1 Введение

Наряду с поиском по заданной функции ее производной, что является задачей дифференциального исчисления, часто возникает необходимость в обратной операции – восстановлении функции по ее производной. Так, если известно уравнение движения материальной точки $s = s(t)$, то можно найти скорость $v(t) = s'(t)$, а потом ускорение $a(t) = v'(t)$. Однако, приходится решать и обратную задачу: известны силы, действующие на точку, а значит (из второго закона Ньютона), и ускорение $a = a(t)$, а надо найти скорость и пройденный путь. То есть необходимо по функции $a(t)$ восстановить функцию $v(t)$, для которой функция a является производной, а потом, аналогично, по функции v восстановить функцию s. А если рассмотреть колебательный контур, в котором известны индуктивность катушки и емкость конденсатора, включенных в электрическую цепь, то можно рассчитать ток i(t) в цепи, но для этого приходится решать дифференциальное уравнение, а для этого опять надо уметь восстанавливать функции по их производным.

Функции, для которых заданные функция являются производными, называются первообразными от данных функций, а процесс их отыскания называется интегрированием. Первообразная от данной функции не является единственной, совокупность всех первообразных называется неопределенным интегралом.

В отличие от дифференцирования, где имеется четкий алгоритм нахождения производной, при нахождении первообразной каждый раз нужен специальный подход. Более того, не у каждой элементарной функции существует первообразная, являющаяся элементарной функцией.

Основные приемы интегрирования обсуждаются в данном пособии.

2 Первообразная и неопределенный интеграл

Пусть Δ – конечный или бесконечный промежуток числовой оси, и функции f и F заданы на Δ.

Определение 1 *Функция F называется первообразной функции f на промежутке Δ, если функция F дифференцируема на Δ и $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in \Delta$.*

Например, функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ является первообразной функции $f(x) = x^2$.

Первообразная любой функции непрерывна, так как она имеет производную. Однако, функция, у которой есть первообразная не обязательно непрерывна. Например, у разрывной в нуле функции

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

на всей числовой оси существует первообразная

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Теорема 1 *Если функция f непрерывна на промежутке Δ, то существует первообразная функции f на Δ.*

В дальнейшем будем говорить о первообразных непрерывных на своей области определения функций.

Теорема 2 *Для того, чтобы две дифференцируемые на Δ функции F и G были первообразными одной и той же функции f необходимо и достаточно, чтобы они отличались на Δ на постоянную, то есть функции F и G первообразные f тогда и только тогда, когда*

$$G(x) = F(x) + C, \qquad x \in \Delta,$$

где C – некоторая постоянная.

Доказательство. Если F первообразная функции f, то есть $F'(x) = f(x)$ на Δ, то функция $F(x)+C$ является первообразной той же функции f, так как $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

Если функции F и G являются первообразными функции f, то есть $F'(x) = G'(x) = f$, то $(F(x)-G(x))' = F'(x)-G'(x) = 0$. Следовательно, по теореме Лагранжа $F(x) - G(x) = C$ на Δ. ■

Определение 2 *Совокупность всех первообразных функции f на Δ называется неопределенным интегралом функции f и обозначается*
$\int f(x)\,dx$.

Под знаком интеграла пишут для удобства не саму функцию f, а ее произведение на дифференциал dx. Это делается для того, чтобы указать, по какой переменной ищут первообразную. Функция f называется подынтегральной функцией, а выражение $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Если F какая-либо первообразная функции f, то пишут

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{1}$$

Согласно формуле (1) под знаком интеграла стоит дифференциал функции F:

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

3 Основные свойства неопределенного интеграла

Пусть функция f имеет первообразную F на промежутке Δ.

1. $\int dF(x) = F(x) + C$, или, что то же самое, $\int F'(x)dx = F(x) + C$.

Это сразу следует из определения неопределенного интеграла как совокупности всех первообразных. ■

2. *Аддитивность* неопределенного интеграла. Пусть функции f_1 и f_2 имеют первообразные на промежутке Δ, тогда функция $(f_1 + f_2)$ имеет первообразную на промежутке Δ, причем

$$\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx. \tag{2}$$

Последнее равенство понимается как совпадение двух множеств функций.

Доказательство. Пусть функции F_1 и F_2 являются первообразными функций f_1 и f_2 соответственно, то есть $F_1'(x) = f_1(x)$, $F_2'(x) = f_2(x)$. Тогда

$$\int f_1(x)\,dx = F_1(x) + C_1, \quad \int f_2(x)\,dx = F_2(x) + C_2,$$

где $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные. Положим $F(x) := F_1(x) + F_2(x)$. Функция F будет первообразной функции $(f_1 + f_2)$, так как

$$F'(x) = F_1'(x) + F_2'(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad x \in \Delta.$$

Следовательно,

$$\int (f_1(x) + f_2(x))\, dx = F(x) + C = F_1(x) + F_2(x) + C,$$

где C – произвольная постоянная. С другой стороны,

$$\int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx = F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2.$$

Поскольку $C,\ C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные, то множества функций $F_1(x)+F_2(x)+C$ и $F_1(x)+C_1+F_2(x)+C_2$ совпадают, что и означает справедливость равенства (2). ∎

3. Пусть λ – число, $\lambda \neq 0$. Тогда

$$\int \lambda f(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx, \tag{3}$$

последнее равенство понимается как совпадение двух множеств функций.

Доказательство. Пусть функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$. Тогда функция $\lambda F(x)$ является первообразной функции $\lambda f(x)$, так как $(\lambda F(x))' = \lambda F'(x) = \lambda f(x)$. Значит,

$$\int \lambda f(x)\, dx = \lambda F(x) + C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная. С другой стороны,

$$\lambda \int f(x)\, dx = \lambda(F(x) + C_2) = \lambda F(x) + \lambda C_2,$$

где C_2 – произвольная постоянная. Поскольку $\lambda \neq 0$, C_1 и C_2 произвольные постоянные, то множества функций $\lambda F(x) + C_1$ и $\lambda F(x) + \lambda C_2$ совпадают, что и означает справедливость равенства (3). ∎

4. *Линейность* интеграла. Пусть $\lambda_1,\ \lambda_2$ – числа, хотя бы одно из них не ноль. Тогда

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\, dx = \lambda_1 \int f_1(x)\, dx + \lambda_2 \int f_2(x)\, dx.$$

Доказательство сразу следует из свойств 2. и 3. ■

Таблица основных интегралов.

