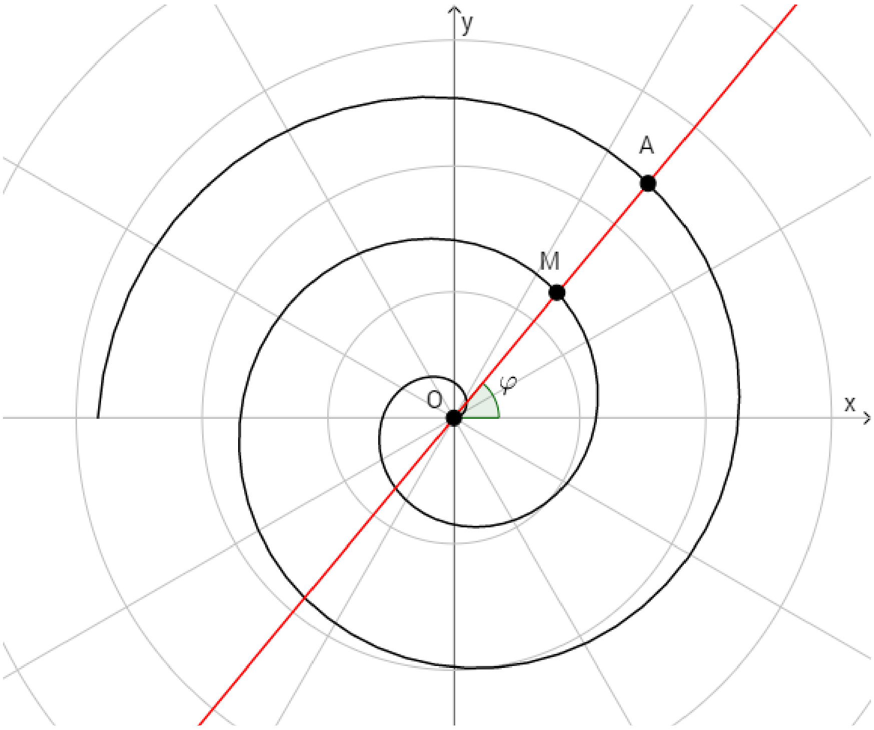


Рис.44. Спираль Архимеда (положительная ветвь)

Задание (выполняется при некотором выбранном значении a ($a > 0$)):

1.Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/qkketvoanb (Рис. 46) и изучите график спирали Архимеда (положительной ветви[2]) , изменяя параметр a в уравнении

$$r = a\varphi, a > 0.$$

2.Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/bl6xjpnfhg (Рис.47) и изучите построение спирали Архимеда по точкам.

3.Составьте некоторое множество точек спирали Архимеда (отличное, от приведённого в примере), по которому можно составить алгоритм построения данной кривой на бумаге. Сформулируйте этот алгоритм.

[2] На данный момент графический редактор DESMOS строит графики кривых, заданных полярными координатами, только при изменении угла φ в положительном направлении (против часовой стрелки).

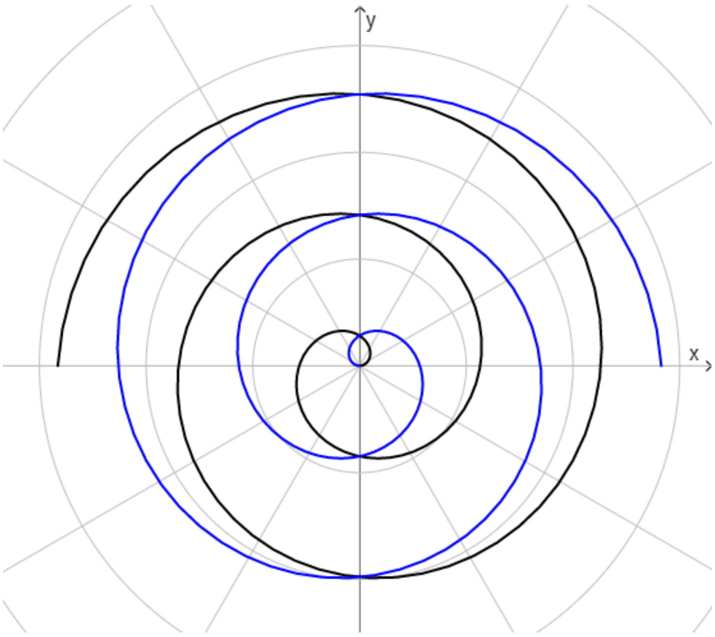


Рис.45. Спираль Архимеда (положительная и отрицательная ветви)

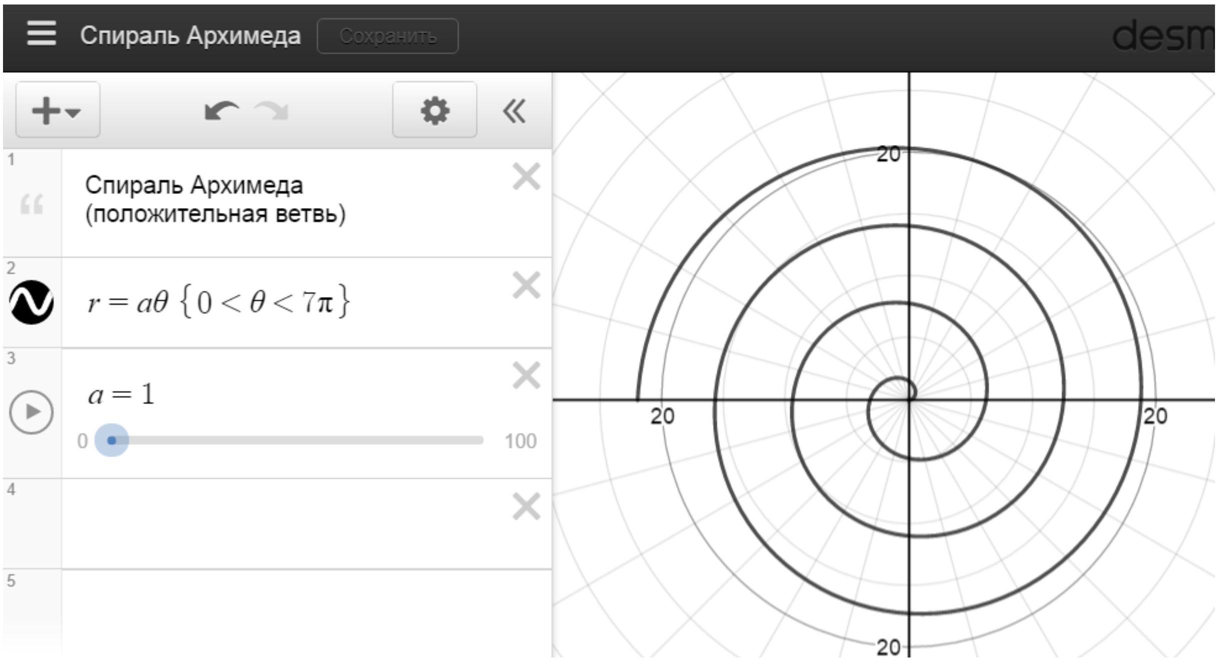


Рис. 46. График спирали Архимеда (положительной ветви) при значении параметра $a = 1$

7.2. Логарифмическая спираль

Название кривая получила из-за своего уравнения $r = a^{\varphi}$, которое можно записать в виде $\log_a r = \varphi$. С древних пор мореплаватели искали кратчайший путь между портами. Они знали, что на поверхности Земли таким расстоянием является дуга окружности. Но, чтобы двигаться по такой кривой, необходимо непрерывно менять направление движения. Поэтому такой кратчайший путь заменяли таким, при котором угол, под которым корабль пересекает все меридианы, был постоянным. Траектории, обладающие таким свойством, называются ***локсодромами.*** Проекция локсодромы на плоскости - логарифмическая спираль (см. Рис.48). Впервые эта кривая была описана Р.Декартом (1596 -1650) - он искал кривую, касательная к которой в каждой точке образовывала постоянный угол со своим радиусом-вектором и доказал, что это свойство равносильно тому, что полярные углы для точек пропорциональны логарифмам радиус-векторов. Поэтому логарифмическую спираль называют ещё ***равноугольной.***

