

И.А. Коняхин

**СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ
(ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ
НАДЁЖНОСТИ)**



**Санкт-Петербург
2020**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

И.А. Коняхин
СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ
(ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ
НАДЁЖНОСТИ)

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ
ИТМО

по направлению подготовки 12.04.02 Опотехника
в качестве учебно-методического пособия для реализации
основных профессиональных образовательных программ высшего
образования магистратуры

 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург
2020

Коняхин И.А. Статистическое моделирование оптико-электронных систем (определение параметров надёжности) – СПб: Университет ИТМО, 2020. – 70 с.

Рецензент:

Лукьянов Геннадий Николаевич, доктор технических наук, профессор, профессор факультета систем управления и робототехники Университета ИТМО.

На примере моделирования отказовых ситуаций рассматриваются принципы построения статистических (стохастических) имитационных моделей оптико-электронных систем на системотехническом и схемотехническом уровнях проектирования. Анализируются свойства основных моделей оптико-электронных систем с различными видами теоретического описания надёжности: невозстановливаемых регулярной структуры, топологически сложной структуры, с мгновенным и немгновенным восстановлением. Приводятся методики обработки результатов моделирования. Излагаются основные приёмы алгоритмизации и программной реализации стохастических имитационных моделей надёжности технических систем различной структуры в пакете прикладных программ Matlab. Пособие предназначено для использования при выполнении лабораторных работ и научно-исследовательских работ по программе подготовки магистров по направлению 12.04.02 Опототехника



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2020
© Коняхин И.А. 2020

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	5
1 Теоретические модели для расчета параметров и характеристик надежности .	7
1.1 Характеристики и параметры надежности невосстанавливаемых элементов и приборов.....	7
1.2 Параметры и характеристики надёжности при экспоненциальном законе распределения времени работы до отказа.....	10
1.3 Определение параметров и характеристик надёжности системы при последовательном соединении её элементов.....	11
1.4 Определение параметров и характеристик надёжности системы при параллельном соединении элементов.....	13
1.5 Расчёт характеристик надёжности технической системы при наличии резервированных элементов.....	15
1.6 Расчёт характеристик надёжности при смешанном соединении элементов	19
1.7 Расчет надежности приборных комплексов со структурой сложной топологии	22
1.8 Характеристики и параметры надежности восстанавливаемых элементов и приборов.....	25
1.8.1 Параметры надежности объектов с мгновенным восстановлением.	25
1.8.2 Параметры надежности систем с немгновенным восстановлением	27
Контрольные вопросы.....	30
2 Статистическое моделирование систем при определении параметров надёжности.....	31
2.1 Статистическое моделирование времени работы элемента системы до отказа по методу «обратной функции»	31
2.1.1 Алгоритм моделирования по методу «обратной функции»	32
2.1.2 Моделирование случайной величины с распределением Релея	32
2.1.3 Моделирование случайной величины с распределением Вейбулла	33
2.1.4 Моделирование случайной величины с экспоненциальным распределением	34
2.1.5 Моделирование случайной величины с равномерным распределением	34
2.1.6 Моделирование случайной величины с распределением Эрланга.....	35
2.2 Моделирование времени работы элемента до отказа по методу преобразования нормированной нормально распределённой случайной величины.....	36
2.2.1 Моделирование случайной величины с нормальным распределением	36

2.2.2 Моделирование случайной величины с логарифмически-нормальным распределением	37
2.3 Статистическое моделирование времени работы элемента системы до отказа с использованием порядковых статистик	38
Контрольные вопросы.....	39
3 Практические методики синтеза моделей при выполнении лабораторного практикума «Определение параметров надёжности оптико-электронных систем методом статистических испытаний»	40
3.1 Последовательность выполнения лабораторных работ с использованием статистических моделей ситуаций отказ/восстановление.....	40
3.2 Лабораторная работа «Статистическое моделирование отказовых ситуаций при определении параметров надёжности невосстанавливаемых приборов и систем»	43
3.3 Лабораторная работа «Статистическое моделирование отказовых ситуаций при определении параметров надёжности систем с топологически сложным соединением элементов»	53
3.4 Лабораторная работа «Статистическое моделирование отказовых ситуаций при определении параметров надёжности восстанавливаемых приборов и элементов (с мгновенным восстановлением)»	60
3.5 Лабораторная работа «Статистическое моделирование отказовых ситуаций при определении параметров надёжности восстанавливаемых приборов и элементов (с немгновенным восстановлением)»	63
3.6 Структура отчета по лабораторной работе	67
Контрольные вопросы.....	67
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	68
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	69

ВВЕДЕНИЕ

В процессе проектирования сложных технических систем часто встречаются ситуации, при которых аналитическое решение задачи ввиду значительных математических трудностей практически невозможно, а проведение экспериментальных исследований и натурных испытаний требует больших временных затрат и средств. Одним из эффективных способов по преодолению этих трудностей является применение компьютерного моделирования при реализации проектных процедур анализа и синтеза.

На системотехническом уровне проектирования, рассматривающем техническую систему, как совокупность функциональных элементов с определёнными функциями преобразования, наиболее эффективно использование теоретических (другое название – математических) моделей протекающих процессов и явлений.

Особенностью проектирования оптико-электронных приборов и систем (ОЭПиС), представляющих собой комплекс совместно действующих оптических, электронных, оптоэлектронных, электромеханических компонентов, является необходимость учёта, с одной стороны, значительного различия в параметрах образующих их элементов, а с другой – адекватного отображения при проектировании протекающих в них случайных процессов: шумов, фонов, блуждающих токов и потенциалов, отказов, манифестных неисправностей. Эти особенности определяют необходимость использования при их проектировании статистических (стохастических) моделей, фактически представляющих собой математическую модель, отдельные части которой воспроизводят ряды значений заданных случайных процессов.

Одной из главных целей проектирования ОЭПиС является обеспечение требуемого *качества*, которое определяется через группу *критериев* (показателей и параметров), изложенных в Техническом задании на проектирование. Одним из общих критериев качества любой технической системы является *надёжность*, определяемая как возможность выполнять заданные функции в течение требуемого интервала времени и при определенных условиях эксплуатации.

С другой стороны, *надёжность* – физическое свойство ОЭПиС, зависящее от принципа действия, схемы его построения, параметров составляющих элементов и их количества, внешних влияющих факторов и вероятностных характеристик их проявления. По этой причине при проектировании ОЭПиС надёжность может быть описана определенными числовыми параметрами и функциональными характеристиками, определяемыми как детерминированными, так и стохастическими математическими зависимостями. Поскольку как внутренние, так и внешние процессы, приводящие к выходу из строя отдельных оптоэлектронных элементов в целом, имеют случайную природу и описываются вероятностными характеристиками, для анализа надёжности используются статистические (стохастические) математические и алгоритмические компьютерные модели.

Настоящее пособие предназначено для магистрантов, обучающихся по

направлению подготовки 12.04.02 «Оптехника» по программе магистратуры «Прикладная оптика» (дисциплина «Системное проектирование оптоэлектронных приборов и систем).

В пособии кратко рассмотрены принципы построения и методики алгоритмизации статистических моделей оптоэлектронных систем при возникновении ситуаций отказа и восстановления работоспособности. Особое внимание уделяется изучению методик определения основных параметров и характеристик надёжности по результатам экспериментов с моделью. При выполнении лабораторных работ обучающиеся на практике осваивают эти методики моделирования, пакет прикладных программ Matlab.

Практические методики построения статистических моделей и экспериментального исследования параметров надёжности рассматриваются в четырёх лабораторных работах:

1. Статистическое моделирование отказовых ситуаций при определении параметров надёжности невосстанавливаемых приборов и систем
2. Статистическое моделирование отказовых ситуаций при определении параметров надёжности систем с топологически сложным соединением элементов
3. Статистическое моделирование ситуаций отказ/восстановление при определении параметров надёжности восстанавливаемых приборов и элементов (с мгновенным восстановлением)
4. Статистическое моделирование ситуаций отказ/восстановление при определении параметров надёжности восстанавливаемых приборов и элементов (с немгновенным восстановлением)

Объём каждой лабораторной работы – 4 часа. При этом 1 час отводится на изучение основных теоретических положений, 2 часа – алгоритмизацию статистической модели оптоэлектронной системы, написание и отладку программы её реализации и 1 час на анализ и обработку результатов измерений. Оформление отчёта предполагается за время, отведённое на самостоятельную работу.

В пособии по всем четырём лабораторным работам приводится схема (по надёжности) исследуемой системы, указана цель исследований, задачи, которые необходимо решить в результате, подробно указаны практические шаги выполнения методики исследований, а также приводятся контрольные вопросы для самопроверки.

Контроль знаний предполагает оформление студентом отчета в соответствии с требованиями, изложенными в соответствующем разделе пособия, а также его защиту преподавателю, включающую развернутые ответы на вопросы для самопроверки. Целью защиты является контроль приобретенных студентом компетенций, предусмотренных направлениями подготовки и формируемых в рамках осваиваемой дисциплины (модуля), включая уровень достижения студентом конкретных результатов обучения (умений, навыков). При необходимости в ходе подготовки к защите отчета студенту может потребоваться изучение литературы, рекомендованной преподавателем.

1 Теоретические модели для расчета параметров и характеристик надежности

1.1 Характеристики и параметры надежности невосстанавливаемых элементов и приборов

Под невосстанавливаемыми понимаются приборы и элементы, использование которых прекращается после отказа. Ремонту, восстановлению функционирования такие объекты не подлежат по техническим или экономическим причинам.

Пусть испытывается группа в составе N_0 одинаковых элементов с порядковыми номерами $i = 1 \dots N_0$ (Рисунок. 1.1). В зависимости от масштаба рассмотрения под элементом могут пониматься: оптико-электронный прибор, являющийся частью более сложной системы, отдельный узел или блок самого оптико-электронного прибора, непосредственно электронный или оптический элемент в составе узла или блока. Для определенности далее речь пойдет об элементе в составе узла или блока, однако проведенное рассмотрение справедливо и для прибора в целом как элемента уже более сложной системы [1,2].

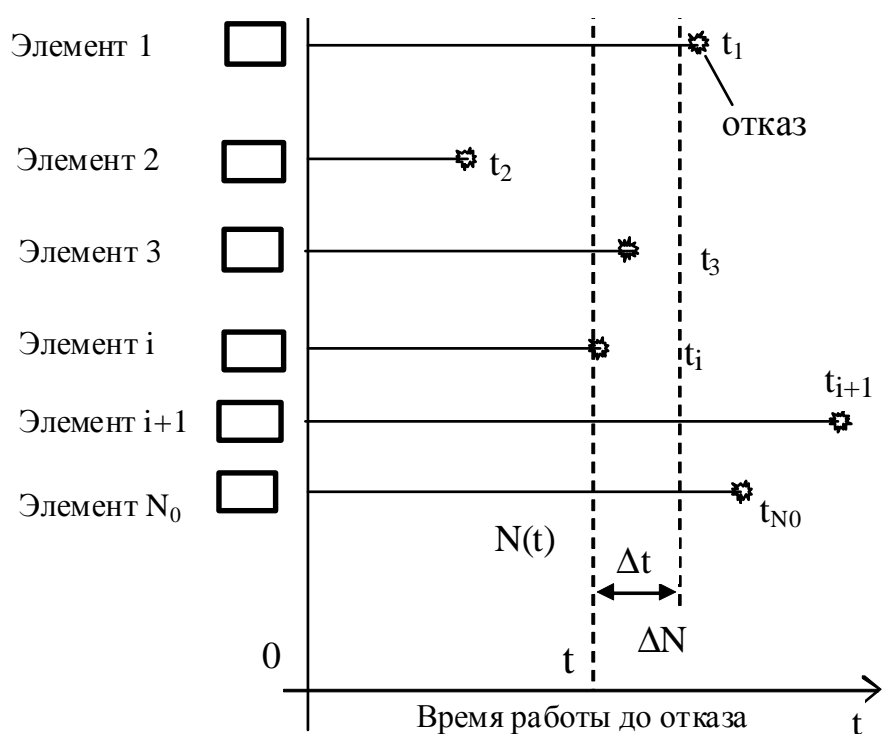


Рисунок 1.1 – Диаграмма отказов при расчете параметров надежности

В процессе испытаний элементы отказывают, проработав время t_i , где i – порядковый номер элемента. При достаточно большом количестве N_0 время работы t элементов до отказа можно рассматривать как некоторую случайную величину t , принимающую значения t_i и характеризующую надежность этого прибора. Тогда, используя вероятностные характеристики случайной величины t , можно определять параметры, характеризующие надежность

рассматриваемого элемента.

Пусть плотность вероятности времени работы t элемента до отказа описывается некоторой функцией $f(t)$. Примем также гипотезу о независимости отказов различных элементов.

Тогда вероятность отказа $S(t)$ элемента за период времени $0...t$ определится интегралом:

$$S(t) = \int_0^t f(\tilde{t}) d\tilde{t} . \quad (1.1)$$

По результатам эксперимента приближенное значение функции $S(t)$ определится как

$$S(t) \approx \frac{n(t)}{N_0} , \quad (1.2)$$

где $n(t)$ – количество элементов, отказавших за интервал времени $0...t$. Очевидно, что с увеличением количества N_0 рассматриваемых элементов значение $S(t)$, полученное по выражению (1.2), будет приближаться к результату по выражению (1.1).

Поскольку для невозстанавливаемых элементов в каждый момент времени возможны только два состояния: нормальное функционирование и отказ, они образуют группу из несовместных независимых событий, и сумма их вероятностей всегда равна 1:

$$P(t) + S(t) = 1 . \quad (1.3)$$

Соответственно, вероятность безотказной работы $P(t)$ элемента в течение времени t определится как

$$P(t) = 1 - S(t) = \int_t^{\infty} f(\tilde{t}) d\tilde{t} . \quad (1.4)$$

Соответственно, исходя из результатов эксперимента, приближенное значение функции $P(t)$ определится как

$$P(t) \approx \frac{N(t)}{N_0} , \quad (1.5)$$

где $N(t) = N_0 - n(t)$ есть количество элементов из общего количества N_0 , еще работающих на момент времени t – см. рис. 1.1.

Среднее время работы элемента (средняя наработка на отказ) t_{cp} находится как математическое ожидание величины t из выражения:

$$t_{cp} = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} P(t) dt . \quad (1.6)$$

При испытаниях значение времени t_{cp} находится после отказа всех элементов как усреднение величин t_i :

$$t_{cp} \approx \frac{\sum_{i=1}^{N_0} t_i}{N_0} , \quad (1.7)$$

где t_i – время работы i -го элемента до отказа.

Важной характеристикой надежности является интенсивность отказов. Интенсивностью отказов $\lambda(t)$ называют вероятность отказа элемента в единичный отрезок времени после данного момента t времени при условии, что до данного момента времени отказа не произошло. Следовательно, интенсивность отказов $\lambda(t)$ является условной плотностью вероятности работы систем в течение времени t .

Интенсивность отказов $\lambda(t)$ выражается через вероятность безотказной работы $P(t)$ и плотность вероятности $f(t)$ времени работы до отказа:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}. \quad (1.8)$$

Экспериментальное значение интенсивности отказов $\lambda(t)$ в момент времени t находится по следующей методике (см. рис. 1.1).

1. Выбирается требуемый момент времени t . Пусть на этот момент времени еще работает $N(t)$ элементов из общего количества N_0 .

2. От момента времени t отсчитывается малый по сравнению с t интервал времени Δt . Определяется количество элементов $N(\Delta t)$, вышедших из строя за интервал времени Δt .

3. Определяется искомое значение интенсивности отказов как

$$\lambda(t) = \frac{N(\Delta t)}{\Delta t \cdot N(t)}. \quad (1.9)$$

Аналогичным образом по результатам рассматриваемого эксперимента может быть определена частота отказов $F_0(t)$, численно равная величине плотности вероятности $f(t)$ времени работы элемента до отказа в момент времени t :

$$F_0(t) = \frac{N(\Delta t)}{\Delta t \cdot N_0}, \quad (1.10)$$

где N_0 – общее количество испытуемых элементов.

Вероятность $P(t)$ безотказной работы непосредственно определяется интенсивностью отказов $\lambda(t)$. Действительно, после дифференцирования по переменной t как левой, так и правой частей выражения (1.4) для $P(t)$ получим:

$$dP = -f(t) \cdot dt \quad (1.11)$$

Выразив из него $f(t)$ и подставив в (1.8), получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка первого рода относительно $P(t)$, стандартное решение которого определяет искомую зависимость [3]:

$$P(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tilde{t}) d\tilde{t}\right), \quad (1.12)$$

где “exp” означает экспоненциальную функцию. Приведённые функциональные зависимости позволяют оценить надёжность технических систем в большинстве практических случаев.

1.2 Параметры и характеристики надёжности при экспоненциальном законе распределения времени работы до отказа

Теоретический анализ надёжности и результаты испытания многих компонентов опико-электронных приборов – оптических элементов, свето – и фотодиодов, матричных фотоприёмников, микропроцессоров, микросхем, резисторов, конденсаторов и прочих составляющих элементной базы – показал, что при эксплуатации их функция интенсивности отказов $\lambda(t)$ имеет характерный вид, включающий три участка – см. рис. 1.2.

В соответствии с рисунком 1.2, при использовании прибора (или элемента) на начальном этапе I (приработки) в интервале от 0 до t_1 интенсивность отказов уменьшается, затем, на этапе II нормального функционирования от t_1 до t_2 остается практически постоянной и, наконец, на этапе износа III от t_2 до момента t_3 отказа по причине старения и выработки ресурса элемента интенсивность отказов возрастает.

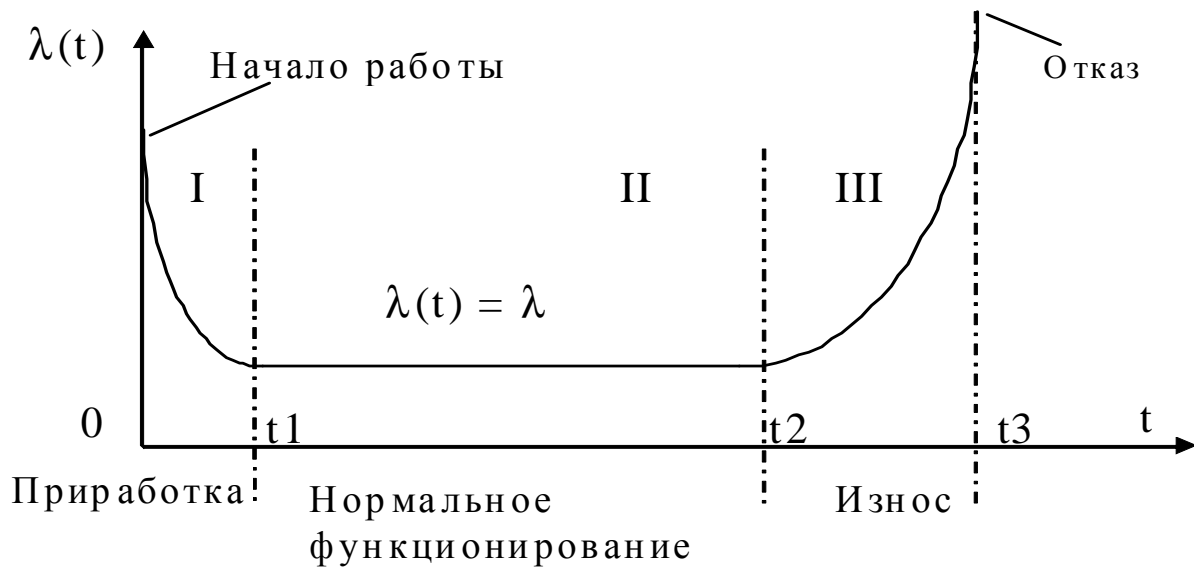


Рисунок 1.2 – Типовая зависимость интенсивности отказов от времени большинства элементов оптоэлектроники

Продолжительность этапа $t_2 - t_1$ нормального функционирования в зависимости от конкретного типа элемента составляет не менее 60...80% от общего времени t_3 эксплуатации. При этом интенсивность отказов определяется как функция с постоянным значением при изменяющихся значениях аргумента (времени):

$$\lambda(t) = \lambda = Const \quad (1.13)$$

Вероятность безотказной работы $P(t)$ элемента в течение времени t при экспоненциальном законе определяется по выражению (1.12) при подстановке интенсивности отказов $\lambda(t)$, определяемой выражением (1.13):

$$P(t) = \exp(-\lambda \cdot t). \quad (1.14)$$

Соответственно среднее время работы элемента t_{cp} находится из выражения (1.6) при подстановке вероятности безотказной работы $P(t)$ по

выражению (1.14)) – см. табличный интеграл от экспоненциальной функции [3]:

$$tcp = \frac{1}{\lambda}. \quad (1.15)$$

Время t работы до отказа, рассматриваемая как случайная величина имеет при этом так называемое «экспоненциальное» распределение с плотностью вероятности $f(t)$, определяемой из выражения (1.8) при подстановке в него выражения (1.14) для вероятности безотказной работы $P(t)$ и интенсивности отказов $\lambda(t)$, определяемой выражением (1.13) [1,2]:

$$f(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot t), \quad (1.16)$$

где λ – интенсивность отказов в соответствии с выражением (1.16).

Использование выражений (1.13)...(1.15) для параметров надёжности при экспоненциальном законе значительно упрощает расчеты и снижает трудоёмкость компьютерного моделирования отказовых ситуаций.

1.3 Определение параметров и характеристик надёжности системы при последовательном соединении её элементов

Пусть объектом испытаний является система из нескольких приборов или отдельный прибор, рассматриваемый как совокупность компонентов. В зависимости от характера влияния отказа отдельного элемента на время работы системы различают последовательное, параллельное и смешанное соединение элементов.

Важнейшим признаком последовательного соединения элементов с точки зрения обеспечения надёжности является жёсткая связь между двумя событиями, а именно: отказ любого элемента системы приводит к отказу всей системы. При этом элементы полагаются невозстанавливаемыми.

