

## 4. Элементы фурье-оптики ближнего поля

### 4.1. Метод разложения по плоским волнам

Согласно теореме Фурье периодическая функция  $f(x) = f(x+2\pi)$ , удовлетворяющая определенным условиям (которым соответствует практически любая функция, встречающаяся в физических исследованиях), может быть представлена тригонометрическим рядом

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (4.1)$$

с коэффициентами

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (4.2)$$

Обычно бывает удобнее заменить тригонометрический ряд эквивалентным комплексным рядом

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(inx), \quad (4.3)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \exp(-in\alpha) d\alpha. \quad (4.4)$$

При помощи замены переменных разложение Фурье может быть видоизменено так, чтобы изображать функцию  $f(x)$  в области  $-l \leq x \leq l$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{in\pi}{l} x\right), \quad (4.5)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\alpha) \exp\left(-\frac{in\pi}{l} \alpha\right) d\alpha. \quad (4.6)$$

Переход в формулах (4.5), (4.6) к пределу при  $l \rightarrow \infty$  позволяет представить непериодическую функцию  $f(x)$  двойным интегралом

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \exp[iu(x - \alpha)] d\alpha. \quad (4.7)$$

Это выражение можно разбить на два симметричных равенства

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \exp(iux) du \equiv F^{-1}\{g(u)\}, \quad (4.8)$$

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-iux) dx \equiv F\{f(x)\}, \quad (4.9)$$

где символы  $F$ ,  $F^{-1}$  обозначают соответственно прямое и обратное преобразования Фурье. Функцию  $g(u)$  называют спектральной плотностью функции  $f(x)$ . Вспомним (см. разд. 3.1), что распространение плоской волны вдоль оси  $x$  создает возмущение, которое в каждый момент времени может быть представлено в виде  $U = U_0 \exp(\pm ik_x x)$ . Формулы (4.8), (4.9) содержат члены такого же вида. Следовательно, их можно рассматривать как представление произвольного возмущения  $f(x)$  набором плоских волн с амплитудами  $g(k_x) dk_x / \sqrt{2\pi}$  для волновых чисел в интервале  $(k_x, k_x + dk_x)$ . Такое представление возможно для линейных систем, реакция которых на одновременное воздействие нескольких источников возмущения равна сумме реакций на действие отдельных источников.

Аналогичным образом определяется двумерное преобразование Фурье, отличающееся от (4.8), (4.9) лишь тем, что интегрирование проводится по двум координатам  $x, y$  и двум составляющим волнового вектора  $k_x, k_y$

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint G^\vee(k_x, k_y) \exp[i(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y \equiv F^{-1}\{G^\vee(k_x, k_y)\}, \quad (4.10)$$

$$G^\vee(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \iint g(x, y) \exp[-i(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y \equiv F\{g(x, y)\}. \quad (4.11)$$

Во многих случаях удобнее вместо  $k_x, k_y$  использовать переменные  $f_x = k_x/2\pi$ ,  $f_y = k_y/2\pi$  [17]. Эта замена приводит к соотношениям

$$g(x, y) = \iint G(f_x, f_y) \exp[2\pi i(f_x x + f_y y)] df_x df_y, \quad (4.12)$$

$$G(f_x, f_y) = \iint g(x, y) \exp[-2\pi i(f_x x + f_y y)] dx dy, \quad (4.13)$$

причем функции  $G(f_x, f_y)$  и  $G^\vee(k_x, k_y)$  связаны между собой следующим образом:  $G(f_x, f_y) = 2\pi G^\vee(k_x, k_y)$ .

Двумерные преобразования Фурье можно представить в более компактной векторной форме. Так, формулы (4.10), (4.11) приводятся к виду

$$g(\mathbf{r}^\diamond) = \frac{1}{2\pi} \iint G^\vee(\mathbf{k}^\diamond) \exp i(\mathbf{r}^\diamond \cdot \mathbf{k}^\diamond) d\mathbf{k}^\diamond, \quad (4.14)$$

$$G^\vee(\mathbf{k}^\diamond) = \frac{1}{2\pi} \iint g(\mathbf{r}^\diamond) \exp[-i(\mathbf{r}^\diamond \cdot \mathbf{k}^\diamond)] d\mathbf{r}^\diamond, \quad (4.15)$$

где  $\mathbf{r}^\diamond, \mathbf{k}^\diamond$  – соответственно проекции радиуса вектора  $\mathbf{r}$  и волнового вектора  $\mathbf{k}$  на плоскость  $xy$ :  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^\diamond + \mathbf{e}_z z$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}^\diamond + \mathbf{e}_z k_z$  ( $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ ).

Используя разложение Фурье, можно по известной структуре поля в одной плоскости, например, в плоскости  $z = +0$  непосредственно за диафрагмой восстановить его структуру во всем полупространстве. Пусть возмущение в плоскости  $z = +0$  определяется функцией  $U_0(\mathbf{r}^\diamond)$ , имеющей двумерный фурье-образ  $A_0(\mathbf{k}^\diamond)$

$$U_0(\mathbf{r}^\diamond) = \frac{1}{2\pi} \iint A_0(\mathbf{k}^\diamond) \exp i(\mathbf{r}^\diamond \cdot \mathbf{k}^\diamond) d\mathbf{k}^\diamond. \quad (4.16)$$

Нас интересует вид функции  $U_z(\mathbf{k}^\diamond)$ , представляющей возмущение в плоскости на расстоянии  $z$  от исходной. Задача решается подстановкой в подынтегральное выражение в (4.16) множителя  $\exp(-ik_z z)$ , определяющего изменение амплитуды и фазы каждой из бесконечной последовательности плоских волн

$$U_z(\mathbf{r}^\diamond) = \frac{1}{2\pi} \iint A_z(\mathbf{k}^\diamond) \exp i(\mathbf{r}^\diamond \cdot \mathbf{k}^\diamond) d\mathbf{k}^\diamond, \quad (4.17)$$

$$\text{где } A_z(\mathbf{k}^\diamond) \equiv A_0(\mathbf{k}^\diamond) \exp(-ik_z z). \quad (4.18)$$

Характер изменения  $A_z(\mathbf{k}^\diamond)$  с расстоянием от исходной плоскости определяется соотношением модулей волнового вектора  $|\mathbf{k}| = k = \omega/c$  и его горизонтальной составляющей  $|\mathbf{k}^\diamond| = k^\diamond$ . При  $k > k^\diamond$   $k_z^2 = k^2 - (k^\diamond)^2 > 0$  и,

следовательно,  $k_z$  является действительной величиной. В этом случае каждая плоская волна сохраняет неизменную амплитуду и меняется с расстоянием лишь по фазе. Такая ситуация рассматривается в классической фурье-оптике.

Однако учет только распространяющихся волн не позволяет полностью охарактеризовать возмущение. Необходимо суммировать вклады бесконечной совокупности плоских волн, в том числе таких, волновые векторы которых удовлетворяют неравенству  $k < k^\diamond$ . Произведя замену  $ik_z = \kappa = \sqrt{(k^\diamond)^2 - k^2}$  и выбирая, как и в других подобных задачах, положительный знак перед квадратным корнем, находим

$$A_z(k^\diamond) = A_0(k^\diamond)\exp(-\kappa z) \quad \text{при } k < k^\diamond. \quad (4.19)$$

Вследствие зависимости  $\kappa$  от  $k^\diamond$  промежуток зонд-образец в БСОМ осуществляет фильтрацию пространственных частот. При  $k^\diamond \gg k$  составляющая сигнала с пространственной частотой  $f = k^\diamond/2\pi$  ослабевает по интенсивности в  $e$  раз на расстоянии  $z = 1/(2\kappa) \approx 1/(4\pi f)$ . Отсюда следует, что для уверенного различения структуры с периодом  $d = 1/f$  зонд должен находиться на расстоянии  $z \approx 0,1d$  от образца.

Фурье-оптика ближнего поля решает задачу восстановления структуры электромагнитного поля по спектру пропускаемых зондом пространственных частот в диапазоне, включающем распространяющиеся и затухающие волны.

## 4.2. Частотный спектр шероховатой поверхности

К числу практических задач, решаемых методом Фурье, относится анализ поверхностного рельефа. Проиллюстрируем возможности метода на простейшем примере. Пусть функция  $f(x)$ , характеризующая отклонение точек рельефа от уровня гладкой поверхности, задана следующим образом:  $f(x) = |x|$  в промежутке  $[-\pi, \pi]$  (выбор любого другого симметричного интервала приводит лишь к необходимости замены переменной, как в формулах (4.5), (4.6)). Продолжив  $f(x)$  с периодом  $2\pi$  в обе стороны оси  $x$ , приходим к профилю треугольной решетки (Рис. 10). При разложении четной функции в тригонометрический ряд (4.1) коэффициенты  $b_n$  равны нулю. Используя при вычислении  $a_n$  интегрирование по частям, приходим к представлению  $f(x)$  в виде ряда

$$f(x) = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{\pi} \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right). \quad (4.20)$$

Поскольку амплитуды гармоник быстро убывают с ростом частоты, функцию  $f(x)$  с удовлетворительной точностью характеризует сумма лишь нескольких первых членов ряда. Как видно из Рис. 10, включение всего лишь двух гармоник позволяет правильно представить период и глубину модуляции профиля решетки. Добавление каждого следующего члена разложения повышает заостренность зубцов.

