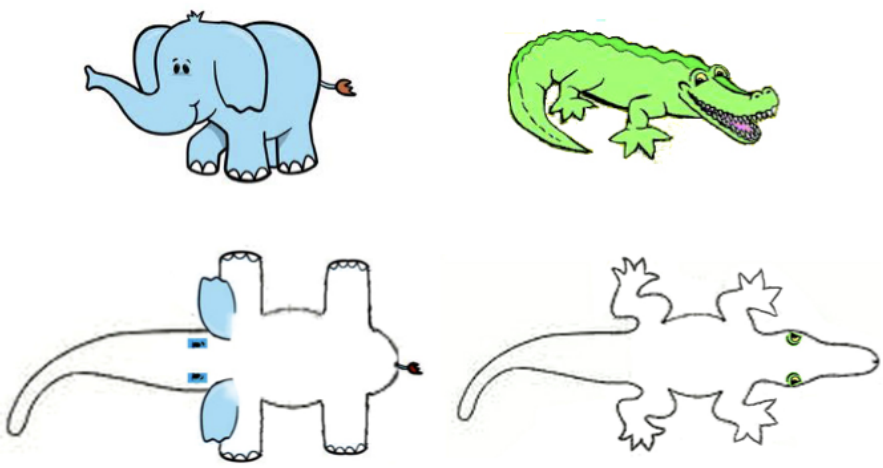
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

В.М. Уздин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
МЕТОД АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТИ



Санкт-Петербург
2019

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

В.М. Уздин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
МЕТОД АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТИ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению 01.04.02 "Прикладная математика и информатика"
в качестве учебно-методического пособия для реализации основных
профессиональных образовательных программ высшего образования
магистратуры.

Учебно-методическое пособие

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2019

В.М. Уздин - Университет ИТМО, 2019. – 28 с.

Рецензент С.В. Ульянов, д.ф.-м.н.,профессор СПбГУ

Показано, как метод анализа размерности может быть использован при оценке границ применимости физических теорий. Такие оценки особенно важны при описании явлений и эффектов на наномасштабе. Однако они оказываются очень полезными и в классической макроскопической физике. В качестве примера иерархии физических моделей рассмотрены идеальный газ - газ твердых шаров - классическая плазма - квантовая плазма.

Содержание

Введение

Разработка новых технологий, позволяющих создавать и использовать структуры с атомным разрешением, ставит новые задачи перед компьютерным моделированием на наномасштабе. Многие законы макроскопической физики здесь должны быть изменены, чтобы учесть межчастичное взаимодействие, квантовые закономерности, случайные тепловые воздействия окружающей среды, которые не могут быть выброшены без изменения хода процессов. Однако при моделировании важно понимать, когда можно ограничиться классическими законами, а когда они недостаточны и существенны квантовые поправки, можно ли пренебречь взаимодействием между частицами, или именно оно ответственно за исследуемые свойства? Таким образом, принципиальное значение приобретает понимание границ применимости используемых моделей.

С одной стороны, простота используемых моделей является одним из факторов, определяющих успех моделирования. Ф. Андерсон в нобелевской речи говорил о физических моделях: «Очень часто упрощенная модель проливает больше света на то, как в действительности устроена природа явления, чем любое число вычислений *ab initio* для различных конкретных случаев, которые, даже если они правильны, часто содержат так много деталей, что скорее скрывают, чем проясняют истину... В конце концов идеальный расчет просто копирует Природу, а не объясняет ее.» [1].

С другой стороны, чрезмерное упрощение может привести к неправильному представлению о явлении, имеющему мало общего с реальностью. Слон и крокодил на обложке - очень разные животные, но их «модели» снизу почти совпадают. Развитие современных компьютеров позволяет моделировать поведение систем, содержащих миллионы взаимодействующих частиц. Насколько оправдано рассмотрение упрощенной модели, когда есть возможность аккуратно расчитывать сложные системы, близкие к реальным - на этот вопрос нет универсального ответа. Он зависит от конкретной ситуации, и в значительной степени ответ может быть получен с использованием качественных методов физики.

Метод анализа размерности - один из таких качественных методов.

С.И. Вавилов в 1934 году в предисловии к книге другого нобелевского лауреата П. Бриджмена «Анализ размерности» подчеркивал важность метода и его недооценку, которая иногда встречается: «Принято рассматривать размерность только как удобный метод перехода от одной системы к другой и в лучшем случае ещё как средство первого контроля правильности физических уравнений.... Между тем в «приватном порядке» физики широко пользуются анализом размерности в качестве простого рекогносцировочного теоретического приёма, позволяющего предугадать решение сложной задачи за исключением постоянного множителя.»[2]

Не случайно А.Б. Мигдал начинает с метода анализа размерности книгу «Качественные методы квантовой теории» [3], где на первой же странице показано, как методом анализа размерности можно доказать теорему Пифагора. Действительно, пусть задан треугольник с гипотенузой c, катетами a, b, и углом между одним из катетов и гипотенузой α. Вследствие того, что треугольник однозначно задается гипотенузой c и углом α, его площадь может быть записана как $c^2 f(\alpha)$, где f - некоторая функция, а показатель степени 2 выбран из соображений размерности, поскольку площадь пропорциональна квадрату линейного размера. С другой стороны, опуская перпендикуляр из вершины прямого угла на гипотенузу c, мы разбиваем исходный треугольник на два подобных треугольника с гипотенузами a и b. Их площади можно представить как $a^2 f(\alpha)$ и $b^2 f(\alpha)$. Приравнивая площади исходного треугольника и двух получившихся:

$$c^2 f(\alpha) = a^2 f(\alpha) + b^2 f(\alpha),$$

и, сокращая на $f(\alpha)$, получаем теорему Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$.