Рассмотрим систему из N последовательно соединённых неодинаковых элементов. (см. рис. 1.3). В соответствии с изложенным выше признаком последовательного соединения отказ любого i - того из них приводит к отказу всей системы.

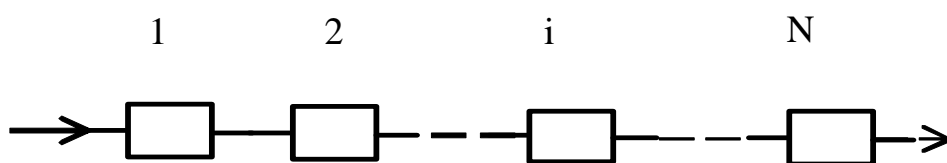


Рисунок 1.3 – Последовательное соединение элементов

Если рассматривать время работы каждого элемента системы до его отказа как элемент некоторого массива t_i (где $i = 1...N$), то для однократного эксперимента время работы всей системы при последовательном соединении определится как

$$t_{line} = \min \{t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_N\}. \quad (1.17)$$

При взаимно-независимых отказах элементов вероятность $P_{line}(t)$

безотказной работы всей системы может быть найдена как вероятность реализации события, включающего группу из N независимых событий [3]:

$$P_{line}(t) = P_1(t) \cdot P_2(t) \cdot \dots \cdot P_i(t) \cdot \dots \cdot P_N(t), \quad (1.18)$$

где $P_i(t)$ – вероятность безотказной работы в течение времени t элемента с номером i ($i=1 \dots N$).

Для определения интенсивности отказов всей системы $\lambda_{line}(t)$ заменим в выражении (1.18) выражения для вероятности безотказной работы $P(t)$ экспоненциальными функциями от интенсивности отказов $\lambda(t)$ по выражению (1.12):

$$\exp\left(-\int_0^{\infty} \lambda_{line}(t) dt\right) = \prod_{i=1}^N \left(\exp\left(-\int_0^{\infty} \lambda_i(t) dt\right)\right). \quad (1.19)$$

Поскольку показатели экспонент при перемножении суммируются, то, используя свойство линейности операции интегрирования при одинаковых пределах изменения переменной интегрирования, интенсивность отказов $\lambda_{line}(t)$ можно определить выражением:

$$\lambda_{line}(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \dots + \lambda_i(t) + \dots + \lambda_N(t), \quad (1.20)$$

где $\lambda_i(t)$ – интенсивность отказов элемента с номером i .

При экспоненциальном распределении времени t работы до отказа функция $\lambda_{line}(t)$ согласно (1.13) определяется как сумма постоянных по величине интенсивностей отказа отдельных элементов:

$$\lambda_{line} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i + \dots + \lambda_N \quad (1.21)$$

Поскольку в этом случае λ_{line} также постоянная величина, распределение времени работы до отказа t всей системы также подчиняется экспоненциальному закону. Соответственно верно и обратное утверждение – если хотя бы один элемент не экспоненциален, время работы до отказа всей системы уже не подчиняется экспоненциальному закону.

Согласно выражениям (1.15) и (1.21), среднее время tcp_{line} безотказной работы системы при экспоненциальном законе надёжности определяется из выражения:

$$\frac{1}{tcp_{line}} = \frac{1}{tcp_1} + \frac{1}{tcp_2} + \dots + \frac{1}{tcp_i} + \dots + \frac{1}{tcp_N}, \quad (1.22)$$

где tcp_i – среднее время безотказной работы элемента с номером i ($i=1 \dots N$)
Если в системе использованы элементы с приблизительно одинаковой интенсивностью отказов, выражение (1.21) принимает вид:

$$\lambda_{line} \approx N \cdot \lambda_1 \quad (1.23)$$

где λ_1 – интенсивность отказов одного из элементов.

Из выражений (1.15) и (1.23) следует, что при этих условиях среднее время безотказной работы системы определяется выражением:

$$tcp_{line} = \frac{tcp_1}{N}, \quad (1.24)$$

где tcp_1 – среднее время безотказной работы одного из элементов системы

(например, с номером 1).

Из выражения (1.24) можно сделать общий вывод о том, что при последовательном соединении среднее время безотказной работы системы всегда меньше среднего времени безотказной работы любого её элемента, т.е. последовательное соединение элементов приводит к ухудшению параметров надёжности технической системы.

1.4 Определение параметров и характеристик надёжности системы при параллельном соединении элементов

При параллельном соединении N элементов (см. рис.1.4) при отказе любого из них функционирование системы будет обеспечиваться другими, ещё работающими.

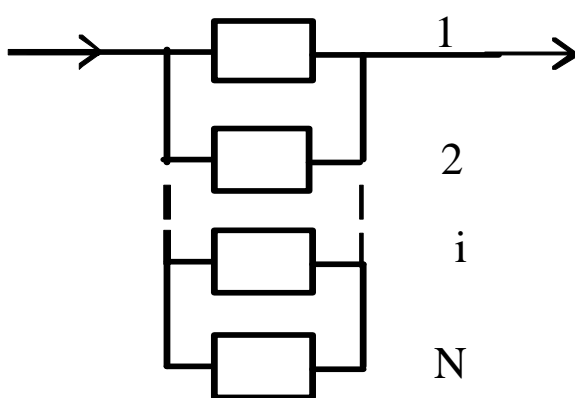


Рисунок 1.4 – Параллельное соединение элементов

Таким образом, отказ системы произойдет только после отказа последнего работающего элемента.

Если рассматривать время работы каждого элемента системы до его отказа как элемент некоторого массива t_i (где $i = 1...N$), то время работы всей системы для однократного эксперимента при параллельном соединении будет равно наибольшему времени работы из всех элементов:

$$t_{col} = \max \{t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_N\}. \quad (1.25)$$

При взаимно-независимых отказах элементов вероятность $S_{col}(t)$ отказа всей системы за время t может быть найдена как вероятность реализации события, включающего группу из N независимых событий – отказов всех элементов [3]:

$$S_{col}(t) = S_1(t) \cdot S_2(t) \cdot \dots \cdot S_i(t) \cdot \dots \cdot S_N(t) = \prod_{i=1}^N S_i(t) \quad (1.26)$$

где $S_i(t)$ – вероятность отказа за время t элемента с номером i ($i = 1...N$).

Выражение (1.26) может быть записано через функцию $P(t)$ вероятности безотказной работы с учётом её связи с $S(t)$ по выражению (1.3):

$$P_{col}(t) = 1 - S_{col}(t) = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - P_i(t)) \quad (1.27)$$

где $P_i(t)$ – вероятность безотказной работы в течение времени t элемента с номером i ($i=1...N$).

При экспоненциальном распределении времени t работы до отказа каждого элемента в системе функция $P_i(t)$ определяется выражением (1.14), которое при определённых условиях может быть аппроксимировано линейной зависимостью:

$$P(t) = \exp(-\lambda \cdot t) \approx 1 - \lambda \cdot t; \quad \lambda \cdot t \ll 1 \quad (1.28)$$

Погрешность такой аппроксимации не превышает 10% при $\lambda \cdot t < 0,3$.

В результате выражение (1.27) преобразуется к виду:

$$P_{col}(t) \approx 1 - t^N \prod_{i=1}^N \lambda_i \quad (1.29)$$

Если вероятность $P_{col}(t)$ всей системы выразить через общую интенсивность отказов λ_{col} по выражению (1.12), то после логарифмирования по основанию e и дифференцированию по переменной t как левой, так и правой частей выражения можно получить:

$$\lambda_{col}(t) \approx \frac{N \cdot \prod_{i=1}^N \lambda_i \cdot t^{N-1}}{1 - t^N \prod_{i=1}^N \lambda_i} \quad (1.30)$$

Из выражения (1.30) следует, что интенсивность отказов $\lambda_{col}(t)$ при любых условиях является функцией времени t и не соответствует зависимости (1.13). Следовательно, функция плотности вероятности времени работы до отказа технической системы из параллельно соединённых элементов не является экспоненциальной, даже если каждый элемент системы экспоненциален в смысле параметров его надёжности.

Среднее время безотказной работы tcp_{col} определяется из выражения (1.6) при подстановке функции вероятности безотказной работы $P_{col}(t)$, задаваемой выражением (1.27).

В частности, для системы из двух параллельно подключённых элементов 1 и 2 при экспоненциальном законе надёжности каждого из них этот расчёт даёт следующий результат:

$$tcp_{col} = tcp_1 + tcp_2 - \frac{tcp_1 \cdot tcp_2}{tcp_1 + tcp_2} \quad (1.31)$$

где tcp_1 , tcp_2 – среднее время безотказной работы элементов 1 и 2, соответственно. Например, для значений $tcp_1 = 2000$ час и $tcp_2 = 3000$ час из выражения (1.31) получаем $tcp_{col} = 3800$ час.

При трёх параллельно включённых элементах из выражения (1.6) определяется следующая зависимость при экспоненциальном законе надёжности каждого из них:

$$tcp_{col} = tcp_1 + tcp_2 + tcp_3 - a_1 - a_2 - a_3 + b, \quad (1.32)$$

где слагаемые a_1 , a_2 , a_3 , b задаются выражениями:

$$a_1 = \frac{tcp_1 \cdot tcp_2}{tcp_1 + tcp_2} \quad (1.33)$$

$$a_2 = \frac{tcp_2 \cdot tcp_3}{tcp_2 + tcp_3} \quad (1.34)$$

$$a_3 = \frac{tcp_1 \cdot tcp_3}{tcp_1 + tcp_3} \quad (1.35)$$

$$b = \frac{tcp_1 \cdot tcp_2 \cdot tcp_3}{tcp_1 \cdot tcp_2 + tcp_2 \cdot tcp_3 + tcp_1 \cdot tcp_3} \quad (1.36)$$

Расчёт для значений $tcp_1 = 2000$ час, $tcp_2 = 3000$ час, $tcp_3 = 4000$ час по выражению ((1.32) приблизительно даёт величину $tcp_{col} = 5357$ час.

Результаты расчётов позволяют сделать общий вывод: при параллельном включении элементов надёжность системы увеличивается, в частности, среднее время работы системы превышает среднее время работы любого её элемента.

1.5 Расчёт характеристик надёжности технической системы при наличии резервированных элементов

В случае, если в приборе имеется элемент (или несколько элементов) с недостаточно высокими параметрами надёжности, или при необходимости повышения надёжности всего прибора в целом эффективно использование резервирования. Резервирование заключается в параллельном подключении к ненадёжному элементу аналогичных ему резервных. В результате полученный модуль резерва прекратит функционирование только после отказа как основного элемента, так и всех резервных.

Например, к ненадёжному элементу 3 присоединяется m точно таких же, образуя модуль резерва (см. рисунок 1.5). В соответствии со свойствами параллельного соединения среднее время и вероятность безотказной работы увеличиваются как для модуля резерва, так и для всего прибора.

Общее количество элементов n в блоке резерва равно:

$$n = m + 1 \quad (1.37)$$

где m – количество дополнительно параллельно присоединённых элементов.

Одним из параметров, описывающих структуру сформированного блока резерва, является кратность резервирования, определяемая как отношение количества резервных элементов к количеству резервируемых (основных). Очевидно, что для блока резерва на рисунке (1.5) кратность резервирования равна:

$$\frac{m}{1} = m \quad (1.38)$$

Для систем, в которых в блоке резерва количество резервируемых элементов меньше количества резервных кратность резервирования является нецелой величиной.

Резервирование является одним из основных схемных методов повышения надёжности отдельных элементов, групп элементов и прибора в

целом.

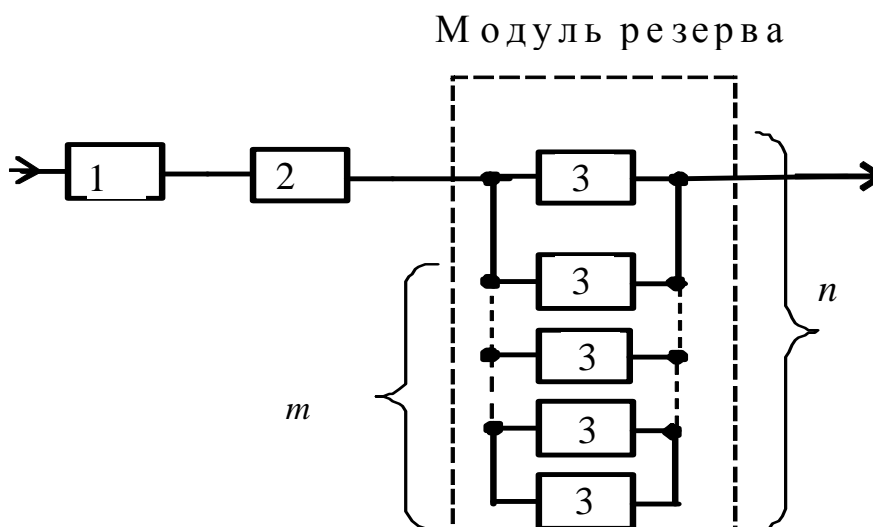


Рисунок 1.5 – Схема прибора с резервированием элемента 3 постоянно включённым резервом

По способу включения различают *постоянно включённый резерв* и *резерв по методу замещения* (резервирование замещением).

При постоянно включённом резерве резервные элементы подключены в течение всего времени работы и находятся в одинаковом режиме с резервируемым (основным) элементом. Модуль резерва на рисунке 1.5 использует постоянно включённый резерв.

При использовании метода замещения резервные элементы до отказа резервируемого находятся в нерабочем состоянии. При отказе резервируемого элемента специальным устройством подключается первый резервный элемент, при его отказе – второй резервный, и так далее – до отказа последнего элемента модуля резерва – рисунок 1.6.

Теоретически резервирование по методу замещения обеспечивает большую надёжность по сравнению со способом постоянного резервирования, однако на практике используется реже, поскольку приводит к значительному усложнению прибора из-за необходимости использования трёх дополнительных подсистем:

- для диагностики отказа работающего элемента резерва;
- отключения отказавшего элемента;
- подключения следующего резервирующего элемента.

При этом каждая из дополнительных систем должна быть не менее надёжной, чем сам модуль резерва.

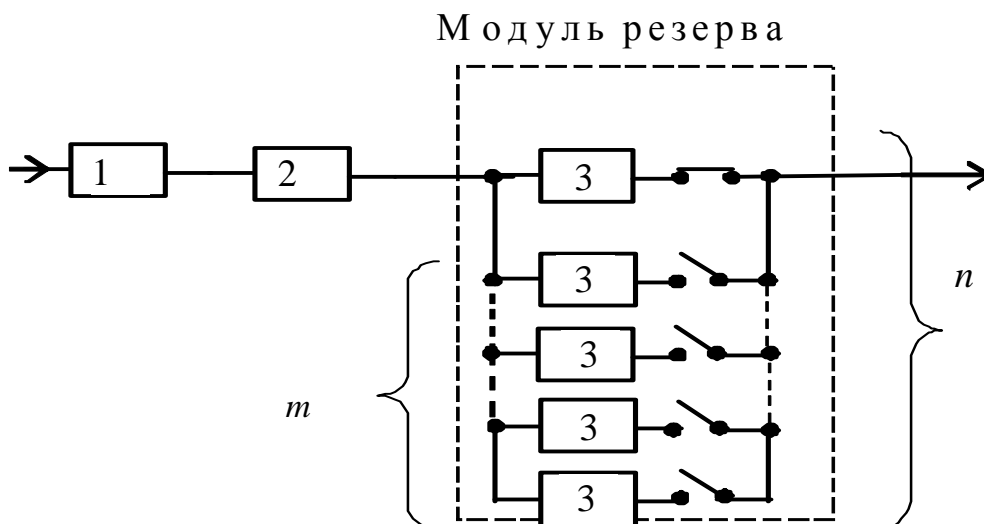


Рисунок 1.6 – Схема прибора с резервированием элемента 3 по методу замещения

Параметры надёжности для модуля резерва при постоянном включении резервируемых элементов могут быть получены из выражений для параллельного соединения – см. раздел 1.4 [1,2]. Поскольку элементы, составляющие модуль резерва одинаковы, операцию произведения можно заменить на возведение в степень, а суммирование – умножением на некоторый коэффициент. Таким образом, по выражению (1.27) вероятность $P_{resc}(t)$ безотказной работы модуля резерва в течение времени t при постоянном включении элементов определяется как

$$P_{resc}(t) = 1 - (1 - P_1(t))^n, \quad (1.39)$$

где $P_1(t)$ – вероятность безотказной работы одного элемента, n – количество элементов в модуле резерва.

При экспоненциальном распределении времени t работы до отказа элементов функция $P_1(t)$ определяется выражением (1.14). Тогда вероятность безотказной работы модуля резерва определится выражением:

$$P_{resc}(t) = 1 - [1 - \exp(-\lambda \cdot t)]^n, \quad (1.40)$$

где λ_1 – интенсивность отказов элемента модуля резерва.

При аппроксимации экспоненциальной функции по выражению (1.28), из (1.29) получаем приближённое выражение:

$$P_{resc}(t) \approx 1 - \lambda_1^n t^n, \quad (1.41)$$

При условии $\lambda \cdot t < 0,05$ и $n < 5$ погрешность аппроксимации не превосходит 10%.

Среднее время безотказной работы в случае, если время t работы до отказа элементов модуля резерва имеет экспоненциальное распределение, определяется из выражений (1.31) для $n = 2$ и (1.32) $n = 3$:

$$tcp_{resc2} = tcp_1 + \frac{1}{2} \cdot tcp_1, \quad ,(1.42)$$

$$tcp_{resc3} = tcp_1 + \frac{1}{2} \cdot tcp_1 + \frac{1}{3} \cdot tcp_1, \quad ,(1.43)$$

где tcp_1 – среднее время безотказной работы одного элемента модуля резерва.

Выполняя подобные расчёты для других значений n можно показать, что в общем случае среднее время безотказной работы определяется выражением:

$$tcp_{resc} = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i} = tcp_1 \sum_{i=0}^n \frac{1}{i}, \quad ,(1.44)$$

где λ_1 и tcp_1 - интенсивность отказов и среднее время безотказной работы одного элемента, n – количество элементов в модуле резерва.

При резервировании методом замещения и экспоненциальном законе надежности аналогичные выражения имеют вид [1]:

$$P_{resr}(t) = e^{-\lambda_1 t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda_1 t)^i}{i!}, \quad ,(1.45)$$

$$tcp_{resr} = tcp_1 \cdot n, \quad ,(1.46)$$

где λ_1 , tcp_1 - интенсивность отказов и среднее время безотказной работы элемента, n – количество элементов в схеме резерва (включая основной элемент).

При условии $\lambda \cdot t < 0,12$ и $n < 5$ выражение (1.45) может быть упрощено с погрешностью аппроксимации не более 10%:

$$P_{resr}(t) \approx 1 - \frac{\lambda^n \cdot t^n}{n!}. \quad ,(1.47)$$

Для соотношения $\lambda \cdot t < 0,22$ погрешность аппроксимации не превосходит 20%.

На рисунках 1.5,1.6 приведён пример часто встречающегося варианта резервирования наиболее «слабого» элемента прибора.

При необходимости резервирования всего прибора или блока возможны два варианта: общее резервирование, при котором резервируется целиком весь прибор или блок (см. пример на рис. 1.7), и отдельное – элементы прибора или блока резервируются по отдельности (пример на рис. 1.8).

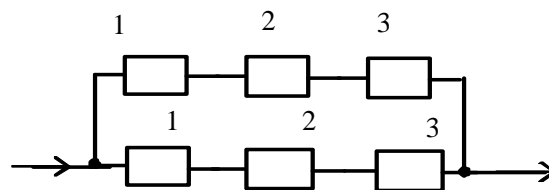


Рисунок 1.7 – . Схема общего резервирования (дублирование)

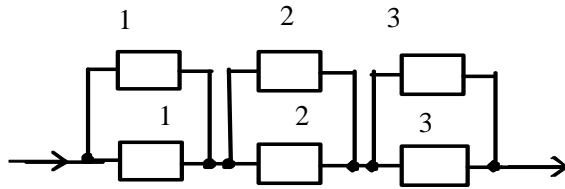


Рисунок 1.8 – . Схема раздельного резервирования (дублирование)

Применяя выражения, ранее полученные для схем с последовательным и параллельным соединением, для изображенной на рисунке 1.7 схемы можно получить:

$$P_f(t) = 1 - (1 - \prod_{i=1}^3 P_i(t))^2, \quad (1.48)$$

где $P_f(t)$ – вероятность безотказной работы системы в течение времени t , $P_i(t)$ – вероятность безотказной работы i -го элемента ($i=1..3$).

Соответственно, для схемы раздельного резервирования по рисунку 1.8 вероятность $P_s(t)$ безотказной работы составит:

$$P_s(t) = \prod_{i=1}^3 (1 - (1 - P_i(t))^2), \quad (1.49)$$

При проектировании технической системы важно определить, какая из этих двух схем резервирования обеспечивает большее увеличение вероятности безотказной работы. Если предположить, что надёжность элементов в приборе приблизительно одинакова и $P_1(t) \approx P_2(t) \approx P_3(t)$, то отношение вероятности безотказной работы по двум рассматриваемым вариантам равно:

$$K = \frac{P_s(t)}{P_f(t)} = \frac{(1 - (1 - P_1(t))^2)^3}{1 - (1 - (P_1(t))^3)^2} = \frac{(2 - P_1(t))^3}{2 - (P_1(t))^3}, \quad (1.50)$$

Из выражения (1.50) следует, что при $P_1(t) \rightarrow 0$, $K \rightarrow 4$ и при $P_1(t) \rightarrow 1$, $K \rightarrow 1$. Следовательно, $P_s(t) > P_f(t)$, и поэлементное резервирование обеспечивает большую надёжность по сравнению со схемой общего резерва. Этот результат распространяется и на иное количество резервных и резервируемых элементов.

