

С.Е. Холодова, С.И. Перегудин
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ ВЫСШЕЙ
МАТЕМАТИКИ



Санкт-Петербург
2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

С.Е. Холодова, С.И. Перегудин
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ ВЫСШЕЙ
МАТЕМАТИКИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 09.03.04, 10.03.01, 11.03.03, 12.03.01,
13.03.02, 15.03.06, 23.03.03

в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных
образовательных программ высшего образования бакалавриата

 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург
2020

Холодова С.Е., Перегудин С.И., Дополнительные разделы высшей математики – СПб: Университет ИТМО, 2020. – 89 с.

Рецензент:

Михеев Сергей Евгеньевич, доктор физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математической теории моделирования систем управления, факультет прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета.

Рассматриваются основные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа – уравнения Лапласа и Пуассона в областях с различной геометрической топологией. Приводятся необходимые теоретические сведения, излагаются примеры решения задач и предлагаются задачи для самостоятельного решения. Предлагаемое пособие предназначено для студентов второго курса академического бакалавриата.

 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2020

© Холодова С.Е., Перегудин С.И., 2020

Оглавление

Введение	5
1 Частные решения уравнения Лапласа в полярной системе координат	10
2 Краевые задачи для уравнения Лапласа внутри круга	12
3 Краевые задачи для уравнения Лапласа вне круга	16
4 Краевые задачи для уравнения Лапласа в круговом кольце	17
5 Краевые задачи для уравнения Лапласа в круговом секторе	22
6 Краевые задачи для уравнения Лапласа в кольцевом секторе	24
7 Краевые задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике	25
8 Краевые задачи для уравнения Лапласа в прямоугольном параллелепипеде	30
9 Краевые задачи для уравнения Лапласа в круговом цилиндре	36
10 Частные решения уравнения Лапласа в сферической системе координат	47
11 Краевые задачи для уравнения Лапласа в шаре	48
12 Краевые задачи для уравнения Лапласа вне шара	50
13 Краевые задачи для уравнения Лапласа в шаровом слое	50

14	Метод конформных отображений решения краевых задач на плоскости	57
15	Функция Грина оператора Лапласа	58
	Задачи для самостоятельного решения	74
	Библиографический список	87

Введение

Курс высшей математики занимает значительное место в общей профессиональной подготовке студентов, обучающихся по всем направлениям подготовки университета, особенно по направлениям 09.03.04 — Программная инженерия, 10.03.01 — Информационная безопасность, 11.03.03 — Конструирование и технология электронных средств, 12.03.01 — Приборостроение, 13.03.02 — Электроэнергетика и электротехника, 15.03.06 — Мехатроника и робототехника, 23.03.03 — Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов академического бакалавриата, по которым предусмотрено и углубленное изучение отдельных разделов математики. Важным разделом курса высшей математики является раздел, посвященный изучению теории дифференциальных уравнений, в том числе и дифференциальных уравнений в частных производных. По математическому курсу создано колоссальное число замечательных классических трудов, сыгравших огромную роль в становлении университетского цикла учебников [1-13], но все основополагающие книги содержат объем информации, значительно превосходящий как возможности лекционных курсов, так и практических занятий, определяемых действующими в настоящее время рабочими программами дисциплины. В предлагаемом пособии производится попытка представления компактного изложения материала, составляющего основу одного из разделов действующей университетской программы. Основное внимание уделяется изложению методов решения краевых задач для важных представителей дифференциальных уравнений в частных производных — уравнений Лапласа и Пуассона, моделирующих реальные динамические процессы как в природе, так и в технических объектах. В пособии широко используется без специального цитирования материал учебников и монографий, приведенных в списке литературы.

При исследовании реальных технологических процессов и явлений природы методами математического моделирования важным этапом является построение математической модели, а, следовательно, и постановка математической задачи, адекватно описывающей исследуемое явление или процесс. Широкий класс математических моделей, описывающих разнообразные явления и процессы, представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных. В представляемом пособии акцентируется внимание на процессы и явления, математическими моделями которых являются решения краевых задач для дифференциаль-

ных уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа.

Основная цель пособия — помочь студентам приобрести необходимые теоретические знания и практические навыки исследования математических моделей явлений и процессов, описываемых краевыми задачами для дифференциальных уравнений в частных производных, на примере основополагающих, важных и широко используемых уравнений Лапласа и Пуассона, что особенно актуально в условиях существующего ограниченного объема аудиторных занятий. В соответствии с указанной целью производится построение изложения материала. При рассмотрении каждой темы приводятся необходимые сведения теоретического характера, используемые при решении отмеченного типа задач. Далее методы демонстрируются на примерах решения конкретных задач. И в заключение предлагаются задачи для самостоятельного решения, и приводится список рекомендуемых литературных источников.

Текущий контроль приобретенных студентами знаний и навыков проводится в форме доклада обучающегося по изученным методам и применению их к решению предлагаемых задач с ответами на поставленные вопросы теоретического характера. Изучение представленного материала направлено на формирование требуемых компетенций, теоретического и практического освоения материала дисциплины. Промежуточный контроль проводится в устной форме. Распределение трудозатрат студентов в аудитории и в процессе самостоятельной работы представляется в соответствии с программой изучаемой дисциплины. В рамках самостоятельной работы студентам рекомендуется отвести на изучение теоретического материала ориентировочно 7 часов, на решение задач и подготовку к промежуточному контролю 5 часов и 5 часов на самостоятельное изучение дополнительных источников информации.

Представляемое учебное пособие предназначается для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 09.03.04 — Программная инженерия, 10.03.01 — Информационная безопасность, 11.03.03 — Конструирование и технология электронных средств, 12.03.01 — Приборостроение, 13.03.02 — Электроэнергетика и электротехника, 15.03.06 — Мехатроника и робототехника, 23.03.03 — Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов академического бакалавриата в рамках дисциплины "Высшая математика целью освоения которой является достижение результатов обучения соответственно профессиональной компетенции ОПК – 3, согласно положениям которой обучающийся должен быть спо-

собным формулировать, строить и применять математические модели для управления достижением планируемых результатов процессов и объектов профессиональной деятельности на базе знаний математики, программирования и унифицированных пакетов программ. Индикаторы достижения указанной компетенции ОПК – 3: ОПК – 3.3 и ОПК – 3.6, состоят в том, что обучающийся строит модели объектов и процессов профессиональной деятельности на базе знаний математики, программирования и унифицированных пакетов программ; интерпретирует и представляет результаты моделирования процессов и объектов профессиональной деятельности.

Пособие обеспечивает приобретение обучающимися соответствующих компетенций согласно действующим Федеральным государственным образовательным стандартам. В результате освоения материала пособия обучающиеся приобретают следующие знания: воспроизведение основных понятий и положений математики, демонстрация их связи с объектами и законами других наук; владение стандартными методами решения теоретических и прикладных задач, способность указывать область их применения; понимание основных концепций математики и их связи с объектами и законами других наук; умения: использовать основные понятия, положения и методы при постановке и решении теоретических и прикладных задач; выбирать и разрабатывать методы решения; интерпретировать результаты моделирования в терминах области исследования; и навыки: владения постановками задач в математической форме и решения математической задачи; оценивания адекватности математической модели.

Важным представителем дифференциальных уравнений эллиптического типа в частных производных является уравнение Лапласа. К решению этого уравнения сводится ряд прикладных задач математического моделирования динамических процессов как природных, так и технологических. Традиционно, возникающие краевые задачи для уравнения Лапласа классифицируются на внешние и внутренние. Граничные условия обусловлены физической постановкой задачи, математическую модель которой представляет соответствующая граничная задача для уравнения Лапласа. Классически наиболее важными и часто встречающимися граничными условиями являются условия задания значений искомой функции на границе области или значений ее нормальной производной, или же их линейной комбинации. Эти задачи называются — задачей Дирихле, задачей Неймана и задачей Гаусса соответственно.

Рассмотрим конечную область D , ограниченную замкнутой поверхностью (в двумерном случае — кривой) Ляпунова S . Классическим решением внутренней задачи Дирихле называют функцию $u(M)$, непрерывную в замкнутой области \bar{D} , удовлетворяющую в открытой области D уравнению Лапласа и принимающую на поверхности S заданные значения $u \Big|_S = f(P) \Big|_S$. Классическим решением внутренней второй или третьей краевой задачи называют функцию $u(M)$, непрерывную вместе с первыми производными в замкнутой области \bar{D} и удовлетворяющую в открытой области D уравнению Лапласа, а на поверхности S — заданным краевым условиям второго или третьего рода.

Классическое решение внутренней задачи Дирихле

$$\Delta u(M) = 0, \quad M \in D, \quad u \Big|_S = f(P) \Big|_S$$

и внутренней задачи Гаусса

$$\Delta u(M) = 0, \quad M \in D, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu \right) \Big|_S = f(P) \Big|_S,$$

где \mathbf{n} — внешняя по отношению к области D нормаль к поверхности S , $h(P) \neq 0$ является единственным. Необходимым и достаточным условием существования решения внутренней краевой задачи Неймана

$$\Delta u(M) = 0, \quad M \in D, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = f(P) \Big|_S$$

является требование

$$\oint_S f(P) dS = 0,$$

причем, решение определяется с точностью до произвольной аддитивной константы.

Чтобы выделить единственное решение внешней граничной задачи, необходимо потребовать выполнения дополнительного условия, характеризующего поведение искомой функции при бесконечном удалении от границы. Для уравнения Лапласа это условие равносильно требованию регулярности решения на бесконечности. При этом следует различать регулярность функции на бесконечности в двумерном и в трехмерном

случаях. В трехмерном случае функция u называется регулярной на бесконечности, если существует такая постоянная $A > 0$, что вне некоторой сферы S_{r_0} ($r > r_0$) справедливы неравенства

$$|u| \leq \frac{A}{r}, \quad |\text{grad } u| \leq \frac{A}{r^2}.$$

На плоскости функция u называется регулярной на бесконечности, если для нее существует конечный предел при неограниченном росте аргумента.

В трехмерном случае для гармонической функции требование равномерности

$$u \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

эквивалентно требованию регулярности на бесконечности.

В пространственном случае решение первой, второй и третьей граничных задач, регулярное на бесконечности, является единственным (для третьей краевой задачи

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu \right) \Big|_S = f(P) \Big|_S$$

при $h(P) \geq 0$, если \mathbf{n} — внешняя по отношению к области D нормаль к поверхности S).

На плоскости решение внешней задачи Неймана существует не всегда, а если и существует, то не является единственным, а определяется с точностью до произвольной аддитивной константы.

Для решения граничных задач для уравнения Лапласа используются различные методы (метод разделения переменных, метод функции Грина, метод интегральных уравнений, вариационные методы, метод возмущений, современные методы компьютерной алгебры, численные методы и другие).

В настоящем пособии рассматриваются метод разделения переменных, метод функции Грина и метод конформных отображений. Метод разделения переменных может быть реализован для случая совпадения границы области с координатной поверхностью или с частями координатных поверхностей криволинейной системы координат, для которой возможно разделение переменных в уравнении Лапласа.

Далее будут рассмотрены краевые задачи для уравнения Лапласа в круге, вне круга, в круговом кольце, в круговом и кольцевом секторах,

в прямоугольнике, прямоугольном параллелепипеде и прямом круговом цилиндре, в цилиндрическом секторе, в круговом торе прямоугольного сечения и его секторе, в шаре, вне шара и в шаровом слое [1–13].

1 Частные решения уравнения Лапласа в полярной системе координат

Рассмотрим частные решения уравнения Лапласа в полярной системе координат (r, φ)

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,$$

представленные в виде

$$u(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi).$$

Для этого представленные решения подставим в уравнение Лапласа и разделим переменные:

$$\frac{r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right)}{R(r)} \equiv - \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda. \quad (1.1)$$

В результате получим уравнения для $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$:

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \lambda R(r) = 0,$$

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0.$$

Будем считать, что переменная φ изменяется от 0 до 2π (случай, когда переменная φ изменяется в меньшей области — $0 \leq \varphi < \alpha < 2\pi$, соответствует решению уравнения Лапласа в секторе и будет рассмотрен позже). В силу того, что $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, решение, являясь непрерывным, должно быть периодичным по φ с периодом 2π . Следовательно, функция Φ является решением одномерной задачи Штурма – Лиувилля с условиями периодичности

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$\Phi(\varphi + 2\pi) \equiv \Phi(\varphi), \quad \Phi(\varphi) \neq 0.$$

Эта задача имеет решение

$$\Phi = \Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, \quad \lambda = \lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, \dots, \infty.$$

Из уравнения (1.1) с учетом значений λ_n уравнение для функции $R(r)$ примет вид

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0.$$

Это уравнение Эйлера, его общее решение представляется в виде

$$R = R_n(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-n}, \quad n \neq 0,$$

$$R_0(r) = C_1 + C_2 \ln r, \quad n = 0.$$

Таким образом, семейство частных решений уравнения Лапласа представляется как

$$u_n(r, \varphi) = r^n \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.2)$$

Данные решения удовлетворяют условию ограниченности при $r \rightarrow 0$ и не являются ограниченными на бесконечности. Таким образом, общее решение уравнения Лапласа в круге $0 \leq r \leq a$ представляется рядом Фурье по системе частных решений:

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (1.3)$$

Решения второй серии:

$$u_n(r, \varphi) = \frac{1}{r^n} \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.4)$$

удовлетворяют условию ограниченности на бесконечности, но не являются ограниченными при $r \leftarrow 0$, поэтому допустимо их использование при решении уравнения Лапласа вне круга.

Итак, ограниченное на бесконечности общее решение уравнения Лапласа вне круга ($r \geq a$) представляется рядом

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (1.5)$$

Третья серия решений

$$1, \ln r, r^n \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, \quad \frac{1}{r^n} \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

не является ограниченной ни при $r \rightarrow 0$, ни при $r \rightarrow \infty$, поэтому ее использование допустимо, например, при решении уравнения Лапласа в круговом кольце $a \leq r \leq b$.

2 Краевые задачи для уравнения Лапласа внутри круга

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа внутри круга $0 \leq r \leq a$:

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r \leq a, \quad (2.7)$$

$$P[u] \equiv \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial r} + \beta u \right) \Big|_{r=a} = f(\varphi), \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0. \quad (2.8)$$

Ее решение можно записать в виде ряда (1.3), определив коэффициенты из граничного условия (2.8), но вычисления будут более рациональными, если решение задачи (2.7), (2.8) представить следующим образом:

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{P[r^n]|_{r=a}} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad \beta \neq 0. \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в граничное условие (2.8), получаем

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f(\varphi),$$

где A_n и B_n являются коэффициентами Фурье функции $f(\varphi)$ по системе тригонометрических функций $\{\cos n\varphi, \sin n\varphi\}$, вычисляемыми по формулам

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi, \quad (2.10)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Представим решения первой, второй и третьей краевых задач для уравнения Лапласа в круге.

1. Задача Дирихле: $u \Big|_{r=a} = f(\varphi)$,

$$u = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (2.11)$$

2. Задача Неймана: $\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = f(\varphi),$

$$u = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{na^{n-1}} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + C, \quad (2.12)$$

где C — произвольная постоянная.

Напомним, что решение внутренней задачи Неймана существует только при выполнении необходимого и достаточного условия

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0$$

и определяется с точностью до произвольной постоянной.

3. Задача Гаусса: $\left(\frac{\partial u}{\partial r} + hu \right) \Big|_{r=a} = f(\varphi), h = \text{const},$

$$u = \frac{A_0}{2h} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(n+ah)a^{n-1}} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (2.13)$$

Коэффициенты в разложениях (2.11)–(2.13) определяются по формулам (2.10).

Рассмотрим сходимость рядов (2.11)–(2.13). При абсолютной интегрируемости граничной функции $f(\varphi)$ ее коэффициенты Фурье ограничены, и, как видно из структуры представленных рядов, в любой внутренней точке круга ($r < a$) эти ряды будут сходиться со скоростью, не меньшей скорости сходимости геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{r}{a}$. Сходимость представленных рядов улучшается при увеличении степени гладкости функции. На получении строгих оценок скорости сходимости мы останавливаться не будем.

Рассмотрим примеры решения задач.

1. Внутри круга решить краевую задачу

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ u \Big|_{r=a} = \frac{\pi - \varphi}{2}.$$

Решение. Общее решение задачи Дирихле внутри круга можно записать как

$$u = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Коэффициенты ряда определяются из граничного условия по формулам

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - \varphi}{2} \cos n\varphi \, d\varphi = 0,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - \varphi}{2} \sin n\varphi \, d\varphi = \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin n\varphi.$$

2. Для задачи Дирихле внутри круга

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$u \Big|_{r=a} = f(\varphi)$$

вывести формулу Пуассона

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - r^2) f(\alpha) \, d\alpha}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \alpha)}.$$

Решение. Для задачи Дирихле в круге решение может быть записано в виде ряда

$$u = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad (2.14)$$

коэффициенты которого определяются выражениями

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha.$$

Подставляя значения A_n и B_n в (2.14) и меняя порядок суммирования и интегрирования, получим

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\varphi - \alpha) \right] d\alpha.$$

Поскольку при $\frac{r}{a} < 1$

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\varphi - \alpha) = \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \alpha)},$$

можно записать

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - r^2) f(\alpha) d\alpha}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \alpha)}.$$

При непрерывной функции $f(\alpha)$ формула Пуассона представляет классическое решение задачи Дирихле в круге.

3. Построить интегральную формулу, аналогичную формуле Пуассона, для решения внутренней задачи Неймана в круге.

Решение. Рассмотрим внутреннюю задачу Неймана для круга

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = f(\varphi).$$

Считаем, что задача разрешима, то есть

$$\int_C f dl = a \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0.$$

Решение можно записать в виде ряда

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{na^{n-1}} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \text{const},$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha.$$

Подставив значения A_n и B_n в ряд и изменив порядок интегрирования и суммирования, получим

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{na^{n-1}} (\cos n\alpha \cos n\varphi + \sin n\alpha \sin n\varphi) \right] d\alpha +$$

$$+ \text{const} = \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\varphi - \alpha) \right] d\alpha + \text{const}.$$

Поскольку при $|t| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n \cos n\beta = \ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2t \cos \beta + t^2}},$$

можно записать

$$u(r, \varphi) = - \int_{C_\alpha} f(\alpha) \ln \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \alpha)} dl + \text{const}.$$

Эта формула дает решение внутренней задачи Неймана для круга (она аналогична формуле Пуассона для задачи Дирихле внутри круга).