Прежде чем перейти к дальнейшим приложениям метода анализа размерности, введем некоторые определения, постулаты и теоремы, лежащие в его основе [2, 4, 5]. Само понятие размерности связано с построением систем единиц. Некоторые физические величины выбираются за основные, первичные, для которых единицы измерения устанавливаются произвольно и независимо. Остальные, производные от них, выражаются через первичные таким образом, чтобы физические законы, их содержащие, включали заранее заданные численные коэффициенты, например, выглядели наиболее просто. Ниже мы будем использовать систему, в которой основными величинами будут длина (L), масса (M) и время (T).

Далее постулируется, что количественные соотношения между различными физическими величинами выражаются одними и теми же формулами, независимо от единиц измерения основных физических величин. Иными словами, если $y = \phi(x)$, где x - основная величина, и ее единицу измерения изменили в α раз ($X = \alpha x$), то значение производной величины y изменится в β раз ($Y = \beta y$), причем так, чтобы ее новое значение удовлетворяло тому же функциональному соотношению

$$Y = \beta y = \phi(X) = \phi(\alpha x).$$

Это накладывает условия на преобразование величины β при изменении масштаба основной величины x в α раз.

Действительно, запишем соотношение для производных:

$$\frac{dy}{dx} = \phi'(x); \qquad \frac{dY}{dX} = \phi'(X).$$

Вторую формулу можно переписать в виде

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{dy}{dx} = \phi'(X).$$

Подставив $\frac{dy}{dx}$ из первого соотношения, а также $\beta = \frac{Y}{y} = \frac{\phi(X)}{\phi(x)}$ и $\alpha = \frac{X}{x}$, получаем:

$$x \cdot \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = X \cdot \frac{\phi'(X)}{\phi(X)}.$$

Левая часть этого выражения зависит только от x, а правая - только от X. Следовательно, это величина постоянная. Обозначим ее через m:

$$x \cdot \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = m.$$

Получаем

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = m \cdot \frac{dx}{x}, \text{ или } \phi(x) = Cx^m.$$

Поскольку $Y = \beta y = CX^m = C(\alpha x)^m = \alpha^m C x^m = \alpha^m y$, отсюда получаем:

$$\beta = \alpha^m.$$

Если основных величин несколько, аналогичные рассуждения приводят к тому, что любая производная (не основная) величина должна иметь степенной вид относительно всех основных физических величин. В нашем случае размерность любой физической величины y будет задаваться формулой

$$dim[y] = L^m M^n T^k,$$

где m, n, k - постоянные числа. Тогда, если единицы длины, массы и времени изменятся, соответственно, в α, β, γ раз, то единица производной величины y изменится в $\alpha^m \beta^n \gamma^k$ раз.

Еще одна теорема в теории размерностей утверждает, что любое количественное соотношение между различными физическими величинами может быть представлено в виде функциональной связи между безразмерными комбинациями этих величин.

Для доказательства запишем произвольное соотношение между физическими величинами $x_1, x_2, \ldots x_k, y_1, y_2, \ldots y_n$ в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots x_k, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0$$

Будем считать, что первые k величин являются основными, а остальные n - производными. Например, в системе СГС $k = 3$ и основные величины l, m, t имеют размерности L, M, T. Тогда при изменении единиц измерения основных величин в α, β, γ раз соответственно, соотношение между величинами изменится следующим образом:

$$f(\alpha x_1, \beta x_2, \gamma x_3, \alpha^{p_1} \beta^{q_1} \gamma^{r_1} y_1 \ldots \alpha^{p_n} \beta^{q_n} \gamma^{r_n} y_n) = 0$$

Выберем α, β, γ так, чтобы $\alpha x_1 = \beta x_2 = \gamma x_3 = 1$. Тогда

$$f(1, 1, 1, \frac{y_1}{\alpha^{p_1} \beta^{q_1} \gamma^{r_1}} \ldots \frac{y_n}{\alpha^{p_n} \beta^{q_n} \gamma^{r_n}}) = 0$$

Это уравнение содержит только безразмерные комбинации физических величин, и, таким образом, теорема доказана.

Ниже будут рассмотрены приложения доказанных теорем и метода анализа размерностей к физическим проблемам, начиная с простейших задач механики, вопросов движения при наличии вязкого трения и при построении иерархии физических моделей, когда ключевую роль играют безразмерные параметры теории. Дополнительно, большое количество задач и других примеров использования метода анализа размерности можно найти в [2, 5, 6, 7].

Простейшие задачи механики. Векторные единицы длины

Метод анализа размерностей можно использовать для вывода формул и соотношений между параметрами, если из общих соображений известно, от каких именно параметров может зависеть исследуемая величина. Идею метода можно показать на простейших задачах механики.

Рассмотрим задачу о времени свободного падения тела с высоты h без начальной скорости, если сопротивлением воздуха можно пренебречь. Это время, очевидно, зависит от высоты h, ускорения свободного падения g. Можно предположить, что оно зависит и от массы тела m. Запишем зависимость времени от указанных параметров в виде

$$t = Ch^x g^y m^z,$$

где C - безразмерная постоянная. Размерность параметров в этом соотношении такая: $dim[t] = T$, $dim[g] = LT^{-2}$, $dim[M] = M$. Приравнивая степени при одинаковых размерностях, получаем

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L:0 &=& x+y \\ T:1 &=& -2y \\ M:0 &=& z \end{array} \right. .$$

Таким образом, $t = C\sqrt{h/g}$. Это время не зависит от массы тела m. Численный множитель $C = \sqrt{2}$ невозможно найти в методе размерностей. Однако он может быть найден экспериментально для конкретного значения h, и в дальнейшем его можно использовать для предсказания результата при любых h.

В рамках метода анализа размерности важно определить параметры, от которых может зависеть исследуемая величина. Это можно сделать, если известны законы, описывающие рассматриваемое явление. Однако, иногда параметры можно указать, даже если эти законы неизвестны и для использования метода анализа размерности нужно гораздо меньше информации, чем для составления законов движения.