Однако на практике чаще используется общее резервирование, поскольку поэлементный резерв, во-первых, приводит к значительному усложнению общей схемы прибора и, во-вторых, он не может быть применён в ситуации, когда прибор уже спроектирован, но возникла необходимость увеличения его надёжности.

1.6 Расчёт характеристик надёжности при смешанном соединении элементов

В случае, если прибор имеет сложную схему (с точки зрения надёжности) её можно представить в виде групп из последовательно или параллельно соединённых элементов, каждая из которых может рассматриваться как эквивалентный единый компонент с некоторым средним

временем работы до отказа $t_{cp_{line}}$ или $t_{cp_{col}}$ и вероятностью безотказной работы $P_{line}(t)$ и $P_{col}(t)$. На следующем этапе уже эти эквивалентные компоненты объединяются в группы и анализируются как новые эквивалентные элементы [2].

Рассмотрим пример расчета параметров надёжности прибора, схема которого представлена на рисунке 1.9. Пусть для каждого элемента известна его вероятность $P_i(t)$ где $i = 1 \dots 11$ безотказной работы в течение времени t .

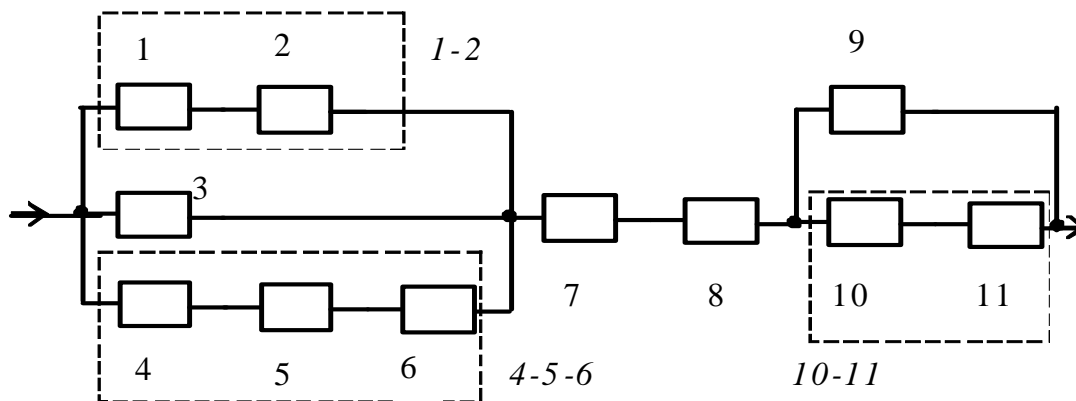


Рисунок 1.9 – Исходная схема соединения элементов прибора

Действуя по указанной методике, объединим в первой группе элементы 1 и 2, во второй группе элементы 4,5,6 и в третьей группе элементы 10 и 11. Используя выражение (1.18) для последовательного соединения, вероятность безотказной работы по каждой из групп определяется как

$$P_{1-2}(t) = P_1(t) \cdot P_2(t), \quad (1.51)$$

$$P_{4-5-6}(t) = P_4(t) \cdot P_5(t) \cdot P_6(t), \quad (1.52)$$

$$P_{10-11}(t) = P_{10}(t) \cdot P_{11}(t). \quad (1.53)$$

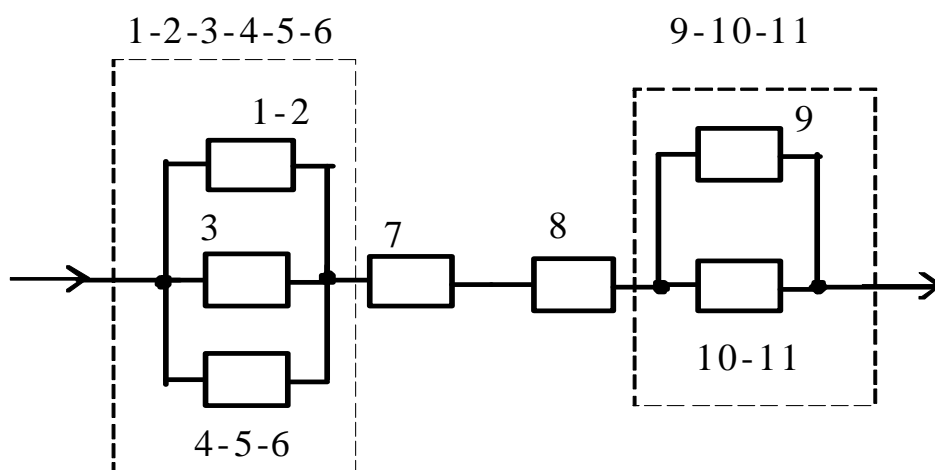


Рисунок 1.10 – Эквивалентная схема после первого этапа расчёта

В результате получаем новую схему, в которой элементы имеют найденные значения вероятности безотказной работы – рисунок 1.10.

Далее формируются новые группы: $[(1-2)-3-(4-5-6)]$ и $[9-(10-11)]$ для

которых по выражениям (1.27) для параллельного соединения получаем выражения:

$$P_{1-2-3-4-5-6}(t) = 1 - (1 - P_{1-2}(t)) \cdot (1 - P_3(t)) \cdot (1 - P_{4-5-6}(t)) \quad (1.54)$$

$$P_{9-10-11}(t) = 1 - (1 - P_9(t)) \cdot (1 - P_{10-11}(t)) \quad (1.55)$$

В результате формируется эквивалентная схема, изображённая на рисунке 1.11.

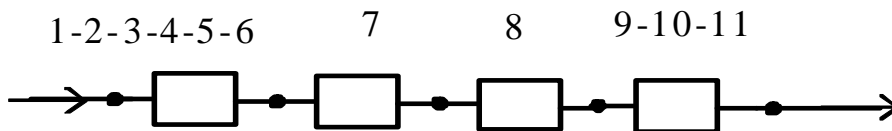


Рисунок 1.11 – Эквивалентная схема после второго этапа расчёта

И на третьем этапе определяется итоговая вероятность безотказной работы рассматриваемой системы:

$$P_{\Sigma}(t) = P_{1-2-3-4-5-6}(t) \cdot P_7(t) \cdot P_8(t) \cdot P_{9-10-11}(t) \quad (1.56)$$

Далее по выражению (1.6) можно определить среднее время безотказной работы tcp_{Σ} системы.

По рассмотренной методике может быть рассчитаны параметры надёжности достаточно сложных приборных систем.

В часто встречающемся практическом варианте схема прибора представляет собой последовательное соединение нескольких элементов с блоком резерва, обеспечивающим требуемые параметры надёжности выявленного «слабого» элемента – рисунок 1.12.

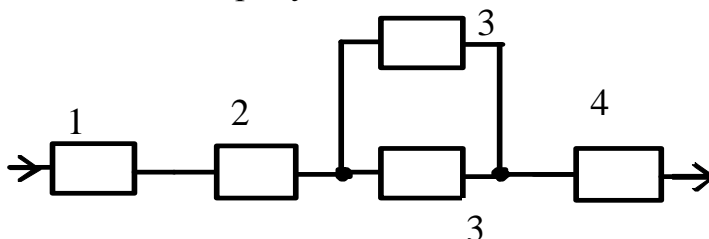


Рисунок 1.12 – Последовательное соединение с дублированием одного элемента

В этом случае можно рассматривать две группы элементов – 1-2-4 с последовательным соединением и элемент 3 с его резервом 3-3. Для этого случая по выражению (1.52) определяется вероятность $P_{124}(t)$ безотказной работы эквивалентного элемента 1-2-4, образованного первой группой. По выражению ((1.55) вычисляется соответствующая вероятность $P_{33}(t)$ для блока резерва. Значение вероятности безотказной работы находится как произведение вероятностей $P_{124}(t)$ и $P_{33}(t)$.

Определим среднее время безотказной работы tcp_{Σ} по выражению (1.6) в случае, если плотность вероятности времени работы до отказа подчиняется экспоненциальному закону. Функции $P(t)$ вероятности безотказной работы при экспоненциальном законе определяются формулой (1.14). При их подстановке выражения для $P_{124}(t)$ и $P_{33}(t)$ получаем следующее выражение:

$$tcp_{\Sigma} = \frac{2}{\lambda_{124} + \lambda_3} - \frac{1}{\lambda_{124} + 2 \cdot \lambda_3} = \frac{2 \cdot tcp_{124} \cdot tcp_3}{tcp_{124} + tcp_3} - \frac{tcp_{124} \cdot tcp_3}{tcp_3 + 2 \cdot tcp_{124}} \quad (1.57)$$

где λ_{124} , λ_3 – интенсивность отказов элементов; tcp_{124} , tcp_3 – среднее время безотказной работы элементов.

1.7 Расчет надежности приборных комплексов со структурой сложной топологии

Во многих практических задачах при расчёте параметров надежности приборный комплекс не может рассматриваться как структура из групп последовательно и параллельно соединённых элементов. В таких ситуациях структуру системы полагают топологически сложной. Пример системы со структурой сложной топологии приведён на рисунке 1.13.

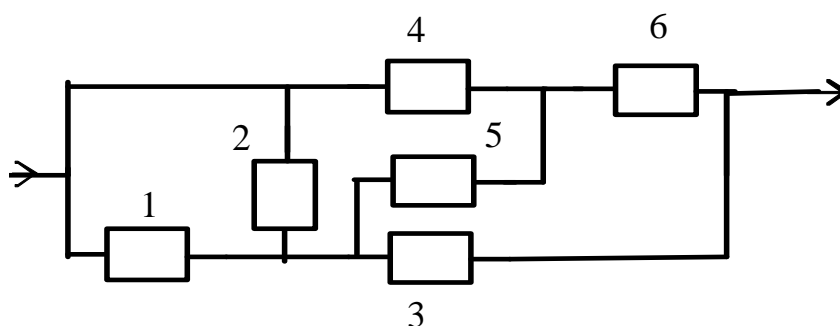


Рисунок 1.13 – Пример топологически сложного соединения элементов при анализе надежности

В конкретных технических приложениях примером комплекса со сложной топологической структурой является, например, охранная система на основе видеодатчиков, объединённых в несколько групп. При этом в некоторых группах угловые поля оптических систем пересекаются только между датчиками внутри группы, а у других групп имеются пересечения и с угловыми полями датчиков соседних групп.

Анализ надёжности систем со сложной топологией при использовании точных выражений приводит к трудоёмким математическим расчётам, поэтому в инженерной практике часто используются методы, основанные на применении аппроксимации.

Рассмотрим один из приближённых методов расчёта – так называемый метод «минимальных путей и минимальных сечений». Этот метод позволяет с определённым приближением представить схемы прибора в виде групп элементов с параллельным и последовательным соединением. В результате при расчёте параметров надёжности могут использоваться известные выражения для последовательного и параллельного соединений.

Один из объектов, рассматриваемых в этом методе – «минимальный путь», представляет собой некоторую группу элементов, при функционировании которой обеспечивается работа всей системы, даже если её другие элементы, не входящие в «минимальный путь», уже отказали. Путь

называется «минимальным», поскольку не может содержать в себе другую, более малую группу с таким же свойством. Таким образом, для работоспособности системы необходимо наличие минимум одного работоспособного пути.

Наряду с рассмотренным, «минимальному пути» присваивается и другое свойство - для его отказа достаточно отказа любого составляющего этот путь элемента.

Пусть в структуре системы выделено W минимальных путей. Каждый путь R_i с номером i (где $i = 1, \dots, W$) образован группой из w_i элементов. В соответствии с указанными свойствами минимальный путь R_i с номером i можно представить в виде группы последовательно соединённых w_j элементов с номером j (где $j = 1, \dots, w_i$).

Структура системы составлена из W минимальных путей, соединённых друг с другом параллельно.

В схеме по рисунку 1.13 можно выделить шесть минимальных путей ($W = 6$):

- R_1 с элементами 4-6, $w_1 = 2$;
- R_2 с элементами 1-3, $w_2 = 2$;
- R_3 с элементами 2-3, $w_3 = 2$;
- R_4 с элементами 1-5-6, $w_4 = 3$;
- R_5 с элементами 4-5-3, $w_5 = 3$;
- R_6 с элементами 2-5-6, $w_6 = 3$.

Группа в составе элементов 1,2,4 и 6 также образует путь, но он не учитывается в расчёте, поскольку содержит меньшую группу – путь R_1 с элементами 4-6 и, следовательно, не является минимальным.

Эквивалентная схема системы по «минимальным путям» имеет вид, изображённый на рисунке 1.14.

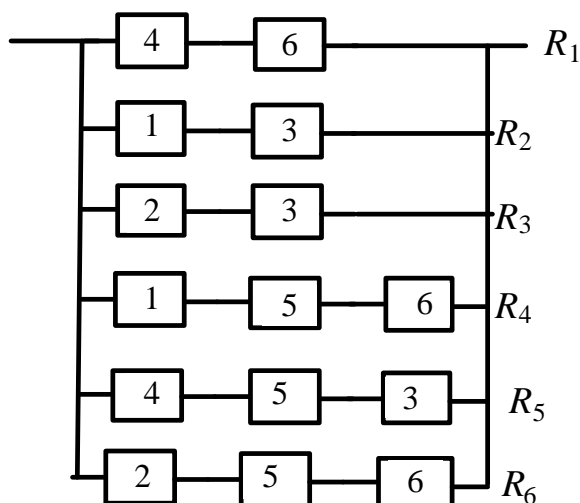


Рисунок 1.14 – Эквивалентная схема системы по минимальным путям

Вероятность безотказной работы системы на интервале времени от 0 до t определяется выражением, следующим из соотношения (1.27) для

параллельного соединения элементов, в котором вероятность $P_i(t)$ безотказной работы выражена по формуле (1.18) через произведение вероятностей элементов, расположенных на пути R_i :

$$P_w(t) = 1 - \prod_{i=1}^W (1 - \prod_{j=1}^{w_i} P_j(t)), \quad (1.58)$$

где $P_j(t)$ – вероятность безотказной работы j -го элемента на минимальном пути R_i , w_i – количество элементов на пути R_i .

Другим объектом, используемым в рассматриваемом методе, является «минимальное сечение», представляющее собой группу элементов, при прекращении функционирования которой отказывает вся система, даже если остальные её элементы работоспособны. Сечение называется «минимальным», поскольку не может содержать в себе другую, более малую группу элементов с таким же свойством. Следовательно, для отказа всей системы достаточно отказа любого её минимального сечения.

Также «минимальному сечению» присваивается и другое свойство, в соответствии с которым сечение работоспособно, если в его составе присутствует хотя бы один работоспособный элемент.

Пусть в структуре системы выявлено V минимальных сечений. Каждое сечение K_i с номером i (где $i = 1, \dots, V$) образовано группой из v_i элементов. В соответствии с указанными свойствами, минимальный путь K_i с номером i можно представить в виде группы параллельно соединённых v_j элементов с номером j (где $j = 1, \dots, v_j$).

Структура системы тогда составлена из V минимальных сечений, последовательно соединённых друг с другом.

В схеме по рисунку 1.13 можно выделить четыре минимальных сечения ($V = 4$):

- K_1 с элементами 3-6, $v_1 = 2$;
- K_2 с элементами 1-2-4, $v_2 = 3$;
- K_3 с элементами 3-4-5, $v_3 = 3$.
- K_4 с элементами 1-2-5-6, $v_4 = 4$.

Эквивалентная схема системы по «минимальным сечениям» имеет вид, изображённый на рисунке (1.15):

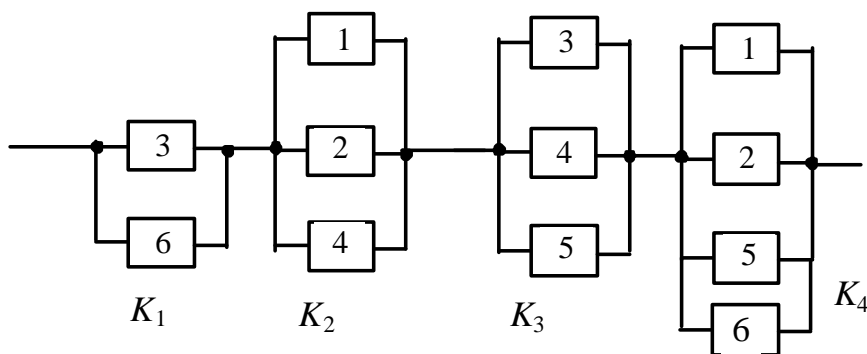


Рисунок 1.15 – Эквивалентная схема системы по минимальным сечениям

Вероятность безотказной работы в течение времени t определяется

выражением, следующим из соотношения (1.18) для последовательного соединения элементов, в котором вероятность $P_i(t)$ безотказной работы выражена по формуле (1.27) для параллельного соединения элементов определяющих сечение K_i :

$$P_V(t) = \prod_{i=1}^V (1 - \prod_{j=1}^{v_i} (1 - P_j(t))). \quad (1.59)$$

где $P_j(t)$ – вероятность безотказной работы j -го элемента на минимальном сечении K_i , v_i – количество элементов в сечении K_i .

При использовании рассмотренного метода будут найдены два различных значения вероятности безотказной работы системы. Например, пусть на некоторый момент времени t вероятности безотказной работы элементов системы на рисунке (1.13) равны: $P_1 = 0.8$, $P_2 = 0.6$, $P_3 = 0.75$, $P_4 = 0.85$, $P_5 = 0.65$, $P_6 = 0.7$. При расчёте по выражениям (1.58), (1.59) находим две оценки: $P_W = 0,836$ и $P_V = 0,657$. Точное значение вероятности безотказной работы находится внутри этого интервала.

Теоретический анализ позволяет обобщить этот результат. Соответственно, использование выражения для минимальных путей даёт завышенную, а расчёт по выражению для минимальных сечений – заниженную оценку вероятности безотказной работы системы. Точное значение находится внутри интервала $[P_W, P_V]$.

1.8 Характеристики и параметры надежности восстанавливаемых элементов и приборов

Под восстанавливаемыми понимаются приборы и элементы, обладающие свойством восстановления своей работоспособности после отказа. За период эксплуатации восстанавливаемых объектов ситуация отказ – восстановление повторяется неоднократно, в отличие от невосстанавливаемых, при отказе которых их эксплуатация заканчивается.

Во многих восстанавливаемых системах время восстановления может быть малым по сравнению с периодом нормального функционирования между отказами. В этом случае можно рассматривать ситуацию с так называемым «мгновенным» восстановлением.

В случае, если для восстановления работоспособности системы необходим относительно длительный период диагностических и ремонтных работ, говорят о «немгновенном» восстановлении..

1.8.1 Параметры надежности объектов с мгновенным восстановлением.

Рассмотрим длительный интервал времени T использования восстанавливаемой системы – прибора или его элемента. Для определенности, далее речь пойдет об элементе.

При достаточно большом интервале времени T будет иметь место N ситуаций «отказ – мгновенное восстановление», причем время работы t_i между $(i-1)$ и i -тым отказами будет отличаться для различных i и может рассматриваться как значение некоторой случайной величина t с функцией

плотности вероятности $f(t)$ – см. рис. 1.16.

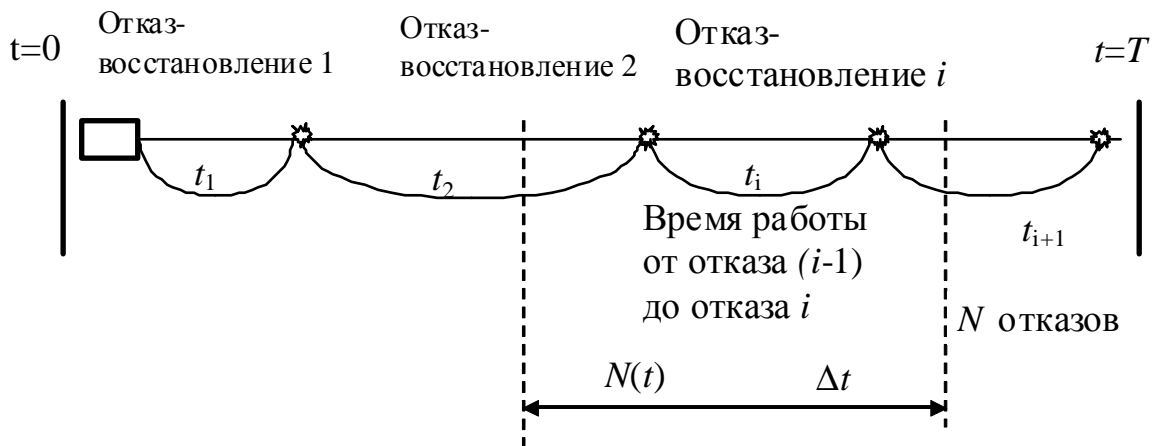


Рисунок 1.16 – Циклы работы системы с мгновенным восстановлением

Надежность между отказами определяется ранее рассмотренными параметрами для невозстанавливаемых элементов, в частности, средним временем безотказной работы t_{cp} между двумя последовательными отказами, определяемым выражением (1.6), в котором за момент времени $t = 0$ принимается время первого из двух отказов.

На достаточно больших временных промежутках надежность восстанавливаемого элемента определяется так называемым «параметром потока отказов» $\omega(t)$.

Параметр потока отказов определяется как отношение количества отказов $N(t)$ восстанавливаемого элемента за интервал времени Δt к величине этого интервала:

$$\omega(t) = N(t)/\Delta t ; \quad t_{cp} \ll \Delta t \ll T. \quad (1.60)$$

Если параметр потока отказов $\omega(t)$ определялся в процессе испытаний сразу нескольких одинаковых N_0 элементов, то полученное количество отказов $N(t)$ нормируется на эту величину, и указанное выражение принимает вид:

$$\omega(t) = N(t)/N_0\Delta t ; \quad t_{cp} \ll \Delta t \ll T. \quad (1.61)$$

При определении потока отказов интервал Δt выбирается малым относительно полного временного интервала T использования элемента, но много больше среднего времени работы между отказами t_{cp} .

