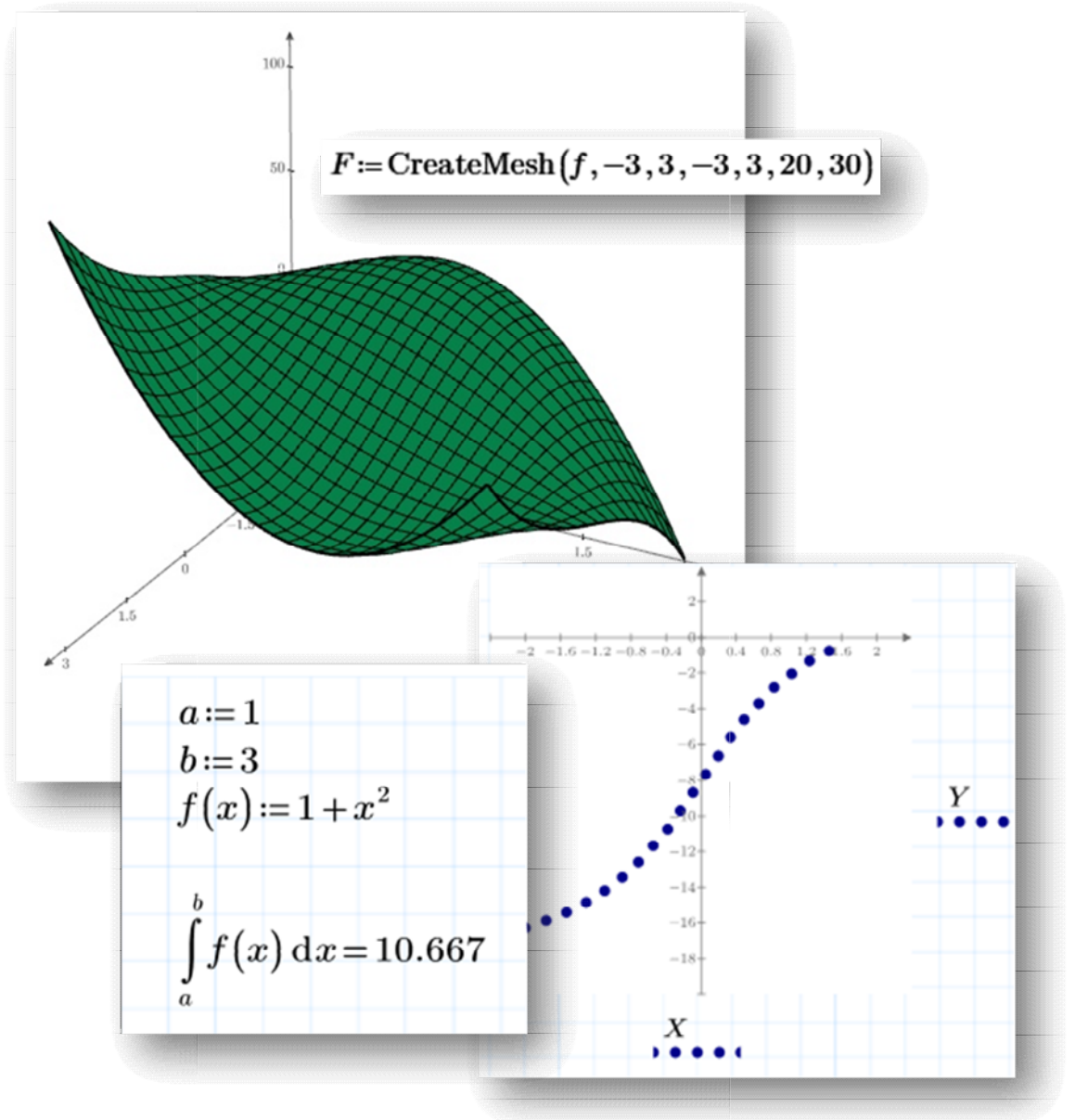


К.В. Ежова, А.Б. Острун, А.Н. Иванов
ОСНОВЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ



Санкт-Петербург
2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

К.В. Ежова, А.Б. Острун, А.Н. Иванов
ОСНОВЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ
ИТМО

по направлению подготовки 12.03.02 ОпTOTехника
в качестве учебно-методического пособия для реализации основных
профессиональных образовательных программ высшего образования
бакалавриата,

 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург
2020

Ежова К.В., Острун А.Б., Иванов А.Н., Основы численных методов—
СПб: Университет ИТМО, 2020. – 63 с.

Рецензент(ы):

Коняхин Игорь Алексеевич, доктор технических наук, профессор,
профессор факультета прикладной оптики, Университета ИТМО.

В учебно-методическом пособии представлены краткие теоретические сведения, порядок выполнения лабораторных работ и варианты индивидуальных заданий для использования при изучении дисциплины «Математическое моделирование». Представленный материал может быть также полезен при выполнении курсовых и выпускных квалификационных работ.

Учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров и специалистов, обучающихся по направлению подготовки 12.04.02 «Оптехника».



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2020

© Ежова К.В., Острун А.Б., Иванов А.Н., 2020

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
Введение	4
Лабораторная работа №1 Построение 2D и 3D графиков функций. Работа с матрицами.....	6
Лабораторная работа №2 Решение систем линейных уравнений и нелинейных уравнений и систем уравнений.....	19
Лабораторная работа № 3 Интерполяция табличных функций. Аппроксимация табличной функции по методу наименьших квадратов.....	38
Лабораторная работа № 4 Численное интегрирование и численное дифференцирование	52
ЛИТЕРАТУРА	62
ПРИЛОЖЕНИЕ	63

Введение

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, изучающих дисциплину "Математическое моделирование" и "Численные методы", а также ряд дисциплин, непосредственно связанных с использованием основ вычислительных методов, в том числе для решения задач математического анализа и методов вычислительной математики для обработки экспериментальных данных.

Дисциплина «Математическое моделирование» относится к общепрофессиональному модулю дисциплин и направлена на формирование результатов обучения (умений, навыков), которые являются основой для последующих дисциплин программ бакалавриата и специалитета по ОГНП «Фотоника» и развития общепрофессиональных компетенций: ОПК-1 Способность применять математические, естественно-научные и общепрофессиональные знания для понимания окружающего мира и для решения задач профессиональной деятельности; ОПК-3 Способность формулировать, строить и применять математические модели для управления достижением планируемых результатов процессов и объектов профессиональной деятельности на базе знаний математики, программирования и унифицированных пакетов программ.

В учебно-методическом пособии представлены указания к выполнению лабораторных работ, связанных с возможностями применения пакетов прикладных программ для решения математических, геометрических и физических задач, также рассматриваются методы и алгоритмы аналитической геометрии, математического анализа, интегрального исчисления, в том числе прикладного характера. В частности, в первой работе рассматриваются основы вычислительных методов и решение задач матричной алгебры, во второй - численные методы решения систем линейных и нелинейных уравнений, в третьей - численные методы обработки экспериментальных данных, в четвертой - применение вычислительных методов к теории интегрального и дифференциального исчисления.

Описание лабораторных работ в данном учебно-методическом пособии подготовлено для выполнения пакете инженерно-математических программ MathCAD Prime, однако предложенные задания могут быть успешно выполнены в иных программных комплексах, предназначенных для решения инженерно-математических задач [1,2].

Рассмотренные базовые методы вычислительной математики в дальнейшем могут применяться при выполнении лабораторных работ, домашних заданий и выпускных квалификационных работ.

Лабораторная работа №1. Построение 2D и 3D графиков функций. Работа с матрицами

Цель работы: знакомство с основами вычислительных методов и решение задач матричной алгебры.