Число уравнений, которые получаются приравниванием степеней при одинаковых размерностях, определяется набором основных единиц, на которых построена используемая система единиц. Если число параметров в модели больше, то не все показатели степени получится определить. Тогда полезно, прежде всего, найти безразмерные комбинации параметров. В этом случае выражение для исследуемой величины может быть записано как произведение любой комбинации параметров, имеющих ее размерность, на некоторую функцию безразмерных параметров.

Рассмотрим с этой точки зрения задачу об определении дальности полета тела L, пущенного горизонтально со скоростью V с высоты h. Как и раньше, будем пренебрегать сопротивлением воздуха. Теперь число параметров, от которых может зависеть L, равно четырем: h, V, g и m, а уравнений - по-прежнему три. Поэтому однозначно определить показатели невозможно. Найдем независимые безразмерные параметры γ, которые можно составить из h, V, g и m:

$$\gamma = h^x g^y m^z V^u.$$

Система уравнений для показателей

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L:0 &=& x+y+u \\ T:0 &=& -2y-u \\ M:0 &=& z \end{array} \right.$$

дает единственный независимый безразмерный параметр

$$\gamma = \left(\frac{hg}{V^2}\right)^y.$$

Теперь L можно записать как произведение любой величины размерности L на некоторую (неизвестную) функцию безразмерного параметра:

$$L = hf\left(\frac{V^2}{hg}\right).$$

Функция f неизвестна. Но если, например из эксперимента, известно, что L пропорционально V, то вид функции сразу определяется:

$$f\left(\frac{V^2}{hg}\right) = C\frac{V}{\sqrt{hg}}.$$

Отметим, что для определения функции f достаточно знать ее зависимость не от всех параметров, а лишь от какого-то одного из них.

Можно, однако, определить L с точностью до постоянной только из соображений размерности, если увеличить число основных единиц, через которые выражаются параметры системы. Для этого введем различные размерности для длины в вертикальном ($L_\perp$) и горизонтальном ($L_\parallel$) направлениях.

Теперь система уравнений для показателей будет содержать 4 уравнения. Записывая L в виде

$$L = h^x g^y m^z V^u,$$

имеем:

$$\begin{cases} L_\parallel : 1 &= u \\ L_\perp : 0 &= x + y \\ T : 0 &= -2y - u \\ M : 0 &= z \end{cases},$$

и получится правильная зависимость от всех параметров.

При использовании разных единиц длины по взаимно-перпендикулярным направлениям говорят о «векторных единицах длины» [7]. Аналогичный прием возможен и для других переменных, например, введение разных размерностей для массы как количества вещества и для массы как меры инертности. Это будет показано в следующем разделе.

Задача *Пользуясь векторными единицами длины, определить, как зависит дальность полета тела, брошенного под углом α к горизонту от величины скорости V и угла α.*

Задача *Пользуясь методом анализа размерности, определить зависимость скорости продольных волн в стержне от модуля Юнга и плотности материала.*

Задача *Пользуясь методом анализа размерности, определить зависимость скорости капиллярных волн на поверхности воды от коэффициента поверхностного натяжения σ, плотности жидкости ρ и длины волны λ.*

Задача *Пользуясь методом анализа размерности, определить зависимость скорости гравитационных волн на поверхности воды от ускорения свободного падения g, плотности жидкости ρ, длины волны λ и глубины водоема H. Обратите внимание, что здесь имеется* *безразмерный параметр λ/H. Рассмотрите случай очень глубокого водоема, когда нет зависимости от H, и волн на мелкой воде, когда нет зависимости скорости от λ.*

Движение при наличии вязкого трения

Рассмотрим задачу о движении тела в жидкости или газе и попробуем оценить силу, действующую на него со стороны среды, в которой оно находится, при разных режимах движения, пользуясь методом анализа размерности. Будем учитывать внутреннее трение или вязкость среды. Количественной характеристикой внутреннего трения является вязкость η [4]. Если жидкость находится между двумя параллельными пластинками, движущимися друг относительно друга с малой скоростью v, направленной в плоскости пластин, то для поддержания равномерного движения необходима сила F, направленная вдоль скорости. Эта сила пропорциональна плоскости пластин S, их относительной скорости v и обратно пропорциональна расстоянию d между пластинами:

$$F = \eta \cdot \frac{Sv}{d}.$$

Коэффициент пропорциональности η в этом выражении можно считать определением и одним из способов измерения вязкости. Видно, что размерность вязкости $dim[\eta] = L_{\parallel}^{-1}MT^{-1}$, где через $L_{\parallel}$ обозначена размерность длины вдоль скорости.

Выберем параметры, от которых может зависеть сила сопротивления при движении тела в жидкости или газе. Это, разумеется, скорость тела v ($dim[v] = L_{\parallel}T^{-1}$), плотность среды, в которой происходит движение ρ ($dim[\rho] = ML_{\parallel}{}^{-1}L_{\perp}{}^{-2}$), её вязкость η ($dim[\eta] = L_{\parallel}^{-1}MT^{-1}$), поперечные размеры тела S ($dim[S] = L_{\perp}{}^{2}$) и его продольные размеры l ($dim[l] = L_{\parallel}$). Составим из этих параметров величину размерности силы. Сначала рассмотрим случай малых скоростей, когда можно считать, что сила пропорциональна скорости:

$$F = C\rho^x S^y l^z \eta^u v.$$

Имеем систему уравнений для показателей при размерностях продольной и поперечной длин $L_\parallel$, $L_\perp$, массы M и времени T:

$$\begin{cases} L_\parallel : 1 & = & -x + z - u + 1 \\ L_\perp : 0 & = & -2x + 2y \\ T : -2 & = & -u - 1 \\ M : 1 & = & x + u \end{cases}.$$

Отсюда получаем

$$F = Cl\eta v.$$

Здесь С - произвольная безразмерная постоянная. Таким образом, сила пропорциональна продольным размерам тела, вязкости, скорости и не зависит от плотности среды и поперечного, по отношению к скорости, размера тела.