При испытании сразу нескольких однотипных элементов общим количеством N_0 возможна ситуация, при которой некоторые из них не отказывали вовсе, а другие уже прошли несколько циклов «отказ-восстановление». В этом случае параметр потока отказов $\omega(t)$ определяется синтетической формулой, состоящей из двух частей [1]:

$$\omega(t) = f(t) + \int_0^t f(t - \tau) \cdot \omega(\tau) \cdot d\tau, \quad (1.62)$$

где $f(t)$ - функция плотности вероятности времени работы t элемента между отказами.

Если функция $f(t)$ описывает экспоненциальное распределение вида (1.16), параметр потока отказов представляет собой постоянную величину, а среднее время t_{cp} между отказами находится как величина, ей обратная:

$$\omega(t) = \lambda, \quad t_{cp} = \frac{1}{\lambda} \quad (1.63)$$

В общем случае, поскольку функция $\omega(t)$ входит как в правую, так и в левую части выражения (1.62), при практических задачах полученное интегральное уравнение решается численно по методу последовательных приближений для различных заданных значений времени t .

1.8.2 Параметры надежности систем с немгновенным восстановлением

Рассмотрим длительный интервал времени T использования восстанавливаемого объекта – прибора или его элемента. Для определенности далее речь пойдет об элементе.

В ситуации немгновенного восстановления после очередного отказа элемента восстановление его нормального функционирования выполняется за некоторое время.

В результате при анализе надёжности рассматриваются две случайные величины: время t' работы от окончания восстановления с номером i до следующего отказа с номером $i+1$ и время tr восстановления после отказа с номером i и, соответственно, с начала восстановления с номером i до его окончания. При достаточно большом интервале времени T будет иметь место N ситуаций отказ-восстановление, для которых случайные величины t и tr могут быть описаны соответствующими плотностями вероятности $f(t')$ и $g(tr)$ – см. рис. 1.17.

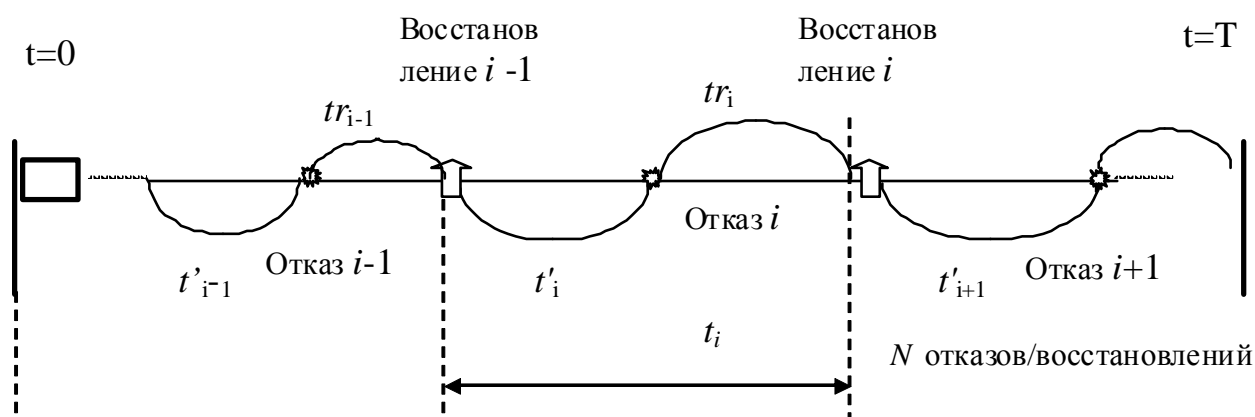


Рисунок 1.17 – Циклы работы системы с не мгновенным восстановлением

Для величины tr , описывающей время восстановления элемента, могут быть аналитически и экспериментально получены характеристики надежности: вероятность $Pr(tr)$ восстановления за время tr , интенсивность восстановления $\lambda r(tr)$, tr_{cp} – среднее время восстановления. Аналитическое выражение этих характеристик аналогично (1.4) – (1.10) с заменой аргумента t на tr .

Полный цикл «отказ-восстановление» с номером i описывается характеристиками случайной величины t , равной сумме двух случайных величин – рисунок 1.17:

$$t = t' + tr \quad (1.64)$$

Если величины t' и tr полагать независимыми, то плотность вероятности случайной величины t определяется выражением свёртки плотностей вероятности этих величин [3]:

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} f(x) \cdot g(t-x) \cdot dx, \quad (1.65)$$

где $f(t')$ и $g(tr)$ функции плотностей вероятности величин t' и tr .

С учётом этого выражения параметр потока восстановлений $\omega_0(t)$ (также может быть назван параметром потока отказов) описывается выражением, по структуре подобным выражению (1.62):

$$\omega_0(t) = \varphi(t) + \int_0^t \omega_0(\tau) \cdot \varphi(t-\tau) \cdot d\tau, \quad (1.66)$$

где $\varphi(t)$ – функция распределения величины t .

Решения интегрального уравнения (1.66) для различных заданных значений времени t находятся численно по методу последовательных приближений.

Для описания надёжности системы с немгновенным восстановлением на промежутке времени, соизмеримом с полным временем эксплуатации, рассматривается интервал t от начала эксплуатации до отказа и начала восстановления с номером n - см. рисунок 1.18

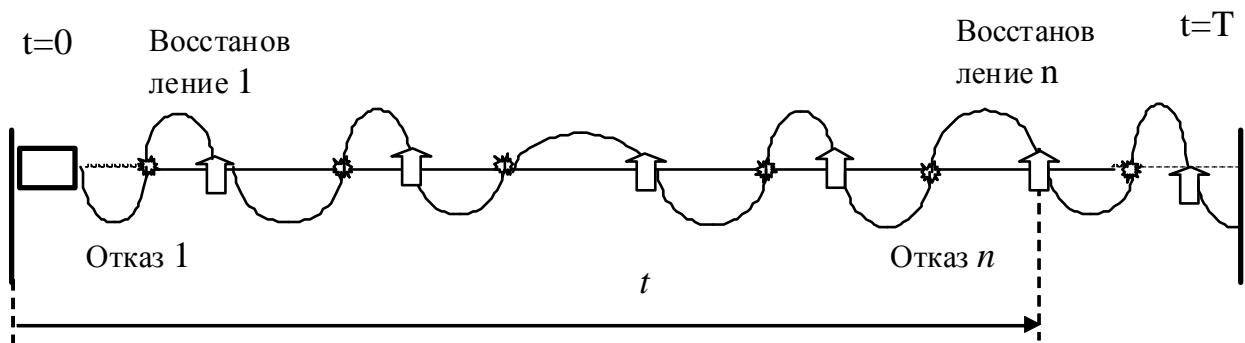


Рисунок 1.18 – Система с не мгновенным восстановлением при многократных циклах «отказ-восстановление»; «звёздочки» обозначены моменты наступления отказа, «стрелками» - моменты завершения восстановления

Время t от начала работы системы до восстановления с номером n является случайной величиной с некоторой плотностью вероятности $\varphi_n(t)$. Полагая, что математически количество отказов может быть неограниченно большим и тогда $n \rightarrow \infty$, можно показать, что параметр потока восстановлений $\omega_0(t)$ также определяется следующим выражением [1]:

$$\omega_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t), \quad (1.67)$$

Для практических расчётов используют также функцию готовности $K_r(t)$,

фактически являющуюся вероятностью события, заключающегося в том, что в момент времени t , отсчитываемый от начала эксплуатации системы, она находится в работоспособном состоянии (т.е. не на этапе восстановления). Принимается, что в начале эксплуатации в момент времени $t = 0$ функция готовности $K_r(t) = 1$.

Функцию готовности $K_r(t)$ можно определить суммой вероятностей двух взаимно-исключающих событий:

$$K_r(t) = P(t) + R(t), \quad (1.68)$$

где $P(t)$ – вероятность безотказной работы за время от 0 до t (система ни разу не отказывала), $R(t)$ – вероятность того, что система отказывала и восстанавливалась на интервале $(0, t)$, но в рассматриваемый момент времени t находится в работоспособном состоянии.

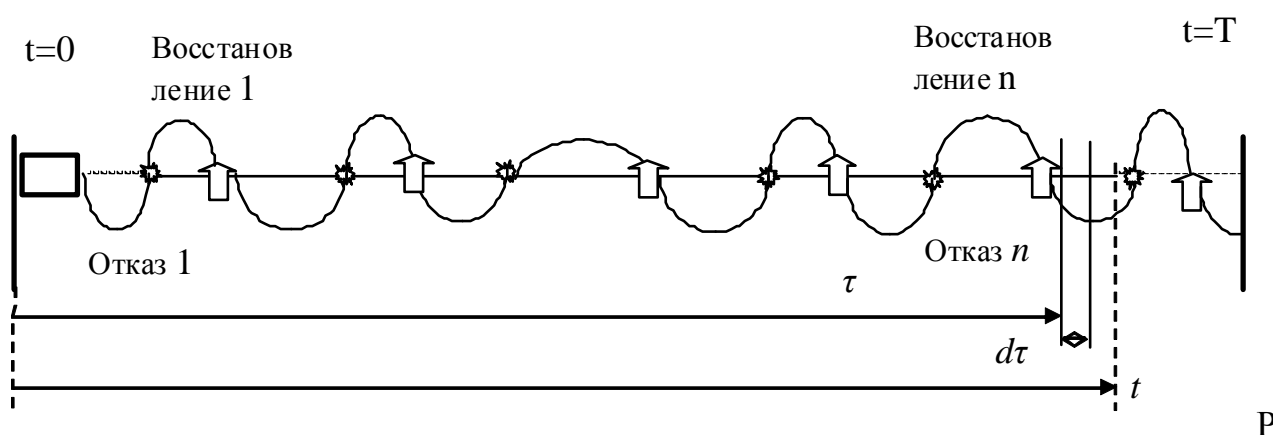


Рисунок 1.19 – Циклы работы системы с немгновенным восстановлением при анализе функции готовности

Для определения $R(t)$ выберем некоторый момент времени $\tau < t$ и рассмотрим интервал $(\tau, \tau + dt)$ – см. рисунок 1.19. Вероятность dR_n того, что на этом интервале, во-первых, закончится восстановление с номером n и, во-вторых, за время $(t - \tau)$ система уже не откажет, равна произведению вероятностей этих двух событий:

$$dR_n = [\varphi_n(\tau) \cdot dt] \cdot P(t - \tau). \quad (1.69)$$

Если выполнить суммирование элементарных величин dR_n по всем возможным номерам n отказов и при этом проинтегрировать результат по времени τ в пределах от 0 до t , то получим искомую вероятность:

$$R(t) = \int_0^t P(t - \tau) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \right) \cdot d\tau = \int_0^t P(t - \tau) \cdot \omega_0(t) \cdot d\tau, \quad (1.70)$$

где $\omega_0(t)$ – параметр потока восстановлений по выражению (1.67).

В результате функция $K_r(t)$ готовности определяется из выражения (1.68) после подстановки в него вероятности $R(t)$ по выражению (1.70). Полученное интегральное уравнение решается численно по итерационным алгоритмам.

Для приблизительной оценки значения функции $K_r(t)$ готовности можно использовать предел, к которому она стремится при бесконечном увеличении времени t – так называемый «коэффициент готовности» K_g :

$$Kr = \lim_{t \rightarrow \infty} (Kr(t)) . \quad (1.71)$$

Значение коэффициента готовности Kr может быть определено по результатам экспериментов с системой по следующей методике.

1. Фиксируется N ситуаций «отказ-восстановление», для чего измеряется время t_i работы системы в интервале от восстановления с номером $i-1$ до отказа с номером i и время tr_i восстановления с номером i ($i = 1, \dots, N$).

2. Вычисляется оценка величины коэффициента Kr по выражению:

$$Kr(N) = \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{\sum_{i=1}^N t_i + \sum_{i=1}^N tr_i} , \quad (1.72)$$

Оценка $Kr(N)$ приближается к истинному значению Kr с увеличением N .

Если последовательно вычислять величину $Kr(N)$ при различных значениях N , то полученный ряд величин может трактоваться как оценка значений $K_r(t)$ функции готовности в моменты времени, соответствующие отказу-восстановлению с номером N .

Контрольные вопросы

1. В чем различие восстанавливаемых и невосстанавливаемых элементов и приборов? Приведите примеры этих двух видов ОЭПиС или их элементов.

2. Какие из 6 параметров и характеристик, рассмотренных в разделе 1.1, определяют один и тот же параметр или однозначно связаны друг с другом?

3. Какие из параметров надёжности имеют постоянную величину при экспоненциальном распределении времени работы элемента до отказа?

4. Для которого параметра надёжности выражение, определяющее его выражение, радикально изменяет вид в случае, если все элементы системы подчиняются экспоненциальному закону?

5. Починяется ли система с параллельным соединением элементов экспоненциальному закону, если все её элементы также экспоненциальны? Назовите необходимое условие в этом контексте для того, чтобы система с последовательным соединением подчинялась экспоненциальному закону.

6 Сравните параллельное и последовательное соединение элементов по критерию увеличения надёжности системы.

7. Сравните два метода резервирования, рассмотренные в разделе 1.5, по критериям эффективности и трудоёмкости практической реализации.

8. Которую из характеристик надёжности позволяют оценить методы минимальных путей и минимальных сечений? Которая из них является более «оптимистичной»?

9. Дайте определение параметру, описывающему процесс отказа/восстановления в системах с мгновенным восстановлением.

10. Какие дополнительные параметры надёжности описывают системы с немгновенным восстановлением сравнительно с системами мгновенного восстановления?

2 Статистическое моделирование систем при определении параметров надёжности

Рассмотренные в Главе 1 теоретические модели надёжности технических систем позволяют определить параметры их надёжности с использованием выражений на основе интегральных преобразований. Такие расчёты не трудоёмки в случае, если плотность распределения времени работы до отказа каждого элемента системы подчиняется экспоненциальному закону с несложным аналитическим описанием – см. раздел 1.2.

При анализе надёжности оптико-электронных систем, состоящих из оптических, электронных, электромеханических и микропроцессорных элементов, функционирование которых основано на различных физических принципах, типичной является ситуация, при которой отказы элементов подчиняются сложным вероятностным законам. В такой ситуации расчёты на основе теоретических моделей становятся трудоёмкими, причём зачастую итоговые аналитические выражения не могут быть получены вовсе.

Поскольку процесс возникновения отказов в системах и отдельных элементах носит случайный характер, параметры их надёжности могут определяться методами имитационного статистического моделирования.

Статистическая модель, имитирующая работу системы, может быть построена для любых вероятностных законов возникновения отказов элементов, что позволяет определить параметры надёжности при сложных аналитических зависимостях или даже отсутствии таковых, например, при наличии только экспериментальных числовых данных.

Эти обстоятельства определяют универсальность метода определения параметров и характеристик надёжности на основе экспериментальных исследований синтезированных статистических моделей.

Статистическое моделирование базируется на использовании значений случайных величин с заданной (аналитически или таблично) плотностью вероятности $f(t)$ с последующим построением и компьютерной реализацией алгоритма, имитирующего работу системы (компьютерный вариант метода Монте-Карло). В результате испытаний модели получается серия значений определяемых показателей надёжности, которые обрабатываются методами математической статистики. Если количество испытаний N достаточно велико, то полученная серия значений приобретает статистическую устойчивость и сходится к достоверной оценке значения искомого параметра надёжности [1,2].

2.1 Статистическое моделирование времени работы элемента системы до отказа по методу «обратной функции»

Рассматриваемые статистические модели анализа надёжности системы основаны на программных генераторах значений случайных величин, имитирующих время работы t элемента. Исходными данными для построения таких моделей является функция $f(t)$ плотности вероятности времени t работы до отказа.

2.1.1 Алгоритм моделирования по методу «обратной функции»

Рассмотрим общий точный метод «обратной функции», используемый для моделирования случайных величин с различными плотностями вероятности [2,4].

По этому методу значение ψ случайной величины Ψ формируется в результате аналитического преобразования значения γ некоторой «простейшей» случайной величины Γ . Эта случайная величина имеет равномерное распределение в интервале от 0 до 1 – рисунок 2.1

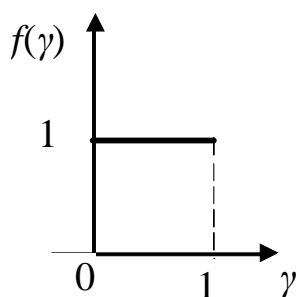


Рисунок 2.1 – Плотность вероятности «простейшей» случайной величины Γ

Пусть $F(x)$ – функция распределения некоторой случайной величины Ψ . Синтезировать эту случайную величину – значит сформировать последовательность ее значений ψ_i , обладающих свойством: вероятность того, что значение ψ_i будет меньше некоторого значения x , равна $F(x)$:

$$P(\psi_i < x) = F(x). \quad (2.1)$$

Особенностью функции распределения $F(x)$ при моделировании случайной величины, определяющей некоторый момент времени, является её определение только для неотрицательного значения аргумента. В таком случае функция распределения $F(x)$ связана с известной плотностью вероятности $f(x)$ интегральным преобразованием:

$$F(x) = \int_0^x f(\tilde{x}) \cdot d\tilde{x}. \quad (2.2)$$

В соответствии с методом «обратной функции» в случае, если функции распределения $y = F(x)$ имеет обратную функцию вида $x = G(y)$, то значение ψ_i случайной величины с функцией распределения $F(x)$ синтезируется в результате вычисления выражения:

$$\psi_i = G(\gamma_i), \quad (2.3)$$

где γ_i – значение случайной величины Γ с равномерным распределением в интервале от 0 до 1, подставляемое в это выражение из программного генератора значений этой «простейшей» случайной величины.

Рассмотрим методику моделирования случайных величин с типовыми законами распределения.

2.1.2 Моделирование случайной величины с распределением Релея

Это распределение достаточно хорошо описывает поведение опто-

электронных элементов с явно выраженным эффектом старения и износа (завершающий участок области III износа - см. рисунок 1.2). Функция распределения $F(t)$, среднее время безотказной работы t_{cp} , численно равное математическому ожиданию m случайной величины t , и вероятность безотказной работы $P(t)$ в течение времени t определяются выражениями [2,4]:

$$F(t) = 1 - \exp\left(\frac{-t^2}{2 \cdot C^2}\right). \quad (2.4)$$

$$t_{cp} = C \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (2.5)$$

$$P(t) = \exp\left(\frac{-t^2}{2 \cdot C^2}\right), \quad (2.6)$$

где C – параметр распределения.

По методу обратной функции, моделирование значения t_i времени работы до отказа выполняется по выражению :

$$t_i = C \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln(1 - \gamma)}, \quad (2.7)$$

где параметр C определяется по заданному среднему времени безотказной работы t_{cp} для данного элемента из выражения (2.5), γ – значение случайной величины Γ с равномерным распределением в интервале от 0 до 1

2.1.3 Моделирование случайной величины с распределением Вейбулла

Этому распределению достаточно хорошо подчиняется время работы t до отказа в объектах, содержащих большое количество электронных и оптико-электронных элементов, микромодулей, полупроводниковых компонентов.

Функция распределения $F(t)$, среднее время безотказной работы t_{cp} , численно равное математическому ожиданию m случайной величины t , и вероятность безотказной работы $P(t)$ в течение времени t определяются выражениями [1,2,4]:

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right), \quad (2.8)$$

$$t_{cp} = \beta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \quad (2.9)$$

$$P(t) = \exp\left(-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right), \quad (2.10)$$

где α и β - параметры распределения, $\Gamma(1 + 1/\alpha)$ – табулированная полная гамма – функция (не путаем со случайной величиной Γ); для целого аргумента $\Gamma(x) = (x-1)!$ [1,2,4].

Распределение Вейбулла общего вида описывает надежность объекта на всех трех этапах его функционирования – см. рисунок 1.2: на этапе I – при $\alpha < 1$, на этапе II – при $\alpha = 1$ (соответствует экспоненциальному распределению), на этапе III – при $\alpha > 1$.

По методу обратной функции моделирование значения t_i времени работы до отказа выполняется по выражению:

$$t_i = \beta \cdot \left(\alpha \sqrt{-\ln(1 - \gamma)} \right), \quad (2.11)$$

где γ – значение случайной величины Γ с равномерным распределением в интервале от 0 до 1, параметр β определяется из выражения (2.9) при выбранной величине параметра α и заданной величине t_{cp} как

$$\beta = \frac{t_{cp}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}. \quad (2.12)$$

Для типовых значений $\alpha = 0,25$; $\alpha = 0,5$; $\alpha = 1,5$; $\alpha = 2$ значения гамма – функции в выражении (2.12) соответственно равны $\Gamma_{0,25}(5) = 24$; $\Gamma_{0,5}(3) = 2$; $\Gamma_{1,5}(1,67) = 0.903$; $\Gamma_2(1,5) = 0.886$.

2.1.4 Моделирование случайной величины с экспоненциальным распределением

Это распределение фактически является распределением Вейбулла – см. 2.1.3 при значении параметра $\alpha = 1$. В практических случаях такое распределение описывает надежность многих компонентов оптики и электроники, что и явилось причиной его отдельного рассмотрения.

Параметры распределения величины t времени работы до отказа [1,2,4]:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (2.13)$$

$$P(t) = e^{-\lambda t}, \quad (2.14)$$

$$\lambda(t) = \lambda, \quad (2.15)$$

$$t_{cp} = 1/\lambda, \quad (2.16)$$

где λ – параметр распределения, численно равный интенсивности отказов.

Экспоненциальное распределение описывает надежность объекта на этапе II нормальной эксплуатации - см. рис. 1.2 .

Также для систем с немгновенным восстановлением распределение времени tr восстановления имеет экспоненциальное распределение при автоматическом поиске и замене отказавшего модуля.