1. $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$, в частности, $\int e^x\,dx = e^x + C.$
4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
8. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$
9. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C, \quad |x| < |a|.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C, \quad |x| > |a|.$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C.$

Если знаменатель подынтегральной функции обращается в ноль в некоторой точке, то написанные формулы будут справедливы лишь для тех промежутков, в которых указанный знаменатель в ноль не обращается.

Примеры.

1. Найти интеграл $\int(3\sin x + 5\cos x)\,dx$.

Решение. Воспользовавшись линейностью интеграла (свойство 4) и таблицей, получим

$$\int(3\sin x+5\cos x)\,dx = 3\int\sin x\,dx+5\int\cos x\,dx = -3\cos x+5\sin x+C.$$

2. Найти интеграл $\int(\sqrt{x} + x)\sqrt{x}\,dx$.

Решение. Раскрыв скобки, и воспользовавшись линейностью интеграла и таблицей, получим

$$\int (\sqrt{x}+x)\sqrt{x}\,dx = \int x\,dx + \int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C.$$

Упражнения.

1. $\int dx$. **2**. $\int \sqrt[3]{x}\,dx$. **3**. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$. **4**. $\int (x^3+3^x)\,dx$. **5**. $\int 2\sin^2\frac{x}{2}\,dx$.
6. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$. **7**. $\int (\sqrt{x}+3)(x^2+\sqrt{x})\,dx$. **8**. $\int \frac{(2+x)^3}{x\sqrt{x}}\,dx$.
9. $\int \frac{5\cdot 2^x+2\cdot 5^x}{2^x}\,dx$. **10**. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

4 Основные методы интегрирования

4.1 Замена переменной в неопределенном интеграле

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ заданы соответственно на промежутках Δ_x и Δ_t, причем $\varphi(\Delta_t) = \Delta_x$. Тогда имеет смысл сложная функция $f(\varphi(t))$, $t \in \Delta_t$. Пусть функция φ дифференцируема и монотонна, тогда существует обратная функция $\varphi^{-1}(x)$ на Δ_x.

Теорема 3 *Пусть функция φ дифференцируема и монотонна на Δ_t, функции $f(x)$ задана на Δ_x и $\varphi(\Delta_t) = \Delta_x$. Если у функции f существует первообразная F на Δ_x, то*

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Доказательство. Функция F является первообразной функции f, значит, $F' = f$. Пусть $x = \varphi(t)$, покажем, что функция $F(\varphi(t))$ является первообразной функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Действительно,

$$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Таким образом, имеем

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C = F(\varphi(t))|_{t=\varphi^{-1}(x)} + C = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)},$$

где C – произвольная постоянная. ∎

Заметим, что иногда бывает удобнее действовать в другую сторону, то есть

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}.$$

Эта операция называется подведением под знак дифференциала.

Примеры.

1. Найти интеграл $\int e^{5x}\,dx$.

Решение. Сделаем замену $t = 5x$. Выражая x, получим $x = \frac{1}{5}t$, $dx = \frac{1}{5}dt$. Подставляем

$$\int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}\int e^t\,dt = \frac{1}{5}e^t + C = \frac{1}{5}e^{5x} + C.$$

2. Найти интеграл $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

Решение. Используя определение тангенса, и подводя синус под знак дифференциала, получим

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

3. Найти интеграл $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$.

Решение. Заметив, что $xdx = \frac{1}{2}dx^2 = \frac{1}{2}d(x^2+1)$, получим

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

В последнем равенстве неявно была использована замена $t = x^2 + 1$.

Упражнения.

11. $\int \cos 3x\,dx$. **12**. $\int \frac{\ln x}{x}dx$. **13**. $\int x^9\sqrt[7]{8-x^{10}}\,dx$. **14**. $\int \frac{x^3}{x^2+4}\,dx$.
15. $\int a^{-2x}\,dx$. **16**. $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}\,dx$. **17**. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1-\operatorname{ctg} x}}$. **18**. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$.
19. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,dx$. **20**. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

4.2 Интегрирование по частям

Теорема 4 *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на некотором промежутке Δ и существует интеграл $\int v\,du$, то существует интеграл $\int u\,dv$ и справедлива формула интегрирования по частям:*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Доказательство. По правилу дифференцирования произведения $d(uv) = v\,du + u\,dv$, и поэтому

$$u\,dv = d(uv) - v\,du.$$

Интеграл от каждого слагаемого справа существует, ибо первый существует по свойству 1 неопределенного интеграла, $\int d(uv) = uv + C$, а второй существует по условию. Значит, существует интеграл $\int u\,dv$ и, воспользовавшись аддитивностью неопределенного интеграла (свойство 2), имеем

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du = uv - \int v\,du,$$

где константа C отнесена к интегралу $\int v\,du$. $\blacksquare$

Применение правила интегрирования по частям целесообразно в тех случаях, когда интеграл в правой части равенства либо проще исходного, либо ему подобен. Интегрирование по частям применимо, в частности, к следующим классам функций.

I. В интегралах вида $\int P(x)\cos ax\,dx$, $\int P(x)\sin ax\,dx$, $\int P(x)e^{ax}\,dx$, где $P(x)$ – многочлен, $a \neq 0$, в качестве функции u следует принять $P(x)$, а под дифференциал подвести функции $\sin ax$, $\cos ax$, e^{ax} соответственно. После интегрирования по частям, интеграл сводится к интегралу того же типа, но с меньшим показателем. Интеграл линеен (свойство 4), поэтому вместо многочлена $P(x)$ рассмотрим одночлен x^n, где n – натуральное число. Рассмотрим первый из вышеупомянутых интегралов (остальные интегрируются аналогично):

$$\int x^n \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\int x^n d\sin ax = \frac{1}{a}x^n \sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax dx.$$

Интегрирование по частям производят n раз, пока не исчерпается степень у x.

Примеры.

1. Найти интеграл $\int x\sin 3x\,dx$.

Решение. Подведем синус под знак дифференциала и проинтегрируем по частям.

$$\int x\sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}\int xd\cos 3x = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\int\cos 3xdx =$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C.$$

2. Найти интеграл $\int x^2e^x\,dx$

Решение. Возьмем $u = x^2,\ \ dv = e^x\,dx$. Тогда $v = e^x,\ du = 2xdx$ и, используя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\int x^2e^x\,dx = \int x^2\,de^x = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx.$$

Повторив процедуру для $u = x,\ \ dv = e^x\,dx$, получим

$$\int xe^x\,dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Окончательно,

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

II. В интегралах вида $\int P(x)\arcsin ax\,dx,\ \ \int P(x)\arccos ax\,dx$,

$\int P(x)\,\mathrm{arctg}\,ax\,dx,\quad \int P(x)\,\mathrm{arcctg}\,ax\,dx$ и $\int P(x)\ln x\,dx$ выражение $P(x)dx$ берется в качестве dv. Интегрирование по частям позволяет избавиться от обратных тригонометрических функций и от логарифма. Если обратные тригонометрические функции или логарифм возведены в степень $m,\ m > 0$, то при интегрировании по частям степень m понизится на единицу, и для получения ответа надо проинтегрировать по частям m раз. Как и в предыдущем пункте вместо многочлена $P(x)$ рассмотрим одночлен x^n, где n – натуральное число или ноль.

$$\int x^n\ln^m x\,dx = \frac{1}{n+1}\int\ln^m x\,dx^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln^m x - \frac{m}{n+1}\int x^n\ln^{m-1}x\,dx.$$

Примеры.