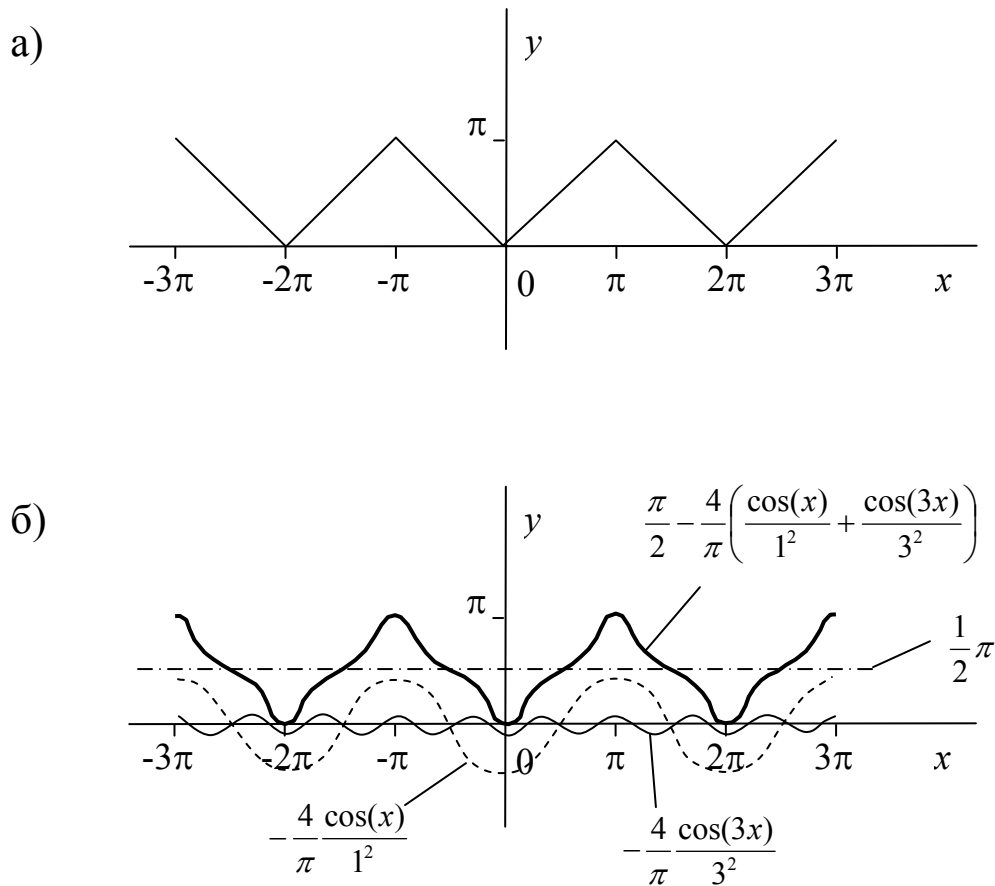


Рис. 10. Профиль решетки (а) и его представление суммой трех первых членов разложения Фурье (формула 4.20) (б).

Представим теперь, что профиль решетки анализируется предельно тонким зондом, перемещающимся поперек канавок. Из геометрических соображений очевидно, что восстановить на изображении любую из пространственных частот можно лишь в том случае, если размах колебаний зонда вдоль нормали к поверхности будет сопоставим с амплитудой соответствующей гармоники. С ростом порядкового номера гармоники амплитуда убывает и становится все сложнее отличить полезный сигнал от шумов.

Затухающие волны, переносящие высокочастотные составляющие спектра, помимо меньшей амплитуды характеризуются и меньшей глубиной проникновения в зазор образец-острие. Увеличение ширины зазора фактически эквивалентно ограничению числа членов разложения  $f(x)$ .

### 4.3. Пары преобразований Фурье, часто встречающихся в прикладной оптике

Анализ преобразований Фурье упрощается, если  $f(x)$  является действительной четной функцией. В этом случае, используя формулу Эйлера  $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$  и отбрасывая мнимые части экспоненциальных членов в формулах (4.8), (4.9), приходим к соотношениям

$$f(x) = \sqrt{2/\pi} \int_0^{\infty} g(u) \cos(ux) du, \quad (4.21)$$

$$g(u) = \sqrt{2/\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(ux) dx. \quad (4.22)$$

Задача определения  $f(x)$  по известной  $g(u)$  и обратная задача легко решаются с помощью формул (4.21), (4.22), если функцию и ее фурье-образ удастся представить в виде комбинации некоторых элементарных функций, часто используемых при аппроксимации экспериментальных кривых.

1. Гауссова функция ошибок:  $f(x) = \exp(-a^2x^2/2)$ .

Подстановка  $f(x)$  в формулу (4.22) приводит к табличному интегралу

$$g(u) = F\{f(x)\} = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{u^2}{2a^2}\right). \quad (4.23)$$

Аналогичным образом связаны функции двух переменных: если  $g(x,y) = \exp[-a^2(x^2 + y^2)/2]$ , то

$$G(u, v) = F\{g(x, y)\} = \frac{1}{a^2} \exp\left[-\frac{1}{2a^2}(u^2 + v^2)\right]. \quad (4.24)$$

## 2. Дельта-функция.

Она представляет собой бесконечно узкий импульс:  $\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} s(a, x)$ ,

где  $s(a, x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$ . Выбор множителя  $1/\sqrt{2\pi}$  диктуется условием

нормировки:  $\int_{-\infty}^{\infty} s(a, x) dx = 1$ . С учетом (4.23)

$$g(u) = F\{\delta(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \exp\left(-\frac{a^2 u^2}{2}\right) \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4.25)$$

В двумерном пространстве  $\delta(x, y) = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{2\pi a^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2a^2}\right) \right]$ :

$$g(u, v) = F\{\delta(x, y)\} = \frac{1}{2\pi}. \quad (4.26)$$

Переходя к пространственным частотам, находим

$$G(f_x, f_y) = F\{\delta(x, y)\} = 1. \quad (4.27)$$

Таким образом, в частотном спектре возмущения в форме бесконечно узкого импульса, изображаемого  $\delta$ -функцией, в равной степени представлены все пространственные частоты в интервале  $(-\infty, +\infty)$ .

## 3. Прямоугольная функция

$$f(x) = \text{rect}(x) = 1 \text{ при } |x| \leq 1/2, \\ = 0 \text{ в остальных случаях.}$$

По формуле (4.22)  $g(u) = (1/\sqrt{2\pi})[\sin(u/2)/(u/2)]$  или

$$G(f_x) = \frac{\sin(\pi f_x)}{\pi f_x}.$$

Фурье-образ функции двух переменных  $g(x,y) = \text{rect}(x) \cdot \text{rect}(y)$  можно представить в виде

$$G(f_x, f_y) = F\{g(x, y)\} = \text{sinc}(\pi f_x) \cdot \text{sinc}(\pi f_y), \quad (4.28)$$

где  $\text{sinc}(x) \equiv (\sin x)/x$ .

#### 4. Круговая функция

$$\begin{aligned} \text{circ}(\rho) &= 1 \text{ при } \rho \leq 1, \\ &= 0 \text{ в остальных случаях.} \end{aligned}$$

График функции  $\text{circ}(\rho)$  можно построить, вращая прямоугольник вокруг оси, совмещенной с одной из сторон. Поэтому естественно ожидать, что и фурье-образы функций  $\text{circ}(\rho)$  и  $\text{rect}(x) \cdot \text{rect}(y)$  являются родственными функциями. Переход от прямоугольной симметрии к круговой, как обычно, требует замены тригонометрических функций бесселевыми. Эта замена приводит к соотношению

$$G(f) = F\{\text{circ}(\rho)\} = \frac{J_1(2\pi f)}{f},$$

где  $\rho, f$  – модули радиусов-векторов в двумерных пространствах соответственно координат и частот.