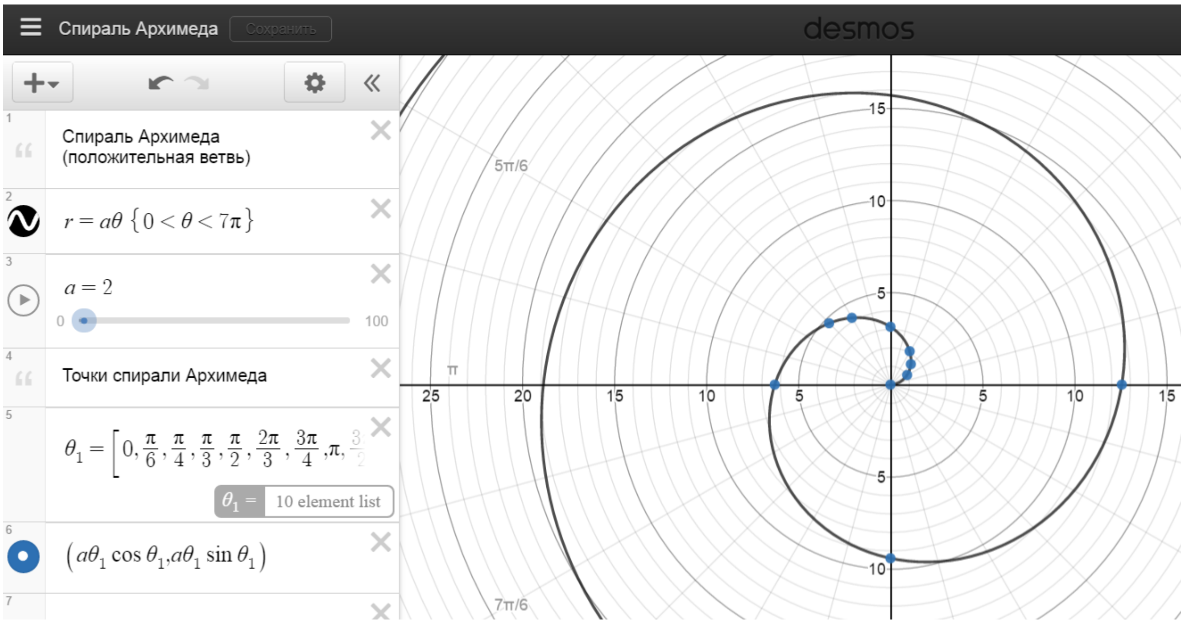


Рис.47. Построение спирали Архимеда по точкам.

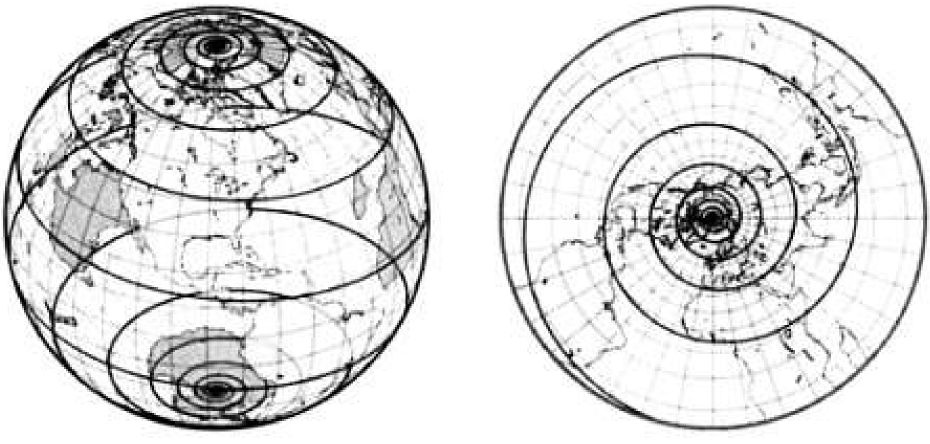


Рис. 48. График локсодромы на поверхности Земли и её проекция на плоскость.

Особое внимание этой спирали уделил швейцарский математик Я. Бернулли (1655-1705) – он назвал её **spira mirabilis** («дивная спираль») и открыл её свойство оставаться неизменной при различных преобразованиях. Это свойство настолько его поразило, что на своей могильной плите он приказал нарисовать spira mirabilis с надписью **Eadem mutata resurgo - «Изменённая, воскресаю прежней»** - см. Рис.49.

В природе также можно найти много примеров роста органического вещества по логарифмической спирали – раковины, расположение семян подсолнечника, листья растений, спирали циклонов и галактик и многое др.:

- раковины моллюсков:

- семена в подсолнухе (одни ряды закручены в положительном направлении, другие - в отрицательном):

- сосновые шишки:

- колючки кактусов:

- галактика:

Рис.49. Надгробие на могиле Я. Бернулли

Логарифмическая спираль задаётся в полярных координатах уравнением

$$r = a^{\varphi}, a > 0.$$

Характеристическое свойство: логарифмическая спираль - это кривая, пересекающая все лучи, выходящие из полюса т.О под некоторым постоянным углом α - см. Рис.50. Радиус-векторы последовательных точек спирали, находящихся на одном и том же полярном луче φ, образуют геометрическую прогрессию.

Задание (выполняется при некотором выбранном значении $a\,(a > 0)$):

1. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/wdb4t8irny (Рис. 51) и изучите график логарифмической спирали (положительной ветви[3]) , изменяя параметр a в уравнении

$$r = a^{\varphi}, a > 0.$$

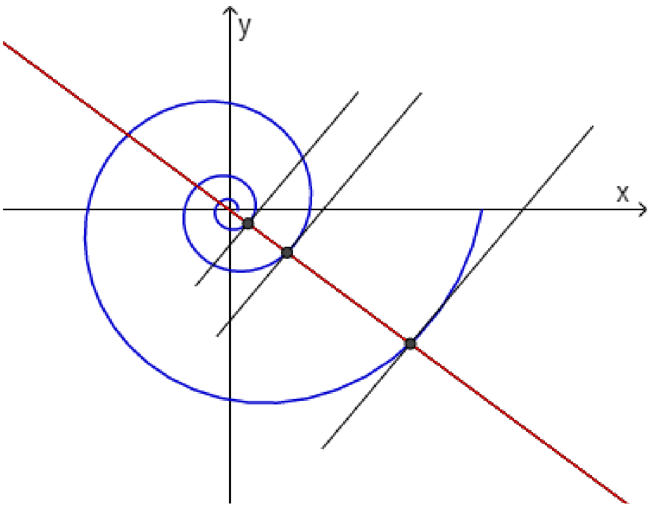


Рис. 50. Логарифмическая спираль.

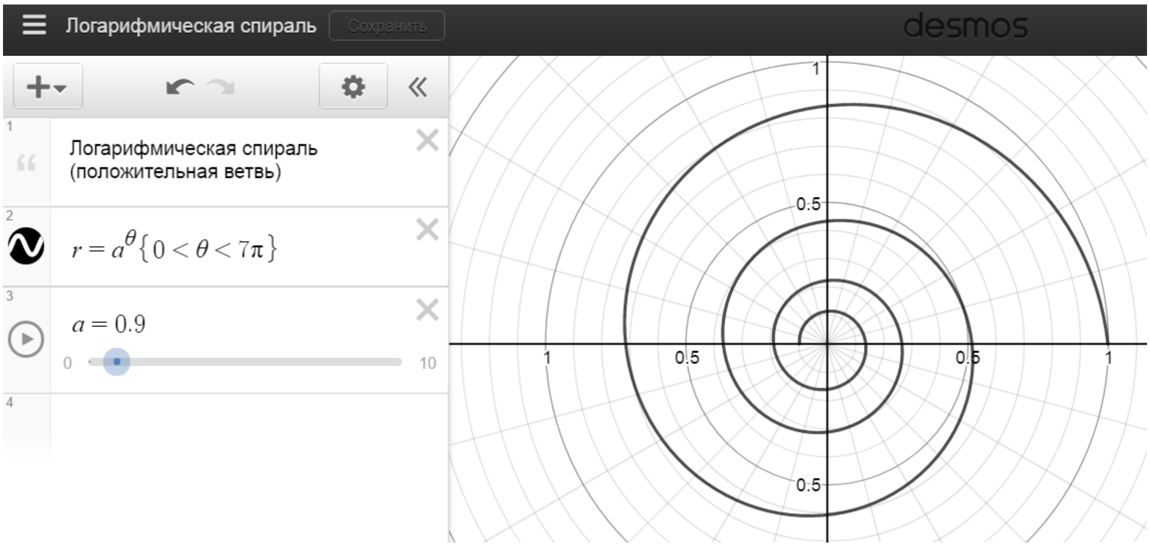


Рис. 51. График логарифмической спирали (положительной ветви) при значении параметра $a = 0.9$

[3] На данный момент графический редактор DESMOS строит графики кривых, заданных полярными координатами, только при изменении угла φ в положительном направлении (против часовой стрелки).

2. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/4xkwxzeorh (Рис.52) и изучите построение логарифмической спирали по точкам.
3. Составьте некоторое множество точек логарифмической спирали (отличное, от приведённого в примере), по которому можно составить алгоритм построения данной кривой на бумаге. Сформулируйте этот алгоритм.
4. Нарисовать график логарифмической спирали, соответствующий конкретному биологическому или физическому объекту (для сравнения в отчёте представить фото соответствующего объекта).
5. Найти ошибку при изображении логарифмической спирали на надгробии Я. Бернулли – см. Рис.49.

7.3. Гиперболическая спираль

Возможно, что название кривая получила из-за своего уравнения $r = \dfrac{a}{\varphi}, a > 0$ которое можно аналогично уравнению гиперболы в декартовых координатах.

Характеристическое свойство: гиперболическая спираль - это траектория точки, движущейся с постоянной скоростью v к полюсу т.О по лучу, вращающемуся вокруг полюса с постоянной угловой скоростью ω ($a = \dfrac{v}{\omega}$).

Кривая состоит из 2-х ветвей, симметричных относительно оси Oy - одна ветвь получается при $\varphi > 0$, вторая - при $\varphi < 0$ (см. Рис.53 сплошная и пунктирная линии соответственно). Гиперболическая спираль имеет асимптоту $y = a$ и асимптотическую точку – полюс.

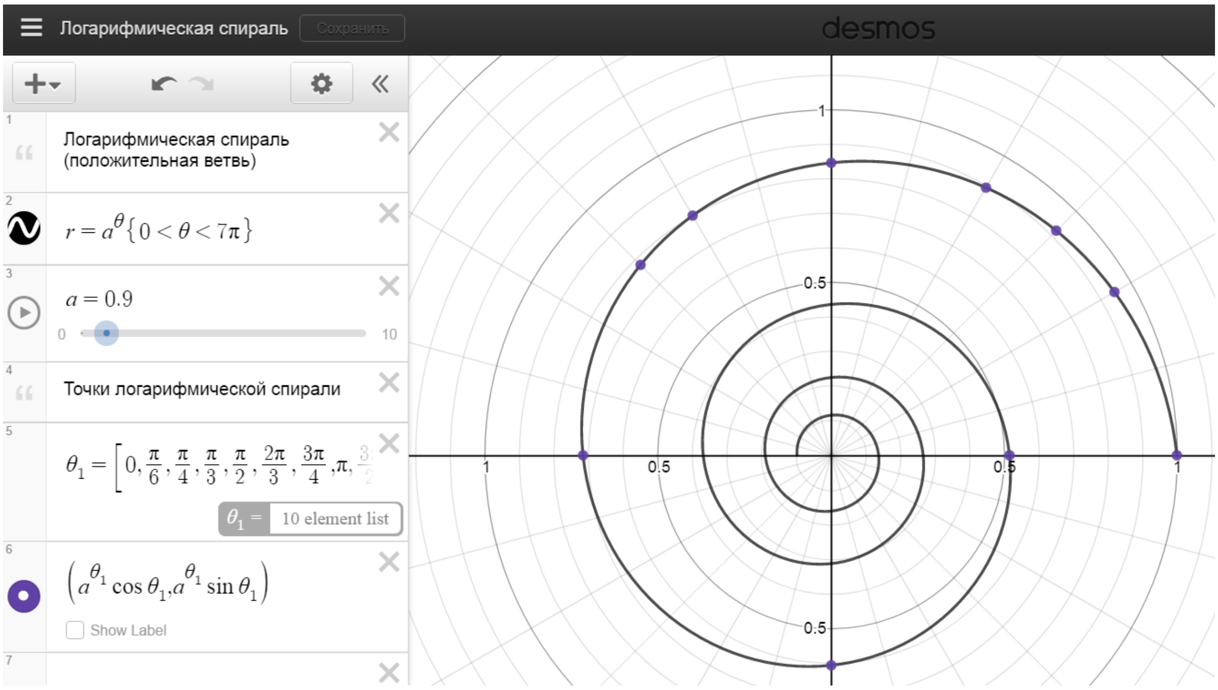


Рис.52. Построение логарифмической спирали по точкам.

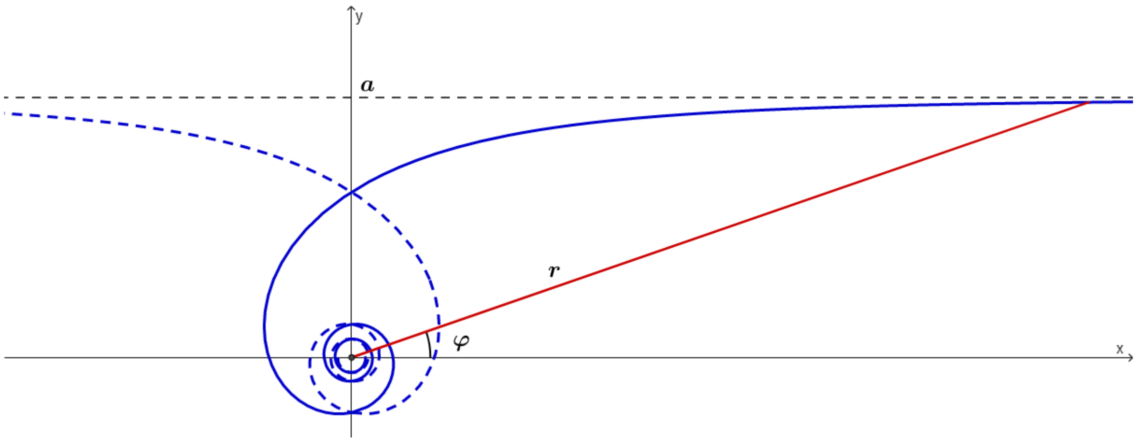


Рис. 53. Гиперболическая спираль.

