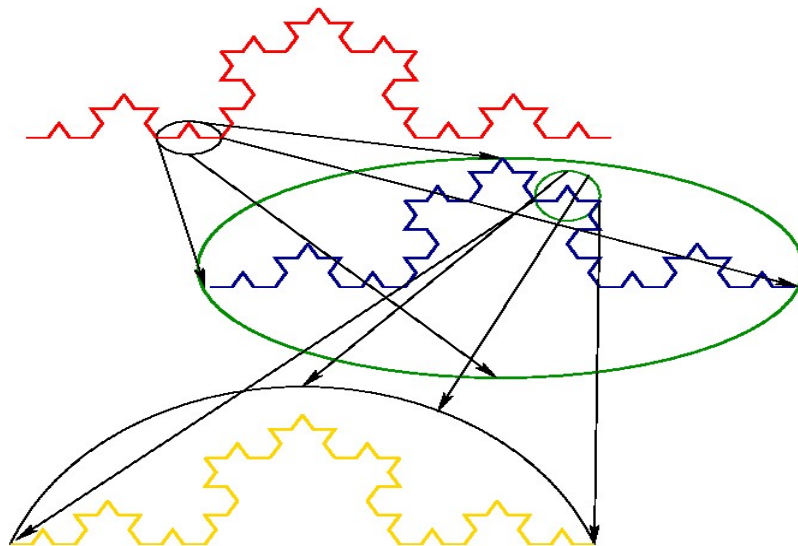


А.Д. Киселев, Г.П. Мирошниченко
ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ



Санкт-Петербург
2019

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.Д. Киселев, Г.П. Мирошниченко
ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 12.03.03 Фотоника и оптоинформатика
в качестве учебно-методического пособия для реализации основных
профессиональных образовательных программ высшего образования
бакалавриата,

 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург
2019

Киселев А.Д., Мирошниченко Г.П., Элементы квантовой оптики– СПб:
Университет ИТМО, 2019. – 83 с.

Рецензент(ы):

Попов Игорь Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор (квалификационная категория "ведущий профессор") факультета систем управления и робототехники, Университета ИТМО.

Пособие содержит теоретический материал, излагаемый в рамках курса квантовой оптики. Основное внимание уделено математическим методам анализа основных моделей квантовой оптики, таких как двухуровневая модель, квадратичные бозонные модели, модели Джейнса-Каммингса и Тэйвиса-Каммингса. Подробно обсуждаются представление когерентных состояний и свойства сжатых состояний.



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2019

© Киселев А.Д., Мирошниченко Г.П., 2019

Содержание

Предисловие	5
1 Алгебра квантового гармонического осциллятора	6
1.1 Краткий обзор основных положений квантовой механики.	6
1.2 Классический осциллятор	8
1.3 Спектр квантового осциллятора	9
1.4 Волновые функции в координатном представлении	11
1.4.1 Квантование Бора–Зоммерфельда	11
1.5 Операторные соотношения	12
1.6 Линейные канонические преобразования операторов	13
1.7 Многомерный квантовый осциллятор	14
2 Матрица плотности	16
2.1 Оператор эволюции	16
2.1.1 Функция Грина свободной частицы	17
2.1.2 Картины Шредингера и Гейзенберга	17
2.2 Эволюция операторов рождения и уничтожения	18
2.3 Матрица плотности: чистые и смешанные состояния	18
2.3.1 Уравнение для матрицы плотности	21
2.3.2 Распределение Гиббса	21
2.3.3 Распределение Гиббса для квантового осциллятора	22
2.4 Двухуровневая система	22
2.4.1 Приближение вращающейся волны	27
3 Представление когерентных состояний	30
3.1 Соотношения неопределенностей	30
3.2 Когерентные состояния	32
3.3 Сжатые состояния	35
3.4 Осциллятор под действием внешней силы	38
3.4.1 Эволюция когерентного состояния	39

3.4.2	Вероятности квантовых переходов	41
3.5	Представление Фока-Баргмана	42
3.6	Символы операторов	44
3.7	Характеристические функции	48
4	Редукция матрицы плотности	52
4.1	Осциллятор в одномодовом квантованном поле	54
4.1.1	Спектр энергий и стационарные состояния	56
4.1.2	Эволюция когерентных состояний	58
4.1.3	Редуцированная матрица плотности	59
4.1.4	Эволюция редуцированной матрицы плотности	61
4.1.5	Нерезонансные слагаемые	63
4.2	Модель Джейнса–Каммингса и ее обобщения	65
4.2.1	Симметрия и интегралы движения	66
4.2.2	Одетые состояния	67
4.2.3	Коллапс и восстановления	68
4.2.4	JS–модель с произвольным спином	71
4.2.5	Три связанных осциллятора	76
	Список литературы	79

Предисловие

В доквантовую эпоху в физике существовали методологически два разных раздела физики – классическая механика частиц и классическая волновая оптика. Их математический аппарат различался кардинально. Естественно было объединить аппараты, используемые в каждой науке, что и было сделано в начале 20 века. Так появилась волновая механика – квантовая механика, и теория фотонов, “частиц света”, квантов излучения – квантовая оптика. Безусловно, и классическая механика, и классическая оптика не потеряли своей области применения. Если сказать кратко, то квантовая оптика – это та область оптики, где имеют значение и наблюдаются квантовые свойства света.

Курс “Квантовая оптика” читается для студентов академического бакалавриата по направлению подготовки 01.03.02. – “Прикладная математика и информатика” по специализации “Математическое моделирование” наряду с такими курсами теоретической физики, как “Квантование на искривленных поверхностях”, “Защита информации в квантовых каналах”, “Квантовые алгебры и обобщенные когерентные состояния”, “Функциональные методы в моделях физики конденсированного состояния”, “Квантовая механика”, “Алгебры Ли и группы Ли”, “Современная теория информации”.

Данное пособие рекомендовано для использования в рамках дисциплины “Квантовая оптика” в качестве вспомогательного материала для проведения контактной работы (лекционных занятий, практических занятий) и для самостоятельной работы студентов.

Пособие знакомит обучающихся с математическим аппаратом квантовой оптики, в нем кратко даны основные определения курса, а также приводятся упражнения для самостоятельной работы, снабженные пояснениями, облегчающими поиск решений предложенных задач.

Алгебра квантового гармонического осциллятора

1.1. Краткий обзор основных положений квантовой механики.

Квантовая механика разделяет понятия состояния системы и физической величины (наблюдаемой, динамической переменной), значения которой могут быть экспериментально измерены и которые характеризуют состояние физической системы [1–4].

В координатном представлении состояния системы описываются комплекснозначными функциями координат, которые называются волновыми функциями (или Ψ -функциями). Эти функции образуют линейное пространство (принцип суперпозиции), снабженное скалярным произведением

$$(\phi, \psi) = \int \phi^*(x)\psi(x)dx. \quad (1.1)$$

Обозначения 1 (бра-кет обозначения Дирака [Dirac])

$$|\psi\rangle \equiv \psi(x), \quad \langle\phi| \equiv \phi^*(x), \quad (\phi, \psi) \equiv \langle\phi|\psi\rangle,$$

$|\psi\rangle$ — кет-вектор; $\langle\phi|$ — бра-вектор.

Бра-кет обозначения для линейных операторов иллюстрируются ниже на примере проектора:

$$\hat{A} = |\psi\rangle\langle\phi| \implies \hat{A}|f\rangle = |\psi\rangle\langle\phi|f\rangle.$$

Эквивалентная запись в координатном представлении определяет оператор \hat{A} через его ядро $A(x, x')$:

$$\hat{A}: f(x) \rightarrow (\hat{A}f)(x) = \int A(x, x')f(x')dx', \quad A(x, x') = \psi(x)\phi^*(x').$$

В свою очередь, наблюдаемым соответствуют эрмитовы (самосопряженные) линейные операторы (в обозначениях часто различаемых при помощи шляпки). Таким образом, соответствие вида

$$A \rightarrow \hat{A}, \quad \hat{A}^\dagger = \hat{A}$$

означает квантование классической наблюдаемой A , которая в квантовой механике представляется оператором \hat{A} . Так, в координатном представлении,

$$x_i \rightarrow \hat{x}_i = x_i, \quad p_i \rightarrow \hat{p}_i = -i\hbar \partial_{x_i},$$

координате соответствует оператор умножения на координату, а компоненте импульса — оператор дифференцирования по соответствующей координате.

Напомним, что

Определение 1.1.1 (эрмитово сопряжение операторов) Оператор \hat{A}^\dagger является эрмитово сопряженным с оператором \hat{A} , если равенство

$$(\phi, \hat{A}\psi) [\equiv \langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle] = (\hat{A}^\dagger \phi, \psi) [\equiv \langle \hat{A}^\dagger \phi | \psi \rangle]$$

выполняется для любых пар функций (в квадратных скобках приведены бракет обозначения).

Среднее значение наблюдаемой \hat{A} , полученное в результате измерений над квантовой системой, приготовленной в состоянии $|\psi\rangle$, определяется как

$$\bar{A}_\psi = (\psi, \hat{A}\psi) \equiv \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle. \quad (1.2)$$

при условии, что волновая функция нормирована условием нормировки:

$$\langle \psi | \psi \rangle \equiv \int |\psi(x)|^2 dx = 1. \quad (1.3)$$

Так как $|\psi(x)|^2$ — плотность распределения вероятности координаты в квантовом состоянии $|\psi\rangle$, соотношение нормировки (1.3) представляет собой условие равенства единицы полной вероятности.

Уравнение, управляющее эволюцией квантовой системы, — *нестационарное уравнение Шредингера* [Shrödinger]:

$$i\hbar \partial_t |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle, \quad \hat{H} \text{ — оператор энергии (гамильтониан)}. \quad (1.4)$$

Состояния с определенной энергией называются *стационарными состояниями* (или *энергетическим уровнем*) и соответствуют собственным функциям гамильтониана, тогда как значения энергии — соответствующие собственные значения. Уравнение для стационарных состояний — *стационарное уравнение Шредингера*:

$$\boxed{\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle}, \quad |E\rangle \text{ — стационарное состояние с энергией } E. \quad (1.5)$$

Очевидно, эволюция стационарных состояний проста:

$$\boxed{|\psi(t=0)\rangle = |E\rangle} \implies \boxed{|\psi(t)\rangle = \exp(-iEt/\hbar)|E\rangle}. \quad (1.6)$$

Для сравнения в гамильтоновой классической механике состояние системы характеризуется набором значений импульсов и координат, а наблюдаемые представляются функциями импульсов и координат.

1.2. Классический осциллятор

Функция Гамильтона [Hamilton] для одномерного осциллятора:

$$H(x, p) = T(p) + V(x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \quad (1.7)$$

является суммой кинетической, $T(p)$, и потенциальной, $V(x)$, энергий.

Запишем уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{x} = \partial_p H = p/m \\ \dot{p} = -\partial_x H = -m\omega^2 x \end{cases} \quad (1.8)$$

В голоморфном представлении, сопоставляющем фазовому пространству комплексную плоскость, введем комплексную амплитуду:

$$\boxed{\alpha_{cl} = (2m)^{-1/2} (m\omega x + ip)}, \quad (1.9)$$

эволюция которой, согласно (1.8), определена как:

$$\boxed{\dot{\alpha}_{cl} = -i\omega\alpha_{cl}} \implies \boxed{\alpha_{cl}(t) = \exp(-i\omega t)\alpha_{cl}(0)}. \quad (1.10)$$

Результат, очевидно, вполне предсказуемый из закона сохранения энергии:

$$|\alpha_{cl}(t)|^2 = |\alpha_{cl}(0)|^2 = E \equiv H(x(0), p(0)). \quad (1.11)$$

1.3. Спектр квантового осциллятора

Оператор энергии осциллятора получаем из классического гамильтониана (1.7), заменяя импульс оператором импульса:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2, \quad \hat{p} = -i\hbar\partial_x. \quad (1.12)$$

Введем операторы рождения и уничтожения как пару взаимно эрмитово сопряженных операторов

$$a^\dagger = (2m\hbar\omega)^{-1/2} (m\omega x - i\hat{p}) \text{ — оператор рождения [creation]} \quad (1.13)$$

$$a = (2m\hbar\omega)^{-1/2} (m\omega x + i\hat{p}) \text{ — оператор уничтожения [annihilation]} \quad (1.14)$$

с легко проверяемым коммутационным соотношением:

$$[x, \hat{p}] = i\hbar \implies [a, a^\dagger] = 1. \quad (1.15)$$

Гамильтониан (1.12) выразим через операторы (1.13)-(1.14):

$$\hat{H} = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2) \quad (1.16)$$

Предложение 1.3.1 *Собственные значения оператора (1.16) удовлетворяют неравенству:*

$$E \geq \hbar\omega/2$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Это неравенство следует из того, что $\langle \psi | a^\dagger a | \psi \rangle = \langle \hat{a}\psi | \hat{a}\psi \rangle \geq 0$. ■

Предложение 1.3.2 (лестничное свойство)

$$\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle \implies a|E\rangle \propto |E - \hbar\omega\rangle, \quad a^\dagger|E\rangle \propto |E + \hbar\omega\rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Следует подействовать оператором (1.16) на $a|E\rangle$ и $a^\dagger|E\rangle$, воспользовавшись затем коммутационными соотношениями (1.15). ■

Таким образом, основное состояние, которое соответствует наименьшему значению энергии и называется *вакуумным состоянием*, должно уничтожаться оператором уничтожения:

$$a|\text{vac}\rangle = 0, \quad |\text{vac}\rangle \equiv |0\rangle. \quad (1.17)$$

В координатном представлении волновую функцию вакуумного состояния можно найти, решая дифференциальное уравнение 1-го порядка (1.17), которое можно переписать в виде

$$(\xi + \partial_\xi)\psi_{vac} = 0, \quad \xi \equiv [m\omega/\hbar]^{1/2} x. \quad (1.18)$$

Интегрируя (1.18) и определяя константу интегрирования из условия нормировки, имеем

$$\psi_{vac}(x) \equiv \psi_0(x) = N \exp(-m\omega x^2/(2\hbar)), \quad N = [m\omega/(\pi\hbar)]^{1/4}. \quad (1.19)$$

Зная вакуумное состояние, используем лестничное свойство для получения возбужденных состояний и, как результат, получим решение спектральной задачи для квантового осциллятора:

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad E_n = \hbar\omega(n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots (n \in \mathbb{N}). \quad (1.20)$$

Замечание 1.3.1

Полученный энергетический спектр — эквидистантный, т.е. разность $E_{n+1} - E_n = \hbar\omega$ не зависит от n , и собственные функции являются собственными для оператора числа частиц (заполнения):

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad \hat{N} = a^\dagger a \text{ — оператор числа частиц (заполнения)}. \quad (1.21)$$

Замечание 1.3.2 (нулевые колебания)

Энергию вакуумного состояния, $\hbar\omega/2$, называют *энергией нулевых колебаний* и, как несущественную аддитивную постоянную, часто при вычислениях опускают, меняя, таким образом, точку отсчета энергий.

Замечание 1.3.3

Собственные функции $|n\rangle$ образуют ортонормированный набор функций

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn} \equiv \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \text{ — символ Кронекера [Kronecker]} \quad (1.22)$$

в чем нетрудно убедиться, вычисляя $\langle 0|(a)^m(a^\dagger)^n|0\rangle$. При этом удобно воспользоваться (1.17) и коммутационным соотношением

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \xrightarrow{(1.15)} [a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1}. \quad (1.23)$$

Замечание 1.3.4

Коммутационные соотношения (1.23) и выражения для $|n\rangle$ (1.20) дают

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (1.24)$$

1.4. Волновые функции в координатном представлении

Запишем оператор рождения в виде

$$a^\dagger = (\xi - \partial_\xi)/\sqrt{2}, \quad \xi \equiv [m\omega/\hbar]^{1/2} x \quad (1.25)$$

и учтем вспомогательное тождество

$$\exp(-\xi^2/2)(\xi - \partial_\xi) \exp(\xi^2/2) = -\partial_\xi.$$

Тогда из уравнений (1.19) и (1.20) получим

$$\frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \psi_0(x) = (2)^{-n/2} (n!)^{-1/2} N \exp(-\xi^2/2) \cdot \{(-1)^n \exp(\xi^2) \partial_\xi^n \exp(-\xi^2)\}.$$

Замечание 1.4.1 (полиномы Эрмита [Hermite])

$$H_n(\xi) = (-1)^n \exp(\xi^2) \partial_\xi^n \exp(-\xi^2) \text{ — полиномы Эрмита} \quad (1.26)$$

удовлетворяют уравнениям

$$H'_n = 2nH_{n-1}, \quad H''_n - 2\xi H'_n + 2nH_n = 0.$$

Производящая функция полиномов Эрмита:

$$G(\xi, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\xi)}{n!} s^n = \exp[\xi^2 - (s - \xi)^2].$$

Окончательные выражения для волновых функций:

$$\psi_n(x) = (2)^{-n/2} (n!)^{-1/2} N \exp(-\xi^2/2) H_n(\xi). \quad (1.27)$$

Квантование Бора–Зоммерфельда

Покажем, что квантовый осциллятор является системой, близкой к классической. А именно, мы вычислим энергии осциллятора в квазиклассическом приближении, используя правило квантования Бора–Зоммерфельда [Bohr-Zommerfeld]:

$$\hbar^{-1} \int_a^b \sqrt{2m(E_n - V(x))} dx = (n + 1/2)\pi, \quad V(a) = V(b) = E_n, \quad (1.28)$$

где последнее условие означает, что точки a и b — точки поворота ($a < b$). В нашем случае $a = -\omega^{-1}\sqrt{2E_n/m}$ и $b = \omega^{-1}\sqrt{2E_n/m}$. Дальнейшие вычисления интеграла нетрудно провести явно и убедиться в том, что мы воспроизведем точный результат (1.20)!! Отметим, что, строго говоря, квазиклассическое приближение соответствует главному члену асимптотического разложения по $1/\hbar$ и применимо лишь для высоковозбужденных уровней ($n \gg 1$).

1.5. Операторные соотношения

Предложение 1.5.1

$$\boxed{\exp(\hat{A})\hat{B}\exp(-\hat{A}) = \exp(\text{ad } \hat{A})[\hat{B}], \quad \text{ad } \hat{A}[\hat{B}] \equiv [\hat{A}, \hat{B}]} \quad (1.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Введем оператор-функцию, зависящую от параметра τ :

$$f(\tau) = \exp(\hat{A}\tau)\hat{B}\exp(-\hat{A}\tau)$$

и запишем ее разложение в ряд Тейлора [Taylor]:

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tau^n.$$

Осталось заметить, что

$$f'(0) = [A, B] = \text{ad } A[B], \quad f''(0) = [A, [A, B]] = (\text{ad } A)^2[B] \dots$$

и положить $\tau = 1$:

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\text{ad } A)^n}{n!} [B]. \quad (1.30)$$

Полученный ряд — экспонента оператора $\text{ad } A$. ■

Замечание 1.5.1

В частном случае, когда $(\text{ad } \hat{A})^n[\hat{B}] = 0$ при $n > 1$ имеем:

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 \quad \implies \quad \exp(\hat{A}\tau)\hat{B}\exp(-\hat{A}\tau) = \hat{B} + \tau[\hat{A}, \hat{B}]. \quad (1.31)$$

Предложение 1.5.2 (Бэкер-Кэмпбелл-Хаусдорф [Baker-Campbell-Hausdorff])

Рассмотрим частный случай, когда

$$\boxed{[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0.}$$

Тогда

$$\exp(\hat{A} + \hat{B}) = \exp(\hat{A}) \exp(\hat{B}) \exp(-[\hat{A}, \hat{B}]/2). \quad (1.32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Введем оператор-функцию, зависящую от параметра τ :

$$F(\tau) = \exp(\hat{A}\tau) \exp(\hat{B}\tau).$$

Дифференцируя $f(\tau)$ и преобразовывая результат при помощи (1.31) получаем уравнение:

$$F'(\tau) = (\hat{A} + \hat{B} + \tau[\hat{A}, \hat{B}])F(\tau) = F(\tau)(\hat{A} + \hat{B} + \tau[\hat{A}, \hat{B}]),$$

интегрируя которое и полагая $\tau = 1$, доказываем формулу. ■

1.6. Линейные канонические преобразования операторов

Определение 1.6.1 *Линейное преобразование операторов рождения-уничтожения, сохраняющее коммутационные соотношения:*

$$\hat{a} \rightarrow \hat{A} = \mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger, \quad \hat{a}^\dagger \rightarrow \hat{A}^\dagger = \mu^*\hat{a}^\dagger + \nu^*\hat{a}, \quad [\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = 1, \quad \mu, \nu \in \mathbb{C} \quad (1.33)$$

будем называть каноническим.

Из определения получаем, что условие каноничности накладывает следующее ограничение на модули констант μ и ν :

$$|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1 \quad \implies \quad |\mu| = \cosh r, \quad |\nu| = \sinh r, \quad r \geq 0. \quad (1.34)$$

Предложение 1.6.1

$$\begin{aligned} \hat{T}_1(\phi) = \exp(i\phi\hat{N}) \quad \implies \quad \hat{T}_1(\phi) \hat{a} \hat{T}_1(-\phi) &= \exp(-i\phi)\hat{a}, \\ \hat{T}_1(\phi) \hat{a}^\dagger \hat{T}_1(-\phi) &= \exp(i\phi)\hat{a}^\dagger. \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}(\zeta) = \exp[\hat{q}(\zeta)], \quad \hat{q}(\zeta) &= (\zeta^*(\hat{a})^2 - \zeta(\hat{a}^\dagger)^2)/2, \quad \zeta = r \exp(i\theta); \quad \implies \\ \implies \quad \hat{S}(\zeta) \hat{a} \hat{S}(-\zeta) &= \hat{a} \cosh r + \hat{a}^\dagger \exp(i\theta) \sinh r, \\ \hat{S}(\zeta) \hat{a}^\dagger \hat{S}(-\zeta) &= \hat{a}^\dagger \cosh r + \hat{a} \exp(-i\theta) \sinh r. \end{aligned} \quad (1.36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Оба соотношения доказываются при помощи формулы (1.29). Для соотношения (1.35) замечаем, что

$$\boxed{[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}, [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger;} \implies \boxed{(\text{ad } \hat{N})^n[\hat{a}] = (-1)^n \hat{a}, (\text{ad } \hat{N})^n[\hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger.} \quad (1.37)$$

Подстановка (1.37) в (1.29) даст требуемый результат, если вспомнить разложение экспоненты в степенной ряд

$$\exp(\pm i\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm i\phi)^n}{n!}.$$

Аналогично, из

$$\boxed{\text{ad } \hat{q}(\zeta)[\hat{a}] = \zeta \hat{a}^\dagger, \quad \text{ad } \hat{q}(\zeta)[\hat{a}^\dagger] = \zeta^* \hat{a}} \quad (1.38)$$

и разложений

$$\cosh r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{(2k)!}, \quad \sinh r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

получаем соотношения (1.36). ■

1.7. Многомерный квантовый осциллятор

Простейшим является случай k невзаимодействующих осцилляторов:

$$\boxed{\hat{H} = \sum_{i=1}^k \frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + \frac{m_i \omega_i^2}{2} x_i^2, \quad \hat{p}_i = -i\hbar \partial_{x_i}.} \quad (1.39)$$

Введем операторы рождения и уничтожения для каждой моды

$$\boxed{a_i^\dagger = (2m_i \hbar \omega_i)^{-1/2} (m_i \omega_i x_i - i\hat{p}_i),} \quad (1.40)$$

$$\boxed{a_i = (2m_i \hbar \omega_i)^{-1/2} (m_i \omega_i x_i + i\hat{p}_i)} \quad (1.41)$$

с легко проверяемыми коммутационными соотношениями:

$$\boxed{[x_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}} \implies \boxed{[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}}. \quad (1.42)$$

Гамильтониан (1.39) выразим через операторы (1.40)- (1.41):

$$\boxed{\hat{H} = \hbar \sum_{i=1}^k \omega_i (\hat{N}_i + 1/2), \quad \hat{N}_i = a_i^\dagger a_i.} \quad (1.43)$$

Решение спектральной задачи для каждой моды мы уже получили, так что имеем:

$$|\{n\}\rangle \equiv |n_1, \dots, n_k\rangle = \prod_{i=1}^k \frac{(a_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |0\rangle, \quad a_i |\text{vac}\rangle = 0, \quad |\text{vac}\rangle \equiv |0, \dots, 0\rangle \equiv |0\rangle \quad (1.44)$$

$$E_{\{n\}} = \hbar \sum_{i=1}^k \omega_i (n_i + 1/2), \quad n_i \in \mathbb{N}. \quad (1.45)$$

Теперь стационарные состояния и их энергии классифицируются набором чисел заполнения (в обозначениях использован мультииндекс $\{n\} \equiv \{n_1, \dots, n_k\}$). Отметим, что теперь возможна ситуация, когда различные состояния имеют одинаковую энергию (*вырождение по энергии*). Такие энергетические уровни называются *вырожденными*. Общая задача о приведении квадратичных гамильтонианов к диагональному виду (1.43) при помощи канонических преобразований будет рассмотрена позже.