Перейдем теперь к случаю больших скоростей, когда сила сопротивления не зависит от вязкости. Составляем выражение для силы в виде

$$F = C\rho^x S^y l^z v^u.$$

Система уравнений для $x, y, z,$ и u

$$\begin{cases} L_\parallel : 1 & = & -x + z + u \\ L_\perp : 0 & = & -2x + 2y \\ T : -2 & = & -u \\ M : 1 & = & x \end{cases}$$

дает для силы следующее выражение:

$$F = C\rho S v^2.$$

Сила сопротивления не зависит от продольных размеров тела, пропорциональна площади его поперечного сечения, плотности среды и квадрату скорости.

Покажем, как метод анализа размерности позволяет вывести формулу Пуазейля для расчета количества вязкой жидкости, протекающего в единицу времени через поперечное сечение трубы при ламинарном (безвихревом) течении. Количество жидкости может зависеть от разности давлений на концах трубы Δp ($dim[\Delta p] = ML_\parallel T^{-2} L_\perp{}^{-2}$), вязкости η ($dim[\eta] = L_{\parallel}{}^{-1}MT^{-1}$), длины l ($dim[l] = L_{\parallel}$), площади поперечного сечения трубы S ($dim[S] = L_{\perp}{}^2$) и плотности жидкости ρ ($dim[\rho] = ML_{\parallel}{}^{-1}L_{\perp}{}^{-2}$).

Будем искать выражение для массы жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени Q ($dim[Q] = MT^{-1}$), в виде

$$Q = C\Delta p^x \eta^y l^z S^u \rho^w.$$

Число показателей здесь равно 5, а число уравнений, даже учитывая разные размерности для продольной и поперечной длины, только 4. Для того, чтобы получить еще одно уравнение, будем различать массу как «количество вещества» (M_Q), которая будет входить в Q и ρ и массу как «меру инертности» (M_i), содержащуюся в Δp и η. Тогда система уравнений для показателей примет следующий вид:

$$\begin{cases} L_{\parallel} : 0 &= x - y + z - w \\ L_{\perp} : 0 &= -2x + 2u - 2w \\ T : -1 &= -2x - y \\ M_Q : 1 &= w \\ M_i : 0 &= x + y \end{cases},$$

и для расхода жидкости Q получаем:

$$Q = C\rho\frac{\Delta p}{\eta l}S^2.$$

Масса жидкости, протекающая ежесекундно через поперечное сечение трубы, пропорциональна квадрату поперечного сечения трубы, перепаду давлений на её концах, плотности жидкости и обратно пропорциональна длине трубы и вязкости жидкости. Этот результат справедлив для трубы с постоянным поперечным сечением произвольной формы. Для цилиндрической трубы $S = \pi R^2$ и $Q \sim R^4$, а $C = 8/\pi$, как показывает точный динамический расчет [4].

Вывести уравнение Пуазейля с точностью до безразмерного коэффициента можно и немного иначе, рассматривая безразмерные параметры задачи. При стационарном ламинарном течении вязкость уравновешивается градиентом давления. Поэтому расход жидкости может зависеть только от величины $\Delta p/l$. Кроме того, жидкость движется без ускорения, и ее расход может войти только в комбинации Q/ρ, представляющей собой объем жидкости, протекающей за единицу времени через поперечное сечение трубы. Из величин $\Delta p/l$, Q/ρ, S и η можно составить единственную независимую безразмерную комбинацию:

$$C = \frac{l}{\Delta p} \cdot \frac{Q}{\rho} \cdot \frac{\eta}{S^2}.$$

Такая комбинация должна быть постоянной. Выражая из этого соотношения Q, приходим к уравнению полученному выше.

Здесь мы искали безразмерный параметр задачи. В общем случае знание безразмерных параметров очень важно для понимания того, какие именно приближения нужны при описании того или иного физического эксперимента. С другой стороны, они могут быть использованы при построении натурных моделей объектов, например, при проведении испытаний на уменьшенных системах, геометрически подобных реальным. Поведение будет подобным, если одинаковы все безразмерные параметры, характеризующие системы.

Задача *Определите, во сколько раз нужно изменить угловую скорость вращения вертикального винта вертолета и мощность его двигателя, чтобы подъемная сила не изменилась при использовании геометрически подобной модели, уменьшенной в n раз [4]. Для этого найдите безразмерные параметры, зависящие от характерных размеров вертолета l, угловой скорости ω, вязкости η и плотности воздуха ρ и составьте величины размерности силы и мощности из тех же величин.*

При описании движения вязкой жидкости важное значение имеет безразмерный параметр, зависящий от плотности жидкости, её вязкости, характерного размера и скорости потока:

$$Re = \frac{\rho l V}{\eta},$$

называемый числом Рейнольдса. Он определяет относительную роль инерции и вязкости при течении жидкости. При больших Re основную роль играет инерция, при малых - вязкость. Соответственно, течение ламинарно при малых числах Рейнольдса, но становится турбулентным при больших.

Задача *Показать, что число Рейнольдса представляет собой отношение кинетической энергии жидкости к потере её, определяемой работой сил трения на характерной длине l.*

Задача *Кровь, двигаясь по капиллярным кровеносным сосудам, проходит расстояние $l \sim 1$ мм за время $t = 1$с. Определить вязкость крови, если в капилляре диаметром $D = 7 \cdot 10^{-6}$ м падение давления Δp составляет 2.6 кПа/мм .*

Экспериментально установлено , что течение жидкости остается ламинарным при числах Рейнольдса Re<1000. При какой наибольшей скорости крови ($\rho = 1060$ кг/м^3) её течение в аорте $R = 8 \cdot 10^{-3}$ м останется ламинарным? [9]