Задание (выполняется при некотором выбранном значении a ($a > 0$)):
1. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/dqwsooneit (Рис. 54) и изучите график гиперболической спирали (положительной ветви[4]), изменяя параметр a в уравнении

$$r = \frac{a}{\varphi}, a > 0.$$

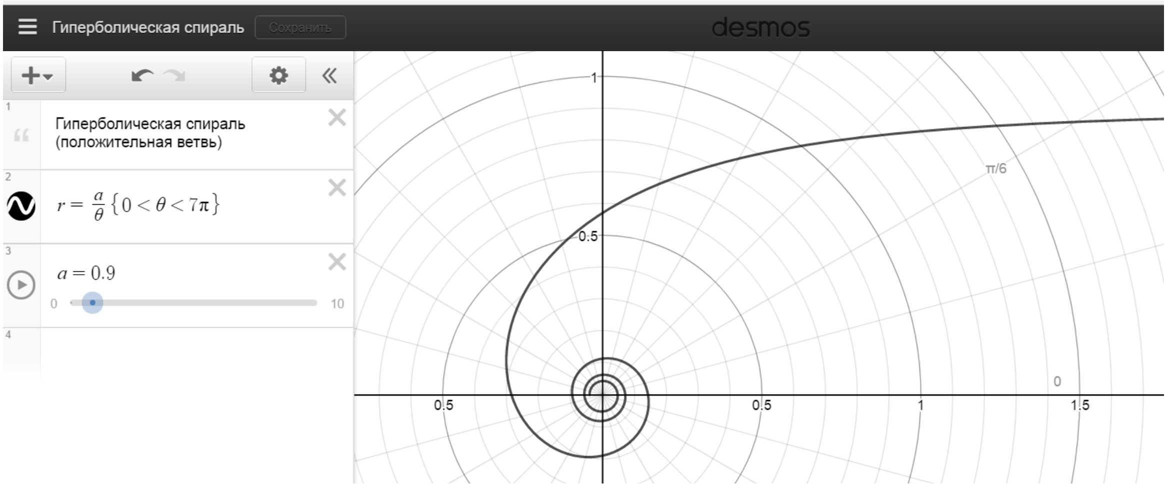


Рис. 54. График гиперболической спирали (положительной ветви) при значении параметра $a = 0.9$

2. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/dwutsctmh9 (Рис.55) и изучите построение гиперболической спирали по точкам.
3. Составьте некоторое множество точек гиперболической спирали (отличное, от приведённого в примере), по которому можно составить алгоритм построения данной кривой на бумаге. Сформулируйте этот алгоритм.

[4] На данный момент графический редактор DESMOS строит графики кривых, заданных полярными координатами, только при изменении угла φ в положительном направлении (против часовой стрелки).

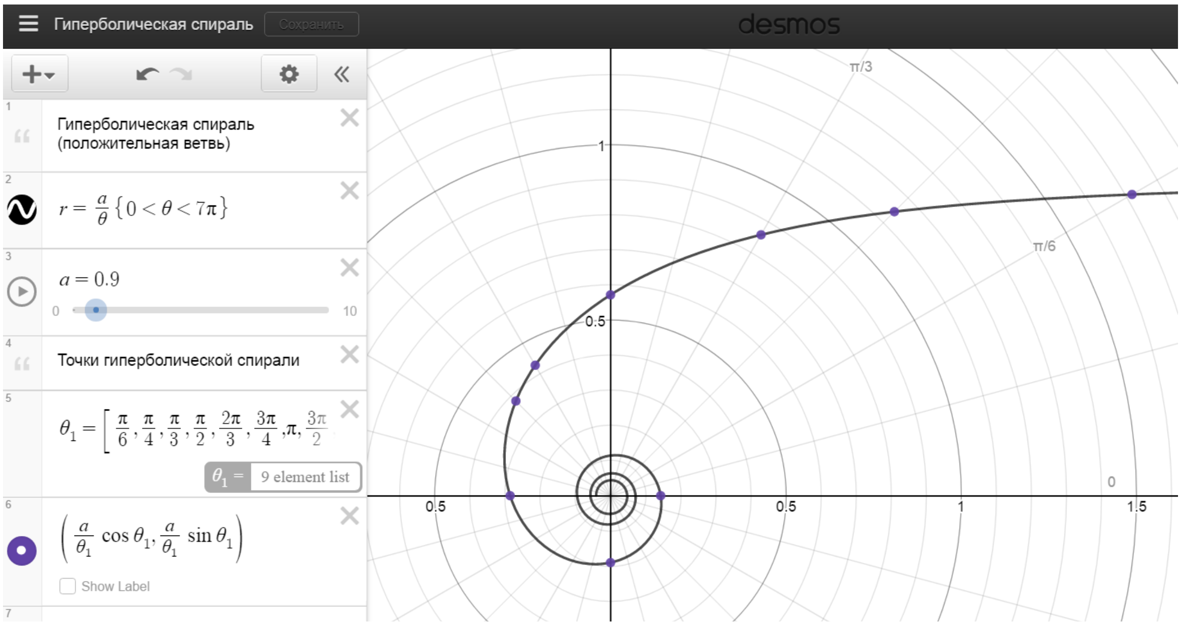


Рис.55. Построение гиперболической спирали по точкам.

Итоговое задание к лабораторной работе №7.

1. На основании выполненной лабораторной работы сделать вывод об особенностях графиков различных видов спиралей.
2. Вывести параметрические уравнения рассмотренных спиралей.

Лабораторная работа №8. *Циссоида, верзиера (локон) Аньези, Декартов лист, петлевая парабола*

8.1. Циссоида (или *циссоида Диоклеса*)

Название кривой отражает её форму и происходит от греческих слов χισσος - плющ и ειδοζ - вид. Её открытие приписывают древнегреческому математику Диоклесу (III в. до н.э), который применил её при решении Делосской задачи об удвоении куба.

Характеристическое свойство: Циссоида - это геометрическое место точек $M(x, y)$ таких, что для всякого луча $\varphi = \varphi_0, \varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ выполнено равенство: $|OM| = |BC|$.

Для построения точек циссоиды необходимо взять окружность диаметра OA = 2R и построить в т. A касательную к ней. Через т. O проведём луч OB и отложим на нём отрезок OM=BC, т. M - точка циссоиды. Повернув луч OB на некоторый угол $\varphi = \varphi_0, \varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ получим другую точку циссоиды и т. д. (см. Рис.56).

Задание:

1. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/ic4lt8lyj8 (Рис.57) и изучите уравнение циссоиды в декартовых координатах:

$$(2R - x)y^2 = x^3, R > 0.$$

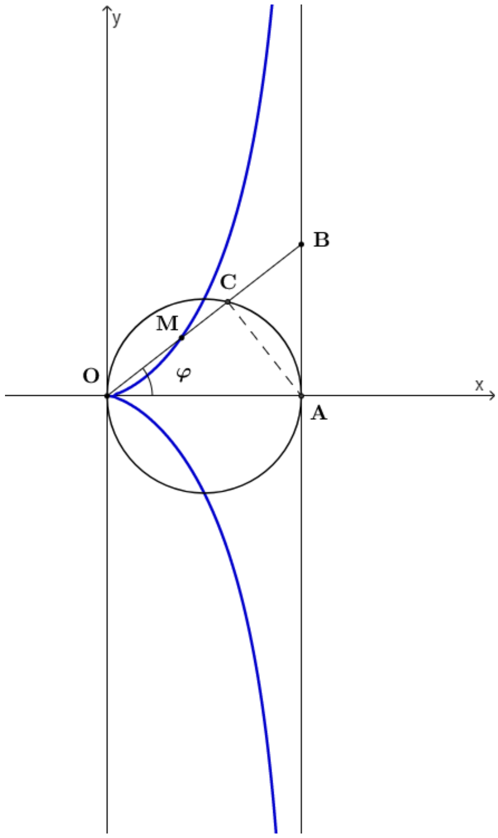


Рис. 56. Циссоида

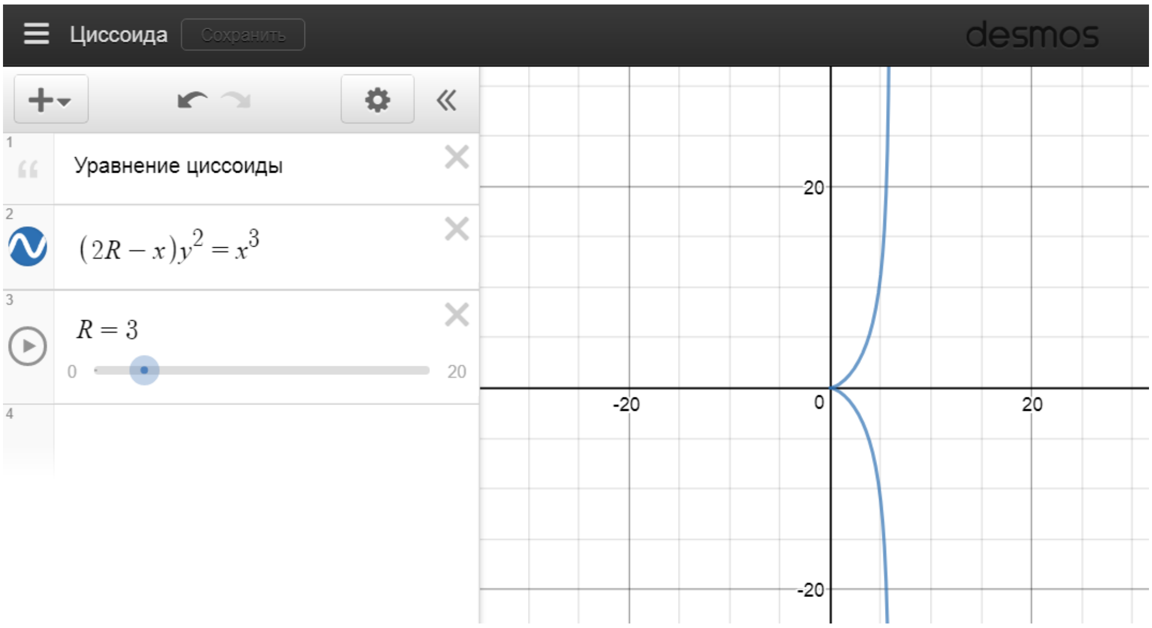


Рис. 57. График циссоиды при $R=3$.

2. Изменяя значение параметра R посмотрите, как меняется вид кривой. Сделайте вывод о зависимости вида кривой от значения параметра R. Постройте график циссоиды при некотором значении параметра R, отметив на этом графике асимптоту кривой. Вставьте полученный график в отчёт.

3. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/qvzaflvcpd (Рис.58) и изучите параметрические уравнения циссоиды:

$$x=\frac{2Rt^2}{t^2+1},\ y=\frac{2Rt^3}{\left(t^2+1\right)}, R>0,\ t=\text{tg}\phi,\ \phi-\text{полярный угол}.$$

3.1. Изменяя значение параметра t, сделайте вывод о том, как влияет его значение и знак на область построения кривой.

3.2. Проведите поэтапное построение, разбив область определения кривой $\left(t\in[0,8\pi]\right)$ на несколько отрезков, например: на 1-ом этапе строим кривую при $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, на 2-м - при $t\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, на 3-ем - при $t\in\left[\frac{3\pi}{2},8\pi\right]$. Все получаемые отрезки кривой строить различными цветами. Включить полученный график в отчёт.

3.3. Докажите (аналитически), взаимосвязь параметрического уравнения циссоиды и её уравнения в декартовых координатах (см. п.2.).

4. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/aj5gxwzpym (Рис.59) и изучите полярное уравнение циссоиды, изменяя параметр φ:

$$r=2R\text{tg}\varphi\sin\varphi, R>0.$$

5. Сделайте вывод об особенностях графика циссоиды и сформулируйте алгоритм его построения на бумаге.

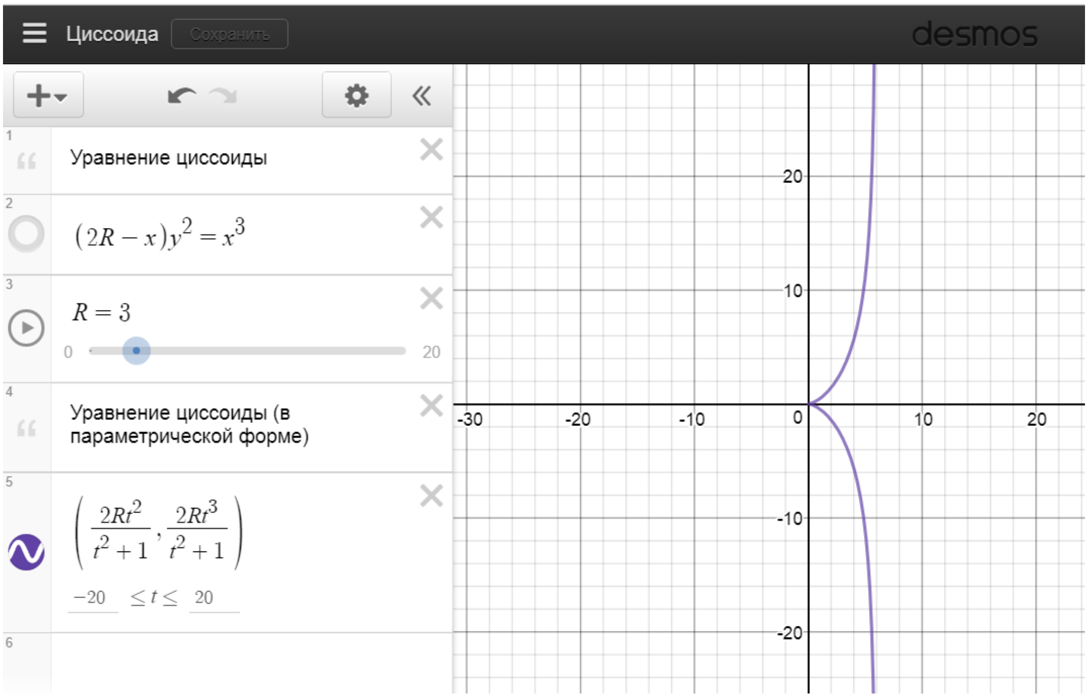


Рис. 58. График циссоиды, заданной параметрически, при $R=3$.

8.2. Локон Аньези (или *верзиера (верзьера) Аньези*)

Название кривая получила в честь Марии Гаэтаны Аньези (1718-1799) - итальянского математика и философа. Она описала эту кривую в своей работе Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana (1748) и назвала её также, как и Г. Гранди "la versiera", который впервые описал построение этой кривой (1718). В дальнейшем, при переводе этого труда на английский язык возникла путаница - замена "la versiera" на "l`versiera", что значит "ведьма, жена дьявола". По-русски её назвали "локоном" (так как она связана с женщиной).

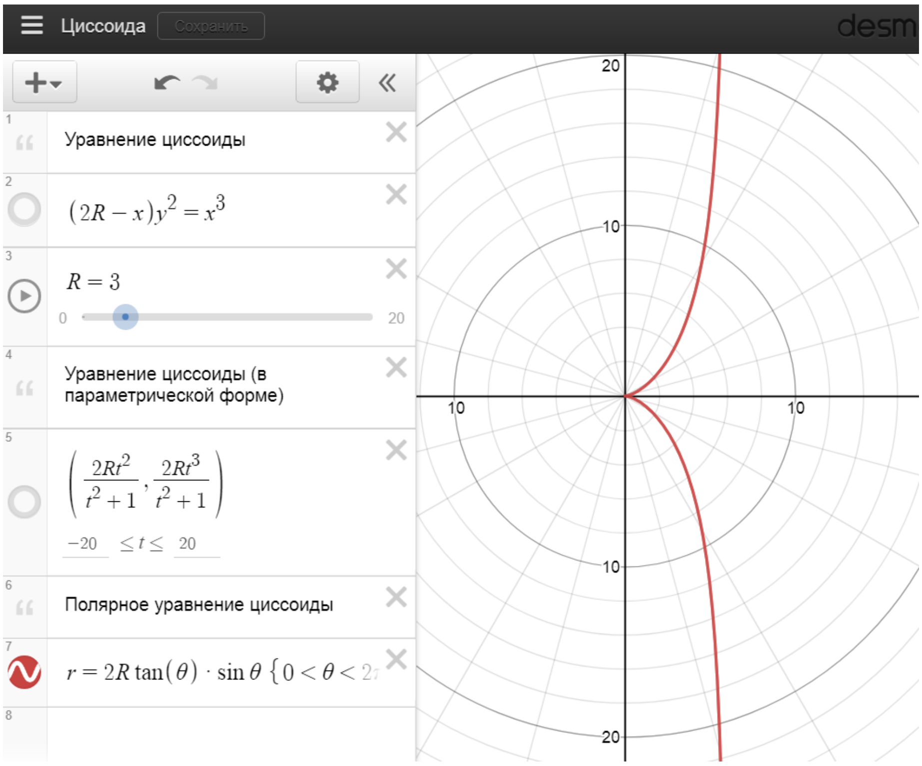


Рис. 59. График циссоиды, заданной полярным уравнением

Характеристическое свойство: Верзиера - это геометрическое место точек $M(x, y)$, для которых выполнено равенство: $\frac{\text{OB}}{\text{BD}} = \frac{OC}{BM}$, где $OC = a$, a - диаметр окружности, т. $B \in OC$, т. D лежит на окружности, отрезок BM перпендикулярен диаметру OC (см. рис. 60).