Рассмотренные пары преобразований Фурье для переменных  $x, y$  и  $f_x, f_y$  (или  $\rho$  и  $f$  в случае круговой симметрии) сведены в схему, в которой прямое и обратное преобразования изображены стрелками, направленными в противоположные стороны

$$\exp\left[-\frac{a^2}{2}(x^2 + y^2)\right] \leftrightarrow \frac{2\pi}{a^2} \exp\left[-\frac{2\pi^2}{a^2}(f_x^2 + f_y^2)\right], \quad (4.29)$$

$$\delta(x, y) \leftrightarrow 1, \quad (4.30)$$

$$\text{rect}(x) \cdot \text{rect}(y) \leftrightarrow \text{sinc}(\pi f_x) \cdot \text{sinc}(\pi f_y), \quad (4.31)$$



$$\text{circ}(\rho) \leftrightarrow \frac{J_1(2\pi f)}{f}. \quad (4.32)$$

Графики функций  $\text{sinc}(x)$  и  $J_1(x)/x$  изображены на Рис. 11.

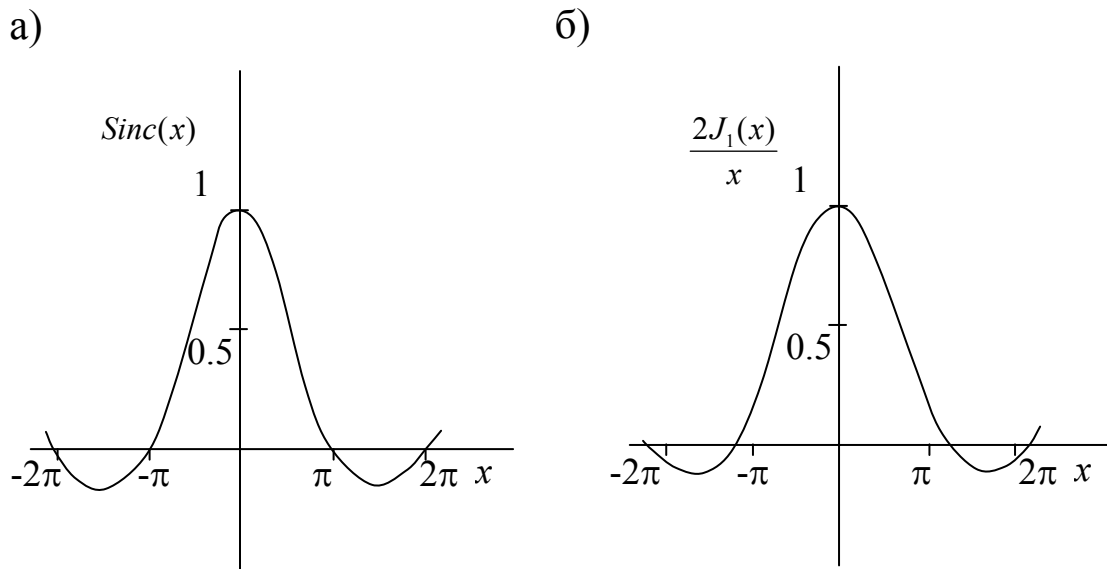


Рис. 11. Графики функций  $\text{Sinc}(x) = \sin(x)/x$  (а) и  $2J_1(x)/x$ , определяющих спектры пространственных частот волнового поля соответственно за квадратной и круглой диафрагмами.

В дальнейшем нам потребуется одно из свойств преобразований Фурье, утверждаемое теоремой подобия [17]: если  $G(f_x, f_y) = F\{g(x, y)\}$ , то

$$F\{g(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|} G\left(\frac{f_x}{a}, \frac{f_y}{b}\right). \quad (4.33)$$

В справедливости этого утверждения легко убедиться, заменив  $x$  на  $ax$ ,  $y$  на  $by$  в формулах (4.12), (4.13). Для функций, обладающих круговой симметрией, по теореме подобия

$$F\{circ(\rho/a)\} = a^2 \frac{J_1(2\pi af)}{af} = \frac{a}{f} J_1(2\pi af). \quad (4.34)$$

## 5. Пространственное разрешение оптических приборов. Преодоление дифракционного предела разрешения

### 5.1. Теория Аббе и критерий Рэля

Пространственное разрешение характеризует способность прибора различать близко расположенные предметы или элементы периодической структуры. Компоненты разрешения вдоль каждой из трех координатных осей в общем случае могут быть различными. Под пространственным разрешением оптических приборов обычно подразумевают его горизонтальную (параллельную плоскости образца или перпендикулярную оси прибора) составляющую. Говоря о пространственном разрешении БСОМ, мы будем иметь в виду горизонтальную проекцию наименьшего расстояния между двумя различимыми на изображении элементами структуры образца. Что касается разрешения БСОМ по вертикали, заметим лишь, что оно во многом определяется уровнем шумов, в частности, механических вибраций, дестабилизирующих положение зонда при записи каждого элемента раstra; обычно оно составляет  $\sim 0,1$  нм.

Вопрос о предельном разрешении оптических приборов при когерентном освещении был рассмотрен Аббе. При освещении параллельным пучком нанесенной на прозрачную основу дифракционной решетки за ней возникает система лучей, рассеянных под разными углами. Дифрагированные лучи, собранные линзой, усиливают друг друга, если разность хода между ними составляет целое число длин волн. Этому требованию при нормальном падении света удовлетворяет следующее соотношение между периодом  $d$  решетки, углом дифракции  $\varphi$  и длиной волны  $\lambda$ :  $d \sin \varphi = m\lambda$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$ . При косом освещении, зеркальном относительно дифрагированного луча, (рис. 12) разность хода возрастает вдвое и направления дифракционных максимумов задаются равенствами

$$2d \sin \varphi = m\lambda, \quad (5.1)$$

где  $m$  – целое число.

Для того, чтобы на изображении проявилась периодичность решетки, необходимо попадание в апертуру линзы наряду с прямым ( $m = 0$ ) хотя бы одного дифрагированного пучка ( $m = 1$ ). В пределе при  $\varphi \rightarrow \pi/2$  из (5.1) следует

$$\Delta r_{\min} = d_{\min} = \lambda/2, \quad (5.2)$$

где  $\Delta r_{\min}$  – предельное разрешение, отождествляемое с минимальным различимым на изображении периодом решетки  $d_{\min}$ .

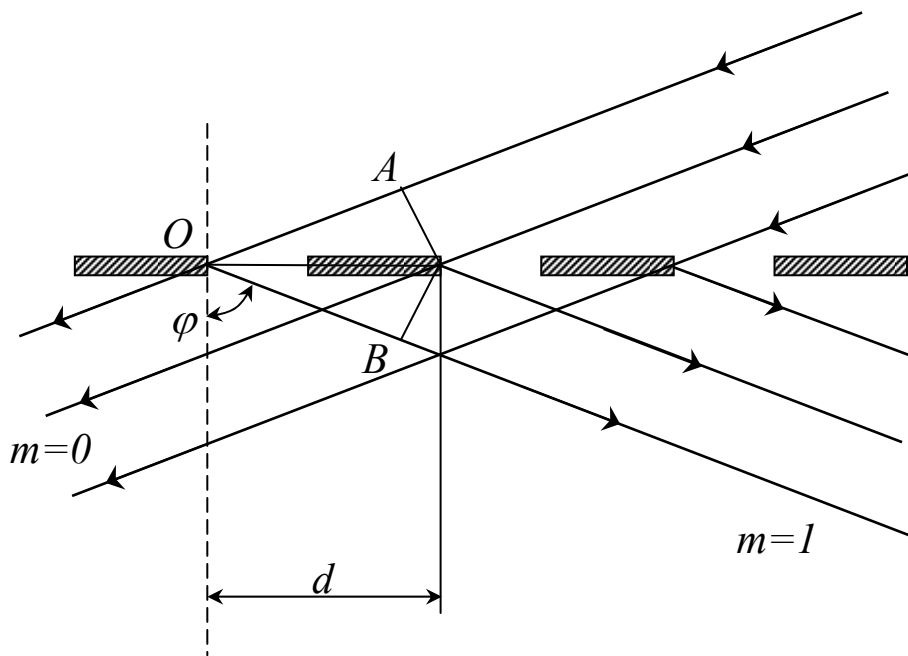


Рис. 12. Рассеяние света решеткой при косом освещении:  $2(OA+OB)=2d\sin\varphi$  – разность хода между лучами, рассеянными соседними узлами решетки.