Матрица плотности

2.1. Эволюция в картинах Шредингера и Гейзенберга

Определение 2.1.1 *Оператор, описывающий временную эволюцию волновых функций,*

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad \hat{U}(t, t_0) \text{ — оператор эволюции} \quad (2.1)$$

называется оператором эволюции и, согласно уравнению Шредингера (1.4), удовлетворяет уравнению

$$i\hbar\partial_t\hat{U}(t, t_0) = \hat{H}\hat{U}(t, t_0), \quad \hat{U}(t_0, t_0) = \hat{I}. \quad (2.2)$$

Можно показать, что этот оператор унитарный:

$$\hat{U}^\dagger(t, t_0) = \hat{U}^{-1}(t, t_0) \quad (2.3)$$

и удовлетворяет соотношению композиции:

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t, t')\hat{U}(t', t_0), \quad t_0 \leq t' \leq t. \quad (2.4)$$

Когда гамильтониан не зависит явно от времени, можно записать оператор эволюции как операторную экспоненту:

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp\{-i\hat{H}(t - t_0)/\hbar\}. \quad (2.5)$$

Функция Грина свободной частицы

В качестве примера вычислим в координатном представлении ядро оператора эволюции эволюции, $G(x, x'; t, t_0)$ которое часто называют функцией Грина [Green], для свободной частицы с $V(x) = 0$.

$$\psi(x, t) = \int G(x, x'; t, t_0) \psi(x', t_0) dx', \quad G(x, x'; t, t_0) \text{ — функция Грина.} \quad (2.6)$$

Уравнение для функции Грина получим из уравнения (2.2)

$$i\hbar \partial_t G(x, x'; t, t_0) = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 G(x, x'; t, t_0), \quad G(x, x'; t_0, t_0) = \delta(x - x'). \quad (2.7)$$

Если ввести “мнимое время” $\tau = it$ и определить “эффективный коэффициент диффузии” как $D = \hbar/(2m)$, то задача сводится к задаче о функции Грина уравнения диффузии:

$$\partial_\tau G_h(x, x'; \tau, \tau_0) = D \partial_x^2 G_h(x, x'; \tau, \tau_0), \quad G_h(x, x'; \tau_0, \tau_0) = \delta(x - x'), \quad (2.8)$$

решение которой известно:

$$G_h(x, x'; \tau, \tau_0) = [4\pi D(\tau - \tau_0)]^{-1/2} \exp \left[-\frac{(x - x')^2}{4D(\tau - \tau_0)} \right]. \quad (2.9)$$

Аналитическое продолжение G_h на мнимую временную ось дает искомый результат в виде

$$G(x, x'; t, t_0) = \left[\frac{-im}{2\pi\hbar(t - t_0)} \right]^{1/2} \exp \left[\frac{im(x - x')^2}{2\hbar(t - t_0)} \right]. \quad (2.10)$$

Использованный технический прием, заключающийся в замене $t \rightarrow it$, в квантовой теории поля известен под названием “поворота Вика” [Wick].

Картины Шредингера и Гейзенберга

Нестационарное уравнение Шредингера (1.4) описывает, как волновая функция меняется во времени. При таком описании операторы, соответствующие наблюдаемым, не эволюционируют, и зависимость их средних значений от времени определяется эволюцией квантового состояния:

$$\bar{A}_\psi(t) = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle. \quad (2.11)$$

Описание такого сорта принято называть *картиной Шредингера*.

С другой стороны, используя оператор эволюции и соотношение (2.1), правую часть (2.11) можно переписать как усреднение зависящего от времени оператора:

$$\bar{A}_\psi(t) = \langle \psi(t_0) | \hat{A}(t) | \psi(t_0) \rangle, \quad \boxed{\hat{A}(t) = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{A} \hat{U}(t, t_0)}. \quad (2.12)$$

Представление, в котором эволюционируют операторы, а не волновые функции называют *картиной Гейзенберга* [Heisenberg]. Операторы в этом представлении опеределены согласно выделенной части уравнения (2.12), дифференцируя которую, получим

$$\boxed{-i\hbar \partial_t \hat{A}(t) = [\hat{H}, \hat{A}(t)]} \text{ — уравнения Гейзенберга.} \quad (2.13)$$

2.2. Эволюция операторов рождения и уничтожения

Вернемся к квантовому осциллятору и, согласно (2.5), запишем его оператор эволюции ($t_0 = 0$):

$$\boxed{U(t) = \exp\{-i\omega (\hat{N} + 1/2) t\}}. \quad (2.14)$$

Тогда в гейзенберговском представлении имеем выражения

$$\boxed{\hat{a}(t) = \exp\{i\omega t \hat{N}\} \hat{a} \exp\{-i\omega t \hat{N}\}, \quad \hat{a}^\dagger(t) = \exp\{i\omega t \hat{N}\} \hat{a}^\dagger \exp\{-i\omega t \hat{N}\}}, \quad (2.15)$$

которые можно вычислить, используя операторные соотношения (1.35):

$$\boxed{\partial_t \hat{a}(t) = -i\omega \hat{a}(t), \quad \partial_t \hat{a}^\dagger(t) = i\omega \hat{a}^\dagger(t)}. \quad (2.16)$$

К тому же результату можно придти, решая уравнения Гейзенберга (2.13), которые в нашем случае имеют простой вид:

$$\boxed{\partial_t \hat{a}(t) = -i\omega \hat{a}(t), \quad \partial_t \hat{a}^\dagger(t) = i\omega \hat{a}^\dagger(t)}. \quad (2.17)$$

2.3. Матрица плотности: чистые и смешанные состояния

В качестве первого шага рассмотрим, как можно устранить асимметрию между оператором наблюдаемой и квантовым состоянием в формуле для вычисления его среднего значения (1.2).

Перепишем ее в виде:

$$\boxed{\bar{A}_\psi = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \text{Tr}(\hat{A} \hat{P}_\psi), \quad \hat{P}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| \text{ — проектор на состояние } |\psi\rangle.} \quad (2.18)$$

Комментируя этот результат, далее будем предполагать, что мы располагаем некоторой *полной ортонормированной* системой функций $\{|\phi_i\rangle\}$. Это, в частности, означает, что “любую” функцию $|\phi\rangle$ можно разложить в ряд Фурье [Fourier]:

$$|\phi\rangle = \sum_i a_i |\phi_i\rangle, \quad a_i = \langle \phi_i | \phi \rangle \text{ — коэффициенты Фурье.} \quad (2.19)$$

Последнее можно записать как “разложение единицы”:

$$\boxed{\sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = \hat{I} \quad \text{— разложение единицы.}} \quad (2.20)$$

Действительно, действуя оператором левой части (2.20) на функцию $|\phi\rangle$, получим ее разложение в ряд Фурье (2.19).

Определение 2.3.1 (след оператора)

$$\text{Tr}(\hat{A}) = \sum_i \langle \phi_i | \hat{A} | \phi_i \rangle \quad (2.21)$$

След не зависит от выбора ортонормированного базиса и равен сумме собственных значений оператора.

Теперь с учетом разложения единицы (2.20) мы можем показать эквивалентность двух форм записи для среднего значения:

$$\text{Tr}(\hat{A} \hat{P}_\psi) = \sum_i \langle \psi | \phi_i \rangle \langle \phi_i | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle.$$

Определение 2.3.2 (матрица плотности чистого состояния)

$$\boxed{\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|} \quad (2.22)$$

Таким образом, мы характеризуем квантовое состояние самосопряженным оператором $\hat{\rho}$, который называется *матрицей плотности* [density matrix], и располагаем формулой для вычисления среднего значения

$$\boxed{\bar{A} = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}).} \quad (2.23)$$

При этом

$$\boxed{\text{Tr } \hat{\rho} = 1}, \quad (2.24)$$

$$\boxed{\langle \phi_i | \hat{\rho} | \phi_i \rangle = |\langle \phi_i | \psi \rangle|^2 \geq 0 - \text{вероятность обнаружить систему в состоянии } |\phi_i \rangle}.$$

До сих пор мы предполагали, что исследуемая система приготовлена и находится, в результате, в квантовом состоянии, характеризуемом некоторой волновой функцией $|\psi\rangle$. Распространенной, однако, является ситуация, когда результат процедуры приготовления можно описать лишь статистически, т.е. можно сказать, что с вероятностью W_n система находится в квантовом состоянии $|\psi_n\rangle$. В этом случае мы имеем дело со *статистической смесью*, которую можно охарактеризовать при помощи матрицы плотности [5, 6]:

Определение 2.3.3 (матрица плотности смешанного состояния)

$$\boxed{\hat{\rho} = \sum_n W_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|, \quad \sum_n W_n = 1, \quad W_n \geq 0.} \quad (2.25)$$

Можно сказать, что матрица плотности смешанного состояния описывает *некогерентную суперпозицию состояний* в следующем смысле:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_i a_i |\psi_i\rangle, \quad |\psi\rangle \langle \psi| = \sum_{i,j} a_i a_j^* |\psi_i\rangle \langle \psi_j| \xrightarrow{\text{усреднение по фазам}} \\ &\xrightarrow{\text{коэффициентов}} \sum_{i,j} \overline{a_i a_j^*} |\psi_i\rangle \langle \psi_j| = \sum_i W_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad W_i = \overline{|a_i|^2}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Иными словами, соотношение

$$\overline{a_i a_j^*} = |a_i| |a_j| \overline{\exp(i(\phi_i - \phi_j))} = 0, \quad i \neq j$$

указывает на хаотическое распределение фаз, что и означает некогерентность суперпозиции.

Усреднение наблюдаемой с матрицей плотности (2.25) дает статистически взвешенную сумму квантовых средних значений:

$$\boxed{\text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}) \equiv \langle \hat{A} \rangle = \sum_n W_n \bar{A}_{\psi_n}.} \quad (2.27)$$

Условие нормировки (2.24) и неотрицательность диагональных матричных элементов остаются в силе и для смешанных состояний. Укажем на свойство, позволяющее различать чистые и смешанные состояния:

$$\boxed{\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1 - \text{чистое состояние}, \quad \text{Tr}(\hat{\rho}^2) < 1 - \text{смешанное состояние}.} \quad (2.28)$$

Замечание 2.3.1

Укажем, впрочем, что для чистого состояния матрица плотности, очевидно, является проектором, в то время как это не так для смешанного состояния:

$$\boxed{\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \text{ — чистое состояние, } \hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho} \text{ — смешанное состояние.}} \quad (2.29)$$

Уравнение для матрицы плотности

Временную зависимость матрицы плотности можно выразить через оператор эволюции:

$$\bar{A}(t) \equiv \langle \hat{A}(t) \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}(t)) \xrightarrow{(2.12)} \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \hat{U}(t)) = \text{Tr}(\hat{\rho}(t) \hat{A}),$$

$$\boxed{\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t) \hat{\rho} \hat{U}^\dagger(t).} \quad (2.30)$$

Дифференцируя (2.30) по времени получаем

$$\boxed{i\hbar \partial_t \hat{\rho}(t) = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)] \text{ — уравнение Лиувилля-Неймана [Liouville-von Neumann].}} \quad (2.31)$$

Распределение Гиббса

Системы, находящиеся в тепловом равновесии с окружением, характеризуются распределением Гиббса [Gibbs]:

Определение 2.3.4 (каноническое распределение Гиббса)

$$\boxed{\hat{\rho}_{th} = \mathcal{Z}^{-1} \exp(-\beta \hat{H}) = \mathcal{Z}^{-1} \sum_n \exp(-\beta E_n) |E_n\rangle \langle E_n|, \beta \equiv 1/(k_B T),} \quad (2.32)$$

$$\boxed{\mathcal{Z} = \text{Tr}\{\exp(-\beta \hat{H})\} = \sum_n \exp(-\beta E_n) \text{ — статистическая сумма.}} \quad (2.33)$$

Замечание 2.3.2 (большой канонический ансамбль)

Распределение Гиббса (2.32) предполагает, что система не обменивается частицами с окружением. Если число частиц переменное, то статистический ансамбль называют большим каноническим и соответствующее распределение Гиббса будет зависеть не только от энергии, но и от числа частиц: $\hat{H} \rightarrow \hat{H} - \mu \hat{N}$, где μ — химический потенциал и \hat{N} — оператор числа частиц.

Замечание 2.3.3 (статистическая сумма)

Можно подумать, что статистическая сумма \mathcal{Z} играет некую вспомогательную роль, обеспечивая выполнение условия нормировки (2.24). На самом деле, все термодинамические величины можно вычислить, зная \mathcal{Z} , и вычисление статистической суммы — центральная (и, увы, редко выполняемая) задача при теоретическом исследовании равновесной термодинамики системы.

Распределение Гиббса для квантового осциллятора

В лекции 1 мы нашли стационарные состояния и спектр энергии квантового осциллятора. Подставляя выражения (1.20) в (2.32), получим:

$$\hat{\rho}_{th} = \mathcal{Z}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n |n\rangle \langle n|, \quad z \equiv \exp(-\beta \hbar \omega), \quad (2.34)$$

$$\mathcal{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = (1 - z)^{-1}. \quad (2.35)$$

Вычислим среднее значение числа заполнения в состоянии теплового равновесия

$$\bar{n}_{th} \equiv \langle \hat{N} \rangle_{th} = \text{Tr}(\hat{\rho}_{th} \hat{N}) = \mathcal{Z}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} n z^n = z \partial_z \ln \mathcal{Z} = [\exp(\beta \hbar \omega) - 1]^{-1}. \quad (2.36)$$

Замечание 2.3.4 (черное излучение)

В квантовой электродинамике свободное электромагнитное поле представляется как набор независимых квантовых осцилляторов — фотонов, каждый из которых характеризуется своей частотой, $\omega_k = ck$, волновым вектором, $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}$, задающим направление распространения, и поляризацией, $\mathbf{e} \perp \mathbf{k}$, определяющей направление вектора электрического поля. Черное излучение можно рассматривать как фотонный газ в состоянии теплового равновесия. Тогда (2.36) дает распределение фотонов по квантовым состояниям с различной энергией:

$$\bar{n}_k = [\exp(\beta \hbar \omega_k) - 1]^{-1} \text{ — распределение Планка [Planck]}. \quad (2.37)$$

Умножая \bar{n}_k на энергию фотона, $\hbar \omega_k$, и число квантовых состояний в интервале от ω_k до $\omega_k + d\omega$ ($= V(\omega_k/\pi)^2 c^{-3} d\omega$, V — объем) и опуская индекс k у частоты, получим формулу для спектрального распределения энергии черного излучения:

$$dE_\omega = V \hbar \pi^{-2} c^{-3} \frac{\omega^2 d\omega}{\exp(\beta \hbar \omega) - 1} \text{ — формула Планка}. \quad (2.38)$$

Формулы Рэля-Джинса [Rayleigh-Jeans] и Вина [Wien] соответствуют случаям, когда $\hbar \omega \ll 1/\beta$ и $\hbar \omega \gg 1/\beta$, соответственно. Вывод закона смещения ($\omega_{max} \propto T$) и закона Больцмана [Boltzmann] ($E \propto T^4$) также не составляет особого труда.

2.4. Двухуровневая система

Рассмотрим модельную квантовую систему, у которой всего лишь два стационарных состояния $|a\rangle$ и $|b\rangle$ с энергиями $E_a = \hbar \omega_a$ и $E_b = \hbar \omega_b$ [7]. Для определенности

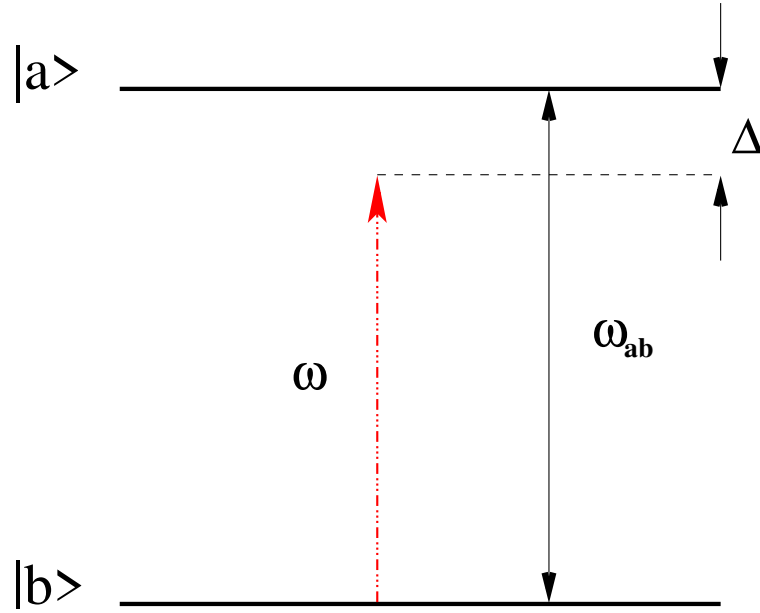


Рис. 2.1 Двухуровневая система.

положим, что $E_a > E_b$. Таким образом, $|b\rangle$ соответствует основному состоянию, а $|a\rangle$ — возбужденному уровню, $\omega_{ab} = \omega_a - \omega_b$ — частота перехода.

В отличие от осциллятора, пространство состояний здесь конечномерное (более того, оно всего лишь двумерное), и удобно перейти к матричным обозначениям:

$$C_a|a\rangle + C_b|b\rangle \rightarrow C_a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

$$\hat{A} \rightarrow A = \begin{pmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{pmatrix}, \quad A_{ij} \equiv \langle i|\hat{A}|j\rangle. \quad (2.40)$$

Для самосопряженного оператора $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ матричные элементы удовлетворяют условию: $A_{ij} = A_{ji}^*$, и в качестве базиса в пространстве эрмитовых матриц можно выбрать единичную матрицу, $\hat{I} \equiv \hat{\sigma}_0$, и три бесследовых матрицы Паули [Pauli]:

$$\hat{\sigma}_x \equiv \hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y \equiv \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z \equiv \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

с легко проверяемыми коммутационными соотношениями

$$\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j = \delta_{ij} \hat{I} + i e_{ijk} \hat{\sigma}_k \implies [\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i e_{ijk} \hat{\sigma}_k, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.42)$$

где символ Леви-Чивиты [Levi-Civita] e_{ijk} меняет знак при перестановке любой

пары индексов и $\epsilon_{123} = 1$. Например, k -тую компоненту обычного векторного произведения векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} можно записать в форме $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_k = \sum_{i,j} \epsilon_{ijk} a_i b_j$.

Упражнение 2.4.1

Покажите, что

$$[(\mathbf{h}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}), \hat{\boldsymbol{\sigma}}] = -2i \mathbf{h} \times \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (2.43)$$

где $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ — вектор; $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3)$ — вектор, составленный из матриц Паули; $(\mathbf{h}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \equiv \sum_i h_i \hat{\sigma}_i$ — скалярное произведение.

Вместо $\hat{\sigma}_x$ и $\hat{\sigma}_y$ бывает также удобно использовать матрицы

$$\hat{\sigma}_+ = (\hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y)/2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_- = (\hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y)/2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

$$[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_z. \quad [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_\pm] = \pm 2\hat{\sigma}_\pm, \quad (2.45)$$

$$\hat{T}_z(\phi) \equiv \exp(i\phi\hat{\sigma}_z) \implies \hat{T}_z(\phi)\hat{\sigma}_\pm\hat{T}_z(-\phi) = \exp(\pm 2i\phi)\hat{\sigma}_\pm. \quad (2.46)$$

Замечание 2.4.1 (матрицы Паули и спин)

В квантовой механике оператор углового момента частицы имеет вид

$$\boxed{\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}} \text{ — оператор орбитального углового момента.}} \quad (2.47)$$

Коммутационные соотношения для компонент оператора углового момента можно записать как

$$\boxed{[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{L}_k \implies \hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{L}} = i\hbar \hat{\mathbf{L}}.} \quad (2.48)$$

Общий результат теории представлений группы вращений, заключается в том, что состояния с определенным орбитальным угловым моментом (2.47) являются собственными функциями операторов $\hat{\mathbf{L}}^2 = \sum_{i=1}^3 \hat{L}_i^2$ и \hat{L}_z :

$$\hat{\mathbf{L}}^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.49)$$

$$\hat{L}_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle, \quad m = -j, -j+1, \dots, j-1, j. \quad (2.50)$$

Легко проверить, что

$$\boxed{\hat{s}_i = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_i, \quad \hat{\mathbf{S}} = (\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3) \text{ — оператор спинового углового момента}} \quad (2.51)$$

удовлетворяет коммутационным соотношениями (2.48) и собственные вектора $\hat{\mathbf{S}}^2 = \sum_{i=1}^3 \hat{s}_i^2$ и \hat{s}_3 в соответствии с (2.49)-(2.50) характеризуются квантовыми числами $j = 1/2$ и $m = \pm 1/2$.

$$|1/2, 1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1/2, -1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Квантово-механическое описание состояний элементарных частиц предполагает наличие спиновых степеней свободы, которые, в отличие от орбитального углового момента, могут соответствовать

полуцелыми значениями j . Такие частицы подчиняются статистике Ферми-Дирака [Fermi-Dirac] и называются *фермионами* [fermions]. Примером является электрон с $j = 1/2$. Частицы с целым значением j подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна [Bose-Einstein] и называются *бозонами* [bosons]. Пример — фотоны. Связь между спином и статистикой носит симметричный характер. В аксиоматической квантовой теории поля эта связь устанавливается теоремами о спине и статистике.

Итак, исходный гамильтониан двухуровневой системы в матричных обозначениях можно записать как

$$H_0 = \hbar\{(\omega_a + \omega_b)\hat{\sigma}_0 + \omega_{ab}\hat{\sigma}_3\}/2. \quad (2.53)$$

Рассмотрим задачу о двухуровневом атоме, взаимодействующем с внешним заданным классическим электромагнитным полем. Такая постановка проблемы, когда квантовое описание используется для системы, а внешнее поле предполагается классическим, называется *полуклассической*. В нашем случае используется и дополнительное серьезное упрощение — мы не решаем уравнения Максвелла [Maxwell], чтобы найти поле, а предполагаем, что оно задано. Другими словами, мы пренебрегаем обратным воздействием системы на электромагнитное поле.

Замечание 2.4.2 (уравнения Максвелла)

Приведем основные необходимые сведения из электродинамики [8]. Электромагнитное поле описывается как два векторных поля, соответствующих векторам электрической и магнитной напряженности, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$. Последние можно выразить через векторный и скалярный потенциалы, \mathbf{A} и ϕ , следующим образом:

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \equiv \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -c^{-1}\partial_t \mathbf{A} - \nabla \phi \equiv -c^{-1}\partial_t \mathbf{A} - \text{grad } \phi, \quad (2.54)$$

где c — скорость света. Основные уравнения для напряженностей электрического и магнитного полей — уравнения Максвелла [Maxwell]:

$$\nabla \times \mathbf{E} \equiv \text{rot } \mathbf{E} = -c^{-1}\partial_t \mathbf{H}, \quad (2.55)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} \equiv \text{rot } \mathbf{H} = c^{-1}\partial_t \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{j}/c, \quad (2.56)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} \equiv \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (2.57)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \equiv \text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (2.58)$$

где \mathbf{j} — плотность тока, ρ — плотность заряда. Например, для системы из N точечных заряженных частиц

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}), \quad \rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}), \quad (2.59)$$

где q_i , \mathbf{r}_i и \mathbf{v}_i — заряд, радиус-вектор и скорость i -той частицы.

Уравнения (2.55) и (2.57), очевидно, непосредственно следуют из представления через потенциалы (2.54). Потенциалы определены неоднозначно. Так, важным обстоятельством является то, что поля не меняются при калибровочном преобразовании потенциалов:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi, \quad \phi \rightarrow \phi - c^{-1}\partial_t\chi, \quad (2.60)$$

где χ — произвольная “достаточно гладкая” функция.