Задачи работы:

1. Изучить типы данных и операторы, научиться задавать функции пользователя, строить их 2D и 3D графики с заданным шагом на заданном интервале, редактировать их. Задать две функции пользователя $y(x)$ и $g(x)$, построить на одном поле их графики и определить с помощью трассировки их точку пересечения. Задать функцию двух переменных $f(x_1, x_2)$ и построить график поверхности, которую она задает.

3. Освоить основы работы с матричными данными, особенности введения данных из внешних файлов, представление и обработку изображений в матричной форме. Представить изображение дифракционной картины в матричной форме и определить координату главного максимума дифракционной картины.

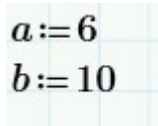
Порядок выполнения работы:

1. Построение 2D и 3D графиков функций

1.1. Создать новый документ MathCAD.

1.2. Открыть панель инструментов калькулятор (Меню «Вид» - «Панели инструментов» – «Калькулятор»).

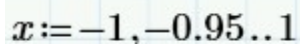
1.3. Задать значения переменных, входящих в функции пользователя с помощью оператора присвоения результата « := » (рис.1.1).



$a := 6$
 $b := 10$

Рис.1.1. Задание значений переменных.

1.4. Задать интервал, в котором задана переменная x , с помощью ранжированной переменной в виде $x := x_n, x_n + \Delta \dots x_k$, где x_n - левая граница интервала, x_k - правая граница интервала, Δ - шаг изменения переменной (рис.1.2). Многоточие можно ввести с панели инструментов «Матрицы» либо с помощью «быстрых» кнопок [3-5].



$x := -1, -0.95 \dots 1$

Рис.1.2. Задание интервала ранжированной переменной.

1.5. Задать функцию пользователя в форме $y(x) := \dots$ (рис.1.3.).

$$y(x) := \sqrt[3]{\frac{\log(a+x) + e^{5 \cdot a}}{b^{x+a} + b}}$$

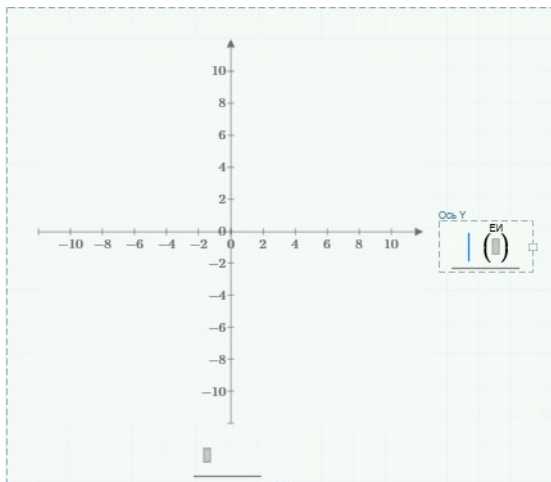
Рис.1.3. Задание функции.

1.6. Вывести на рабочее поле таблицу с результатами расчета функции $y(x)$ в заданных точках x . Для этого нужно после функции $y(x)$ вставить оператор вывода численного результата (рис.1.4).

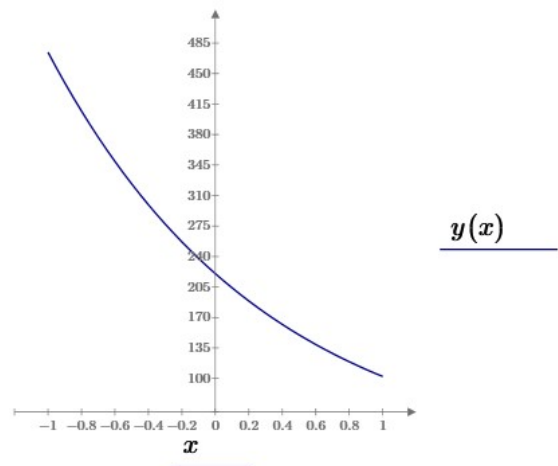
$$y(x) = \begin{bmatrix} 474.53 \\ 456.666 \\ 439.474 \\ 422.929 \\ 407.007 \\ 391.685 \\ 376.939 \\ 362.748 \\ 349.091 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Рис.1.4. Результаты расчета функции.

1.7. Для создания 2D графика функции, необходимо выбрать панель инструментов «График» и выбрать на ней пункт «X-Y график». После этого на рабочем столе документа появится шаблон графика, который требуется заполнить (рис.1.5а).



а) шаблон графика X-Y



б) график функции $y(x)$

Рис.1.5. Построение 2D графика.

1.8. Сначала требуется записать имя переменной и имя функции вместо маркеров, которые находятся в центре координатных осей. В результате в

рамке шаблона будет построен график функции $y(x)$ (рис.1.5б). Числа в маркерах, соответствующие границам координатных осей, задают интервал значений переменной и функции, в которых построен график. При необходимости эти значения могут быть изменены вручную.

1.9. Редактирование графика в MathCAD PRIME возможно во вкладке «Графики» (рис.1.6).

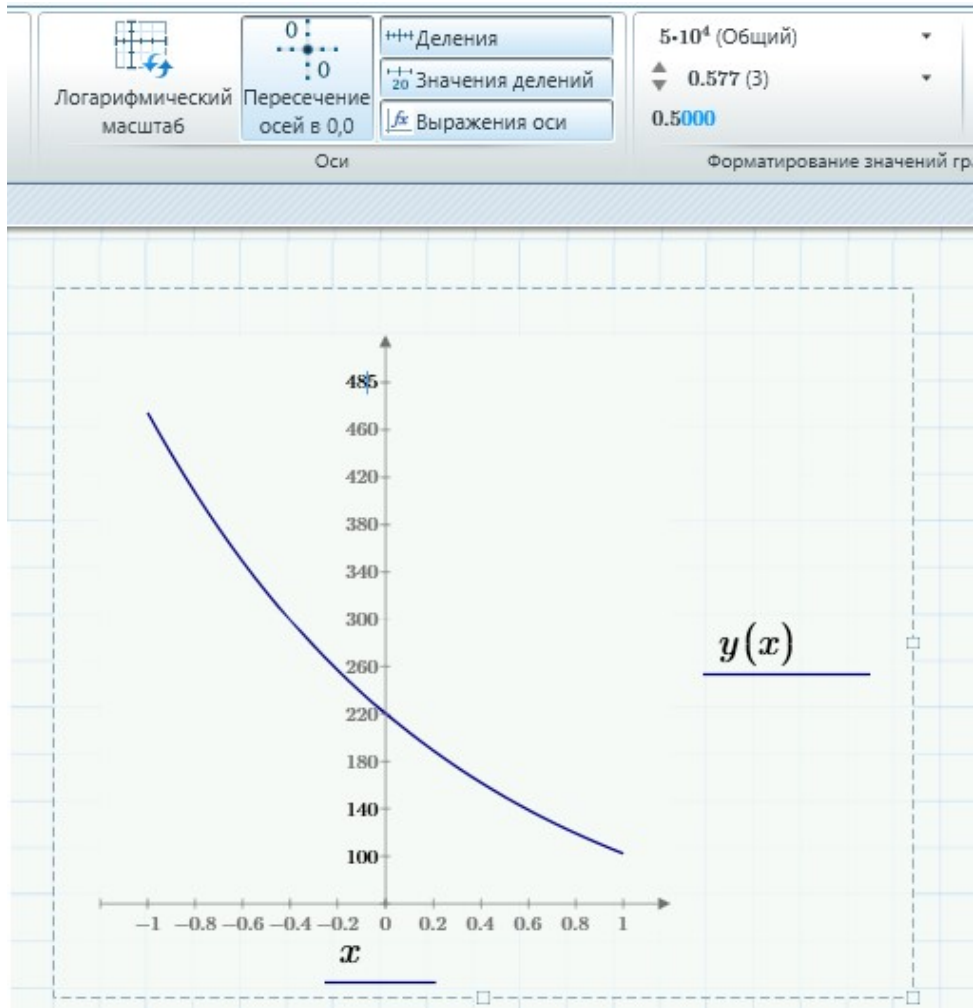


Рис.1.6. Редактирование графика.