Рэлей предложил считать изображения двух светящихся точек раздельными, если максимум дифракционной картины Эйри,

представляющей изображение одной из точек, совпадает с первым минимумом на изображении другой точки. При этом суммарная интенсивность в провале между двумя пиками составляет примерно 80% максимальной (рис. 13), что обеспечивает приемлемый контраст изображения. В безабберационной линзовой системе при некогерентном освещении распределение интенсивности на изображении точечного источника задается “функцией размытия точки” (point spread function), имеющей следующий вид

$$PSF = \left[ 2 \frac{J_1(\alpha)}{\alpha} \right]^2, \quad (5.3)$$

$$\text{где } \alpha \equiv \frac{2\pi}{\lambda_0} \rho n \sin \theta, \quad (5.4)$$

$J_1(\alpha)$  – функция Бесселя первого порядка,  $\rho$  – расстояние от центра изображения точки, пересчитанное к плоскости образца,  $\lambda_0$  – длина волны света в вакууме,  $n$  – показатель преломления среды, в которую помещен объект,  $\theta$  – апертурный угол, измеряемый между осью линзы и направлением на край диафрагмы. Учитывая (см. формулу (3.59)), что положение первого минимума PSF задается равенством  $\alpha = 3,83$ , из (5.3) находим разрешение по Рэлею

$$\Delta r = 0,61 \frac{\lambda_0}{n \sin \theta} = 0,61 \frac{\lambda}{\sin \theta}. \quad (5.5)$$

При  $\theta \rightarrow \pi/2$   $\Delta r \rightarrow \Delta r_{\min} = 0,61\lambda$ , что лишь слегка расходится с результатом, предсказываемым теорией Аббе. Это расхождение вызвано тем, что в теории Аббе рассматриваются лучи, рассеянные в плоскости падения, а в теории Рэлея – распространяющиеся внутри конуса.

К формуле (5.5) можно прийти, используя метод Фурье. Спектральная плотность точечного источника характеризуется функцией  $G(f_x, f_y) = 1$  (или  $G(f) = 1$ ), а значит, в спектре в равной степени представлены все пространственные частоты в диапазоне  $0 \leq f < \infty$ . Зрачок линзы ограничивает пропущенные в плоскость изображения пространственные частоты величиной  $f_{\max} = (\sin \theta)/\lambda$ .

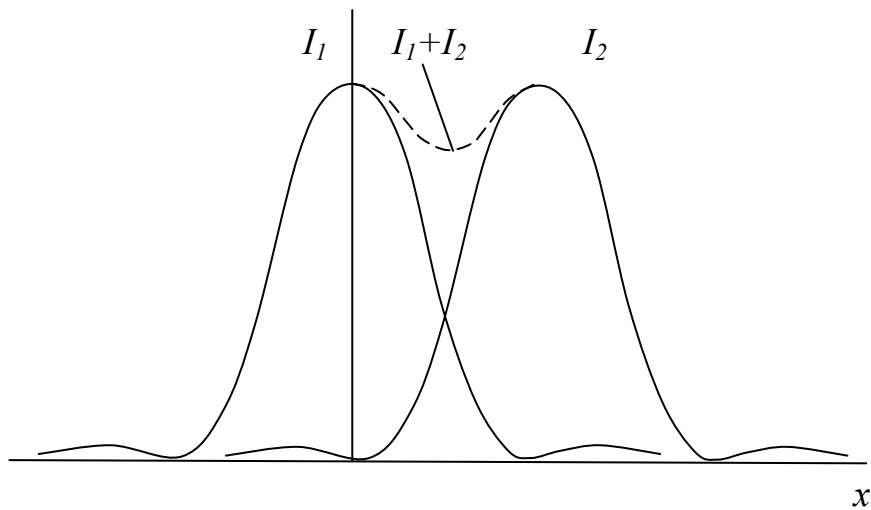


Рис. 13. Иллюстрация критерия Рэля. Изображения двух точечных источников считаются разрешенными, если максимум одного распределения совпадает с первым минимумом другого.

При отсутствии aberrаций частотный спектр в пространстве за линзой может быть представлен в виде

$$G(f) = \text{circ}(bf), \quad (5.6)$$

где  $b = f_{\text{max}}^{-1} = \lambda/\sin\theta$ . Меняя местами  $\rho$  и  $f$  в левой и правой частях формулы (4.32) и используя теорему подобия (формула (4.34)), приходим к соотношению

$$F^{-1}\{\text{circ}(bf)\} = \frac{1}{b^2} \frac{J_1(2\pi\rho/b)}{\rho/b}. \quad (5.7)$$

Положение первого нуля функции  $J_1(2\pi\rho/b)$  или полуширина центрального максимума определяются равенством  $(2\pi\rho_0/b) = 3,83$ , что соответствует разрешению по Рэлю:  $\Delta r = \rho_0 = 0,61\lambda/\sin\theta$ .

## 5.2. Передаточная функция БСОМ

Размытие точечного источника света в стандартной (линзовой) оптической системе вызвано тем, что зрачок линзы пропускает лишь часть

спектра пространственных частот, причем предельная частота задается числовой апертурой линзы. В БПО ограничение разрешения накладывается конечным размером формируемого диафрагмой светового пятна. Исходя из обратимости световых лучей, изображение точечного источника, сканируемого оптическим зондом, можно рассматривать как эквивалент изображения вершины зонда, сканируемой точечным источником. Поэтому естественно ожидать, что минимальный размер точки, рассматриваемой в апертурном БСОМ, должен быть близок к диаметру диафрагмы.

Более строгий подход к определению пространственного разрешения БСОМ требует анализа спектра пропущенных диафрагмой пространственных частот. Для определенности будем рассматривать БСОМ, работающий в режиме освещения, когда свет приходит на образец по апертурному зонду. Простейшей моделью зонда является диафрагма в непрозрачном экране. Пусть на диафрагму радиусом  $a$  падает плоская волна с единичной амплитудой. Распределение напряженности поля в световом пятне непосредственно за диафрагмой определяется амплитудным коэффициентом пропускания  $t(x,y)$ . Согласно формуле Бете-Боукампа (3.75) это распределение является существенно неравномерным и различным в плоскостях  $xz$  и  $xy$ , соответственно параллельной и перпендикулярной направлению поляризации падающей волны. Зная составляющие  $E_x$ ,  $E_y$  (или  $E_\rho$ ,  $E_\phi$  в цилиндрических координатах) электрического вектора и используя метод Фурье, можно найти частотный спектр поля за диафрагмой. Одна из трудностей прямого решения задачи связана с тем, что  $E_\rho$  неограниченно возрастает у края диафрагмы. Чтобы обойти расходимость решения и избежать громоздких математических выкладок, будем исходить из распределения поля в плоскости на малом, но конечном расстоянии  $z$  от экрана. Анализ показывает, что при росте  $z$  пики  $E_\rho$  у краев диафрагмы сглаживаются, и зависимости квадрата амплитуды электрического вектора от расстояния до оси в двух взаимно перпендикулярных плоскостях приобретают вид, напоминающий графики гауссовой и прямоугольной функций (рис.14).

Несмотря на очевидное различие этих функций, их фурье-образы при надлежащем выборе параметров, характеризующих распределения амплитуд электрического вектора, близки, а значит, должны быть близки и предельные пространственные частоты  $(f_x)_{\max}$ ,  $(f_y)_{\max}$ , пропущенные диафрагмой соответственно вдоль и поперек направления поляризации.

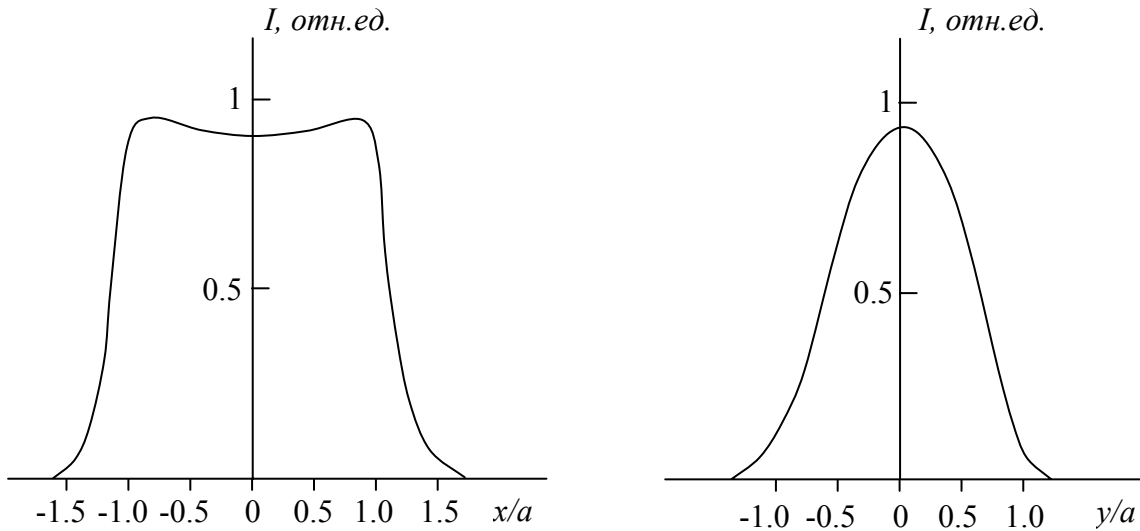


Рис. 14. Зависимость интенсивности электромагнитного поля от расстояния до центра диафрагмы вдоль (а) и поперек (б) направления поляризации падающей волны. Расчет для плоскости, отстоящей на расстоянии  $z=0.2a$  от бесконечно тонкого идеально проводящего экрана. Радиус диафрагмы  $a=0.1\lambda$ .