Предположим, что поле является монохроматическим с частотой ω , и запишем энергию взаимодействия в электродипольном приближении:

$$\hat{V} = -(\hat{\mathbf{d}}, \mathbf{E}(t)) = -(\hat{\mathbf{d}}, \mathbf{e})E_0 \cos(\omega t), \quad \hat{\mathbf{d}} \text{ — дипольный момент,} \quad (2.61)$$

E_0 и \mathbf{e} — амплитуда и вектор поляризации внешнего электрического поля.

Замечание 2.4.3 (электродипольное приближение)

Сначала коротко о том как учитывается взаимодействие заряженных частиц с электромагнитным полем в гамильтониане. Результат классической электродинамики состоит в том, что нужно сделать замену импульсов: $\mathbf{p}_i \rightarrow \mathbf{p}_i - q_i/c \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t)$ и добавить слагаемое $q_i\phi(\mathbf{r}_i, t)$ для каждой заряженной частицы. Таким образом, нерелятивистский гамильтониан системы заряженных частиц имеет вид:

$$H = \sum_{i=1}^N \left\{ (2m_i)^{-1} (\mathbf{p}_i - q_i/c \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t))^2 + q_i \phi(\mathbf{r}_i, t) \right\}. \quad (2.62)$$

Строго говоря, в нашем случае мы должны различать потенциалы внутренних полей, которые ответственны, например, за кулоновское взаимодействие между частицами, и потенциалы внешнего поля. Далее мы будем рассматривать только внешнее поле.

Если электромагнитное поле незначительно меняется на расстояниях порядка характерного размера системы (атома или молекулы), r_s , тогда часто используют электродипольное приближение. Поясним его суть. Точная формулировка основного предположения выглядит так:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t), \quad \phi(\mathbf{r}, t) \approx (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \text{grad } \phi(\mathbf{r}_0, t)) \quad (2.63)$$

где \mathbf{r}_0 — радиус-вектор начала отсчета (обычно, центр масс атома или молекулы). Исключим вектор-потенциал при помощи калибровочного преобразования (2.60):

$$\chi = -(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t)) \implies \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = 0,$$

$$\phi \rightarrow \phi' = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \text{grad } \phi(\mathbf{r}_0, t) + c^{-1}\partial_t\mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t)) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)). \quad (2.64)$$

Таким образом, взаимодействие с системой заряженных частиц в этом приближении описывается последним слагаемым в (2.62), которое теперь записывается как

$$\sum_{i=1}^N q_i \phi(\mathbf{r}_i, t) \approx (\mathbf{d}, \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)), \quad (2.65)$$

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^N q_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \xrightarrow{\sum_i q_i = 0} \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i \text{ — эл. дипольный момент.} \quad (2.66)$$

Отметим, что в случае плоской монохроматической волны, когда $\mathbf{A} \propto \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ с $|\mathbf{k}| \equiv k = \omega/c$, применимость дипольного приближения означает, что $kr_s \ll 1$.

Предполагая, что собственный дипольный момент состояний $\langle i | \hat{\mathbf{d}} | i \rangle$ равен нулю, запишем

$$(\hat{\mathbf{d}}, \mathbf{e}) = \begin{pmatrix} 0 & d \\ d^* & 0 \end{pmatrix}, \quad d = d_1 - id_2 = |d|e^{-i\phi} = \langle a | (\hat{\mathbf{d}}, \mathbf{e}) | b \rangle. \quad (2.67)$$

Фазовый множитель легко скомпенсировать преобразованием базиса

$$|b\rangle \rightarrow e^{i\phi}|b\rangle. \quad (2.68)$$

Окончательно, получаем гамильтониан в виде:

$$\boxed{\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad \hat{V} = -\hbar v \hat{\sigma}_1 \cos \omega t, \quad v \equiv dE_0/\hbar.} \quad (2.69)$$

Уравнения Гейзенберга для $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \equiv (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3)$:

$$\partial_t \hat{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathbf{h}(t) \times \hat{\boldsymbol{\sigma}}(t), \quad \mathbf{h}(t) \equiv (-2v \cos \omega t, 0, \omega_{ab}) \quad (2.70)$$

Усреднение дает:

$$\text{Tr}(\hat{\rho} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(t)) \equiv \boldsymbol{\sigma}(t), \quad \sigma_1 = 2 \text{Re} \rho_{ab}(t), \quad \sigma_2 = -2 \text{Im} \rho_{ab}(t), \quad \sigma_3 = \rho_{aa}(t) - \rho_{bb}(t), \quad (2.71)$$

$$\boxed{\partial_t \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{h}(t) \times \boldsymbol{\sigma}(t) \text{ — псевдоспиновое представление.}} \quad (2.72)$$

Интересен закон сохранения длины энергетического спина:

$$\boldsymbol{\sigma}^2(t) \equiv \sum_{i=1}^3 \sigma_i^2(t) = 2 \text{Tr}(\rho^2) - 1 = \text{const.} \quad (2.73)$$

Приближение вращающейся волны

Чтобы пояснить суть дела запишем уравнение для оператора эволюции, пренебрегая несущественной постоянной $\propto (\omega_a + \omega_b)$ в \hat{H}_0 :

$$\partial_t \hat{U}(t) = -i(\omega_{ab} \hat{\sigma}_3/2 - v \cos \omega t \hat{\sigma}_1) \hat{U}(t). \quad (2.74)$$

Выделим невозмущенную эволюцию, перейдя в *представление взаимодействия*:

$$\boxed{\hat{U}(t) = \hat{U}_0(t) \hat{U}_{int}(t), \quad \hat{U}_0(t) = \exp(-i\hat{H}_0 t/\hbar) = \exp(-i\omega_{ab} t \hat{\sigma}_3/2),} \quad (2.75)$$

$$\boxed{i\hbar \partial_t \hat{U}_{int}(t) = \hat{V}_{int}(t) \hat{U}_{int}(t), \quad \hat{V}_{int}(t) = \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{V} \hat{U}_0(t).} \quad (2.76)$$

В нашем случае получим:

$$\partial_t \hat{U}_{int}(t) = iv \cos \omega t \{ \hat{\sigma}_+ e^{i\omega_{ab}t} + \hat{\sigma}_- e^{-i\omega_{ab}t} \} \hat{U}_{int}(t). \quad (2.77)$$

Видим, что представлении взаимодействия взаимодействие содержит два типа слагаемых: быстро осциллирующие с частотой $\omega_{ab} + \omega$ и сравнительно медленно осциллирующие с частотой $\omega_{ab} - \omega \equiv \Delta$ — *расстройка резонанса*. Пренебрежение быстрыми осцилляциями соответствует *приближению вращающейся волны*. В исходном представлении это означает замену:

$$\boxed{\hat{V}(t) \rightarrow \hat{V}_{rw}(t) = -v/2 \{ \hat{\sigma}_+ e^{-i\omega t} + \hat{\sigma}_- e^{i\omega t} \}} \quad (2.78)$$

Оператор эволюции такой задачи нетрудно вычислить:

$$\boxed{\hat{U}(t) = \hat{T}_z(\omega t) \exp[-i(\Delta \hat{\sigma}_3 - v \hat{\sigma}_1)t/2] = \hat{T}_z(\omega t) \hat{T}_y(\alpha/2) \hat{T}_z(-\Omega_R t/2) \hat{T}_y(-\alpha/2)} \quad (2.79)$$

$$\boxed{\hat{T}_y(\alpha/2) = \begin{pmatrix} \cos \alpha/2 & -\sin \alpha/2 \\ \sin \alpha/2 & \cos \alpha/2 \end{pmatrix}, \quad \tan \alpha = v/\Delta, \quad \Omega_R = \sqrt{\Delta^2 + v^2},} \quad (2.80)$$

α — угол смешивания и Ω_R — частота Раби.

Для дальнейших вычислений заметим, что

$$\hat{T}_y(-\alpha/2) \hat{\sigma}_3 \hat{T}_y(\alpha/2) = \cos \alpha \hat{\sigma}_3 - \sin \alpha \hat{\sigma}_1, \quad (2.81)$$

$$\hat{T}_y(-\alpha/2) \hat{\sigma}_1 \hat{T}_y(\alpha/2) = \cos \alpha \hat{\sigma}_1 + \sin \alpha \hat{\sigma}_3, \quad (2.82)$$

$$\hat{T}_y(-\alpha/2) \hat{\sigma}_2 \hat{T}_y(\alpha/2) = \hat{\sigma}_2. \quad (2.83)$$

Вычислим зависимость от времени для разности населенностей

$$\sigma_3 \equiv \rho_{aa} - \rho_{bb}:$$

$$\boxed{\hat{\rho}(0) = \hat{\sigma}_0/2 + w_0 \hat{\sigma}_3/2 \implies \sigma_3(t) = w_0 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \Omega_R t).} \quad (2.84)$$

Осциллирующая зависимость инверсии от времени наблюдалась экспериментально и получила название *осцилляций Раби* [Rabi].

Упражнение 2.4.2

Вычислите $\langle \hat{\sigma}_1(t) \rangle$ и $\langle \hat{\sigma}_2(t) \rangle$.

Упражнение 2.4.3 (π -импульс)

Пусть $w_0 = -1$ и поле действует в течение промежутка времени T (импульс). Какой должна быть длительность импульса и расстройка резонанса, чтобы получить полную инверсию населенности ($w = 1$)? Всегда ли можно получить инверсию ($w > 0$)?

Упражнение 2.4.4 (корреляционная функция)

Вычислите двухвременную корреляционную функцию операторов $\hat{\sigma}_+$ и $\hat{\sigma}_-$ равную, по определению, $\langle \hat{\sigma}_+(t_1)\hat{\sigma}_-(t_2) \rangle$.

Появление оператора $\hat{T}_z(\omega t)$ в операторе эволюции можно интерпретировать как переход в систему координат, вращающуюся с частотой поля:

$$\hat{\sigma}(t) \rightarrow \hat{\sigma}_{rw}(t) = \hat{T}_z(-\omega t)\hat{\sigma}(t)\hat{T}_z(\omega t), \quad (2.85)$$

$$\partial_t \langle \hat{\sigma}_{rw}(t) \rangle = \mathbf{h}_{rw} \times \langle \hat{\sigma}_{rw}(t) \rangle, \quad \mathbf{h}_{rw} \equiv (-v, 0, \Delta) \text{ — уравнения Блоха [Bloch]}. \quad (2.86)$$

Положим $\langle \hat{\sigma}_{rw}(t) \rangle = (u_1(t), u_2(t), w(t))$ и дополним уравнения релаксационными слагаемыми, тогда получим *оптические уравнения Блоха с релаксацией* [7]:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -\gamma_{\perp} u_1 - \Delta u_2, \\ \dot{u}_2 = -\gamma_{\perp} u_2 + \Delta u_1 + vw, \\ \dot{w} = -\gamma_{\parallel} (w - w_{eq}) - vu_2. \end{cases} \quad \text{— уравнения Блоха с релаксацией,} \quad (2.87)$$

γ_{\parallel} и γ_{\perp} — продольные и поперечные постоянные однородной релаксации, w_{eq} — равновесное значение разности населенностей.

Упражнение 2.4.5

Каково значение w_{eq} в состоянии теплового равновесия, характеризуемого распределением Гиббса (2.32)?

Упражнение 2.4.6 (решение Торри [Torrey])

Решите уравнения Блоха с релаксацией. Возможно ли получить инверсную заселенность, если w_{eq} соответствует состоянию теплового равновесия?

Представление когерентных состояний

3.1. Соотношения неопределенностей

Количественной характеристикой точности измерения среднего значения наблюдаемой \hat{A} , $\bar{A} \equiv \langle \hat{A} \rangle$, как и в классической теории вероятности, является дисперсия (среднеквадратичное отклонение):

Определение 3.1.1 (дисперсия)

$$\boxed{(\Delta A)^2 = \langle (\hat{A} - \bar{A})^2 \rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2, \quad \Delta A \text{ — дисперсия.}} \quad (3.1)$$

Для дальнейшего определим скалярное произведение в пространстве линейных операторов следующим образом:

$$\langle \hat{A} | \hat{B} \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \hat{B} \rangle \equiv \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}^\dagger \hat{B}). \quad (3.2)$$

Лемма 1 (элементарные свойства скалярного произведения (3.2))

$$\langle \alpha \hat{A}_1 + \beta \hat{A}_2 | \hat{B} \rangle = \alpha^* \langle \hat{A}_1 | \hat{B} \rangle + \beta^* \langle \hat{A}_2 | \hat{B} \rangle \quad (3.3)$$

$$\langle \hat{A} | \alpha \hat{B}_1 + \beta \hat{B}_2 \rangle = \alpha \langle \hat{A} | \hat{B}_1 \rangle + \beta \langle \hat{A} | \hat{B}_2 \rangle \quad (3.4)$$

$$\langle \hat{A} | \hat{A} \rangle \geq 0, \quad (3.5)$$

$$\langle \hat{A} | \hat{B} \rangle^* = \langle \hat{B} | \hat{A} \rangle. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Свойства линейности (3.3)-(3.4) следуют из линейности операции взятия следа и особых комментариев не требуют. Неотрицательность (3.5) является следствием неотрицательности спектра матрицы плотности. Пусть пол-

ная ортонормированная система $\{|\phi_i\rangle\}$ функций составлена из собственных функций $\hat{\rho}$: $\hat{\rho}|\phi_i\rangle = w_i|\phi_i\rangle$, тогда получим требуемое неравенство:

$$\langle \hat{A} | \hat{A} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}^\dagger \hat{A}) = \sum_{n,m} w_n |\langle \phi_m | \hat{A} | \phi_n \rangle|^2 \geq 0.$$

Свойство (3.6) также нетрудно проверить, используя базис $\{|\phi_i\rangle\}$ и учитывая, что $\langle \phi_m | \hat{A} | \phi_n \rangle^* = \langle \phi_n | \hat{A}^\dagger | \phi_m \rangle$. ■

Предложение 3.1.1 (соотношения неопределенностей) Пусть $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ и $\hat{B} = \hat{B}^\dagger$, тогда

$$\boxed{(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|^2 / 4 = (\text{Im} \langle \hat{A} | \hat{B} \rangle)^2.} \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Определим операторы $\hat{A}_1 = \hat{A} - \bar{A}$, $\hat{B}_1 = \hat{B} - \bar{B}$ и $\hat{C}_1 = \nu \hat{A}_1 + i \hat{B}_1$, $\nu \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}_1 | \hat{A}_1 \rangle &= (\Delta A)^2, & \langle \hat{B}_1 | \hat{B}_1 \rangle &= (\Delta B)^2, \\ \langle \hat{C}_1 | \hat{C}_1 \rangle &= \nu^2 (\Delta A)^2 + i\nu \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle + (\Delta B)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Все коэффициенты квадратичного трехчлена (3.8) вещественны и, как следствие неположительности дискриминанта, приходим к неравенству (3.7). ■

Замечание 3.1.1

Мы сформулировали и доказали соотношение неопределенностей как для чистых состояний так и для статистических смесей!

Задача 3.1.1

Докажите неравенство Шварца [Schwarz]:

$$\langle \hat{A} | \hat{A} \rangle \langle \hat{B} | \hat{B} \rangle \geq |\langle \hat{A} | \hat{B} \rangle|^2. \quad (3.9)$$

Чем оно отличается от (3.7)?

Частным случаем (3.7) является соотношение неопределенности координата-импульс, которое легко получить, используя коммутационные соотношения (1.15):

$$\boxed{(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 \geq (\hbar/2)^2.} \quad (3.10)$$

Определение 3.1.2 Квантовые состояния будем называть состояниями с минимальной неопределенностью, если

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 = (\hbar/2)^2. \quad (3.11)$$

Вычислим дисперсии координаты и импульса в стационарных состояниях квантового осциллятора. Из (1.13)-(1.14) имеем

$$x = \hat{X} [2\hbar/(m\omega)]^{1/2}, \quad \hat{X} = (a + a^\dagger)/2, \quad (3.12)$$

$$\hat{p} = \hat{Y} [2\hbar m\omega]^{1/2}, \quad \hat{Y} = (a - a^\dagger)/(2i). \quad (3.13)$$

Тогда для дисперсий в состоянии $|n\rangle$ получим

$$(\Delta x)^2 = (n + 1/2)\hbar/(m\omega), \quad (\Delta p)^2 = (n + 1/2)\hbar m\omega. \quad (3.14)$$

Видим, что единственным состоянием с минимальной неопределенностью является вакуумное состояние с $n = 0$. По этой причине правую часть соотношения неопределенности относят на счет наличия вакуумных квантовых флуктуаций (в физике отклонения от среднего значения называют флуктуациями).

Ниже мы увидим, как получить другие состояния с минимальной неопределенностью, “смещая” и “сжимая” вакуумное состояние.

3.2. Когерентные состояния

Определим когерентные состояния (к.с.) [coherent states] как собственные функции оператора уничтожения [9–11]

$$\boxed{\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}} \implies \boxed{|\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle}, \quad (3.15)$$

где экспоненциальный множитель нормирует состояния.

Замечание 3.2.1

Импликацию (3.15) нетрудно получить, записав разложение $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$ и используя (1.24) и (3.15) для получения рекуррентного соотношения между коэффициентами: $\sqrt{n} c_n = \alpha c_{n-1}$.

Определим оператор, под действием которого вакуумное состояние переходит в когерентное:

Определение 3.2.1 (оператор смещения)

$$\boxed{\hat{D}(\alpha) = \exp[\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}] \text{ — оператор смещения.}} \quad (3.16)$$

Предложение 3.2.1 (свойства оператора смещения)

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}^{-1}(\alpha) = \hat{D}(-\alpha) \text{— унитарность,} \quad (3.17)$$

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(-|\alpha|^2/2) \exp(\alpha \hat{a}^\dagger) \exp(-\alpha^* \hat{a}) \text{— виковская форма,} \quad (3.18)$$

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(|\alpha|^2/2) \exp(-\alpha^* \hat{a}) \exp(\alpha \hat{a}^\dagger) \text{— антивиковская форма,} \quad (3.19)$$

$$\hat{D}(\alpha) \hat{D}(\beta) = \exp[i \operatorname{Im}(\alpha \beta^*)] \hat{D}(\alpha + \beta) \text{— закон композиции,} \quad (3.20)$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha, \quad \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^* \text{— свойство смещения.} \quad (3.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Свойство (3.17) очевидно. Соотношения (3.18)– (3.20) следуют из ВСН-формулы (1.32), доказанной в разделе 1.5.

При этом в правой части (3.18) операторы уничтожения находятся правее операторов рождения, что соответствует *нормально упорядоченной (виковской) форме* представления оператора смещения. С другой стороны, в (3.19) операторы рождения располагаются правее операторов уничтожения — *антинормально упорядоченная (антивиковская) форма*.

Свойство смещения непосредственно следует из соотношения (1.31). ■

Упражнение 3.2.1

Покажите, что

$$\hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) = (\alpha^*/2 + \partial_\alpha) \hat{D}(\alpha), \quad \hat{D}(\alpha) \hat{a}^\dagger = (-\alpha^*/2 + \partial_\alpha) \hat{D}(\alpha), \quad (3.22)$$

$$\hat{a} \hat{D}(\alpha) = (\alpha/2 - \partial_{\alpha^*}) \hat{D}(\alpha), \quad \hat{D}(\alpha) \hat{a} = -(\alpha/2 + \partial_{\alpha^*}) \hat{D}(\alpha). \quad (3.23)$$

Предложение 3.2.2 (свойства когерентных состояний)

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \quad (3.24)$$

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \exp[-i \operatorname{Im}(\alpha \beta^*)] \exp[-|\alpha - \beta|^2/2] \text{— неортогональность к.с.,} \quad (3.25)$$

$$\pi^{-1} \int |\alpha\rangle \langle\alpha| d^2\alpha = \hat{I}, \quad d^2\alpha \equiv d \operatorname{Re}(\alpha) d \operatorname{Im}(\alpha) \text{— разложение единицы.} \quad (3.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Формула (3.24) следует из (3.18) и показывает, что оператор смещения переводит вакуум в к.с. Скалярное произведение к.с.

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \langle 0 | \hat{D}^\dagger(\beta) \hat{D}(\alpha) | 0 \rangle$$

нетрудно вычислить, воспользовавшись (3.17) и (3.20) и учтя, что, согласно (3.15),

$$\langle 0 | \alpha \rangle = \exp(-|\alpha|^2/2).$$

Чтобы доказать разложение единицы (3.26), подставим разложения к.с. (3.15) и перейдем в полярную систему координат

$$\alpha = r \exp(i\phi), \quad d^2\alpha = r dr d\phi.$$

Вычисляем интеграл

$$\pi^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \exp[i(n-m)\phi] d\phi \int_0^{\infty} \frac{r^{n+m+1} e^{-r^2}}{\sqrt{n!m!}} dr |n\rangle \langle m| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \hat{I}$$

и вспоминаем о полноте и ортонормированности системы функций $\{|n\rangle\}$. ■

Разложение единицы позволяет записать любую функцию как суперпозицию когерентных состояний

$$|\psi\rangle = \int c(\alpha) |\alpha\rangle d\mu(\alpha), \quad c(\alpha) = \langle \alpha | \psi \rangle, \quad d\mu(\alpha) \equiv \pi^{-1} d^2\alpha. \quad (3.27)$$

В частности, получаем соотношение

$$|\beta\rangle = \int \langle \alpha | \beta \rangle |\alpha\rangle d\mu(\alpha), \quad (3.28)$$

из которого следует, что к.с. образуют переполненную систему функций.

Упражнение 3.2.2

Покажите, что

$$\langle \alpha | (\hat{a}^\dagger)^n (\hat{a})^m | \alpha \rangle = (\alpha^*)^n \alpha^m. \quad (3.29)$$

Упражнение 3.2.3

Вычислите средние значения координаты, импульса и числа заполнения для осциллятора, находящегося в когерентном состоянии. Используя (3.21) и (3.12)-(3.13), покажите, что

$$\bar{x}_\alpha = [2\hbar/(m\omega)]^{1/2} \operatorname{Re}(\alpha), \quad \bar{p}_\alpha = [2\hbar m\omega]^{1/2} \operatorname{Im}(\alpha), \quad (3.30)$$

$$\bar{n}_\alpha = |\alpha|^2. \quad (3.31)$$

Вычислим вероятность, P_n , того, что число заполнения осциллятора в к.с. равно n :

$$P_n = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = \exp(-\bar{n}_\alpha) \frac{\bar{n}_\alpha^n}{n!} - \text{распределение Пуассона [Poisson]}. \quad (3.32)$$

В “фотонных терминах” это соответствуют пуассоновской статистике числа фотонов в когерентном состоянии. Характерным для статистики Пуассона является равенство среднего значения и квадрата дисперсии:

$$\boxed{(\Delta n)_\alpha^2 = \bar{n}_\alpha.} \quad (3.33)$$

Замечание 3.2.2

В квантовой оптике отклонения статистики числа фотонов от пуассоновской детектируют по отклонению от равенства (3.33) и называют статистику *субпуассоновской* (антигруппировка [antibunching] фотонов на достаточно больших временах), если $(\Delta n)_\alpha^2 < \bar{n}_\alpha$. В противоположном случае, когда $(\Delta n)_\alpha^2 > \bar{n}_\alpha$, статистика *суперпуассоновская* (группировка [bunching] фотонов на достаточно больших временах).

Рассмотрим эволюцию к.с. Результат нетрудно получить, действуя оператором эволюции (2.14) на когерентное состояние:

$$\boxed{\hat{U}(t)|\alpha(0)\rangle = \exp(-i\omega t/2)|\alpha(t)\rangle, \quad \alpha(t) = \exp(-i\omega t)\alpha(0).} \quad (3.34)$$

Интересно, что осциллятор остается в когерентном состоянии и эволюция амплитуды α совпадает с соответствующим результатом для комплексной амплитуды классического осциллятора (1.10). Таким образом, квантовый осциллятор еще раз проявил себя как система, близкая к классической.

3.3. Сжатые состояния

Вернемся к рассмотрению состояний, минимизирующих соотношение неопределенностей (3.10) (состояния с минимальной неопределенностью).