3 Краевые задачи для уравнения Лапласа вне круга

Рассмотрим теперь внешнюю краевую задачу

$$\Delta u = 0, \quad r > a,$$

$$P[u] \equiv \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial r} + \beta u \right) \Big|_{r=a} = f(\varphi),$$

от функции u потребуем регулярности на бесконечности. Напомним, что в двумерном плоском случае требование регулярности на бесконечности означает существование конечного предела функции при $r \rightarrow \infty$.

Решение можно представить в виде разложения (1.5), но, как и для внутренней задачи, его удобнее записать так:

$$u(r, \varphi) = -\frac{A_0}{2\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P[r^n]|_{r=a}} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) =$$

$$= -\frac{A_0}{2\beta} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{(\alpha n + \beta a)r^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad \beta \neq 0. \quad (3.15)$$

Коэффициенты A_n и B_n определяются из граничного условия и вычисляются по формулам

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi, \quad (3.16)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Отдельно выпишем решения краевых задач Дирихле, Неймана и Гаусса вне круга.

$$1. \text{ Задача Дирихле: } u \Big|_{r=a} = f(\varphi) \quad (\alpha = 0, \beta = -1),$$

$$u = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (3.17)$$

$$2. \text{ Задача Неймана: } \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = f(\varphi) \quad (\alpha = 1, \beta = 0),$$

$$u = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{a^{n+1}}{r^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + C, \quad (3.18)$$

где C — произвольная постоянная.

Напомним, что в плоском двумерном случае условием разрешимости внешней краевой задачи Неймана является условие

$$\int_{Ca} f(l) dl = a \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0,$$

а ее решение может быть определено с точностью до постоянного слагаемого.

$$3. \text{ Задача Гаусса: } \left(\frac{\partial u}{\partial r} - hu \right) \Big|_{r=a} = f(\varphi), h = \text{const} \quad (\alpha = 1, \beta = 0),$$

$$u = -\frac{A_0}{2h} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+ah)r^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + C. \quad (3.19)$$

Коэффициенты A_n и B_n в разложениях (3.17)–(3.19) представляют собой коэффициенты Фурье функции $f(\varphi)$ и определяются формулами (3.16).

4 Краевые задачи для уравнения Лапласа в круговом кольце

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad a < r < b, \quad (4.20)$$

$$u \Big|_{r=a} = f_1(\varphi), \quad u \Big|_{r=b} = f_2(\varphi). \quad (4.21)$$

Ее решение можно представить в виде разложения по частным решениям (1.6), но вычисления будут более рациональными, если при каждом n построить систему фундаментальных решений $\{R_n^{(a)}(r), R_n^{(b)}(r)\}$ уравнения

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0, \quad (4.22)$$

удовлетворяющих граничным условиям

$$R_n^{(a)}(a) = 0, \quad R_n^{(b)}(b) = 0.$$

Поскольку общее решение уравнения (4.22) выглядит как

$$\begin{aligned} R(r) &= C_1 + C_2 \ln r, & n = 0, \\ R(r) &= C_1 r^n + C_2 r^{-n}, & n \neq 0, \end{aligned}$$

можно, подбирая коэффициенты C_1 и C_2 , без труда построить требуемые решения, которые определяются с точностью до мультипликативной константы, и их можно записать, например, в виде

$$\begin{aligned} R_0^{(a)}(r) &= \frac{r}{a}, & R_0^{(b)}(r) &= \frac{b}{r}, \\ R_n^{(a)}(r) &= \frac{r^{2n} - a^{2n}}{r^n}, & R_n^{(b)}(r) &= \frac{b^{2n} - r^{2n}}{r^n}, & n \neq 0. \end{aligned}$$

Построив функции $R_n^{(a)}$ и $R_n^{(b)}$, получим систему частных решений уравнения Лапласа

$$u_n^{(a)}(r, \varphi) = R_n^{(a)}(r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix}, \quad u_n^{(b)}(r, \varphi) = R_n^{(b)}(r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix}, \quad n \neq 0,$$

$$u_0^{(a)}(r, \varphi) = \ln \frac{r}{a}, \quad u_0^{(b)}(r, \varphi) = \ln \frac{b}{r}, \quad (4.23)$$

ограниченных внутри кольца и удовлетворяющих граничным условиям

$$u_n^{(a)} \Big|_{r=a} = 0, \quad u_n^{(b)} \Big|_{r=b} = 0. \quad (4.24)$$

Заметим, что

$$u_n^{(a)} \Big|_{r=b} \neq 0, \quad u_n^{(b)} \Big|_{r=a} \neq 0.$$

Теперь решение краевой задачи (4.20), (4.21) можно представить как

разложение по этим частным решениям:

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}} + \frac{C_0}{2} \frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \frac{b}{a}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n} - a^{2n} b^n}{b^{2n} - a^{2n} r^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{2n} - r^{2n} a^n}{b^{2n} - a^{2n} r^n} (C_n \cos n\varphi + C_n \sin n\varphi). \quad (4.25)$$

Подставляя (4.25) в граничное условие при $r = a$ и учитывая (4.24), получим

$$\frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\varphi + C_n \sin n\varphi) = f_1(\varphi).$$

Отсюда находим C_n и D_n :

$$C_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad D_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \sin n\varphi d\varphi. \quad (4.26)$$

Аналогичным образом, подставляя решение (4.25) в краевое условие при $r = b$, определим коэффициенты A_n и B_n :

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \sin n\varphi d\varphi. \quad (4.27)$$

Таким образом, построив предварительно радиальные функции $R_n^{(a)}(r)$ и $R_n^{(b)}(r)$, удовлетворяющие требуемым однородным граничным условиям при $r = a$ и $r = b$, нам удалось использовать граничные условия, заданные при $r = a$ и $r = b$.

Подобным алгоритмом можно решать и другие краевые задачи для уравнения Лапласа внутри кольца.

При построении радиальных функций $R_n(r)$ для граничных условий задачи Неймана необходимо учитывать, что при $n = 0$ не существует двух линейно независимых решений уравнения (4.22), одно из которых

удовлетворяет условию $\left. \frac{dR_0^{(a)}}{dr} \right|_{r=a} = 0$, а другое — $\left. \frac{dR_0^{(b)}}{dr} \right|_{r=b} = 0$. Этим условиям удовлетворяет одно и то же решение $R_0(r) \equiv 1$. При $n \neq 0$ нужную пару фундаментальных решений образуют функции

$$R_n^{(a)}(r) = \frac{r^{2n} + a^{2n}}{r^n}, \quad R_n^{(b)}(r) = \frac{r^{2n} + b^{2n}}{r^n},$$

поэтому решение задачи Неймана внутри кольца $a \leq r \leq b$

$$\Delta u = 0, \quad a < r < b, \quad (4.28)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = f_1(\varphi), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=b} = f_2(\varphi) \quad (4.29)$$

удобно записывать в виде ряда

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) = & \frac{C_0}{2} \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^{(a)}(r)}{R_n^{(a)}(b)} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^{(a)}(r)}{R_n^{(b)}(a)} (C_n \cos n\varphi + C_n \sin n\varphi) + \text{const}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

коэффициенты которого можно определить из граничных условий по формулам (4.26), (4.27) при $n \neq 0$,

$$C_0 = \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) d\varphi = \frac{b}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) d\varphi, \quad (4.31)$$

а const — произвольная постоянная.

Равенство (4.31) не содержит противоречия при произвольных функциях $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$, поскольку оно соответствует условию разрешимости задачи Неймана

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} dn = \int_0^{2\pi} \{bf_2(\varphi) - af_1(\varphi)\} d\varphi = 0.$$

Рассмотрим вопрос о сходимости полученных рядов. Используем ряд (4.25). Поскольку при $a < r < b$

$$\left| \frac{R_n^{(a)}(r)}{R_n^{(a)}(b)} \right| = \frac{r^{2n} - a^{2n}}{b^{2n} - a^{2n}} \left(\frac{b}{r} \right)^n = \frac{1 - \left(\frac{a}{r} \right)^{2n}}{1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2n}} \left(\frac{r}{b} \right)^n \leq \frac{1}{1 - \frac{a}{b}} \left(\frac{r}{b} \right)^n = \frac{b}{b-a} \left(\frac{r}{b} \right)^n, \quad (4.32)$$

$$\left| \frac{R_n^{(b)}(r)}{R_n^{(b)}(a)} \right| = \frac{b^{2n} - r^{2n}}{b^{2n} - a^{2n}} \leq \left(\frac{a}{r} \right)^n,$$

ряды в решении (4.25) сходятся внутри кольца не хуже, чем геометрические прогрессии. При увеличении гладкости граничных функций $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ скорость сходимости увеличивается.

Пример.

Внутри кольца $a \leq r \leq b$ решить краевую задачу

$$\Delta u = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = \sin 2\varphi, \quad \left. u \right|_{r=b} = 1 + \cos \varphi.$$

Решение. Радиальные решения, удовлетворяющие однородному граничному условию при $r = a$, имеют вид

$$R_0^{(a)}(r) = 1, \quad R_n^{(a)}(r) = \frac{r^{2n} + a^{2n}}{r^n}, \quad n \neq 0,$$

а удовлетворяющие однородному граничному условию при $r = b$ —

$$T_0^{(b)}(r) = \frac{b}{r}, \quad T_n^{(b)}(r) = \frac{b^{2n} - r^{2n}}{r^n}, \quad n \neq 0,$$

поэтому решение задачи можно представить как

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) = & \frac{A_0}{2} \frac{R_0^{(a)}(r)}{R_0^{(a)}(b)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^{(a)}(r)}{R_n^{(a)}(b)} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \\ & + \frac{C_0}{2} \frac{T_0^{(b)}(r)}{T_0^{(b)}(a)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n^{(b)}(r)}{T_n^{(b)}(a)} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi). \end{aligned}$$

Подставляя его в граничное условие при $r = a$, получим

$$\frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) = \sin 2\varphi.$$

Из этого следует:

$$C_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad D_2 = 1, \quad D_n = 0, \quad n \neq 2.$$

Подставим общий вид решения в граничное условие при $r = b$:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = 1 + \cos \varphi.$$

Отсюда

$$A_0 = 2, \quad A_1 = 1, \quad A_n = 0, \quad n \neq 0, 1, \quad B_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= 1 + \frac{R_1^{(a)}(r)}{R_1^{(a)}(b)} \cos \varphi + \frac{T_2^{(b)}(r)}{T_2^{(b)}(a)} \sin 2\varphi = \\ &= 1 + \frac{a}{r} \frac{r^2 + a^2}{b^2 + a^2} \cos \varphi - \frac{a^3}{2r^2} \frac{b^4 - r^4}{b^4 + a^4} \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

5 Краевые задачи для уравнения Лапласа в круговом секторе

Краевые задачи для уравнения Лапласа внутри кругового ($0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$) и кольцевого ($a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$) секторов, учитывая, что граничные условия на лучах $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$ однородны, можно решать методами, рассмотренными в предыдущих параграфах.

Рассмотрим краевую задачу внутри кругового сектора:

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 < \varphi < \alpha, \quad (5.33)$$

$$u \Big|_{r=a} = f(\varphi), \quad (5.34)$$

$$P_3[u] \equiv \left(\alpha_3 \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \beta_3 u \right) \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad (5.35)$$

$$P_4[u] \equiv \left(\alpha_4 \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \beta_4 u \right) \Big|_{\varphi=\alpha} = 0, \quad (5.36)$$

$$|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0, \quad i = 3, 4.$$

Сначала найдем частные решения вида

$$u(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi). \quad (5.37)$$

Подставляя (5.37) в уравнение Лапласа и разделяя переменные, получаем задачу Штурма – Лиувилля на отрезке $0 \leq \varphi \leq \alpha$ для определения $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0, \quad 0 < \varphi < \alpha,$$

$$\begin{aligned}
P_3[u] &\equiv (\alpha_3 \Phi' - \beta_3 \Phi) \Big|_{\varphi=0} = 0, \\
P_4[u] &\equiv (\alpha_4 \Phi' + \beta_4 \Phi) \Big|_{\varphi=\alpha} = 0
\end{aligned} \tag{5.38}$$

и задачу для определения $R(r)$:

$$r^2 R'' + r R' - \lambda R = 0, \quad 0 < r < a, \quad |R(0)| < \infty. \tag{5.39}$$

Ограниченное при $r = 0$ решение уравнения (5.39) имеет вид

$$R(r) = C r^{\sqrt{\lambda}}, \quad C = \text{const}.$$

Таким образом, построено семейство частных решений уравнения Лапласа, ограниченное при $r = 0$:

$$u_n(r, \varphi) = r^{\sqrt{\lambda_n}} \Phi_n(\varphi), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{5.40}$$

где $\Phi_n(\varphi)$ и λ_n — собственные функции и собственные значения задачи (5.38) для отрезка $0 \leq \varphi \leq \alpha$.

Общее решение уравнения Лапласа внутри кругового сектора можно представить как

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{a}\right)^{\sqrt{\lambda_n}} \Phi_n(\varphi), \tag{5.41}$$

а коэффициенты C_n определяются из граничного условия (5.34) следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \Phi_n(\varphi) = f(\varphi), \tag{5.42}$$

$$C_n = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int_0^{\alpha} f(\varphi) \Phi_n(\varphi) d\varphi. \tag{5.43}$$

Если граничное условие при $r = a$ есть условие третьего рода

$$P_2[u] \equiv \left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial r} + \beta_2 u \right) \Big|_{r=a} = f(\varphi), \quad |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0,$$

то общее решение уравнения Лапласа удобно записать в виде

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{r^{\sqrt{\lambda_n}}}{P_2[r^{\sqrt{\lambda_n}}] \Big|_{r=a}} \Phi_n(\varphi). \tag{5.44}$$

Коэффициенты C_n будут также определяться формулой (5.43). При решении второй краевой задачи (задачи Неймана) следует иметь в виду, что она имеет решение не всегда и если оно существует, то не единственно.

6 Краевые задачи для уравнения Лапласа в кольцевом секторе

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа внутри кольцевого сектора ($a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$) с однородными граничными условиями на лучах $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$:

$$\Delta u = 0, \quad a < r < b, \quad 0 < \varphi < \alpha, \quad (6.45)$$

$$P_1[u] \equiv \left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \beta_1 u \right) \Big|_{r=a} = f_1(\varphi),$$

$$P_2[u] \equiv \left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \beta_2 u \right) \Big|_{r=b} = f_2(\varphi), \quad (6.46)$$

$$P_3[u] \Big|_{\varphi=0} = 0,$$

$$P_3[u] \Big|_{\varphi=\alpha} = 0, \quad |\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (6.47)$$

Семейство частных решений уравнения Лапласа, аналогичное (4.23), удобное для решения поставленной задачи, можно представить как

$$u_n^{(a)}(r, \varphi) = R_n^{(a)}(r) \Phi_n(\varphi), \quad (6.48)$$

$$u_n^{(b)}(r, \varphi) = R_n^{(b)}(r) \Phi_n(\varphi), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.49)$$

где $R_n^{(a)}(r)$ и $R_n^{(b)}(r)$ — решения уравнения

$$r^2 R'' + r R' - \lambda R = 0, \quad (6.50)$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$P_1[R_n^{(a)}] \equiv \left(\alpha_1 \frac{\partial R_n^{(a)}}{\partial \varphi} - \beta_1 R_n^{(a)} \right) \Big|_{r=a} = 0, \quad (6.51)$$

$$P_2[R_n^{(b)}] \equiv \left(\alpha_2 \frac{\partial R_n^{(b)}}{\partial \varphi} + \beta_2 R_n^{(b)} \right) \Big|_{r=b} = 0, \quad (6.52)$$

а $\Phi_n(\varphi)$ и λ_n — собственные функции и собственные значения задачи (5.38).

Общее решение уравнения (6.50) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} R(r) &= C_1 r^{\sqrt{\lambda}} + C_2 r^{-\sqrt{\lambda}} && \text{при } \lambda \neq 0, \\ R &= C_1 + C_2 \ln r && \text{при } \lambda = 0. \end{aligned}$$

Построение решений $R_n^{(a)}$ и $R_n^{(b)}$, удовлетворяющих условиям (6.51) и (6.52) соответственно, труда не составляет. Например, для задачи Дирихле ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 1$) их можно записать в виде

$$\begin{aligned} R_0^{(a)}(r) &= \ln \frac{r}{a}, & R_0^{(b)}(r) &= \ln \frac{b}{r} && \text{при } \lambda_0 = 0, \\ R_n^{(a)}(r) &= \frac{r^{2\sqrt{\lambda_n}} - a^{2\sqrt{\lambda_n}}}{r\sqrt{\lambda_n}}, & R_n^{(b)}(r) &= \frac{b^{2\sqrt{\lambda_n}} - r^{2\sqrt{\lambda_n}}}{r\sqrt{\lambda_n}} && \text{при } \lambda_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение уравнения Лапласа внутри кольцевого сектора можно представить как

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{A_0}{2} \frac{R_0^{(a)}(r)}{P_2[R_0^{(a)}(b)]} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{R_n^{(a)}(r)}{P_2[R_n^{(a)}(b)]} \Phi_n(\varphi) + \\ &+ \frac{B_0}{2} \frac{R_0^{(b)}(r)}{P_1[R_0^{(b)}(a)]} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{R_n^{(b)}(r)}{P_1[R_n^{(b)}(a)]} \Phi_n(\varphi), \end{aligned} \quad (6.53)$$

при этом если все $\lambda_n \neq 0$, то $A_0 = B_0 = 0$. Коэффициенты A_n и B_n определяются из граничных условий (6.46):

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int_0^\alpha f_2(\varphi) \Phi_n(\varphi) d\varphi, \\ B_n &= \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int_0^\alpha f_1(\varphi) \Phi_n(\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

В случае, когда граничные условия на лучах $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$ неоднородные, для решения соответствующей задачи можно заменить неизвестную функцию либо использовать функцию Грина.