Чтобы убедиться в этом, сравним спектральные плотности  $G_1(f_x)$  и  $G_2(f_y)$  функций  $g_1(x) = \text{rect}(x/2a)$ ,  $g_2(y) = \exp(-y^2/2\sigma^2)$ :

$$G_1(f_x) = F\{g_1(x)\} = 2a \text{sinc}(2\pi a f_x), \quad (5.8)$$

$$G_2(f_y) = F\{g_2(y)\} = \sqrt{2\pi}\sigma \exp[-2(\pi f_y \sigma)^2]. \quad (5.9)$$

Интенсивности каждой из гармоник на частотах  $f_x, f_y$  в волновом поле за диафрагмой, характеризующиеся квадратами амплитуд  $G_1, G_2$  при  $\sigma = 0,8a$  представлены кривыми 1, 2 на рис. 15.

Определим границу полосы пропускания пространственных частот условием  $[G_i(f)/G_i(0)]^2 = s$ , где  $i=1,2$ ,  $f=f_x, f_y$  и  $s \ll 1$ . Из графиков видно, что при любом выборе допустимого коэффициента ослабления сигнала  $s$  в разумном интервале  $0,01 \leq s \leq 0,1$  граничные частоты  $(f_x)_{\max}, (f_y)_{\max}$  одинаковы с погрешностью порядка 10%. При  $s = 0,01$   $f_{\max} \leq 1/2a$ .

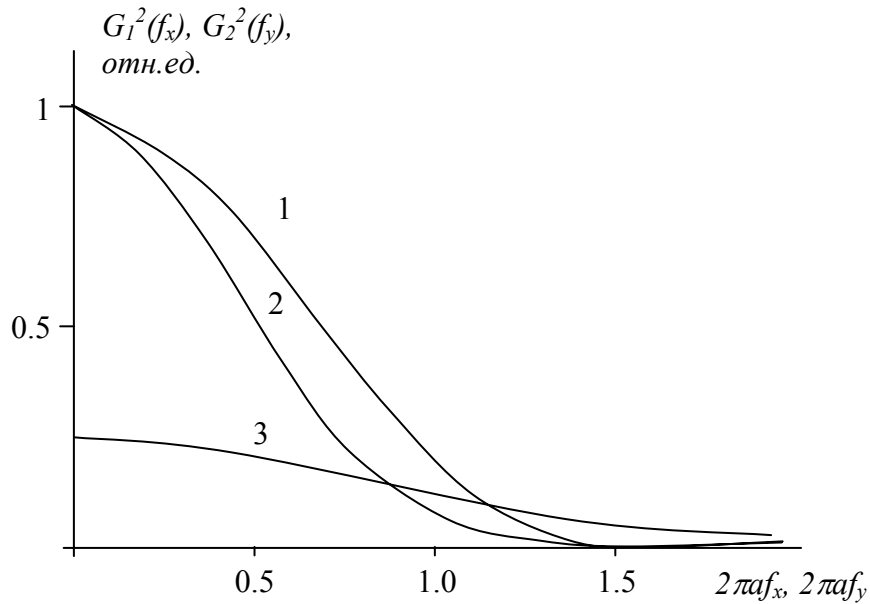


Рис. 15. Зависимость относительной интенсивности сигнала вдоль (кривая 1) и поперек (кривые 2, 3) направления поляризации от пространственной частоты. Спектральные плотности  $G_1^2(f_x)$ ,  $G_2^2(f_y)$  определяются формулами (5.8), (5.9) при  $\delta=0.8a$  (2) и  $\delta=0.4a$  (3).

К аналогичному результату можно прийти, считая распределение поля за диафрагмой осесимметричным и равномерным. Пусть  $t(x,y) = \text{circ}(\rho/a)$ . Тогда спектральная плотность поля за диафрагмой

$$G(f) = F\{\text{circ}(\rho/a)\} = a \frac{J_1(2\pi a f)}{f}. \quad (5.10)$$

Формула (5.10) эквивалентна распределению амплитуд в картине Эйри с той лишь разницей, что координаты и частоты поменялись местами. Определяя по аналогии с критерием Рэля предельную пространственную частоту условием  $J_1(2\pi a f_{\max}) = 0$ , находим

$$f_{\max} = 0,61/a ,$$



что после замены  $d_{\min} = 1/f_{\max}$  дает пространственное разрешение

$$\Delta r = d_{\min} \approx 2a.$$

Мы получили соотношение, имеющее простой физический смысл: разрешение оптического прибора, в котором построение изображения осуществляется путем сканирования образца диафрагмой с коэффициентом пропускания  $t(x,y) = \text{circ}(\rho/a)$ , ограничено диаметром диафрагмы  $2a$ . Две светящиеся точки, например, две молекулы люминофора, находящиеся одна от другой на расстоянии, меньшем размера создаваемого диафрагмой светового пятна, на изображении сливаются в одну размытую точку.

Степень размытия точечного источника характеризует реакцию системы на входной сигнал в виде  $\delta$ -функции. Эту характеристику называют функцией импульсного отклика  $h(x,y)$ , а ее фурье-образ – передаточной функцией

$$H(f_x, f_y) = F\{h(x,y)\} . \quad (5.11)$$

Как показано выше, разумную аппроксимацию формы светового пятна за диафрагмой дает комбинация гауссовой и прямоугольной функций. При этом частотный спектр волнового поля близок к спектру, создаваемому источником с равномерным распределением интенсивности и изображаемому функцией  $G(f) = F\{\text{circ}(\rho/a)\}$ . По мере удаления от диафрагмы световое пятно расширяется, что сопровождается последовательным затуханием высокочастотных компонентов волнового поля.

Если образец поместить на расстоянии  $z$  от диафрагмы, амплитуды распространяющихся волн останутся неизменными, а амплитуды затухающих волн уменьшатся как  $\exp(-kz)$ , причем коэффициент затухания  $k$  является функцией частоты  $f$  и волнового числа  $k$ :  $k = \sqrt{(2\pi f)^2 - k^2}$ . Следовательно, передаточную функцию БСОМ можно представить в виде

$$H(f; z) = H(f; 0) \quad \text{при } 2\pi f \leq k , \quad (5.12)$$

$$H(f; z) = H(f; 0)\exp(-kz) \quad \text{при } 2\pi f > k , \quad (5.13)$$

где  $H(f; 0) = a[J_1(2\pi af)]/f$ ; второй аргумент функции  $H(f; z)$  указывает расстояние от диафрагмы.

Зависимости  $H(f; z)$  от  $af$  при  $\lambda = 600$  нм,  $a = 50$  нм и различных  $z$  приведены на рис. 16. Определяя граничную пространственную частоту условием  $[H(f_{\max}; z)/H(0; z)]^2 = s$  и принимая  $s = 0,01$ , приходим к простой зависимости  $f_{\max}$  от  $a$  и  $z$ , выполняющейся с точностью  $\sim 10\%$  при  $0 \leq z \leq a$

$$f_{\max} \approx 1/(2a + z). \quad (5.14)$$

Соответственно, пространственное разрешение определяется приближенной формулой

$$\Delta r \approx (1/f_{\max}) \approx 2a + z. \quad (5.15)$$

Сравнивая спектры пространственных частот, пропущенных диафрагмой в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, мы заметили, что функции  $G_1(f_x)$ ,  $G_2(f_y)$ , определяемые формулами (5.8), (5.9), мало отличаются по величине одна от другой при  $\sigma = 0,8 a$ . Такой выбор параметра  $\sigma$  является в значительной степени произвольным. В непосредственной близости от диафрагмы в бесконечно тонком идеально проводящем экране полуширина светового пятна в плоскости  $yz$ , перпендикулярной направлению поляризации, близка к радиусу  $a$  диафрагмы [18], что соответствует  $\sigma \approx 0,4 a$ .

Уменьшение  $\sigma$  сопровождается снижением как максимальной интенсивности сигнала на малых пространственных частотах (при  $f_y \rightarrow 0$ ), так и скорости спада  $G_2(f_y)$  с частотой (кривая 3, рис. 15). Хотя при  $s = 0,1$  величины  $(f_y)_{\max}$ , определяемые точками пересечения прямой  $G_2^2(f_y)/G_2^2(0) = 0,1$  с кривыми 2,3, практически совпадают, выбор меньших значений допустимого коэффициента ослабления сигнала  $s$  приводит к расхождению предельных частот, причем двукратное уменьшение  $\sigma$  сопровождается пропорциональным увеличением  $(f_y)_{\max}$ . При малых  $s$  принципиально возможно увеличение и предельной частоты  $(f_x)_{\max}$  в плоскости поляризации за счет участия побочных максимумов функции  $\text{sinc}(2\pi af_x)$ . Поскольку выбор  $s$  в конечном итоге определяется способностью приемной схемы различать слабый сигнал на фоне шумов, предельная пространственная частота должна рассчитываться, исходя из индивидуальных особенностей конкретного прибора.