Предложение 3.3.1 Пусть средние значения координаты и импульса в состоянии $|\psi_0\rangle$ равны нулю, тогда дисперсии координаты (импульса) в состоянии $|\psi_0\rangle$ и в состоянии $|\psi_0, \alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|\psi_0\rangle$ одинаковы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Нетрудно получить прямым вычислением, используя свойство смещения:

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{p}\hat{D}(\alpha) = \hat{p} + \bar{p}_\alpha, \quad \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{x}\hat{D}(\alpha) = \hat{x} + \bar{x}_\alpha,$$

где \bar{x}_α и \bar{p}_α определены в (3.30). ■

В качестве непосредственного следствия, заключаем, что если $|\psi_0\rangle$ является состоянием с минимальной неопределенностью (и с нулевыми средними для коор-

динаты и импульса), то $\hat{D}(\alpha)|\psi_0\rangle$ – тоже состояние с минимальной неопределенностью. Мы уже знаем, что в качестве $|\psi_0\rangle$ можно выбрать вакуумное состояние. Поэтому *к.с.* $|\alpha\rangle$ являются состояниями с минимальной неопределенностью.

Предложение 3.3.2 Пусть средние значения координаты и импульса в состоянии с минимальной неопределенностью $|\psi_0\rangle$ равны нулю. Тогда найдется $\nu \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\hat{A}|\psi_0\rangle = 0, \quad \hat{A} = (\nu x + i\hat{p})/\sqrt{2\hbar\nu}, \quad [\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = 1. \quad (3.35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Утверждение следует из доказательства соотношения неопределенностей (3.7) и того, что $\hat{C} \propto \hat{A}$. Коммутационное соотношение проверяется непосредственно. ■

Очевидно, что оператор \hat{A} из (3.35) можно получить при помощи канонических преобразований, рассмотренных в разделе 1.6, согласно которому каноническое преобразование можно получить как композицию преобразований (1.35) и (1.36):

$$\hat{a} \rightarrow \hat{A} = \hat{T}(\phi, \zeta) \hat{a} \hat{T}^\dagger(\phi, \zeta), \quad \hat{T}(\phi, \zeta) = \hat{S}(\zeta) \hat{T}_1(\phi). \quad (3.36)$$

Отсюда, учитывая, что $\hat{a}|0\rangle = 0$, получаем

$$\boxed{\hat{A}|\zeta\rangle_{sq} = 0, \quad |\zeta\rangle_{sq} = \hat{S}(\zeta)|0\rangle \text{ — сжатое вакуумное состояние.}} \quad (3.37)$$

Действуя оператором смещения на сжатый вакуум ($|\psi_0\rangle = |\zeta\rangle_{sq}$) получим сжатые состояния как состояния с минимальной неопределенностью [12–14]:

$$\boxed{|\alpha, \zeta\rangle_{sq} = \hat{D}(\alpha) \hat{S}(\zeta)|0\rangle \text{ — сжатые состояния [squeezed states].}} \quad (3.38)$$

Остановимся подробнее на интерпретации полученного результата и некоторых свойствах сжатых состояний (в частности, пока не понятно, почему они так называются).

Отвлечемся от несущественных размерных множителей и вместо \hat{x} и \hat{p} будем рассматривать операторы квадратур \hat{X} и \hat{Y} , определенные в (3.12) и (3.13). Для них соотношение неопределенностей имеет вид

$$(\Delta X)^2 (\Delta Y)^2 \geq 1/16. \quad (3.39)$$

В когерентном состоянии $|\alpha\rangle$ средние и квадраты дисперсий равны

$$\langle \hat{X} \rangle_\alpha = \text{Re}(\alpha) \equiv \alpha_1, \quad \langle \hat{Y} \rangle_\alpha = \text{Im}(\alpha) \equiv \alpha_2, \quad (\Delta X)_\alpha^2 = (\Delta Y)_\alpha^2 = 1/4. \quad (3.40)$$

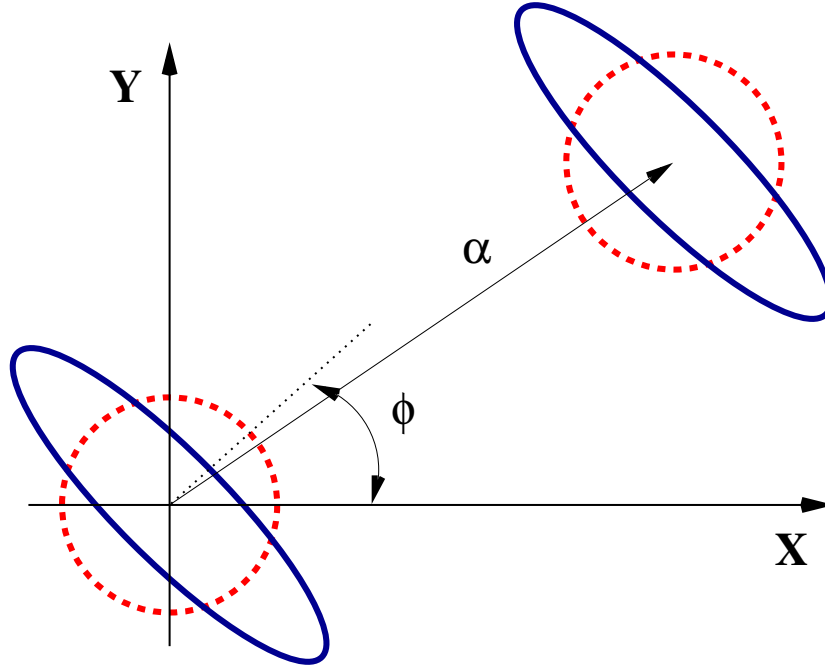


Рис. 3.1 Наглядное представление преобразования сжатия.

Наглядным представлением этих соотношений является круг ошибок с радиусом равным $1/2$ и центром в точке (α_1, α_2) на плоскости X - Y .

Чтобы прояснить ситуацию с сжатыми состояниями, вычислим средние и квадраты дисперсий повернутых на угол ϕ операторов квадратур

$$\hat{X}_1 = \hat{T}_1(\phi)\hat{X}\hat{T}_1(-\phi) = \hat{X} \cos \phi + \hat{Y} \sin \phi, \quad (3.41)$$

$$\hat{Y}_1 = \hat{T}_1(\phi)\hat{Y}\hat{T}_1(-\phi) = -\hat{X} \sin \phi + \hat{Y} \cos \phi. \quad (3.42)$$

Для удобства перепишем соотношения (1.36) в виде

$$\hat{S}(-\zeta) \hat{a} \hat{S}(\zeta) \equiv \hat{b} = \hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger \exp(i\theta) \sinh r, \quad (3.43)$$

$$\hat{S}(-\zeta) \hat{a}^\dagger \hat{S}(\zeta) = \hat{b}^\dagger = \hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} \exp(-i\theta) \sinh r, \quad (3.44)$$

и будем далее пользоваться тем, упрощающим вычисления, обстоятельством что:

$$\langle \alpha, \zeta | f(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) | \alpha, \zeta \rangle \equiv \langle f(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \rangle_\alpha^{(sq)} = \langle 0 | f(\hat{b} + \alpha, \hat{b}^\dagger + \alpha^*) | 0 \rangle. \quad (3.45)$$

Упражнение 3.3.1

Покажите прямым вычислением, что

$$\langle \hat{a} \rangle_\alpha^{(sq)} = \alpha, \quad \langle \hat{a}^2 \rangle_\alpha^{(sq)} = \alpha^2 - \cosh r \sinh r \exp(i\theta), \quad \langle \hat{N} \rangle_\alpha^{(sq)} = |\alpha|^2 + \sinh^2 r, \quad (3.46)$$

$$\langle (\Delta X_1)^2 \rangle_\alpha^{(sq)} = \{ 1 + 2 \sinh r [\sinh r - \cosh r \cos(\theta - 2\phi)] \} / 4, \quad (3.47)$$

$$\langle (\Delta Y_1)^2 \rangle_\alpha^{(sq)} = \{ 1 + 2 \sinh r [\sinh r + \cosh r \cos(\theta - 2\phi)] \} / 4. \quad (3.48)$$

Как и ожидалось, сжатие не меняет средних значений операторов \hat{a} и \hat{a}^\dagger , а дисперсии, в свою очередь, не зависят от α . В частности, при $\theta = 2\phi$ дисперсии равны

$$\langle (\Delta X_1)^2 \rangle_\alpha^{(sq)} = 1/4 \exp(-2r), \quad \langle (\Delta Y_1)^2 \rangle_\alpha^{(sq)} = 1/4 \exp(2r). \quad (3.49)$$

Это отчетливо показывает происхождение термина “сжатые состояния”: флуктуации \hat{X}_1 подавлены за счет их увеличения у квадратуры \hat{Y}_1 . Графически сжатому состоянию соответствует эллипс, малой осью которого является ось X , повернутая на угол ϕ .

Задача 3.3.1

Вычислите дисперсию \hat{N} в сжатом состоянии $|\alpha, \zeta\rangle$. Исследуйте возможности получения субпуассоновской и суперпуассоновской статистик.

3.4. Осциллятор под действием внешней силы

Рассмотрим задачу об эволюции квантового осциллятора под действием внешней силы. Формально, мы будем иметь дело с явно зависящим от времени гамильтонианом вида:

$$\hat{H} = \hbar \{ \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} - (F^*(t) \hat{a} + F(t) \hat{a}^\dagger) \}. \quad (3.50)$$

Важным физическим примером, когда задача имеет вид (3.50), является осциллятор с дипольным моментом

$$\hat{\mathbf{d}} = q \hat{x} \mathbf{e}_x = d (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \mathbf{e}_x, \quad d = q [\hbar / (2m\omega)]^{1/2}, \quad (3.51)$$

взаимодействующий с электрическим полем световой волны $\mathbf{E}(t)$. Тогда, в электродипольном приближении, придем к гамильтониану (3.50) с вещественной амплитудой силы $F(t)$, пропорциональной скалярному произведению дипольного момента и вектора электрического поля:

$$F(t) = F^*(t) = d (\mathbf{e}_x, \mathbf{E}(t)) / \hbar. \quad (3.52)$$

Вычислим оператор эволюции как решение уравнения

$$i \partial_t \hat{U}(t, t_0) = (\hat{H}_0 + \hat{V}(t)) \hat{U}(t, t_0), \quad \hat{H}_0 = \omega \hat{N}, \quad \hat{V}(t) = -F^*(t) \hat{a} - F(t) \hat{a}^\dagger. \quad (3.53)$$

Перейдем в представление взаимодействия по формулам (2.75)-(2.76) с оператором эволюции нашей невозмущенной системы

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}_0(t - t_0) \hat{U}_{int}(t, t_0), \quad \hat{U}_0(t - t_0) = \exp[-i \hat{N} \omega (t - t_0)]. \quad (3.54)$$

Тогда

$$\begin{aligned} i\partial_t \hat{U}_{int}(t, t_0) &= \hat{V}_{int}(t, t_0) \hat{U}_{int}(t, t_0), \\ \hat{V}_{int}(t, t_0) &= i(e^{-i\omega t_0} f(t) \hat{a}^\dagger - e^{i\omega t_0} f^*(t) \hat{a}), \quad f(t) \equiv i e^{i\omega t} F(t). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Для того чтобы решить (3.55), заметим, что производная оператора смещения $\hat{D}(\alpha(t))$ по времени равна

$$\partial_t \hat{D}(\alpha) = \{ \dot{\alpha} \hat{a}^\dagger - \dot{\alpha}^* \hat{a} + i \operatorname{Im}(\dot{\alpha}^* \alpha) \} \hat{D}(\alpha) \quad (3.56)$$

и будем искать решение в виде

$$\boxed{\hat{U}_{int}(t, t_0) = \exp(-i\phi(t)) \hat{D}(\alpha(t))}. \quad (3.57)$$

Замечание 3.4.1

Результат (3.56) можно получить, дифференцируя оператор смещения, записанный в вииковской форме (3.18).

Подставляя (3.57) в (3.55), находим

$$\boxed{\alpha(t, t_0) = e^{-i\omega t_0} \gamma(t, t_0), \quad \gamma(t, t_0) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau,} \quad (3.58)$$

$$\boxed{\phi(t, t_0) = \operatorname{Im} \int_{t_0}^t f^*(\tau) \gamma(\tau, t_0) d\tau,} \quad (3.59)$$

$$\boxed{\hat{U}_{int}(t, t_0) = \exp(-i\phi(t, t_0)) \hat{D}(e^{-i\omega t_0} \gamma(t, t_0)), \quad \gamma(t, t_0) = i \int_{t_0}^t F(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau.} \quad (3.60)$$

Окончательный результат для оператора эволюции запишем в нескольких эквивалентных формах:

$$\begin{aligned} \exp(-i\phi(t, t_0)) \hat{U}(t, t_0) &= \hat{U}_0(t - t_0) \hat{D}(e^{-i\omega t_0} \gamma(t, t_0)) = \\ &= \hat{U}_0(t) \hat{D}(\gamma(t, t_0)) \hat{U}_0(-t_0) = \hat{D}(e^{-i\omega t} \gamma(t, t_0)) \hat{U}_0(t - t_0). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Эволюция когерентного состояния

Предположим, что в начальный момент времени $t = t_0$ квантовый осциллятор находился в когерентном состоянии $|\alpha_0\rangle$. Вычислим, как это состояние зависит

от времени под действием оператора эволюции (3.61).

$$\hat{U}(t, t_0)|\alpha_0\rangle = \exp[-i\tilde{\phi}(t, t_0)]|\alpha(t, t_0)\rangle, \quad (3.62)$$

$$\alpha(t, t_0) = e^{-i\omega(t-t_0)}\alpha_0 + e^{-i\omega t}\gamma(t, t_0), \quad (3.63)$$

$$\tilde{\phi}(t, t_0) = \text{Im} \int_{t_0}^t \dot{\beta}^*(\tau)\beta(\tau)d\tau, \quad \beta(\tau) = \alpha_0 + e^{-i\omega\tau}\gamma(\tau, t_0). \quad (3.64)$$

Таким образом, с точностью до фазового множителя, состояние остается когерентным в процессе эволюции. В случае, когда начальное состояние является вакуумным ($\alpha_0 = 0$), получим

$$\hat{U}(t, t_0)|0\rangle = \exp(-i\phi(t, t_0))|e^{-i\omega t}\gamma(t, t_0)\rangle. \quad (3.65)$$

Отметим, что в отличие от невозмущенной эволюции к.с. ($f = 0$), внешняя сила приводит к появлению нетривиального фазового множителя с фазой $\tilde{\phi}(t, t_0)$ (в формуле (3.34) множитель связан с учетом нулевых колебаний), тогда как $\alpha(t, t_0)$ — решение классического уравнения движения:

$$\dot{\alpha} = -i\omega\alpha + iF(t), \quad \alpha(t_0) = \alpha_0. \quad (3.66)$$

Замечание 3.4.2 (квазиклассический смысл фазового множителя)

По аналогии с (1.14) запишем $\alpha(t)$ через координату, $q(t)$, и импульс, $p(t)$:

$$\alpha(t) = (2m\hbar\omega)^{-1/2}[m\omega q(t) + ip(t)]. \quad (3.67)$$

Используя, что $\beta(t) = e^{i\omega(t-t_0)}$, выразим подынтегральное выражение в (3.64) через α :

$$\text{Im}(\dot{\beta}^*\beta) = -\omega|\alpha|^2 + \text{Im}(\dot{\alpha}^*\alpha). \quad (3.68)$$

Далее, подставляя (3.68) в (3.67), получим

$$\text{Im}(\dot{\beta}^*\beta) = \hbar^{-1}\{-H_0(q, p) + (p\dot{q} - q\dot{p})/2\}, \quad (3.69)$$

где через $H_0(q, p)$ обозначен гамильтониан невозмущенного классического осциллятора (1.7). В классической механике функция $p\dot{q} - H \equiv L$ называется *функцией Лагранжа* [Lagrange] (*лагранжиан*), а интеграл от нее по времени — *действие*, $S = \int Ldt$. Окончательно получаем

$$\tilde{\phi}(t, t_0) = \hbar^{-1}\{S_0(t, t_0) - 1/2 q(\tau)p(\tau)|_{t_0}^t\}, \quad (3.70)$$

$$S_0(t, t_0) = \int_{t_0}^t L_0(q(\tau), \dot{q}(\tau))d\tau - \text{действие}, \quad L_0 = p\dot{q} - H_0 - \text{лагранжиан}. \quad (3.71)$$

При вычислении действия в формуле (3.71) нужно интегрировать по траектории возмущенного осциллятора (3.63), что и приводит к отличию от нуля фазы (3.70).

Замечание 3.4.3

Важность результатов для квантового осциллятора, линейно взаимодействующего с внешним классическим полем, как видим, заключается в том, что мы теперь располагаем конкретной и простой реализацией динамической системы, способной генерировать в процессе эволюции когерентные состояния.

Задача 3.4.1

Рассмотрите эволюцию сжатых состояний (3.38).

Вероятности квантовых переходов

Вычислим вероятность перехода из квантового состояния $|n\rangle$ в квантовое состояние $|m\rangle$. Более точно, нас интересует вероятность обнаружить осциллятор в состоянии $|m\rangle$ в момент времени t , если в начальный момент времени t_0 он находился в состоянии $|n\rangle$. Такая постановка задачи, конечно, предполагает, что возмущение мгновенно включается при $t = t_0$. Итак, зная оператор эволюции, записываем выражение для вероятности перехода

$$w_{mn}(t, t_0) = |\langle m | \hat{U}(t, t_0) | n \rangle|^2 = |\langle m | \hat{D}(\gamma(t, t_0)) | n \rangle|^2 \equiv |D_{mn}(\gamma)|^2. \quad (3.72)$$

Для вычисления матричных элементов рассмотрим их производящую функцию:

$$\begin{aligned} G(\alpha^*, \beta) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} D_{mn} \frac{\alpha^{*m} \beta^n}{\sqrt{m!n!}} = \exp(|\alpha|^2/2 + |\beta|^2/2) \langle \alpha | \hat{D}(\gamma) | \beta \rangle = \\ &= \exp(-|\gamma|^2/2) \exp(\alpha^* \beta + \alpha^* \gamma - \beta \gamma^*). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Разложение в ряд и перегруппировка слагаемых приводят к следующему результату

$$D_{mn} = \sqrt{m!n!} \exp(-|\gamma|^2/2) \sum_{n_1=0}^{\min(m,n)} \frac{\gamma^{m-n_1} (-\gamma^*)^{n-n_1}}{n_1! (m-n_1)! (n-n_1)!}. \quad (3.74)$$

Можно переписать выражение (3.74) в более компактной форме, используя полиномы Лаггера [Laguerre]

$$L_n^k(x) = \sum_{s=0}^n \frac{(-x)^s}{s!} \frac{\Gamma(n+k+1)}{(n-s)! \Gamma(k+s+1)}. \quad (3.75)$$

Окончательно получаем

$$D_{mn}(\gamma) = [n!/m!]^{1/2} \exp(-|\gamma|^2/2) \gamma^{m-n} L_n^{m-n}(|\gamma|^2), \quad m \geq n, \quad (3.76)$$

$$D_{mn}(\gamma) = [m!/n!]^{1/2} \exp(-|\gamma|^2/2) (-\gamma^*)^{n-m} L_m^{n-m}(|\gamma|^2), \quad m \leq n. \quad (3.77)$$

Упражнение 3.4.1

Получите выражения (3.74) и (3.76)-(3.77).

Замечание 3.4.4

Можно рассматривать задачу с адиабатически медленно включающимся и затем выключающимся взаимодействием, вводя регуляризацию посредством умножения $F(t)$ на $\exp(-\epsilon|t|)$ и вычисляя пределы $t_0 \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow \infty$ и $\epsilon \rightarrow 0_+$ в выражениях для вероятности перехода. Очевидно, наличие конечного предела для $\gamma(t, t_0)$ можно гарантировать, если $F(t)$ стремится к нулю достаточно быстро при $t \rightarrow \pm\infty$. Постановка задачи, когда система приготовлена в бесконечно удаленном прошлом в некотором состоянии и рассматривается вероятность перехода в некоторое состояние, в бесконечно удаленном будущем, когда взаимодействие выключено, характерна для теории рассеяния. Отметим также отсутствие предела у самого оператора эволюции (3.61) при $t_0 \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow \infty$.

3.5. Представление Фока-Баргмана

Обычным для квантовой механики является описание пространства состояний как гильбертова [Hilbert] пространства функций, зависящих от координат (координатное представление) или импульсов (импульсное представление). Здесь мы рассмотрим реализацию гильбертова пространства как множества целых аналитических функций, которая тесно связана с когерентными состояниями (3.15) и разложением единицы (3.26).

Действительно, согласно (3.27) вектор гильбертова пространства $|\psi\rangle$ можно охарактеризовать посредством $\langle\alpha|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \implies \langle\alpha|\psi\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \psi(\alpha^*), \quad (3.78)$$

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(z), \quad u_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}. \quad (3.79)$$

Таким образом, мы получили соответствие между кет-векторами и целыми аналитическими функциями:

$$|n\rangle \rightarrow \langle z|n\rangle = u_n(z), \quad |\psi\rangle \rightarrow \langle z|\psi\rangle = \psi(z). \quad (3.80)$$

При этом, вследствие (1.24), операторы рождения и уничтожения становятся операторами умножения на z и дифференцирования по z :

$$\hat{a}^\dagger \rightarrow z, \quad \hat{a} \rightarrow \partial_z. \quad (3.81)$$

В качестве последнего шага определим скалярное произведение $\langle \phi | \psi \rangle_F$ таким образом, чтобы мономы u_n образовали ортонормированный базис:

$$\langle \phi | \psi \rangle_F = \int \exp(-|z|^2) \phi^*(z) \psi(z) d\mu(z), \quad d\mu(z) = \pi^{-1} d^2 z. \quad (3.82)$$

В результате мы получаем реализацию пространства кет-векторов в виде гильбертова пространства целых аналитических функций со скалярным произведением (3.82), \mathcal{F} , известную как *представление Фока-Баргмана* [Fock, Bargmann]. Остановимся на некоторых элементарных фактах относительно пространства \mathcal{F} .

Из неравенства Шварца $|\langle \alpha | \psi \rangle| \leq \|\psi\|$ следует неравенство, которому удовлетворяют функции из \mathcal{F} :

$$\psi(z) \in \mathcal{F} \implies \psi(z) \leq C \exp(|z|^2/2). \quad (3.83)$$

Представления для когерентного состояния $|\alpha\rangle$ и δ -функции:

$$|\alpha\rangle \rightarrow \langle z | \alpha \rangle = \exp(-|\alpha|^2/2 + \alpha z), \quad (3.84)$$

$$\delta(z, \tilde{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) u_n^*(\tilde{z}) = \exp(z \tilde{z}^*). \quad (3.85)$$

Действительно, воспроизводящее свойство $\delta(z, z')$ нетрудно проверить прямым вычислением для любой аналитической функции из \mathcal{F} :

$$f(z) = \int \delta(z, z') \exp(-|z'|^2) f(z') d\mu(z'). \quad (3.86)$$

Действие оператора смещения в представлении Фока-Баргмана:

$$\hat{D}(\alpha) f(z) = \exp(-|\alpha|^2/2 + \alpha z) f(z - \alpha^*). \quad (3.87)$$

Наконец, получим выражение для ядра, $K(z, x)$, отображающего элементы $f(z) \in \mathcal{F}$ в соответствующие им вектора координатного представления $f(x)$:

$$f(z) = \int K(z, x) f(x) dx, \quad f(x) = \int K^*(z, x) \exp(-|z|^2) f(z) d\mu(z), \quad (3.88)$$

$$K(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) \psi_n(x) = N \exp[\xi^2/2 - (x - 2^{1/2} \xi)^2/2], \quad (3.89)$$

где коэффициент N и собственные функции осциллятора в координатном представлении $\psi_n(x)$ определены в (1.19) и (1.27). Отметим, что при выводе (3.89) мы воспользовались выражением для производящей функции полиномов Эрмита.

3.6. Символы операторов

В духе предыдущего раздела, где мы использовали к.с. для построения соответствия между кет-векторами и функциями комплексного переменного, которые можно назвать символами кет-векторов, рассмотрим возможности представления такого сорта для операторов. Другими словами, мы будем использовать к.с. для того, чтобы построить соответствие между операторами и функциями комплексного переменного, называемые *символами операторов*.