1.10. Для построения на этом поле второго графика необходимо сначала задать его функцию (**функцию необходимо задать выше графика!**) в виде $g(x):= \dots$ и использовать пункт меню «Добавить кривую» (рис.1.7).

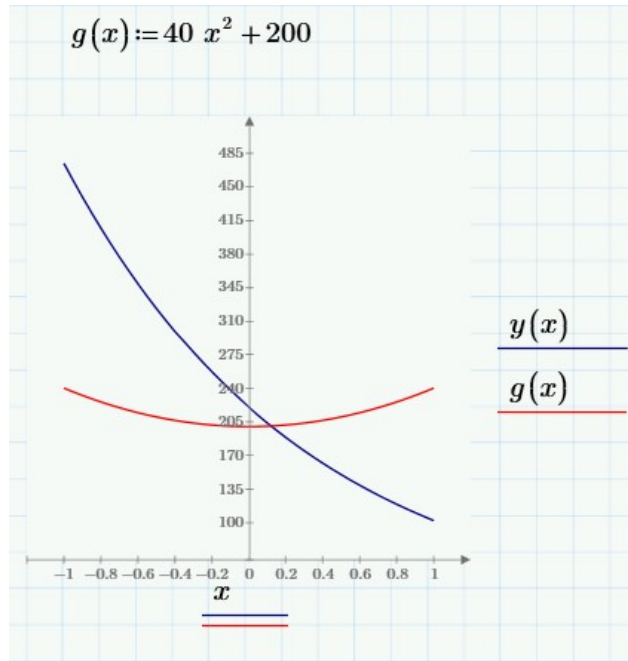


Рис.1.7. Построение графиков двух функций.

1.11. Для того чтобы определить координаты точки пересечения графиков, можно воспользоваться функцией трассировки («Добавить маркер») (рис.1.8).

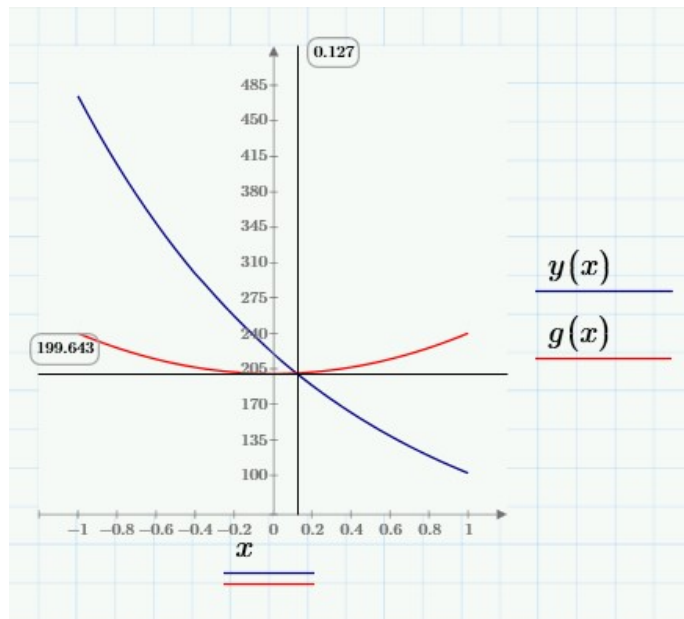


Рис. 1.8. Определение точек пересечения графиков функций.

1.12. Для построения трехмерного графика необходимо задать функцию пользователя от двух переменных в виде $f(x_1, x_2) := \dots$. Переменные задаются через запятую (рис.1.9). При построении 3D графика ранжированную переменную задавать необязательно.

$$f(x_1, x_2) := 2 \cdot \sqrt{\frac{(1 - \sqrt{x_1 \cdot x_2})}{1 + \sqrt{x_1 \cdot x_2}}}$$

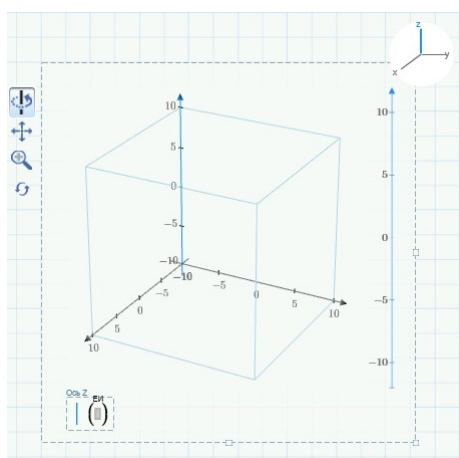
Рис.1.9. Задание функции двух переменных.

1.13. После этого нужно воспользоваться функцией для создания матрицы, содержащей координаты точек поверхности **CreateMesh**($x_{1н}$, $x_{1к}$, $x_{2н}$, $x_{2к}$, Δx_1 , Δx_2), где $x_{н}$ и $x_{к}$ - границы интервалов, в которых строится график, Δx - количество точек, на которые разбивается интервал [5]. Для приведённой ниже функции (рис.1.10) границы для x_1 и x_2 заданы равными 0 и 1, а количество точек, по которым строится график, для обеих переменных равно 30.

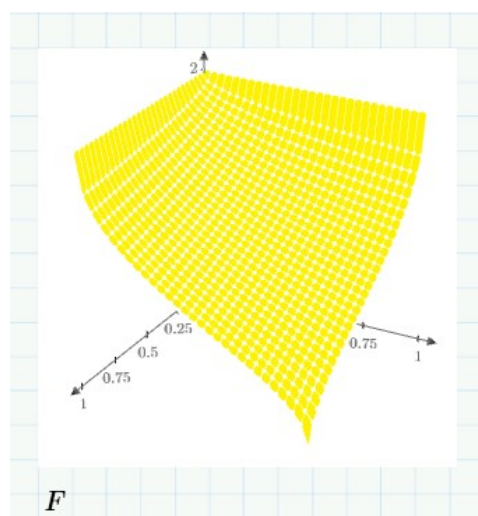
$$F := \text{CreateMesh}(f, 0, 1, 0, 1, 30, 30)$$

Рис.1.10. Задание функции CreateMesh.

1.14. На панели инструментов «Графики» выбрать пункт «График поверхности». После этого появится шаблон графика поверхности (рис.1.11а), в левый нижний угол которого нужно записать имя матрицы, которую мы получили с помощью функции **CreateMesh** (рис.1.11б).



а) шаблон 3D графика



б) график двумерной функции

Рис.1.11. Построение 3D графика.

2. Работа с матрицами

2.1. Разместить выданное преподавателем изображение дифракционной картины формата *.jpg в корневом каталоге Windows. Создать новый файл MathCAD. Перед началом вычислений задать системную переменную **ORIGIN**: **ORIGIN:=1**. Это необходимо для того, чтобы нумерация элементов матрицы начиналась с 1, а не с 0, как по умолчанию сделано в MathCAD. Для загрузки

изображения в MathCAD и представления его в виде матрицы, количество строк и столбцов которой соответствует числу пикселей изображения по вертикали и горизонтали, а значения элементов матрицы соответствуют их уровню яркости в градациях серого (от 0 до 256), необходимо использовать команду $A:=\text{READBMP}$ (“путь к файлу изображения”), где A - имя матрицы. Пример выполнения такой команды приведен ниже. В скобках необходимо указать двойные кавычки и расширение файла. Для того чтобы вывести матрицу изображения, необходимо ввести ее название и оператор « $=$ » [5].