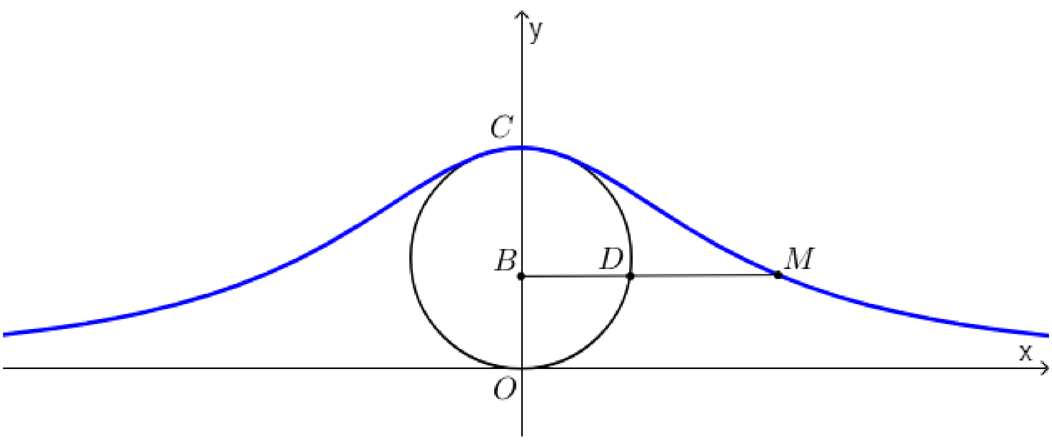


Рис.60. Верзиера (локон) Аньези.

Задание:

1. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/xqdcyoofoe (Рис.61) и изучите уравнения верзиеры в декартовых координатах:

$$y = \frac{a^3}{\left(a^2 + x^2\right)} \quad \text{и} \quad x = \frac{a^3}{\left(a^2 + y^2\right)}.$$

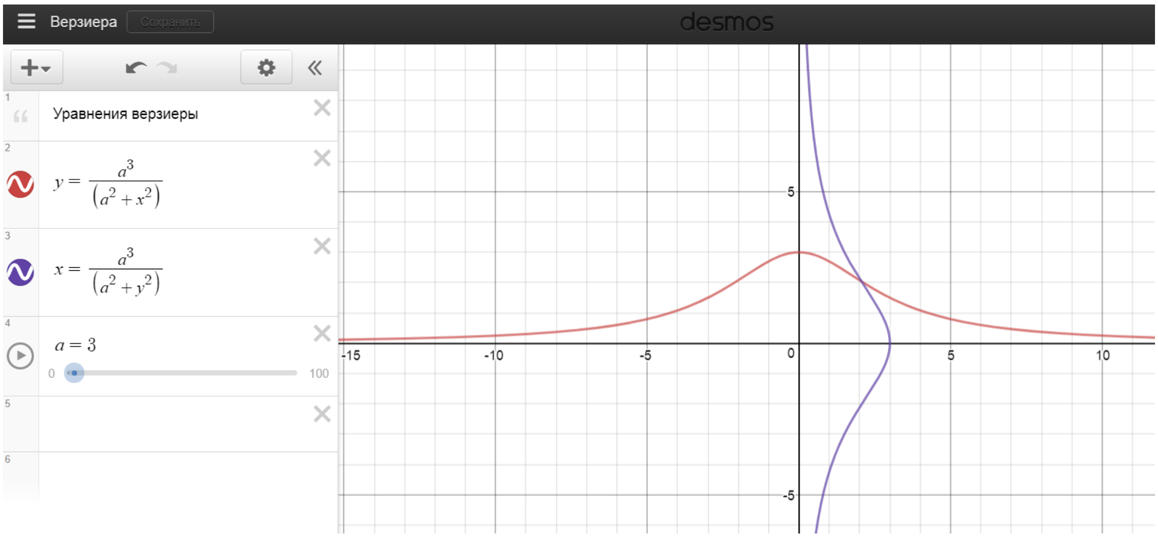


Рис.61. График верзиеры при $a = 3$.

2. Изменяя значение параметра a посмотрите, как меняется вид кривой. Сделайте вывод о зависимости вида кривой от значения параметра a. Постройте график верзиеры при некотором значении параметра a. Вставьте полученный график в отчёт.

3. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/fxx7vnz0vz (Рис.62) и изучите параметрические уравнения верзиеры:

$$x = t, y = \frac{a^3}{t^2 + a^2} \quad \text{и} \quad x = \frac{a}{1 + t^2}, y = at .$$

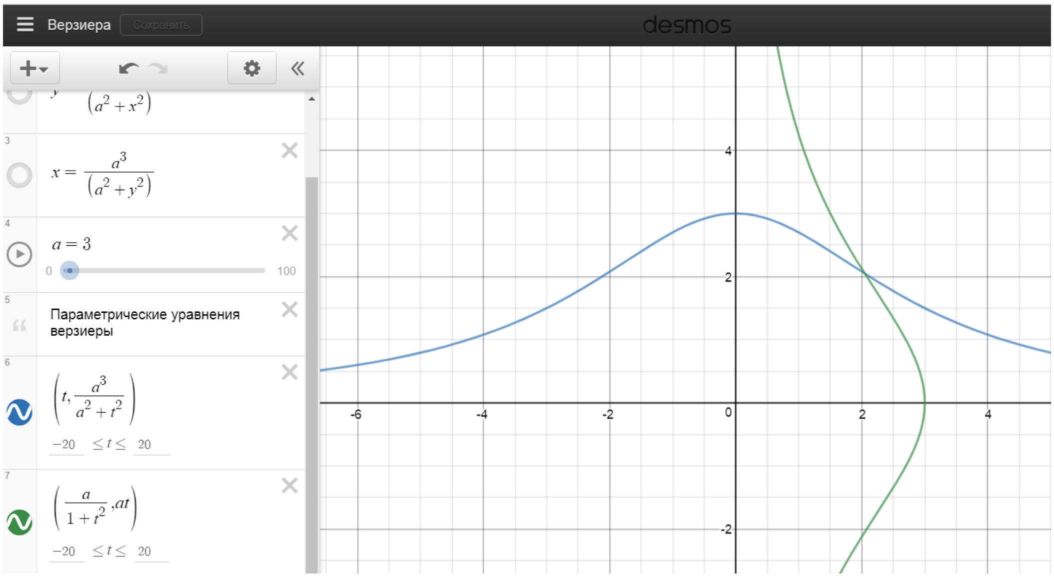


Рис. 62. Графики верзиеры, заданной параметрически, при $a = 3$.

3.1.Изменяя значение параметра t, сделайте вывод о том, как влияет его значение и знак на область построения кривой.

3.2.Проведите поэтапное построение, разбив область определения кривой $(t \in [0,8\pi])$ на несколько отрезков, например: на 1-ом этапе строим кривую при $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, на 2-м - при $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, на 3-ем - при $t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 8\pi\right]$. Все получаемые отрезки кривой строить различными цветами. Включить полученный график в отчёт.

3.3.Докажите (аналитически), взаимосвязь параметрического уравнения циссоиды и её уравнения в декартовых координатах (см. п.2).

4. Сделайте вывод об особенностях графика верзиеры и сформулируйте алгоритм его построения на бумаге.