Начнем с простого замечания, что оператор \hat{A} однозначно характеризуется его матричными элементами $\langle m|\hat{A}|n\rangle$:

$$A_{mn} = \langle m|\hat{A}|n\rangle \implies \hat{A} = \sum_{m,n} A_{mn} |m\rangle\langle n|. \quad (3.90)$$

Запишем матричные элементы в базисе к.с. в виде:

$$\langle \beta|\hat{A}|\alpha\rangle = A(\alpha, \beta) \equiv \exp(-|\beta|^2/2 - |\alpha|^2/2) \tilde{A}(\alpha, \beta^*), \quad (3.91)$$

$$\tilde{A}(\alpha, \beta^*) = \sum_{m,n} \frac{(\beta^*)^m \alpha^n}{\sqrt{m!n!}} A_{mn}. \quad (3.92)$$

Соотношение (3.92) показывает, что матричные элементы A_{mn} можно восстановить из функции $\tilde{A}(\alpha, \beta^*)$. Более того, для этого достаточно знать только диагональные элементы при $\beta = \alpha$, которые и определяют Q -символ оператора.

Определение 3.6.1 (Q -символ оператора)

$$\boxed{\hat{A} \rightarrow Q_A(\alpha, \alpha^*) = \langle \alpha|\hat{A}|\alpha\rangle} \text{ — } Q\text{-символ оператора.} \quad (3.93)$$

Рассмотрим некоторые соотношения для Q -символа матрицы плотности (в обозначениях для символов матрицы плотности далее нижний индекс будем опускать).

Соотношение нормировки:

$$\text{Tr } \hat{\rho} = \int Q(\alpha, \alpha^*) d\mu(\alpha) = 1. \quad (3.94)$$

Усреднение антинормально упорядоченного оператора:

$$\langle \hat{a}^m (\hat{a}^\dagger)^n \rangle \equiv \text{Tr}(\hat{a}^m (\hat{a}^\dagger)^n \hat{\rho}) = \int (\alpha^*)^n \alpha^m Q(\alpha, \alpha^*) d\mu(\alpha). \quad (3.95)$$

Полученный результат показывает, что квантовое среднее антинормально упорядоченного оператора имеет вид момента “классической” плотности распределения вероятности в фазовом пространстве, роль которого играет Q -символ матрицы плотности. С другой стороны, Q -символ нормально упорядоченного оператора можно получить заменой $\hat{a} \rightarrow \alpha$ и $\hat{a}^\dagger \rightarrow \alpha^*$:

$$\hat{A} = \sum_{m,n} A_{mn}^{(N)} (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n \implies Q_A(\alpha, \alpha^*) = \sum_{m,n} A_{mn}^{(N)} (\alpha^*)^m \alpha^n. \quad (3.96)$$

Q -символ также иногда называют *виковским* или *ковариантным символом*.

Замечание 3.6.1

Теорема Вика [Wick] формулирует алгоритм приведения упорядоченного определенным образом произведения операторов (точная формулировка будет дана позже) к *нормально упорядоченной (виковской) форме*, где все операторы уничтожения располагаются правее операторов рождения. Обратный порядок называется *антинормальным (антивиковским)*. В нашем случае термин виковский относится к упорядочению оператора в формуле (3.96).

Замечание 3.6.2

В геометрии евклидовых пространств различают *ковариантные* (x_i) и *контравариантные* (x^i) координаты вектора \mathbf{x} в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ (ниже суммирование по повторяющимся индексам подразумевается):

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \quad x_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) = g_{ij} x^j, \quad g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j). \quad (3.97)$$

Закон преобразования координат при замене базиса для ковариантных и контравариантных компонент, вообще говоря, различен. Q -символ определен в (3.93) через скалярное произведение, что и поясняет термин *ковариантный символ*.

Замечание 3.6.3 (плотность квазивероятности)

Q -символ матрицы плотности обладает многими формальными свойствами плотности распределения вероятности. Он представляет собой неотрицательную регулярную функцию, которая принимает действительные значения и удовлетворяет условию нормировки (3.94). Тем не менее, Q -символ обычно называют плотностью квазивероятности, подчеркивая разницу между ним и обычной плотностью распределения вероятности в фазовом пространстве классической системы.

Получим Q -символы для матрицы плотности типичных (и уже рассмотренных ранее) состояний.

Пример 3.6.1 (Q -символ стационарного состояния)

Система находится в состоянии с определенным числом заполнения:

$$\hat{\rho} = |n\rangle\langle n| \implies Q(\alpha, \alpha^*) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (3.98)$$

Пример 3.6.2 (Q -символ к.с.)

Система находится в когерентном состоянии:

$$\hat{\rho} = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0| \implies Q(\alpha, \alpha^*) = |\langle\alpha_0|\alpha\rangle|^2 = \exp(-|\alpha - \alpha_0|^2). \quad (3.99)$$

Пример 3.6.3 (Q -символ распределения Гиббса)

Осциллятор в состоянии теплового равновесия (2.32):

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_{th} \implies Q(\alpha, \alpha^*) = (n_{th} + 1)n_{th}^{-2} \exp(-|\alpha|^2(n_{th} + 1)n_{th}^{-2}), \quad (3.100)$$

где $n_{th} = [e^{\beta\hbar\omega} - 1]^{-1}$ (см. (2.36)).

Другим часто используемым символом является P -символ (*распределение Глаубера-Сударшана* [Glauber, Sudarshan]). По структуре, его определение выглядит также как правая часть формулы (3.90) с той лишь разницей, что оператор записывается как суперпозиция проекторов на когерентные состояния:

Определение 3.6.2 (P -символ оператора)

$$\hat{A} = \int P_A(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle\langle\alpha| d\mu(\alpha), \quad P_A(\alpha, \alpha^*) - P\text{-символ оператора}. \quad (3.101)$$

Из определения непосредственно следует, что P -символ матрицы плотности удовлетворяет условию нормировки

$$\text{Tr } \hat{\rho} = \int P(\alpha, \alpha^*) d\mu(\alpha) = 1 \quad (3.102)$$

и усреднение *нормально упорядоченного оператора* имеет вид “классического” среднего

$$\langle(\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^m\rangle \equiv \text{Tr}((\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^m \hat{\rho}) = \int (\alpha^*)^n \alpha^m P(\alpha, \alpha^*) d\mu(\alpha). \quad (3.103)$$

P -символ *антинормально* упорядоченного оператора можно получить заменой $\hat{a} \rightarrow \alpha$ и $\hat{a}^\dagger \rightarrow \alpha^*$:

$$\hat{A} = \sum_{m,n} A_{mn}^{(A)} \hat{a}^m (\hat{a}^\dagger)^n \implies P_A(\alpha, \alpha^*) = \sum_{m,n} A_{mn}^{(A)} \alpha^m (\alpha^*)^n. \quad (3.104)$$

Заметна определенная дуальность свойств Q - и P -символов. При этом последние называют *антивиковскими* или *контравариантными символами*.

Если известен P -символ оператора, то его Q -символ можно вычислить, записав соотношение, связывающее различные символы:

$$Q_A(\alpha, \alpha^*) = \int \exp(-|\alpha - \beta|^2) P_A(\beta, \beta^*) d\mu(\beta). \quad (3.105)$$

Замечание 3.6.4

Соотношение (3.105) нетрудно получить, усредняя (3.101) по к.с. и используя выражение для скалярного произведения к.с. (3.25).

Замечание 3.6.5

Формула (3.105) показывает, что Q -символ получается в результате "сглаживания" P -символа. При этом весовая функция является гауссовой. Далее мы увидим, что P -символ, вообще говоря, не является положительно определенным и может содержать сингулярности такие как δ -функция и ее производные. Поэтому его также называют плотностью квазивероятности.

Отметим, в заключение этого раздела, что соотношения (3.95) и (3.103) легко обобщить, получив выражение для следа произведения двух операторов через их символы:

$$\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}) = \int Q_A(\alpha, \alpha^*) P_B(\alpha, \alpha^*) d\mu(\alpha) = \int P_A(\alpha, \alpha^*) Q_B(\alpha, \alpha^*) d\mu(\alpha). \quad (3.106)$$

Упражнение 3.6.1

Покажите, что символы оператора смещения $\hat{D}(\gamma)$ равны

$$Q_D(\alpha, \alpha^*) = \exp(-|\gamma|^2/2 + 2i \text{Im}(\gamma\alpha^*)), \quad P_D(\alpha, \alpha^*) = \exp(|\gamma|^2/2 + 2i \text{Im}(\gamma\alpha^*)). \quad (3.107)$$

h. Воспользуйтесь (анти)виковской формой оператора смещения.

Упражнение 3.6.2

Покажите, что

$$\text{Tr}(\hat{D}(\gamma)) = \pi \delta^2(\gamma), \quad \text{Tr}(\hat{D}(\alpha)\hat{D}^{-1}(\beta)) = \pi \delta^2(\alpha - \beta), \quad (3.108)$$

где $\delta^2(\gamma) \equiv \delta(\text{Re } \gamma) \delta(\text{Im } \gamma)$.

h. Воспользуйтесь интегральным представлением δ -функции:

$$\delta(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ix\tau) d\tau.$$

Упражнение 3.6.3

Докажите формулу разложения по операторам смещения:

$$\hat{A} = \int \text{Tr}[\hat{D}(\alpha)\hat{A}] \hat{D}^{-1}(\alpha) d\mu(\alpha) = \int \text{Tr}[\hat{D}(-\alpha)\hat{A}] \hat{D}(\alpha) d\mu(\alpha). \quad (3.109)$$

h. Покажите, что

$$\mathrm{Tr}[\hat{A}\hat{D}(\gamma)] = \mathrm{Tr}[\hat{B}\hat{D}(\gamma)], \quad \forall \gamma \in \mathbb{C} \implies Q_A(\gamma) = Q_B(\gamma) \implies \hat{A} = \hat{B}.$$

Таким образом, осталось проверить, что след оператора в правой части равенства (3.109), домноженного на $\hat{D}(\gamma)$, совпадает с $\mathrm{Tr} \hat{A}\hat{D}(\gamma)$. Это несложно сделать, воспользовавшись “соотношением ортогональности” (3.108).

3.7. Характеристические функции

Вспомним, как определяются характеристические функции в классической теории вероятностей. Начнем с простейшего случая непрерывной случайной величины с плотностью распределения вероятности, $w(x)$. Тогда математическое ожидание экспоненты $e^{i\xi x}$ является Фурье-преобразованием $w(x)$ и называется характеристической функцией $\chi(\xi)$.

$$\chi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} w(x) dx. \quad (3.110)$$

Многомерные обобщения этого определения очевидны: $x \rightarrow \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\xi \rightarrow \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\xi x \rightarrow \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i$ и $dx \rightarrow d^n x$. При $n = 2$ можно ввести комплексные переменные $\alpha = (x_1 + ix_2)/\sqrt{2}$ и $\eta = (\xi_2 - i\xi_1)/\sqrt{2}$ и записать показатель экспоненты как $\eta^* \alpha - \eta \alpha^*$. Сама же плотность распределения вероятности $w(x_1, x_2)$ в результате такой комплексификации станет функцией от α и α^* . (Далее для краткости мы будем опускать α^* в аргументах функций и писать, например, $w(\alpha)$ вместо $w(\alpha, \alpha^*)$). Тогда определение характеристической функции для двумерной случайной величины можно записать в комплексной форме:

$$\chi(\eta) = 2\pi \int \exp(\eta^* \alpha - \eta \alpha^*) w(\alpha) d\mu(\alpha), \quad (3.111)$$

где учтено, что $2\pi d\mu(\alpha) = dx_1 dx_2$.

Для одномерной классической динамической системы $x_1 = x$ — координата и $x_2 = p$ — импульс. В квантовом случае, по аналогии, определим характеристические функции для различных типов упорядоченности усредняемых операторов:

Определение 3.7.1 (квантовые характеристические функции)

$$\boxed{\chi_N(-\eta) = \text{Tr}[\rho \exp(\eta \hat{a}^\dagger) \exp(-\eta^* \hat{a})] \text{ — нормально упоряд.},} \quad (3.112)$$

$$\boxed{\chi_S(-\eta) = \text{Tr}[\rho \exp(\eta \hat{a}^\dagger - \eta^* \hat{a})] \equiv \text{Tr}[\rho \hat{D}(\eta)] \text{ — симметрично упоряд.},} \quad (3.113)$$

$$\boxed{\chi_A(-\eta) = \text{Tr}[\rho \exp(-\eta^* \hat{a}) \exp(\eta \hat{a}^\dagger)] \text{ — антинормально упоряд.}} \quad (3.114)$$

Связь между различными характеристическими функциями легко получить из соотношений для оператора смещения (3.18) и (3.19):

$$\boxed{\chi_N(\eta) = \exp(|\eta|^2/2) \chi_S(\eta), \quad \chi_A(\eta) = \exp(-|\eta|^2/2) \chi_S(\eta).} \quad (3.115)$$

Эти соотношения и разложение (3.109) дают следующие представления для матрицы плотности:

$$\hat{\rho} = \int \chi_S(\eta) \hat{D}(\eta) d\mu(\eta), \quad (3.116)$$

$$\hat{\rho} = \int \chi_N(\eta) \exp(-\eta^* \hat{a}) \exp(\eta \hat{a}^\dagger) d\mu(\eta), \quad (3.117)$$

$$\hat{\rho} = \int \chi_A(\eta) \exp(\eta \hat{a}^\dagger) \exp(-\eta^* \hat{a}) d\mu(\eta). \quad (3.118)$$

Прямым следствием этих соотношений и (3.96), (3.104) являются выражения для символов матрицы плотности через характеристические функции:

$$\begin{aligned} \boxed{P(\alpha) = \int \chi_N(\eta) \exp(-\eta^* \alpha + \eta \alpha^*) d\mu(\eta)} &\implies \\ \implies \boxed{\chi_N(\eta) = \int P(\alpha) \exp(\eta^* \alpha - \eta \alpha^*) d\mu(\alpha),} & \quad (3.119) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{Q(\alpha) = \int \chi_A(\eta) \exp(-\eta^* \alpha + \eta \alpha^*) d\mu(\eta)} &\implies \\ \implies \boxed{\chi_A(\eta) = \int Q(\alpha) \exp(\eta^* \alpha - \eta \alpha^*) d\mu(\alpha).} & \quad (3.120) \end{aligned}$$

Видим, что P - и Q -символы являются Фурье-преобразованиями характеристических функций с нормально и антинормально упорядоченными операторами.

Аналогично, характеристическая функция с симметричным расположением операторов определяет новый символ — *символ Вейля (распределение Вигнера)* [Weyl, Wigner].

$$\boxed{W(\alpha) = \int \chi_S(\eta) \exp(-\eta^* \alpha + \eta \alpha^*) d\mu(\eta) \text{ — символ Вейля}} \implies \implies \boxed{\chi_S(\eta) = \int W(\alpha) \exp(\eta^* \alpha - \eta \alpha^*) d\mu(\alpha)}. \quad (3.121)$$

Упражнение 3.7.1

Покажите, что

$$\int W(\alpha) d\mu(\alpha) = 1, \quad (3.122)$$

$$W(\alpha) = 2 \int \exp(-2|\alpha - \beta|^2) P(\beta) d\mu(\beta), \quad (3.123)$$

$$Q(\alpha) = 2 \int \exp(-2|\alpha - \beta|^2) W(\beta) d\mu(\beta). \quad (3.124)$$

Таким образом, мы определили характеристические функции матрицы плотности и выяснили, что они связаны с символами через Фурье-преобразование. Как и в теории вероятностей, мы можем связать вычисленные в нуле производные характеристических функций со средними значениями различным образом упорядоченных произведений операторов рождения и уничтожения, которым в теории вероятностей соответствуют моменты распределения:

$$(-\partial_\eta)^m \partial_{\eta^*}^n \chi_N(\eta) |_{\eta=0} = \langle (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n \rangle, \quad (3.125)$$

$$(-\partial_\eta)^m \partial_{\eta^*}^n \chi_A(\eta) |_{\eta=0} = \langle \hat{a}^n (\hat{a}^\dagger)^m \rangle, \quad (3.126)$$

$$(-\partial_\eta)^m \partial_{\eta^*}^n \chi_S(\eta) |_{\eta=0} = \langle \{(\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n\}_{Sym} \rangle, \quad (3.127)$$

где $\{\dots\}_{Sym}$ означает симметризацию выражения в скобках, которая определяется как сумма по всем перестановкам операторов, деленная на число перестановок:

Определение 3.7.2 (симметризация)

$$\{\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_n\}_{Sym} = (n!)^{-1} \sum_P P[\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_n], \quad (3.128)$$

$$[a_1 \hat{A}_1 + \cdots + a_n \hat{A}_n]^m = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \\ k_1 + \dots + k_n = m}} \frac{m!}{k_1! \cdots k_n!} a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n} \{\hat{A}_1^{k_1} \cdots \hat{A}_n^{k_n}\}_{Sym} \quad (3.129)$$

Пример 3.7.1

$$\{\hat{a}^\dagger \hat{a}\}_{Sym} = (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger)/2.$$

Пример 3.7.2 (P -символ распределения Гиббса)

Вспользуемся тем, что Q -символ распределения Гиббса известен (3.100). Тогда можно вычислить характеристическую функцию $\chi_A(\eta)$, затем найти $\chi_N(\eta)$, Фурье-преобразование которой даст P -символ:

$$\begin{aligned} Q(\alpha) &= s \exp(-s|\alpha|^2) \xrightarrow{(3.120)} \chi_A(\eta) = \exp(-|\eta|^2/s) \xrightarrow{(3.115)} \\ &\xrightarrow{(3.115)} \chi_N(\eta) = \exp(-|\eta|^2(1-s)/s) \xrightarrow{(3.119)} \\ &\xrightarrow{(3.119)} P(\alpha) = n_{th}^{-1} \exp(-|\alpha|^2/n_{th}), \quad s \equiv 1 - \exp(-\beta \hbar \omega). \end{aligned} \quad (3.130)$$

Упражнение 3.7.2

Найдите распределения Вигнера (W -символ) для распределения Гиббса и стационарных состояний осциллятора. Убедитесь в том, что распределение Вигнера не является положительно определенным.

Замечание 3.7.1 (О P -символе сжатого состояния)

Мы покажем, что в сжатом состоянии с $\langle (\Delta X_1)^2 \rangle < 1/4$ P -символ не является положительно определенным. Для этого запишем выражение для X_1^2 как нормально упорядоченный оператор:

$$X_1^2 = \mathcal{N}[X_1^2] + 1/4, \quad \mathcal{N}[X_1^2] = (\hat{a}^2 e^{-2i\phi} + (\hat{a}^\dagger)^2 e^{2i\phi} + 2\hat{a}^\dagger \hat{a})/4, \quad (3.131)$$

где операция $\mathcal{N}[\dots]$ нормально упорядочивает оператор. В сжатом состоянии имеем неравенство для среднего нормально упорядоченного оператора, которое можно записать как интеграл с P -символом

$$\langle \mathcal{N}[\Delta X_1^2] \rangle = \int P(\alpha) [\Delta \alpha^* e^{i\phi} + \Delta \alpha e^{-i\phi}]^2 d\mu(\alpha) < 0. \quad (3.132)$$

Очевидно, что неравенству невозможно удовлетворить, если $P(\alpha)$ неотрицательна.

Замечание 3.7.2 (P -символ к.с.)

Система находится в когерентном состоянии, и из определения (3.101) имеем

$$\hat{\rho} = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0| \implies P(\alpha, \alpha^*) = \pi \delta^2(\alpha - \alpha_0). \quad (3.133)$$

Замечание 3.7.3 (P -символ стационарного состояния)

Действуя, например, так же, как в примере с распределением Гиббса можно убедиться в том, что P -символ в этом случае будет определен как Фурье-преобразование степенной функции и, как следствие, описывается сингулярной функцией (производная от δ -функции):

$$\hat{\rho} = |n\rangle\langle n| \implies P(\alpha, \alpha^*) = \pi (n!)^{-1} \exp(|\alpha|^2) \{\partial_\alpha^n \partial_{\alpha^*}^n \delta^2(\alpha)\}. \quad (3.134)$$

В правильности результата, конечно, можно убедиться прямой проверкой.

Редукция матрицы плотности

В разделе 1.7 мы рассмотрели простейшее обобщение задачи о квантовом осцилляторе — многомерный осциллятор, гамильтониан которого, по существу, описывает систему из k невзаимодействующих и, как следствие, независимых осцилляторов (см. уравнения (1.39) и (1.43)). Последнее обстоятельство позволило нам записать стационарные состояния системы как произведения собственных функций осцилляторов

$$|\{n\}\rangle \equiv |n_1, \dots, n_k\rangle = \prod_{i=1}^k \psi_{n_i}(x_i) \equiv |n_1\rangle \otimes \dots \otimes |n_k\rangle. \quad (4.1)$$

Последнее равенство в (4.1) подчеркивает тот общий факт, что пространство состояний сложной системы является *тензорным произведением* пространств состояний образующих ее подсистем. В нашем случае кет-вектора $|\{n\}\rangle$ образуют ортонормированный базис в пространстве состояний. При этом когерентные состояния определяются как

$$|\{\alpha\}\rangle \equiv |\alpha_1, \dots, \alpha_k\rangle = \hat{D}(\{\alpha\})|vac\rangle = \prod_{i=1}^k \hat{D}(\alpha_i)|0, \dots, 0\rangle \equiv |\alpha_1\rangle \dots |\alpha_k\rangle, \quad (4.2)$$

где в кратких обозначениях символ тензорного произведения \otimes опущен (здесь и в дальнейшем мы будем избегать “лишних” символов, если это не приводит к путанице). Очевидно, многомерные обобщения результатов лекции 3 получаются непосредственно, и мы не станем их выписывать.

Замечание 4.0.1 (тензорное произведение)

Проиллюстрируем понятие тензорного произведения на примере евклидовых пространств. Пусть \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 — евклидовы пространства (=линейные пространства + скалярное произведение) с ба-

зисами $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m\}$. Тогда тензорное произведение этих пространств $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ определяется как линейное пространство размерности $m \cdot n$ с базисными векторами $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j$:

$$\mathbf{x} \in \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2 \implies \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j,$$

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j, \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{f}_l) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_l) \text{— скалярное произведение.}$$

$$\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2 : \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j \rightarrow \hat{A}_1(\mathbf{e}_i) \otimes \hat{A}_2(\mathbf{f}_j) \text{— тензорное произведение операторов.}$$

Последние два соотношения показывают, как наследуется скалярное произведение и как определяется тензорное произведение операторов.

Обсудим подробнее ситуацию, когда имеется две подсистемы (например, две частицы, два осциллятора и т.п.). В координатном представлении волновые функции первой зависят от x (верхний индекс – (a)), $|\phi^{(a)}\rangle \rightarrow \phi^{(a)}(x)$, а волновые функции второй системы зависят от y (верхний индекс – (b)), $|\phi^{(b)}\rangle \rightarrow \phi^{(b)}(y)$. При этом мы полагаем, что динамические переменные (операторы), относящиеся к разным подсистемам коммутируют, $[\hat{A}^{(a)}, \hat{A}^{(b)}] = 0$. Если известно, что одна подсистема находится в состоянии $|\phi^{(a)}\rangle$, а другая – в состоянии $|\phi^{(b)}\rangle$, то волновая функция системы записывается в факторизованном виде:

$$\Phi(x, y) \equiv |\Phi\rangle = \phi^{(a)}(x)\phi^{(b)}(y) \equiv |\phi^{(a)}\rangle|\phi^{(b)}\rangle. \quad (4.3)$$

Так, например, если подсистемы не взаимодействуют и стационарные состояния каждой известны, то стационарные состояния объединенной системы представляют собой произведения стационарных состояний подсистем:

$$\hat{H}_0(x, y) = \hat{H}_0^{(a)}(x) + \hat{H}_0^{(b)}(y), \quad (4.4)$$

$$\hat{H}_0^{(a)}|\phi_i^{(a)}\rangle = E_i^{(a)}|\phi_i^{(a)}\rangle, \quad \hat{H}_0^{(b)}|\phi_j^{(b)}\rangle = E_j^{(b)}|\phi_j^{(b)}\rangle, \quad (4.5)$$

$$\hat{H}_0|\Phi_{ij}\rangle = (E_i^{(a)} + E_j^{(b)})|\Phi_{ij}\rangle, \quad |\Phi_{ij}\rangle = |\phi_i^{(a)}\rangle|\phi_j^{(b)}\rangle. \quad (4.6)$$

В общем случае, однако, волновую функцию системы (a)+(b) нельзя представить в виде произведения (4.3), и такие состояния называют *запутанными* [entangled]:

Определение 4.0.1 (запутанные состояния)

$$|\Phi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |\phi_i^{(a)}\rangle|\phi_j^{(b)}\rangle \neq |\phi^{(a)}\rangle|\phi^{(b)}\rangle. \quad (4.7)$$

На языке матрицы плотности запутанные состояния (как чистые, так и смешанные) характеризуются тем, что матрицу плотности нельзя записать в виде произведения операторов, описывающих состояния отдельных подсистем:

$$\hat{\rho} \neq \hat{\rho}^{(a)} \otimes \hat{\rho}^{(b)}. \quad (4.8)$$

Очевидно, что наличие взаимодействия между подсистемами, которому соответствует оператор взаимодействия $\hat{V}(x, y)$:

$$\hat{H}(x, y) = \hat{H}_0^{(a)}(x) + \hat{H}_0^{(b)}(y) + \hat{V}(x, y) \quad (4.9)$$

приведет к “запутыванию” стационарных состояний. Перед тем как продолжить общий анализ и конкретизировать физику, рассмотрим две простые и важные системы, состоящие из двух взаимодействующих подсистем.