7 Краевые задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике

Краевые задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике также можно решить методом разделения переменных Фурье. Для определенности

рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad (7.54)$$

$$u|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u|_{x=a} = \varphi_2(y), \quad (7.55)$$

$$u|_{y=0} = \psi_1(x), \quad u|_{y=b} = \psi_2(x). \quad (7.56)$$

Решение исходной неоднородной краевой задачи (7.54)–(7.56) можно представить в виде суммы решений двух задач, каждая из которых является однородной краевой задачей по одной из переменных. Пусть

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y),$$

где $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ есть решения соответствующих задач в прямоугольнике:

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= 0, \\ u_1|_{x=0} &= u_1|_{x=a} = 0, \\ u_1|_{y=0} &= \psi_1(x), \\ u_1|_{y=b} &= \psi_2(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta u_2 &= 0, \\ u_2|_{y=0} &= u_2|_{y=b} = 0, \\ u_2|_{x=0} &= \varphi_1(y), \\ u_2|_{x=a} &= \varphi_2(y). \end{aligned}$$

Каждую из них назовем стандартной. Рассмотрим стандартную задачу для функции $u_1(x, y)$. Построим сначала решения уравнения Лапласа, представленные в виде

$$u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0 \quad (7.57)$$

и удовлетворяющие однородным граничным условиям по x

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0. \quad (7.58)$$

Подставим (7.58) в уравнение Лапласа и разделим переменные:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} \equiv -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda. \quad (7.59)$$

Из приведенного соотношения можно получить отдельные уравнения каждой из искомых функций $X(x)$ и $Y(y)$. Поскольку по независимой переменной x требуется выполнение однородных граничных условий (7.58),

для нахождения функции $X(x)$ получим одномерную задачу Штурма – Лиувилля

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, & 0 < x < a, \\ X(0) = X(a) &= 0, & X(x) \neq 0, \end{aligned}$$

решение которой выглядит как

$$X = X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{a} x, \quad \lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Учитывая найденное значение λ_n , получим из (7.59) уравнение для $Y(y)$:

$$Y'' - \lambda_n Y = 0, \quad 0 < y < b. \quad (7.60)$$

Его общее решение представляется следующим образом:

$$Y = C_1 e^{\frac{\pi n y}{a}} + C_2 e^{-\frac{\pi n y}{a}}.$$

Эта форма записи не представляется достаточно удобной, в связи с чем более рациональный подход связан с выбором фундаментальной системы $Y_1(y), Y_2(y)$ решений уравнения (7.60) при условии удовлетворения функции $Y_1(y)$ однородному граничному условию при $y = 0$

$$Y_1(0) = 0,$$

а функции $Y_2(y)$ — однородному граничному условию при $y = b$

$$Y_2(b) = 0.$$

Таковыми решениями являются

$$Y_1(y) = \operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} y, \quad Y_2(y) = \operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} (b - y).$$

Общее решение уравнения (7.60) удобнее представить как

$$Y = C_1 \operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} y + C_2 \operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} (b - y).$$

Итак, построены следующие системы частных решений уравнения Лапласа:

$$u_n(x, y) = \sin \sqrt{\lambda_n} x \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} y, \quad (7.61)$$

$$u_n(x, y) = \sin \sqrt{\lambda_n} x \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} (b - y). \quad (7.62)$$

Решение задачи для функции $u_1(x, y)$ представляется в виде разложения по частным решениям:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} y}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} b} \sin \sqrt{\lambda_n} x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} (b-y)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} b} \sin \sqrt{\lambda_n} x = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} y}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} b} + B_n \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} (b-y)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} b} \right] \sin \sqrt{\lambda_n} x. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Подставляя решение (7.63) в граничное условие при $y = 0$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \sqrt{\lambda_n} x = \psi_1(x),$$

откуда видно, что B_n есть коэффициенты Фурье разложения функции $\psi_1(x)$ по системе собственных функций $\left(\sin \frac{\pi n}{a} x \right)_1^{\infty}$. Они вычисляются по формуле

$$B_n = \frac{2}{a} \int_0^a \psi_1(x) \sin \frac{\pi n}{a} x \, dx. \quad (7.64)$$

Подставим (7.63) в граничное условие при $y = b$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \sqrt{\lambda_n} x &= \psi_2(x), \\ A_n &= \frac{2}{a} \int_0^a \psi_2(x) \sin \frac{\pi n}{a} x \, dx. \end{aligned} \quad (7.65)$$

Следовательно, решение стандартной задачи для функции $u_1(x, y)$ представляется рядом (7.63), коэффициенты которого вычисляются по формулам (7.64) и (7.65).

Аналогичным образом представляется решение стандартной задачи для функции $u_2(x, y)$. Решение ее имеет вид

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} x}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} a} + D_n \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} (a-x)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} a} \right] \sin \sqrt{\lambda_n} y, \quad (7.66)$$

где

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2,$$

$$D_n = \frac{2}{b} \int_0^b \varphi_1(y) \sin \sqrt{\lambda_n} y \, dy, \quad C_n = \frac{2}{b} \int_0^b \varphi_2(y) \sin \sqrt{\lambda_n} y \, dy.$$

Итак, решение краевой задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике (7.54)–(7.56) представимо как

$$u = u_1(x, y) + u_2(x, y),$$

где функции u_1 и u_2 определяются формулами (7.63) и (7.66) соответственно.

Таким же образом можно представить решение краевой задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике и при других граничных условиях. Особое внимание необходимо при решении краевой задачи Неймана, так как в процессе ее редукции к стандартным задачам может возникнуть задача, не имеющая решения, при условии, что решение исходной краевой задачи Неймана существует. В этом случае исходную задачу посредством замены неизвестной функции возможно редуцировать к краевой задаче для неоднородного уравнения с однородными граничными условиями.

Исследуем характер сходимости построенных рядов. В качестве примера рассмотрим разложение, полученное для решения первой стандартной задачи:

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} y}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} b} \sin \sqrt{\lambda_n} x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} (b-y)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} b} \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad (7.67)$$

где $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2$, коэффициенты A_n и B_n определяются посредством соотношений (7.65) и (7.64).

Если $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ абсолютно интегрируемы на интервале $(0, a)$, то коэффициенты A_n и B_n ограничены при всех n :

$$|A_n| \leq C, \quad |B_n| \leq C,$$

поэтому общий член первого ряда при $n \rightarrow \infty$ имеет следующий характер:

$$\left| A_n \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} y}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} b} \sin \sqrt{\lambda_n} x \right| \sim C e^{-\frac{\pi n}{a}(b-y)}.$$

Из представленного соотношения можно заключить, что во внутренних точках прямоугольника ряд сходится экспоненциально. Кроме того, если

$\frac{b}{a} \gg 1$, при малых y , то есть вблизи основания прямоугольника $y = 0$, уже первый элемент ряда имеет порядок $\exp(-\frac{\pi b}{a})$. Коэффициенты A_n определяются посредством функции $\psi_2(x)$, заданной на другой стороне прямоугольника ($y = b$), следовательно, в этом случае степень влияния граничных условий, заданных при $y = b$, на решение при малых y невелика, и при вычислениях достаточно ограничиться одним или двумя элементами ряда.

Аналогичный характер имеют элементы второго ряда в (7.67), но они малы при $\frac{b}{a} \gg 1$, когда значение y близко к границе $y = b$.

При увеличении степени гладкости функций ψ_1 и ψ_2 скорость сходимости рядов становится еще более высокой.

8 Краевые задачи для уравнения Лапласа в прямоугольном параллелепипеде

Общая краевая задача для уравнения Лапласа может быть разбита на три стандартные. Стандартной в данном случае называется задача, в которой неоднородные граничные условия заданы на двух параллельных сторонах ("основаниях"), а на остальной части поверхности ("боковой поверхности") граничные условия нулевые.

Рассмотрим стандартную задачу

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < h, \quad (8.68)$$

$$u \Big|_{z=0} = \varphi_1(x, y), \quad (8.69)$$

$$u \Big|_{z=h} = \varphi_2(x, y), \quad (8.70)$$

$$P[u] \Big|_{x=0, x=a, y=0, y=b} = 0, \quad (8.71)$$

где $P[u]$ — оператор, соответствующий граничному условию третьего рода.

Для представления решения рассматриваемой краевой задачи сначала построим частные решения уравнения Лапласа, представимые в виде

$$u(x, y, z) = v(x, y)Z(z) \neq 0. \quad (8.72)$$

Следует отметить, что отделена именно та переменная, по которой заданы неоднородные граничные условия. Подставляя (8.72) в уравнение

Лапласа и разделяя переменные, получим

$$\frac{\Delta_2 v}{v(x, y)} \equiv -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta_2 v + \lambda v &= 0, & 0 < x < a, & \quad 0 < y < b, \\ P[u] \Big|_{x=0, x=a, y=0, y=b} &= 0, & v(x, y) &\neq 0, \end{aligned} \quad (8.73)$$

$$Z''(z) - \lambda Z(z) = 0, \quad 0 < z < h. \quad (8.74)$$

Задача (8.73) есть задача Штурма – Лиувилля для прямоугольника. Пусть $\{v_n(x, y)\}_1^\infty$ и $\{\lambda_n\}_1^\infty$ – ее собственные функции и собственные значения соответственно. Наиболее удобным является представление решения уравнения (8.74) следующим образом:

$$Z(z) = A \frac{\text{sh } \sqrt{\lambda} z}{\text{sh } \sqrt{\lambda} h} + B \frac{\text{sh } \sqrt{\lambda} (h - z)}{\text{sh } \sqrt{\lambda} h}, \quad A, B = \text{const}.$$

Следовательно, частные решения уравнения Лапласа выглядят как

$$u_n(x, y, z) = v_n(x, y) \left\{ A_n \frac{\text{sh } \sqrt{\lambda_n} z}{\text{sh } \sqrt{\lambda_n} h} + B_n \frac{\text{sh } \sqrt{\lambda_n} (h - z)}{\text{sh } \sqrt{\lambda_n} h} \right\}.$$

Теперь решение краевой задачи (8.68)–(8.71) представляется в виде разложения по построенным частным решениям

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, y) \left\{ A_n \frac{\text{sh } \sqrt{\lambda_n} z}{\text{sh } \sqrt{\lambda_n} h} + B_n \frac{\text{sh } \sqrt{\lambda_n} (h - z)}{\text{sh } \sqrt{\lambda_n} h} \right\}, \quad (8.75)$$

коэффициенты A_n и B_n которого определяются из граничных условий (8.69), (8.70):

$$A_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^a \int_0^b \varphi_2(x, y) v_n(x, y) dx dy, \quad (8.76)$$

$$B_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^a \int_0^b \varphi_1(x, y) v_n(x, y) dx dy. \quad (8.77)$$

Аналогичным образом решаются две другие стандартные задачи с неоднородными граничными условиями по переменным x и y .

Заметим, что представленные ряды имеют тот же характер сходимости, что соответствующие ряды решения задачи в прямоугольнике.

Рассмотрим примеры решения задач.

1. Найти распределение потенциала внутри куба с ребром a , одна грань которого $z = 0$ поддерживается под постоянным потенциалом U_0 , а остальные заземлены.

Решение. Для потенциала u имеем следующую краевую задачу:

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < a, \quad 0 < z < h,$$

$$u \Big|_{z=0} = U_0, \quad u \Big|_{z=a} = 0,$$

$$u \Big|_{x=0} = u \Big|_{x=a} = u \Big|_{y=0} = u \Big|_{y=a} = 0.$$

Ее решение представлено как

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_{nk}(x, y) \left\{ A_{nk} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nk}} z}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nk}} h} + B_{nk} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nk}} (h - z)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nk}} h} \right\},$$

где $v_{nk}(x, y)$ — собственные функции квадрата с граничным условием Дирихле

$$v_{nk}(x, y) = \sin \frac{\pi n}{a} x \sin \frac{\pi k}{a} y,$$

$$\lambda_{nk} = \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi k}{a} \right)^2 = \frac{\pi^2}{a^2} (n^2 + k^2),$$

$$n, k = 1, 2, \dots, \infty.$$

Вычислим коэффициенты A_{nk} и B_{nk} :

$$\begin{aligned} B_{nk} &= \frac{1}{\|v_{nk}\|^2} \int_0^a \int_0^a U_0 \sin \frac{\pi n}{a} x \sin \frac{\pi k}{a} y \, dx \, dy = \\ &= \frac{4U_0}{a^2} \int_0^a \sin \frac{\pi n}{a} x \, dx \int_0^a \sin \frac{\pi k}{a} y \, dy = \frac{4U_0}{\pi^2 nk} [1 - (-1)^n][1 - (-1)^k], \end{aligned}$$

$$A_{nk} = 0, \quad n, k = 1, 2, \dots, \infty.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u &= \frac{4U_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n][1 - (-1)^k]}{nk} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} \sqrt{n^2 + k^2} (a - z)}{\operatorname{sh} \pi \sqrt{n^2 + k^2}} \times \\ &\times \sin \frac{\pi n}{a} x \sin \frac{\pi k}{a} y. \end{aligned}$$

2. Найти стационарное распределение температуры внутри параллелепипеда $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$, у которого на грани $x = 0$ поддерживается температура, равная Ayz , грани $z = 0$ и $z = c$ находятся при нулевой температуре, а остальные теплоизолированы, $A = \text{const}$.

Решение. Стационарная температура $u(x, y, z)$ определяется как решение следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b, & 0 < z < c, \\ u|_{x=0} &= Ayz, & u|_{z=0} &= u|_{z=c} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} &= \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0. \end{aligned}$$

Решение следует искать в виде разложения по собственным функциям прямоугольника $0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} u|_{z=0} &= u|_{z=c} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0. \end{aligned}$$

Эти функции имеют вид

$$v_{nm}(y, z) = \cos \frac{\pi n}{b} y \sin \frac{\pi m}{c} z, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots$$

По переменной x заданы граничные условия первого рода при $x = 0$ и второго рода при $x = a$. Поэтому решение задачи можно представить как

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n}{b} y \sin \frac{\pi m}{c} z \left[A_{nm} \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}} x}{\sqrt{\lambda_{nm}} \text{ch} \sqrt{\lambda_{nm}} a} + \right. \\ &\quad \left. + B_{nm} \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}} (a - x)}{\text{ch} \sqrt{\lambda_{nm}} a} \right], \\ \lambda_{nm} &= \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{c} \right)^2. \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0$, $A_{nm} = 0$ при всех n и m . Используя граничное условие при $x = 0$, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \cos \frac{\pi n}{b} y \sin \frac{\pi m}{c} z = Ayz.$$

Отсюда

$$B_{nm} = \frac{1}{\left\| \cos \frac{\pi n}{b} y \right\|^2 \left\| \sin \frac{\pi m}{c} z \right\|^2} \int_0^b \int_0^c yz \cos \frac{\pi n}{b} y \sin \frac{\pi m}{c} z \, dy \, dz.$$

Так как

$$\int_0^c z \sin \frac{\pi m}{c} z \, dz = \frac{c^2}{\pi m} (-1)^{m+1},$$

$$\int_0^b y \cos \frac{\pi n}{b} y \, dy = \begin{cases} \frac{b^2}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1], & n \neq 0, \\ \frac{b^2}{2}, & n = 0, \end{cases}$$

$$\left\| \sin \frac{\pi m}{c} z \right\|^2 = \frac{c}{2},$$

$$\left\| \cos \frac{\pi n}{b} y \right\|^2 = \begin{cases} b, & n = 0, \\ \frac{b}{2}, & n \neq 0, \end{cases}$$

можем записать

$$B_{0m} = \frac{bc}{\pi m} (-1)^{m+1},$$

$$B_{nm} = \frac{4bc}{\pi^3 m n^2} (-1)^m [1 - (-1)^n],$$

$$n \neq 0, \quad m = 1, 2, \dots, \infty.$$

Следовательно, стационарное распределение температуры имеет вид

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{bc}{\pi m} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi m}{c} (a-x)}{\operatorname{ch} \frac{\pi m}{c} a} \sin \frac{\pi m}{c} z +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m [1 - (-1)^n] \frac{4bc}{\pi^3 m n^2} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{nm}} (a-x)}{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{nm}} a} \cos \frac{\pi n}{b} y \sin \frac{\pi m}{c} z,$$

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{c} \right)^2.$$

3. Найти стационарное распределение температуры внутри куба, две грани которого при $z = 0$ и $z = a$ теплоизолированы, а на остальных поддерживается постоянная температура T_0 .

Решение. Стационарная температура u является решением краевой задачи

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < a, \quad 0 < z < a,$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=a} = T_0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=a} = 0.$$

Поскольку при $z = 0$ и $z = a$ заданы однородные граничные условия второго рода

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=a} = 0,$$

а граничные условия на остальной части поверхности куба от z не зависят, то и решение задачи от переменной z зависеть не будет:

$$u = u(x, y).$$

Поэтому трехмерная задача вырождается в двумерную:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{в квадрате } 0 < x, y < a,$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=a} = T_0.$$

Далее можно использовать метод разделения переменных, как это изложено в предыдущем параграфе. Но совершенно очевидно, что решением данной задачи является $u \equiv T_0$.

Итак, стационарная температура данного куба постоянна и равна T_0 .

Заметим, что решение задачи сразу можно было получить "из физических соображений": на боковых гранях поддерживается постоянная температура T_0 , а две другие грани теплоизолированы. Следовательно, внутри куба будет сохраняться та же температура T_0 .

Если непосредственная проверка показывает, что каким-то образом "угаданная" или построенная "из физических соображений" функция действительно является решением поставленной задачи, то другого решения она иметь не может в силу теоремы единственности.

9 Краевые задачи для уравнения Лапласа в круговом цилиндре

Решение краевой задачи для уравнения Лапласа внутри прямого кругового цилиндра ($0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h$) проводится по той же схеме, что и для прямоугольного параллелепипеда.