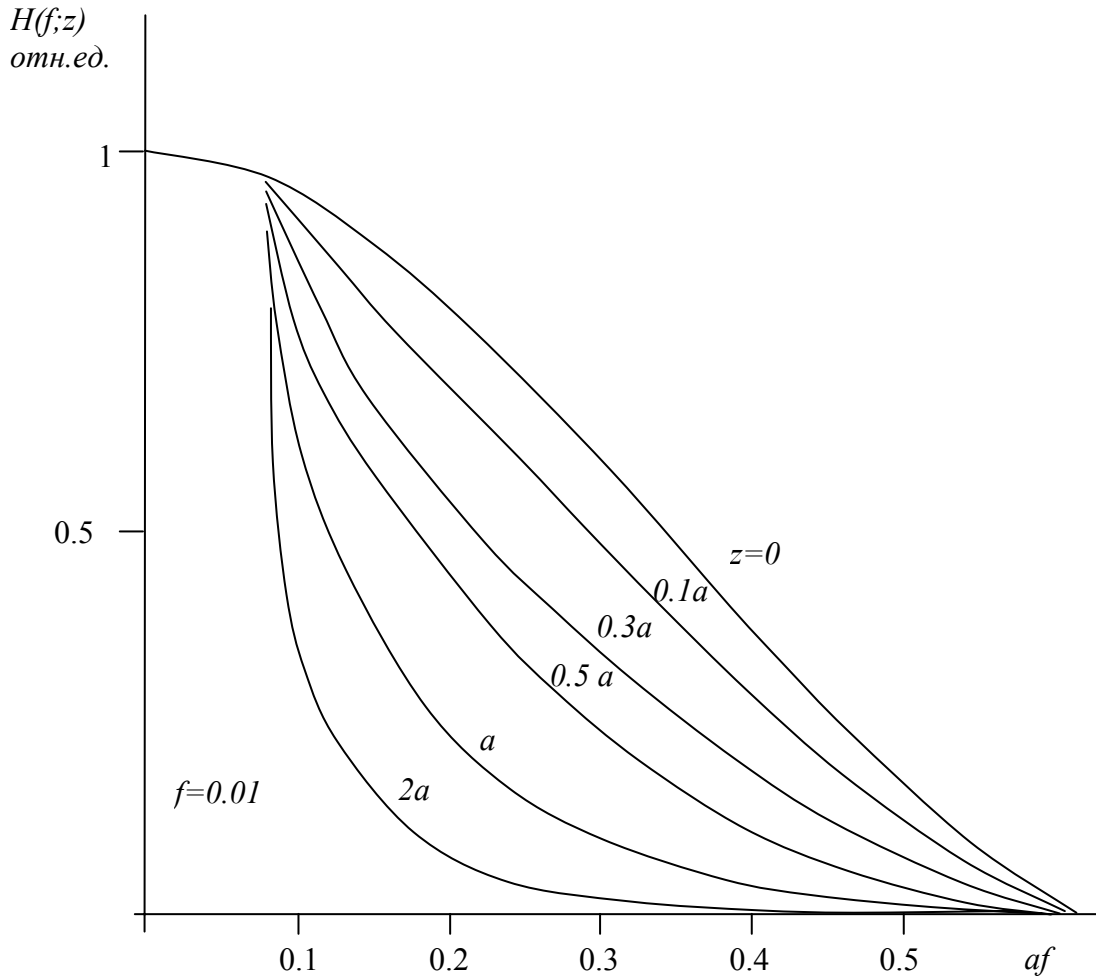


Рис. 16. Изменение передаточной функции апертурного БСОМ с расстоянием  $z$  от диафрагмы  $\lambda=600$  нм,  $a=50$  нм.

С учетом указанных обстоятельств формулу (5.15) можно представить в более общем виде

$$\Delta r \approx \zeta a / [\lg(1/s)] + z, \quad (5.16)$$

где  $\zeta \approx 3$  при  $0.01 \leq s \leq 0.1$ . Последняя формула указывает на возможность реализации разрешения, несколько меньшего диаметра диафрагмы.

### 5.3. Предел разрешения и принцип неопределенности

Критерий Рэлея часто используют в качестве иллюстрации принципа неопределенности Гейзенберга. Определим видимый размер  $\Delta x$  точечного источника света полушириной главного максимума PSF. Учитывая связь волнового вектора  $\mathbf{k}$  и импульса  $\mathbf{p}$  фотона:  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ , а также возможность отклонения рассеянного на угол  $\theta$  фотона в сторону положительного и отрицательного направлений оси  $x$ , находим

$$|\Delta p_x| = 2p \sin \theta = \frac{4\pi\hbar}{\lambda} \sin \theta. \quad (5.17)$$

Подстановка в это неравенство  $\lambda/\sin\theta$  из формулы (5.5) при  $|\Delta x| = \Delta r$  дает  $|\Delta x| \cdot |\Delta p_x| \approx 1,2h$  в согласии с соотношением неопределенности

$$|\Delta x| |\Delta p_x| \geq h, \quad (5.18)$$

где  $h = 2\pi\hbar$  – одна из форм представления постоянной Планка.

Погрешность  $\Delta p_x$  определения составляющей импульса зависит от апертурного угла  $\theta$ . При  $\theta \rightarrow \pi/2$   $|\Delta p_x| \rightarrow 2p = 2h/\lambda$  и, следовательно, минимальная неопределенность координаты объекта или предельное разрешение оптического прибора заданы величиной  $\Delta r_{\min} \approx h/|\Delta p_x| = \lambda/2$ .

Возможность получить с помощью БСОМ отдельные изображения точек, отстоящих одна от другой на расстояние  $\Delta r \ll \lambda$ , казалось бы, противоречит одному из основных физических принципов.

Однако следует иметь в виду, что принцип неопределенности, ограничивая одну из составляющих импульса, оставляет открытым вопрос о значениях двух других составляющих. Условие  $p_x \leq p$  или  $k_x \leq k$ , вытекающее из представления о конусе световых лучей с конечной и действительной апертурой  $\theta$ , применимо к распространяющимся волнам с действительными компонентами волнового вектора  $k_x, k_y, k_z$ . В общем случае составляющая  $k_z$  волнового вектора вдоль оси прибора может принимать не только действительные, но и мнимые значения. Тогда, вводя  $\kappa = ik_z$  и совмещая плоскость падения луча с плоскостью  $xz$ , приходим к неравенству

$$|k_x| = \sqrt{k^2 - k_z^2} = \sqrt{k^2 + \kappa^2} > k. \quad (5.19)$$

При  $k \rightarrow \infty$  область допустимых значений  $k_x$  неограниченно возрастает, а значит,  $|\Delta x|$  может быть сколь угодно малым.

Хотя волны с  $k_x > k$  не могут быть непосредственно зарегистрированы удаленным детектором, они обладают вполне реальным физическим содержанием и при определенных условиях могут быть преобразованы в излучение. Известно [16], что значительную часть спектра рассеяния света малым объектом радиусом  $a \ll \lambda$  составляют затухающие волны. По теореме обратимости, тот же объект, помещенный в затухающее поле, должен преобразовать часть электромагнитной энергии в излучение. В оптике, как и в радиофизике, система пропускает неискаженный сигнал, если ее полоса пропускания шире, чем частотный спектр сигнала. Из формулы (5.14) следует, что ширина полосы пропускания спектра пространственных частот малой диафрагмой при  $z \rightarrow 0$  обратно пропорциональна ее радиусу. Это соотношение характерно и для других малых объектов, например, рассеивающих свет сферических частиц. Поэтому получить неискаженное изображение такой частицы можно лишь с помощью зонда еще меньшего размера. Проблема реализации предельного разрешения упирается, таким образом, в техническую возможность изготовления миниатюрных зондов и приема слабых сигналов. Критическим параметром становится не длина волны  $\lambda$ , а радиус  $a$  диафрагмы или вершины зонда.