4.1. Осциллятор в одномодовом квантованном поле

Рассмотрим систему, состоящую из двух билинейно взаимодействующих осцилляторов:

$$\hbar^{-1} \hat{H} \equiv \hat{h} = \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \lambda [\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}], \quad (4.10)$$

где ω_a и ω_b – частоты осцилляторов; λ – постоянная взаимодействия.

С формальной точки зрения, гамильтониан нашей модельной системы является частным случаем квадратичной формы по операторам рождения и уничтожения. При этом в операторе взаимодействия мы пренебрегли нерезонансными слагаемыми вида $\hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger$ и $\hat{a} \hat{b}$. Позже мы рассмотрим метод учета таких слагаемых.

Прежде всего, отметим, что гамильтониан (4.10) можно записать в матричной форме

$$\hat{h} = \begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger & \hat{b}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_a & \lambda \\ \lambda & \omega_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger & \hat{b}^\dagger \end{pmatrix} \cdot \mathbf{h} \cdot \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

и задачу вычисления оператора эволюции можно рассматривать как задачу о диагонализации квадратичной формы. Для этого будем использовать канонические преобразования, генерируемые унитарным оператором \hat{T} , $\hat{T}^\dagger = \hat{T}^{-1}$:

$$\{\hat{a}, \hat{b}, \hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger\} \rightarrow \hat{T}^{-1} \{\hat{a}, \hat{b}, \hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger\} \hat{T} \equiv \{\hat{T}^{-1} \hat{a} \hat{T}, \hat{T}^{-1} \hat{b} \hat{T}, \hat{T}^{-1} \hat{a}^\dagger \hat{T}, \hat{T}^{-1} \hat{b}^\dagger \hat{T}\}. \quad (4.12)$$

В разделе 1.6 мы рассматривали преобразования вида (4.12), которые определяют линейные канонические преобразования в случае одного осциллятора. При этом оператором \hat{T} был оператор сжатия $\hat{S}(-\zeta)$ (см. уравнение (1.36)).

Поскольку нас по-прежнему интересуют линейные преобразования, то мы будем рассматривать операторы вида:

$$\boxed{\hat{T}(\zeta) = \exp[\hat{q}(\zeta)], \quad \zeta = r \exp\{i\theta\},} \quad (4.13)$$

где $\hat{q}(\zeta)$ – антиэрмитов оператор ($\hat{q}^\dagger = -\hat{q}$), квадратичный по операторам рождения-уничтожения и линейный по параметру ζ (и ζ^*).

Предложение 4.1.1 (канонические преобразования для двух мод)

$$\begin{aligned} \hat{q}(\zeta) \equiv \hat{q}_1(\zeta) &= \zeta^* \hat{a} \hat{b}^\dagger - \zeta \hat{b} \hat{a}^\dagger, \quad \hat{T} \equiv \hat{T}_1(\zeta) \implies \\ \implies \boxed{\hat{T}_1^{-1} \hat{a} \hat{T}_1 &= (\cos r) \hat{a} - (e^{i\theta} \sin r) \hat{b}, \quad \hat{T}_1^{-1} \hat{b} \hat{T}_1 = (\cos r) \hat{b} + (e^{-i\theta} \sin r) \hat{a}.} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \hat{q}(\zeta) \equiv \hat{q}_2(\zeta) &= \zeta^* \hat{a} \hat{b} - \zeta \hat{b}^\dagger \hat{a}^\dagger, \quad \hat{T} \equiv \hat{S}_1(\zeta) \implies \\ \implies \boxed{\hat{S}_1^{-1} \hat{a} \hat{S}_1 &= (\cosh r) \hat{a} - (e^{i\theta} \sinh r) \hat{b}^\dagger, \quad \hat{S}_1^{-1} \hat{b}^\dagger \hat{S}_1 = (\cosh r) \hat{b}^\dagger - (e^{-i\theta} \sinh r) \hat{a}.} \end{aligned} \quad (4.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Также как и соотношения (1.35)–(1.36), формулы (4.14)–(4.15) доказываются прямым вычислением с использованием операторного тождества (1.29). ■

Перейдем к вычислению оператора эволюции. Для диагонализации гамильтониана используем преобразование (4.14). Нижеследующие уравнения показывают, как наша задача сводится к диагонализации матрицы 2×2 :

$$\hat{U}(t) = \hat{T}_1(r) \hat{U}'(t) \hat{T}_1^{-1}(r) \implies i\partial_t \hat{U}'(t) = \hat{h}' \hat{U}'(t), \quad \hat{U}'(0) = \hat{I}, \quad (4.16)$$

$$\hat{h}' = \hat{T}_1^{-1}(r) \hat{h} \hat{T}_1(r) = (\hat{a}^\dagger \ \hat{b}^\dagger) \cdot \mathbf{h}' \cdot \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{h}' = \mathbf{T}_1^{-1}(r) \cdot \mathbf{h} \cdot \mathbf{T}_1(r), \quad \mathbf{T}_1(r) = \begin{pmatrix} \cos r & -\sin r \\ \sin r & \cos r \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Оператор $\hat{U}'(t)$ будет оператором эволюции невзаимодействующих осцилляторов, если угол поворота r определен так, чтобы матрица \mathbf{h}' оказалась диагональной. Эта простая задача из линейной алгебры уже была решена при рассмотре-

нии двухуровневой системы (см. соотношения (2.78)–(2.80)).

$$\boxed{2r = \alpha_m = \arg(\Delta + 2i\lambda), \quad \Delta \equiv \omega_a - \omega_b, \quad \Omega \equiv (\omega_a + \omega_b)/2,} \quad (4.19)$$

$$\boxed{\mathbf{h}' = \begin{pmatrix} \Omega + \Omega_R & 0 \\ 0 & \Omega - \Omega_R \end{pmatrix}, \quad \Omega_R \equiv \sqrt{\Delta^2/4 + \lambda^2}.} \quad (4.20)$$

Окончательно, для оператора эволюции имеем

$$\boxed{\hat{U}(t) = \hat{T}_1(\alpha_m/2) \exp[-i\hat{h}'t] \hat{T}_1(-\alpha_m/2),} \quad (4.21)$$

где

$$\boxed{\hat{h}' = \Omega\hat{N} + \Omega_R(\hat{N}_a - \hat{N}_b), \quad \hat{N}_a = \hat{a}^\dagger\hat{a}, \quad \hat{N}_b = \hat{b}^\dagger\hat{b}, \quad \hat{N} = \hat{N}_a + \hat{N}_b.} \quad (4.22)$$

Спектр энергий и стационарные состояния

Воспользуемся тем, что спектр оператора (4.22) известен и что преобразование (4.17) легко обратить. При этом обратное преобразование по-прежнему является каноническим и определяет новые операторы рождения-уничтожения $\{\hat{a}, \hat{b}, \hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger\} \rightarrow \{\hat{A}, \hat{B}, \hat{A}^\dagger, \hat{B}^\dagger\}$:

$$\boxed{\hat{h} = \hat{T}_1(\alpha_m/2) \hat{h}' \hat{T}_1^{-1}(\alpha_m/2) = \Omega\hat{N} + \Omega_R(\hat{N}_A - \hat{N}_B),} \quad (4.23)$$

$$\boxed{\hat{A} = \cos(\alpha_m/2) \hat{a} + \sin(\alpha_m/2) \hat{b}, \quad \hat{B} = \cos(\alpha_m/2) \hat{b} - \sin(\alpha_m/2) \hat{a},} \quad (4.24)$$

$$\boxed{\hat{N} = \hat{N}_A + \hat{N}_B = \hat{N}_a + \hat{N}_b.} \quad (4.25)$$

Таким образом, для энергетического спектра и стационарных состояний получаем

$$\boxed{E_{n_A, n_B} = \hbar\Omega n + \hbar\Omega_R(n_A - n_B), \quad n \equiv n_A + n_B,} \quad (4.26)$$

$$\boxed{|n_A, n_B\rangle = \frac{(\hat{A}^\dagger)^{n_A} (\hat{B}^\dagger)^{n_B}}{\sqrt{n_A! n_B!}} |0, 0\rangle.} \quad (4.27)$$

Соотношение (4.27) показывает, что стационарное состояние является линейной комбинацией $|n_a, n_b\rangle$ с $n_a + n_b = n$ и в исходных переменных представляет собой запутанное состояние. При этом каноническое преобразование (4.24) описывает переход к новым переменным (нормальным координатам) так, что стационарные состояния оказываются факторизованными в этих координатах.

Замечание 4.1.1 (бозонное представление алгебры углового момента)

В разделе 2.4 (см. замечание после формулы (2.46)) мы отмечали, что коммутационные соотношения для матриц Паули и для компонент оператора углового момента одинаковы. Эти соотношения определяют алгебраическую структуру, которая называется *алгеброй Ли* группы вращений. Мы показали, что реализация этой алгебры при помощи матриц Паули соответствует представлению с квантовым числом углового момента, j , равным $1/2$. Здесь мы рассмотрим реализацию алгебры углового момента при помощи операторов рождения-уничтожения наших двух осцилляторов:

$$\boxed{\hat{J}_+ = \hat{a}^\dagger \hat{b}, \quad \hat{J}_- = \hat{b}^\dagger \hat{a}, \quad \hat{J}_0 = \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b}}, \quad (4.28)$$

$$\boxed{\hat{J}_1 \equiv \hat{J}_x = (\hat{J}_+ + \hat{J}_-)/2, \quad \hat{J}_2 \equiv \hat{J}_y = (\hat{J}_+ - \hat{J}_-)/(2i), \quad \hat{J}_3 \equiv \hat{J}_z = \hat{J}_0/2}, \quad (4.29)$$

$$\boxed{[\hat{J}_0, \hat{J}_\pm] = \pm 2\hat{J}_\pm, \quad [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = \hat{J}_0, \quad [\hat{J}_i, \hat{J}_j] = ie_{ijk}\hat{J}_k}, \quad (4.30)$$

$$\boxed{\hat{J}^2 = \sum_{i=1}^3 \hat{J}_i^2 = \hat{J}_0^2/4 + (\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+)/2, \quad [\hat{J}^2, \hat{J}_i] = 0}. \quad (4.31)$$

Соотношения (4.30) показывают, что операторы (4.28)-(4.29) реализуют алгебру углового момента. Рассмотрим их действие на состояния $|n_a, n_b\rangle$:

$$\boxed{\hat{J}^2 |n_a, n_b\rangle = j(j+1)|n_a, n_b\rangle, \quad j = (n_a + n_b)/2}, \quad (4.32)$$

$$\boxed{\hat{J}_z |n_a, n_b\rangle = m |n_a, n_b\rangle, \quad m = (n_a - n_b)/2, \quad m = -j, \dots, j-1, j} \quad (4.33)$$

$$\boxed{|n_a, n_b\rangle \equiv |j, m\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^{j+m} (\hat{b}^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |0, 0\rangle, \quad \langle j', m' | j, m\rangle = \delta_{j'j} \delta_{m'm}}, \quad (4.34)$$

$$\hat{J}_+ |j, m\rangle = \sqrt{(j+m+1)(j-m)} |j, m+1\rangle, \quad (4.35)$$

$$\hat{J}_- |j, m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m-1)} |j, m-1\rangle. \quad (4.36)$$

Уравнения (4.32)-(4.33) воспроизводят общий результат теории представлений группы вращений (см. соотношения (2.49)-(2.50)) и показывают, как *квантовое число углового момента* j и *азимутальное квантовое число* m выражаются через числа заполнения n_a и n_b . Как следствие, согласно (4.34), состояния системы $|n_a, n_b\rangle$ можно характеризовать квантовыми числами j и m . Формулы (4.35)-(4.36) поясняют, почему оператор \hat{J}_+ (\hat{J}_-) называется *повышающим* (*понижающим*).

Запишем преобразование вращения, параметризованное углами Эйлера [Euler], $\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \hat{R}(U)$:

$$\hat{R}(U) = \exp[-i\alpha\hat{J}_z] \exp[-i\beta\hat{J}_y] \exp[-i\gamma\hat{J}_z] \quad (4.37)$$

и запишем его матричные элементы

$$\langle j', m' | \hat{R}(U) | j, m\rangle = \delta_{j'j} D_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-im'\alpha} d_{m'm}^j(\beta) e^{-im\gamma}, \quad (4.38)$$

$$d_{m'm}^j(\beta) = \langle j, m' | \exp[-i\beta\hat{J}_y] | j, m\rangle = \langle j, m' | \hat{T}_1(\beta/2) | j, m\rangle, \quad (4.39)$$

где $D_{m'm}^j$ — D -функции Вигнера. Отметим, что обычные сферические функции являются частным случаем функций Вигнера: $Y_{lm} = \sqrt{(2l+1)/(4\pi)} (D_{m,0}^l)^*$.

Получаем, что вращение (4.37) индуцирует линейное преобразование конечномерного подпространства размерности $2j + 1$ с угловым моментом j :

$$\hat{R}(U)|j, m\rangle = \sum_{m'=-j}^j D_{m'm}^j(U) |j, m'\rangle. \quad (4.40)$$

Как следствие, композиции поворотов

$$\hat{R}(U'U) = \hat{R}(U')\hat{R}(U)$$

соответствует композиция матриц:

$$D_{m'm}^j(U'U) = \sum_{m''=-j}^j D_{m'm''}^j(U') D_{m''m}^j(U). \quad (4.41)$$

В заключение, отметим соотношение унитарности

$$D_{m'm}^j(U^{-1}) = (D_{mm'}^j(U))^*, \quad (4.42)$$

являющееся следствием унитарности оператора $\hat{R}(U)$.

Эволюция когерентных состояний

Действие оператора эволюции (4.21) на когерентное состояние $|\alpha, \beta\rangle \equiv \hat{D}(\alpha, \beta)|0, 0\rangle$ запишем в следующем виде:

$$\hat{U}(t)|\alpha, \beta\rangle = \hat{U}(t)\hat{D}(\alpha, \beta)\hat{U}^{-1}(t)|\text{vac}\rangle_t, \quad |\text{vac}\rangle_t \equiv \hat{U}(t)|0, 0\rangle = |0, 0\rangle, \quad (4.43)$$

$$\hat{U}(t)\hat{D}(\alpha, \beta)\hat{U}^{-1}(t) = \exp\{\alpha\hat{a}^\dagger(-t) + \beta\hat{b}^\dagger(-t) - \alpha^*\hat{a}(-t) - \beta^*\hat{b}(-t)\}, \quad (4.44)$$

$$\hat{a}(-t) \equiv \hat{U}(t)\hat{a}\hat{U}^{-1}(t), \quad \hat{b}(-t) \equiv \hat{U}(t)\hat{b}\hat{U}^{-1}(t). \quad (4.45)$$

Обозначения, введенные в (4.44), подчеркивают связь с эволюцией операторов в картине Гейзенберга (в нашем случае эволюция унитарна, $\hat{U}^{-1}(t) = \hat{U}^\dagger(t)$, и гамильтониан не зависит явно от времени так, что $\hat{U}^{-1}(t) = \hat{U}(-t)$). Операторы (4.45) можно либо получить прямым вычислением, используя выражение для оператора эволюции (4.21), либо решая уравнения движения:

$$\partial_t \hat{a}(-t) = -i[\hat{h}, \hat{a}(-t)], \quad \partial_t \hat{b}(-t) = -i[\hat{h}, \hat{b}(-t)]. \quad (4.46)$$

В результате получаем решение в виде:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}(-t) \\ \hat{b}(-t) \end{pmatrix} = \mathbf{G}(-t) \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(t) = \exp(-i\mathbf{h}t), \quad (4.47)$$

$$\hat{U}(t)|\alpha, \beta\rangle = |\alpha(t), \beta(t)\rangle, \quad \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \mathbf{G}(t) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

$$\mathbf{G}(t) \equiv \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{pmatrix} = e^{-i\Omega t} \{ \cos(\Omega_R t) \hat{I} - i \sin(\Omega_R t) (\cos \alpha_m \hat{\sigma}_3 + \sin \alpha_m \hat{\sigma}_1) \}. \quad (4.49)$$

Отметим также, что вакуумное состояние (4.43) можно определить как решение уравнений:

$$\hat{a}(-t)|vac\rangle_t = \hat{b}(-t)|vac\rangle_t = 0. \quad (4.50)$$

Согласно (4.47), в нашем случае операторы (4.45) являются линейными комбинациями операторов уничтожения, и уравнения (4.50) равносильны обычным уравнениям для основного состояния, т.е. оператор эволюции не меняет вакуумное состояние. Как видно из (4.48), когерентные состояния остаются таковыми в процессе эволюции и при этом $|\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 = |\alpha(0)|^2 + |\beta(0)|^2$ (сохранение нормы).

Редуцированная матрица плотности

В настоящей лекции мы рассматриваем системы, состоящие из двух и более подсистем. В связи с этим мы уже коротко обсудили понятие запутанного состояния. Здесь мы прокомментируем смысл процедуры, известной под названием *редукции матрицы плотности*, и приведем примеры соответствующих вычислений для рассматриваемой модели взаимодействующих осцилляторов.

Рассмотрим две взаимодействующие подсистемы (a) и (b), которые являются составляющими частями объединенной системы (a) + (b). Далее предположим, что измерения проводятся лишь над одной из подсистем, например, (a). Результаты таких измерений характеризуются средними значениями динамических переменных, которым соответствуют операторы вида $\hat{A}^{(a)} \otimes \hat{I}$, т.е. операторы, которые не меняют вектора состояний подсистемы (b). Для незапутанного состояния получаем

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^{(a)} \otimes \hat{\rho}^{(b)} \implies \langle \hat{A}^{(a)} \rangle \equiv \text{Tr}[\hat{A}^{(a)} \rho] = \text{Tr}_a[\hat{A}^{(a)} \rho^{(a)}] \cdot \text{Tr}_b[\hat{\rho}^{(b)}] = \text{Tr}_a[\hat{A}^{(a)} \rho^{(a)}], \quad (4.51)$$

где символ

$$\mathrm{Tr}_{a,b}[\hat{A}] = \sum_i \langle \phi_i^{(a,b)} | \hat{A} | \phi_i^{(a,b)} \rangle$$

означает вычисление следа по состояниям соответствующей подсистемы, (a) или (b) .

Формула (4.51) показывает, что для описания результатов измерений достаточно знать редуцированную матрицу плотности $\hat{\rho}^{(a)}$:

Определение 4.1.1 (редуцированная матрица плотности)

$$\hat{\rho}^{(a)} = \mathrm{Tr}_b[\hat{\rho}] \equiv \sum_i \langle \phi_i^{(b)} | \hat{\rho} | \phi_i^{(b)} \rangle. \quad (4.52)$$

Определение (4.52) относится и к случаю запутанных состояний и показывает, что матрица плотности подсистемы (a) получается после усреднения матрицы плотности полной системы по состояниям подсистемы (b) .

Важным обстоятельством является то, что статистическая смесь может быть получена в результате редукции матрицы плотности чистого состояния. При этом лишь запутанные состояния способны генерировать смешанные.

Упражнение 4.1.1

Докажите, что запутанность является необходимым условием возможности получить смешанное состояние после редукции чистого состояния.

Пример 4.1.1 (редукция стационарных состояний (4.27))

Проиллюстрируем последнее утверждение на примере стационарных состояний взаимодействующих осцилляторов. Для этого перепишем (4.27) в виде

$$|n_A, n_B\rangle = \hat{T}_1(\alpha_m/2) \frac{(\hat{a}^\dagger)^{n_A} (\hat{b}^\dagger)^{n_B}}{\sqrt{n_A! n_B!}} |0, 0\rangle = \hat{T}_1(\alpha_m/2) |j, m\rangle. \quad (4.53)$$

где мы использовали обозначения (4.34) с $2j = n = n_A + n_B$ и $2m = n_A - n_B$. Исходное состояние системы описывается матрицей плотности

$$\hat{\rho} = |n_A, n_B\rangle \langle n_A, n_B|. \quad (4.54)$$

Нам нужно вычислить усреднить (4.54) по состояниям b -осцилляторов:

$$\hat{\rho}^{(a)} = \sum_{n_b=0}^{\infty} \langle n_b | \hat{\rho} | n_b \rangle. \quad (4.55)$$

Для этого заметим, что

$$\mathrm{Tr}_b\{|n_a, n_b\rangle \langle m_a, m_b|\} = \delta_{n_b, m_b} |n_a\rangle \langle m_a| \quad (4.56)$$

и воспользуемся соотношением (4.39). В результате получим

$$\hat{\rho}^{(a)} = \sum_{k=0}^n |d_{k-j, m}^j(\alpha_m)|^2 |k\rangle\langle k|, \quad (4.57)$$

что соответствует смешанному состоянию с диагональной матрицей плотности. При этом заселенности нижних $n + 1$ уровней равны квадратам d -функций угла смешивания.

Упражнение 4.1.2

Получите формулу (4.57). Покажите, что условие нормировки выполняется как следствие соотношений (4.41)-(4.42).

Таким образом, мы продемонстрировали, как редукция генерирует смешанные состояния. Естественно, что усреднение по степеням свободы одной из подсистем приводит к потере информации о системе и вносит статистическую неопределенность, характерную для смешанных состояний.

Эволюция редуцированной матрицы плотности

По определению, редуцированная матрица плотности зависит лишь от переменных одной из подсистем, и, как следствие, ее нельзя использовать для описания взаимных корреляций, возникающих вследствие взаимодействия между подсистемами. С другой стороны, эволюция матрицы плотности полной системы определяется взаимодействием, которое, таким образом, влияет на временную зависимость редуцированной матрицы плотности.

Рассмотрим в качестве примера следующую ситуацию. Пусть в начальный момент времени матрица плотности взаимодействующих осцилляторов факторизована и имеет вид:

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}^{(a)}(0) \otimes \hat{\rho}^{(b)}(0), \quad \hat{\rho}^{(b)}(0) = |\beta\rangle\langle\beta|, \quad (4.58)$$

$$\hat{\rho}^{(a)}(0) = \int P_{th}(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha| d\mu(\alpha), \quad P_{th}(\alpha) = n_{th}^{-1} \exp(-|\alpha|^2/n_{th}). \quad (4.59)$$

Уравнение (4.58) означает, что системы приготовлены как статистически независимые и b -мода находится в когерентном состоянии. Мы будем предполагать, что эта мода описывает внешнее квантованное поле. Согласно (4.59), “материальный” a -осциллятор находится в состоянии термодинамического равновесия, которое мы записали через P -символ распределения Гиббса (см. формулу (3.130) на стр. 51).

Задачу об эволюции к.с. мы уже изучали, и результат описывается соотношениями (4.48) и (4.49). Применение этих соотношений непосредственно дает

временную зависимость матрицы плотности:

$$\hat{\rho}(t) = \int P_{th}(\alpha) |\alpha(t), \beta(t)\rangle \langle \alpha(t), \beta(t)| d\mu(\alpha), \quad (4.60)$$

где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ определены в (4.48). Для редуцированной матрицы плотности a -мода получаем:

$$\hat{\rho}^{(a)}(t) = \int P_{th}(\alpha) |g_{11}(t)\alpha + g_{12}(t)\beta\rangle \langle g_{11}(t)\alpha + g_{12}(t)\beta| d\mu(\alpha). \quad (4.61)$$

Замена переменной $\alpha \rightarrow \gamma = g_{11}(t)\alpha + g_{12}(t)\beta$ дает окончательный результат:

$$\hat{\rho}^{(a)}(t) = \int P(\gamma - \bar{\gamma}(t)) |\gamma\rangle \langle \gamma| d\mu(\gamma), \quad P(\gamma) = \bar{n}(t)^{-1} \exp(-|\gamma|^2/\bar{n}(t)), \quad (4.62)$$

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle - |\bar{\gamma}(t)|^2 = \bar{n}(t) = n_{th} |g_{11}(t)|^2 = n_{th} (\Delta^2 + 4\lambda^2 \cos^2(\Omega_R t)) / (\Delta^2 + 4\lambda^2), \quad (4.63)$$

$$\langle \hat{a} \rangle = \bar{\gamma}(t) = g_{12}(t)\beta = \frac{\lambda\beta}{\sqrt{\Delta^2 + 4\lambda^2}} [e^{-i\Omega_+ t} - e^{-i\Omega_- t}], \quad \Omega_\pm = \Omega \pm \Omega_R, \quad (4.64)$$

где мы использовали выражения для матричных элементов (4.49).