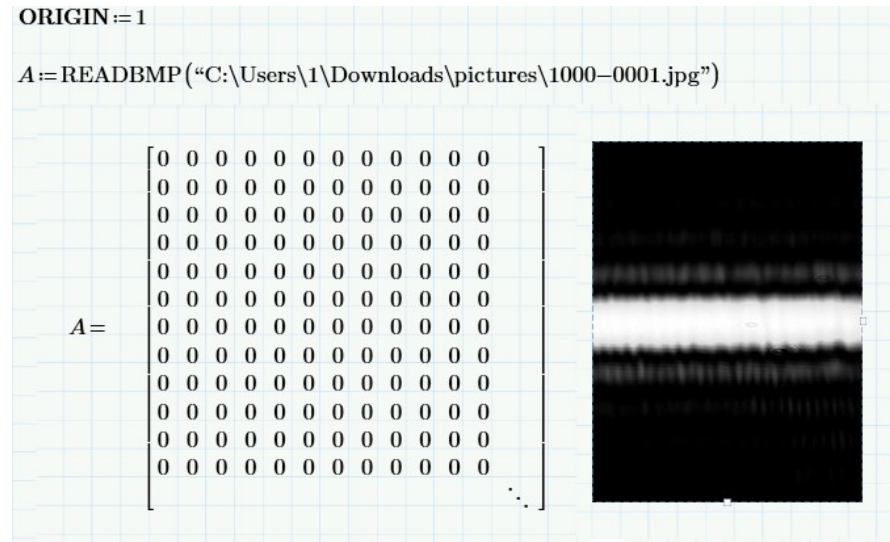


Рис.1.12. Загрузка цифрового изображения.

2.2. Выведем изображение в рабочее поле MathCAD. Для этого на панели инструментов «Матрица» выберем пункт «Рисунок». В появившийся шаблон нужно ввести имя матрицы, после чего в рамке шаблона появится изображение (рис.1.12).

2.3. Выведем график сечения дифракционной картины. Для этого определим количество элементов матрицы по вертикали и горизонтали с помощью функции $\text{rows}(A)$ (число строк) и $\text{cols}(A)$ (число столбцов) (рис.1.13).

$$\begin{array}{l}
 n := \text{rows}(A) \quad n = 800 \\
 m := \text{cols}(A) \quad m = 600
 \end{array}$$

Рис.1.13. Определение количества элементов матрицы.

2.4. Выделим первый столбец матрицы изображения в отдельный вектор $B := A^{<1>}$ с помощью команды «Столбец» с панели инструментов «Матрица». Зададим ранжированную переменную, ставящую в соответствие каждому элементу вектора его номер. Вызвав шаблон X - Y графика и задав по оси X вектор, содержащий номера элементов вектора B , а по оси Y - значения элементов вектора, получим распределение интенсивности сигнала в сечении

дифракционной картины (рис.1.14). В данном случае вершина главного максимума срезана, это вызвано перенасыщением матричного приемника фотокамеры, с помощью которой был сделан снимок дифракционной картины, в области ее главного максимума [5].

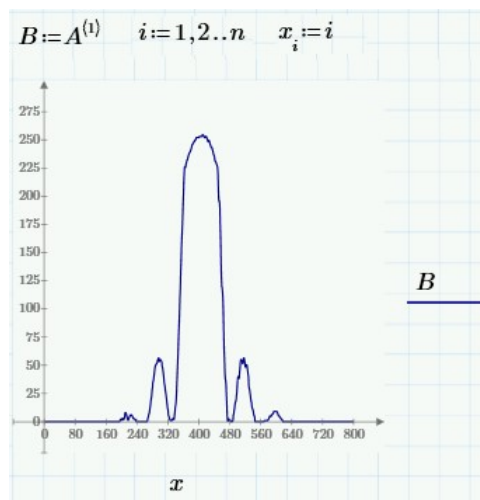


Рис.1.14. График распределения интенсивности в поперечном сечении дифракционной картины.

2.5. Так как определить положение вершины главного максимума (центра дифракционной картины) прямо по такому изображению нельзя, то можно использовать метод поиска центра тяжести фигуры.

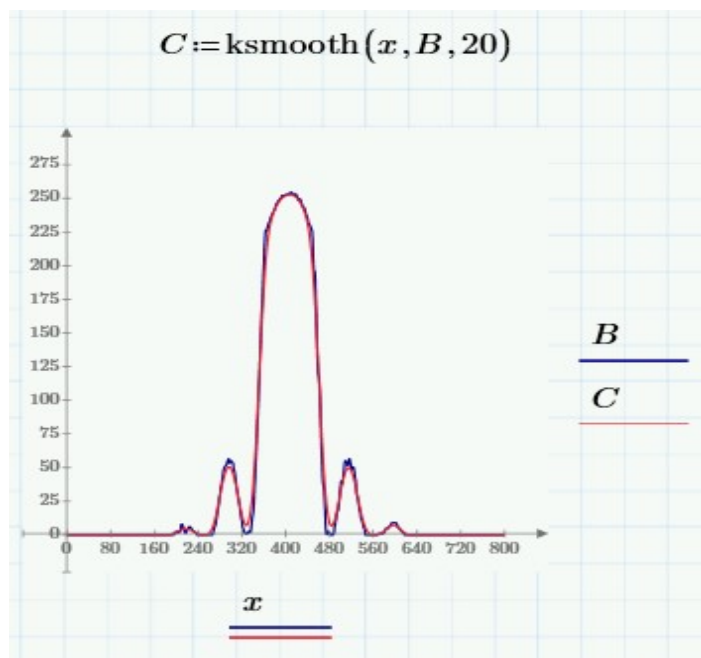


Рис.1.15. Сглаженный график распределения интенсивности в поперечном сечении дифракционной картины.

Но прежде желательно “сгладить” изображение, чтобы устранить его местные дефекты, обусловленные неравномерной чувствительностью пикселей фотоприемной матрицы, дефектами оптики и пылью, попавшей на фотоприемник. Для этого можно использовать функции сглаживания,

встроенные в MathCAD, например, функцию **ksmooth**(x, B, b), где x - вектор, содержащий значения по оси x , B - вектор, содержащий значения по оси y , b - ширина окна сглаживающей функции (значение выбирается самостоятельно, приблизительно оно должно быть равно 1/10 от ширины главного максимума в пикселях). Изображение сглаженного графика приведено на рис.1.15 [5].

2.6. Определим координаты минимумов, ограничивающих главный максимум слева и справа. Для этого приблизительно оценим их координаты с помощью команды трассировки и запишем их как переменные $x1$ и $x2$. После этого центр главного максимума можно определить с помощью формулы

$$Max = \frac{\sum_{i=x1}^{x2} x_i C_i}{\sum_{i=x1}^{x2} C_i} \quad [5]. \text{ Результаты вычислений приведены ниже (рис.1.16).}$$

$$\begin{aligned}
 &x1 := 320 \\
 &x2 := 480 \\
 &Max := \frac{\left(\sum_{i=x1}^{x2} (x_i \cdot C_i) \right)}{\sum_{i=x1}^{x2} (C_i)} \\
 &Max = 405.556
 \end{aligned}$$

Рис. 1.16. Вычисление положения центра главного максимума дифракционной картины.