1. Найти интеграл $\int x \ln x\, dx$

Решение. Возьмем $u = \ln x, \quad dv = xdx$. Тогда $v = \frac{x^2}{2}, \ du = \frac{1}{x}\, dx$ и, используя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

2. Найти интеграл $\int \arccos 2x\, dx$.

Решение. Пусть $u = \arccos 2x, \ dv = dx$, тогда $v = x, \ du = -2\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx$. Проинтегрируем по частям:

$$\int \arccos 2x\, dx = x \arccos 2x + 2 \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx =$$

$$= x \arccos 2x - \frac{1}{4} \int (1-4x^2)^{-1/2}\, d(1-4x^2) = x \arccos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C.$$

III. Интегралы вида $\int e^{bx} \sin ax\, dx, \ \int e^{bx} \cos ax\, dx, \ \ a \neq 0, \ b \neq 0$, при интегрировании по частям дважды, сводятся сами к себе. Подведем под дифференциал функцию e^{bx} и проинтегрируем по частям:

$$I_1 := \int e^{bx} \sin ax\, dx = \frac{1}{b} \int \sin ax\, de^{bx} = \frac{1}{b} e^{bx} \sin ax - \frac{a}{b} \int e^{bx} \cos ax\, dx.$$

Подводя опять под дифференциал функцию e^{bx} и проинтегрировав последний интеграл по частям, получим

$$I_1 = \frac{1}{b} e^{bx} \sin ax - \frac{a}{b^2} \int \cos ax\, de^{bx} =$$

$$= \frac{1}{b} e^{bx} \sin ax - \frac{a}{b^2} \cos ax\, e^{bx} - \frac{a^2}{b^2} \int e^{bx} \sin ax\, dx.$$

Последний интеграл равен I_1. Таким образом, получили уравнение относительно I_1

$$I_1 = \frac{1}{b} e^{bx} \sin ax - \frac{a}{b^2} \cos ax\, e^{bx} - \frac{a^2}{b^2} I_1.$$

Выражая отсюда I_1, окончательно получим

$$\int e^{bx} \sin ax\, dx = \frac{e^{bx}}{a^2 + b^2} [b \sin ax - a \cos ax] + C.$$

Аналогично можно получить

$$\int e^{bx}\cos ax\,dx = \frac{e^{bx}}{a^2+b^2}[b\cos ax + a\sin ax] + C.$$

Упражнения.

21. $\int x\cos 2x\,dx$. **22**. $\int \arcsin x\,dx$. **23**. $\int x^2e^{-x}\,dx$. **24**. $\int \ln x\,dx$.
25. $\int x3^x\,dx$. **26**. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$. **27**. $\int\ x^3e^x dx$. **28**. $\int \ln^2 x\,dx$.
29. $\int x\operatorname{tg}^2 x\,dx$. **30**. $\int \cos\ln x\,dx$.

Далее рассмотрим различные приемы интегрирования важнейших классов элементарных функций.

5 Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется дробь, числителем и знаменателем которой являются многочлены:

$$R(x) = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_Nx^N + b_{N-1}x^{N-1} + \ldots + b_0},$$

считаем, что $a_n \neq 0$, $b_N \neq 0$. Если степень многочлена в числителе строго меньше степени многочлена в знаменателе, $n < N$, то такая рациональная дробь называется правильной. Если же степень многочлена в знаменателе больше либо равна степени числителя, $n \geq N$, то такая рациональная дробь может быть сведена к сумме многочлена и правильной рациональной дроби путем деления одного многочлена на другой с остатком (например, делением в столбик или прибавлением и вычитанием в числителе подходящего выражения). Пусть $P_n(x)$ числитель, а $Q_N(x)$ знаменатель рациональной дроби $R(x)$ и $n \geq N$

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_N(x)} = S(x) + \frac{T_k(x)}{Q_N(x)},$$

где $S(x)$ и $T_k(x)$ многочлены, причем $k < N$.

Далее, любая правильная рациональная дробь может быть разложена на сумму простейших рациональных дробей. Простейшими называются дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}, \quad p^2 - 4q < 0, \quad k, m \in \mathbb{N},$$

A, B, C – вещественные числа.

Приведем без доказательства теорему о разложении любой правильной рациональной дроби на сумму простейших рациональных дробей.

Теорема 5 *Пусть* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *– правильная рациональная дробь с вещественными коэффициентами. Если*

$$Q(x) = \prod_{j=1}^{r}(x-a_j)^{k_j}\prod_{l=1}^{s}(x^2+p_lx+q_l)^{m_l},$$

где a_j *– попарно различные вещественные корни многочлена* $Q(x)$ *кратности* k_j, $j = 1, ..., r$; *а трехчлены* $x^2 + p_lx + q_l$ *такие, что* $p_l^2 - 4q_l < 0$, $l = 1, ..., s$. *Тогда существуют единственные числа* $A_j^{(1)}, ..., A_j^{(k_j)}$, $j = 1, ..., r$; $B_l^{(1)}, ..., B_l^{(m_l)}$, $C_l^{(1)}, ..., C_l^{(m_l)}$, $l = 1, ..., s$, *такие что*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{A_j^{(1)}}{x-a_j} + \frac{A_j^{(2)}}{(x-a_j)^2} + ... + \frac{A_j^{(k_j)}}{(x-a_j)^{k_j}}\right) +$$

$$+\sum_{l=1}^{s}\left(\frac{B_l^{(1)}x + C_l^{(1)}}{x^2+p_lx+q_l} + \frac{B_l^{(2)}x + C_l^{(2)}}{(x^2+p_lx+q_l)^2} + ... + \frac{B_l^{(m_l)}x + C_l^{(m_l)}}{(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}}\right).$$

Пример. Разложить на простейшие дробь $\frac{4x^2-3x}{(x-2)^2(x^2+1)}$.