Выражение (4.62) показывает, что распределение Глаубера остается гауссовым. При этом как центр, так и ширина распределения зависят от времени.

Движение центра на комплексной плоскости описывается формулой (4.64) и представляет собой движение по окружности с частотой Ω , радиус которой пропорционален $|\sin \Omega_R t|$. При $\Omega \gg \Omega_R$ такая траектория на комплексной плоскости соответствует биениям амплитуды в вещественном случае.

Из (4.63) видно, что дисперсия (ширина) распределения осциллирует с частотой $2\Omega_R$ между минимальным $n_{min} = n_{th} [\Delta / (2\Omega_R)]^2$ и максимальным $n_{max} = n_{th}$ значениям среднего числа заполнения. При этом дисперсия максимальна в моменты времени, когда смещение центра отсутствует $\bar{\gamma}(t) = 0$:

$$P(\gamma - \bar{\gamma}(t_n)) = P_{th}(\gamma), \quad t_n = \pi n / \Omega_R. \quad (4.65)$$

Наоборот, моменты времени, когда дисперсия минимальна, соответствуют максимальным значениям длины смещения $|\bar{\gamma}(t)|$.

Замечание 4.1.2

Указанные осцилляции аналогичны осцилляциям Раби в двухуровневой модели, рассмотренным в конце раздела 2.4. Аналогия станет прозрачной, если вспомнить, что гамильтониан невзаимодействующей двухуровневой системы пропорционален оператору $\hat{\sigma}_3$, тогда как для a -осциллятора такой гамильтониан пропорционален оператору числа заполнения $\hat{a}^\dagger \hat{a}$.

Интересно, что в случае точного резонанса, когда $\Delta = 0$, дисперсия обращается в ноль при $\cos \Omega_R t = 0$. Более точно, учитывая, что

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+0} [\pi\epsilon]^{-1/2} \exp(-x^2/\epsilon) = \delta(x),$$

имеем

$$P(\gamma - \bar{\gamma}(t_n)) = \pi \delta^2(\gamma - \bar{\gamma}(t_n)), \quad (4.66)$$

$$t_n = \pi(n + 1/2)/\Omega_R, \quad \bar{\gamma}(t_n) = -i(-1)^n \beta e^{-i\Omega t_n}. \quad (4.67)$$

Таким образом, в резонансном случае при $\omega_a = \omega_b$, наблюдаются осцилляции между тепловым распределением (4.65) и когерентными состояниями (4.66). Частота осцилляций равна $2\Omega_R = \sqrt{\Delta^2 + 4\lambda^2}$ (ср. с частотой Раби двухуровневой модели в (2.79)-(2.80)).

Отметим также, что при $\Delta = 0$ энергетические уровни $|n_a, n_b\rangle$ невзаимодействующих осцилляторов $(n + 1)$ -кратно вырождены. Согласно (4.26), взаимодействие снимает это вырождение и приводит к образованию мультиплетной структуры в энергетическом спектре: $E_{jm} \propto 2(j\Omega + m\Omega_R)$, $j = 0, 1/2, \dots$ и $m = -j, \dots, j$.

Задача 4.1.1

Используя результаты раздела 3.4 с $F(t) = -\lambda\beta \exp(-i\omega_b t)$, рассмотрите эволюцию распределения Гиббса для осциллятора во внешнем поле. Сравните результаты для квантованного и классического поля.

Нерезонансные слагаемые

Учтем нерезонансные слагаемые, пропущенные в гамильтониане (4.10):

$$\hbar^{-1} \hat{H} \equiv \hat{h} = \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \lambda [\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}] + g [\hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger + \hat{b} \hat{a}]. \quad (4.68)$$

В этом случае мы по-прежнему можем эксплуатировать метод, основанный на использовании линейных канонических преобразований для диагонализации квадратичной формы. Такие преобразования можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = \mathbf{P} \cdot \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} + \mathbf{Q} \cdot \begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger \\ \hat{b}^\dagger \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{A}^\dagger \\ \hat{B}^\dagger \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^* \cdot \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} + \mathbf{P}^* \cdot \begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger \\ \hat{b}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

Для того, чтобы преобразования (4.69) были каноническими (сохраняли коммутационные соотношения), матрицы \mathbf{P} и \mathbf{Q} должны удовлетворять условиям

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\dagger - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^\dagger = \mathbf{I} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}^\top. \quad (4.70)$$

Перепишем соотношения (4.69) в несколько другой форме:

$$\hat{\mathbf{A}} \equiv \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \\ \hat{A}^\dagger \\ \hat{B}^\dagger \end{pmatrix} = \mathbf{\Lambda} \cdot \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{a}^\dagger \\ \hat{b}^\dagger \end{pmatrix} \equiv \mathbf{\Lambda} \cdot \hat{\mathbf{a}}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^* & \mathbf{P}^* \end{pmatrix}. \quad (4.71)$$

Тогда условия каноничности для матрицы $\mathbf{\Lambda}$ имеет вид:

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^\dagger & -\mathbf{Q}^\mathbf{T} \\ -\mathbf{Q}^\dagger & \mathbf{P}^\mathbf{T} \end{pmatrix} = -\mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{\Lambda}^\mathbf{T} \cdot \mathbf{\Sigma}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (4.72)$$

Чтобы определить каноническое преобразование, рассмотрим эволюцию операторов (4.45):

$$\partial_t \hat{\mathbf{a}}(-t) = -i[\hat{h}, \hat{\mathbf{a}}(-t)] = i\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{a}}(-t), \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h} & \mathbf{g} \\ -\mathbf{g} & -\mathbf{h} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 & g \\ g & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.73)$$

$$\hat{\mathbf{a}}(-t) = \mathbf{G}(-t) \cdot \hat{\mathbf{a}}, \quad \mathbf{G}(t) = \exp(-i\mathbf{H}t). \quad (4.74)$$

Упражнение 4.1.3

Покажите, что преобразование $\mathbf{G}(t)$ является каноническим.

h. Воспользуйтесь тем, что

$$\mathbf{H}^\mathbf{T} = \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{\Sigma}. \quad (4.75)$$

Предположим теперь, что матрицу \mathbf{H} можно привести к диагональному виду каноническим преобразованием:

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\Omega_d \end{pmatrix}. \quad (4.76)$$

Задача 4.1.2

Докажите представление (4.76).

Таким образом, мы теперь можем вычислить как новые частоты, определяющие энергетический спектр, так и матрицу $\mathbf{\Lambda}$, через которую определяются новые операторы рождения-уничтожения. Отметим, что, в отличие от (4.43), теперь под действием оператора эволюции вакуумное состояние меняется. Новое основное состояние является сжатым вакуумом и определяется как состояние, обнуляемое новыми операторами уничтожения:

$$\hat{A}|\text{vac}\rangle = \hat{B}|\text{vac}\rangle = 0. \quad (4.77)$$

Оставляя в стороне подробные вычисления, приведем здесь результат для частот, которые определяются как решения характеристического уравнения:

$$x^4 - ax^2 + b^2 = 0 \quad (4.78a)$$

$$a = \omega_a^2 + \omega_b^2 + 2(\lambda^2 - g^2), \quad (4.78b)$$

$$b^2 = (\omega_a\omega_b - (\lambda + g)^2)(\omega_a\omega_b - (\lambda - g)^2), \quad (4.78c)$$

$$2\Omega = \sqrt{a + 2b}, \quad 2\Omega_R = \sqrt{a - 2b}. \quad (4.78d)$$

Задача 4.1.3 (!!)

Исследуйте влияние нерезонансных слагаемых на эволюцию редуцированной матрицы плотности, рассмотренную в предыдущем подразделе.

4.2. Модель Джейнса–Каммингса и ее обобщения

Задача, рассмотренная в предыдущем разделе, представляет собой квантовую версию задачи об осцилляторе во внешнем поле. Более точно, в этом случае внешнее поле трактуется как квантовый осциллятор, который соответствует квантовому описанию Фурье гармоник внешнего поля. Формально, такое описание получается заменой комплексных амплитуд Фурье на операторы рождения-уничтожения полевых осцилляторов с частотами равными соответствующим частотам Фурье гармоник. В нашем случае мы предполагаем, что поле является монохроматическим и, как следствие, в разложении Фурье присутствует только одна гармоника (мода). Далее в этом разделе мы по-прежнему будем рассматривать одномодовые поля, пренебрегая эффектами немонахроматичности.

В этом разделе мы разберем задачу о взаимодействии двухуровневой системы (см. Рис. 2.1) с квантованным полем. Мы по-прежнему полагаем, что (b)-осциллятор описывает полевую моду, в то время как для описания степеней свободы двухуровневой системы будем использовать представление матриц Паули (см. раздел 2.4). Тогда выражение для гамильтониана в приближении вращающейся волны имеет следующий вид:

$$\hbar^{-1} \hat{H} \equiv \hat{h} = \omega \hat{\sigma}_z/2 + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \lambda [\hat{b} \hat{\sigma}_+ + \hat{b}^\dagger \hat{\sigma}_-], \quad (4.79)$$

где частота перехода обозначена как ω и слагаемое, пропорциональное \hat{I} , опущено как несущественная аддитивная постоянная. Гамильтониан (4.79) описывает систему, известную как *модель Джейнса-Каммингса* [Jaynes-Cummings] [15].

Базис в пространстве состояний системы состоит из произведений волновых

функций

$$|n, \pm 1\rangle = |n\rangle \otimes |\pm 1\rangle, \quad | +1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad | -1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.80)$$

$$\hat{\sigma}_3 |\pm 1\rangle = \pm |\pm 1\rangle, \quad \hat{b}^\dagger \hat{b} |n\rangle \equiv \hat{N}_b |n\rangle = n |n\rangle, \quad (4.81)$$

где в псевдоспиновом представлении кет-вектор $| -1\rangle$ соответствует основному состоянию двухуровневой системы, тогда как $| +1\rangle$ представляет возбужденное состояние. Отметим также, что базисные функции (4.80) являются собственными функциями невозмущенного гамильтониана с $\lambda = 0$ (нет взаимодействия с полем).

Упражнение 4.2.1

Выпишите собственные функции и собственные значения (энергетический спектр) гамильтониана (4.79) при $\lambda = 0$.

Симметрия и интегралы движения

Ниже мы увидим, что модель Джайнса-Каммингса (ЖС-модель) относится к классу точно решаемых моделей. Иными словами, мы сможем аналитически описать спектр и стационарные состояния (а, как следствие, и эволюцию) нашей системы. Основным обстоятельством, которое позволит нам найти точное решение спектральной задачи, является наличие довольно простой симметрии у гамильтониана (4.79).

Наиболее простым и непосредственным проявлением симметрии является наличие *интегралов движения*.

Определение 4.2.1 (интеграл движения) Наблюдаемая \hat{A} называется *интегралом движения*, если

$$[\hat{H}, \hat{A}] = 0. \quad (4.82)$$

Уравнение (4.82) означает, что оператор, представляющий интеграл движения, коммутирует с гамильтонианом и, как следствие, не зависит от времени в картине Гейзенберга (см. уравнение (2.13)). Для нас важны следующие обстоятельства, непосредственно вытекающие из определения:

- \hat{A} переводит стационарные состояния гамильтониана \hat{H} в стационарные состояния с той же энергией (т.е. если $|\psi\rangle$ – решение стационарного уравнения Шредингера, то $\hat{A}|\psi\rangle$ – тоже решение того же уравнения);

- \hat{H} переводит множество собственных кет-векторов оператора \hat{A} с данным собственным значением в себя.

Упражнение 4.2.2

Докажите сформулированные утверждения.

Как можно убедиться непосредственно, в JC-модели имеется простой интеграл движения:

$$\hat{M} = \hat{\sigma}_3/2 + \hat{b}^\dagger \hat{b} \equiv \hat{\sigma}_3/2 + \hat{N}_b. \quad (4.83)$$

Собственные вектора и собственные значения оператора \hat{M} нетрудно найти:

$$\hat{M}|n, -1\rangle = m|n, -1\rangle, \quad \hat{M}|n-1, +1\rangle = m|n-1, +1\rangle, \quad m = n - 1/2. \quad (4.84)$$

Очевидно, все собственные значения, за исключением наименьшего простого значения с $m = -1/2$, двукратно вырождены.

Таким образом, пространство состояний нашей системы можно представить как объединение непересекающихся конечномерных (в нашем случае максимум двумерных) подпространств \mathcal{M}_m , в каждом из которых собственные вектора (4.84) для данного значения m образуют базисом. Так как гамильтониан оставляет подпространства \mathcal{M}_m инвариантными, $\hat{H} \mathcal{M}_m \subseteq \mathcal{M}_m$, решение спектральной задачи сводится к диагонализации матриц 2×2 , представляющих сужения \hat{H} на подпространства \mathcal{M}_m .

Одетые состояния

Заметим сначала, что вакуумным состоянием нашей системы является единственный невырожденный собственный кет-вектор оператора \hat{M} с наименьшим значением m , $m = -1/2$:

$$|vac\rangle = |0, -1\rangle, \quad \hat{H}|vac\rangle = E_0|vac\rangle, \quad E_0 = -\hbar\omega/2. \quad (4.85)$$

В этом состоянии двухуровневая система находится в основном состоянии, и число заполнения, описывающее число квантов элементарных возбуждений поля (фотонов) равно нулю.

Действие оператора \hat{h} на инвариантном подпространстве \mathcal{M}_m в базисе (4.84) описывается матрицей:

$$\mathbf{h}_m = m\omega_b \hat{I} - \Delta \hat{\sigma}_3/2 + \lambda\sqrt{n} \hat{\sigma}_1, \quad \Delta \equiv \omega - \omega_b, \quad m = n - 1/2. \quad (4.86)$$

Диагонализация матриц (4.86) дает решение спектральной задачи:

$$\hat{h} |m, \pm\rangle = \Omega_m^{(\pm)} |m, \pm\rangle, \quad \Omega_m^{(\pm)} = m\omega_b \pm \Omega_m, \quad (4.87)$$

$$\Omega_m = \sqrt{\Delta^2/4 + \lambda^2 n}, \quad m = n - 1/2, \quad n \in \mathbb{N}_+, \quad (4.88)$$

$$|m, -\rangle = \cos(\theta_m/2) |n, -1\rangle - \sin(\theta_m/2) |n - 1, +1\rangle, \quad (4.89)$$

$$|m, +\rangle = \sin(\theta_m/2) |n, -1\rangle + \cos(\theta_m/2) |n - 1, +1\rangle, \quad (4.90)$$

$$\theta_m = \arg(\Delta + 2i\lambda\sqrt{n}). \quad (4.91)$$

Из формул (4.87)-(4.88) видно, что энергетический спектр классифицируется при помощи собственных значений (квантовых чисел) m сохраняющейся величины (интеграла движения) \hat{M} и состоит из дуплетов, центры которых расположены эквидистантно, а величина расщепления равна удвоенной частоте Раби Ω_m . В отличие от изученных ранее моделей, как частота Раби так и угол смешивания θ_m нелинейно зависят от квантового числа m .

Стационарные состояния (4.89) и (4.89) являются запутанными и представляют собой линейную комбинацию состояния $|n, -1\rangle$ — двухуровневая система находится в основном состоянии в присутствии n квантов поля — и состояния $|n - 1, +1\rangle$, которое получается из состояния $|n, -1\rangle$ уничтожением (поглощением) одного фотона и переходом двухуровневой системы в возбужденное состояние. Такие состояния называются одетыми [dressed states].

Коллапс и восстановления

Рассмотрим ситуацию, когда в начальный момент времени поле находится в когерентном состоянии, тогда как двухуровневая система приготовлена в возбужденном состоянии:

$$|\psi(t=0)\rangle = |\alpha\rangle \otimes |+\rangle \equiv |\alpha, +\rangle. \quad (4.92)$$

Нас будет интересовать зависимость от времени разности населенностей двухуровневой системы.

Прежде всего, отметим, что

$$\hat{U}(t) \begin{pmatrix} |n, -1\rangle \\ |n - 1, +1\rangle \end{pmatrix} = \exp(-i\mathbf{h}_m t) \begin{pmatrix} |n, -1\rangle \\ |n - 1, +1\rangle \end{pmatrix}, \quad (4.93)$$

$$\exp(-i\mathbf{h}_m t) = e^{-im\omega_b t} \begin{pmatrix} \cos \Omega_m t + i \cos \theta_m \sin \Omega_m t & -i \sin \theta_m \sin \Omega_m t \\ -i \sin \theta_m \sin \Omega_m t & \cos \Omega_m t - i \cos \theta_m \sin \Omega_m t \end{pmatrix}. \quad (4.94)$$

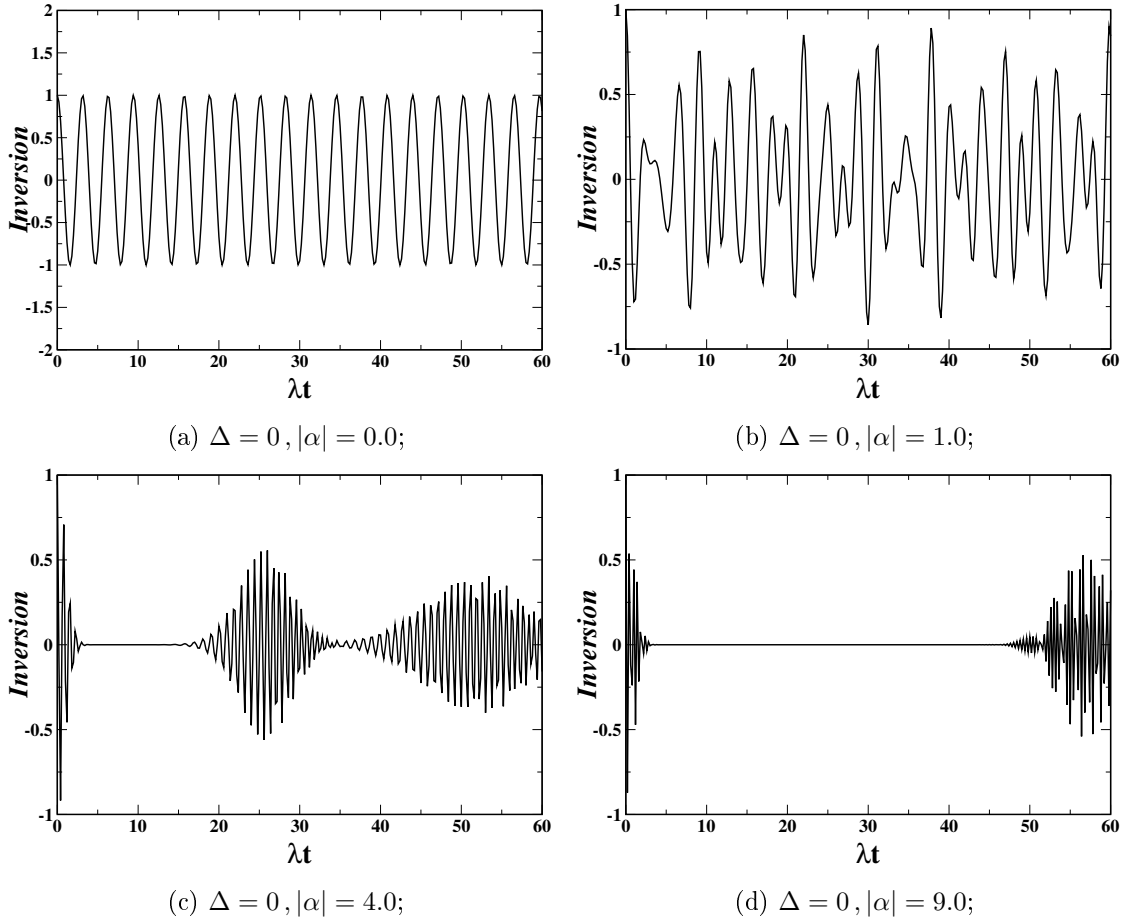


Рис. 4.1 Зависимость инверсии населенностей ($= P_+(t) - P_-(t)$) от времени в случае точного резонанса.

Таким образом, явные выражения, описывающие эволюцию базисных состояний (4.80), имеют вид:

$$\hat{U}(t) |n-1, +1\rangle = \exp(-im\omega_b t) [(\cos \Omega_m t - i \cos \theta_m \sin \Omega_m t) |n-1, +1\rangle - i \sin \theta_m \sin \Omega_m t |n, -1\rangle], \quad (4.95)$$

$$\hat{U}(t) |n, -1\rangle = \exp(-im\omega_b t) [(\cos \Omega_m t + i \cos \theta_m \sin \Omega_m t) |n, -1\rangle - i \sin \theta_m \sin \Omega_m t |n-1, +1\rangle]. \quad (4.96)$$

Вычислим теперь населенности возбужденного и основного состояния двух-

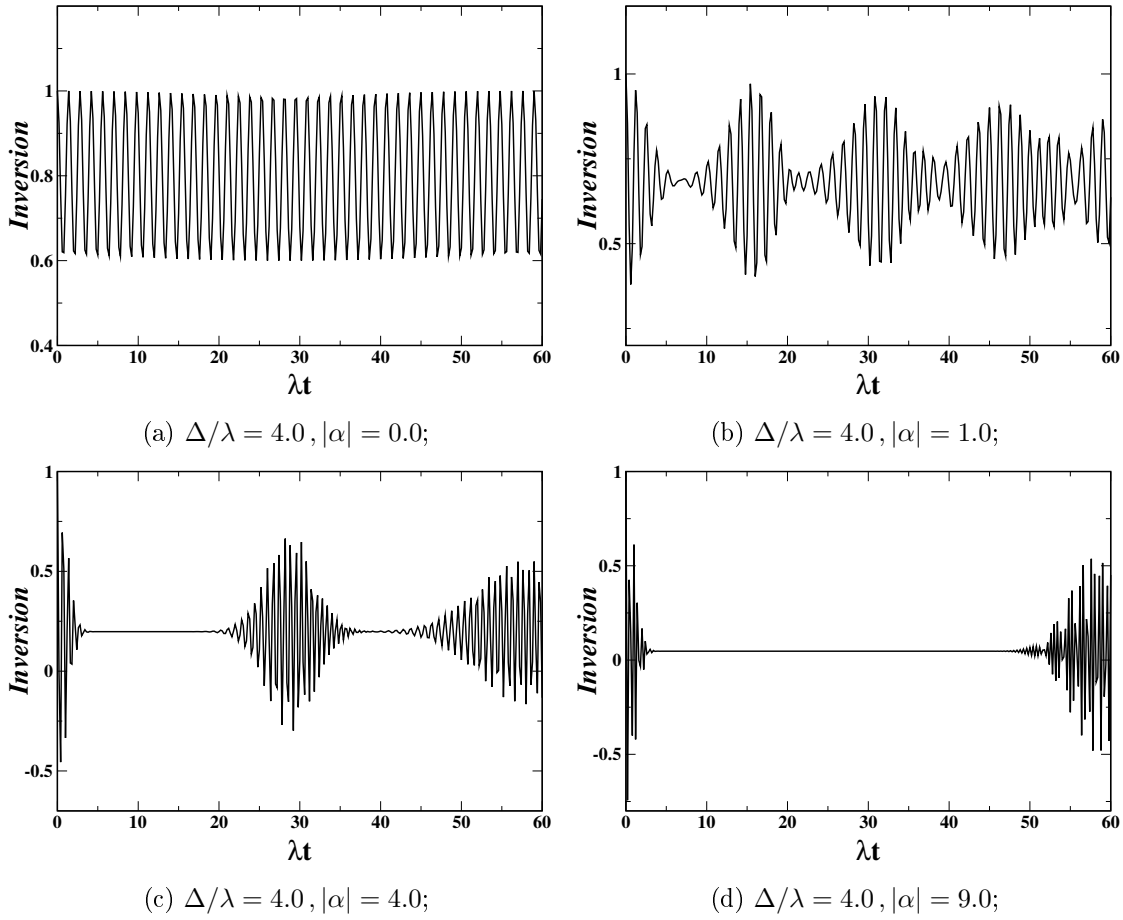


Рис. 4.2 Влияние расстройки от резонанса, Δ , на временную зависимость инверсии населенностей.