2.7. Для уточнения полученного результата напишем программный модуль, позволяющий измерить положение центра максимума в каждом столбце матрицы.

$$\begin{aligned}
 &Max := \left[\begin{array}{l} s \leftarrow 1 \\ \text{for } j \in 1..m \\ \quad B \leftarrow A^{(j)} \\ \quad C \leftarrow \text{ksmooth}(x, B, 20) \\ \quad Max_s \leftarrow \frac{\left(\sum_{i=x1}^{x2} (x_i \cdot C_i) \right)}{\sum_{i=x1}^{x2} (C_i)} \\ \quad s \leftarrow s + 1 \\ \quad Max \end{array} \right] \\
 &Max = \begin{bmatrix} 405.556 \\ 405.632 \\ 405.777 \\ 405.954 \\ 406.176 \\ \vdots \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Рис.1.17. Реализация алгоритма определения положения центра максимума в каждом столбце и результат работы.

В результате его применения получим вектор, содержащий положения центра главного максимума для каждой строки изображения (рис.1.17).

2.8. Среднее значение координаты центра может быть получено с помощью функции **mean(Max)** (рис.1.18).

$$\text{Max} := \text{mean}(\text{Max})$$

$$\text{Max} = 402.899$$

Рис.1.18. Получение среднего значения.

2.9. Полученный результат необходимо округлить до десятых, так как погрешность оценки координаты таким способом не превышает 0.1 пикселя изображения [5]. В результате округления получим координату главного максимума 202.6 пикселя. В MathCAD округление выполняется с помощью команды **round(z, n)**, где z - округляемое число, n - количество знаков после запятой (рис.1.19).

$$\text{round}(\text{Max}, 1) = 402.9$$

Рис.1.19. Округление результата.

Варианты заданий:

1. Построение 2D и 3D графиков функций

1.1. Построить графики функций и найти координаты точки их пересечения

№ вар	Интервал и шаг ранжированной переменной	Функции
1	$a = 3, b = -0.5, x \in [3, 5] \dots [4],$ $\Delta x = 0.05$	$y(x) = a - \frac{\lg(a+x)x^b}{\cos(x\pi)},$ $g(x) = \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$
2	$b = 1.5, x \in [1, 5],$ $\Delta x = 0.1$	$y(x) = \frac{b^5 - \text{tg}(x)}{\ln(x)},$ $g(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3}$
3	$a = 1.3, b = 2.5, x \in [0.5, 2],$ $\Delta x = 0.1$	$y(x) = \frac{ab - e^{ax} + \cos(x)}{\lg(x) + 1},$ $g(x) = \ln(3x) - e^{-3x} / \sqrt{x}$
4	$a = 1.5, b = -100, x \in [0.5, 2],$ $\Delta x = 0.1$	$y(x) = (a/b - 3^{ax}) \cos(x) / \sqrt{x+2},$ $g(x) = (x^2 - \sqrt{x}) / (1-x)$

№ вар	Интервал и шаг ранжированной переменной	Функции
5	$a = 1, b = 2, x \in [-1,05 .. 0],$ $\Delta x = 0.05$	$y(x) = \frac{(a + \sqrt[3]{x+3})(x+b)}{\ln(b)},$ $g(x) = x^2 / (x^3 + 1)$
6	$a = \pi, b = 5, x \in [0,05 .. 1],$ $\Delta x = 0.05$	$y(x) = \frac{be^{(x-b)}}{\operatorname{tg}(5x)} + \frac{a}{b},$ $g(x) = \sin(x) - 4\cos(x)$
7	$a = \pi/2, b = -0.9, x \in [0 .. 1],$ $\Delta x = 0.1$	$y(x) = 3 \frac{x^b - a^x}{b^2 + a^x},$ $g(x) = x^2 \operatorname{tg}(x)$
8	$a = 11, b = 4, x \in [0.5 .. 1.5],$ $\Delta x = 0.01$	$y(x) = \frac{\ln(x+a)b}{\sqrt{a^x} - \sin(x)},$ $g(x) = \sqrt[3]{x} / \cos(x)$
9	$a = 2, x \in [1,5 .. 3],$ $\Delta x = 0.1$	$y(x) = \frac{\sin^2(x) - a}{\sqrt{\pi x - 4}},$ $g(x) = \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$
10	$a = 3, x \in [0 .. 1],$ $\Delta x = 0.1$	$y(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + 1/a}{\lg(\sqrt[3]{x} + 1/a)},$ $g(x) = (1 + x^2) \arccos(x^2)$
11	$a = 4, x \in [0 .. 2],$ $\Delta x = 0.05$	$y(x) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{ x+1 } + a} \right) + \frac{1}{a} \right) / \operatorname{arctg}(a-x),$ $g(x) = \sqrt{x^3} \operatorname{arctg}(x)$
12	$a = 5, x \in [-4,9 .. -3],$ $\Delta x = 0.05$	$y(x) = \frac{\lg^2(x+a) - x-a }{\cos^2(x+a)},$ $g(x) = \sin(x) \operatorname{arctg}(x)$
13	$a = 0.5, b = -3, x \in [-1 .. -0,05],$ $\Delta x = 0.05$	$y(x) = \frac{(1/\cos(x) + 1/\cos^3(x^2) + ax)}{e^{2xb}},$ $g(x) = \frac{x^2 - 1}{\lg(-x)}$

№ вар	Интервал и шаг ранжированной переменной	Функции
14	$a = -\pi, b = \pi, x \in [0.5 .. 1.5],$ $\Delta x = 0.05$	$y(x) = \frac{\sin(ax) + x^{10} }{\cos(bx) + 10},$ $g(x) = -x \cos(x) \ln(x)$
15	$a = 14, b = 200, x \in [7 .. 11],$ $\Delta x = 0.1$	$y(x) = \frac{\ln(x^{2.5} + a) - \sqrt{\lg(x^2)}}{\operatorname{arctg}(x/b)},$ $g(x) = \ln(\sqrt{e^x})$
16	$a = 50, b = \pi/3, x \in [0,05 .. 1],$ $\Delta x = 0.05$	$y(x) = \frac{e^{a/100} - \cos(bx) x }{\lg^5(x) + 1/x},$ $g(x) = e^x(\operatorname{tg}(x) - x)$
17	$a = 4, x \in [-5 .. 5],$ $\Delta x = 0.5$	$y(x) = x^2 - ax + 3,$ $g(x) = x + 5$
18	$a = 2, x \in [-4 .. 3],$ $\Delta x = 0.1$	$y(x) = e^{x/2},$ $g(x) = 0.1x^3 - ax$
19	$a = 16, x \in [-2 .. 4],$ $\Delta x = 0.1$	$y(x) = \sqrt{(x+4)^2 + a},$ $g(x) = (x+1)^2 - 1$
20	$a = 3, x \in [-4 .. 2],$ $\Delta x = 0.05$	$y(x) = \sin(x) + \cos(x),$ $g(x) = \frac{x+1}{a}$
21	$b = 2, x \in [-0,9 .. 1],$ $\Delta x = 0.01$	$y(x) = \frac{(1/\sin(x) - 1/\cos^3(x^2))}{e^{2xb}},$ $g(x) = \frac{x^2 + 1}{\lg(x+1)}$
22	$a = 2, x \in [-3 .. 3],$ $\Delta x = 0.5$	$y(x) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{ x-1 }} \right) + a \right) / \operatorname{arctg}(a-x),$ $g(x) = \sqrt{x^3} \operatorname{arctg}(2x)$
23	$a = 2, b = 3, x \in [-3 .. 0],$ $\Delta x = 0.05$	$y(x) = \frac{(b + \sqrt[3]{x-3})(x+ab)}{\ln(b-1)},$ $g(x) = 2x^2 / (x^3 - 1)$
24	$a = -\pi, b = \pi, x \in [0.5 .. 1.5],$ $\Delta x = 0.05$	$y(x) = \frac{\sin(ax) + x^{10} }{\cos(bx) + 10},$ $g(x) = -x \cos(x) \ln(x)$