Решение. Дробь является правильной, поэтому по теореме

$$\frac{4x^2-3x}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим

$$\frac{4x^2-3x}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{A_1(x-2)(x^2+1) + A_2(x^2+1) + (Bx+C)(x-2)^2}{(x-2)^2(x^2+1)}.$$

У дроби справа и слева одинаковые знаменатели, значит, они равны тогда, когда равны их числители. Таким образом, найдем A_1, A_2, B, C из равенства

$$4x^2 - 3x = A_1(x-2)(x^2+1) + A_2(x^2+1) + (Bx+C)(x-2)^2. \qquad (4)$$

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда их коэффициенты равны. Поэтому приравняв коэффициенты при каждой степени, получим систему из 4-х уравнений и 4-х неизвестных:

$$\begin{cases} A_1 + B & = \ 0 \\ -2A_1 + A_2 - 4B + C & = \ 4 \\ A_1 + 4B - 4C & = -3 \\ -2A_1 + A_2 + 4C & = \ 0 \end{cases}$$

Отсюда $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $B = -1$, $C = 0$ (заметим, что подставив в выражение (4) $x = 2$, мы сразу могли найти A_2). Таким образом, имеем

$$\frac{4x^2 - 3x}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} - \frac{x}{x^2+1}$$

разложение правильной рациональной дроби на простейшие.

Итак, для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь, надо сначала свести ее к сумме многочлен плюс правильная дробь, а потом правильную дробь разложить на простейшие.

Интеграл от простейшей дроби $\frac{A}{(x-a)^n}$ является табличным. При $n = 1$

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\,\ln|x-a| + C.$$

При $n > 1$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = A\int (x-a)^{-n}\,d(x-a) = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C.$$

Интеграл от простейшей дроби $\frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n}$, где $p^2 - 4q < 0$ сводится к интегралу от дроби $\frac{bt+c}{(t^2+a^2)^n}$ путем выделения полного квадрата,

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4},$$

и линейной замены переменной $t = x + \frac{p}{2}$ (через a^2 обозначена положительная величина $q - \frac{p^2}{4}$). При $n = 1$

$$\int \frac{bt+c}{t^2+a^2}\,dt = b\int \frac{t}{t^2+a^2}\,dt + c\int \frac{1}{t^2+a^2}\,dt = \frac{b}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{c}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a} + C.$$

Пусть $n > 1$. Интеграл $\int \frac{bt+c}{(t^2+a^2)^n}\,dt$ можно разбить на два интеграла. Первый легко сводится к табличному:

$$b \int \frac{t}{(t^2+a^2)^n}\,dt = -\frac{b}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + C.$$

Для интеграла $I_n := \int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\,dt$ выведем рекуррентную формулу при помощи интегрирования по частям, то есть выразим I_n через I_{n-1}:

$$I_n := \int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\,dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^n}\,dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}\,dt - \frac{1}{a^2}\int t\,\frac{t}{(t^2+a^2)^n}\,dt =$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\left(-\frac{t}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)} I_{n-1}.$$

Таким образом, окончательно

$$I_n = \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) I_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots\,. \tag{5}$$

Так как интеграл I_1 уже вычислен, то можно вычислить I_2, I_3 и т.д.

Примеры.

1. Найти интеграл $\int \frac{3x+5}{x^2+2x+5}\,dx$

Решение. Дискриминант знаменателя меньше нуля, поэтому выделим в знаменателе полный квадрат, $x^2+2x+5 = (x+1)^2+4$. Сделав линейную замену $t = x+1$ (при этом $dx = dt$), получим

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{3t+2}{t^2+4}\,dt = 3\int \frac{t}{t^2+4}\,dt + \int \frac{2}{t^2+4}\,dt.$$

В первом интеграле подведем t под знак дифференциала, второй интеграл является табличным. Продолжим цепочку равенств:

$$\frac{3}{2}\ln(t^2+4) + \operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5) + \operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.$$

2. Найти интеграл $\int \frac{3x+5}{x^2+2x-3}\,dx$

Решение. Способ 1. Дискриминант знаменателя больше нуля, корнями знаменателя являются $x = 1,\ x = -3$. Разложим дробь на простейшие

$$\frac{3x+5}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}.$$

Приводя дроби, стоящие справа, к общему знаменателю, получим равенство числителей

$$3x + 5 = A(x+3) + B(x-1).$$

Это равенство выполнено при всех x, поэтому, подставив $x = -3$, получим $B = 1$, подставив $x = 1$, получим $A = 2$. Таким образом,

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x-3}\,dx = 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+3} = 2\ln|x-1| + \ln|x+3| + C.$$

Способ 2. Выделим в знаменателе полный квадрат, $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$. Сделав линейную замену $t = x + 1$ (при этом $dx = dt$), получим

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x-3}\,dx = \int \frac{3t+2}{t^2-4}\,dt = 3\int \frac{t}{t^2-4}\,dt + \int \frac{2}{t^2-4}\,dt.$$

В первом интеграле подведем t под знак дифференциала, второй интеграл является табличным. Продолжим цепочку равенств:

$$\frac{3}{2}\ln|t^2-4| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = \frac{3}{2}\ln|x^2+2x-3| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C.$$

Последнее выражение можно упростить, воспользовавшись свойствами логарифма

$$\ln|x^2+2x-3| = \ln|(x-1)(x+3)| = \ln|x-1| + \ln|x+3|;$$

$$\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| = \ln|x-1| - \ln|x+3|.$$

Поэтому окончательно

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x-3}\,dx = 2\ln|x-1| + \ln|x+3| + C.$$

Упражнения.

31. $\int \frac{x+1}{(x-1)(x+3)}\,dx$. **32**. $\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$. **33**. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$. **34**. $\int \frac{x}{x^4-3x^2+2}\,dx$.
35. $\int \frac{2x^2-7x}{(x-2)^2(x+1)}\,dx$. **36**. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$. **37**. $\int \frac{x^3-2x^2+3x-6}{x^3-3x^2+4}\,dx$. **38**. $\int \frac{x^2}{1-x^4}\,dx$.
39. $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}dx$. **40**. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$.

6 Интегрирование некоторых иррациональных функций

Пусть $R(u_1,...,u_n)$ – рациональная дробь и пусть $u_1 = f_1(x),...,u_n = f_n(x)$. Тогда получаем, что $R(f_1(x),...,f_n(x))$ рациональная дробь от функций $f_1(x),...,f_n(x)$.