Для примера используем задачу Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < z < h, \quad (9.78)$$

$$u \Big|_{r=a} = f(\varphi, z), \quad (9.79)$$

$$u \Big|_{z=0} = f_1(r, \varphi), \quad (9.80)$$

$$u \Big|_{z=h} = f_2(r, \varphi). \quad (9.81)$$

Полную задачу (9.78)–(9.81) разобьем на две стандартные:

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < z < h, \quad (9.82)$$

$$u \Big|_{r=a} = 0, \quad (9.83)$$

$$u \Big|_{z=0} = f_1(r, \varphi), \quad (9.84)$$

$$u \Big|_{z=h} = f_2(r, \varphi) \quad (9.85)$$

и

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < z < h, \quad (9.86)$$

$$u \Big|_{r=a} = f(\varphi, z), \quad (9.87)$$

$$u \Big|_{z=0} = u \Big|_{z=h} = 0. \quad (9.88)$$

Рассмотрим каждую из них. Начнем с задачи (9.82) – (9.85). Найдем частные решения уравнения Лапласа, представленные в виде

$$u(r, \varphi, z) = v(r, \varphi)Z(z) \neq 0 \quad (9.89)$$

и удовлетворяющие однородному граничному условию

$$u \Big|_{r=a} = 0.$$

Подставляя (9.89) в уравнение Лапласа и разделяя переменные, получим

$$\frac{\Delta_2 v}{v} \equiv -\frac{Z''}{Z} = \lambda.$$

Отсюда, как и для параллелепипеда, получаем задачи для $v(r, \varphi)$ и $Z(z)$:

$$\begin{aligned} \Delta_2 v + \lambda v &= 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ v \Big|_{r=a} &= 0, \quad v(r, \varphi) \neq 0 \end{aligned} \quad (9.90)$$

и

$$Z''(z) - \lambda Z(z) = 0, \quad 0 < z < h. \quad (9.91)$$

Задача (9.90) есть задача Штурма – Лиувилля для круга. Ее собственные функции запишутся как

$$v = v_{nk}(r, \varphi) = J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix},$$

а собственные значения $\lambda_k^{(n)}$ есть корни уравнения

$$J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} a) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, \infty.$$

Общее решение уравнения (9.91) представим в виде, удобном для решения задачи Дирихле по переменной z :

$$Z(z) = A \frac{\text{sh } \sqrt{\lambda_k^n} z}{\text{sh } \sqrt{\lambda_k^n} h} + B \frac{\text{sh } \sqrt{\lambda_k^n} (h - z)}{\text{sh } \sqrt{\lambda_k^n} h}.$$

Таким образом, система частных решений выглядит как

$$\begin{aligned} u_{nk}(r, \varphi, z) &= v_{nk}(r, \varphi) \left\{ A_{nk} \frac{\text{sh } \sqrt{\lambda_k^n} z}{\text{sh } \sqrt{\lambda_k^n} h} + B_{nk} \frac{\text{sh } \sqrt{\lambda_k^n} (h - z)}{\text{sh } \sqrt{\lambda_k^n} h} \right\}, \\ n &= 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (9.92)$$

Решение задачи (9.82) – (9.85) ищем в виде ряда по этим частным решениям:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r) \left\{ \left[A_{nk} \frac{\text{sh } \sqrt{\lambda_k^n} z}{\text{sh } \sqrt{\lambda_k^n} h} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + B_{nk} \frac{\text{sh } \sqrt{\lambda_k^n} (h - z)}{\text{sh } \sqrt{\lambda_k^n} h} \right] \cos n\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \left[C_{nk} \frac{\text{sh } \sqrt{\lambda_k^n} z}{\text{sh } \sqrt{\lambda_k^n} h} + D_{nk} \frac{\text{sh } \sqrt{\lambda_k^n} (h - z)}{\text{sh } \sqrt{\lambda_k^n} h} \right] \sin n\varphi \right\}. \end{aligned} \quad (9.93)$$

Коэффициенты A_{nk} , B_{nk} , C_{nk} , D_{nk} определяются из граничных условий (9.84), (9.85):

$$A_{nk} = \frac{1}{\|J_n\|^2 \|\cos n\varphi\|^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} f_2(r, \varphi) J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r) \cos n\varphi \, dr \, d\varphi,$$

$$B_{nk} = \frac{1}{\|J_n\|^2 \|\cos n\varphi\|^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} f_1(r, \varphi) J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r) \cos n\varphi \, dr \, d\varphi,$$

$$C_{nk} = \frac{1}{\|J_n\|^2 \|\sin n\varphi\|^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} f_2(r, \varphi) J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r) \sin n\varphi \, dr \, d\varphi,$$

$$D_{nk} = \frac{1}{\|J_n\|^2 \|\sin n\varphi\|^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} f_1(r, \varphi) J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r) \sin n\varphi \, dr \, d\varphi.$$

Замечание 1. Для задачи Дирихле все собственные значения $\lambda_k^{(n)} > 0$. При решении задачи Неймана появляется собственное значение $\lambda = 0$. Если $\lambda = 0$, то уравнение (9.91) принимает вид

$$Z'' = 0.$$

Его общее решение

$$Z(z) = A + Bz,$$

поэтому в системе частных решений задачи Неймана удобно выделить выражение

$$u_0 = A_0 + B_0 z,$$

соответствующее нулевому собственному значению.

Замечание 2. Изложенный ранее метод решения краевой задачи можно непосредственно перенести на решение краевой задачи внутри прямого цилиндра произвольного поперечного сечения, если на боковой поверхности такого цилиндра выполняется тривиальное граничное условие (первого, второго или третьего рода).

Замечание 3. Сходимость полученных рядов эквивалентна сходимости рядов, описывающих решения краевых задач для прямоугольного параллелепипеда.

Рассмотрим теперь задачу (9.86)–(9.88). Построим систему частных решений уравнения Лапласа, представленных в виде

$$u(r, \varphi, z) = v(r, \varphi)Z(z) \neq 0 \quad (9.94)$$

и удовлетворяющих однородному граничному условию

$$u \Big|_{z=0} = u \Big|_{z=h} = 0.$$

Подставляя (9.94) в уравнение Лапласа и разделяя переменные, как это делалось ранее, получим задачи для $Z(z)$ и $v(r, \varphi)$:

$$\begin{aligned} Z'' + \lambda Z &= 0, & 0 < z < h, \\ Z(0) = Z(h) &= 0, & Z(z) \neq 0 \end{aligned} \quad (9.95)$$

и

$$\Delta_2 v - \lambda v = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (9.96)$$

Задача (9.95) есть задача Штурма – Лиувилля для отрезка. Ее собственные значения и собственные функции запишутся как

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_k &= \left(\frac{\pi k}{h} \right)^2, & Z = Z_k(z) &= \sin \frac{\pi k}{h} z, \\ k &= 1, 2, \dots, \infty. \end{aligned}$$

Частные решения уравнения (9.96) также найдем методом разделения переменных. Пусть

$$v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \quad (9.97)$$

Подставим в (9.97) уравнение (9.96) и разделим переменные:

$$\frac{r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \lambda r^2 R}{R(r)} \equiv -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu. \quad (9.98)$$

Отсюда получаем задачу для определения $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi'' + \nu \Phi = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

и задачу для определения $R(r)$:

$$\begin{aligned} r^2 R'' + r R' - (\lambda r^2 + \nu) R &= 0, & 0 \leq r < a, \\ |R(0)| &< \infty. \end{aligned}$$

Задача для $\Phi(\varphi)$ есть задача Штурма — Лиувилля для отрезка с периодическими граничными условиями. Ее собственные функции и собственные значения определяются следующим образом:

$$\Phi = \Phi_n(\varphi) = \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{array} \right\}, \quad \nu = \nu_n = n^2, \quad n = 0, 1, \dots, \infty.$$

Уравнение для $R(r)$ есть уравнение функций Бесселя с чисто мнимым аргументом. Его общее решение имеет вид

$$R(r) = C_1 I_n(\sqrt{\lambda}r) + C_2 K_n(\sqrt{\lambda}r),$$

где $I_n(x)$ — функция Инфельда, $K_n(x)$ — функция Макдональда.

Условие ограниченности дает

$$C_2 = 0.$$

Следовательно, систему частных решений (9.94) можно представить как

$$u_{nk}(r, \varphi, z) = I_n(\sqrt{\lambda_k}r) \sin \sqrt{\lambda_k}z \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{array} \right\}, \quad (9.99)$$

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{h} \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots, \infty, \quad n = 1, 2, \dots, \infty.$$

Решение краевой задачи (9.86)–(9.88) ищем в виде ряда по системе (9.99)

$$u(r, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_n(\sqrt{\lambda_k}r)}{I_n(\sqrt{\lambda_k}a)} \sin \sqrt{\lambda_k}z \{A_{nk} \cos n\varphi + B_{nk} \sin n\varphi\}, \quad (9.100)$$

коэффициенты которого определяются из граничного условия (9.87):

$$A_{nk} = \frac{1}{N_1^2} \int_0^h \int_0^{2\pi} f(z, \varphi) \sin \frac{\pi k}{h} z \cos n\varphi \, dz \, d\varphi,$$

$$B_{nk} = \frac{1}{N_2^2} \int_0^h \int_0^{2\pi} f(z, \varphi) \sin \frac{\pi k}{h} z \sin n\varphi \, dz \, d\varphi,$$

где

$$N_1 = \left\| \sin \frac{\pi k}{h} z \right\| \left\| \cos n\varphi \right\|,$$

$$N_2 = \left\| \sin \frac{\pi k}{h} z \right\| \left\| \sin n\varphi \right\|.$$

Таким образом, решение задачи (9.78)–(9.81) представлено в виде

$$u = u_1 + u_2,$$

где u_1 — решение стандартной задачи (9.82)–(9.85), данное формулой (9.93), u_2 — решение стандартной задачи (9.86) – (9.88), определенное формулой (9.100).

Замечание 1. Решение краевой задачи с другими граничными условиями проводится по такой же схеме; при этом, как было указано ранее, следует учитывать возможность появления нулевого собственного значения.

Замечание 2. При решении задачи (9.86) – (9.88) внутри тора прямоугольного сечения изменится только функция $R(r)$. В этом случае она будет иметь вид

$$R = R_{nk}(r) = C_{nk}I_n(\sqrt{\lambda_k}r) + D_{nk}K_n(\sqrt{\lambda_k}r).$$

Замечание 3. Если по переменной z на обоих концах отрезка $[0, h]$ (то есть и при $z = 0$, и при $z = h$) задано нулевое граничное условие второго рода

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h},$$

а граничная функция на боковой поверхности цилиндра не зависит от переменной z , то и решение краевой задачи для уравнения Лапласа внутри цилиндра не зависит от z . В этом случае задача вырождается в краевую задачу для уравнения Лапласа на плоскости в области, представляющей поперечное сечение данного цилиндра.

Отдельно рассмотрим краевую задачу с нулевыми граничными условиями второго рода по переменной z

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < z < h, \quad (9.101)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h} = 0, \quad (9.102)$$

$$u|_{r=a} = f(\varphi, z). \quad (9.103)$$

В этом случае при разделении переменных по z получаем задачу Штурма – Лиувилля

$$\begin{aligned} Z'' + \lambda Z &= 0, & 0 < z < h, \\ Z'(0) = Z'(h) &= 0, & Z(z) \neq 0, \end{aligned} \quad (9.104)$$

решение которой запишется в виде

$$\lambda = \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{h}\right)^2, \quad Z = Z_k(z) = \cos \frac{\pi k}{h} z,$$

$$k = 1, 2, \dots, \infty.$$

Заметим, что при $k = 0$ $\lambda_0 = 0$, $Z_0(z) = 1$.

Для функции $v(r, \varphi)$ получаем уравнение

$$\Delta_2 v - \lambda v = 0. \quad (9.105)$$

При $\lambda_k \neq 0$ (то есть при $k = 1, 2, \dots, \infty$) оно имеет следующие частные решения, ограниченные при $r = 0$:

$$I_n(\sqrt{\lambda_k} r) \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{array} \right\}, \quad \lambda = \lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, \dots, \infty.$$

При $k = 0$ $\lambda_0 = 0$ и уравнение (9.105) переходит в уравнение Лапласа $\Delta_2 v = 0$, частные решения которого ограничены при $r = 0$:

$$r^n \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{array} \right\}, \quad \lambda = \lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, \dots, \infty.$$

Следовательно, частные решения уравнения Лапласа в цилиндре, представленные в виде

$$u(r, \varphi, z) = v(r, \varphi) Z(z) \neq 0$$

и удовлетворяющие однородному граничному условию второго рода

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h} = 0,$$

запишутся как

$$r^n \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{array} \right\}, \quad \lambda = \lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, \dots, \infty$$

и

$$I_n\left(\frac{\pi k}{h} r\right) \cos \frac{\pi k}{h} z \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{array} \right\}, \quad (9.106)$$

$$k = 1, 2, \dots, \infty, \quad n = 1, 2, \dots, \infty.$$

Поэтому решение краевой задачи (9.101)–(9.103) можно представить в виде суммы двух рядов

$$u(r, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (A_{0n} \cos n\varphi + B_{0n} \sin n\varphi) + \quad (9.107)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n\left(\frac{\pi k}{h} r\right)}{I_n\left(\frac{\pi k}{h} a\right)} \cos \frac{\pi k}{h} z (A_{nk} \cos n\varphi + B_{nk} \sin n\varphi),$$

коэффициенты которых определяются из граничного условия (9.103):

$$A_{nk} = \frac{1}{N_1^2} \int_0^h \int_0^{2\pi} f(z, \varphi) \cos \frac{\pi k}{h} z \cos n\varphi \, dz \, d\varphi,$$

$$B_{nk} = \frac{1}{N_2^2} \int_0^h \int_0^{2\pi} f(z, \varphi) \cos \frac{\pi k}{h} z \sin n\varphi \, dz \, d\varphi,$$

где

$$N_1 = \left\| \cos \frac{\pi k}{h} z \right\| \left\| \cos n\varphi \right\|,$$

$$N_2 = \left\| \cos \frac{\pi k}{h} z \right\| \left\| \sin n\varphi \right\|.$$

Рассмотрим несколько примеров решения задач.

1. Найти электростатический потенциал внутри кругового цилиндра радиуса a , основания которого $z = 0$ и $z = h$ заземлены, а на боковой поверхности поддерживается потенциал $\cos 2\varphi$.

Решение. Для электростатического потенциала u имеем следующую краевую задачу внутри цилиндра:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в цилиндре,}$$

$$u \Big|_{z=0} = u \Big|_{z=h} = 0,$$

$$u \Big|_{r=a} = \cos 2\varphi.$$

Общее решение имеет вид

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_n\left(\frac{\pi k}{h} r\right)}{I_n\left(\frac{\pi k}{h} a\right)} \cos \frac{\pi k}{h} z (A_{nk} \cos n\varphi + B_{nk} \sin n\varphi).$$

Поскольку граничное условие содержит только $\cos 2\varphi$,

$$\begin{aligned} A_{nk} &= 0 & \text{при } n \neq 2, \\ B_{nk} &= 0 & \text{при всех } n \text{ и } k, \end{aligned} \quad (9.108)$$

следовательно, решение можно записать как

$$u = \cos 2\varphi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_n\left(\frac{\pi k}{h} r\right)}{I_n\left(\frac{\pi k}{h} a\right)} A_{2k} \sin \frac{\pi k}{h} z.$$

Коэффициенты A_{2k} определяются из граничного условия по формуле

$$A_{2k} = \frac{1}{\left\| \sin \frac{\pi k}{h} z \right\|^2} \int_0^h \sin \frac{\pi k}{h} z \, dz = \frac{2}{\pi k} [1 - (-1)^k].$$

Итак, решение задачи следующее:

$$\begin{aligned} u &= \frac{2}{\pi} \cos 2\varphi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k]}{k} \frac{I_2\left(\frac{\pi k r}{h}\right)}{I_2\left(\frac{\pi k a}{h}\right)} \sin \frac{\pi k}{h} z = \\ &= \frac{4}{\pi} \cos 2\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{I_2\left(\frac{\pi(2m+1)r}{h}\right)}{I_2\left(\frac{\pi(2m+1)a}{h}\right)} \frac{\sin \frac{\pi(2m+1)z}{h}}{2m+1}. \end{aligned} \quad (9.109)$$

2. Найти распределение потенциала внутри прямого кругового цилиндра радиуса a , на торцах которого задано нулевое электрическое поле, а на боковой поверхности поддерживается потенциал, равный U_{0z} , $U_0 = \text{const}$.

Решение. Электростатический потенциал u является решением краевой задачи

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < z < h, \quad (9.110)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h} = 0, \quad (9.111)$$

$$u|_{r=a} = U_0 z. \quad (9.112)$$

В данном случае решение от переменной φ не зависит и может быть записано в виде

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{\pi k}{h} r\right)}{I_0\left(\frac{\pi k}{h} a\right)} A_{k0} \cos \frac{\pi k}{h} z. \quad (9.113)$$

Коэффициенты A_{k0} определяются из граничного условия по формулам

$$A_{k0} = \frac{1}{\left\| \cos \frac{\pi k z}{h} \right\|_0^2} \int_0^h U_0 z \cos \frac{\pi k}{h} z \, dz =$$

$$= \begin{cases} U_0 \frac{h}{2}, & k = 0, \\ -U_0 \frac{2h}{\pi^2 k^2} [1 - (-1)^k], & k = 1, \dots, \infty. \end{cases}$$

Итак, данная задача имеет решение

$$u = \frac{1}{2} U_0 h - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2U_0 h}{\pi^2 k^2} [1 - (-1)^k] \frac{I_0\left(\frac{\pi k}{h} r\right)}{I_0\left(\frac{\pi k}{h} a\right)} \cos \frac{\pi k}{h} z.$$

3. Решить уравнение Лапласа внутри сектора кругового цилиндра $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, $0 < z < h$ с граничными условиями

$$u \Big|_{r=a} = u \Big|_{\varphi=0} = u \Big|_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = u \Big|_{z=0} = 0,$$

$$u \Big|_{z=h} = r^4 \sin 4\varphi.$$

Решение. Поскольку при $z = 0$ задано нулевое граничное условие, решение можно записать следующим образом:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_{4n}(\sqrt{\lambda_k^{(4n)}} r) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k^{(4n)}} z}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k^{(4n)}} h} A_{nk} \sin 4n\varphi,$$

где $\lambda_k^{(4n)}$ — корни уравнения $J_{4n}(\sqrt{\lambda_k^{(4n)}} a) = 0$.