По методу обратной функции, моделирование значения t_i времени работы до отказа (или времени восстановления tr) выполняется по выражению:

$$t_i = \left(-\frac{1}{\lambda} \right) \cdot \ln(1 - \gamma), \quad (2.17)$$

где параметр λ и среднее время безотказной работы t_{cp} связаны выражением (2.16), γ – значение случайной величины Γ с равномерным распределением в интервале от 0 до 1.

2.1.5 Моделирование случайной величины с равномерным распределением

Равномерное распределение может использоваться для приближенного описания надежности элементов. Например, при поиске неисправности автоматическими системами в ряде случаев время t восстановления может полагаться равномерно распределенным в интервале $[t_{\min}, t_{\max}]$:

$$t_{\min} < t < t_{\max} . \quad (2.18)$$

Плотность вероятности времени t восстановления (или времени работы до отказа) постоянна в указанном интервале – см. рис. 2.2 [1,2,4].

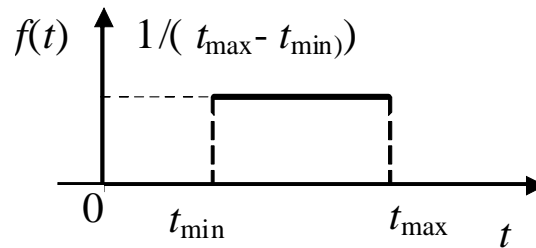


Рисунок 2.2 – Плотность вероятности при равномерном распределении

Вероятность восстановления $Pr(t)$ за время t , а также среднее значение t_{cp} (математическое ожидание m) и среднее квадратическое отклонение σ времени t определяются выражениями:

$$Pr(t) = \frac{t_{\max} - t}{t_{\max} - t_{\min}}, \quad (2.19)$$

$$t_{cp} = \frac{t_{\max} + t_{\min}}{2}, \quad (2.20)$$

$$\sigma^2 = \frac{(t_{\max} - t_{\min})^2}{12}. \quad (2.21)$$

Моделирование случайной величины t выполняется по выражению

$$t = t_{\min} + (t_{\max} - t_{\min}) \cdot \gamma, \quad (2.22)$$

где γ – значение простой случайной величины с равномерным распределением в интервале $[0,1]$.

2.1.6 Моделирование случайной величины с распределением Эрланга

Распределение Эрланга является частным случаем так называемого «гамма-распределения» (не путаем с гамма-функцией и «простейшей» случайной величиной гамма с равномерным распределением). Этим распределением описывается случайная величина времени работы элемента t , а также времени tr восстановления системы в случае поиска и устранения причины отказа оператором [1].

Функция плотности вероятности $f(t)$, среднее время безотказной работы t_{cp} , численно равное математическому ожиданию m случайной величины t , и вероятность безотказной работы $P(t)$ в течение времени t определяются выражениями [1]:

$$f(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \exp\left(\frac{-t}{\beta}\right), \quad (2.23)$$

$$t_{cp} = \beta \cdot \alpha, \quad (2.24)$$

$$P(t) = \exp\left(\frac{-t}{\beta}\right) \cdot \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{t^i}{i! \cdot \beta^i}, \quad (2.25)$$

где α и β - параметры распределения, $\Gamma(\alpha)$ – табулированная полная гамма – функция [1,2,4].

Распределение Эрланга при целых значениях α описывает надежность объекта при различном характере функции интенсивности отказов $\lambda(t)$: при $\alpha > 1$ интенсивность отказов увеличивается, при $\alpha = 1$ остаётся постоянной, и тогда распределение Эрланга соответствует экспоненциальному распределению.

По методу обратной функции моделирование значения t_i времени работы до отказа выполняется по выражению [4]:

$$t = -\sum_{i=1}^{\alpha} (\beta \cdot \ln(\gamma_i)), \quad (2.26)$$

где γ_i ($i=1, \dots, \alpha$) – количество значений γ случайной величины Γ с равномерным распределением в интервале от 0 до 1, используемое при моделировании одного значения времени t . Параметр β определяется из выражения (2.24) при выбранной величине параметра α и заданной величине t_{cp} как

$$\beta = \frac{t_{cp}}{\alpha}. \quad (2.27)$$

Для типовых значений $\alpha = 1$; $\alpha = 2$; $\alpha = 3$; $\alpha = 4$ значения гамма – функции в выражении (2.23) соответственно равны: $\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(2) = 1$; $\Gamma(3) = 2$; $\Gamma(4) = 6$.

2.2 Моделирование времени работы элемента до отказа по методу преобразования нормированной нормально распределённой случайной величины

2.2.1 Моделирование случайной величины с нормальным распределением

Нормальный закон определяет надежность объектов, для элементов которых характерно наличие некоторого износа с малым возможным отклонением его величины, причем возможные отказы однородны по причинам и последствиям. Например, нормальным законом достоверно описывается надежность осветительных систем. Также, время восстановления объекта во многих случаях описывается нормальным законом.

Плотность вероятности времени работы t до отказа определяется выражением [3]:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(t - m)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) \quad (2.28)$$

Основные параметры нормального распределения времени работы t элемента – математическое ожидание $m = t_{cp}$ и среднее квадратическое отклонение σ . Так как нормальное распределение определяет вероятность появления и отрицательной величины времени работы t , поэтому для адекватного описания надежности с помощью нормального распределения необходимо выполнение условия $\sigma \ll t_{cp}$.

Вероятность безотказной работы в течение времени t определяется как

$$P(t) = \Phi_0\left(\frac{m}{\sigma}\right) + \Phi_0\left(\frac{t - m}{\sigma}\right), \quad (2.29)$$

где Φ_0 – табулированная функция Лапласа [3]

Для синтеза значений нормально распределенной случайной величины используются специальные программные генераторы, формирующие значения так называемой нормированной нормальной величины X_n с нулевым средним значением и единичным средним квадратическим отклонением [2,4]:

$$M_n = 0, \sigma_n = 1. \quad (2.30)$$

Моделирование значения t_i времени работы до отказа с использованием нормированной величины X_n при нормальном распределении выполняется по выражению:

$$t_i = tcp + X_n \cdot \sigma, \quad (2.31)$$

где tcp – среднее время безотказной работы элемента, σ – среднее квадратическое отклонение времени t работы элемента до отказа.

2.2.2 Моделирование случайной величины с логарифмически-нормальным распределением

Логарифмически-нормальное (или логнормальное) распределение определяет надежность объектов при износе в случае лавинообразного нарастания воздействия факторов, приводящих к отказу (по принципу «домино»). В этом случае причины, вызывающие отказ, действуют не аддитивно, как при других распределениях, а мультипликативно. В результате интенсивность отказов зависит от амплитуды колебаний влияющих факторов. Функционирование одинаковых по техническим параметрам элементов носит неустойчивый характер – наряду с «долгоживущими» элементами встречаются случаи быстрых отказов.

Плотность вероятности времени работы t до отказа определяется выражением [1,2]:

$$f(t) = \frac{1}{s \cdot t \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln(t) - \mu)^2}{2 \cdot s^2}\right), \quad (2.32)$$

где μ и s – параметры распределения, связанные со средним временем безотказной работы tcp и средним квадратическим отклонением σ времени работы t соотношением:

$$tcp = \exp\left(\frac{s^2}{2} + \mu\right). \quad (2.33)$$

$$\sigma = tcp \cdot \sqrt{(\exp(s^2) - 1)}. \quad (2.34)$$

Вероятность безотказной работы в течение времени t определяется как:

$$P(t) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{\mu - \ln(t)}{s}\right), \quad (2.35)$$

где Φ_0 – табулированная функция Лапласа [3].

Для синтеза значений логнормально распределенной случайной величины также используется нормированная нормальная случайная величина X_n с нулевым средним значением и единичным средним квадратическим отклонением в соответствии с выражением (2.33).

Моделирование значения t_i времени работы до отказа с использованием нормированной величины X_n при логнормальном распределении выполняется по выражению [2,4]:

$$t_i = \exp(s \cdot X_n + \mu) \quad (2.36)$$

В этом выражении параметры s и μ определяются по известным t_{cp} и σ из выражений (2.33),(2.34).

2.3 Статистическое моделирование времени работы элемента системы до отказа с использованием порядковых статистик

Алгоритм моделирования случайной величины Ψ с использованием порядковых статистик выполняется по трёхшаговому алгоритму [4].

1. Генерируется количество l значений γ_i ($i = 1, \dots, l$) «простой» случайной величины Γ .

2. Значения γ_i упорядочиваются определённым образом (например, по возрастанию).

3. Из полученного ряда выбирается значение с номером s , которое является значением ψ моделируемой случайной величины Ψ .

В частности, по рассмотренному алгоритму моделируется время t восстановления технических систем с «бета»-распределением [4].

Функция плотности вероятности $f(t)$, среднее время восстановления t_{cp} , численно равное математическому ожиданию m случайной величины t , и среднее квадратическое отклонение σ величины t определяются как [1,4]

$$f(t) = \frac{1}{t_{\max} - t_{\min}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)} \cdot \left(\frac{t - t_{\min}}{t_{\max} - t_{\min}} \right)^{\alpha-1} \cdot \left(\frac{t_{\max} - t}{t_{\max} - t_{\min}} \right)^{\beta-1}, \quad (2.37)$$

$$t_{cp} = t_{\min} + (t_{\max} - t_{\min}) \cdot \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad (2.38)$$

$$\sigma = \frac{(t_{\max} - t_{\min})}{\alpha + \beta} \sqrt{\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha + \beta + 1}}, \quad (2.39)$$

где $t_{\min} < t < t_{\max}$, α, β - параметры распределения, $\Gamma(x)$ – табулированная полная гамма – функция [1,2,4].

Моделирование случайной величины с «бета»-распределением и целыми значениями параметров α и β выполняется по методу порядковых статистик.

На первом этапе моделируется стандартное «бета» - распределение с граничными значениями $t_{\min} = 0$, $t_{\max} = 1$.

Предварительно вычисляется вспомогательный параметр $l = \alpha + \beta - 1$. Далее генерируется l значений γ_i ($i = 1, \dots, l$) значений случайной величины Γ с равномерным распределением в интервале $[0,1]$. Затем полученный массив упорядочивается по возрастанию значений элементов:

$$\gamma_{(1)} \leq \gamma_{(2)} \leq \gamma_{(3)} \leq \dots \leq \gamma_{(i)} \leq \gamma_{(i+1)} \leq \dots \leq \gamma_{(l)} \quad (2.40)$$

Значение ψ величины с нормированным «бета» - распределением получаем выборкой из последовательности (2.40) значения $\gamma_{(\alpha)}$ с номером α :

$$\Psi = \gamma_{(\alpha)} \quad (2.41)$$

На втором этапе полученное значение ψ преобразуется в величину t , общее «бета»-распределение:

$$t = t_{\min} + (t_{\max} - t_{\min}) \cdot \Psi, \quad (2.42)$$

По рассмотренному алгоритму могут также моделироваться величины с другими распределениями. В частности, при $\beta = \alpha + 1$ формируются значения величины с обобщённым распределением арксинуса.

Контрольные вопросы

1. Какому обязательному условию должна удовлетворять функция распределения случайной величины для того, чтобы для моделирования этой случайной величины мог быть использован метод «обратной функции»?

2. Время функционирования каких опико-электронных элементов или систем может моделироваться по рассмотренным алгоритмам?

3. Укажите величины, моделируемые в результате преобразования «простейших» случайных величин.

4. Которые из рассмотренных случайных величин моделируются в результате композиции или выборки из других случайных величин со «сложным» распределением?

5. Укажите случайные величины, значения которых формируются не из «простейшей» случайной величины с равномерным распределением.

6. По какой причине для моделирования времени безотказной работы не может использоваться случайная величина с нормальным распределением, параметры которого $m = 5000$ час, $\sigma = 2000$ час?

7. Укажите причину, по которой случайная величина с распределением Вейбулла является универсальной для описания надёжности элемента технической системы.

8. В чём различие «простейших» случайных величин, на основе которых формируются случайные величины с логонормальным распределением и распределением Релея?

9. Моделирование ряда случайных величин осуществляется в изначально определяемых границах. Укажите эти случайные величины.

10. Распределение Эрланга является частным случаем более общего распределения. Какого именно?

11. Укажите случайные величины, значения которых могут моделироваться по методу «порядковой статистики».

12. Причиной некоторых отказов технических систем является лавинообразная потеря работоспособности входящих в них элементов. Которое из рассмотренных распределений может использоваться для моделирования времени работы такой системы?

13. Укажите алгоритмы моделирования, использующие, соответственно, «Гамма - функцию», «Гамма-распределение», случайную величину с обозначением «Гамма».

14. Один и тот же алгоритм (2.22) используется при моделировании различных случайных величин. Укажите эти величины.

3 Практические методики синтеза моделей при выполнении лабораторного практикума «Определение параметров надёжности оптоэлектронных систем методом статистических испытаний»

Проведенный в Главе 1 анализ параметров и характеристик надёжности в совокупности с приведенными в Главе 2 способами моделирования значений случайных величин, определяющих время работы различных элементов, позволяет синтезировать статистические модели технических систем и экспериментально исследовать их надёжность при выполнении лабораторного практикума по разделу «Определение параметров надёжности оптоэлектронных систем методом статистических испытаний».

Цель лабораторных работ: изучение принципов построения и практических методик создания статистических моделей технических систем на примере моделирования отказовых ситуаций, практическое освоение методик испытаний моделей при определении основных параметров и характеристик надёжности.

Задачи исследований, выполняемых в лабораторной работе:

– изучение общих принципов статистического моделирования как проектной процедуры анализа параметрической чувствительности элементов технических систем;

– получение практических навыков по алгоритмизации статистической модели отказовых ситуаций при функционировании оптоэлектронных и электронных система различной сложности

– изучение методики экспериментального исследования статистических моделей, анализа результатов и определения параметров и характеристик надёжности оптоэлектронных и электронных систем;

– исследование эффективности методов увеличения надёжности технических систем.

Отдельной задачей лабораторного практикума является овладение приемами программирования и алгоритмизации модели с использованием модулей компьютерной технологии Matlab.

Алгоритмизация, программирование и испытания статистических моделей выполняется в технологии Matlab любой версии, начиная с 4.0.

3.1 Последовательность выполнения лабораторных работ с использованием статистических моделей ситуаций отказ/восстановление

При построении статистической модели невозстановливаемых приборов и элементов имитируется так называемая «подконтрольная эксплуатация», под которой при моделировании понимается проведение эксперимента над серией из N одинаковых приборов или их узлов в соответствии с диаграммой на рисунке 1.1. В результате модель позволяет фиксировать время отказа t_i ($i = 1, \dots, N$) каждого прибора или узла с номером i , а также количество ещё работоспособных элементов $N(t_i)$ после каждого отказа [4].

По двум полученным сериям данных определяются статистические

оценки параметров надёжности анализируемого прибора или узла:

- вероятность отказа спустя время t по выражению (1.2);
- вероятность безотказной работы в течение времени t по выражению (1.5);
- среднее время безотказной работы t_{cp} по выражению (1.7);
- интенсивность отказов $\lambda(t)$ по выражению (1.9);
- частота отказов, численно равная плотности вероятности $f(t)$ – по выражению (1.10).

Этап 1. Модель всей системы создаётся как комплекс статистических моделей отдельных элементов по методу «эквивалентных элементов», изложенному в разделе 1.6 при анализе надёжности смешанного соединения. Плотность вероятности $f(t)$ времени работы до отказа каждого элемента полагается известной.

Рассмотрим прибор, структура которого (по надёжности) определяется схемой на рисунке 3.1.

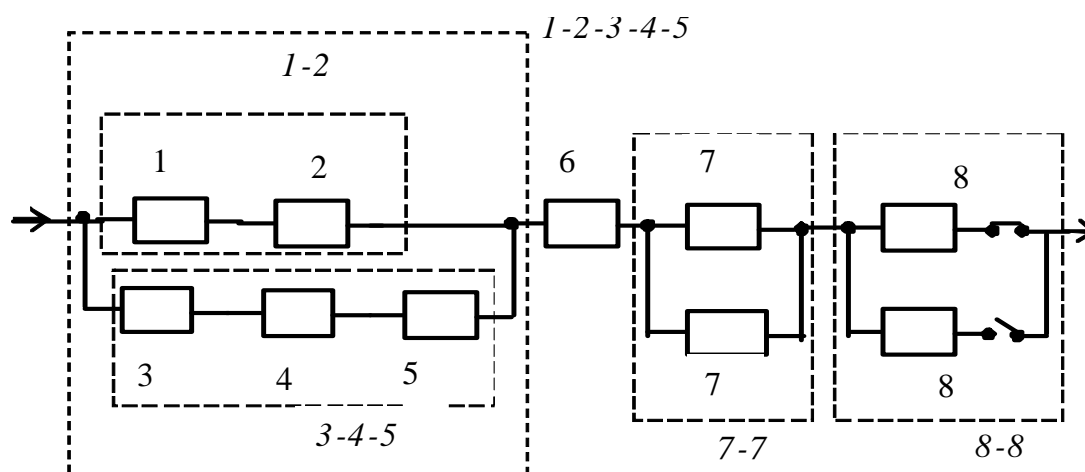


Рисунок 3.1 – Схема соединения элементов прибора

В соответствии с методом, на логико-структурном шаге формируются эквивалентные элементы, содержащие элементарные структуры с последовательным и параллельным соединением элементов:

- элемент 1-2, эквивалентный последовательно соединённым элементам 1 и 2;
- элемент 3-4-5, эквивалентный последовательно соединённым элементам 1,4,5;
- элемент 7-7, эквивалентный блоку резервирования постоянным включением из двух элементов 7;
- элемент 8-8, эквивалентный блоку резервирования методом замещения из двух элементов 8.

Далее рассматривается эквивалентный элемент 1-2-3-4-5, образованный параллельным соединением элементов 1-2 и 3-4-5. На завершающем шаге анализируется последовательное соединение полученных на эквивалентных элементов.

Этап 2. Алгоритмизация модели. При моделировании предполагается, что статистическим испытаниям подвергается N образцов каждого элемента

прибора.

В процессе алгоритмизации модели для каждого элемента прибора с номером i формируется массив Ti , содержащий N значений случайной величины $t_i^{(j)}$ времени работы до отказа его образцов с номерами j ($i=1, \dots, 8; j=1, \dots, N$). Значения $t_i^{(j)}$ формируются специально созданным генератором случайных величин, соответствующим плотности вероятности $f_i(t)$ времени работы до отказа каждого элемента с номером i .

В соответствии с этим шагом, для элементов 1 и 2 первой группы генерируются массивы $T1$ и $T2$:

$$T1 = (t_1^{(1)}, t_1^{(2)}, \dots, t_1^{(i)}, \dots, t_1^{(N)}), \quad (3.1)$$

$$T2 = (t_2^{(1)}, t_2^{(2)}, \dots, t_2^{(i)}, \dots, t_2^{(N)}). \quad (3.2)$$

Затем формируется двумерный массив $T12$, соответствующий данным по первому эквивалентному элементу 1-2:

$$T12 = \begin{bmatrix} T1 \\ T2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1^{(1)}, t_1^{(2)}, \dots, t_1^{(i)}, \dots, t_1^{(N)} \\ t_2^{(1)}, t_2^{(2)}, \dots, t_2^{(i)}, \dots, t_2^{(N)} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Массив $T12$ анализируется в соответствии с видом соединения элементов в группе. В результате определяется массив $t_{12}^{(j)}$ ($j=1, \dots, N$), соответствующий времени работы до отказа каждого из N образцов эквивалентного элемента (1-2). В соответствии со свойствами последовательного соединения элементов 1 и 2, получаем:

$$t_{12} = \left(\min(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}), \dots, \min(t_1^{(i)}, t_2^{(i)}), \dots, \min(t_1^{(N)}, t_2^{(N)}) \right). \quad (3.4)$$

Аналогичным образом формируется массив $t_{345}^{(j)}$ ($j=1, \dots, N$), соответствующий времени работы до отказа каждого из N образцов эквивалентного элемента (3-4-5):

$$t_{345} = \left(\min(t_3^{(1)}, t_4^{(1)}, t_5^{(1)}), \dots, \min(t_3^{(N)}, t_4^{(N)}, t_5^{(N)}) \right). \quad (3.5)$$

Далее по указанной методике создаётся массив $t_{12345}^{(j)}$ ($j=1, \dots, N$), соответствующий времени работы до отказа каждого из N образцов эквивалентного элемента (1-2-3-4-5). С учётом свойств параллельного соединения элементов (1-2) и (3-4-5):

$$t_{12345} = \left(\max(t_{12}^{(1)}, t_{345}^{(1)}), \dots, \max(t_{12}^{(i)}, t_{345}^{(i)}), \dots, \max(t_{12}^{(N)}, t_{345}^{(N)}) \right). \quad (3.6)$$

С учётом свойств резервируемых элементов получаем массивы для эквивалентных элементов (7-7) и (8-8):

$$t_{77} = \left(\max(t_7^{(1)}, t_7^{(1)}), \dots, \max(t_7^{(i)}, t_7^{(i)}), \dots, \max(t_7^{(N)}, t_7^{(N)}) \right). \quad (3.7)$$

$$t_{88} = \left((t_8^{(1)} + t_8^{(1)}), \dots, (t_8^{(i)} + t_8^{(i)}), \dots, (t_8^{(N)} + t_8^{(N)}) \right). \quad (3.8)$$

В результате формируется массив $t^{(j)}$ ($j=1, \dots, N$), соответствующий времени работы до отказа каждого из N образцов моделируемой системы:

$$t = \left(\min(t_{12345}^{(1)}, t_{77}^{(1)}, t_6^{(1)}, t_{88}^{(1)}), \dots, \min(t_{12345}^{(N)}, t_{77}^{(N)}, t_6^{(N)}, t_{88}^{(N)}) \right). \quad (3.9)$$

Этап 3. Выполнение статистического моделирования по рассмотренным шагам алгоритма.