I. Рассмотрим интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+q}\right)^{r_1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+q}\right)^{r_n}\right) dx. \tag{6}$$

Будем предполагать, что числа $r_1,...,r_n$ – рациональные и записаны с одним знаменателем, $r_i = \frac{p_i}{m}$, где m – натуральное, p_i – целые, и $aq-bc \neq 0$ (иначе дробь можно сократить).

Сделаем в интеграле (6) замену переменной $t^m = \frac{ax+b}{cx+q}$. Выражая отсюда x, получим $x = \frac{qt^m-b}{a-ct^m} =: \rho(t)$. Функция ρ является рациональной дробью; ее производная ρ' также является рациональной дробью. Поэтому замена $dx = \rho'(t)\,dt$, $\left(\frac{ax+b}{cx+q}\right)^{r_i} = (t^m)^{\frac{p_i}{m}} = t^{p_i}$ сводит интеграл (6) к интегралу от рациональной дроби:

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+q}\right)^{r_1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+q}\right)^{r_n}\right) dx = \int R(\rho(t),\ t^{p_1},...,t^{p_n})\rho'(t)\,dt.$$

Отметим отдельно частный случай $c = 0$, когда под корнем стоит линейное выражение, и интеграл (6) имеет вид

$$\int R\left(x,\ \sqrt[r_1]{ax+b},...,\ \sqrt[r_n]{ax+b}\right) dx.$$

Примеры.

1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Решение. Сделаем в интеграле замену $x = t^2,\ dx = 2t\,dt$. Подставляя, получим

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int \frac{t+1-1\,dt}{1+t} =$$

$$= 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t} = 2t - 2\ln|1+t| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + C.$$

2. Найти интеграл $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

Решение. Сделаем замену $\frac{1-x}{1+x} = t^2$. Выражая отсюда x, получим $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,dt$.

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int t\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,dt = -4\int \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2}\,dt =$$

$$= -4\int \frac{1}{1+t^2}\,dt + 4\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Первый интеграл является табличным, а второй интеграл имеет вид (5) при $a = 1,\ n = 2$. Продолжая цепочку равенств, получим

$$-4\operatorname{arctg} t + 4\left[\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt\right] = -2\operatorname{arctg} t + \frac{2t}{1+t^2} + C.$$

Переходя обратно к переменной x, получим ответ:

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = -2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 2\sqrt{(1+x)(1-x)} + C.$$

Упражнения.

41. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$. **42**. $\int \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x}-3)}$. **43**. $\int \frac{x+\sqrt[3]{2+x}}{\sqrt{2+x}}\,dx$. **44**. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.
45. $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}-1}{\sqrt{x+3}(1+\sqrt[3]{x+3})}\,dx$. **46**. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}\,dx$. **47**. $\int \sqrt[3]{\frac{x-2}{x-1}}\frac{dx}{(x-1)^3}$.
48. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1})(x-1)^2}\,dx$. **49**. $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^3}$. **50**. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}\,dx$.

II. Если квадратный трехчлен x^2+px+q имеет вещественные корни, то при любом рациональном r интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt[r]{x^2+px+q})\,dx \tag{7}$$

можно свести к предыдущему случаю. Действительно,

$$R(x, \sqrt[r]{x^2+px+q}) = R(x, \sqrt[r]{(x-a)(x-b)}) =$$

$$= R\left(x, |x-b|\sqrt[r]{\frac{x-a}{x-b}}\right) = R_1\left(x, \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{1/r}\right).$$

В некоторых частных случаях для интегралов вида (7) процесс нахождения первообразной можно упростить. Рассмотрим более подробно интегралы вида $\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,\quad a\neq 0$, и покажем четыре приема интегрирования, применяемых в различных ситуациях.

1. *Тригонометрические замены.* Квадратный трехчлен x^2+px+q путем выделения полного квадрата и линейной замены сводится к выражению $t^2\pm a^2$. Для того, чтобы избавиться от иррациональности в интегралах

$$\int R(t,\sqrt{t^2\pm a^2})\,dt,\quad \int R(t,\sqrt{a^2-t^2})\,dt \tag{8}$$

можно использовать следующие тригонометрические замены.

а) $\int R(t,\sqrt{a^2-t^2})\,dt,\ -a\leq t\leq a$, замена $t=a\cdot\sin y,\quad -\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}$;

б) $\int R(t,\sqrt{t^2-a^2})\,dt,\ |t|\geq a$, замена $t=\frac{a}{\sin y},\quad -\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2},\ y\neq 0$;

в) $\int R(t,\sqrt{t^2+a^2})\,dt$, замена $t=a\cdot\operatorname{tg} y,\quad -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$.

Пример.

Найти интеграл $\int\sqrt{1-x^2}\,dx,\quad -1\leq x\leq 1$.

Решение. Сделаем замену $x=\sin y,\quad -\pi/2\leq y\leq\pi/2,\quad dx=\cos y\,dy$.

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\sqrt{1-\sin^2 y}\cos y\,dy=\int\cos^2 y\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int[1+\cos 2y]\,dy=\frac{1}{2}\int dy+\frac{1}{2}\int\cos 2y\,dy=\frac{y}{2}+\frac{1}{4}\sin 2y+C=$$

$$=\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\sin y\cos y+C=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.$$

2. *Выделение в числителе производной квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня.* Рассмотрим интегралы вида $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,\ A\neq 0,\ a\neq 0$. Для нахождения этого интеграла выделим в числителе производную квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня, и разложим интеграл на сумму двух интегралов, сводящихся к табличным.

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Первый из полученных интегралов является табличным, а второй сводится к табличному путем выделения полного квадрата в подкоренном выражении. Окончательный ответ в случае $a > 0$

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$$

$$= \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{2aB-Ab}{2a\sqrt{a}}\ \ln\left|x+\frac{b}{2a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{ax^2+bx+c}\right| + C.$$

Окончательный ответ в случае $a < 0$ (считаем $b^2-4ac>0$, иначе подкоренное выражение меньше нуля при любом x)

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$$

$$= \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{2aB-Ab}{2a\sqrt{-a}}\ \arcsin\frac{-2ax-b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C.$$

Пример.

Найти интеграл $\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x+8}}\,dx$.

Решение. Выделяя в числителе производную подкоренного выражения $-2x+6$, получим

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x+8}}\,dx = \int \frac{-\frac{3}{2}(-2x+6)+13}{\sqrt{-x^2+6x+8}}\,dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{d(-x^2+6x+8)}{\sqrt{-x^2+6x+8}}\,dx + 13\int \frac{dx}{\sqrt{17-(x-3)^2}}\,dx =$$

$$= -3\sqrt{-x^2+6x+8} + 13\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{17}} + C.$$

3. *Метод неопределенных коэффициентов.* Рассмотрим интеграл вида $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $P_n(x)$ – многочлен n-ной степени. Интеграл такого вида можно найти при помощи тождества

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где Q_{n-1} – многочлен $(n-1)$-й степени с неопределенными коэффициентами, λ – число. Дифференцируя указанное тождество и приводя результат к общему знаменателю, получим равенство, из которого можно определить коэффициенты многочлена Q_{n-1} и число λ.