Заметим, что разложение решения проводится по собственным функциям задачи Дирихле для сектора с углом раствора $\frac{\pi}{4}$, которые имеют вид

$$J_{4n}(\sqrt{\lambda_k^{(4n)}} r) \sin 4n\varphi, \quad k = 1, 2, \dots, \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty.$$

Коэффициенты ряда определяются из граничного условия при $z = h$:

$$\begin{aligned} A_{nk} &= \frac{1}{\|J_{4n}(\sqrt{\lambda_k^{(4n)}} r)\|^2 \|\sin 4n\varphi\|^2} \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^4 J_{4n}(\sqrt{\lambda_k^{(4n)}} r) \sin 4\varphi \sin 4n\varphi \, dr \, d\varphi = \\ &= \frac{\delta_{n1}}{\frac{a^2}{2} (J'_4)^2} (\sqrt{\lambda_k^{(4n)}} a) \int_0^a r^5 J_4(\sqrt{\lambda_k^{(4)}} r) \, dr = \delta_{n1} \frac{2a^3}{\sqrt{\lambda_k^{(4)}}} \frac{J_5(a\sqrt{\lambda_k^{(4)}})}{(J'_4)^2 (\sqrt{\lambda_k^{(4)}} a)}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a^3}{\sqrt{\lambda_k^{(4)}}} \frac{J_5(a\sqrt{\lambda_k^{(4)}})}{(J'_4)^2 (\sqrt{\lambda_k^{(4)}} a)} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k^{(4)}} z}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k^{(4)}} h} J_{4n}(\sqrt{\lambda_k^{(4)}} r) \sin 4n\varphi. \quad (9.114)$$

4. Решить уравнение Лапласа внутри тора прямоугольного сечения $a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, $0 < z < h$ с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h} = 0, \quad (9.115)$$

$$u|_{r=a} = 0, \quad u|_{r=b} = \cos 3\varphi. \quad (9.116)$$

Решение. Граничные условия при $z = 0$ и $z = h$ являются однородными граничными условиями второго рода, а граничные функции при $r = a$ и $r = b$ не зависят от z . Поэтому данная задача вырождается в краевую задачу для уравнения Лапласа внутри кольца $a \leq r \leq b$

$$\Delta u = 0, \quad a < r < b, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$u|_{r=a} = 0, \quad u|_{r=b} = \cos 3\varphi,$$

решение которой может быть записано в виде (4.25)

$$u = \frac{A_0}{2} \frac{R_0^{(a)}(r)}{R_0^{(a)}(b)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^{(a)}(r)}{R_n^{(a)'}(b)} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

где

$$R_0^{(a)}(r) = \ln \frac{r}{a}, \quad R_n^{(a)}(r) = \frac{r^{2n} - a^{2n}}{r^n}.$$

Из граничных условий находим

$$B_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \infty,$$

$$A_n = 0, \quad n \neq 3,$$

$$A_3 = 1,$$

следовательно,

$$u = \frac{b^3 r^6 - a^6}{r^3 b^6 - a^6} \cos 3\varphi.$$

10 Частные решения уравнения Лапласа в сферической системе координат

Для построения решений краевой задачи для уравнения Лапласа в шаре, вне шара и в шаровом слое необходимы специальные решения, называемые шаровыми функциями.

Введем сферическую систему координат (r, θ, φ) . Найдем решения уравнения Лапласа, представленные в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r) v(\theta, \varphi).$$

Подставим искомый вид решения в уравнение Лапласа и разделяя переменные, получим:

$$\frac{\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right)}{R} \equiv -\frac{\Delta_{\theta\varphi} v}{v} = \lambda,$$

где $\Delta_{\theta\varphi} v = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}$ — сферический оператор Лапласа.

Следовательно, приходим к решению краевой задачи для определения $v(\theta, \varphi)$

$$\begin{aligned} \Delta_{\theta\varphi} v + \lambda v &= 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ v(\theta, \varphi) &\equiv v(\theta, \varphi + 2\pi), \end{aligned} \tag{10.117}$$

$$\left| v(\theta, \varphi) \Big|_{\theta=0, \pi} \right| < \infty, \quad v \neq 0,$$

а также уравнение для функции $R(r)$

$$r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0. \quad (10.118)$$

Задача (10.117) есть задача Штурма–Лиувилля для сферического оператора Лапласа, собственные значения и собственные функции которого имеют вид

$$\lambda = \lambda_n = n(n+1), \quad v = v_{nm} = P_n^{(m)}(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix},$$

$$n = 0, 1, \dots, \infty, \quad m = 0, 1, \dots, n,$$

где $P_n^{(m)}(x)$ — присоединенные функции Лежандра.

Общее решение уравнения (10.118) при $\lambda = n(n+1)$ запишется как

$$R(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-(n+1)}.$$

Таким образом, построены два семейства решений уравнения Лапласа:

$$r^n P_n^{(m)}(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix}, \quad \frac{1}{r^{n+1}} P_n^{(m)}(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix}. \quad (10.119)$$

Функции первого семейства ограничены при $r = 0$, второго — при $r \rightarrow \infty$.

11 Краевые задачи для уравнения Лапласа в шаре

Перейдем к решению краевой задачи для уравнения Лапласа внутри шара

$$\Delta u = 0 \quad \text{в шаре } (0 \leq r < a),$$

$$P_1[u] \equiv \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial r} + \beta_1 u \Big|_{r=a} = f(\theta, \varphi), \quad |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0. \quad (11.120)$$

Решение, поскольку оно ограничено при $r = 0$, будем строить в виде ряда по шаровым функциям

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{r^n}{P_1[r^n] \Big|_{r=a}} P_n^{(m)}(\cos \theta) (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi), \quad (11.121)$$

коэффициенты которого определяются из граничного условия (11.120):

$$A_{nm} = \frac{1}{N_1^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta) \cos m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (11.122)$$

$$B_{nm} = \frac{1}{N_2^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta) \cos m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (11.123)$$

где

$$N_1 = \|P_n^{(m)}\| \|\cos m\varphi\|, \\ N_2 = \|P_n^{(m)}\| \|\sin m\varphi\|.$$

В том случае, если решается задача Неймана, следует иметь в виду, что решение существует лишь при условии

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = 0$$

и определяется с точностью до постоянного слагаемого. Поэтому суммирование в (11.121) начинается с $n = 1$, а коэффициент A_{00} остается произвольным.

Если граничное условие (11.120) не зависит от угла φ , то есть выглядит как

$$P_1[u] \equiv \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial r} + \beta_1 u \Big|_{r=a} = f(\theta), \quad (11.124)$$

то и решение соответствующей краевой задачи не будет зависеть от φ (оно имеет осевую симметрию) и может быть записано в виде

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{P_1[r^n] \Big|_{r=a}} A_n P_n(\cos \theta), \quad (11.125)$$

где

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (11.126)$$

Выражение (11.125) получается из (11.121), если учесть, что

$$A_{n0} = A_n, \quad A_{nm} = B_{nm} = 0 \quad \text{при } m \neq 0.$$

12 Краевые задачи для уравнения Лапласа вне шара

Решение внешней краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{вне шара } (r > a), \\ P_2[u] &\equiv \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial r} - \beta_2 u \Big|_{r=a} = f(\theta, \varphi), \\ u &\rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (12.127)$$

представляется в виде ряда

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \left[\frac{1}{P_2 \left(\frac{1}{r^{n+1}} \right)} \Big|_{r=a} \right] \times \\ &\times P_n^{(m)} \cos(\theta) A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi, \end{aligned} \quad (12.128)$$

коэффициенты которого определяются из граничного условия (12.127) и даются формулами (11.122), (11.123).

13 Краевые задачи для уравнения Лапласа в шаровом слое

При решении краевой задачи внутри шарового слоя ($a < r < b$) следует использовать оба построенных семейства решений (10.119). При этом удобно вначале построить из них две другие серии решений аналогично тому, как это сделано при решении уравнения Лапласа в круговом кольце.

Для определенности рассмотрим задачу Дирихле в шаровом слое

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad a < r < b, \\ u \Big|_{r=a} &= f_1(\theta, \varphi), \\ u \Big|_{r=b} &= f_2(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (13.129)$$

Построим сначала решение уравнения (10.118) при $\lambda = n(n+1)$, удовлетворяющее однородному граничному условию при $r = a$. Таким решением является функция

$$R(r) = R_n^{(a)}(r) = \frac{r^{(2n+1)} - a^{(2n+1)}}{r^{(n+1)}}.$$

Аналогично строится решение, удовлетворяющее однородному условию Дирихле при $r = b$:

$$R_n^{(b)}(r) = \frac{b^{(2n+1)} - r^{(2n+1)}}{r^{(n+1)}}.$$

Таким образом, получаем семейства решений уравнения Лапласа, удовлетворяющих однородному условию Дирихле при $r = a$:

$$u_{nm}^{(a)}(r, \theta, \varphi) = R_n^{(a)}(r) P_n^{(m)}(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{array} \right\} \quad (13.130)$$

и однородному условию при $r = b$:

$$u_{nm}^{(b)}(r, \theta, \varphi) = R_n^{(b)}(r) P_n^{(m)}(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{array} \right\}. \quad (13.131)$$

Решение краевой задачи (13.129) теперь можно представить в виде разложения по семействам решений (13.130) и (13.131) и записать следующим образом:

$$\begin{aligned} u = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{R_n^{(a)}(r)}{R_n^{(a)}(b)} P_n^{(m)}(\cos \theta) (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{R_n^{(b)}(r)}{R_n^{(b)}(a)} P_n^{(m)}(\cos \theta) (C_{nm} \cos m\varphi + D_{nm} \sin m\varphi). \end{aligned} \quad (13.132)$$

Коэффициенты A_{nm} и B_{nm} определяются из граничного условия при $r = b$, а C_{nm} и D_{nm} — из граничного условия при $r = a$. Формулы для них аналогичны формулам (11.122), (11.123).

При решении задачи с другими граничными условиями следует предварительно построить семейство решений, удовлетворяющих нужному однородному граничному условию при $r = a$, и семейство решений, удовлетворяющих однородному условию при $r = b$. Например, решения, удовлетворяющие граничному условию

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = 0,$$

можно взять в виде

$$T_n^{(a)}(r) = \frac{(n+1)r^{(2n+1)} + na^{(2n+1)}}{r^{(n+1)}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим примеры решения задач.

1. Найти электростатический потенциал внутри сферы, верхняя половина которой ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) заряжена до потенциала U_0 , а нижняя ($\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$) заземлена, $U_0 = \text{const}$.

Решение. Для потенциала u внутри сферы получаем задачу

$$\Delta u = 0 \quad \text{внутри сферы } (0 \leq r \leq a),$$

$$u|_{r=a} = \left\{ \begin{array}{l} U_0, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{array} \right\} = f(\theta).$$

Ее решение имеет аксиальную симметрию (не зависит от φ) и может быть записано в виде

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n A_n P_n(\cos \theta).$$

Коэффициенты A_n определяются из граничного условия по формуле

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = U_0 \frac{2n+1}{2} \int_0^1 P_n(x) dx.$$

Прежде всего заметим, что при четных $n \neq 0$

$$\int_0^1 P_n(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) dx = 0.$$

При $n = 0$

$$\int_0^1 P_n(x) dx = \int_0^1 dx = 1.$$

Пусть $n = 2k + 1$. Используем формулу

$$P_n(x) = \frac{1}{2n+1} [P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)],$$

поэтому

$$\int_0^1 P_{2k+1}(x) dx = \frac{1}{4k+3} \int_0^1 [P'_{2k+2}(x) - P'_{2k}(x)] dx =$$

$$= \frac{1}{4k+3} [P'_{2k}(0) - P'_{2k+2}(0)] .$$

Поскольку

$$P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} ,$$

получим

$$\int_0^1 P_{2k+1}(x) dx = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{(2k+1)(k+1)}(k!)^2} .$$

Следовательно,

$$A_{2k} = 0, \quad A_{2k+1} = (-1)^k \frac{4k+3}{k+1} \frac{(2k)!}{2^{2k+1}(k!)^2} U_0$$

и решение выглядит как

$$u = \frac{U_0}{2} + U_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4k+3}{k+1} \frac{(2k)!}{2^{2k+1}(k!)^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{(2k+1)} P_{2k+1}(\cos \theta) .$$

2. Определить электростатический потенциал внутри шаровой оболочки $a \leq r \leq b$, внешняя поверхность которой заземлена, а внутренняя заряжена до потенциала $U_0 \sin \theta \sin \varphi$.

Решение. Потенциал u является решением следующей краевой задачи для уравнения Лапласа внутри шаровой оболочки:

$$\Delta u = 0, \quad a < r < b,$$

$$u \Big|_{r=a} = U_0 \sin \theta \sin \varphi,$$

$$u \Big|_{r=b} = 0 .$$

Поскольку граничное условие при $r = b$ нулевое, то решение можно записать в виде

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{R_n^{(a)}(r)}{R_n^{(b)}(a)} P_n^{(m)}(\cos \theta) \{A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi\} ,$$

где

$$R_n^{(b)}(r) = \frac{b^{(2n+1)} - r^{(2n+1)}}{r^{(n+1)}} .$$

Учитывая, что $\sin \theta \sin \varphi \equiv P_1^{(1)}(\cos \theta) \sin \varphi$, из граничных условий находим

$$A_{nm} = 0 \quad \text{при всех } n \text{ и } m ,$$

$$B_{11} = U_0, \quad B_{nm} = 0 \quad \text{при } n \neq 1, \quad m \neq 1.$$

Поэтому решение имеет вид

$$u = U_0 \frac{R_1^{(b)}(r)}{R_1^{(b)}(a)} P_1^{(1)}(\cos \theta) \sin \varphi = U_0 \frac{a^2}{r^2} \frac{b^3 - r^3}{b^3 - a^3} \sin \theta \sin \varphi.$$

Замечание. При решении краевых задач для уравнения Пуассона $\Delta u = f(x, y)$ следует определить какое-либо частное решение u_1 и в результате замены $u = u_1 + v$ прийти к решению соответствующей краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$.

Рассмотрим примеры.

1. Найти решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = -xy$$

в круге радиуса R с центром в начале координат при условии $u(R, \varphi) = 0$.

Решение. Запишем исходную задачу в полярной системе координат

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2} r^4 \sin(2\varphi), \quad 0 \leq r < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (13.133)$$

$$u(R, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Построим частное решение в виде

$$u_1(r, \varphi) = w(r) \sin(2\varphi).$$

Подставив функцию $u_1(r, \varphi)$ в уравнение (13.133) и сократив на множитель $\sin(2\varphi)$, получим уравнение для функции, описывающей поведение искомого решения по радиальной координате:

$$r^2 w'' + r w' - 4w = -\frac{1}{2} r^4. \quad (13.134)$$

С помощью замены $r = \exp^t$ это уравнение приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$w''_{tt} - 4w = -\frac{1}{2} e^{4t},$$

у которого $w(t) = -\frac{1}{24} e^{4t}$ — частное решение. Следовательно, $w(r) = -\frac{1}{24} r^4$ является частным решением уравнения (13.134). Итак, $u_1 = -\frac{1}{24} r^4 \sin(2\varphi)$.

Введем функцию $v(r, \varphi) = u(r, \varphi) - u_1(r, \varphi)$. Тогда для построения функции $v(r, \varphi)$ придем к задаче Дирихле для уравнения Лапласа

$$r^2 v_{rr} + r v_r + v_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$u(R, \varphi) = \frac{1}{24} R^4 \sin(2\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Ее решение

$$v(r, \varphi) = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{1}{24} R^4 \sin(2\varphi) = \frac{1}{24} r^2 R^4 \sin(2\varphi).$$

Итак, решение исходной задачи запишется как

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{24} r^2 (R^2 - r^2) \sin(2\varphi).$$

2. Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в шаре радиуса a с центром в начале координат

$$\Delta u = xz \quad \text{внутри шара} \quad (0 \leq r \leq a),$$

$$u \Big|_{r=a} = 1.$$

Решение. Используя сферические координаты, представим искомое решение в виде суммы

$$u(r, \theta, \varphi) = v(r, \theta, \varphi) + w(r),$$

где функция $v(r, \theta, \varphi)$ служит решением задачи

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = \quad (13.135)$$

$$= \frac{r^2}{2} \cos \varphi \sin(2\theta), \quad 0 < r < a, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$v(a, \theta, \varphi) = 0,$$

а функция $w(r)$ — как решение задачи

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 w') = 0, \quad 0 < r < a, \quad (13.136)$$

$$w(a) = 1, \quad |w(0)| < \infty.$$

Рассмотрим сначала задачу (13.135). Будем решение в виде

$$v(r, \theta, \varphi) = R(r)P_2^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi,$$

где $P_2^{(1)}(x)$ — присоединенная функция Лежандра с индексами $n = 2$, $m = 1$.

Подставим $v(r, \theta, \varphi)$ в (13.135) и обозначим $P_2^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi = Y_2^{(1)}(\theta, \varphi)$:

$$Y_2^{(1)} \frac{d}{dr} (r^2 R') + R \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_2^{(1)}}{\partial \theta} \right) + R \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_2^{(1)}}{\partial \varphi^2} = \frac{r^4}{6} Y_2^{(1)}(\theta, \varphi).$$

По определению сферической функции $Y_2^{(1)}(\theta, \varphi)$ имеет место равенство

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_2^{(1)}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_2^{(1)}}{\partial \varphi^2} + 6Y_2^{(1)} = 0,$$

$$0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Поэтому

$$Y_2^{(1)} \frac{d}{dr} (r^2 R') - 6RY_2^{(1)} = \frac{r^4}{6} Y_2^{(1)},$$

откуда получим уравнение

$$\frac{d}{dr} (r^2 R') - 6R = \frac{r^4}{6}, \quad 0 < r < a$$

с граничными условиями $|R(0)| < \infty$, $R(a) = 0$.

Итак, для определения функции, описывающей поведение искомого решения в радиальном направлении $R(r)$ получим задачу

$$r^2 R'' + 2rR' - 6R = \frac{r^4}{6}, \quad 0 < r < a,$$

$$|R(0)| < \infty, \quad R(a) = 0,$$

решая которую, определим $R(r) = \frac{1}{84} r^2(r^2 - a^2)$.

Решение же задачи (13.136) представляется как $w(r) = 1$.