В результате моделирования определяется время работы до отказа t_i ($i=1, \dots, N$) каждого образца рассматриваемого прибора с номером i , а также количество ещё работоспособных образцов $N(t_i)$ после каждого отказа.

По полученным сериям данных определяются статистические оценки параметров надёжности анализируемого прибора:

- вероятность отказа спустя время t по выражению (1.2);
- вероятность безотказной работы в течение времени t по выражению (1.5);
- среднее время безотказной работы t_{cp} по выражению (1.7);
- интенсивность отказов $\lambda(t)$ по выражению (1.9);
- частота отказов, численно равная плотности вероятности $f(t)$ – по выражению (1.10).

Этап 4. Оформление Отчёта по лабораторной работе.

Рассмотрим применение указанной методики на типовых примерах.

3.2 Лабораторная работа «Статистическое моделирование отказовых ситуаций при определении параметров надёжности невосстанавливаемых приборов и систем»

Задание по лабораторной работе

1. Синтезировать статистическую модель для определения параметров надёжности технической системы.

2. Выполнить алгоритмизацию и моделирование отказовых ситуаций для $N0$ образцов объекта.

3. В результате статистической обработки определить среднее время безотказной работы t_{cp} и следующие функции: вероятность безотказной работы $P(t)$, интенсивность отказов $\lambda(t)$, частота отказов $F(t)$.

4. Для значения времени $t_0 = (2/3)t_{cp}$ найти вероятность безотказной работы $P(t_0)$, используя выражения математической модели надёжности (Глава 1), и сравнить со значением, полученным в результате статистического моделирования. Если аналитический вид функции $P(t)$ для какого-либо элемента отсутствует, распределение величины t полагать экспоненциальным.

5. Сформировать рекомендации по увеличению надёжности исследуемого объекта.

Пример выполнения лабораторной работы

Этап 1. Задание по лабораторной работе, Параметры надёжности элементов.

Исследуемый объект является одним из контрольных пунктов системы охраны и включает две одновременно работающие видеосистемы с перекрывающимися угловыми полями, что обеспечивает комфортные условия наблюдения за обстановкой на объекте контроля. Поскольку для наблюдения в принципе достаточно одной видеосистемы, схема надёжности основана на параллельной структуре – рисунок 3.2.

Каждая видеосистема состоит из видеокамеры и блока питания –

элементы 1 и 3, 2 и 4, соответственно. Для наблюдения за обстановкой используются два одинаковых постоянно включённых монитора, образующих модуль резерва 6-6. В каждый момент времени на мониторы выводится видеосигнал с одной видеосистемы. Для переключения видеосигналов с видеосистем используется управляемый мультиплексор 5. В принципе, все рассматриваемые элементы ремонтпригодны, однако их восстановление выполняется спустя значительное время и средствами, находящимися вне рассматриваемого объекта. Следовательно, объект со схемой по рисунку 3.2. может описываться параметрами надежности невосстанавливаемых элементов.

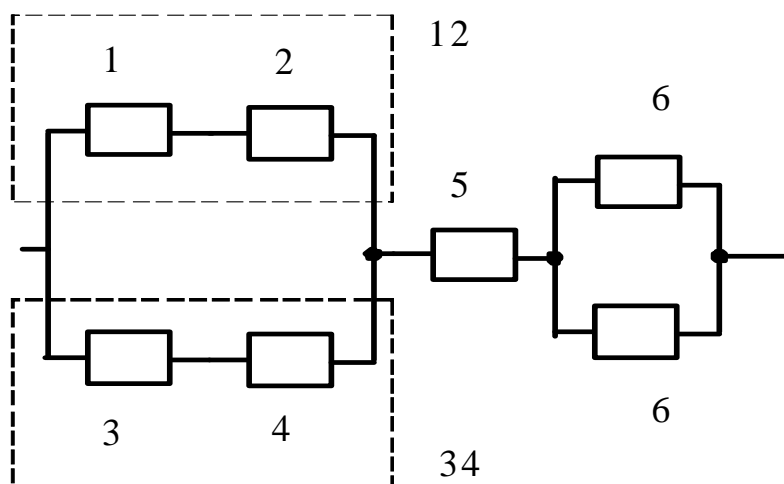


Рисунок 3.2 – Схема для расчета надежности рассматриваемой видеосистемы

Распределение времени работы каждого элемента до отказа и исходные параметры для моделирования приведены в Таблице 3.1.

Таблица 3.1 Параметры и характеристики надёжности элементов системы

Номер элемента	Распределение времени работы элемента до отказа	Параметры распределения
1	Нормальное	$t_{cp} = 3600$ час; $\sigma = 300$ час
2	Вейбулла	$t_{cp} = 5500$ час; $\alpha = 0,5$
3	Экспоненциальное	$t_{cp} = 4300$ час
4	Логарифмически нормальное	$t_{cp} = 3300$ час; $\sigma = 100$ час
5	Эрланга	$t_{cp} = 5000$ час; $\alpha = 2$
6	Рэлея	$t_{cp} = 2000$ час

Требуется: определить среднее время безотказной работы t_{cp} исследуемой системы, а также построить графики функций вероятности безотказной работы $P(t)$ в течение времени t , интенсивности отказов $\lambda(t)$ и частоты отказов $F_0(t)$.

Моделирование выполнить для $N0 = 200$ образцов рассматриваемой системы.

Этап 2. Построение эквивалентной схемы системы.

По схеме 3.2 исследуемой системы можно сформировать два

эквивалентных элемента 1-2 и 3-4, соответствующих двум видеосистемам с элементами 1, 2 и 3,4. Третий эквивалентный элемент б-б соответствует блоку резерва из двух мониторов б.

Этап 3. Синтез, алгоритмизация и программирование кода статистической модели работы до отказа для $N_0 = 200$ образцов исследуемой системы.

1. Моделирование работы элементов первой видеосистемы.

Для синтеза массива времени t_{v1} работы видеокамеры 1 до отказа для всех моделей необходимо предварительно создать массив X_1 из $N_0 = 200$ значений простой нормально распределенной величины – см. (3.1). Для этого генерируется массив-строка значений нормальной случайной величины следующим оператором [5]:

$$X_1 = \text{randn}(1, 200);$$

По алгоритму (2.31) синтезируется массив t_{v1} из 200 значений времени работы видеокамеры до отказа при среднем времени безотказной работы $t_{cp} = 3600$ час и $\sigma = 300$ час.

$$t_{v1} = X_1 * 300 + 3600;$$

Аналогичным образом определяются массив t_{p1} времени работы блока питания с распределением Вейбулла в соответствии с выражениями (2.11) и (2.12).

При этом первоначально генерируется массив-строка значений исходной случайной величины Γ с равномерным распределением в интервале $[0,1]$; используется следующий оператор [5]:

$$X_2 = \text{rand}(1, 200);$$

Для параметров распределения $\alpha = 0,5$ значение $\Gamma(1+1/\alpha) = 2$ и $t_{cp} = 5500$ час среднего времени безотказной работы получаем массив значений времени работы телекамеры в 200 моделях системы:

$$\begin{aligned} \text{alfa} &= 0.5 \\ \text{beta} &= 5500/2; \\ t_{p1} &= \text{beta} * (\log(1 - X_2)) . ^{(1/\text{alfa})}; \end{aligned}$$

В этом расчёте параметр β найден по выражению (2.12).

Из массивов времени работы отдельных элементов 1 и 2 монтируется массив экспериментальных данных для всей первой видеосистемы (см. (3.3)).

$$T_{12} = [t_{v1} \\ t_{p1}];$$

В полученном двумерном массиве будет 200 столбцов по количеству испытываемых моделей и 2 строки по количеству элементов в первой видеосистеме. Два числа в каждом столбце соответствуют времени работы до отказа каждого из двух элементов видеосистемы в одной модели.

Массив t_{12} из 200 значений времени работы образцов первой видеосистемы определяется по массиву T_{12} строкой, формируемой в результате выборки минимального времени из каждого столбца в соответствии с выражением (3.4) для последовательного соединения элементов:

$$t_{12} = \min(T_{12});$$

2. Моделирование работы N_0 образцов второй видеосистемы

Моделирование начинается с генерации массива значений времени t_{v3} работы до отказа видеокамеры 3 с экспоненциальным распределением в соответствии с выражением (2.7):

```
x3=rand(1,200);  
lambda = 1/4300;  
tv3 = (- 1/lambda)*log(1 - x3);
```

Затем определяется массив значений времени $tp4$ работы до отказа блока питания 4 с логонормальным распределением. В результате решения системы из двух уравнений, определяемых выражениями (2.33), (2.34), для известных $tcp=3300$ час, $\sigma = 100$ час находятся параметры распределения $s = 0,03$ и $\mu = 8,1$. Затем по алгоритму (2.36) генерируем массив $tp4$:

```
x4=randn(1,200);  
s=0.03; mu=8.1;  
tp4=exp(s*x4+mu);
```

Из массивов времени работы элементов 3 и 4 монтируется массив экспериментальных данных для второй видеосистемы (см. (3.3)):

```
T34 = [tv3  
      tp4];
```

В полученном двумерном массиве будет 200 столбцов по количеству испытуемых моделей элементов и 2 строки по количеству элементов во второй видеосистеме.

Массив t_{34} из 200 значений времени работы второй видеосистемы в каждой модели определяется по массиву T_{34} строкой, формируемой в результате выборки минимального времени из каждого столбца в соответствии с выражением (3.4) для последовательного соединения элементов:

```
t34 = min(T34);
```

3. Моделирование времени работы до отказа эквивалентного элемента 1234

Эквивалентный элемент 1234 образован параллельным соединением двух видеосистем, включающих соответственно элементы 1,2 и 3,4. Массив данных моделирования для этого эквивалентного элемента формируется аналогично рассмотренному в выражении (3.3):

```
T1234 = [t12  
        t34];
```

Массив t_{1234} из 200 значений времени работы эквивалентного элемента определяется по массиву T_{1234} строкой, формируемой в результате выборки максимального времени из каждого столбца в соответствии с выражением (3.6) для параллельного соединения элементов:

```
t1234 = max(T1234);
```

4. Моделирование работы N_0 образцов мультиплексора 5.

Для моделирования времени работы до отказа элемента 5 с распределением Эрланга предварительно по выражению (2.27) для известных $tcp=5000$ час и $\alpha = 2$ находится параметр распределения $\beta = 2500$. Затем по

алгоритму (2.26) генерируется массив $tu5$ времени работы $N0$ образцов мультиплексора. Для этого в соответствии с параметром $\alpha = 2$ предварительно генерируется два массива значений исходных величин с равномерным распределением:

```
X51=rand(1,200);
X52=rand(1,200);
beta=2500;
tu5=-beta*log(X51)-beta*log(X52);
```

5. Моделирование работы $N0$ образцов модуля резерва в составе двух мониторов 6-6.

Два одинаковых монитора, составляющие модуль резерва, моделируются с независимой статистикой отказов.

Для моделирования времени t с распределением Релея по известному $t_{cp} = 2000$ час определяется параметр распределения по выражению (2.5): $C = 1596$. Затем по алгоритму (2.7) генерируются два массива $tr61$ и $tr62$ по 200 элементов в каждом:

```
X61=rand(1,200);
C = 1596
tr61 = C*(-2*log(1 - X61)).^(1/2);
X62=rand(1,200);
tr62 = C*(-2*log(1 - X62)).^(1/2);
```

Массив $t66$ из 200 значений времени работы модуля постоянно включённого резерва определяется по выражению (3.6) для параллельного соединения элементов:

```
T66 = [tr61
        tr62];
t66 = max(T66);
```

6. Выполним моделирование работы всей исследуемой системы.

Из массивов времени работы отдельных эквивалентных элементов 1234, 5, 66 формируется массив экспериментальных данных для $N0$ образцов всей системы:

```
T = [t1234
      tu5
      t66];
```

Массив t из 200 значений времени работы всей системы определяется по массиву T строкой, формируемой в результате выборки минимального времени из каждого столбца в соответствии с выражением (3.4) для последовательного соединения элементов [5]:

```
[t, NN] = min(T);
```

В этом операторе массив NN содержит номер элемента с наименьшим временем работы в каждом столбце, что позволяет проанализировать, который именно из эквивалентных элементов системы приводит к её отказу в каждом моделируемом образце.

Для контроля моделирования строится график t времени работы системы в зависимости от номера моделируемого образца и график номеров NN

(последний график строится укрупненными точками для большей наглядности).

```
plot(t);pause  
plot(NN, 'o');pause
```

Графики приведены на рисунках 3.3 и 3.4. Для количественной оценки соотношения количества отказов трёх эквивалентных элементов может использоваться оператор [5]:

```
br = hist(NN, 3)
```

В результате в «Окне команд» («Рабочем окне») Matlab получаем массив, значения элементов которого показывают количество моделируемых образцов, которые отказывали по причине отказа соответственно первого, второго и третьего эквивалентных элементов: $br = 50 \ 44 \ 106$

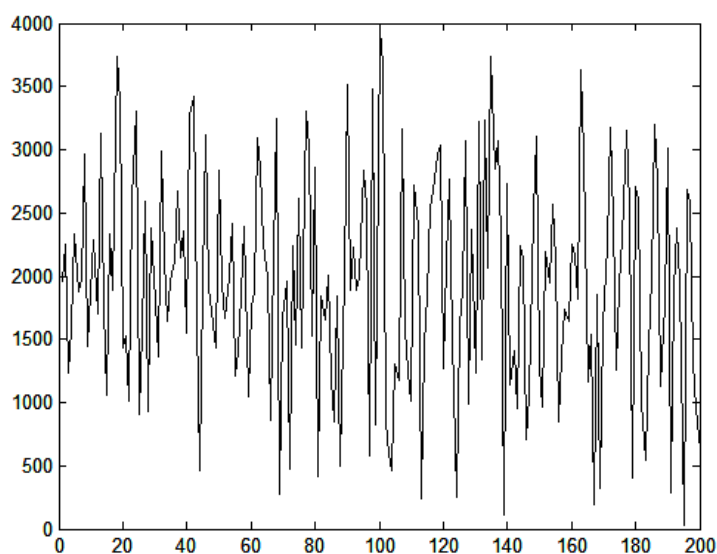


Рисунок 3.3 – Время работы до отказа для 200 образцов исследуемой системы

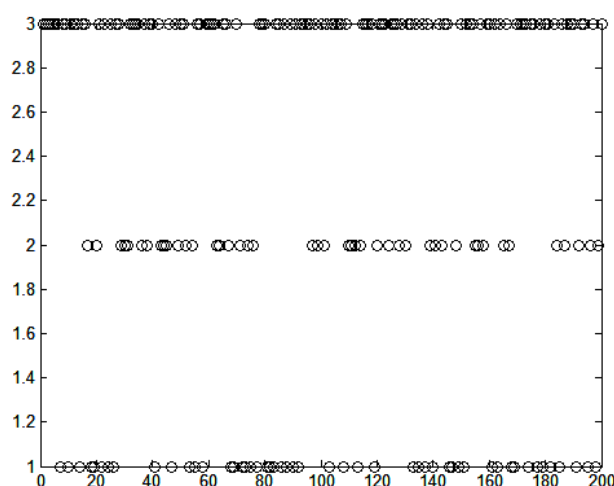


Рисунок 3.4 – Диаграмма отказов трёх эквивалентных элементов системы

Этап 4. Определение среднего время безотказной работы $t_{ср}$ и функций вероятности безотказной работы $P(t)$, интенсивности отказов $\lambda(t)$, частоты

отказов $F(t)$

В соответствии с выражением (1.7) находим оценку среднего времени безотказной работы методом усреднения значений элементов массива результирующего массива t [5]:

$$t_{cp} = \text{mean}(t)$$

В «Окне команд» получен результат: $t_{cp} = 1917$ час.

Для определения функции вероятности безотказной работы $P(t)$ необходимо сформировать массив t_0 , определяющий полное время, на котором моделируются образцы системы. Для этого необходимо в полученный массив t , содержащий значения времён отказа t_i ($i=1, \dots, 200$) всех $N_0 = 200$ образцов моделируемой системы, добавить элемент, содержащий начальный момент времени $t = 0$:

$$\begin{aligned} t_0(1) &= 0; \\ t_0(2:201) &= t; \end{aligned}$$

Далее определяется массив tsr как результат сортировки «по возрастанию» массива t_0 значений времени [5]:

$$tsr = \text{sort}(t_0);$$

В массиве tsr результаты эксперимента расположены по порядку возрастания времени работы образцов до отказа, начиная с нулевого момента времени. После сортировки диаграмма эксперимента, рассмотренная на рисунке 1.1, принимает следующий вид:

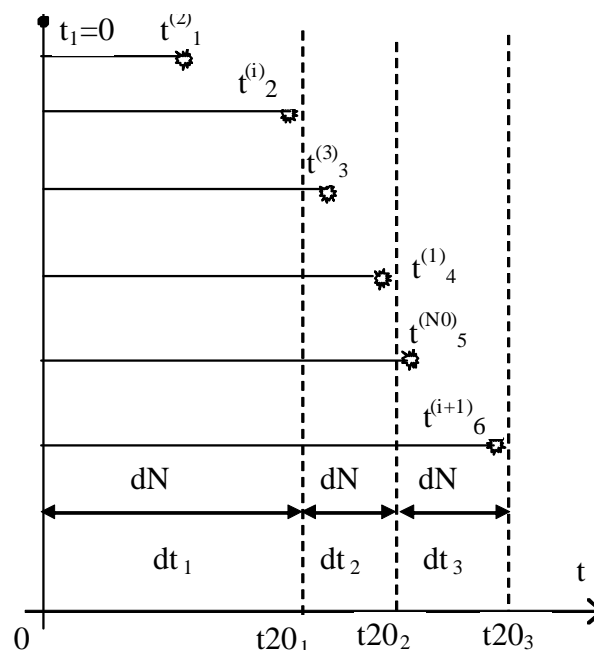


Рисунок 3.5 – Диаграмма эксперимента после сортировки значений времени отказа образцов системы: нижний индекс – номер элемента в отсортированном массиве, верхний индекс – номер элемента на исходной диаграмме рис. 1.1

Каждому элементу массива времени tsr соответствует отказ одного образца исследуемой системы. Поскольку каждому следующему значению времени t_i массива tsr соответствует отказ следующего по очереди образца,

массив Nt , определяющий количество еще не отказавших моделей, представляет собой убывающую последовательность с шагом -1 :

```
N0 = 200;
Nt = N0:-1:0;
```

Поскольку массив tsr определяет моменты времени, в которые работоспособными оказывалось количество моделей, определяемое соответствующими элементами массива Nt , график функции $P(t)$ определяется графиком, для которого значения массива tsr являются аргументом, а массива P - значениями функции. В итоге вероятность $P(t)$ безотказной работы до момента времени t определяется по выражению (1.5):

```
P = Nt/N0;
plot(tsr,P); pause
```

График полученной функции представлен на рисунке 3.6.

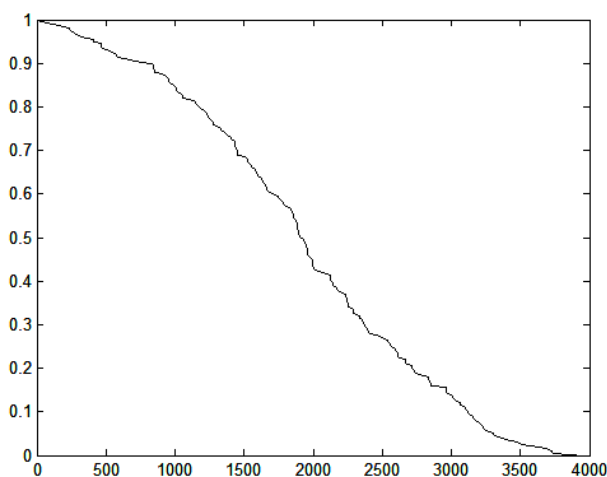


Рисунок 3.6 – График функции $P(t)$ вероятности безотказной работы в течение времени t

При определении функций интенсивности отказов $\lambda(t)$ и частоты отказов $F(t)$ необходимо выбрать количество k временных интервалов, для которых определяется функция $\lambda(t)$. Эту величину рекомендуется выбирать кратной 10 в соответствии с соотношением:

$$k \approx \frac{N0}{2 \cdot k} \quad (3.10)$$

Для количества $N0 = 200$ из этого выражения находим $k = 10$. Каждому из этих временных интервалов в отсортированном массиве tsr соответствует $20 = N0/k$ значений времени отказов. Время начала каждого из этих интервалов, условно показанное на диаграмме рис. 3.5, определяется оператором:

```
t20=tsr(1:20:201);
```

Длительность dt_i ($i = 1, \dots, 10$) каждого интервала находится с помощью оператора `diff` [5]:

```
dt=diff(t20);
```

Каждому интервалу dt соответствует 20 значений времени отказа и,

соответственно, $dN = 20$ отказов испытуемых образцов – см диаграмму на рис. 3.5. Поскольку каждому следующему значению времени dt_i массива t_{sr} также соответствует отказ 20 образцов системы, массив N_{t20} , определяющий количество еще не отказавших образцов на начало каждого из 10 интервалов, представляет собой убывающую последовательность с шагом -20 :

$$N_{t20} = N_0 : -20 : 1;$$

Далее по выражению (1.9) определяется интенсивность отказов:

$$\lambda = (20 ./ dt) ./ N_{t20};$$

График функции $\lambda(t)$ интенсивности отказов, изображенный на рисунке 3.7, строится оператором:

$$\text{plot}(t_{20}(1:1:(\text{length}(t_{20})-1)), \lambda); \text{pause}$$

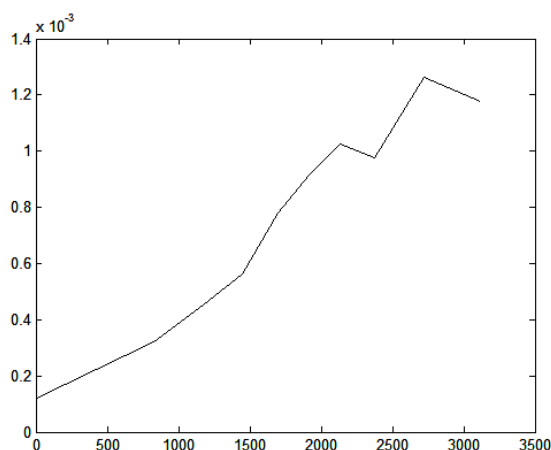


Рисунок 3.7 – График функции $\lambda(t)$ интенсивности отказов

Аналогичным образом по выражению (1.10) определяется функция $F(t)$ частоты отказов – см. рисунок 3.8:

$$f_t = (20 ./ dt) ./ N_0;$$

$$\text{plot}(t_{20}(1:1:(\text{length}(t_{20})-1)), f_t)$$

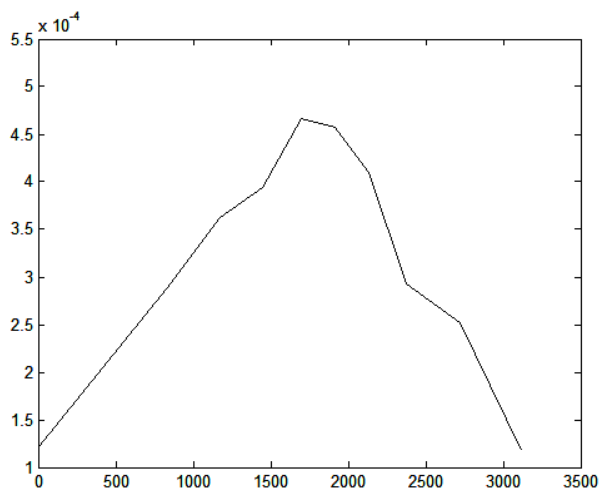


Рисунок 3.8 – График функции $f(t)$ частоты отказов

Этап 5. Расчёт вероятности безотказной работы системы в момент

времени $t_0 = (2/3)t_{cp}$.