уровневой системы ($P_+(t)$ и $P_-(t)$, соответственно):

$$P_+(t) = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle n-1, +1 | \hat{U}(t) | \alpha, +1 \rangle|^2, \quad P_-(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle n, -1 | \hat{U}(t) | \alpha, +1 \rangle|^2, \quad (4.97)$$

$$P_-(t) = \exp(-|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|^{2n} \sin^2 \theta_{m+1} \sin^2 \Omega_{m+1} t)^n}{n!}, \quad P_+(t) = 1 - P_-(t), \quad (4.98)$$

$$\sin^2 \theta_{m+1} = \frac{4\lambda^2(n+1)}{\Delta^2 + 4\lambda^2(n+1)}, \quad \Omega_{m+1} = \sqrt{\Delta^2/4 + \lambda^2(n+1)}. \quad (4.99)$$

Разность населенностей как функция времени при различных значениях $|\alpha|$ показана на Рис. 4.1 (точный резонанс с $\Delta = 0$) и на Рис. 4.2 (ненулевая от-

стройка от резонанса). Видно, что при $|\alpha| \geq 4$ временная зависимость разности населенностей обнаруживает следующие характерные особенности:

- за времена $\approx 1/\lambda$ первоначальные осцилляции затухают – *коллапс* [collapse] – и устанавливается постоянное значение разности населенности (см. Рис. 4.1с–4.1d и Рис. 4.2с–4.2d);
- через некоторое время $\approx 2\pi|\alpha|/\lambda$ осцилляции возобновляются – *восстановление* [revival] – и вновь затухают (см. Рис. 4.1с–4.1d и Рис. 4.2с–4.2d).

Упражнение 4.2.3

Вычислите временную зависимость средних значений $\langle \hat{b}^\dagger \rangle$ и $\langle \hat{b} \rangle$.

Упражнение 4.2.4

Покажите, что временная зависимость среднего числа фотонов $\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle$ также обнаруживает коллапс и восстановления.

h. Воспользуйтесь тем, что оператор (4.83) является интегралом движения.

Задача 4.2.1 (статистика числа фотонов)

Вычислите вероятность того, что число заполнения равно n в состоянии $\hat{U}(t)|\alpha, +1\rangle$:

$$P_n(t) = \sum_{a=\pm 1} |\langle n, a | \hat{U}(t) | \alpha, +1 \rangle|^2. \quad (4.100)$$

Исследуйте, какой является статистика фотонов: субпуассоновской или суперпуассоновской? (см. раздел 3.3).

Задача 4.2.2 (корреляционная функция)

Вычислите *двухвременную корреляционную функцию* операторов $\hat{\sigma}_+$ и $\hat{\sigma}_-$ равную, по определению, $\langle \hat{\sigma}_+(t_1) \hat{\sigma}_-(t_2) \rangle$. Сравните результат с коррелятором для двухуровневой системы во внешнем поле (см. упражнение в конце раздела 2.4).

Задача 4.2.3

Исследуйте эволюцию инверсии населенностей атома в случае, когда поле и двухуровневая система в начальный момент времени статистически независимы и характеризуются гиббсовскими распределениями (с разной температурой).

JS–модель с произвольным спином

Обобщим JS–модель, заменив матрицы Паули в гамильтониане (4.79), которые описывают двухуровневый атом и представляют компоненты оператора углового момента с $j = 1/2$, на операторы, соответствующие произвольному квантовому

числу углового момента j , т.е. $\hat{\sigma}_i/2 \rightarrow \hat{S}_i$. В результате гамильтониан обобщенной таким образом модели Джейнса–Каммингса имеет следующий вид:

$$\boxed{\hbar^{-1} \hat{H} \equiv \hat{h} = \omega \hat{S}_z + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \lambda [\hat{b} \hat{S}_+ + \hat{b}^\dagger \hat{S}_-]}, \quad \hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i \hat{S}_y. \quad (4.101)$$

При этом компоненты оператора углового момента \hat{S}_i (далее будем для краткости называть их спиновыми операторами) удовлетворяют коммутационным соотношениям (4.30) и $2j + 1$ кет-векторов $|j, m\rangle$ с азимутальным квантовым числом $m = j, j - 1, \dots, -j + 1, -j$ образуют базис в пространстве состояний “спиновой” подсистемы. Согласно соотношениям (4.35)–(4.36) действие спиновых операторов на состояния $|j, m\rangle$ определено следующими формулами:

$$\boxed{\hat{S}_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle}, \quad (4.102)$$

$$\boxed{\hat{S}_+ |j, m\rangle = \sqrt{(j + m + 1)(j - m)} |j, m + 1\rangle}, \quad (4.103)$$

$$\boxed{\hat{S}_- |j, m\rangle = \sqrt{(j + m)(j - m + 1)} |j, m - 1\rangle}. \quad (4.104)$$

Несмотря на то, что рассматриваемая система физически выглядит несколько искусственно и, в основном, представляет интерес как непосредственное обобщение JC-модели на спины высших порядков (т.е. с $j > 1/2$), модельный гамильтониан (4.101) допускает вполне содержательную физическую интерпретацию. При этом бозонные операторы $\{\hat{b}^\dagger, \hat{b}\}$ по-прежнему описывают электромагнитное поле, которое взаимодействует с атомной (или молекулярной) системой, тогда как усложнение пространства состояний последней связано либо с тем, что мы рассматриваем вращательные подуровни молекулы, либо атомная подсистема состоит из нескольких двухуровневых атомов.

Перейдем теперь к вычислению спектра энергий и собственных функций гамильтониана (4.101). Алгебраически обобщенная JC-модель устроена так же как и исходная система (4.79). Поэтому все результаты алгебраического характера (т.е. зависящие только от коммутационных соотношений) остаются в силе. Так, делая подстановку $\hat{\sigma}_z/2 \rightarrow \hat{S}_z$ в соотношении (4.83), приходим к выводу, что оператор

$$\boxed{\hat{M} = \hat{S}_z + \hat{b}^\dagger \hat{b} \equiv \hat{S}_z + \hat{N}_b} \quad (4.105)$$

является интегралом движения (в том, что он коммутирует с гамильтонианом нетрудно убедиться и непосредственным вычислением).

Базисные кет-вектора пространства состояний системы, как обычно, представляют собой тензорные произведения вида

$$|m, n\rangle \equiv |j, m\rangle \otimes |n\rangle, \quad m = j, \dots, -j, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.106)$$

Отметим, что вектора (4.106) являются собственными для оператора (4.105):

$$\boxed{\hat{M}|m, n\rangle = M|m, n\rangle, \quad M = m + n} \quad (4.107)$$

и пространство состояний системы \mathcal{H} можно представить как прямую сумму конечномерных инвариантных подпространств, состоящих из собственных векторов \hat{M} :

$$\mathcal{H} = \bigoplus_M \mathcal{M}_M, \quad M = -j, -j + 1, \dots \quad (4.108)$$

Таким образом, мы снова сводим спектральную задачу к диагонализации матриц, представляющих гамильтониан в подпространствах \mathcal{M}_M . Опишем базис в этих подпространствах и выпишем ненулевые матричные элементы гамильтониана:

$M \geq j$:

$$\dim \mathcal{M}_M = 2j + 1, \quad |j - k, M - j + k\rangle \equiv |k\rangle, \quad k = 0, 1, \dots, 2j. \quad (4.109)$$

$$\langle k|\hat{h}|k\rangle = M\omega_b + (j - k)\Delta \equiv E_k^{(0)}, \quad (4.110)$$

$$\langle k + 1|\hat{h}|k\rangle = \langle k|\hat{h}|k + 1\rangle = \lambda \sqrt{(2j - k)(k + 1)(M - j + k + 1)} \equiv V_{k+1}. \quad (4.111)$$

$M < j$:

$$\dim \mathcal{M}_M = j + M + 1, \quad |M - k, k\rangle \equiv |k\rangle, \quad k = 0, 1, \dots, j + M. \quad (4.112)$$

$$\langle k|\hat{h}|k\rangle = M\omega - k\Delta \equiv E_k^{(0)}, \quad (4.113)$$

$$\langle k + 1|\hat{h}|k\rangle = \langle k|\hat{h}|k + 1\rangle = \lambda \sqrt{(j + M - k)(k + 1)(j - M + k + 1)} \equiv V_{k+1}. \quad (4.114)$$

Видно, что матрица гамильтониана на \mathcal{M}_M является трехдиагональной:

$$\mathbf{h}_M = \begin{pmatrix} E_0^{(0)} & V_1 & 0 & \dots & 0 \\ V_1 & E_1^{(0)} & V_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_2 & E_2^{(0)} & V_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & V_{q-1} & E_{q-1}^{(0)} & V_q \\ 0 & \dots & 0 & V_q & E_q^{(0)} \end{pmatrix}, \quad q = \dim \mathcal{M}_M - 1. \quad (4.115)$$

Отметим, что главные миноры матрицы (4.115) связаны рекуррентными соотношениями:

$$\det \mathbf{h}_M = D_q = E_0^{(0)} D_{q-1} - V_1^2 D_{q-2}, \dots, D_2 = E_q^{(0)} E_{q-1}^{(0)} - V_q^2, D_1 = E_q^{(0)}. \quad (4.116)$$

С тем, чтобы уяснить основные качественные особенности, возникающие в нашей обобщенной модели, мы продемонстрируем вычисления на примере спина с $j = 1$.

Начнем с того, что покажем, как эта модель получается при описании двух одинаковых двухуровневых атомов, взаимодействующих с одномодовым фотонным полем. Пусть в представлении энергетического спина кет-вектора $|\pm 1/2\rangle^{(1)}$ и $|\pm 1/2\rangle^{(2)}$ представляют возбужденное (знак “+”) и основное (знак “−”) состояния атомов, различаемых в обозначениях индексами (1) и (2). Тензорные произведения

$$|m_1\rangle^{(1)} \otimes |m_2\rangle^{(2)} \equiv |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle, \quad m_1, m_2 = \pm 1/2, \quad (4.117)$$

образуют базис в пространстве состояний атомной подсистемы. Гамильтониан нашей системы имеет вид (4.101), где спиновые операторы для двухатомной системы определены как суммы псевдоспинов атомов:

$$\hat{S}_z = (\hat{\sigma}_3^{(1)} + \hat{\sigma}_3^{(2)})/2, \quad \hat{S}_\pm = \hat{\sigma}_\pm^{(1)} + \hat{\sigma}_\pm^{(2)}, \quad \hat{\sigma}_i^{(1)} \equiv \hat{\sigma}_i \otimes \hat{I}, \quad \hat{\sigma}_i^{(2)} \equiv \hat{I} \otimes \hat{\sigma}_i. \quad (4.118)$$

Нетрудно проверить, что эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры углового момента (4.30). При этом состояния (4.117) являются собственными для оператора \hat{S}_z :

$$\hat{S}_z |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle = (m_1 + m_2) |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle. \quad (4.119)$$

Отсюда следует, что азимутальное квантовое число m принимает три возможных значения: $+1$, 0 и -1 . Таким образом, квантовое число j может равняться либо нулю ($j = 0$), либо единице ($j = 1$). Осталось выяснить как $|j, m\rangle$ выражаются через $|m_1\rangle \otimes |m_2\rangle$.

Вектора с $j = 1$ нетрудно построить, действуя оператором \hat{S}_- на $|1/2\rangle \otimes |1/2\rangle$. В результате получаем

$$|1, \pm 1\rangle \equiv |\pm 1\rangle = |\pm 1/2\rangle \otimes |\pm 1/2\rangle, \quad (4.120)$$

$$|1, 0\rangle \equiv |0\rangle = \{ |1/2\rangle \otimes |-1/2\rangle + |-1/2\rangle \otimes |1/2\rangle \} / \sqrt{2}. \quad (4.121)$$

Вектор, соответствующий нулевому значению j , строим как линейную комбинацию $|1/2\rangle \otimes |-1/2\rangle$ и $|-1/2\rangle \otimes |1/2\rangle$, ортогональную к $|1, 0\rangle$:

$$|0, 0\rangle = \{ |1/2\rangle \otimes |-1/2\rangle - |-1/2\rangle \otimes |1/2\rangle \} / \sqrt{2}. \quad (4.122)$$

Отметим, что вектора с $j = 1$ симметричны относительно перестановки атомов, тогда как вектор с $j = 0$ является антисимметричным.

В результате мы получили разложение пространства состояний атомной подсистемы $\mathcal{H}^{(a)}$ на прямую сумму двух подпространств $\mathcal{H}_j^{(a)}$ с $j = 0$ и $j = 1$:

$$\mathcal{H}^{(a)} = \mathcal{H}_0^{(a)} \oplus \mathcal{H}_1^{(a)}. \quad (4.123)$$

При этом из проведенного нами анализа ясно, что действие гамильтониана на $|j, m\rangle \otimes |n\rangle \in \mathcal{H}_j^{(a)} \otimes \mathcal{H}^{(b)}$ не меняет квантовое число j . В частности, для $j = 0$ имеем:

$$\hat{h} |0, 0\rangle \otimes |n\rangle = n\omega_b |0, 0\rangle \otimes |n\rangle. \quad (4.124)$$

Это означает, что атомная подсистема, будучи приготовленной в состоянии $|0, 0\rangle$, не взаимодействует с бозонным полем.

Таким образом, нетривиальная часть задачи о спектре двухатомной системы сводится к диагонализации гамильтониана (4.101) на подпространстве $\mathcal{H}_1^{(a)} \otimes \mathcal{H}^{(b)}$ и мы приходим к задаче со спином, равным единице.

При $j = 1$ вакуумное состояние соответствует $M = -1$:

$$|\text{vac}\rangle = |-1\rangle \otimes |0\rangle \equiv |-1, 0\rangle, \quad \hat{h} |-1, 0\rangle = -\omega |-1, 0\rangle. \quad (4.125)$$

Подпространство \mathcal{M}_M с $M = 0$ двумерное, и в базисе $\{|0, 0\rangle, |-1, 1\rangle\}$ гамильтониан представляется матрицей \mathbf{h}_0 :

$$\mathbf{h}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda\sqrt{2} \\ \lambda\sqrt{2} & -\Delta \end{pmatrix}. \quad (4.126)$$

При $M \geq 1$ матрица гамильтониана в базисе $\{|1, M-1\rangle, |0, M\rangle, |-1, M+1\rangle\}$ имеет вид:

$$\mathbf{h}_M = M\omega_b \hat{I} + \begin{pmatrix} \Delta & \lambda\sqrt{2M} & 0 \\ \lambda\sqrt{2M} & 0 & \lambda\sqrt{2M+2} \\ 0 & \lambda\sqrt{2M+2} & -\Delta \end{pmatrix}. \quad (4.127)$$

Энергетический спектр $E(M, \alpha)$ (α нумерует различные значения энергии при данном M) состоит из вакуумного состояния (4.125) с $E(-1, 0) = -\omega$, двух низколежащих уровней с $M = 0$:

$$E(0, \pm) = -\Delta/2 \pm \sqrt{\Delta^2/4 + 2\lambda^2}, \quad (4.128)$$

и триплетов $E(M, \alpha) = M\omega_b + q(M, \alpha)$. При этом расщепления $q(M, \alpha)$ определяются как решения характеристического уравнения:

$$x^3 - x(\Delta^2 + 2\lambda^2(2M+1)) + 2\lambda^2\Delta^2 = 0, \quad (4.129)$$

которое легко решается в случае точного резонанса ($\Delta = 0$). В этом случае мы получаем симметрично расщепленные триплеты: $q(M, \alpha) = \alpha\lambda\sqrt{4M+2}$, $\alpha = 0, \pm 1$.

Задача 4.2.4

Исследуйте зависимость от времени $\langle \hat{S}_z \rangle$ в двухцентровой модели в случае точного резонанса, полагая, что в начальный момент времени оба атома находятся в возбужденном состоянии, тогда как начальное состояние поля является когерентным. Наблюдаются ли в этом случае коллапс и восстановления?

Задача 4.2.5

В условиях предыдущей задачи исследуйте статистику фотонов в двухцентровой модели по аналогии с JC-моделью (см. уравнение (4.100)).

Замечание 4.2.1 (модель Тейвиса-Каммингса)

Мы показали, что пространство состояний двух двухуровневых систем (двухцентровая система) $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ можно разложить на прямую сумму двух подпространств. При этом базисные вектора этих подпространств построены таким образом, что операторы \hat{S}_i являются генераторами группы вращений \hat{J}_i с квантовыми числами углового момента $j = 0$ и $j = 1$. В результате двухцентровая JC-модель оказалась сведенной к двум обобщенным JC-моделям с двумя различными значениями спина.

Естественным обобщением двухцентровой системы является система, состоящая из произвольного числа двухуровневых атомов (N -центровая модель), взаимодействующих с одномодовым квантованным полем. При этом предполагается, что характерный размер атомной подсистемы по порядку величины меньше длины волны. В противном случае использовать дипольное приближение для описания взаимодействия между атомами и полем нельзя.

N -центровая модель известна также под названием *модели Тейвиса-Каммингса* [16] [Tavis, Cummings]. Это одна из фундаментальных систем, изучение которой тесно связано с исследованием эффектов коллективного поведения ансамбля квантовых систем при взаимодействии с электромагнитным полем. Аналитическая решаемость N -центровой модели основана на том, что пространство состояний атомной подсистемы по-прежнему разбивается на сумму инвариантных подпространств с различными значениями квантового числа j . В результате мы снова имеем дело с семейством обобщенных JC-моделей.

Три связанных осциллятора

В качестве другого примера, который сводится к обобщенной JC-модели, рассмотрим три осциллятора, взаимодействие между которыми описывается кубическим тринейным слагаемым:

$$\hbar^{-1} \hat{H} \equiv \hat{h} = \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \omega_c \hat{c}^\dagger \hat{c} + \lambda [\hat{a}^\dagger \hat{b} \hat{c} + \hat{a} \hat{b}^\dagger \hat{c}^\dagger]. \quad (4.130)$$

Воспользуемся двухбозонным представлением для генераторов группы вра-

щений (4.28)-(4.29) и перепишем гамильтониан (4.130) в следующем виде:

$$\hat{h} = \omega_+ \hat{N}/2 + \omega_- \hat{J}_z + \omega_c \hat{c}^\dagger \hat{c} + \lambda [\hat{c} \hat{J}_+ + \hat{c}^\dagger \hat{J}_-], \quad (4.131)$$

$$\hat{N} = \hat{N}_a + \hat{N}_b, \quad \omega_\pm = \omega_a \pm \omega_b. \quad (4.132)$$

Поскольку $[\hat{N}, \hat{J}_i] = 0$, мы имеем два интеграла движения:

$$\hat{N} : \hat{N}|j, m\rangle|n\rangle = 2j|j, m\rangle|n\rangle, \quad (4.133)$$

$$\hat{M} = \hat{J}_z + \hat{N}_c : \hat{M}|j, m\rangle|n\rangle = (m+n)|j, m\rangle|n\rangle. \quad (4.134)$$

Таким образом, пространство состояний разбивается на сумму инвариантных подпространств, классифицируемых при помощи квантовых чисел $j = 0, 1/2, 1, \dots$ и $M = m + n = -j, -j + 1, \dots : \mathcal{M}_{j, M}$:

$$\dim \mathcal{M}_{j, M} = j + j_m + 1, \quad |j, j_m - k, j_M - j + k\rangle \equiv |k; j, M\rangle, \quad (4.135)$$

$$j_m = \min\{j, M\}, \quad j_M = \max\{j, M\}, \quad k = 0, 1, \dots, j + j_m. \quad (4.136)$$

Упражнение 4.2.5

Покажите, что в качестве интегралов движения можно выбрать пару $\hat{N}_a + \hat{N}_b$ и $\hat{N}_a + \hat{N}_c$.

При фиксированном квантовом числе углового момента j получаем обобщенную JS-модель. Энергетический спектр $E(j, M, \alpha)$ и стационарные состояния $|\alpha; j, M\rangle$ теперь можно вычислить диагонализировав матрицу (4.115) с элементами:

$$E_k^{(0)} = j\omega_+ + M\omega_c + (j_m - k)\Delta, \quad \Delta \equiv \omega_- - \omega_c, \quad (4.137)$$

$$V_{k+1} = \lambda \sqrt{(j + j_m - k)(j_M - j + k + 1)(j - j_m + k + 1)}. \quad (4.138)$$

При этом вакуумное состояние для спина j $|0; j, -j\rangle$ соответствует состоянию с числами заполнения $n_a = n_c = 0$, $n_b = 2j$ и энергией $2j\omega_b$. Как следствие, эволюция состояний, в которых возбужден только осциллятор (b), является свободной. В этих состояниях система не “чувствует” взаимодействия, и обмен энергии между осцилляторами отсутствует.

В общем случае, состояние $|n_a, n_b, n_c\rangle$ принадлежит подпространству $\mathcal{M}_{j, M}$ с $j = (n_a + n_b)/2$ и $M = (n_a - n_b)/2 + n_c$. Можно ожидать, что степень сложности (запутанности, если хотите) квантовой динамики непосредственно зависит от размерности $\mathcal{M}_{j, M}$ (чем меньше, тем проще). При $M \geq j$ ($n_c \geq n_b$) размерность этого подпространства максимальна и равна $2j + 1 = n_a + n_b + 1$. В противном

случае, когда $M < j$ ($n_c < n_b$), состояние эволюционирует в пространстве размерности $j + M + 1 = n_a + n_c + 1$, которая может оказаться малой даже при больших значениях j .

Список литературы

- [1] Landau L. D., Lifshitz E. M. Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory. — 3rd edition. — NY, USA : Pergamon Press, 1991. — Vol. 3 of Course of Theoretical Physics. — P. 677.
- [2] Sakurai J. J. Modern Quantum Mechanics. — revised edition. — New York : Addison-Wesley Publishing Company, 1994. — P. 513. — ISBN: 0-201-53929-2.
- [3] Esposito G., Marmo G., Sudarshan G. From Classical to Quantum Mechanics. — Oxford : Oxford University Press, 2004. — P. 609. — ISBN: 978-0-511-18490-1.
- [4] Auletta G., Fortunato M., Parisi G. Quantum Mechanics. — Oxford : Oxford University Press, 2009. — P. 724. — ISBN: 978-0-521-86963-8.
- [5] Blum K. Density Matrix Theory and Applications. Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics. — 3rd edition. — Berlin, Heidelberg : Springer, 2012. — P. 438.
- [6] Carmichael H. An Open Systems Approach to Quantum Optics. — Berlin, Heidelberg : Springer, 1993. — P. 179.
- [7] Allen L., Eberly J. H. Optical Resonance and Two-Level Atoms. — NY : Dover, 1987. — P. 233.
- [8] Landau L. D., Lifshitz E. M. The Theory of Classical Fields. — New York : Pergamon, 1975.
- [9] Glauber R. J. Quantum Theory of Optical Coherence. Selected Papers and Lectures. — Berlin : Wiley-VCH, 2007. — P. 639.
- [10] Perelomov A. Generalized Coherent States and Their Applications. Texts and Monographs in Physics. — Berlin, Heidelberg : Springer, 1986. — P. 320.

- [11] Gazeau J.-P. Coherent States in Quantum Physics. — NY : Wiley, 2009. — P. 344.
- [12] Orszag M. Quantum Optics. — 2nd edition. — Berlin, Heidelberg : Springer, 2008. — P. 415.
- [13] Scully M. O., Zubairy M. S. Quantum Optics. — Cambridge : Cambridge University Press, 1997. — P. 630.
- [14] Mandel L., Wolf E. Optical Coherence and Quantum Optics. — Cambridge : Cambridge University Press, 1995. — P. 1194.
- [15] Jaynes E. T., Cummings F. W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser // Proceedings of the IEEE. — 1963. — Vol. 51, no. 1. — P. 89–109.
- [16] Tavis M., Cummings F. Exact solution for an N-molecule-radiation-field Hamiltonian // Phys. Rev. — 1968. — Vol. 170. — P. 375–384.

Киселев Алексей Дониславович
Мирошниченко Георгий Петрович

Элементы квантовой оптики

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверский пр., 49