Таким образом,

$$u(r, \theta, \varphi) = 1 + \frac{1}{84} r^2(r^2 - a^2) P_2^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi.$$

14 Метод конформных отображений решения краевых задач на плоскости

Достаточно широко и эффективно при решении большого круга задач математического моделирования, возникающих в различных сферах науки и техники, применимы методы комплексного анализа. В частности, применяя теорию аналитических функций, можно прийти к эффективным алгоритмам построения решений краевых задач для уравнения Лапласа в силу существующей связи между гармоническими функциями двух вещественных переменных и аналитическими функциями комплексного переменного, а также инвариантности уравнения Лапласа при конформном отображении [1, 6].

Предположим, что требуется решить уравнение Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$ с заданным граничным условием в области сложной формы в плоскости переменных x и y . Рассматриваемую краевую задачу следует трансформировать в новую, в которой требуется решить уравнение Лапласа $\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\eta\eta} = 0$ в более простой области переменных ξ и η , причем вторая область получена из первой с помощью конформного отображения $\zeta = f(z)$, где $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, а $\tilde{u}(\zeta) = u(z)$ при $\zeta = f(z)$.

После того как решение уравнения Лапласа $\tilde{u}(\xi, \eta)$ в более простой области (круге, кольце, полуплоскости, прямоугольнике) найдено, достаточно подставить в него выражения $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ и получить решение исходной задачи $u(x, y)$, выраженное через исходные переменные.

Рассмотрим пример, в котором продемонстрируем решение краевой задачи для уравнения Лапласа на плоскости посредством применения метода конформных отображений.

Найти решение уравнения $\Delta u = 0$ в первом квадранте $x > 0$, $y > 0$ с краевыми условиями $u|_{x=0} = 0$, $u|_{y=0} = \theta(x - 1)$,

где $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ — функция Хевисайда.

Решение. Воспользуемся известным фактом [1, 6], что функция комплексного переменного $\zeta = z^2$, определенная в первом квадранте комплексной плоскости z , отображает исследуемую область на всю полуплоскость $\eta > 0$ в комплексной плоскости ζ так, что

$$\{(x, y) : y = 0 \wedge x > 0\} \xrightarrow{\zeta = z^2} \{(\xi, \eta) : \eta = 0 \wedge \xi > 0\},$$

$$\{(x, y) : x = 0 \wedge y > 0\} \xrightarrow{\zeta = z^2} \{(\xi, \eta) : \eta = 0 \wedge \xi < 0\}.$$

Таким образом, приходим к следующему выводу:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x > 0, y > 0, \\ u|_{x=0} = 0, y \geq 0, \\ u|_{y=0} = \theta(x-1), x \geq 0, \end{cases} \quad \zeta = z^2 \quad \begin{cases} \Delta \tilde{u} = 0, \eta > 0, \\ \tilde{u}|_{\eta=0} = 1, \xi > 1, \\ \tilde{u}|_{\eta=0} = 0, \xi < 1. \end{cases}$$

Заметим, что из равенства $\zeta = z^2$, то есть из равенства $\xi + i\eta = (x + iy)^2$, следует, что $\xi = x^2 - y^2$, $\eta = 2xy$.

Решение задачи Дирихле на плоскости (ξ, η) представляется интегралом Пуассона [1]

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \frac{\eta}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}(t, 0)}{(t - \xi)^2 + \eta^2} dt.$$

Учитывая начальное условие $\tilde{u}(\xi, 0)$, получим

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi, \eta) &= \frac{\eta}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t - \xi)^2 + \eta^2} dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{t - \xi}{\eta} \Big|_1^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1 - \xi}{\eta} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1 - \xi}{\eta}. \end{aligned}$$

Совершив переход от переменных ξ, η к переменным x, y , запишем решение исходной задачи

$$u(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y^2 - x^2 + 1}{2xy}.$$

15 Функция Грина оператора Лапласа

В предыдущих параграфах рассматривался метод разделения переменных Фурье решения краевой задачи для уравнения Лапласа. Также решение краевой задачи можно представить в интегральной форме через соответствующую функцию Грина. Рассмотрим примеры построения функции Грина оператора Лапласа. Сначала напомним основные теоретические положения.

Определение. Функция $G_1(M, M_0)$ называется функцией Грина оператора Лапласа для внутренней задачи Дирихле в области D , если она удовлетворяет условиям:

$$1) G_1(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v;$$

$$2) G_1(M, M_0) \Big|_{M \in S} = 0,$$

где v — гармоническая всюду в D функция.

Если поверхность S является поверхностью Ляпунова, то функция Грина существует и единственна, а решение краевой задачи

$$\Delta u = -F \quad \text{в } D,$$

$$u \Big|_S = f$$

определяется формулой

$$u(M) = - \oint_S f(P) \frac{\partial G_1}{\partial n_P}(P, M) dS_P + \int_D F(Q) G_1(Q, M) dV_Q.$$

Функция Грина для внутренней третьей краевой задачи определяется аналогично, а для внутренней задачи Неймана — несколько иначе.

Определение. Функция $G_2(M, M_0)$ называется функцией Грина внутренней задачи Неймана в области D , если она удовлетворяет условиям:

$$1) G_2(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v;$$

$$2) \frac{\partial G_2}{\partial n_M} \Big|_{M \in S} = -\frac{1}{S_0}, \quad (15.137)$$

где v — гармоническая всюду в D функция; \mathbf{n} — единичная нормаль к поверхности S , внешняя по отношению к области D ; S_0 — площадь поверхности S .

Определенная таким образом функция Грина $G_2(M, M_0)$ неоднозначна. Она определена с точностью до постоянной, зависящей от точки M_0 . Для нахождения этой постоянной на функцию $G_2(M, M_0)$ можно наложить условие

$$\oint_S G_2(P, M_0) dS_P = 0.$$

Решение краевой задачи

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } D,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = f$$

при выполнении условия разрешимости $\oint_S f \, dS = 0$ определяется формулой

$$u(M) = \oint_S G_2(P, M) f(P) \, dS_P + C, \quad (15.138)$$

где C — произвольная постоянная.

Если условие разрешимости не выполнено, то формула (15.138) представляет решение задачи

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } D,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = f - \frac{1}{S_0} \oint_S f(P) \, dS.$$

В двумерном случае (на плоскости) для внутренних краевых задач функция Грина определяется аналогично с заменой фундаментального решения $\frac{1}{4\pi R}$ на фундаментальное решение уравнения Лапласа на плоскости $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{M_0M}}$.

Перейдем к внешним задачам. В трехмерном случае функция Грина определяется единообразно для всех трех внешних краевых задач. Внешняя задача Неймана в трехмерном случае имеет единственное решение и осложнений не вызывает. Для примера напомним определение функции Грина для внешней задачи Дирихле.

Определение. Функция $G(M, M_0)$ называется функцией Грина внешней задачи Дирихле, если она удовлетворяет условиям:

- 1) $G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v$;
- 2) $G(M, M_0) \Big|_{M \in S} = 0$;
- 3) $G(M, M_0) \rightarrow 0$ равномерно при $M \rightarrow \infty$,

где v — гармоническая всюду в D функция.

Рассмотрим примеры построения функции Грина для некоторых областей.

1. Для построения функции Грина задачи Дирихле в шаре

$$G_1 = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v$$

достаточно найти гармоническую функцию v , которая определяется как решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \quad \text{в шаре} \quad 0 \leq r < a, \\ v \Big|_{r=a} &= -\frac{1}{4\pi R_{MM_0}} \Big|_{M \in S_a}. \end{aligned} \quad (15.139)$$

Для решения этой задачи введем сферическую систему координат (r, θ, φ) с началом в центре шара, а ось z проведем через точку M_0 . Тогда полюс функции Грина — точка M_0 — будет иметь координаты $(r, 0, 0)$, $0 \leq r_0 < a$. Поскольку граничное условие не зависит от угла φ , то и решение задачи (15.139) от φ зависеть не будет. Поэтому оно может быть представлено в виде ряда

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos \theta),$$

коэффициенты A_n которого определяются из граничного условия.

Разложим функцию $\frac{1}{R_{MM_0}}$ в ряд по полиномам Лежандра, используя выражение для производящей функции полиномов Лежандра [1]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{MM_0}} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r_0}{r} \cos \theta + \frac{r_0^2}{r^2}}} = \\ &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos \theta) \quad \text{при } r_0 < r. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$v \Big|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \theta) = \frac{1}{4\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r_0}{a}\right)^n P_n(\cos \theta).$$

Отсюда

$$A_n = -\frac{1}{4\pi a} \left(\frac{r_0}{a}\right)^n.$$

Таким образом, функция v имеет вид

$$v = -\frac{1}{4\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{rr_0}{a^2}\right)^n P_n(\cos \theta).$$

Используя выражение для производящей функции полиномов Лежандра, полученный ряд можно просуммировать.

Пусть $r_1 = \frac{a^2}{r_0}$. $M(r_1, 0, 0)$ есть точка, сопряженная точке M_0 относительно сферы $r = a$. Тогда

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{4\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n P_n(\cos \theta) = -\frac{1}{4\pi a} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{r_1} \cos \theta + \frac{r^2}{r_1^2}}} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{r_1}{a} \frac{1}{R_1}, \end{aligned}$$

где $R_1 = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \theta} = R_{M_1M}$ — расстояние между точками M и M_1 .

Поскольку $\frac{r_1}{a} = \frac{a}{r_0}$, $v = -\frac{1}{4\pi} \frac{r_1}{a} \frac{1}{R_1}$. Следовательно, функция Грина имеет вид

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{a}{r_0} \frac{1}{R_{MM_1}} \right].$$

2. Функцию Грина внутренней задачи Неймана для шара можно представить как

$$G_2(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v, \quad (15.140)$$

где v — решение следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \quad \text{в шаре} \quad 0 \leq r \leq a, \\ \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_S &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{MM_0}} \Big|_{M \in S} - \frac{1}{S_0}. \end{aligned}$$

Введем сферическую систему координат (r, θ, φ) с началом в центре шара. Ось z проведем через точку M_0 . Тогда задача для v принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0, \quad 0 \leq r < a, \\ \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=a} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{R_{MM_0}} \Big|_{r=a} - \frac{1}{4\pi a^2}. \end{aligned}$$

Ее решение не зависит от угла φ и может быть записано как

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{r^n}{na^{n-1}} P_n(\cos \theta) + A_0. \quad (15.141)$$

Поскольку при $r > r_0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{MM_0}} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r_0}{r} \cos \theta + \frac{r_0^2}{r^2}}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta), \end{aligned}$$

получим

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{R_{MM_0}} \right|_{r=a} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)r_0^n}{a^{n+2}} P_n(\cos \theta).$$

Подставим найденное разложение в граничное условие:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=a} = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n(\cos \theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)r_0^n}{a^{n+2}} P_n(\cos \theta) - \frac{1}{4\pi a^2}.$$

Отсюда

$$A_n = \frac{1}{4\pi a^2} (n+1) \left(\frac{r_0}{a}\right)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, функция v имеет вид

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi a} \frac{n+1}{n} \left(\frac{rr_0}{a^2}\right)^n P_n(\cos \theta) + A_0, \quad (15.142)$$

где A_0 — произвольная постоянная.

Преобразуем выражение (15.142):

$$v = \frac{1}{4\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{rr_0}{a^2}\right)^n P_n(\cos \theta) + \frac{1}{4\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{rr_0}{a^2}\right)^n P_n(\cos \theta).$$

Пусть $r_1 = \frac{a^2}{r_0}$, тогда $\frac{r}{r_1} < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{rr_0}{a^2}\right)^n P_n(\cos \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n P_n(\cos \theta) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{r_1} \cos \theta + \frac{r^2}{r_1^2}}} - 1 = \frac{a}{r_0} \frac{1}{R_1} - 1,$$

где $R_1 = R_{MM_1} = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \theta}$, $M_1(r_1, 0, 0)$ — точка, сопряженная точке M_0 относительно сферы $r = a$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{rr_0}{a^2}\right)^n P_n(\cos \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n P_n(\cos \theta) = \\ &= -\ln \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{r_1} \cos \theta + \sqrt{1 - 2\frac{r}{r_1} \cos \theta + \frac{r^2}{r_1^2}}\right) = \\ &= \ln \frac{2a^2}{a^2 - rr_0 \cos \theta + r_0 R_1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$v = \frac{1}{4\pi} \frac{a}{r_0} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{4\pi a} \ln \frac{2a^2}{a^2 - rr_0 \cos \theta + r_0 R_1} + \text{const.}$$

Таким образом, функция Грина внутренней задачи Неймана для шара имеет вид

$$G_2 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{R_{MM_0}} + \frac{a}{r_0} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{a} \ln \frac{2a^2}{a^2 - rr_0 \cos \theta + r_0 R_1} \right) + \text{const.} \quad (15.143)$$

При $r = a$

$$\begin{aligned} R_1 \Big|_{r=a} &= \sqrt{r_1^2 + r^2 - 2rr_1 \cos \theta} \Big|_{r=a} = \\ &= \frac{a}{r_0} \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \theta} = \frac{a}{r_0} R_{MM_0} \Big|_{r=a}, \\ G_2 \Big|_{r=a} &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a} \ln (a - r_0 \cos \theta + R) + \frac{\ln a}{a} \right) + \text{const.} \end{aligned}$$

Поэтому решение краевой задачи

$$\Delta u = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = f(\theta, \varphi), \quad \oint_S f(\theta, \varphi) dS = 0$$

может быть записано следующим образом:

$$u(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{2}{R_{MM_0}} - \frac{1}{a} (a - r_0 \cos \beta + R_{MM_0}) \right] f(\theta, \varphi) dS + C,$$

где $R_{MM_0} = \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \beta}$, $\cos \beta = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$. Эта формула называется формулой Неймана.

3. Для построения функции Грина внешней задачи Неймана для шара достаточно решить задачу

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \quad \text{вне шара} \quad r > a, \\ \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_S &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{MM_0}} \Big|_{M \in S}, \\ v &\rightarrow 0 \quad \text{равномерно на бесконечности.} \end{aligned} \quad (15.144)$$

В сферической системе координат (r, θ, φ) , начало которой расположено в центре сферы, а ось z проходит через точку M_0 , решение задачи (15.144), учитывая ее осевую симметрию, можно записать в виде

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{a^{n+2}}{(n+1)r^{n+1}} P_n(\cos \theta). \quad (15.145)$$

При $r < r_0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{MM_0}} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta}} = \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n P_n(\cos \theta), \\ \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{MM_0}} &= -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{R_{MM_0}} = -\frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{r^{n-1}}{r_0^n} P_n(\cos \theta). \end{aligned}$$

Подставляя (15.145) в граничное условие, получим

$$\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \theta) = -\frac{1}{4\pi r_0} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{a^{n-1}}{r_0^n} P_n(\cos \theta).$$

Отсюда находим

$$A_0 = 0, \quad A_n = \frac{1}{4\pi r_0} n \frac{a^{n-1}}{r_0^n}, \quad n \geq 1.$$

Итак,

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{4\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{a^2}{rr_0} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta) = \\ &= \frac{1}{4\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^2}{rr_0} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta) - \frac{1}{4\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2}{rr_0} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta). \end{aligned}$$

Полученные ряды можно просуммировать. Пусть $r_1 = \frac{a^2}{r_0}$, тогда $\frac{r_1}{r} < 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^2}{rr_0} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta) &= \frac{r_1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) = \\ &= \frac{r_1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r_1}{r} \cos \theta + \frac{r_1^2}{r^2}}} = \frac{r_1}{R_1}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2}{rr_0} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta) = \\ &= \ln \frac{\frac{r_1}{r} - \cos \theta + \sqrt{1 - 2\frac{r_1}{r} \cos \theta + \frac{r_1^2}{r^2}}}{1 - \cos \theta} = \ln \frac{a^2 - rr_0 \cos \theta + r_0 R_1}{rr_0(1 - \cos \theta)}, \end{aligned}$$

где $R_1 = R_{MM_1} = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \theta}$, $M(r_1, 0, 0)$ — точка, сопряженная точке M_0 относительно сферы $r = a$.

Отсюда

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{4\pi} \frac{a}{r_0} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{4\pi a} \ln \frac{1 - \cos \theta}{\frac{r_1}{r} - \cos \theta + \sqrt{1 - 2\frac{r_1}{r} \cos \theta + \frac{r_1^2}{r^2}}} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{a}{r_0} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{4\pi a} \ln \frac{rr_0(1 - \cos \theta)}{a^2 - rr_0 \cos \theta + r_0 R_1}. \end{aligned}$$

Таким образом, функция Грина внешней задачи Неймана для шара запишется как

$$G = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{R_{MM_0}} + \frac{a}{r_0} \frac{1}{R_{MM_1}} + \frac{1}{a} \ln \frac{rr_0(1 - \cos \beta)}{a^2 - rr_0 \cos \beta + r_0 R_{MM_1}} \right],$$

где $R_{MM_1} = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \beta}$, $\cos \beta = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$.

Получим формулу для решения задачи Неймана вне шара

$$\Delta u = 0, \quad r > a,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = -f(\theta, \varphi).$$

Поскольку

$$G \Big|_{r=a} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{2}{R_{MM_0}} + \frac{1}{a} \ln \frac{r_0(1 - \cos \beta)}{a - r_0 \cos \beta + R_{MM_0}} \right],$$

$$\begin{aligned} u(r_0, \theta_0, \varphi_0) &= - \oint_S \frac{\partial u}{\partial r} G \, dS = \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{2}{R} + \frac{1}{a} \ln \frac{r_0(1 - \cos \beta)}{a - r_0 \cos \beta + R} \right] f(\theta, \varphi) \, dS, \end{aligned}$$

$$R = \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \beta}.$$

(15.146)

Формула (15.146) называется формулой Бьеркнеса.

4. *Функция Грина для полупространства $z > 0$* для задачи Дирихле и для задачи Неймана строится методом электростатического отображения и имеет вид [2–11]

$$G_{1,2}(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{R_{MM_0}} \pm \frac{1}{R_{MM_1}} \right],$$

причем знак минус берется для задачи Дирихле, знак плюс — для задачи Неймана, $M = (x, y, z)$, $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $M_1 = (x_0, y_0, -z_0)$.