При распространении волны вдоль направления, составляющего угол  $(\pi/2) - \theta$  с осью  $x$ , гребни волны вдоль оси  $x$  повторяются и интервалом  $\lambda_{xp} = \lambda/\sin\theta = h/ps\sin\theta$  (см. рис. 4). Зависимость разрешения от угла  $\theta$  можно рассматривать как следствие изменения  $\lambda_{xp}$  с  $\theta$ . Для затухающих волн наименьшее расстояние между гребнями волн вдоль оси  $x$  определяется равенством  $\lambda_{xe} = 1/f_{\max} \approx 2a$  и соотношение неопределенности  $|\Delta x| |\Delta p_x| \geq h$  при  $|\Delta p_x| = 2p$  принимает вид:  $|\Delta x| |\Delta p_x| = 2h$   $|\Delta x| / \lambda_{xe} \geq h$ , т.е.  $|\Delta x| \geq a$ . Таким образом, возможность разрешения элементов структуры, разделенных расстоянием  $a \ll \lambda$  не противоречит принципу неопределенности [19].

#### 5.4. Пространственное разрешение при туннелировании

Оптический сигнал, регистрируемый при сканировании образца зондом БСОМ, несет информацию о распределении интенсивности электромагнитного поля вблизи поверхности. Вследствие ряда причин, например, из-за неизбежного искажения структуры поля образца зондом, изображение не является точной копией исследуемой поверхности. Для корректного определения пространственного разрешения прибора

необходимо сравнение полученного изображения с “идеальным”, которое можно было бы получить при отсутствии искажений. Однако точно предсказать вид идеального изображения, как правило, невозможно. Строгий расчет или моделирование электромагнитного поля в зазоре образец-острие является весьма сложной задачей, решение которой требует индивидуального подхода к каждой конкретной системе.

На практике при оценке достижимого разрешения желательно использовать упрощенную модель, учитывающую основные особенности образования изображения и в то же время допускающую аналитическое решение задачи. Такая модель для СТМ была предложена в середине 80-х годов и в дальнейшем получила широкое распространение при интерпретации электронных изображений проводящих поверхностей [20]. В основе модели лежит представление туннельного тока  $J$  в виде функции матричных элементов  $M_{\mu\nu}$  переходов электронов между разрешенными состояниями образца и острия, характеризуемыми соответственно волновыми функциями  $\psi_\nu$  и  $\psi_\mu$ . Величина матричного элемента определяется характером перекрытия волновых функций  $\psi_\nu$  и  $\psi_\mu$  в туннельном промежутке. В общем случае расчет  $M_{\mu\nu}$  сложен, но при некоторых разумных приближениях можно исключить  $\psi_\mu$ , из выражения для туннельного тока  $J$  и представить ток как функцию только  $\psi_\nu$ , тем самым, связывая его с распределением заряда вблизи образца при отсутствии зонда. Так, для сферического острия

$$J = A_e |\psi_\nu(\mathbf{r}_0; W_F)|^2 = A_e \rho(\mathbf{r}_0; W_F), \quad (5.20)$$

где  $A_e = \text{const}$  при заданном напряжении,  $\rho(r_0; W_F)$  – плотность поверхностных состояний электронов с энергией Ферми  $W_F$ ,  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  – координаты центра сферы. Формула (5.20) означает, что при записи изображения в режиме постоянного тока острие перемещается вдоль контура, повторяющего распределение поверхностного заряда вблизи образца на расстоянии от него, определяемом положением точки  $\mathbf{r}_0$ .

Принцип построения изображения иллюстрирует рис. 17. Распределение плотности электронов вблизи поверхности металла повторяет атомную структуру поверхности. Из-за малой глубины  $\delta$  проникновения волновой функции электронов в область потенциального барьера осцилляции плотности заметно сглаживаются уже на расстоянии  $z \leq 1$  нм от поверхности, а плотность заряда при удалении от поверхности на 1 нм уменьшается на несколько порядков. Центр острия с радиусом кривизны  $a$  не может

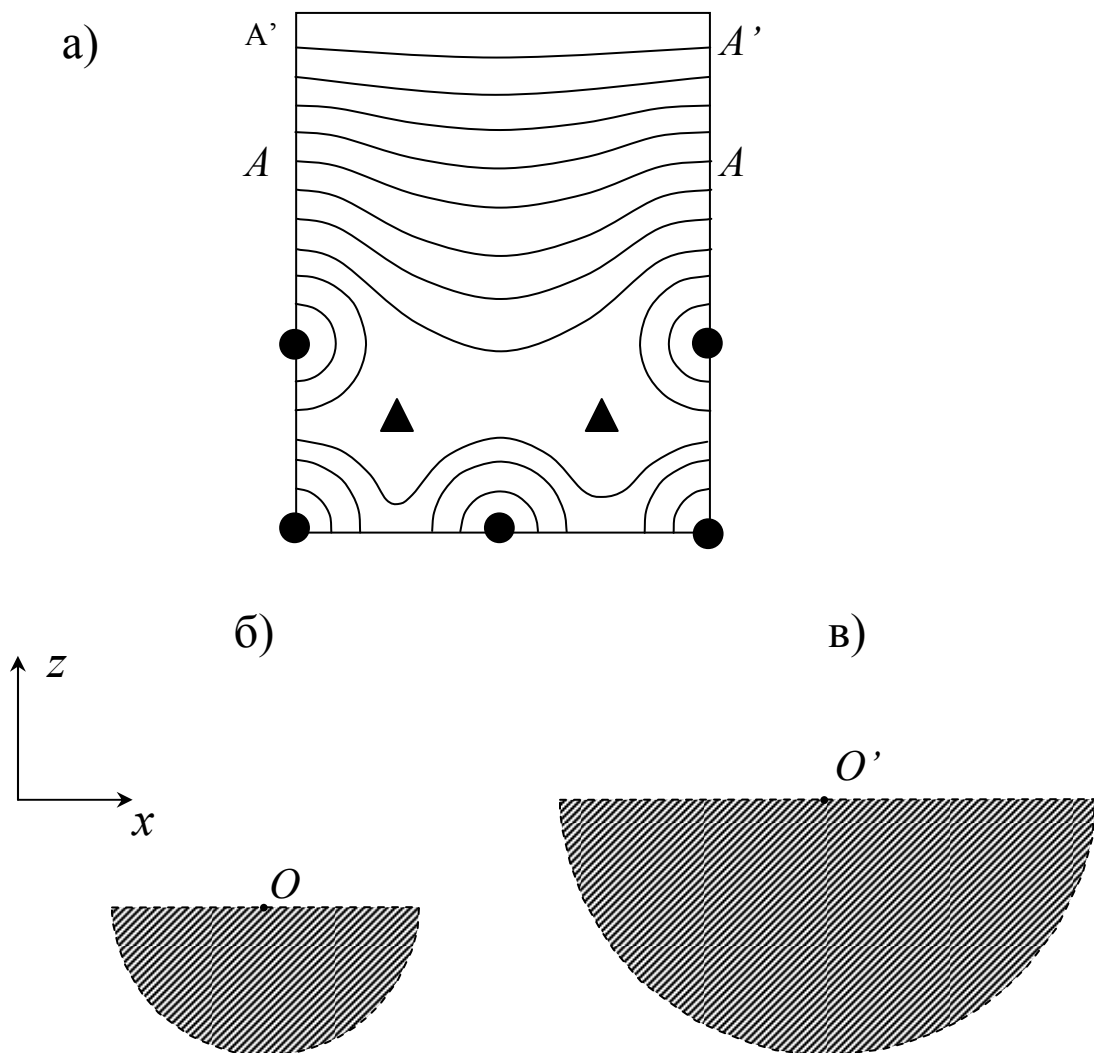


Рис. 17. Иллюстрация принципа построения изображения поверхности металла при регистрации туннельного тока  $J$  в режиме  $J=const$ .

а) контуры постоянной электронной плотности на разных расстояниях от поверхности металла;  $\bullet$ ,  $\blacktriangle$  – положение ядер атомов соответственно в плоскости и вне плоскости рисунка.

б), в) – схематическое изображение максимально приближенных к поверхности сферических острий с разными радиусами кривизны вершины. В случае б) в формировании туннельного тока участвует в основном один атом острия, выступающий над другими атомами вершины; в случае в) – несколько атомов. Эффективные центры  $O$ ,  $O'$  острий при движении вдоль оси  $x$  перемещаются по контурам  $AA$  и  $A'A'$ . По мере удаления от поверхности контуры все в меньшей степени воспроизводят структуру металла.

приблизиться к поверхности на расстояние  $z < a$ . Перемещаясь вдоль контура  $AA$ , точка, совмещенная с центром острия, воспроизводит распределение зарядов, но с существенно меньшей, чем непосредственно у поверхности (при  $z \rightarrow 0$ ) плотностью. Высокое пространственное разрешение СТМ в значительной степени вызвано тем, что в формировании нити туннельного тока может активно участвовать лишь один атом, слегка выступающий над соседними атомами вершины острия. При этом минимальное расстояние от регистрируемого контура  $AA$  до поверхности фактически эквивалентно постоянной решетки.