Пример.

Найти интеграл $\int \frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

Решение. Полагаем

$$\int \frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = (ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+2x+2}+\lambda\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$$

Дифференцируя обе части равенства, получим

$$\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}} =$$

$$= (2ax+b)\sqrt{x^2+2x+2}+(ax^2+bx+c)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Освобождаемся от знаменателя:

$$x^3-x-1=(2ax+b)(x^2+2x+2)+(ax^2+bx+c)(x+1)+\lambda.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем

$$\begin{cases} 3a & = & 1 \\ 5a+b & = & 0 \\ 4a+3b+c & = & -1 \\ 2b+c+\lambda & = & 1. \end{cases}$$

Откуда $a=\frac{1}{3},\ b=-\frac{5}{6},\ c=\frac{1}{6},\ \lambda=\frac{5}{2}$. Окончательно,

$$\int\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx =$$

$$=\frac{1}{6}(2x^2-5x+1)\sqrt{x^2+2x+2}\ +\ \frac{5}{2}\int\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\,dx =$$

$$=\frac{1}{6}(2x^2-5x+1)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C.$$

4. *Специальная замена переменной.* Интеграл $\int\frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$ сводится к интегралу, рассмотренному в пункте 3, подстановкой $x-\alpha=\frac{1}{t}$. Действительно, $dx=-\frac{dt}{t^2},\ \ ax^2+bx+c=\frac{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2+(2a\alpha+b)t+a}{t^2}$ и, считая для определенности $x>\alpha,\ t>0$, получим

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}=-\int\frac{t^{k-1}}{\sqrt{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2+(2a\alpha+b)t+a}}dt.$$

Пример.

Найти интеграл $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$.

Решение. Полагаем $x-1=\frac{1}{t}$, тогда $x=\frac{1}{t}+1,\ \ dx=-\frac{dt}{t^2}$. Имеем

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{-(1+\frac{1}{t})^2+2(1+\frac{1}{t})+3}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}} = -\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{-x^2+2x+3}}{2(x-1)}\right| + C.$$

Упражнения.

51. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,dx$. **52**. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-4)^3}}$. **53**. $\int \sqrt{3-2x+x^2}\,dx$. **54**. $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}\,dx$.

55. $\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx$. **56**. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+5}}$. **57**. $\int \frac{x^2+5x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$. **58**. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-2x}}$.
59. $\int \frac{6x+5}{\sqrt{x^2-4x+8}}\,dx$. **60**. $\int \frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

III. Рассмотрим интегралы вида

$$\int (a+bx^{\beta})^{\alpha}x^{\gamma}dx,$$

где $a,\ b$ – вещественные числа, $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – рациональные. Подынтегральное выражение называется дифференциальным биномом. Сделав в интеграле замену $x=t^{\frac{1}{\beta}}$ $\ (\ dx=\frac{1}{\beta}t^{\frac{1}{\beta}-1}dt)$, приведем его к более удобному виду

$$\int (a+bx^{\beta})^{\alpha}x^{\gamma}dx = \frac{1}{\beta}\int (a+bt)^{\alpha}t^{\lambda}dt,$$

где $\lambda=\frac{\gamma+1}{\beta}-1$ – рациональное число.

Рассмотрим три случая.

1. α – целое число. Пусть $\lambda=\frac{m}{n}$, где m и $n>0$ – целые числа. Согласно результатам пункта I подстановка $u=t^{\frac{1}{n}}$ сводит интеграл к интегралу от рациональной дроби.

2. λ – целое число. Пусть теперь $\alpha = \frac{m}{n}$, где m и $n > 0$ – целые числа. Согласно результатам пункта I подстановка $u = (a+bt)^{\frac{1}{n}}$ сводит интеграл к интегралу от рациональной дроби.

3. $\alpha + \lambda$ – целое число. Пусть, как и выше, $\alpha = \frac{m}{n}$, где m и $n > 0$ – целые числа. Имеем

$$\int (a+bt)^{\alpha} t^{\lambda} dt = \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\alpha} t^{\alpha+\lambda} dt.$$

Снова получился интеграл типа, рассмотренного в пункте I. Замена $u = \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{1/n}$ сведет интеграл к интегралу от рациональной дроби.

Заметим, что ни в каком другом случае интеграл от дифференциального бинома не выражается через элементарные функции.

Пример.

Найти интеграл $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$.

Решение. Сделаем в интеграле замену $t = x^{\frac{1}{4}}$, тогда $x = t^4$, $dx = 4t^3 dt$.

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int x^{-\frac{1}{2}} (1 + x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\, dx = 4 \int t(1+t)^{\frac{1}{3}}\, dt.$$

Здесь $\alpha = \frac{1}{3}$, $\lambda = 1$ – целое число, поэтому имеем случай 2. Сделаем замену $u = (1+t)^{\frac{1}{3}}$, тогда $t = u^3 - 1$, $dt = 3u^2 du$. Таким образом, имеем

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = 12 \int (u^6 - u^3)\, du = \frac{12}{7} u^7 - 3u^4 + C =$$

$$= \frac{12}{7}(1+t)^{\frac{7}{3}} - 3(1+t)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{12}{7}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{7}{3}} - 3(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{4}{3}} + C.$$

7 Интегрирование тригонометрических функций

I. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ сводится универсальной подстановкой $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$, к интегралу от рациональной дроби. При этом, $x = 2 \operatorname{arctg} u$, $dx = \frac{2du}{1+u^2}$. Тригонометрические функции выражаются следующим образом:

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Действительно, используя основное тригонометрическое тождество и формулу для половинного угла, разделив числитель и знаменатель на $\cos^2\frac{x}{2}$, получим

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2};$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Итак, имеем

$$\int R(\sin x,\, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2du}{1+u^2}.$$

Заметим, что при вычислении интегралов типа $\int R(\sin x,\, \cos x)\, dx$ часто оказываются полезными подстановки $u = \sin x,\ u = \cos x,\ u = \operatorname{tg} x$. В ряде случаев при интегрировании с помощью этих подстановок требуется провести меньше вычислений, чем при интегрировании с помощью универсальной подстановки.