1.2. Построить график поверхности, задаваемый функцией

№ вар.	Функция от двух переменных
1	$f(x, y) = \sin(x/y) \cos(y/x)$
2	$f(x, y) = 1/\operatorname{arctg}(y/x)$
3	$f(x, y) = x^3 y - x y^3$
4	$f(x, y) = e^{-x/y}$
5	$f(x, y) = 4.25 x e^{-y} + 6y$
6	$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$
7	$f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$
8	$f(x, y) = \ln(\operatorname{tg}(x/y))$
9	$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
10	$f(x, y) = x^{xy}$
11	$f(x, y) = (1 + \lg(x))^y$
12	$f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$
13	$f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{2}$
14	$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$
15	$f(x, y) = x^2 y^4 - x^3 y^3 + x^4 y^2$
16	$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$
17	$f(x, y) = (1 + \lg(y))^x$
18	$f(x, y) = \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^3}$
19	$f(x, y) = x^3 y^2 - x^2 y^3$
20	$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$
21	$f(x, y) = xy^{xy}$
22	$f(x, y) = \cos(x/y) \sin(y/x)$
23	$f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{2xy}$
24	$f(x, y) = x^2 y^3 - x^3 y^3$

2. Работа с матрицами

Индивидуальные варианты заданий (цифровые изображения дифракционной картины) необходимо получить у преподавателя.

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы и задание для работы.
3. Текст программы с комментариями.
4. Результаты вычисления.
5. Выводы по проделанной работе.

Контрольные вопросы:

1. Кратко поясните различие между операторами "=" и ":=".
2. Кратко поясните, каким образом задается шаг изменения переменной при задании ранжированной переменной.
3. Кратко опишите, каким образом были определены точки пересечения двух графиков в работе.
4. Укажите, что возвращает функция CreateMesh.
5. Укажите, какое максимально возможное значение принимают элементы матрицы цифрового изображения дифракционной картины.
6. Кратко опишите, чем является построенный график первого столбца матрицы изображения дифракционной картины относительно всей дифракционной картины.
7. Укажите, какая характеристика максимума дифракционной картины определялась в работе.
8. Назовите метод, использованный в работе для определения центра главного максимума дифракционной картины.
9. Кратко поясните необходимость создания подпрограммы, содержащей вычисления, аналогичные поиску центра главного максимума в первом столбце матрицы изображения дифракционной картины.
10. Кратко поясните необходимость использования функции round в работе.

Лабораторная работа №2.

Решение систем линейных уравнений и нелинейных уравнений и систем уравнений

Цель работы: изучение методов решений систем линейных уравнений и нелинейных уравнений и систем уравнений.

Задачи работы:

1. Решить систему линейных уравнений (СЛУ) методами Крамера, Гаусса и методом простой итерации.
2. Сравнить полученные результаты с результатами применения встроенных функций MathCAD для решения СЛУ.
3. Решить нелинейное уравнение как минимум двумя способами, сравнить полученные результаты с результатами, полученными с помощью встроенных функций MathCAD и графически.
4. Решить систему нелинейных уравнений итерационным способом, сравнить полученные результаты применения встроенных функций MathCAD.
5. Решить систему уравнений графически.

Порядок выполнения работы:

1. Решение систем линейных уравнений

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4.2x_2 - 0.8x_3 = -5.4 \\ -4.1x_1 + 6.2x_2 - 0.16x_3 = 1.6 \\ -1.6x_1 - 4.3x_2 + 8.4x_3 = 12.2 \end{cases}$$

Напомним, что для записи СЛУ в матричном виде необходимо выделить матрицу коэффициентов и матрицу свободных членов.

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_{11} \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_{21} \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_{31} \end{cases}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ - значения элементов матрицы коэффициентов СЛУ, b_{11}, b_{21}, b_{31} - элементы вектора-столбца, содержащего свободные члены СЛУ [1].

1.1. Решим эту систему методом Крамера. Для этого зададим в MathCAD системную переменную **ORIGIN** и присвоим ей значение, равное 1 (по умолчанию значение переменной ORIGIN=0). Это необходимо для начала отсчетов индексов элементов матрицы не с 0, а с более привычной 1. Запишем основную матрицу системы A (матрицу коэффициентов), содержащую значения

коэффициентов системы уравнений. Для этого на панели инструментов «**Матрица**» выберем пункт «**матрица**», укажем в открывшемся окне количество строк (3) и столбцов (3) и внесем значения коэффициентов в появившийся шаблон. Аналогично составим вектор-столбец свободных членов системы B (рис.2.1).

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$A := \begin{bmatrix} 12 & 4.2 & -0.8 \\ -4.1 & 6.2 & -0.16 \\ -1.6 & -4.3 & 8.4 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} -5.4 \\ 1.6 \\ 12.2 \end{bmatrix}$$

Рис.2.1. Задание матрицы коэффициентов и вектора свободных членов.

Проверим возможность применения метода Крамера для решения СЛУ. Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы был отличен от нуля: $|A| \neq 0$. Для вычисления определителя воспользуемся пунктом «**определитель**» панели инструментов «**Матрица**» и вычислим его значение, которое присвоим переменной Δ (рис.2.2). Так как значение определителя не равно 0, можем приступить к решению [1-3].

$$\Delta := |A| = 740.387$$

Рис.2.2. Вычисление определителя матрицы.

Заменим в матрице A первый столбец на вектор-столбец B и вычислим определитель получившейся матрицы Δ_1 (рис.2.3).

$$A1 := A$$

$$A1^{(1)} := B$$

$$A1 = \begin{bmatrix} -5.4 & 4.2 & -0.8 \\ 1.6 & 6.2 & -0.16 \\ 12.2 & -4.3 & 8.4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 := |A1| = -276.147$$

Рис.2.3. Задание матрицы $A1$ и вычисление ее определителя.

Аналогичным способом, последовательно заменяя в матрице A ее второй и третий столбцы на вектор-столбец B , вычисляем определители Δ_2 и Δ_3 (рис.2.4).

$$\begin{array}{ll}
 A2 := A & A3 := A \\
 A2^{(2)} := B & A3^{(3)} := B \\
 A2 = \begin{bmatrix} 12 & -5.4 & -0.8 \\ -4.1 & 1.6 & -0.16 \\ -1.6 & 12.2 & 8.4 \end{bmatrix} & A3 = \begin{bmatrix} 12 & 4.2 & -5.4 \\ -4.1 & 6.2 & 1.6 \\ -1.6 & -4.3 & 12.2 \end{bmatrix} \\
 \Delta 2 := |A2| = 35.314 & \Delta 3 := |A3| = 1.041 \cdot 10^3
 \end{array}$$

Рис. 2.4. Задание матриц $A2$ и $A3$, вычисление их определителей.

После этого, разделив определитель основной матрицы на полученные определители $x_i = \Delta_i / \Delta$, находим решение СЛУ (рис.2.5) [1,2].

$$\begin{array}{l}
 x1 := \left(\frac{\Delta 1}{\Delta} \right) = -0.373 \quad x2 := \left(\frac{\Delta 2}{\Delta} \right) = 0.048 \\
 x3 := \left(\frac{\Delta 3}{\Delta} \right) = 1.406
 \end{array}$$

Рис. 2.5. Вычисление значений корней СЛУ.