Механизмы образования изображения в СТМ и БСОМ имеют много общего, что оправдывает единый подход к интерпретации изображения. В рамках такого подхода запись оптического сигнала детектором БСОМ можно рассматривать как регистрацию распределения интенсивности электромагнитного поля вдоль траектории движения виртуального точечного острия [21]. В случае, когда распределение напряженности электромагнитного поля у вершины зонда характеризуется сферической симметрией, положение виртуального острия совпадает с центром кривизны вершины. При нарушении сферической симметрии виртуальное острие смещается в направлении к поверхности или от нее в зависимости от того, вытянуты ли контуры постоянной интенсивности поля вдоль оси или в перпендикулярном направлении. Минимальное расстояние между виртуальным острием (или “эффективным центром острия”) и образцом является основным параметром, определяющим предельное разрешение прибора.

Отметим два принципиальных отличия процессов туннелирования электронов в СТМ и фотонов в БСОМ.

1. В отличие от электронов в металле, положение верхних энергетических уровней которых задано энергией Ферми, смещение уровней фотонов относительно вершины барьера меняется в широких пределах в зависимости от угла  $\theta$ , определяющего направление распространения светового луча в образце. При  $\theta < \theta_c = \arcsin(1/n)$  (см. разд. 3.3) электромагнитная энергия переносится распространяющимися волнами, которые не несут информации о пространственном распределении субволновых элементов структуры образца.

Эти волны можно отсеять, например, ограничивая апертуру детектора углами  $\theta > \theta_c$ . Мы будем предполагать, что только затухающие фотоны ответственны за ток детектора, который в этом случае можно отождествлять с туннельным током.



2. Основные потери мощности на пути от источника излучения к детектору вызваны поглощением или рассеянием фотонов в оптическом зонде. Эти потери многократно увеличивают ослабление сигнала, вызванное затуханием электромагнитных волн в зазоре образец-острие. Отрезок зонда вблизи вершины, следовательно, можно рассматривать как эквивалент дополнительного туннельного промежутка.

По аналогии с формулой (5.20) представим туннельную составляющую тока, регистрируемого детектором при сканировании поверхности зондом со сферически симметричным распределением электромагнитного поля вблизи вершины в виде

$$J = A_{\text{ph}} I(\mathbf{r}_0; \theta). \quad (5.21)$$

где  $A_{\text{ph}} = \text{const}$  для данного острия при фиксированной мощности падающего излучения,  $I(\mathbf{r}_0; \theta)$  – интенсивность затухающего электромагнитного поля,  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  – координаты эффективного центра вершины зонда,  $\theta$  – угол между осью прибора и лучом, распространяющимся в образце в сторону детектора. Предполагается, что детектор является точечным или кольцевым. В противном случае  $\theta$  следует рассматривать как угол рассеяния, усредненный в пределах апертуры детектора.

Определим разрешение туннельного микроскопа (электронного или оптического) наименьшим периодом  $d_{\text{min}}$  структуры, различимым на изображении образца. Условием наблюдения периодической структуры является присутствие в спектре рассеянных волн, помимо постоянной составляющей, хотя бы одной гармоники. При записи изображения структуры с периодом  $d$  вдоль оси  $x$  для выполнения указанного условия туннельный ток  $J(z, x)$  должен включать два компонента

$$J(z, x) = J_0(z, x) + J_1(z, x) = A_0 \exp(-2\kappa z) + A_1 [\exp(-2\kappa_1 z)] \cos^2(\pi x / d), \quad (5.22)$$

где  $A_0, A_1 = \text{const}$ ,  $\kappa$  и  $\kappa_1$  – коэффициенты затухания соответственно постоянной составляющей тока и первой гармоники. Будем предполагать, что запись изображения осуществляется в режиме  $J(z, x) = \text{const}$ . В этом случае осцилляции  $J_1$  при движении острия вдоль оси  $x$  гасятся периодическим смещением острия по вертикали, вызывающим противоположные по знаку изменения  $J_0$ .

Введя амплитуду  $\Delta z$  колебаний высоты острия, при  $\Delta z \ll z$  находим относительную величину осцилляций  $J_0$

$$\delta J_0/J_0 \approx 2\kappa \Delta z .$$

Из равенства  $|\delta J_0| = |\delta J_1|$  следует

$$2\kappa \Delta z = m \exp[-2\kappa(\frac{\kappa_1}{\kappa} - 1)z], \quad (5.23)$$

где  $m = A_1/A_0$  – постоянная, характеризующая глубину модуляции рельефа (так, для дифракционной решетки с треугольным профилем, изображенным на рис. 10,  $m \approx 0,8$ ). При исследовании в БСОМ представляют интерес структуры, период  $d$  которых удовлетворяет неравенству  $d \ll \lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны источника света. Поскольку коэффициент затухания  $\kappa_1$  первой гармоники связан с периодом  $\lambda_x$  переменной составляющей сигнала:  $\kappa_1 \approx 2\pi/\lambda_x$ , а коэффициент затухания  $\kappa$  – с длиной волны  $\lambda$ :  $\kappa = (2\pi/\lambda)\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}$  (см. разд. 3.3), при  $d \ll \lambda$  справедливо соотношение  $\kappa_1 \gg \kappa$  и формула (5.23) преобразуется к виду

$$\Delta r = \frac{z_t}{2\pi} \ln\left(\frac{m}{2\kappa \Delta z}\right) \equiv B z_t, \quad (5.24)$$

где  $\Delta r \equiv d$  – разрешение,  $z_t$  – расстояние между виртуальным точечным острием и средним уровнем поверхностного рельефа.

Оценим параметры, входящие в формулу (5.24). Для видимого света в широком диапазоне углов рассеяния  $\kappa \sim 10^2 \text{ нм}^{-1}$ . Чтобы полезный сигнал выделялся на фоне шумов должно выполняться требование  $\Delta z \geq 0,1 \text{ нм}$  (на практике трудно добиться существенно лучшей стабилизации положения острия по вертикали). Подставляя указанные значения  $\kappa$ ,  $\Delta z$  в формулу (5.24), при типичных  $m = 0,1 \dots 1$  находим  $B \approx 1$ .

Мы пришли к простому определению пространственного разрешения БСОМ по горизонтали: оно равно минимальному расстоянию от эффективного центра острия до образца с поправочным коэффициентом, зависящим от уровня шумов и при типичных условиях близким к единице.

Чтобы количественно охарактеризовать разрешение, нам остается связать расстояние  $z_t$  с геометрическими параметрами зондов разного типа. Для безапертурного зонда со сферической вершиной радиусом  $a$ , край

которой отстоит на расстоянии  $z$  от образца, положение центра зонда определяется очевидным соотношением

$$z_t \approx a + z. \quad (5.25)$$

При сближении зонда с образцом разрешение улучшается, но даже при  $z \rightarrow 0$  не может оказаться существенно меньшим, чем радиус зонда:  $\Delta r_{\min} = Va \approx a$ .

Оценку величины  $z_t$  при использовании апертурного зонда можно получить, исходя из спектра пространственных частот, пропущенных диафрагмой. Допуская, что предельная пространственная частота задана формулой (5.14), находим минимальный период структуры  $d_{\min} = 2a + z$ , который мы отождествляем с разрешением прибора. Коэффициент затухания  $\kappa_1$  для этой частоты определяется равенствами  $\kappa_1 = \pi / d_{\min} = \pi / (2a + z)$  и, следовательно, с ростом расстояния  $z_t$  от поверхности образца сигнал на частоте  $f_{\max}$  спадает как  $\exp[-2\pi z_t / (2a + z)]$ . Приравнивая эту величину введенному выше коэффициенту ослабления  $s$  сигнала, находим

$$z_t \approx \frac{2a + z}{2\pi} \ln(1/s). \quad (5.26)$$

Отсюда при разумном  $s = 0,01$   $z_t \approx 0,7(2a+z)$ . При  $z \rightarrow 0$  ослабление сигнала диафрагмой эквивалентно действию туннельного промежутка шириной  $1,4a$ . Таким образом, эффективный центр апертурного зонда с идеальной диафрагмой находится от торца зонда на расстоянии, несколько меньшем диаметра диафрагмы. По этой причине изменение расстояния  $z$  диафрагмы от образца мало сказывается на разрешении, так как в большинстве практических случаев действует неравенство  $z \ll 2a$ .

Заметим, что оба рассмотренных выше подхода к оценке разрешения апертурного БСОМ, основанных на использовании методов фурье-оптики и теории туннелирования, приводят к одинаковому выводу: *предельное разрешение близко к диаметру диафрагмы и может слегка отличаться от него в ту или другую сторону в зависимости от уровня шумов и чувствительности приемной схемы.*