8.3. *Декартов лист*

Впервые эту кривую упомянул в 1683 г. Р.Декарт (1596-1650) в письме к П.Ферма (1607-1665). Он определил её как кривую, для которой сумма объёмов кубов, построенных на абсциссе и ординате каждой точки, равняется объёму параллелепипеда, построенного на абсциссе, ординате и некоторой константе. Форму кривой впервые установил Ж. Роберваль (1602-1675) - она состояла только из одной петли, которая симметрично повторялась в четырёх квадрантах и получалась фигура, похожая на цветок с 4-мя лепестками - ей дали поэтическое название "лепесток жасмина". Полная форма кривой с наличием асимптоты была определена в 1692 г. Х. Гюйгенсом (1629-1695).

Задание:

1. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/1vdsmfbohn (Рис. 63) и изучите уравнение петлевой параболы в декартовых координатах:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, a > 0.$$

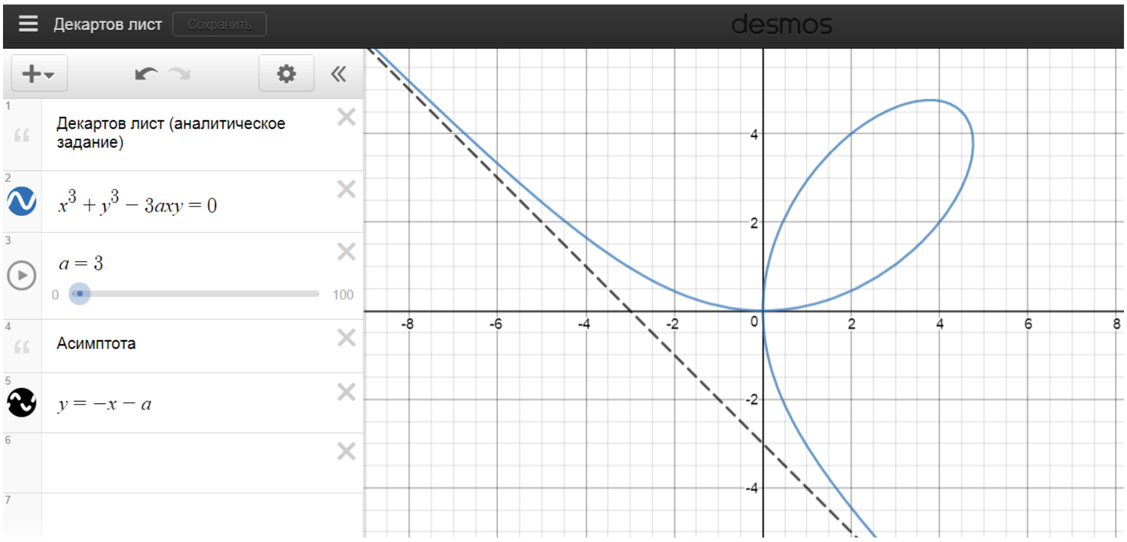


Рис.63. Декартов лист и его асимптота (при $a = 3$).

2. Изменяя значение параметра a посмотрите, как меняется вид кривой. Сделайте вывод о зависимости вида кривой от значения параметра a. Постройте график декартова листа при некотором значении параметра a, отметив на этом графике асимптоту кривой. Вставьте полученный график в отчёт.

3. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/wlxcrxqhqq (Рис.64) и изучите параметрические уравнения декартова листа:

$$x = \frac{3at}{1+t^3},\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

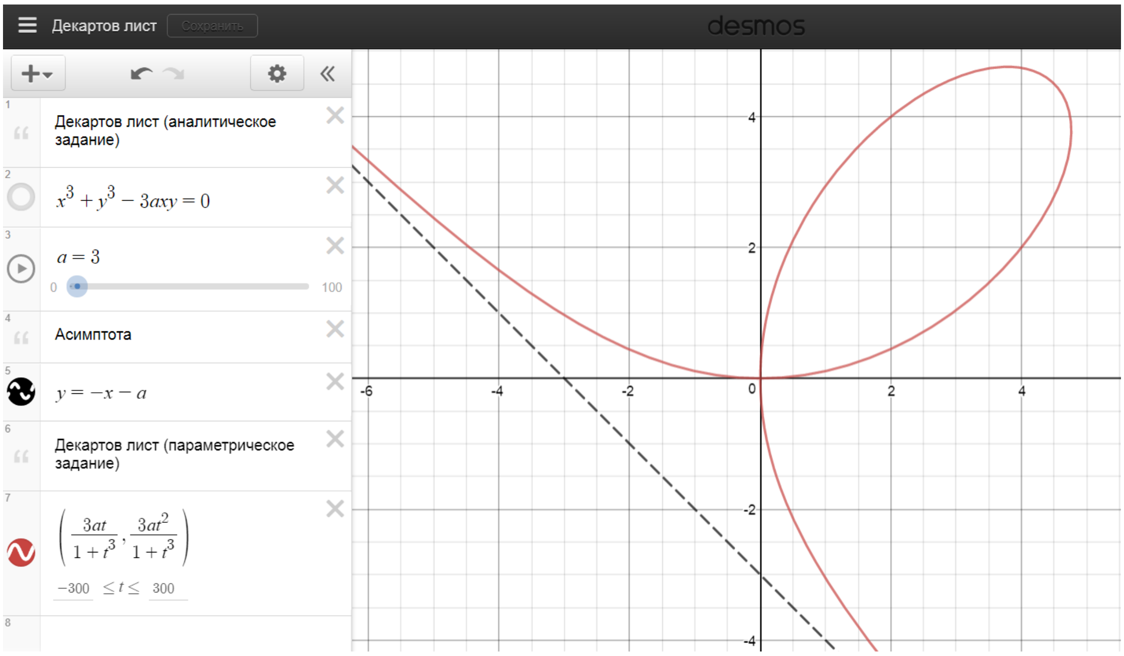


Рис. 64. График декартова листа, заданный параметрически, при $a = 3$

3.1.Изменяя значение параметра t, сделайте вывод о том, как влияет его значение и знак на область построения кривой.
3.2.Докажите (аналитически), взаимосвязь параметрического уравнения декартова листа и его уравнения в декартовых координатах (см. п.2.).

4. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/0qvic071lc (Рис.65) и изучите полярное уравнение декартова листа, изменяя параметр φ:

$$r = \frac{2a \cdot \cos\varphi \sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$$

5. Сделайте вывод об особенностях графика декартова листа и сформулируйте алгоритм его построения на бумаге.

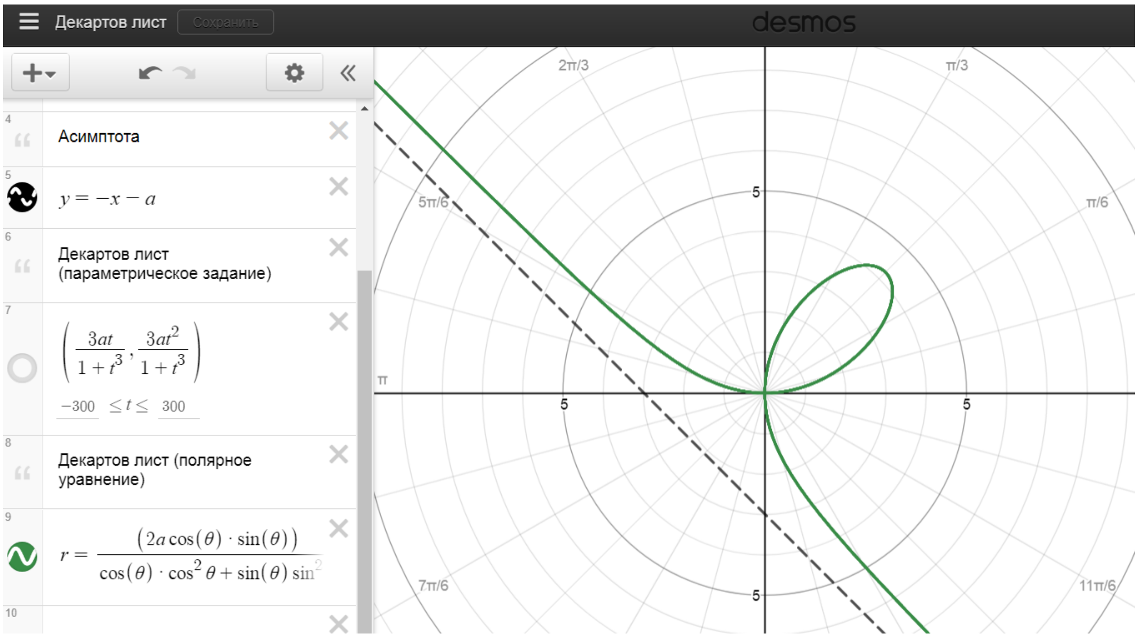


Рис. 65. График декартова листа, заданный полярным уравнением

8.4. *Петлевая парабола.*

Название кривой отражает вид её графика и уравнения - симметричная "петля", заданная уравнением, схожим с уравнением параболы.