1.2. Найдем решение СЛУ методом Гаусса. Для этого требуется привести исходную СЛУ к равносильной системе треугольного вида, из которой последовательно находятся все неизвестные. Для решения СЛУ в MathCAD указанным методом необходимо объединить матрицы A и B , составив расширенную матрицу P . Для этого можно воспользоваться командой **augment** (рис.2.6).

$$P := \text{augment}(A, B) = \begin{bmatrix} 12 & 4.2 & -0.8 & -5.4 \\ -4.1 & 6.2 & -0.16 & 1.6 \\ -1.6 & -4.3 & 8.4 & 12.2 \end{bmatrix}$$

Рис. 2.6. Составление расширенной матрицы СЛУ.

Определим ранг матриц A и P с помощью команды **rank**. Он равен 3 и для основной, и для расширенной матриц (рис.2.7). Следовательно, можно сделать вывод, что система совместна и имеет единственное решение, так как ранг матриц совпадает и равен количеству неизвестных [1].

$$\text{rank}(A) = 3 \quad \text{rank}(P) = 3$$

Рис. 2.7. Определение ранга матрицы коэффициентов и расширенной матрицы СЛУ.

Приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду методом Гаусса-Жордана с помощью функции **rref** (рис.2.8).

$$R := \text{rref}(P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.373 \\ 0 & 1 & 0 & 0.048 \\ 0 & 0 & 1 & 1.406 \end{bmatrix}$$

Рис. 2.8. Приведение расширенной матрицы СЛУ к ступенчатому виду.

Анализ матрицы R показывает, что исходное СЛУ удалось привести к виду:

$$\begin{cases} x_1 = -0.373 \\ x_2 = 0.048 \\ x_3 = 1.406 \end{cases} .$$

Выделить последний столбец из матрицы R можно с помощью следующей последовательности функций (рис.2.9).

$$x := R^{(\text{cols}(R))} = \begin{bmatrix} -0.373 \\ 0.048 \\ 1.406 \end{bmatrix}$$

Рис. 2.9. Выделение вектора решений СЛУ.

1.3. Первые два рассмотренные методы решения СЛУ относятся к точным методам. Эти методы достаточно широко используются, но могут приводить к значительным погрешностям при вычислениях плохо обусловленных СЛУ. Плохо обусловленной называется такая система, у которой модуль определителя матрицы коэффициентов мал по сравнению с какой-либо из норм матрицы. Нормой матрицы называют максимальную из сумм модулей коэффициентов строк или столбцов. В этом случае можно применять методы последовательных приближений, к которым относится метод простой итерации. Для применения этого метода сначала рассмотрим вопрос обеспечения сходимости итераций [1-5].

Если в основной матрице A выполняется условие $|A_{i,i}| > \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|, j \neq i$, т.е.

сумма модулей элементов строки матрицы, за вычетом элемента, лежащего на главной диагонали, должна быть меньше значения модуля элемента, лежащего

на главной диагонали матрицы [1,2]. В нашем случае для матрицы A это

$$\text{условие выполняется: } \begin{cases} |12| > |4.2| + |-0.8| \\ |6.2| < |-4.1| + |-0.16| \\ |8.4| > |-1.6| + |-4.3| \end{cases}$$

Разрешим исходную систему уравнений относительно переменных, оставляя в левой части уравнения искомую переменную:

$$\begin{cases} x_1 = f(x_2, x_3) \\ x_2 = f(x_1, x_3) \\ x_3 = f(x_1, x_2) \end{cases}$$

Задавая начальные приближения для x_1^0, x_2^0, x_3^0 , получим первые приближения x_1^1, x_2^1, x_3^1 , подставляя первые приближения - получим вторые и т.д. до тех пор, пока не будет выполнено условие $|x_1^{k+1} - x_1^k| \leq \varepsilon$, где ε - допустимая погрешность вычисления неизвестной, задаваемая пользователем:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = f(x_2^k, x_3^k) \\ x_2^{k+1} = f(x_1^k, x_3^k) \\ x_3^{k+1} = f(x_1^k, x_2^k) \end{cases}$$

	$i := 1..3$		$j := 1..3$
$A =$	$\begin{bmatrix} 12 & 4.2 & -0.8 \\ -4.1 & 6.2 & -0.16 \\ -1.6 & -4.3 & 8.4 \end{bmatrix}$		$B = \begin{bmatrix} -5.4 \\ 1.6 \\ 12.2 \end{bmatrix}$

Рис. 2.10. Задание матрицы коэффициентов и вектора значений.

Пример выполнения расчета в MathCAD приведен ниже (рис.2.12).

Матрицы a и b являются основной и дополнительной матрицами, полученными при выделении неизвестных (рис.2.11), ранжированная переменная k задаёт количество итераций [1,2]. Выражение $x^{(k)} := b + a \cdot x^{(k-1)}$ является записью СЛУ в матричном виде.

$$a_{i,j} := -\left(\frac{A_{i,j}}{A_{i,i}}\right) \quad b_i := \frac{B_i}{A_{i,i}} \quad a_{i,i} := 0$$

$$b = \begin{bmatrix} -0.45 \\ 0.258 \\ 1.452 \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} 0 & -0.35 & 0.067 \\ 0.661 & 0 & 0.026 \\ 0.19 & 0.512 & 0 \end{bmatrix}$$

Рис.2.11. Вычисление основной и дополнительной матриц.

$$k := 2..14$$

$$x^{(1)} := 0 \quad x^{(k)} := b + a \cdot x^{(k-1)}$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 & -0.373 & -0.455 & -0.365 & -0.356 & -0.376 \\ 0.048 & 0.294 & 0.05 & -0.003 & 0.052 & 0.058 \\ 1.406 & 1.477 & 1.532 & 1.391 & 1.381 & 1.411 \dots \end{bmatrix}$$

Рис.2.12. Реализация вычислений по методу простой итерации.

Оценим погрешность вычислений по приведенной выше формуле. Из расчетов видно, что на 14 шаге итерации погрешность не превышает $3,1 \times 10^{-5}$, чего достаточно для ряда практических задач (рис.2.13).

$$\Delta x1_k := x_{1,k} - x_{1,k-1} = \begin{bmatrix} -0.373 \\ -0.082 \\ 0.089 \\ 0.009 \\ -0.02 \\ 1.426 \cdot 10^{-5} \\ 0.004 \\ -4.213 \cdot 10^{-4} \\ -8.861 \cdot 10^{-4} \\ 1.765 \cdot 10^{-4} \\ 1.734 \cdot 10^{-4} \\ -5.475 \cdot 10^{-5} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \Delta x2_k := x_{2,k} - x_{2,k-1} = \begin{bmatrix} 0.247 \\ -0.245 \\ -0.053 \\ 0.055 \\ 0.006 \\ -0.012 \\ -1.401 \cdot 10^{-5} \\ 0.003 \\ -2.576 \cdot 10^{-4} \\ -5.526 \cdot 10^{-4} \\ 1.09 \cdot 10^{-4} \\ 1.082 \cdot 10^{-4} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \Delta x3_k := x_{3,k} - x_{3,k-1} = \begin{bmatrix} 0.071 \\ 0.055 \\ -0.141 \\ -0.01 \\ 0.03 \\ -9.083 \cdot 10^{-4} \\ -0.006 \\ 8.143 \cdot 10^{-4} \\ 0.001 \\ -3.007 \cdot 10^{-4} \\ -2.492 \cdot 10^{-4} \\ 8.88 \cdot 10^{-5} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Рис.2.13. Оценка погрешности метода простой итерации.