Согласно заданию на лабораторную работу необходимо аналитически определить вероятность безотказной работы системы в момент времени $t_0 = (2/3)t_{cp} = (2/3) \cdot 1917 \approx 1278$ час.

Определим вероятность безотказной работы на время t_0 для всех элементов рассматриваемой системы (при отсутствии аналитического выражения используем формулу для экспоненциального распределения).

Таблица 3.2 Данные для расчёта вероятности безотказной работы элементов

Номер элемента	Распределение времени работы элемента до отказа	Параметры распределения	Расчётное выражение	Вероятность $P(t)$
1	Нормальное	$m = 3600$ час; $\sigma = 300$ час	(2.29)	0,018
2	Вейбулла	$t_{cp} = 5500$ час; $\alpha = 0,5$	(2.10)	0,506
3	Экспоненциальное	$t_{cp} = 4300$ час	(2.14)	0,743
4	Логарифмически нормальное	$t_{cp} = 3300$ час; $\sigma = 100$ час	(2.35)	0,999
5	Эрланга	$t_{cp} = 5000$ час; $\alpha = 2$	(2.19)	0,906
6	Рэлея	$t_{cp} = 2000$ час; $C = 1596$	(2.6)	0,726

По методу эквивалентных элементов, изложенному в разделе 1.6, для первого эквивалентного элемента 1-2 в составе видеокамеры и блока питания определим вероятность безотказной работы по выражению (1.51): $P_{1-2} = 0,018 \cdot 0,506 = 0,0092$. Аналогично вычисляется вероятность безотказной работы эквивалентного элемента 3-4: $P_{3-4} = 0,743 \cdot 0,999 = 0,742$.

Для эквивалентного элемента 1-2, 3-4 в составе двух видеосистем вероятность безотказной работы определяется по выражению (1.55) для параллельного соединения: $P_{1-2-3-4} = 1 - (1 - 0,0092) \cdot (1 - 0,742) = 0,744$.

Вероятность безотказной работы для модуля резерва в составе мониторов 6 определяется по подобному выражению $P_{6-6} = 1 - (1 - 0,726)^2 = 0,925$.

Вероятность безотказной работы для всей рассматриваемой системы равна $P(1278) = 0,744 \cdot 0,906 \cdot 0,925 = 0,624$.

Из графика $P(t)$, полученного в результате статистического моделирования для времени $t_0 = 1278$ час, получаем более точное значение $P(t_0) \approx 0,7$ – см. рисунок 3.6.

Этап 6. Рекомендации по увеличению надёжности исследуемой системы.

Как следует из рисунка 3.4, при статистическом моделировании работы системы из трёх последовательно соединённых эквивалентных элементов наиболее часто отказывает третий эквивалентный элемент. Это подтверждается и численным расчётом, в соответствии с которым при испытаниях 200 образцов системы для 106 образцов причиной отказа являлся отказ именно третьего

эквивалентного элемента б-б.

Для повышения надёжности системы следует увеличить среднее время безотказной работы третьего эквивалентного элемента. Это может быть достигнуто или повышением параметров надёжности входящих в него элементов или применением резервирования.

В частности, поскольку эквивалентный элемент б-б представляет собой модуль резервирования при постоянном включении, можно изменить тип резерва и применить более надёжный резерв замещением.

Для этого в модели следует заменить оператор, определяющий анализ массива Т66 резерва на следующий, описывающий время работы модуля при резервировании замещением:

$$t_{66} = \text{sum}(T_{66});$$

Повторный расчёт по модернизированной таким образом модели показывает, что среднее время безотказной работы увеличилось на 19%: $t_{cp} = 2276$ час.

Также наиболее часто отказывающимся теперь является первый эквивалентный элемент: $br = 107\ 50\ 43$.

В результате анализа параметров надёжности элементов, входящих в первый эквивалентный элемент 1-2-3-4, могут быть сформированы предложения по дальнейшему увеличению надёжности исследуемой системы.

3.3 Лабораторная работа «Статистическое моделирование отказовых ситуаций при определении параметров надёжности систем с топологически сложным соединением элементов»

Задание по лабораторной работе

1. Синтезировать статистическую модель для объекта с топологически сложной схемой по надёжности.

2. Выполнить алгоритмизацию и моделирование отказовых ситуаций по методу минимальных путей и минимальных сечений.

3. В результате статистической обработки определить по каждому из методов среднее время безотказной работы t_{cp_p} , t_{cp_s} и функцию вероятности безотказной работы $P_p(t)$, $P_s(t)$.

4. Для значения времени $t_0 = 0.4 t_{cp_s}$ найти вероятность безотказной работы $P(t_0)$, используя выражения математической модели надёжности топологически сложной системы (Глава 1), и сравнить со значениями, полученным в результате статистического моделирования. Если аналитический вид функции $P(t)$ для какого-либо элемента отсутствует, распределение величины t полагать экспоненциальным.

5. Сформировать рекомендации по увеличению надёжности исследуемого объекта.

Пример выполнения лабораторной работы

Необходимо определить параметры надёжности системы со схемой (по надёжности), изображенной на рисунке 1.13.

Исходные данные

Система имеет сложную топологию с точки зрения анализа надежности.

Распределение времени работы каждого элемента до отказа и исходные параметры для моделирования приведены в таблице 3.1.

Количество моделируемых образцов системы $N_0 = 200$.

Как было указано в Разделе 1, для систем сложной топологии формируются две эквивалентные схемы – по минимальным путям и минимальным сечениям, после чего выполняется расчет двух оценок параметра надежности по каждой из этих схем.

Этап 1. Синтез статистических моделей отдельных элементов системы для $N_0 = 200$ образцов исследуемой системы.

Моделирование отдельных элементов системы выполняется операторами, рассмотренными в 3.2.

```
%При нормальном законе распределения времени работы
X1=randn(1,200);tv1 = X1*300 +3600;
%При Вейбулловском законе распределения времени работы
X2=rand(1,200);alfa=0.5;beta = 5500/2;
tp2= beta*(log(1 - X2)).^(1/alfa);
%При экспоненциальном законе распределения времени работы
X3=rand(1,200);lambda = 1/4300;
tv3 = (- 1/lambda)*log(1 - X3);
%При логонормальном законе распределения времени работы
X4=randn(1,200); s=0.03; mu=8.1;
tp4=exp(s*X4+mu);
%При Эрланговом законе распределения времени работы
X51=rand(1,200);X52=rand(1,200);beta=2500;
tu5=-beta*log(X51)-beta*log(X52);
%При Релеевском законе распределения времени работы
X6=rand(1,200);C = 1596;
tr6 = C*(-2*log(1 - X6)).^(1/2);
```

Этап 2. Моделирование работы минимальных путей, составляющих структуру системы.

В соответствии с рисунком 1.14, в системе имеется 6 минимальных путей. Каждый минимальный путь представляет собой последовательное соединение лежащих на нём элементов.

В соответствии с выражением (3.3) из массивов времени работы элементов 4 и 6 монтируется массив экспериментальных данных для пути 4-6:

```
%Min Paths
%Path 4-6
T46 = [tp4;tr6];
```

В тексте оператора использована иная по сравнению с рассмотренной в разделе 3.2 нотация записи составного массива [5].

Массив t_{46} из 200 значений времени работы для образцов пути 4-6 определяется по массиву T_{46} по выражению (3.4) для последовательного соединения элементов:

```
t46 = min(T46);
```

Подобным образом определяются массивы времён работы и для других минимальных путей.

```
%Path 1-3
```

```
T13 = [tv1;tv3]; t13 = min(T13);
```

```
%Path 2-3
```

```
T23 = [tp2;tv3]; t23 = min(T23);
```

```
%Path 1-5-6
```

```
T156 = [tv1;tu5;tr6];t156 = min(T156);
```

```
%Path 4-5-3
```

```
T453 = [tp4;tu5;tv3];t453 = min(T453);
```

```
%Path 2-5-6
```

```
T256 = [tp2;tu5;tr6];t256 = min(T256);
```

Этап 3 Моделирование работы системы по схеме минимальных путей

Из массивов времени работы отдельных путей формируется массив экспериментальных данных для $N0$ образцов всей системы:

```
Tr = [t46;t13;t23;t156;t453;t256];
```

Массив t_{path} из $N0 = 200$ значений времени работы всей системы определяется по массиву T_r строкой, формируемой в результате выборки максимального времени из каждого столбца в соответствии с выражением (3.6) для параллельного соединения элементов:

```
[tpath,NN] = max(Tr);
```

Для контроля моделирования строится график t_{path} времени работы системы до отказа (по минимальным путям) в зависимости от номера моделируемого образца и график номеров NN путей с наибольшим временем работы в каждом столбце, что в результате позволяет определить, какие именно из путей отказывают прежде других.

```
plot(tpath); pause  
plot(NN, 'o'); pause
```

Графики приведены на рисунках 3.9 и 3.10.

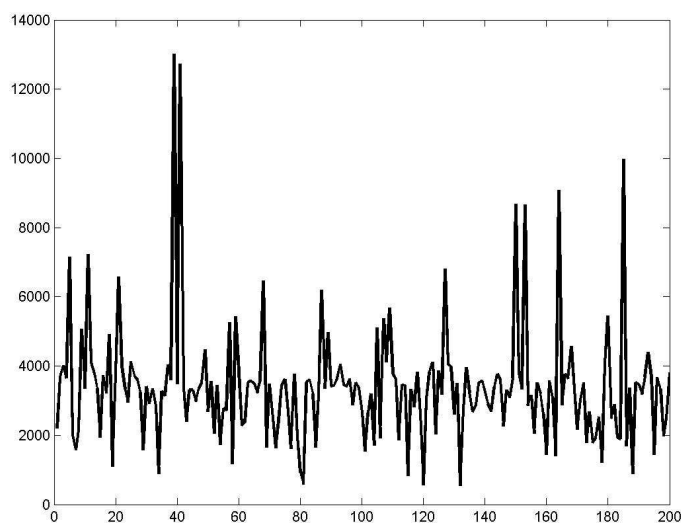


Рисунок 3.9 – Время работы до отказа для 200 образцов исследуемой системы (По минимальным путям)

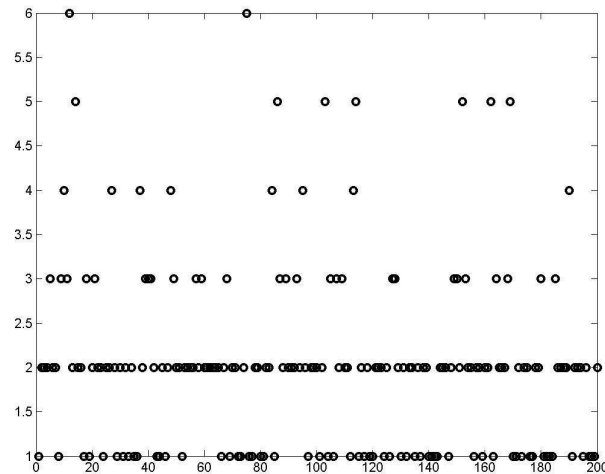


Рисунок 3.10 – Диаграмма отказов минимальных путей системы

Соотношение количества образцов системы, время работы которых определено безотказностью одного из шести минимальных путей, находится оператором:

$$br = \text{hist}(NN, 6)$$

Результат получен в «Окне команд» Matlab: $br = 60\ 96\ 27\ 8\ 7\ 2$.

Этап 4. Определение среднего время безотказной работы t_{cp} и функции вероятности безотказной работы $P_p(t)$ системы (по минимальным путям).

В соответствии с выражением (1.7) находим оценку среднего значения элементов массива результирующего массива t :

$$t_{cpPath} = \text{mean}(t_{path})$$

В «Окне команд» получен результат: $t_{cpPath} = 3398$ час.

По методике, рассмотренной в разделе 3.2 (Этап 4) определяется массив функции вероятности $P_p(t)$ безотказной работы:

```
%Вероятность безотказной работы по min путям
t0(1)=0;
t0(2:201)=tpath;
tsr=sort(t0);
N0=200;
Nt=N0:-1:0;
Ppath = Nt/N0;
plot(tsr,Ppath,'k');pause
```

График функции $P_p(t)$ изображён на рисунке 3.11.

Этап 5. Моделирование работы минимальных сечений, определяющих структуру системы.

В соответствии с рисунком 1.15, в системе имеется 4 минимальных сечения. Каждое минимальное сечение представляет собой параллельное соединение принадлежащих ему элементов.

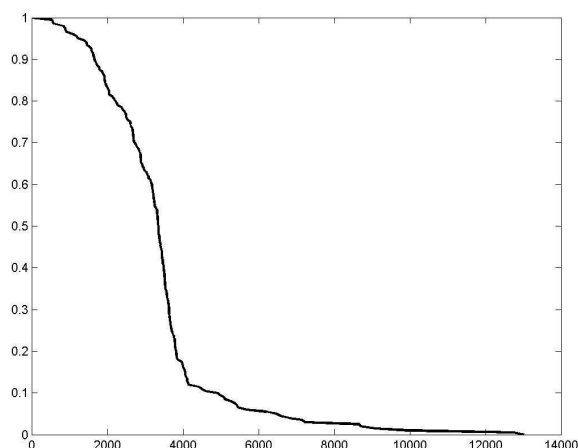


Рисунок 3.11 – График функции вероятности безотказной работы (по минимальным путям)

В соответствии с выражением (3.3) из массивов времени работы элементов 3 и 6 монтируется массив данных для сечения 3-6:

```
%Min Section
%Section 3-6
```

```
T36 = [tv3;tr6];
```

Массив t_{36} из 200 значений времени работы для образцов с сечением 3-6 определяется по массиву T_{36} по выражению (3.6) для параллельного соединения элементов [5]:

```
t36 = max(T36);
```

Подобным образом определяются массивы времён работы и для других минимальных сечений:

```
%Section 1-2-4
```

```
T124 = [tv1;tp2;tp4]; t124 = max(T124);
```

```
%Section 3-4-5
```

```
T345 = [tv3;tp4;tu5]; t345 = max(T345);
```

```
%Section 1-2-5-6
```

```
T1256 = [tv1;tp2;tu5;tr6]; t1256 = max(T156);
```

Этап 6 Моделирование работы системы по схеме минимальных сечений

Из массивов времени работы отдельных сечений формируется массив экспериментальных данных для $N0$ образцов всей системы:

```
Ts = [t36;t124;t345;t1256];
```

Массив $t_{section}$ из $N0 = 200$ значений времени работы всей системы определяется по массиву T_s строкой, формируемой в результате выборки минимального времени из каждого столбца в соответствии с выражением (3.4) для последовательного соединения элементов:

```
[tsection,NN] = min(Ts);
```

Для контроля моделирования строится график $t_{section}$ времени работы системы до отказа (по минимальным сечениям) в зависимости от номера моделируемого образца и график номеров NN путей с наименьшим временем работы в каждом столбце, что в результате позволяет определить,

какие именно сечения отказывают прежде других.

```
plot(tsection); pause  
plot(NN, 'o'); pause
```

Графики приведены на рисунках 3.12 и 3.13.

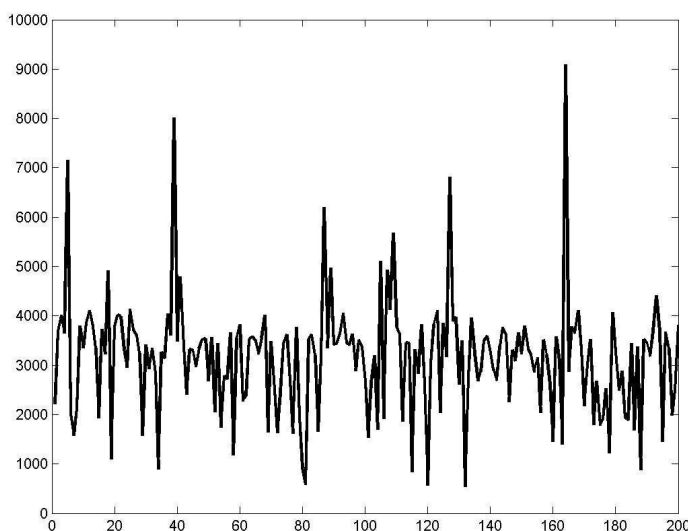


Рисунок 3.12 – Время работы до отказа для 200 образцов исследуемой системы (по минимальным сечениям)

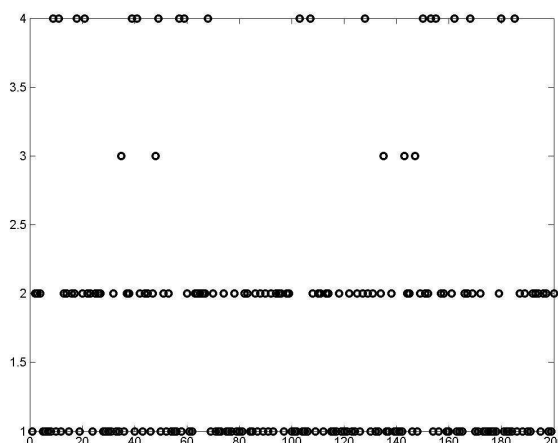


Рисунок 3.13 – Диаграмма отказов минимальных сечений системы

Соотношение количества образцов системы, время работы которых определено отказами одного из четырех минимальных сечений, находится оператором:

```
brs = hist(NN, 4)
```

Результат получен в «Окне команд» Matlab: brs = 99 76 5 20

Этап 7. Определение среднего время безотказной работы t_{cp_s} и функции вероятности безотказной работы $P_s(t)$ системы (по минимальным сечениям).

В соответствии с выражением (1.7) находим оценку среднего значения элементов результирующего массива t :

```
tcpSection=mean(tsection)  
pause
```

В “Окне команд” получен результат: $t_{cpSection} = 3250$ час.

По методике, рассмотренной в разделе 3.2 (Этап 4), определяется массив функции вероятности $P_s(t)$ безотказной работы:

```
%Вероятность безотказной работы
t0(1)=0;
t0(2:201)=tsection;
tsr1=sort(t0);
N0=200;
Nt=N0:-1:0;
Psection = Nt/N0;
plot(tsr1,Psection,'k'); pause
```

График функции $P_p(t)$ изображён на рисунке 3.14.

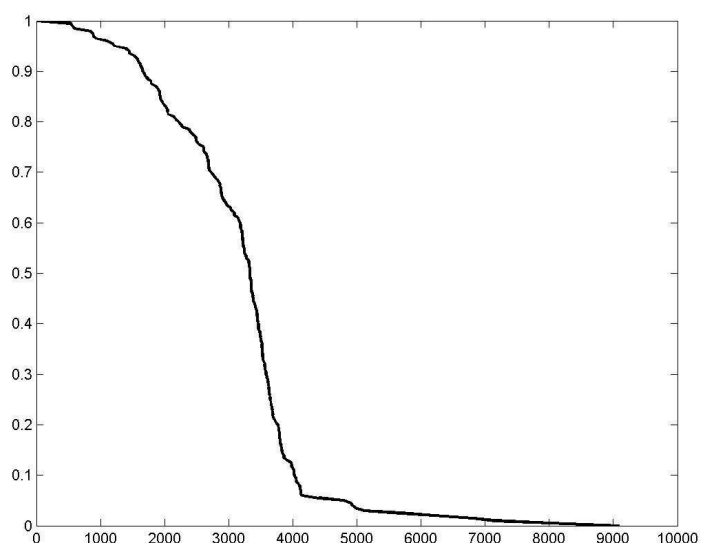


Рисунок 3.14 – График функции вероятности безотказной работы (по минимальным сечениям)

Этап 8 Аналитический расчёт вероятности безотказной работы в момент времени t

Согласно заданию на лабораторную работу, необходимо аналитически определить вероятность безотказной работы системы в момент времени $t_0 = 1300$ час. Значения вероятности $P(t_0)$ для отдельных элементов системы в указанный момент времени приведены в таблице 3.2.