Задание:

1. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/d4nnjdvzqc (Рис.66) и изучите уравнение петлевой параболы в декартовых координатах:

$$ay^2 = x(x-a)^2.$$

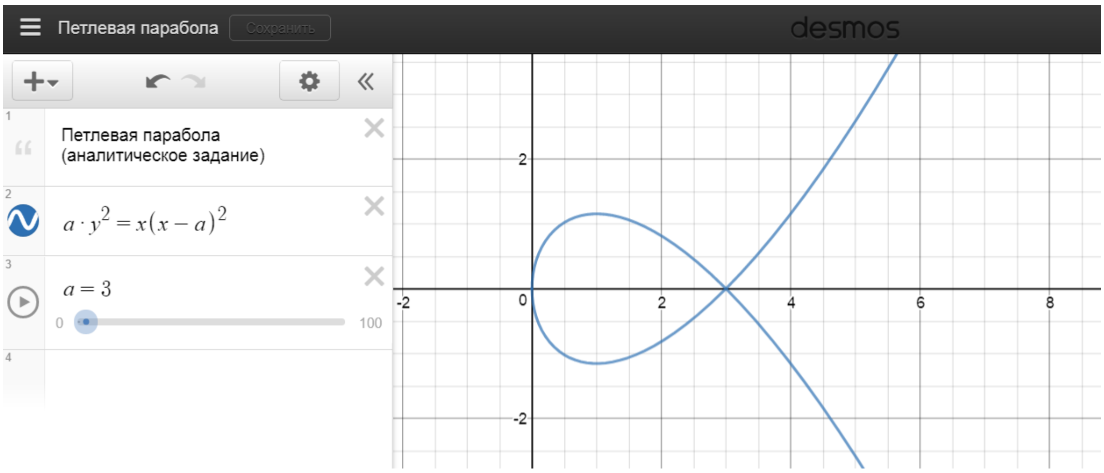


Рис.66. График петлевой параболы при $a = 3$

2. Изменяя значение параметра a посмотрите, как меняется вид кривой. Сделайте вывод о зависимости вида кривой от значения параметра a. Постройте график петлевой параболы при некотором значении параметра a. Вставьте полученный график в отчёт.

3. Пройдите по ссылке https://www.desmos.com/calculator/hg4visfswy (Рис.67) и изучите параметрические уравнения петлевой параболы:

$$x = t^2, \sqrt{a}\, y = t\left(t^2 - a\right)$$

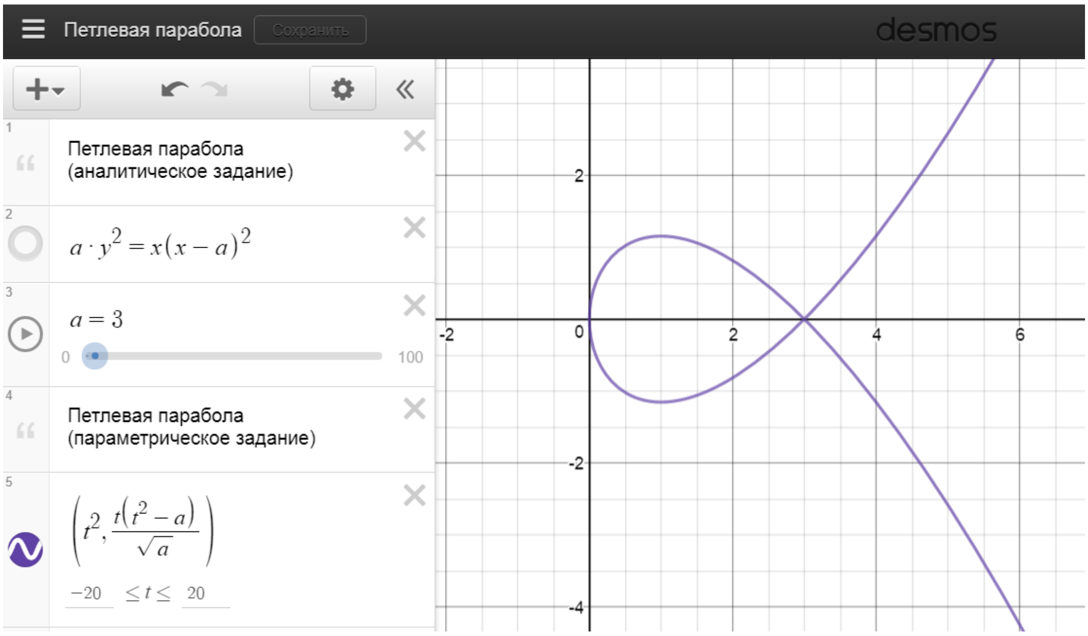


Рис. 67. График петлевой параболы, заданной параметрически, при $a = 3$

3.1.Изменяя значение параметра t, сделайте вывод о том, как влияет его значение и знак на область построения кривой.

3.2.Проведите поэтапное построение, разбив область определения кривой $(t \in [0, 8\pi])$ на несколько отрезков, например: на 1-ом этапе строим кривую при $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, на 2-м - при $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, на 3-ем - при $t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 8\pi\right]$. Все получаемые отрезки кривой строить различными цветами. Включить полученный график в отчёт.

3.3.Докажите (аналитически), взаимосвязь параметрического уравнения циссоиды и её уравнения в декартовых координатах (см. п.2).

4. Сделайте вывод об особенностях графика петлевой параболы и сформулируйте алгоритм его построения на бумаге.

Список литературы

1.Берман Г.Н. Циклоида. -М.: Наука, 1980 -112 с.
2.Васильев К.Б., Гутенмахер В.Л. Прямые и кривые, М.:Наука, 1978-152 с.
3.Маркушевич А.И. Замечательные кривые. Популярные лекции по математике, выпуск 4.М.-Л.: Гостехиздат, 1952-32 с.
4.Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применение.-М.:Физматлит,1969-293 с.

Приложение

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

“САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ”

ОТЧЁТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ №_

ПО ТЕМЕ : ________________________________

____

Выполнил: ФИО

гр:.№....

Проверил: ФИО

должность:

Санкт-Петербург, 201_

Миссия Университета - генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечить опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР МАТЕМАТИКИ

Образовательный центр математики Университета ИТМО был создан на базе кафедры математики - крупнейшей в Университете. С момента основания на ней работали такие выдающиеся учёные, как И.П. Натансон, А.Г. Аленицын, В.В. Жук и другие. Научные интересы сотрудников покрывают практически все разделы математики. На кафедре сложилась мощная научная школа по математическому моделированию сложных физических систем. В последнее время активно развивается направление, связанное с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовым компьютером и квантовыми коммуникациями. Сотрудники ОМЦ активно активно участвуют в международных научных конференциях, работают в рамках Российских и международных научных проектов. Сложилось тесное научное сотрудничество с Санкт-Петербургским государственным университетом, Петербургским отделением Математического института имени В.А. Стеклова РАН, лабораторией физикохимии наносистем Института химии силикатов РАН и другими научными центрами как в России, так и за рубежом: университетами Марселя и Тулона (Франция), Ювяскиля (Финляндия), Гумбольдтовским университетом Берлина (Германия).