Если рациональная дробь $R(u, v)$ четна по одному из аргументов, например u, то есть $R(-u, v) = R(u, v)$, то она может быть приведена к виду $R(u, v) = R_1(u^2, v)$, содержащие лишь четные степени u. Если $R(u, v)$ нечетна по одному из аргументов, то есть $R(-u, v) = -R(u, v)$, то она может быть приведена к виду $R(u, v) = u \cdot R_1(u^2, v)$, что сразу следует из предыдущего замечания, если его применить к $\frac{R(u,v)}{u}$.

а) пусть $R(-\sin x,\, \cos x) = -R(\sin x,\, \cos x)$, то есть подынтегральная функция нечетна по синусу, тогда

$$R(\sin x,\, \cos x)dx = R_1(\sin^2 x,\, \cos x)\sin x\, dx = -R_1(1-\cos^2 x,\, \cos x)d\cos x,$$

и рациональная дробь получается при подстановке $u = \cos x$;

б) аналогично, если $R(\sin x,\, -\cos x) = -R(\sin x,\, \cos x)$, то есть подынтегральная функция нечетна по косинусу, то целесообразна замена $u = \sin x$;

в) если $R(-\sin x,\, -\cos x) = R(\sin x,\, \cos x)$, то есть подынтегральная функция четна по косинусу и синусу, то, заменяя u на $\frac{u}{v}v$, будем иметь

$$R(u,\, v) = R(\frac{u}{v}v,\, v) = R_1(\frac{u}{v},\, v) = R_2(\frac{u}{v},\, v^2),$$

последнее равенство следует из того, что $R_1(\frac{u}{v},\, -v) = R_1(\frac{u}{v},\, v)$, то есть R_1 четна по второму аргументу, и пункта а). Поэтому

$$R(\sin x,\, \cos x) = R_2(\operatorname{tg} x,\, \cos^2 x) = R_2\left(\operatorname{tg} x,\, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right),$$

что предполагает замену $u = \operatorname{tg} x$ $(-\pi < x < \pi)$.

Примеры.

1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{1-\sin x}$.

Решение. Поскольку подынтегральная функция не является ни четной, ни нечетной, то сделаем универсальную подстановку $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

$$\int \frac{dx}{1-\sin x} = \int \frac{2du}{(1+u^2)(1-\frac{2u}{1+u^2})} = \int \frac{2du}{1-2u+u^2} =$$

$$= -2\int (1-u)^{-2} d(1-u) = 2(1-u)^{-1} + C = \frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$$

2. Найти интеграл $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}\, dx$.

Решение. Подынтегральная функция является нечетной по синусу, поэтому здесь можно сделать замену $u = \cos x$.

$$\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}\, dx = \int \frac{d(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2} = \int \frac{du}{u^2} =$$

$$= -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{1-\cos x} + C$$

II. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, $\;n, m-$ целые, вычисляются поразному в зависимости от четности n и m.

а) если n и m нечетные числа, то подстановкой $u = \cos 2x$ подынтегральное выражение сводится к рациональной дроби. Пусть $m = 2k+1$, $\;n = 2\ell + 1$.

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^{2\ell+1} x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin^{2k} x \cos^{2\ell} x \sin 2x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^\ell d\cos 2x =$$

$$= -\frac{1}{2^{k+\ell+2}} \int (1-u)^k (1+u)^\ell \, du.$$

б) если n и m четные числа, то подстановкой $u = \operatorname{tg} x$ подынтегральное выражение сводится к рациональной дроби. При этом $x = \operatorname{arctg} u$, $dx = \frac{du}{1+u^2}$; кроме того

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) = \frac{u^2}{1+u^2};$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) = \frac{1}{1+u^2}.$$

Более того, если числа n и m неотрицательные, то, можно просто перейти к косинусам двойного аргумента, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, при этом получим интегралы такого же типа, но с меньшим показателем.

в) если n – четное, а m – нечетное, то замена $u = \cos x$, а если n – нечетное, а m – четное, то замена $u = \sin x$ приводит к интегралу от рациональной дроби.

Примеры.

1. Найти интеграл $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx$.

Решение. Сделаем замену $u = \operatorname{tg} x$. Выражая x, получим $x = \operatorname{arctg} u$, $dx = \frac{du}{1+u^2}$.

$$\int \operatorname{tg}^4 x \, dx = \int \frac{u^4}{1+u^2} \, du.$$

Вычитая и прибавляя 1 в числителе, разобьем последний интеграл на два:

$$\int \frac{u^4 - 1 + 1}{1+u^2} \, du = \int (u^2 - 1) \, du + \int \frac{du}{1+u^2} =$$

$$= \frac{u^3}{3} - u + \operatorname{arctg} u + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

2. Найти интеграл $\int \sin^2 x \, dx$.

Решение. Выразив квадрат синуса через косинус двойного угла, сведем интеграл к сумме табличных интегралов:

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

3. Найти интеграл $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$.

Решение. У синуса нечетная степень, у косинуса четная, поэтому подведем синус под знак дифференциала (то есть проделаем замену $u = \cos x$), после этого разобьем интеграл на сумму табличных интегралов.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,d\cos x = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,d\cos x =$$

$$= -\int \frac{1-u^2}{u^2}\,du = -\int \frac{du}{u^2} + \int du = \frac{1}{u} + u + C = \frac{1}{\cos x} + \cos x + C.$$

III. В интегралах вида $\int \sin ax \cos bx\,dx$, $\int \sin ax \sin bx\,dx$, $\int \cos ax \cos bx\,dx$ пользуемся формулами для произведения тригонометрических функций:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x];$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x];$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x].$$

Пример.

Найти интеграл $\int \sin x \cos 2x\,dx$.

Решение. Воспользовавшись первой формулой из упомянутых выше, получим

$$\int \sin x \cos 2x\,dx = \int \frac{1}{2}[\sin 3x - \sin x]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 3x\,dx - \frac{1}{2}\int \sin x\,dx = -\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x + C.$$

Упражнения.

61. $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$. **62**. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$. **63**. $\int \frac{1+\operatorname{ctg} x}{1-\operatorname{ctg} x}\,dx$. **64**. $\int \frac{dx}{1-\sin^4 x}$.
65. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}\,dx$. **66**. $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$. **67**. $\int \sin^3 x \cos^5 x\,dx$.
68. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$. **69**. $\int \sin 2x \sin 3x\,dx$. **70**. $\int \cos x \cos^2 3x\,dx$.