Система взаимодействующих частиц с точки зрения метода анализа размерности

Остановимся теперь на использовании метода анализа размерности при построении иерархии моделей взаимодействующих частиц. По мере перехода от более простых к более сложным моделям, учитывающим дополнительные эффекты и взаимодействия, в моделях появляются новые параметры. В предельном случае, для определенных значений этих параметров, новая модель должна воспроизводить поведение старой, удовлетворяя так называемому принципу соответствия. Например, формулы релятивистской теории относительности переходят в формулы классической механики, когда скорость света c стремится к бесконечности. Однако скорость света - размерная величина, и ее численное значение зависит от единиц, в которых она измеряется. В то же время то, насколько существенны релятивистские поправки, не должно зависеть от единиц измерения скорости. Поэтому должен существовать *безразмерный* параметр, показывающий, насколько важно использовать релятивистские соотношения при решении конкретных задач. Действительно, таким безразмерным параметром может служить отношение скорости объекта к скорости света $\beta = v/c$. Если $\beta << 1$, достаточно классической механики; если $\beta \approx 1$, нужно использовать специальную теорию относительности. Таким образом, именно безразмерный параметр определяет границы применимости старой теории при построении новой, более общей теории. Это относится и к другим теоретическим подходам: когда имеется иерархия физических моделей, применимость модели для описания данной системы определяется безразмерным параметром, составленным из величин, характеризующих поведение системы в рамках рассматриваемой модели.

Знание безразмерных параметров модели позволяет не только судить о границах ее применимости, но и предсказывать, что именно необходимо учитывать, если мы переходим к описанию систем другого пространственного масштаба, другой эффективной размерности, на других характерных временах. Наряду с безразмерными параметрами, многое о модели можно сказать, рассматривая общий вид параметров размерности длины или времени. При этом очевидно, что каждый из таких параметров может быть домножен на любую степень безразмерного параметра без изменения размерности.

Ниже, в качестве примера, мы рассмотрим одну из наиболее сложных и актуальных задач современной физики - описание макроскопически большой системы взаимодействующих частиц. Простейшая модель такой системы - модель идеального газа, в которой пренебрегается собственным размером молекул и считается, что молекулы движутся согласно законам классической механики, взаимодействуя друг с другом только посредством упругих столкновений. В этом случае состояние системы зависит от концентрации молекул n, температуры газа T и массы молекул m. Уравнение состояния для одного моля идеального газа, связывающее давление P, объем V и температуру T, имеет вид $PV = RT$ или, в терминах концентрации, $p = nk_BT$. Из последнего равенства очевидно, что размерность параметра k_BT такая же как и у кинетической энергии: ML^2T^{-2}. Поэтому в дальнейшем будем температуру измерять в энергетических единицах.

Модель идеального газа хорошо описывает поведение реальных газов в широком интервале температур и давлений. Однако известно, что при достаточно низких температурах и высоких давлениях реальный газ переходит в жидкое состояние, в котором объем очень мало меняется при повышении давления. Причина заключается в том, что силы отталкивания между молекулами на малых расстояниях настолько быстро возрастают при их сближении, что с хорошей точностью можно считать их абсолютно твердыми телами, обладающими собственным объемом. Этот объем ставит предел возможному сжатию газа. Отсюда естественно возникает простейшее обобщение модели идеального газа - модель твердых шаров.

Модель твердых шаров

В модели твердых шаров молекулы рассматриваются, как твердые гладкие шары радиуса r, взаимодействующие друг с другом только при соприкосновении. В момент касания шаров друг с другом их потенциальная энергия взаимодействия скачком обращается в бесконечность: шары, которыми мы моделируем молекулы газа, абсолютно непроницаемы. Наряду с параметрами n, k_BT и m, от которых зависело состояние и в идеальном газе, система характеризуется радиусом r, имеющим размерность длины L. Определим безразмерный параметр γ, который можно составить из n, k_BT,m и r:

$$\gamma = n^x (k_BT)^y m^z r^u$$

Можно, как и раньше, написать систему уравнений для показателей x, y, z и u. Однако в данном случае ответ виден сразу. Действительно, время входит только в k_BT, и, следовательно, k_BT в безразмерный параметр γ входить не может. Но тогда он не должен содержать и массу m. Из оставшихся двух величин r и n можно составить лишь один независимый безразмерный параметр $\gamma = nr^3$, физический смысл которого - произведение числа молекул в единице объема на объем одной молекулы, т.е. доля объема, занятого молекулами. В идеальном газе $\gamma << 1$. Отметим, что в газе твердых шаров не существует безразмерного параметра, зависящего от температуры. Следовательно, в этой модели невозможно получить перехода в жидкое состояние при уменьшении температуры.

Этот вывод можно сделать без каких-либо расчетов: просто из соображений размерности. Именно поэтому модель реального газа, описываемого уравнением Ван-дер-Ваальса, содержит два параметра, один из которых аналогичен рассмотренному выше, а другой - связан с взаимодействием между молекулами на расстояниях, много больших их собственного размера. Добавления одного параметра по сравнению с моделью идеального газа, как следует из соображений размерности, недостаточно.

Найдем теперь параметры размерности времени для модели газа твердых шаров. В общем случае такие параметры t можно записать как произведение одного из них на безразмерный параметр γ в произвольной степени α:

$$t = \frac{n^{-1/3}}{\sqrt{k_B T/m}}\gamma^{\alpha}.$$

Здесь $n^{-1/3}$ представляет собой характерное расстояние между молекулами, а $\sqrt{k_B T/m}$ - скорость теплового движения частиц. Поэтому их отношение связано со средним временем свободного пробега молекул. Подчеркнем, что все параметры размерности времени зависят от температуры как $T^{-1/2}$. Это означает, что любые процессы в газе твердых шаров, такие, например, как распространение тепла, звука или диффузия, определяются исключительно тепловым движением молекул.

Для описания неидеального газа, в котором частицы взаимодействуют и энергия взаимодействия зависит от расстояния между частицами, нужно ввести параметры, которые характеризуют это взаимодействие. Рассмотрим в качестве примера классическую плазму, состоящую из заряженных частиц, которые взаимодействуют между собой согласно закону Кулона.