Расчёт двух значений вероятности безотказной работы по методу минимальных путей $P_p(t_0)$ и по методу минимальных сечений $P_s(t_0)$ выполняется по выражениям (1.58),(1.59) при подстановке в них данных таблицы 3.2. В результате расчёта получаем два значения: $P_p(1300) = 0,822$ и $P_s(1300) = 0,721$. Искомое значение находится внутри интервала с этими границами.

В результате моделирования получены два графика функций: $P_p(t)$ - тонкая линия и $P_s(t)$ – жирная (рисунок 3.15).

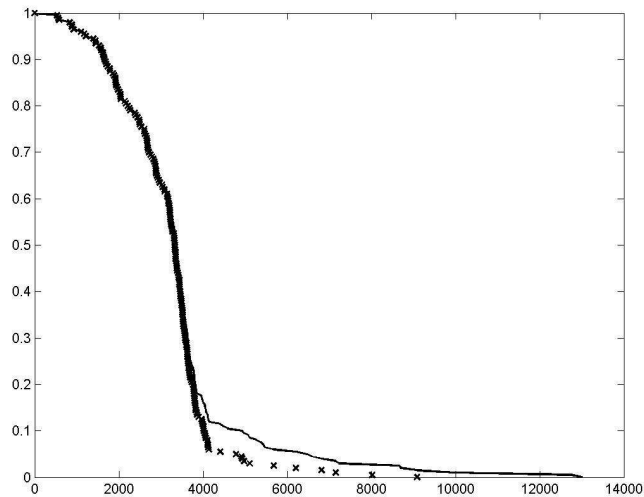


Рисунок 3.15 – График функции вероятности безотказной работы по минимальным путям и минимальным сечениям

Из графиков следует, что значения вероятности безотказной работы $P_p(1300) \approx P_s(1300) = 0,92$, что значительно больше, чем получено при аналитическом расчёте.

Этап 9. Рекомендации по увеличению надёжности исследуемого объекта.

Как следует из графиков на рисунках 3.10,3.13, наиболее часто вся система отказывала вследствие отказов сечений 3-6, 1-2-4 и путей 2-5-6 , 4-5-3.

Общими для этих структур являются элементы 3,6,2 и 4. Следовательно, для увеличения надёжности всей системы можно рекомендовать резервирование этих элементов.

3.4 Лабораторная работа «Статистическое моделирование отказовых ситуаций при определении параметров надёжности восстанавливаемых приборов и элементов (с мгновенным восстановлением)»

Задание по лабораторной работе

1. Синтезировать статистическую модель для системы с мгновенным восстановлением элементов при их отказе.
2. Выполнить алгоритмизацию и моделирование ситуаций отказ/восстановление исследуемой системы.
3. В результате статистической обработки результатов моделирования определить среднее время работы t_{cp} между отказами и функцию параметра потока отказов $\omega(t)$.

Пример выполнения лабораторной работы

Исходные данные

Исследуемая система включает три последовательно соединённых элемента с возможностью «мгновенного» восстановления (рисунок 3.16).

Распределение времени работы каждого элемента до отказа и исходные параметры для моделирования приведены в первых трёх строках Таблицы 3.1.

При построении статистической модели необходимо синтезировать

$N0 = 200$ ситуаций отказ/восстановление.

Как указано в Разделе 1, для систем с восстановлением достаточно построить модель одного образца исследуемой системы для статистически большого количества ситуаций отказ/восстановление.

Этап 1. Синтез статистических моделей отдельных элементов системы для $N0 = 200$ ситуаций отказ/восстановление.

1. Моделируется время $t1, t2, t3$ работы отдельных элементов между их последовательными отказами соответственно при нормальном, Вейбулловском и экспоненциальном законе распределения. Используются операторы, приведённые в 3.2.

```
X1=randn(1,200);t1 = X1*300 +3600;%Элемент 1
X2=rand(1,200);alfa=0.5;beta = 5500/2;
t2= beta*(log(1 - X2)).^(1/alfa); %Элемент 2
t3 = (- 1/lambda)*log(1 - X3);%Элемент 3
```

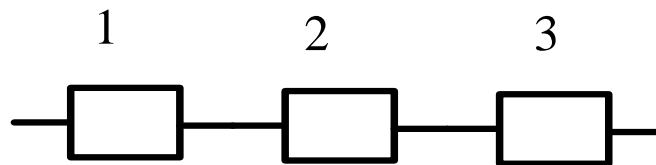


Рисунок 3.16 – Схема системы с восстановлением

2. Из массивов времени работы между отказами отдельных элементов 1,2,3 монтируется массив данных для всей исследуемой системы.

```
T=[t1;t2;t3];
```

Полученный массив T содержит в соответствующей строке 200 значений времени работы t_i каждого элемента от момента будущего отказа/восстановления с номером $i-1$ до следующего отказа/восстановления с номером i .

Этап 2. Статистическое моделирование $N0=200$ ситуаций отказ/восстановление.

Запускается цикл повторения ситуаций отказ/восстановления с переменной $i = 1, \dots, 200$.

1. Предварительно формируется вспомогательный массив $J(1,3)$, указывающий в массиве T на номер столбца в строке с номером элемента, который в рассматриваемый момент времени работает после отказа/восстановления системы с номером $i-1$ и до отказа/восстановления с номером i . Если рассматривать запуск системы как отказ/восстановление с номером $i=0$, то сначала все элементы работают до первого отказа системы и все элементы массива $J(1,3)$ равны 1.

```
J=ones(1,3);
for i = 1:200
```

2. Формируется переменная $t0$, содержащая выборку из массива T времени работы элементов на данном цикле моделирования.

```
t0 = [T(1,J(1));T(2,J(2));T(3,J(3))];
```

3. Для системы с последовательным соединением элементов определяется время t_v работы до отказа с номером i и номер n отказавшего элемента.

```
[tv,n] = min(t0);
t(i) = tv;
```

Полученное значение t_v присвоено переменной t , в которой сохраняются значения времени работы всей системы между отказами.

4. Затем для всей системы начало отсчёта времени переносится в точку, соответствующую произошедшему восстановлению отказавшего элемента.

```
T(1,J(1))=T(1,J(1))-tv;
T(2,J(2))=T(2,J(2))-tv;
T(3,J(3))=T(3,J(3))-tv;
```

5. Для элемента с номером n , отказавшим на данном цикле, увеличивается на 1 и элемент с номером n в массиве J . В результате на $i+1$ цикле моделирования в переменную $t0$ из массива T для этого элемента будет извлечено следующее значение времени работы до отказа. Цикл i моделирования на этом завершается.

```
J(n)=J(n)+1;
end
```

Этап 3. Определение среднего время работы между отказами t_{cp} и функции потока отказов $\omega(t)$.

```
tcp=mean(t)
```

В “Окне команд” получен результат: $t_{cp} = 1355$ час.

Для контроля процесса моделирования строится график значений функции времени t работы системы между отказами в зависимости от номера отказа (см. рисунок 3.17):

```
plot(t); pause
```

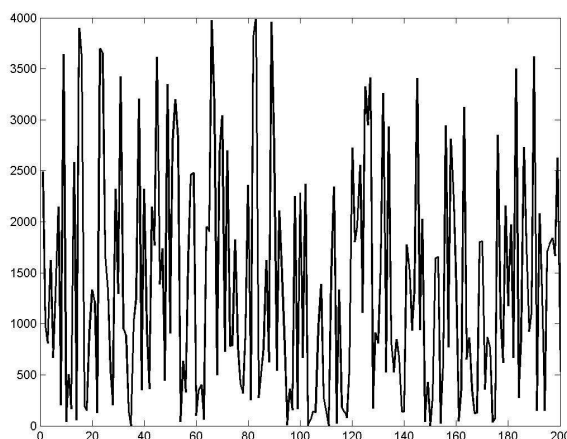


Рисунок 3.17 – Время работы между отказами

Определим параметр потока отказов $\omega(t)$ по результатам экспериментов с рассматриваемой моделью системы. В отличие от ранее рассмотренных примеров, в эксперименте участвует одна модель системы. Для каждой из 200 ситуаций отказ/восстановление i найдено время $t(i)$ между отказом с номером $(i-1)$ и отказом i . Параметр потока отказов $\omega(t)$ определяется в результате

обработки массива t по методике, соответствующей вычислению значений функций вероятности безотказной работы и интенсивности отказов, рассмотренной в разделе 3.2.

```
%Параметр потока отказов
t0(1)=0;
t0(2:201)=t;
tsr=cumsum(t0);
t20=tsr(1:20:201);
dt=diff(t20);
Nt20 = 1:20:200;
omega=20./dt;вычисление параметра потока
plot(t20(1:1:(length(t20)-1)),omega,'k')
```

Параметр $\omega(t)$ потока отказов вычисляется по выражению (1.60). График функции $\omega(t)$ приведён на рисунке 3.18.

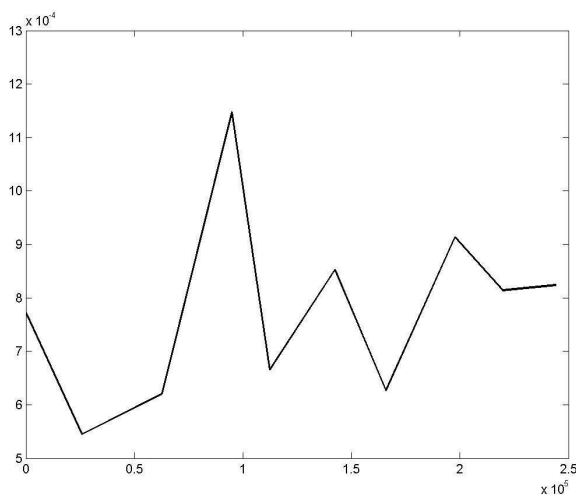


Рисунок 3.18 – Функция параметра потока отказов

В отличие от расчёта, приведённого в разделе 3.2, при формировании оси времени работы системы используется не функция сортировки, а функция нарастающего суммирования элементов массива `cumsum` [5].

3.5 Лабораторная работа «Статистическое моделирование отказовых ситуаций при определении параметров надёжности восстанавливаемых приборов и элементов (с немгновенным восстановлением)»

Задание по лабораторной работе

1. Синтезировать статистическую модель для системы с немгновенным восстановлением элементов при их отказе.

2. Выполнить алгоритмизацию и моделирование ситуаций отказ/восстановление исследуемой системы.

3. В результате статистической обработки результатов моделирования определить: среднее время работы t_{cp} между отказами, среднее время tr_{cp} восстановления системы, функцию параметра потока отказов $\omega(t)$, приближённый вид функции готовности $Kr(t)$, определить величину

коэффициента готовности.

Пример выполнения лабораторной работы

Исходные данные

Исследуемая система включает три последовательно соединённых элемента с немгновенным восстановлением (рисунок 3.16).

Распределение времени работы каждого элемента до отказа и исходные параметры для моделирования приведены в первых трёх строках таблицы 3.1, параметры этапа восстановления – в таблице 3.3.

Таблица 3.3 Параметры восстановления элементов систем

Элемент	Вид распределения времени восстановления элемента	Параметры распределения
1	Нормальное	$t_{cp} = 90$ час, $\sigma = 25$ час
2	Равномерное	$t_{cp} = 150$ час; $\sigma = 30$ час
3	«Бета»-распределение	$t_{cp} = 115$ час, $\sigma = 32$ час, $\alpha = 2$, $\beta = 3$

При построении статистической модели необходимо синтезировать $N0 = 200$ ситуаций отказ/восстановление.

Как указано в Разделе 1, для систем с восстановлением достаточно построить модель одного образца исследуемой системы для статистически большого количества ситуаций отказ/восстановление.

Этап 1. Синтез статистических моделей отдельных элементов системы для $N0 = 200$ ситуаций отказ/восстановление.

1. Аналогично модели, рассмотренной в разделе 3.4, время работы элементов 1,2,3 между отказами и массив данных для всей исследуемой системы для 200 ситуаций отказ/восстановление определяется операторами:

```
X1=randn(1,200);t1 = X1*300 +3600;%Элемент 1
X2=rand(1,200);alfa=0.5;beta = 5500/2;
t2= beta*(log(1 - X2)).^(1/alfa); %Элемент 2
t3 = (- 1/lambda)*log(1 - X3);%Элемент 3
T=[t1;t2;t3];
```

2. Формируются массивы времён восстановлений элементов 1,2,3 после каждого из 200 отказов. Используются данные таблицы 3.3.

Массив времён восстановления элемента 1 с нормальным распределением формируется по алгоритму (2.36).

```
X11=randn(1,200); tr1 = X11*25 +90; %Элемент 1
```

Для элемента 2 время восстановления распределено по равномерному закону и моделируется по алгоритму (2.22). Предварительно по выражениям (2.20),(2.21) определены параметры алгоритма $t_{2min} = 100$ час и $t_{2max} = 200$ час.

```
X22=rand(1,200);A=100;B=200;
tr2 = t2min +( t2max - t2min)*X22; %Элемент 2
```

Время восстановления элемента 3 имеет «бета»-распределение. Предварительно моделируется стандартное «бета»-распределение по методу порядковой статистики (Раздел 2.3).

```
alfa=3;beta=2;
l=alfa+beta-1;
```

Значение вспомогательного параметра l вычисляется как $l = \alpha + \beta - 1$.

В соответствии с алгоритмом, выполняется сортировка сгенерированных случайных значений с последующей выборкой из строки каждого элемента с номером α :

```
x33=rand(1,200);  
x33=sort(X33);  
t33=x33(alfa,:);
```

В соответствии с данными таблицы 3.3 по выражениям (2.38),(2.39) вычисляются параметры $t_{3\min} = 20$ час и $t_{3\max} = 180$ час. Время восстановления с «бета»-распределением общего вида моделируется по выражению (2.42).

```
t3min =20; t3max =180;  
tr3= t3min +( t3max - t3min)*t33; %Элемент 3
```

3. Из массивов времени восстановления отдельных элементов 1,2,3 монтируется массив Tr данных восстановления для всей исследуемой системы

```
Tr=[tr1;tr2;tr3];
```

Этап 2. Статистическое моделирование $N0=200$ ситуаций отказ/восстановление.

Последовательность операторов моделирования на этом этапе практически соответствует рассмотренной в разделе 3.4. Отличие заключается в том, что, помимо массива J , задающего в массиве T времён работы номер столбца в строке с номером элемента системы, работающего между восстановлением с номером $i-1$ и следующим отказом с номером i , вводится аналогичный массив $Jr(1,3)$. Элементы этого массива задают в массиве Tr номер столбца в строке с номером элемента системы, который в рассматриваемый момент находится на этапе восстановления.

```
t = [];tr=[];Kr=[];  
J=ones(1,3);  
Jr=ones(1,3);  
for i = 1:200  
    t0 = [T(1,J(1));T(2,J(2));T(3,J(3))];  
    [tv,n] = min(t0);  
    t(i) = tv;  
    T(1,J(1))=T(1,J(1))-tv;  
    T(2,J(2))=T(2,J(2))-tv;  
    T(3,J(3))=T(3,J(3))-tv;  
    J(n)=J(n)+1;  
    tr(i)=Tr(n,Jr(n));  
    Jr(n)=Jr(n)+1;  
    Kr(i) = sum(t)/(sum(t)+sum(tr));  
end
```

Завершающий исполнимый оператор цикла определяет текущее значение $Kr(i)$ оценки функции готовности в соответствии с выражением (1.72).

Этап 3. Определение среднего время работы между отказами $t_{ср}$,

среднего времени восстановления t_{cp} , функции потока отказов $\omega(t)$ и приближённый вид функции готовности $Kr(t)$.

Последовательность операторов моделирования на этом этапе практически соответствует рассмотренной в разделе 3.4.

```
tcp=mean(t)
trcp=mean(tr)
```

В “Окне команд” получены результаты: $t_{cp} = 1355$ час, $tr_{cp} = 117$ час.

Для контроля процесса моделирования строятся графики значений функции времени t работы системы между отказами и времени восстановления tr в зависимости от номера отказа:

```
plot(t); pause
plot(tr); pause
```

Также определяется функция потока отказов $\omega(t)$, строится соответствующий график:

```
t0(1)=0;
t0(2:201)=t+tr;
tsr=cumsum(t0);
t20=tsr(1:20:201);
dt=diff(t20);
Nt20 = 1:20:200;
omega=20./dt;
plot(t20(1:1:(length(t20)-1)),omega,'k')
pause
```

Определяется функция готовности, график изображён на рисунке 3.19:

```
plot(tsr(2:201),Kr,'k')
```

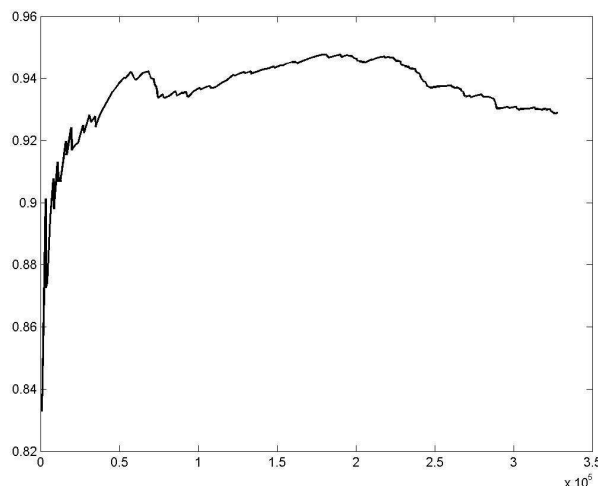


Рисунок 3.19 – Функция готовности $Kr(t)$

Определяется значение коэффициента готовности Kg как предела функции готовности $Kr(t)$. В данном случае оценкой коэффициента готовности можно полагать последний элемент массива Kr .

$$Kg = Kr(N)$$

Получено значение $Kg = 0.954$.

3.6 Структура отчета по лабораторной работе

Отчёт по лабораторной работе сопровождается титульным листом, оформленным по стандартной форме (вверху листа название или эмблема университета, далее название лабораторной работы, Ф.И.О. студента, номер группы, Ф.И.О. преподавателя, внизу листа – год).

Содержательная часть отчёта включает следующие разделы:

- 1) Цель работы и поставленные задачи исследования
- 2) Описание моделируемого ОЭПиС, схема соединения элементов (по надёжности). Схема и описание структуры и параметров лабораторной установки
- 3) Таблицы с данными по надёжности элементов моделируемой системы
- 4) Программа статистического моделирования
- 5) Результаты статистического моделирования, полученные значения искомых параметров, полученных зависимостей
- 6) Численный расчёт параметров по теоретической модели, сравнение с результатами статистического моделирования (при наличии в задании соответствующего пункта)
- 7) Выводы по результатам исследований, рекомендации по повышению надёжности исследуемой системы.

Контрольные вопросы

1. Укажите операторы Matlab, используемые при моделировании исходных случайных величин.
2. С какой целью формируются дополнительные элементы в массиве значений времени при определении функций вероятности безотказной работы и интенсивности отказов?
3. Почему необходимо использовать функцию `diff` при определении функций интенсивности отказов и потока отказов?
4. Назовите возможные причины значительного несовпадения величин, полученных в некоторых их приведённых примеров в результате статистического моделирования и расчёта по теоретическим моделям.
5. Почему при анализе структуры, соответствующей последовательному соединению, из ряда значений времени работы элементов выбирается наименьшее значение, а при рассмотрении параллельной структуры – наибольшее?
6. Каким образом по результатам экспериментов с моделью можно определить наименее надёжный элемент системы? Наиболее надёжный?
7. По какому из полученных результатов моделирования можно сделать вывод об интервале, в котором может находиться время работы системы до отказа?
8. Сравните результаты анализа надёжности системы со сложной топологией, полученные в результате испытаний статистической модели и расчёта по теоретической модели. По какому методу определено более точное значение параметров надёжности системы?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии изложены общие принципы построения статистических моделей для исследования и проектирования технических систем, в частности, ОЭПиС. Статистическое моделирование представлено примерами синтеза и алгоритмизации моделей для анализа надёжности технических систем. Рассмотрение как теоретических, так и статистических моделей надёжности позволяет сравнить эффективность их применения при оценке качества проектируемых ОЭПиС.

Приведены практические примеры построения моделей для исследования характеристик надёжности ОЭПиС. Предлагаемые лабораторные работы позволяют получить практические навыки по расчету параметров надёжности наиболее часто встречающихся систем с последовательным, параллельным (в режиме резервирования) топологически сложным соединением элементов, а также восстанавливаемых систем.

Особое внимание уделено рассмотрению методов и алгоритмов моделирования случайных величин с типовыми для оптоэлектронных элементов параметрами распределения.

На основе типовых приёмов статистического моделирования и методов синтеза значений случайных величин могут также создаваться модели для исследования процессов обработки сигналов, влияния шумов и фонов, параметрической чувствительности и точностного анализа.

Соответственно, рассмотренные объекты системы MatLab могут использоваться не только для построения моделей отказовых ситуаций, но и для параметрического синтеза при других процедурах компьютерного проектирования.

Раздел, относящиеся к общим методам статистического моделирования, могут быть рекомендованы аспирантам, занимающимся построением моделей для исследования ОЭПиС различного назначения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Половко А.М., Гуров С.В. Основы теории надёжности. – 2-е изд., перераб. и доп.- СПб.: БХВ-Петербург 2006. - 704 с.: ил.
2. Коняхин И.А. Методы и средства статистического моделирования оптико-электронных систем/ Учебное пособие.— СПб: СПб ГУ ИТМО, 2006. - 52 с.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.:Айрис-пресс, 2009. – 608 с.: ил.
4. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. – СПб.: Физматлит, 1982. – 296 с.: ил.
5. Дьяконов В.П. MATLAB. Полный самоучитель. – ДМК-Пресс, 2017. – 768 с.: ил.

Коняхин Игорь Алексеевич

**Статистическое моделирование оптико-
электронных систем
(определение параметров надёжности)**

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49