Если известны собственные функции оператора Лапласа для данной области, то функция Грина может быть построена в виде ряда. Рассмотрим этот метод на примере внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Функция Грина оператора Лапласа для внутренней задачи Дирихле есть решение следующей краевой задачи:

$$\Delta u = -\delta(M, M_0) \quad \text{в } D, \quad (15.147)$$

$$u \Big|_S = 0, \quad (15.148)$$

где $\delta(M, M_0)$ — дельта-функция.

Пусть $\{\lambda_n\}_1^\infty$ и $\{v_n(M)\}_1^\infty$ — полные наборы собственных значений и собственных функций оператора Лапласа для задачи Дирихле в области D

$$\begin{aligned} \Delta v + \lambda v &= 0 \quad \text{в } D, \\ v \Big|_S &= 0, \quad \|v\| = 1. \end{aligned}$$

Решение задачи (15.147), (15.148) будем искать в виде ряда по собственным функциям $v_n(M)$:

$$u(M) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(M). \quad (15.149)$$

Поскольку

$$\delta(M, M_0) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(M) v_n(M_0),$$

подставив (15.149) в уравнение (15.146), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n v_n(M) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} v_n(M) v_n(M_0).$$

Учитывая, что при всех n $\lambda_n \neq 0$,

$$a_n = \frac{v_n(M_0)}{\lambda_n}.$$

Следовательно, функция Грина $G(M, M_0)$ согласно (15.149) имеет вид

$$G(M, M_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(M) v_n(M_0)}{\lambda_n}. \quad (15.150)$$

Аналогичный вид имеет функция Грина для третьей краевой задачи.

Рассмотрим подробнее случай второй краевой задачи (задачи Неймана). Пусть $\{\lambda_n\}_0^\infty$ и $\{v_n(M)\}_0^\infty$ — полные системы собственных значений и собственных функций задачи Неймана

$$\begin{aligned} \Delta v + \lambda v &= 0 \quad \text{в } D, \\ \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_S &= 0, \quad \|v\| = 1, \end{aligned}$$

причем $\lambda_n \neq 0$ при $n = 1, \dots, \infty$, $\lambda_0 = 0$, нулевому собственному значению соответствует нормированная собственная функция

$$v_0(M) = \frac{1}{\sqrt{V}},$$

где V — объем области D .

Рассмотрим ряд, аналогичный (15.150):

$$\tilde{G} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(M) v_n(M_0)}{\lambda_n}. \quad (15.151)$$

Функция \tilde{G} , как легко проверить подстановкой, является решением следующей краевой задачи:

$$\Delta \tilde{G} = -\delta(M, M_0) + \frac{1}{V} \quad \text{в } D, \quad (15.152)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{G}}{\partial n} \right|_S = 0. \quad (15.153)$$

Функция \tilde{G} , согласно определению, функцией Грина оператора Лапласа для внутренней задачи Неймана не является. Ее можно представить в виде

$$\tilde{G} = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + w, \quad (15.154)$$

где w — решение краевой задачи

$$\Delta w = \frac{1}{V} \quad \text{в } D, \quad (15.155)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_S = -\frac{1}{4\pi} \left. \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PM_0}} \right|_{P \in S}. \quad (15.156)$$

Легко проверить, что условие разрешимости уравнений Пуассона с граничным условием Неймана

$$\oint_S \frac{\partial w}{\partial n} dS = \int_D \Delta w dV$$

для краевой задачи (15.155), (15.156) выполнено.

Функцию \tilde{G} , определенную соотношениями (15.151), или (15.152), (15.153), или (15.154)–(15.156), также можно использовать для построения решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа в области D

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad D,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = f(p) \Big|_S,$$

$$\oint_S f \, dS = 0.$$

Действительно, применив формулу Грина, получим

$$\begin{aligned} u(M_0) &= \oint_S \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \tilde{G} - u \frac{\partial \tilde{G}}{\partial n} \right\} dS + \int_D \frac{1}{V} u \, dV = \\ &= \oint_S \tilde{G}(P, M) f(P) \, dS + \text{const.} \end{aligned}$$

Заметим, что согласно (15.151) функция $\tilde{G}(M, M_0)$ симметрична относительно своих аргументов и удовлетворяет условию

$$\int_D \tilde{G}(M, M_0) \, dV_M = 0.$$

Функция Грина оператора Лапласа задачи Дирихле в односвязной области на плоскости может быть построена методом конформного отображения. Это делается следующим образом. Если функция $w = f(z_0, z)$ осуществляет конформное отображение области D плоскости z на внутренность единичного круга $|w| < 1$ плоскости w так, что точка $z_0 \in D$ переходит в центр $w = 0$ этого круга, то функция

$$G(M, M_0) = G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|f(z, z_0)|}$$

является функцией Грина оператора Лапласа задачи Дирихле в области D .

Приведем простейшие примеры.

Построим методом конформного отображения функцию Грина для полуплоскости $-\infty < x < +\infty$, $y > 0$. Функция $f(z, z_0) = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$, где

\bar{z}_0 — точка, комплексно сопряженная z_0 , отображает верхнюю полуплоскость ($y > 0$) на единичный круг, причем точка z_0 переходит в центр круга. Следовательно, функция Грина имеет вид

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0} \right| = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Решение краевой задачи для уравнения Лапласа в верхней полуплоскости ($y > 0$) с граничным условием

$$u \Big|_{y=0} = f(x)$$

может быть представлено как

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial \eta}(x, y, \xi, \eta) f(\xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(\xi) d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}.$$

Рассмотрим конкретный случай $f(x) = \cos x$. Тогда

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y \cos \xi d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y e^{i\xi} d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}.$$

Этот интеграл можно вычислить при помощи теории вычетов, используя лемму Жордана

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y e^{i\xi} d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2} = 2\pi i \operatorname{Res} \frac{y e^{i\xi} d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2} \Big|_{\xi=x+iy} = \pi e^{ix-y}.$$

Следовательно,

$$u(x, y) = e^{-y} \cos x.$$

В качестве второго примера построим функцию Грина задачи Дирихле для полосы $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < \pi$.

Функция $w_1 = e^z$ осуществляет отображение плоскости z на плоскость w_1 так, что прямые $y = C$ плоскости z ($0 \leq C \leq 2\pi$) переходят в лучи $\arg w_1 = C$ на плоскости w_1 . Поэтому полоса $0 \leq C \leq \pi$ плоскости z отображается на верхнюю полуплоскость ($\operatorname{Im} W_1 \geq 0$) плоскости w_1 . Точка z_0 переходит в точку $w_1^0 = e^{z_0}$. Функция $w = \frac{w_1 - w_1^0}{w_1 - \bar{w}_1^0}$ отображает верхнюю полуплоскость плоскости w_1 на единичный круг $|w| \leq 1$ на плоскости w , причем w_1^0 переходит в центр $w = 0$ этого круга.

Таким образом, функция, осуществляющая конформное отображение указанной полосы на единичный круг так, что z_0 переходит в центр круга, имеет вид

$$f(z_0, z) = \frac{e^z - e^{z_0}}{e^z - e^{\bar{z}_0}}.$$

Поскольку

$$|e^z - e^{z_0}| = e^{\frac{x+x_0}{2}} \sqrt{2} [\operatorname{ch}(x-x_0) - \cos(y-y_0)]^{1/2},$$

где $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, функцию Грина можно представить как

$$\begin{aligned} G(M, M_0) &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|f(z_0, z)|} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch}(x-x_0) - \cos(y+y_0)}{\operatorname{ch}(x-x_0) - \cos(y-y_0)}. \end{aligned} \quad (15.157)$$

Решение задачи Дирихле в полосе

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < \pi, \\ u \Big|_{y=0} &= f_1(x), \quad u \Big|_{y=\pi} = f_2(x) \end{aligned} \quad (15.158)$$

может быть записано в виде

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y f_2(\xi) d\xi}{\operatorname{ch}(x-\xi) + \cos y} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y f_1(\xi) d\xi}{\operatorname{ch}(x-\xi) - \cos y}. \quad (15.159)$$

Рассмотрим пример, когда

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0, \\ f_2(x) &= \begin{cases} U_0, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Из выражения (15.159) получаем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{U_0}{2\pi} \sin y \int_0^{+\infty} \frac{d\xi}{\operatorname{ch}(x-\xi) + \cos y} = \\ &= \frac{U_0 \sin y}{2\pi} \int_{-x}^{+\infty} \frac{dz}{\operatorname{ch} z + \cos y} = \frac{U_0 \sin y}{2\pi} \int_{e^{-x}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 2t \cos y + 1} = \\ &= \frac{U_0}{2\pi} \sin y \int_{e^{-x}}^{+\infty} \frac{dt}{(t + \cos y)^2 + \sin^2 y} = \frac{U_0}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{t + \cos y}{\sin y} \Big|_{e^{-x}}^{+\infty} = \end{aligned}$$

$$= \frac{U_0}{2\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{e^{-x} + \cos y}{\sin y} \right\}. \quad (15.160)$$

Из выражения (15.160) видно, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y) &= U_0 \frac{y}{\pi}, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Можно получить и более точное поведение решения при $x \rightarrow \pm\infty$. Так как

$$\operatorname{arctg} \frac{e^{-x} + \cos y}{\sin y} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sin y}{e^{-x} + \cos y},$$

при $x \rightarrow -\infty$ ($e^{-x} \rightarrow +\infty$)

$$\operatorname{arctg} \frac{e^{-x} + \cos y}{\sin y} \approx \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sin y}{e^{-x} + \cos y}.$$

Следовательно, при $x \rightarrow -\infty$

$$u(x, y) \approx \frac{U_0}{\pi} \frac{\sin y}{e^{-x} + \cos y}.$$

При $x \rightarrow +\infty$ $\varepsilon = e^{-x} \rightarrow 0$, поэтому, разложив $\operatorname{arctg} \frac{\varepsilon + \cos y}{\sin y}$ по формуле Тейлора и сохранив первые члены, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{e^{-x} + \cos y}{\sin y} &\approx \frac{\pi}{2} - y + \frac{e^{-x} \sin y}{1 - e^{-2x} + 2e^{-x} \cos y} + \dots = \\ &= \frac{\pi}{2} - y + \frac{\sin y}{2(\operatorname{ch} x + \cos y)} + \dots \end{aligned} \quad (15.161)$$

Следовательно, при $x \rightarrow +\infty$

$$u(x, y) \approx \frac{U_0}{\pi} \left\{ y - \frac{\sin y}{2(\operatorname{ch} x + \cos y)} \right\}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа внутри круга $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

1.1. $\Delta u = 0$, $0 \leq r \leq a$,
 $u|_{r=a} = 2 \sin^2 \varphi + 4 \cos^3 \varphi$.

1.2. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 1$,
 $u|_{r=1} = \varphi^2 + \varphi + 1$.

1.3. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 1$,
 $u|_{r=1} = 2\varphi^2 + 3\varphi + 5$.

1.4. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 3$,
 $u|_{r=3} = \varphi^2$.

1.5. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 4$,
 $u|_{r=4} = 5\varphi^2 + 2\varphi + 2$.

1.6. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < a$,
 $\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = 4 \sin^3 \varphi$.

1.7. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$,
 $u|_{r=2} = \varphi^2 - \varphi$.

1.8. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < a$,
 $\left. \frac{\partial u}{\partial r} + u \right|_{r=a} = \sin \varphi + \cos 4\varphi$.

1.9. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$,
 $u|_{r=2} = \varphi^2 + 5\varphi + 7$.

1.10. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 1$,
 $u|_{r=1} = 3\varphi^2 + \varphi + 2$.

1.11. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$,
 $u|_{r=2} = 4\varphi^2 + 3\varphi + 1$.

1.12. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 1$,
 $u|_{r=1} = \varphi^2$.

1.13. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 1$,
 $u|_{r=1} = 2\varphi^2 - 5\varphi - 2$.

1.14. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$,
 $u|_{r=2} = 5\varphi^2 - 2\varphi + 1$.

1.15. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 3$,
 $u|_{r=3} = -\varphi^2 + 3\varphi$.

1.16. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$,
 $u|_{r=2} = \varphi^2 - 3\varphi + 4$.

1.17. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$,
 $u|_{r=2} = 10\varphi^2 - 2\varphi - 1$.

1.18. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 1$,
 $u|_{r=1} = -3\varphi^2 + 5\varphi - 2$.

1.19. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 4$,
 $u|_{r=4} = \varphi^2 - \varphi$.

1.20. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$,
 $u|_{r=2} = -4\varphi^2 - 3\varphi + 1$.

1.21. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$,
 $u|_{r=2} = 5\varphi^2 - \varphi + \pi$.

1.22. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$,
 $u|_{r=2} = 6\varphi^2 + 3\varphi + 1$.

- 1.23. $\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 3,$
 $u|_{r=3} = -\varphi^2 + 2\pi\varphi.$
- 1.24. $\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 2,$
 $u|_{r=2} = 3\varphi^2 - \varphi - 1.$
- 1.25. $\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 2,$
 $u|_{r=2} = 4\varphi^2 - 3\varphi + 1.$
- 1.26. $\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 2,$
 $u|_{r=2} = \varphi^2 - 5\varphi.$
- 1.27. $\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 3,$
 $u|_{r=3} = -2\varphi^2 + 7.$
- 1.28. $\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 1,$
 $u|_{r=1} = \varphi^2 + 7\varphi - 1.$
- 1.29. $\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < a,$
 $u|_{r=a} = 32(\sin^6 \varphi + \cos^6 \varphi).$
- 1.30. $\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 4,$
 $u|_{r=4} = \varphi^2 - 4\varphi + 2.$

Задача 2. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа вне круга $r \geq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ со следующими граничными условиями:

$$2.1. \quad u|_{r=a} = 8 \cos^4 \varphi.$$

$$2.2. \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = \sin \varphi + 4 \sin^3 \varphi.$$

$$2.3. \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} - u \right|_{r=a} = 1 + \cos 2\varphi.$$

$$2.4. \quad u \Big|_{r=a} = y + 2xy.$$

$$2.5. \quad u \Big|_{r=a} = x^2 - y^2.$$

$$2.6. \quad u \Big|_{r=a} = y^2 - xy.$$

$$2.7. \quad u \Big|_{r=a} = x^2 - 1.$$

$$2.8. \quad u \Big|_{r=a} = \begin{cases} 1, & 0 < \varphi < \pi, \\ -1, & \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Решить краевую задачу для уравнения Лапласа внутри сектора $0 < r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$ со следующими граничными условиями:

$$2.9. \quad u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\pi} = 0, \quad u|_{r=a} = \varphi(\pi - \varphi).$$

$$2.10. \quad u|_{\varphi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = 0, \quad u|_{r=a} = 1.$$

$$2.11. \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad u|_{r=a} = 1 + \cos 4\varphi.$$

$$2.12. \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\pi} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{\varphi=0} = \sin \varphi.$$

Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце $a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ со следующими граничными условиями:

$$2.13. \quad u|_{r=a} = 0, \quad u|_{r=b} = \sin \varphi + 2\cos^2 \varphi.$$

$$2.14. \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = 4\sin^3 \varphi, \quad u|_{r=b} = 0.$$

$$2.15. \quad u|_{r=a} = 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=b} = 2\sin^2 \varphi.$$

$$2.16. \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = \sin \varphi, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=b} = \cos \varphi.$$

Решить краевую задачу для уравнения Лапласа внутри кольцевого сектора $a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$ со следующими граничными условиями:

$$2.17. \quad u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\pi} = 0, \quad u|_{r=a} = \sin \varphi, \quad u|_{r=b} = 0.$$

$$2.18. \quad u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = \cos \varphi, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=b} = \sin 2\varphi.$$

$$2.19. \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad u|_{r=a} = 0, \quad u|_{r=b} = 1.$$

$$2.20. \quad u|_{\varphi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\pi} = 0, \quad u|_{r=a} = u|_{r=b} = \sin \frac{3\varphi}{2}.$$

Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ со следующими граничными условиями:

$$2.21. \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=0} = 1, \quad u|_{y=b} = 2.$$

$$2.22. \quad u|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=b} = \sin \frac{5\pi x}{2a}.$$

$$2.23. \quad u|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=a} = \cos \frac{3\pi y}{2b}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=b} = 0.$$

$$2.24. \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \sin y, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\pi} = \sin 5y, \quad u|_{y=0} = \cos x, \quad u|_{y=\pi} = \cos 3x.$$

$$2.25. \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=b} = 1.$$

Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольном параллелепипеде $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq c$ со следующими граничными условиями:

$$2.26. \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\pi} = 0,$$

$$u|_{z=0} = \sin x \cos y, \quad u|_{z=c} = \sin 2x \cos 2y.$$

$$2.27. \quad u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{z=0} = 0, \quad u|_{x=a} = u|_{y=b} = u|_{z=c} = 1.$$

$$2.28. \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=b} = 0, \quad u|_{z=0} = 1, \\ u|_{z=c} = 3.$$

2.29. Найти стационарное распределение температуры внутри прямоугольного параллелепипеда, два основания которого $z = 0$ и $z = c$ теплоизолированы, а на остальной поверхности поддерживается постоянная температура T_0 .

2.30. Одна грань прямоугольного параллелепипеда находится под потенциалом V , остальные заземлены. Найти распределение потенциала внутри параллелепипеда.