Классическая плазма. Безразмерные параметры и параметры размерности времени

Отличительные свойства плазмы связаны с тем, что в ее состав входят свободные частицы, несущие электрический заряд. Рассмотрим простейшую модель однокомпонентной плазмы, в которой свободные частицы с зарядом q находятся в области, однородно заряженной зарядами противоположного знака, так что в целом система является электрически нейтральной. Для определения размерности q, в терминах введенных выше единиц LTM, воспользуемся законом Кулона в виде $F = q^2/r^2$. Получаем, что размерность $dim[q^2] = ML^3T^{-2}$.

Свойства плазмы, как и в случае идеального газа, определяются концентрацией частиц n, их массой m, температурой k_BT, а также зарядом частиц q. Построим безразмерный параметр γ из этих величин:

$$\gamma = n^x(k_BT)^y m^z (q^2)^u.$$

Приравнивая степени при одинаковых размерностях, получаем однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} L:0 &= -3x + 2y + 3u \\ T:0 &= -y - u \\ M:0 &= y + z + u \quad . \end{cases}$$

Её решение позволяет найти общий вид безразмерного параметра:

$$\gamma = \left(\frac{q^2 n^{1/3}}{k_BT}\right)^\alpha,$$

где α - произвольное число. Выражение в скобках представляет собой отношение средней потенциальной энергии кулоновского взаимодействия к средней кинетической энергии теплового движения частиц. Это единственный независимый безразмерный параметр модели. Таким образом, классическая плазма тем более идеальна (т.е. ближе к идеальному газу), чем ниже ее концентрация и выше температура.

Найдем теперь параметры размерности времени для классической плазмы. Отметим, что те параметры, которые были найдены для идеального газа и газа твердых шаров (не зависящие от радиуса шаров), очевидно, есть и для плазмы. Они связаны с тепловым движением частиц и определяются средним расстоянием между ними и их тепловой скоростью. Однако, в плазме существуют параметры размерности времени, не зависящие от температуры, т.е. скорости теплового движения. Найдем такой параметр, составив его из n, m, q^2 :

$$t_p = n^x m^y (q^2)^z.$$

Система уравнений для определения x,y и z имеет вид:

$$\begin{cases} L:0 &= -3x+3z \\ T:1 &= -2z \\ M:0 &= y+z \quad . \end{cases}$$

Поэтому

$$t_p \sim \sqrt{\frac{m}{nq^2}}.$$

Наличие характерного времени, не зависящего от скорости частиц, говорит о том, что для системы характерно колебательное движение. У математического маятника и грузила на пружине период колебаний не зависит от энергии системы, которая прямо связана с максимальной скоростью в процессе колебательного движения. Найденное время t_p действительно связано с периодом так называемых плазменных (ленгмюровских) колебаний, ответственных за электронейтральность плазмы [8]. При самопроизвольном разделении зарядов в плазме, которое может возникнуть из-за тепловых флуктуаций, возникают электрические поля, приводящие к колебаниям частиц. Эти колебания способствуют восстановлению электронейтральности плазмы. Отклонение от электронейтральности будет заметно только на протяжении времени, малого по сравнению с периодом плазменных колебаний. В среднем (на временах $t >> t_p$) плазма ведет себя как квазинейтральная среда. Время t_p задает характерный временной масштаб разделения зарядов.

Задача *Определить с помощью метода анализа размерности, как зависит период колебаний математического маятника от его длины l и ускорения свободного падения g. Может ли он зависеть от массы?*

Задача *Вывести формулу для периода ленгмюровских колебаний в плазме. Для этого рассмотреть плоский слой однородной нейтральной плазмы и сдвинуть положительные заряды относительно отрицательных на малую величину x перпендикулярно плоскости слоя. Получившееся распределение зарядов будет таким же, как и в плоском конденсаторе. Записать напряженность электрического поля внутри образовавшегося конденсатора через концентрацию заряженных частиц n, их заряд q и величину сдвига x. Затем записать уравнение движе-*

ния для заряженных частиц внутри слоя и убедиться, что полученное уравнение имеет тот же вид, что и уравнение колебаний математического маятника. Найти частоту, период колебаний и сравнить его с t_p.

Оценим теперь пространственный масштаб разделения элекрических зарядов в классической плазме. Флуктуации плотности частиц связаны с их хаотическим тепловым движением. Характерная скорость теплового движения частиц зависит от температуры: $< v >\sim \sqrt{k_B T/m}$. Пространственный масштаб разделения зарядов можно оценить, умножив тепловую скорость на характерное время движения в одном направлении. Для газа нейтральных частиц это время равно времени свободного пробега между столкновениями с атомами или молекулами. В плазме это время определяется периодом плазменных колебаний: при пространственном разделении зарядов возникают колебания, которые стремятся восстановить электронейтральность. В процессе этих колебаний скорость зарядов меняет свое направление за половину периода. Таким образом, для оценки размера области пространственного разделения зарядов можно использовать величину

$$r_D \sim \sqrt{\frac{k_B T}{m}} t_p = \sqrt{\frac{k_B T}{n q^2}}.$$

Эта величина определяет дебаевский радиус экранирования r_D. На расстояниях больше r_D происходит экранирование кулоновского поля любого заряда.

Заряды в плазме экранируются другими зарядами, находящимися внутри сферы, ограниченной дебаевским радиусом r_D. Можно оценить это число N, умножив концентрацию зарядов n на объем сферы, пропорциональный ${r_D}^3$. В результате должна получиться безразмерная величина. Но общий вид безразмерного параметра для плазмы, как мы видели выше, имеет вид γ^α. Действительно,

$$N \sim n \left(\frac{k_B T}{n q^2}\right)^{3/2} = \left(\frac{q^2 n^{1/3}}{k_B T}\right)^{-2/3} .$$

Таким образом, $\alpha = -2/3$. Это означает, что чем более идеальна плазма (меньше γ), тем большее число зарядов принимает участие в экранировании и, наоборот, в сильно неидеальной плазме, где потенциальная энергия достаточно велика по сравнению с кинетической, экранирование осуществляется небольшим числом зарядов.