В заключение заметим, что не всякий интеграл от элементарной функции выражается через элементарные функции, то есть не каждая функция является производной от элементарной функции. Примеры "неберущихся"интегралов

$\int \frac{dx}{\ln x} = \int \frac{e^t}{t}\,dt$ – интегральный логарифм;

$\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ – интегральный синус;

$\int e^{-x^2}\,dx$, – вероятностный интеграл;

$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ и $\int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, $(0 < k < 1$, h – произвольный параметр) – эллиптические интегралы.

8 Ответы

1.$x+C$. **2**.$\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+C$. **3**.$2\sqrt{x}+C$. **4**.$\frac{x^4}{4}+\frac{3^x}{\ln 3}+C$. **5**.$x-\sin x+C$. **6**. $-\frac{1}{x}-2\ln x+x+C$. **7**.$\frac{2}{7}\sqrt{x^7}+x^3+\frac{x^2}{2}+2\sqrt{x^3}+C$. **8**. $-\frac{16}{\sqrt{x}}+24\sqrt{x}+4\sqrt{x^3}+\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$. **9**.$5x+\frac{2}{\ln\frac{5}{2}}\left(\frac{5}{2}\right)^x+C$. **10**. $\operatorname{tg} x-x+C$ (указание: в числителе прибавить и вычесть $\cos^2 x$).

11.$\frac{1}{3}\sin 3x+C$. **12**.$\frac{1}{2}\ln^2 x+C$. **13**. $-\frac{7}{80}\sqrt[7]{(8-x^{10})^8}+C$. **14**.$\frac{1}{2}x^2-2\ln(x^2+4)+C$. **15**. $-\frac{a^{-2x}}{2\ln a}+C$. **16**.$\frac{1}{4}\operatorname{arctg}^4 x+C$. **17**.$2\sqrt{1-\operatorname{ctg} x}+C$. **18**.$e^x-\ln(e^x+1)+C$. **19**.$3\sqrt[3]{\sin x}+C$. **20**. $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$.

21.$\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$. **22**.$x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. **23**.$-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$. **24**.$x\ln x-x+C$. **25**.$\frac{1}{\ln 3}x3^x-\frac{1}{\ln^2 3}3^x+C$. **26**.$(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$. **27**.$(x^3-3x^2+6x-6)e^x+C$. **28**.$x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$. **29**.$x\operatorname{tg} x-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|+C$. **30**.$\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$ (указание: проинтегрировать два раза по частям, затем решить уравнение относительно искомого интеграла).

31.$\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+3|+C$. **32**. $-\ln|x-1|+2\ln|x-2|+C$. **33**.$\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C$. **34**.$\frac{1}{2}\ln|x^2-2|-\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C$. **35**. $\ln|x-2|+\ln|x+1|+\frac{2}{x-2}+C$. **36**. $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$. **37**.$x+\frac{7}{3}\ln|x-2|-\frac{4}{3}\ln|x+1|+C$. **38**.$\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C$. **39**.$\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. **40**. $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C$.

41. $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}}+C$. **42**. $-\frac{1}{3}\ln|x|+\ln|\sqrt[3]{x}-3|+C$. **43**. $\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}-4\sqrt{x+2}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+2)^5}+C$. **44**. $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C$. **45**. $3\sqrt[3]{x+3}-6\sqrt[6]{x+3}-3\ln|\sqrt[3]{x+3}+1|+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+3}+C$. **46**. $\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})-\ln(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$. **47**. $-\frac{3}{7}\sqrt[3]{\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^7}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^4}+C$. **48**. $-\frac{1}{3}\cdot\frac{x+2}{x-1}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}-\frac{2}{3}\ln\left(1+\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\right)+C$. **49**. $\frac{3}{2}\cdot\frac{2\sqrt[3]{x}+3}{(1+\sqrt[3]{x})^2}+\ln|x|-3\ln|1+\sqrt[3]{x}|+C$. **50**. $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{12}{5}\sqrt[12]{x^5}+\frac{12}{5}\ln|\sqrt[12]{x^5}-1|+C$.

51. $-\frac{1}{3\sin^3(\operatorname{arctg} x)}+C$. **52**. $-\frac{1}{4\sin(\arccos\frac{2}{x})}+C$. **53**. $2\arcsin\frac{x+1}{2}+\sin(2\arcsin\frac{x+1}{2})+C$. **54**. $-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C$.
55. $x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}|+C$. **56**. $-\frac{\sqrt{x^2+5}}{9(x+2)}-\frac{2}{27}\ln|5-2x+3\sqrt{x^2+5}|+\frac{2}{27}\ln|x+2|+C$. **57**. $-\left(\frac{x}{2}+2\right)\sqrt{5-4x-x^2}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{x+2}{3}+C$. **58**. $-\frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+C$. **59**. $6\sqrt{x^2-4x+8}+17\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x+8}|+C$. **60**. $\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}+C$ (указание: домножить и

разделить дробь на $x+\sqrt{x^2-1}$).

61. $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}\right)+C$. **62**. $\frac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C$. **63**. $\ln|\sin x-\cos x|+C$. **64**. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+C$. **65**. $\frac{1}{7\cos^7 x}-\frac{1}{5\cos^5 x}+C$. **66**. $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C$. **67**. $-\frac{1}{32}\cos 2x-\frac{1}{64}\cos^2 2x+\frac{1}{96}\cos^3 2x+\frac{1}{128}\cos^4 2x+C$. **68**. $-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x}-\frac{2}{\operatorname{tg}x}+\operatorname{tg}x+C$. **69**. $\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{10}\sin 5x+C$. **70**. $\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{28}\sin 7x+C$.

9 Литература

Учебники:

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. "Дифференциальные и интегральные исчисления", М., Наука, 1988.

2. Зарубин В.С., Иванова Е.Е.,Кувыркин "Интегральное исчисление функций одного переменного", изд. МГТУ им. Баумана, 2006, 528с.

3. Кудрявцев Л.Д. "Краткий курс математического анализа"в двух томах,том 1, изд. "Alfa", 1998, 400с.

4. Пискунов Н.С. "Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов"в двух томах, М., Наука, 1978.

5. Фихтенгольц Г.М. "Основы математического анализа"в двух томах, том 1, Москва, 1955, 440с.

Задачники:

6. Берман Г.Н. "Сборник задач по курсу математического анализа", изд."Профессия", 2002, 432с.

7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. "Высшая математика в упражнениях и задачах"в двух частях, часть 1, Москва, изд. "Высшая школа", 1999, 304с.

8. Ефимов А.В., Демидович Б.П. (ред.) "Сборник задач по математике для втузов", изд. "Наука", 1981, 464с.

9. Ефимов А.В., Поспелов А.С. (ред.) "Сборник задач по математике для втузов"в двух томах, том 2, Москва, 2003, 432с.

Содержание