Задача 3. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона в кольце

$$3.1. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad 1 \leq r \leq 2, \quad 3.2. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{1}{2} \leq r \leq 1,$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=2} = 0. \quad u \Big|_{r=\frac{1}{2}} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=1} = 1.$$

$$3.3. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad 1 \leq r \leq 2, \quad 3.4. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad 1 \leq r \leq 2,$$

$$u|_{r=1} = 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=2} = 0. \quad u|_{r=1} = 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=2} = 1.$$

$$3.5. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \quad 3.6. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{1}{2} \leq r \leq 1,$$

$$u \Big|_{r=\frac{1}{2}} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} = 1. \quad u \Big|_{r=\frac{1}{2}} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0.$$

$$3.7. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \leq r \leq 2, \quad 3.8. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \leq r \leq 2,$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=2} = 2. \quad u|_{r=1}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=2} = 0.$$

$$3.9. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \quad 3.10. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{1}{2} \leq r \leq 1,$$

$$u \Big|_{r=\frac{1}{2}} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0. \quad u \Big|_{r=\frac{1}{2}} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0.$$

$$3.11. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \quad 3.12. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \leq r \leq 3,$$

$$u \Big|_{r=\frac{1}{2}} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} = 2. \quad u|_{r=1} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=3} = 0.$$

$$3.13. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \leq r \leq 3, \quad 3.14. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \leq r \leq 3,$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=3} = 1. \quad u|_{r=1} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=3} = 1.$$

$$3.15. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \leq r \leq 3, \quad 3.16. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \leq r \leq 3,$$

$$u|_{r=1} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=3} = 2. \quad u|_{r=1} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=3} = 1.$$

$$3.17. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \leq r \leq 3, \quad 3.18. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \leq r \leq 2,$$

$$u|_{r=1} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=3} = 2. \quad u|_{r=1} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=2} = 1.$$

$$3.19. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \leq r \leq 2, \quad 3.20. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \leq r \leq 2,$$

$$u|_{r=1} = 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=2} = 2. \quad u|_{r=1} = 2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=2} = 2.$$

$$3.21. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \quad 3.22. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{1}{2} \leq r \leq 1,$$

$$u|_{r=\frac{1}{2}} = 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=1} = 2. \quad u|_{r=\frac{1}{2}} = 2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=1} = 1.$$

$$3.23. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \quad 3.24. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{1}{2} \leq r \leq 1,$$

$$u|_{r=\frac{1}{2}} = 3, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=1} = 2. \quad u|_{r=\frac{1}{2}} = 3, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=1} = 3.$$

$$3.25. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \leq r \leq 2, \quad 3.26. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{3}{2} \leq r \leq 2,$$

$$u|_{r=1} = 3, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=2} = 1. \quad u|_{r=\frac{3}{2}} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=2} = 0.$$

$$3.27. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \leq r \leq 3, \quad 3.28. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{3}{2} \leq r \leq 2,$$

$$u|_{r=1} = 2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=3} = 3. \quad u|_{r=\frac{3}{2}} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=2} = 1.$$

$$3.29. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \leq r \leq 3, \quad 3.30. \quad \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{3}{2} \leq r \leq 2,$$

$$u|_{r=1} = 3, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=3} = 2. \quad u|_{r=\frac{3}{2}} = 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=2} = 0.$$

Задача 4. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа внутри прямого кругового цилиндра $0 \leq r \leq a$, $0 \leq z \leq h$ со следующими

граничными условиями:

$$\begin{aligned}
 4.1. \quad & u|_{r=a} = \cos^2 \varphi, \quad u|_{z=0} = u|_{z=h} = 0. \\
 4.2. \quad & \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \quad u|_{z=0} = r^2 \sin 2\varphi, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h} = 0. \\
 4.3. \quad & u|_{r=a} = z \sin \varphi, \quad u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=h} = 1. \\
 4.4. \quad & u|_{r=a} = 1 + 2 \cos 2\varphi, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h} = 0.
 \end{aligned}$$

Решить краевую задачу для уравнения Лапласа внутри прямого кругового цилиндра высоты h , в основании которого лежит круговой сектор $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$, со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned}
 4.5. \quad & u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\pi} = 0, \quad u|_{r=a} = 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h} = 0. \\
 4.6. \quad & \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad u|_{r=a} = z \cos 2\varphi, \quad u|_{z=0} = u|_{z=h} = 0. \\
 4.7. \quad & u|_{\varphi=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\pi} = 0, \quad u|_{r=a} = 0, \quad u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=h} = r^{\frac{3}{2}} \sin \frac{3\varphi}{2}. \\
 4.8. \quad & \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = 0, \quad u|_{r=a} = 0, \quad \left. u \right|_{z=0} = r^4 \cos 4\varphi, \quad \left. u \right|_{z=h} = 1.
 \end{aligned}$$

Решить краевую задачу для уравнения Лапласа внутри прямого кругового тора прямоугольного сечения $a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq h$ со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned}
 4.9. \quad & \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=b} = 0, \quad u|_{z=0} = r \sin \varphi, \quad \left. u \right|_{z=h} = 0. \\
 4.10. \quad & u|_{r=a} = 1, \quad u|_{r=b} = \sin \pi z, \quad u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=h} = 0. \\
 4.11. \quad & u|_{r=a} = \cos 2\varphi, \quad u|_{r=b} = \sin \varphi, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h} = 0.
 \end{aligned}$$

4.12. Найти стационарное распределение температуры внутри прямого цилиндра произвольного поперечного сечения, боковая поверхность которого теплоизолирована, на нижнем основании $z = 0$ поддерживается постоянная температура T_1 , на верхнем $z = h$ — постоянная температура T_2 .

Решить внутреннюю задачу Дирихле для шара $0 \leq r \leq a$ с гранич-

НЫМИ УСЛОВИЯМИ:

$$4.13. \quad u \Big|_{r=a} = \cos \theta + \cos^2 \theta .$$

$$4.14. \quad u \Big|_{r=a} = 1 + \sin \theta \cos \varphi .$$

$$4.15. \quad u \Big|_{r=a} = \sin^2 \theta + 15 \sin^2 \theta \cos \theta \cos 2\varphi .$$

$$4.16. \quad u \Big|_{r=a} = 1 + \sin \theta \cos \theta \sin \varphi + \sin^5 \theta \cos 5\varphi .$$

Решить внутреннюю задачу Неймана для шара $0 \leq r \leq a$ с граничными условиями:

$$4.17. \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = \cos \theta .$$

$$4.18. \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = \sin^3 \theta \sin 3\varphi + \sin \theta \cos \varphi .$$

$$4.19. \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = \sin^{10} \theta \sin 10\varphi .$$

Решить внутреннюю третью краевую задачу для шара $0 \leq r \leq a$ с граничными условиями:

$$4.20. \quad \frac{\partial u}{\partial r} + hu \Big|_{r=a} = \sin^2 \theta, \quad h = \text{const} .$$

$$4.21. \quad \frac{\partial u}{\partial r} + hu \Big|_{r=a} = \sin \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \theta \cos \varphi, \quad h = \text{const} .$$

$$4.22. \quad \frac{\partial u}{\partial r} + hu \Big|_{r=a} = 1 + \sin^7 \theta \cos 7\varphi, \quad h = \text{const} .$$

Решить внешнюю задачу Дирихле для шара $r \geq a$ с граничными условиями:

$$4.23. \quad u \Big|_{r=a} = \sin^2 \theta + 15 \sin^2 \theta \cos \theta \cos 2\varphi .$$

$$4.24. \quad u \Big|_{r=a} = 1 + \sin \theta \cos \theta \sin \varphi + \sin^5 \theta \cos 5\varphi .$$

Решить внешнюю задачу Неймана для шара $r \geq a$ с граничными условиями:

$$4.25. \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = \sin^3 \theta \sin 3\varphi + \sin \theta \cos \varphi.$$

$$4.26. \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = \sin^{10} \theta \sin 10\varphi.$$

Решить уравнение Лапласа внутри шарового слоя $0 \leq r \leq a$ с граничными условиями:

$$4.27. \quad u|_{r=a} = \cos \theta, \quad u|_{r=b} = 0.$$

$$4.28. \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \quad u|_{r=b} = 15 \sin^3 \theta \sin 3\varphi.$$

$$4.29. \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = \sin \theta \sin \varphi, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=b} = 3 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi.$$

$$4.30. \quad u|_{r=a} = \cos^3 \theta, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=b} = \sin^2 \theta \cos 2\varphi.$$

Задача 5. Решить задачу для уравнения Пуассона в шаровом слое $a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$

$$5.1. \quad \Delta u = xz, \quad 1 \leq r \leq 2, \quad u|_{r=1} = 0, \quad u|_{r=2} = 0.$$

$$5.2. \quad \Delta u = xz, \quad 1 \leq r \leq 2, \quad u|_{r=1} = 0, \quad u|_{r=2} = 1.$$

$$5.3. \quad \Delta u = xz, \quad 1 \leq r < 2, \quad u|_{r=1} = 1, \quad u|_{r=2} = 0.$$

$$5.4. \quad \Delta u = xz, \quad 1 < r < 2, \quad u|_{r=1} = 1, \quad u|_{r=2} = 1.$$

$$5.5. \quad \Delta u = xz, \quad 1 \leq r < 2, \quad u|_{r=1} = 1, \quad u|_{r=2} = 2.$$

$$5.6. \quad \Delta u = xz, \quad 1 < r < 2, \quad u|_{r=1} = 2, \quad u|_{r=2} = 1.$$

$$5.7. \quad \Delta u = xz, \quad 1 \leq r < 2, \quad u|_{r=1} = 2, \quad u|_{r=2} = 2.$$

$$5.8. \quad \Delta u = xz, \quad 1 < r < 2, \quad u|_{r=1} = 3, \quad u|_{r=2} = 1.$$

$$\begin{array}{ll}
5.9. \quad \Delta u = xz, & \frac{1}{2} \leq r < 1, \\
\quad \quad \quad u \Big|_{r=\frac{1}{2}} = 1, & u|_{r=1} = -1. \\
5.10. \quad \Delta u = xz, & \frac{1}{2} < r < 1, \\
\quad \quad \quad u \Big|_{r=\frac{1}{2}} = 1, & u|_{r=1} = 0. \\
5.11. \quad \Delta u = xz, & \frac{1}{2} \leq r < 1, \\
\quad \quad \quad u \Big|_{r=\frac{1}{2}} = 1, & u|_{r=1} = 1. \\
5.12. \quad \Delta u = xz, & \frac{1}{2} < r < 1, \\
\quad \quad \quad u \Big|_{r=\frac{1}{2}} = 0, & u|_{r=1} = 0. \\
5.13. \quad \Delta u = xz, & \frac{1}{2} < r < 1, \\
\quad \quad \quad u \Big|_{r=\frac{1}{2}} = -1, & u|_{r=1} = 0. \\
5.14. \quad \Delta u = xz, & \frac{1}{2} < r < 1, \\
\quad \quad \quad u \Big|_{r=\frac{1}{2}} = -1, & u|_{r=1} = -1. \\
5.15. \quad \Delta u = xz, & \frac{1}{2} < r < 1, \\
\quad \quad \quad u \Big|_{r=\frac{1}{2}} = 1, & u|_{r=1} = -1. \\
5.16. \quad \Delta u = xz, & \frac{1}{2} < r < 1, \\
\quad \quad \quad u \Big|_{r=\frac{1}{2}} = -1, & u|_{r=1} = 1. \\
5.17. \quad \Delta u = xz, & \frac{1}{2} < r < 1, \\
\quad \quad \quad u \Big|_{r=\frac{1}{2}} = 1, & u|_{r=1} = -2. \\
5.18. \quad \Delta u = xz, & 2 < r < 3, \\
\quad \quad \quad u|_{r=2} = 0, & u|_{r=3} = 0. \\
5.19. \quad \Delta u = xz, & 2 < r < 3, \\
\quad \quad \quad u|_{r=2} = 0, & u|_{r=3} = -1. \\
5.20. \quad \Delta u = xz, & 2 < r < 3, \\
\quad \quad \quad u|_{r=2} = -1, & u|_{r=3} = 0. \\
5.21. \quad \Delta u = xz, & 2 < r < 3, \\
\quad \quad \quad u|_{r=2} = 1, & u|_{r=3} = 3. \\
5.22. \quad \Delta u = xz, & 2 < r < 3, \\
\quad \quad \quad u|_{r=2} = 1, & u|_{r=3} = -3. \\
5.23. \quad \Delta u = xz, & 2 < r < 3, \\
\quad \quad \quad u|_{r=2} = 0, & u|_{r=3} = 4. \\
5.24. \quad \Delta u = xz, & 2 < r < 3, \\
\quad \quad \quad u|_{r=2} = 2, & u|_{r=3} = 0. \\
5.25. \quad \Delta u = xz, & 2 < r < 3, \\
\quad \quad \quad u|_{r=2} = 1, & u|_{r=3} = -2. \\
5.26. \quad \Delta u = xz, & 1 < r < 3, \\
\quad \quad \quad u|_{r=1} = 1, & u|_{r=3} = 1. \\
5.27. \quad \Delta u = xz, & 1 < r < 3, \\
\quad \quad \quad u|_{r=1} = 0, & u|_{r=3} = 1. \\
5.28. \quad \Delta u = xz, & 1 < r < 3, \\
\quad \quad \quad u|_{r=1} = 1, & u|_{r=3} = 0.
\end{array}$$

$$5.29. \quad \Delta u = xz, \quad 1 < r < 3, \quad u|_{r=1} = -1, \quad u|_{r=3} = 1.$$

$$5.30. \quad \Delta u = xz, \quad 1 < r < 3, \quad u|_{r=1} = 1, \quad u|_{r=3} = -1.$$

Задача 6. Решить задачу Дирихле, используя метод конформных отображений.

6.1. Найти решение задачи Дирихле для уравнения $\Delta u = 0$ в полосе $0 < y < \pi$ при краевых условиях $u|_{y=0} = \theta(x)$, $u|_{y=\pi} = 0$,

где $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ — функция Хевисайда.

6.2. Найти решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \operatorname{Re} z > 0, \\ |z - 5| > 3, & u|_{\operatorname{Re} z = 0} = 0, \quad u|_{|z-5|=3} = 1. \end{cases}$$

Задача 7. Решить краевую задачу, построив соответствующую функцию Грина.

7.1. Построить функцию Грина внутренней задачи Дирихле для круга.

7.2. Построить функцию Грина внутренней задачи Дирихле для полукруга.

7.3. Построить функцию Грина внешней задачи Дирихле для круга.

7.4. Построить функцию Грина внутренней задачи Неймана для круга.

7.5. Построить функцию Грина внутренней третьей краевой задачи для круга $\left(\frac{\partial u}{\partial r} + hu \right) \Big|_{r=a} = 0, h = \text{const.}$

7.6. Построить функцию Грина внешней третьей краевой задачи для круга $\left(\frac{\partial u}{\partial r} - hu \right) \Big|_{r=a} = 0, h = \text{const.}$

7.7. Построить функцию Грина задачи Дирихле для кольца $a \leq r \leq b$.

7.8. Построить функцию Грина для кольца при первом краевом условии на внутренней границе $r = a$ и втором — на внешней $r = b$.

7.9. Построить функцию Грина задачи Дирихле для шаровой оболочки $a \leq r \leq b$.

7.10. Построить функцию Грина задачи Дирихле для прямоугольника $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$.

7.11. Построить функцию Грина внутренней задачи Дирихле для полшара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$.

7.12. Найти гармоническую в полуплоскости $y > 0$ функцию $u(x, y)$, если известно, что $u(x, 0) = \frac{x}{1 + x^2}$.

7.13. В полупространстве $z < 0$ найти гармоническую функцию $u(x, y, z)$ по краевому условию

$$u(x, y, 0) = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

В круге $K : x^2 + y^2 + 2x < 0$ решить задачу со следующими условиями:

$$7.14. \quad \Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in K, \\ u(x, y) = 4x^3 + 6x - 1, \quad (x, y) \in \partial K.$$

$$7.15. \quad \Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in K, \\ u(x, y) = x^2 + 2y, \quad (x, y) \in \partial K.$$

$$7.16. \quad \Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in K, \\ u(x, y) = 2y^2 - x, \quad (x, y) \in \partial K.$$

$$7.17. \quad \Delta u(x, y) = 4, \quad (x, y) \in K, \\ u(x, y) = 2xy + 1, \quad (x, y) \in \partial K.$$

$$7.18. \quad \Delta u(x, y) = 24y, \quad (x, y) \in K, \\ u(x, y) = y, \quad (x, y) \in \partial K.$$

7.19. Построить решение задачи Дирихле для внешности круга $x^2 + y^2 \leq 1$ по краевому условию

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Найти решение задачи Дирихле

$$7.20. \quad \Delta u = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad z > 0, \\ u \Big|_{z=0} = \cos x \cos y, \quad -\infty < x, y < +\infty.$$

$$7.21. \quad \Delta u = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0, \\ u \Big|_{y=0} = \frac{k}{1 + x^2}, \quad k = \text{const}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$7.22. \quad \Delta u = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0, \\ u \Big|_{y=0} = \frac{x^2}{1+x^3}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$7.23. \quad \Delta u = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0, \\ u \Big|_{y=0} = \frac{1}{1+x^4}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$7.24. \quad \Delta u = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0, \\ u \Big|_{y=0} = \frac{1}{1-x^4}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$7.25. \quad \Delta u = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0, \\ u \Big|_{y=0} = \frac{1}{1-x^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$7.26. \quad \Delta u = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0, \\ u \Big|_{y=0} = \frac{1}{1+x^3}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$7.27. \quad \Delta u = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0, \\ u \Big|_{y=0} = \frac{x}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$7.28. \quad \Delta u = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0, \\ u \Big|_{y=0} = \frac{x}{1-x^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$7.29. \quad \Delta u = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0, \\ u \Big|_{y=0} = \frac{x}{1+x^3}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$7.30. \quad \Delta u = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0, \\ u \Big|_{y=0} = \frac{x^2}{1-x^3}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Библиографический список

1. *Алешков Ю. З.* Лекции по теории функций комплексного переменного: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Санкт-Петербург. ун-та, 1999. 196 с.
2. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 432 с.
3. *Бицадзе А. В., Калинин Д. Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993. 312 с.
4. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике: Учеб. пособие для ун-тов. М.: Наука, 1972. 687 с.
5. *Владимиров В. С., Михайлов В. П., Вашарин А. А.* и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1974. 271 с.
6. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Физматгиз, 1970. 712 с.
7. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного: Учеб. пособие для ун-тов. М.: Наука, 1987. 688 с.
8. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики: Учеб. пособие. М.: Наука, 1984. 344 с.
9. *Пикулин В.П., Похожаев С.И.* Практический курс по уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 1995. 224 с.
10. *Полянин А. Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
11. *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 2004. 321 с.
12. *Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. М.: МГУ, 1993. 352 с.
13. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики: Учеб. пособие для ун-тов. М.: Наука, 1972. 736 с.

Холодова Светлана Евгеньевна
Перегудин Сергей Иванович

Дополнительные разделы высшей математики

Учебное пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверский пр., 49