Приведем некоторые численные оценки. Для типичной классической лабораторной плазмы с концентрацией заряженных частиц, электронов $n \approx 10^{14} cm^{-3}$, плазменная частота составляет примерно $5 \cdot 10^{11} c^{-1}$, что на 3 порядка меньше частоты видимого света. Значение r_D зависит от температуры. При термоядерных температурах ($k_B T \approx 10^4 eV$) $r_D \approx 10^{-2} cm$.

Плазменные колебания представляют собой электрические продольные колебания, в которых вектор напряженности электрического поля направлен вдоль движения частиц, а магнитное поле практически отсутствует. Помимо таких колебаний, в плазме, как и в других материальных средах, могут существовать обычные поперечные электромагнитные волны. Для этих волн плазменная частота является граничной: волны с меньшей частотой не проникают в плазму, так как их низкочастотное электромагнитное поле экранируется свободными электронами плазмы и волна отражается от границы плазмы. Волны с частотой выше частоты ленгмюровских колебаний проникают в плазму. Для ионосферной плазмы граница прозрачности соответствует метровым радиоволнам. Поэтому радиосвязь с космическими объектами возможна только в диапазоне метровых и дециметровых волн. Отражение волн в несколько десятков метров от ионосферы используется для земной радиосвязи на больших расстояниях.

Квантовая плазма. Сравнение классической и квантовой плазмы

Рассмотрим теперь квантовую плазму, в которой в системе заряженных частиц могут проявляться квантовые свойства. Попробуем на основе метода анализа размерности ответить на вопрос: когда необходимо квантовое, а когда достаточно классического описания? Фундаментальные законы квантовой механики - соотношение неопределенности Гейзенберга, уравнение Шредингера и другие содержат постоянную Планка h. Поэтому естественно предположить, что безразмерные параметры, показывающие, достаточно ли классическое описание, должны содержать постоянную Планка. Добавим к переменным, которые характеризовали классическую плазму (концентрация n, масса частиц m, заряд q^2, температура $k_B T$), ещё одну переменную h. Её размерность $dim[h] = ML^2T^{-1}$, как сразу видно из соотношения $E = h\nu$. Безразмерный параметр классической плазмы γ, представляющий собой отношение средней потенциальной к средней кинетической энергии, останется и для квантовой плазмы. Однако здесь появятся новые безразмерные параметры, в частности, не зависящие от температуры. Построим такой параметр Γ:

$$\Gamma = n^x (q^2)^y m^z h^u.$$

Решая систему уравнений для показателей x, y, z и u :

$$\begin{cases} L : 0 &= -3x + 3y + 2u \\ T : 0 &= -2y - u \\ M : 0 &= y + z + u \end{cases},$$

получаем:

$$\Gamma = \left(n^{1/3} q^2 m h^{-2}\right)^z = \left(\frac{q^2 n^{1/3}}{\frac{h^2 n^{2/3}}{m}}\right)^z,$$

где z - произвольное число. Примем за безразмерный параметр Γ значение при $z = 1$.

В числителе выражения в скобках стоит средняя потенциальная энергия зарядов в плазме. Поскольку Γ безразмерна, в знаменателе тоже должна стоять некоторая энергия, связанная с квантовыми свойствами плазмы. Действительно, для невзаимодействующих фермионов это энергия Ферми E_F. Для этих частиц выполняется принцип запрета Паули: они не могут находиться в одном и том же квантовом состоянии. При абсолютном нуле температуры энергия фермионов минимальна, и они занимают все состояния с энергией меньше E_F. У невзаимодействующих частиц есть только кинетическая энергия и заполнены все состояния с импульсом меньшим, чем $p_F = \sqrt{2mE_F}$, где m - масса частиц. В импульсном пространстве эти состояния занимают объем внутри сферы радиуса p_F, который пропорционален $(2mE_F)^{3/2}$. Если в координатном пространстве частицы находятся в области объемом V, то в шестимерном фазовом пространстве координата-импульс они занимают объем $V \cdot (2mE_F)^{3/2}$. На каждую частицу, согласно соотношению неопределенности Гейзенберга, в этом пространстве приходится объем h^3. Поэтому для числа частиц N имеем:

$$N \sim \frac{V \cdot (mE_F)^{3/2}}{h^3}.$$

Учитывая, что концентрация зарядов $n = N/V$, для энергии Ферми получаем:

$$E_F \sim \frac{h^2 n^{2/3}}{m}.$$

Для невзаимодействующих бозонов аналогичное выражение определяет температуру бозе-конденсации [10]. Обратим внимание, что в выражении для Г концентрация входит и в числитель, и в знаменатель, тогда как в безразмерный параметр для классической плазмы γ - только в числитель. Это означает, что классическая плазма тем менее идеальна, чем больше концентрация частиц, а квантовая, наоборот, тем более идеальна, чем больше концентрация. В обоих случаях потенциальная энергия растет с увеличением плотности частиц. Однако в квантовом случае ее надо сравнивать с энергией, обусловленной квантовыми эффектами, которая растет с концентрацией сильнее. Это объясняет тот факт, что в моделях атомного ядра не учитывают кулоновское взаимодействие между протонами, хотя абсолютная величина энергии этого взаимодействия, если считать протоны точечными частицами, увеличивается пропорционально $n^{2/3}$. Тем не менее, она пренебрежимо мала по сравнению с квантовыми вкладами в энергию, растущими как $n^{2/3}$. При описании нейтронной звезды, например, можно не учитывать электрических взаимодействий не потому, что все частицы там строго электронейтральны, а потому, что эти взаимодействия не существенны по сравнению с квантовыми эффектами и $\Gamma << 1$.

Рассмотрим теперь отношение γ/Γ. Это тоже безразмерный параметр, представляющий собой отношение «квантовой» энергии к энергии тепловой:

$$\frac{\gamma}{\Gamma} = \frac{\frac{h^2 n^{2/3}}{m}}{k_B T} = \left(\frac{h}{\sqrt{m k_B T}} \cdot \frac{1}{n^{-1/3}} \right)^{1/2}$$

Первый множитель в скобках представляет собой де-бройлевскую длину волны частиц, движущихся с тепловой скоростью, а второй - обратное среднее расстояние между частицами. Таким образом, если расстояние между частицами много больше их де-бройлевской длины волны, квантовые поправки не существенны. Если оно порядка длины волны, то нужно пользоваться формулами квантовой теории.

Переходя к численным оценкам, отметим что энергия Ферми для электронов в металле, благодаря высокой концентрации частиц, составляет несколько электронвольт ($1eV \approx 1.16 \cdot 10^4 K$). Поэтому электроны в металле - всегда квантовые, и распределение Ферми очень слабо отличается от ступенчатой функции практически при всех достижимых температурах. В полупроводниках, за счет уменьшения концентрации, электронная плазма может быть более близка к классической.

Число электронов N, находящихся внутри сферы, равной дебаевскому радиусу экранирования кулоновского взаимодействия в случае вырожденной квантовой плазмы - системы электронов проводимости в металле - отличается от случая классической плазмы. Радиус экранирования r_D теперь определяется произведением скорости Ферми электронов (p_F/m) на время порядка периода плазменных колебаний t_p:

$$r_D \sim \frac{hn^{1/3}}{m} \cdot \sqrt{\frac{m}{nq^2}} = \frac{h}{qm^{1/2}n^{1/6}}.$$

Таким образом, число экранирующих частиц N выражается через безразмерный параметр $\Gamma^{-3/2}$:

$$N \sim \frac{h^3}{q^3 m^{3/2} n^{1/2}} \cdot n = \frac{h^3 n^{1/2}}{q^3 m^{3/2}} = \left(\frac{q^2 n^{1/3}}{\frac{h^2 n^{2/3}}{m}}\right)^{-3/2},$$

В реальных металлах $1 \leq \Gamma \leq 6$. Поэтому внутри дебаевской сферы $N < 1$. Таким образом, радиус экранирования кулоновского взаимодействия в металлах меньше среднего расстояния между электронами. Кулоновское взаимодействие электронов экранируется, и между квазичастицами - экранированными электронами - есть только короткодействующие силы. Кроме того, энергия возбуждения кванта плазменных колебаний, плазмона, h/t_p в реальных металлах больше, чем энергия Ферми E_F. Действительно, $h/t_p \sim hn^{1/2}q/m1/2$, а $E_F \sim h^2 n^{2/3}/m$. Отношение

$$\frac{E_F}{h/t_p} \sim \Gamma^{-1/2} < 1.$$

Это означает, что движущиеся электроны не могут возбуждать квантов плазменных колебаний. Эти колебания приводят только к экранированию кулоновского взаимодействия между электронами, в результате чего взаимодействие между получающимися квазичастицами становится короткодействующим.

В полупроводниках, имеющих гораздо меньшую концентрацию зарядов, электронно-дырочный газ необязательно является вырожденным. Тем не менее, квантовые эффекты могут играть в них существенную роль. Поэтому для них будем рассматривать два безразмерных параметра: γ и $\Gamma\gamma$. Общий вид безразмерного параметра, который можно составить из параметров, характеризующих рассматриваемую систему, можно записать как

$$\Sigma = \gamma \cdot \varphi\left(\gamma/\Gamma\right),$$

где вид функции $\varphi(x)$ можно легко найти в предельных случаях. В пределе высоких температур система является классической ($\gamma/\Gamma << 1$) и $\varphi(\gamma/\Gamma) = 1$. В ультраквантовой системее ($\gamma/\Gamma >> 1$) параметр Σ не должен зависеть от температуры. В этом случае должно быть $\varphi(x) = 1/x$ и $\Sigma = \Gamma$.

В полупроводниках параметр Γ может быть как больше, так и меньше единицы в зависимости от эффективных масс электронов и дырок и их концентрации. Поэтому число частиц внутри дебаевской сферы может быть как больше (при $\Gamma < 1$), так и меньше единицы (при $\Gamma > 1$).

Список литературы

[1] Ф. Андерсон. Локальные моменты и локализованные состояния. УФН, **127**, вып.1 с. 19-399.

[2] П. Бриджмен. Анализ размерностей. Изд. 2. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика, 2001. - 148 с.

[3] А.Б. Мигдал. Качественные методы в квантовой теории - М.: Наука, 1975. - 335 с.

[4] Д.В. Сивухин. Общий курс физики т.1 Механика. - 6-е испр. : Физматлит, 2013 - 560 с.

[5] В.А. Зорич. Математический анализ задач естествознания. — Новое изд., доп. М.: МЦНМО, 2017 - 160 с.

[6] Л.И. Седов. Методы подобия и размерности в механике. - 8-е изд., перераб. М.: Наука, 1977. - 440 с.

[7] Г.Е. Хантли. Анализ размерностей. М.: Мир, 1970. – 176

[8] Е.И. Бутиков, А.С. Кондратьев, В.М. Уздин. Физика. Том 3. Строение и свойства вещества. Изд. 2. М: Физматлит, 2017 - 336 с.

[9] А.С. Кондратьев, В.М. Уздин. Физика. Сборник задач. М: Физматлит, 2005 - 392 с.

[10] Ч. Киттель. Статистическая термодинамика. М: Наука, 1977. - 336 с.

Уздин Валерий Моисеевич

Математическое моделирование

Метод анализа размерностия

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции
Дизайн обложки М.В. Молчанова

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф.Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49