1.4. Сравним полученные результаты с результатами применения вычислительного блока **Given-Find**, используемого для решения уравнений и систем уравнений в MathCAD. Перед применением вычислительного блока требуется задать начальные приближения для неизвестных (обычно их задают равными 0, за исключением случаев, когда при подстановке в выражения СЛУ получается деление на нуль). Внутри вычислительного блока необходимо записать сами уравнения, приравняв их к 0 (**Внимание!** Для этого необходимо использовать логический оператор «равно» с панели инструментов «Булева

алгебра / Boolean») [4,5] Пример применения вычислительного блока для решения СЛУ приведен ниже (рис.2.14).

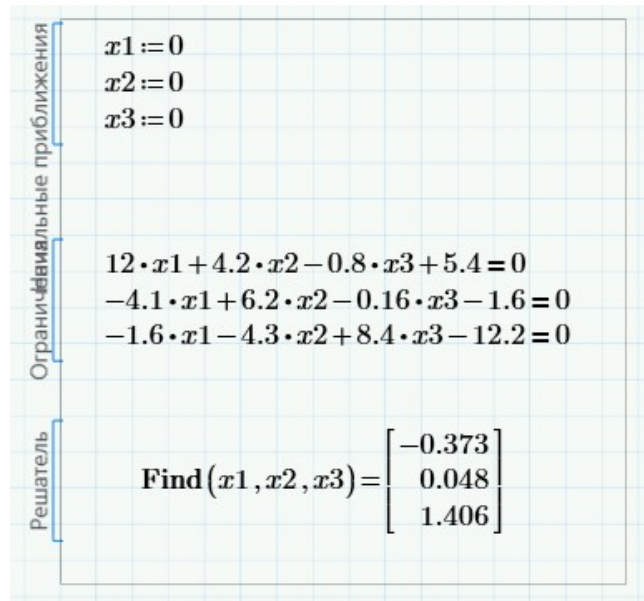


Рис.2.14. Задание блока решений.

2. Решение нелинейных уравнений и систем уравнений

2.1. Рассмотрим решение нелинейного уравнения $f(x) = x^2 - 20\sin(x)$ с помощью метода дихотомии (деления пополам).

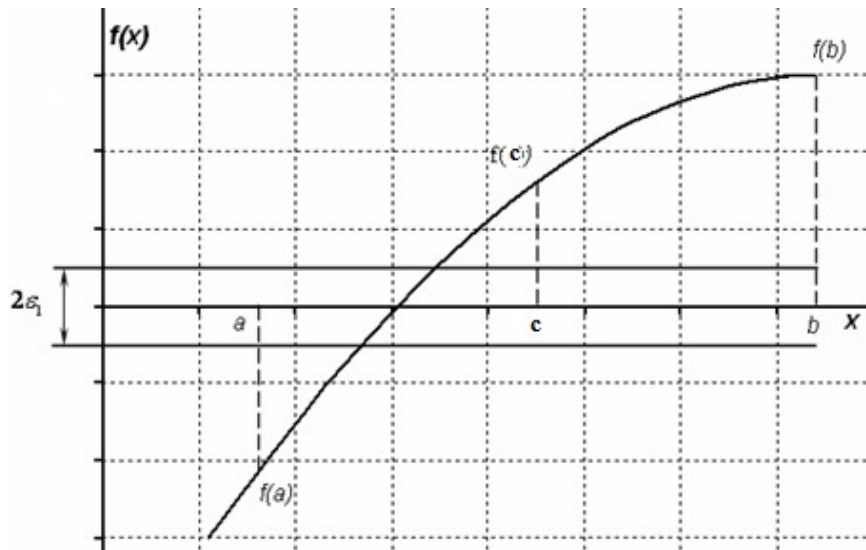


Рис.2.15. Геометрическая интерпретация метода дихотомии.

Суть метода дихотомии заключается в том, что для отыскания корня функции на отрезке $[a, b]$ этот отрезок необходимо поделить пополам и принять за первое приближение корня точку c , которая является серединой отрезка $[a, b]$ (рис.2.15). Далее из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ выбирается тот, на концах которого функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Если, например, $f(a)f(c) < 0$, то из этого следует, что на этом интервале функция $f(x)$ пересекает ось x , т.е. он

содержит корень нашего уравнения. Далее выполняется деление пополам отрезка $[a,b]$, пока не будет выполнено условие $|a-b| < \varepsilon$, где ε - погрешность вычисления корня [1,2].

Для реализации такого цикла в MathCAD удобно использовать цикл по условию **while**. Условием выполнения такого цикла будет $|a-b| > \varepsilon$. Кроме значения переменной s выведем значение переменной k , описывающей количество итераций, необходимых для вычисления корня с заданной точностью (рис.2.17). Перед началом вычислений желательно построить график функции, чтобы определить начальный интервал, на котором определяется корень (рис.2.16).

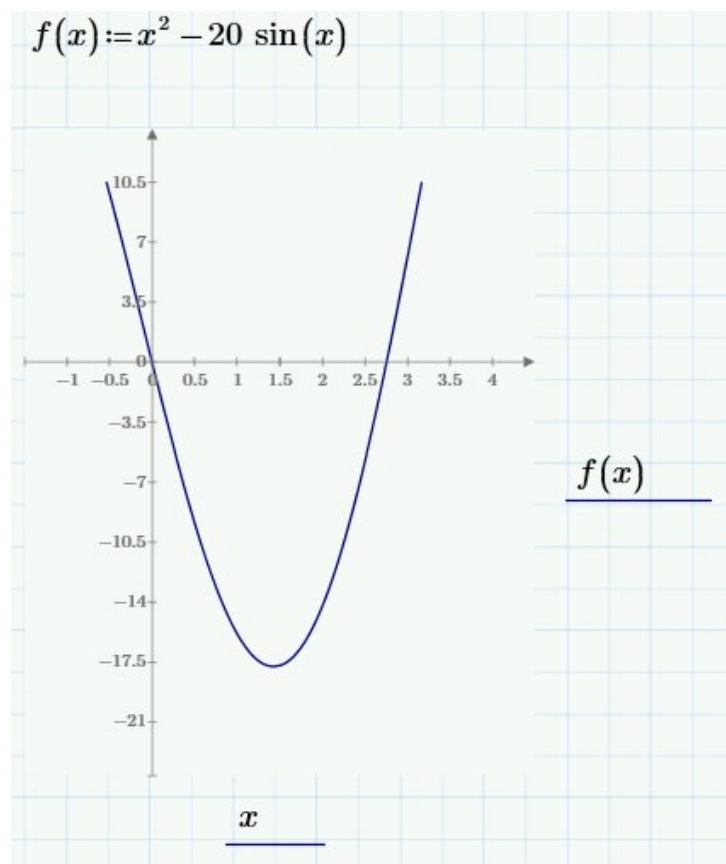


Рис.2.16. Построение графика функции.

Интервал, на котором определяется корень – $[2, 3]$.

```

 $x(a, b, \varepsilon) := \begin{array}{l} k \leftarrow 0 \\ \text{while } |a - b| > \varepsilon \\ \quad \left\| \begin{array}{l} c \leftarrow \frac{(a+b)}{2} \\ \text{if } f(c) \cdot f(a) < 0 \\ \quad \left\| b \leftarrow c \\ \quad \quad \left\| a \leftarrow c \\ \quad \quad \quad k \leftarrow k + 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \left[ \begin{array}{l} c \\ k \end{array} \right] \end{array}$ 

```

$a := 2 \quad b := 3 \quad \varepsilon := 10^{-5}$

$x(a, b, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 2.753 \\ 17 \end{bmatrix}$

Рис.2.17. Реализация метода дихотомии и результаты работы.

2.2. Используем для поиска корня уравнения на этом отрезке метод хорд. Этот способ требует меньшего количества итерации при поиске корня.

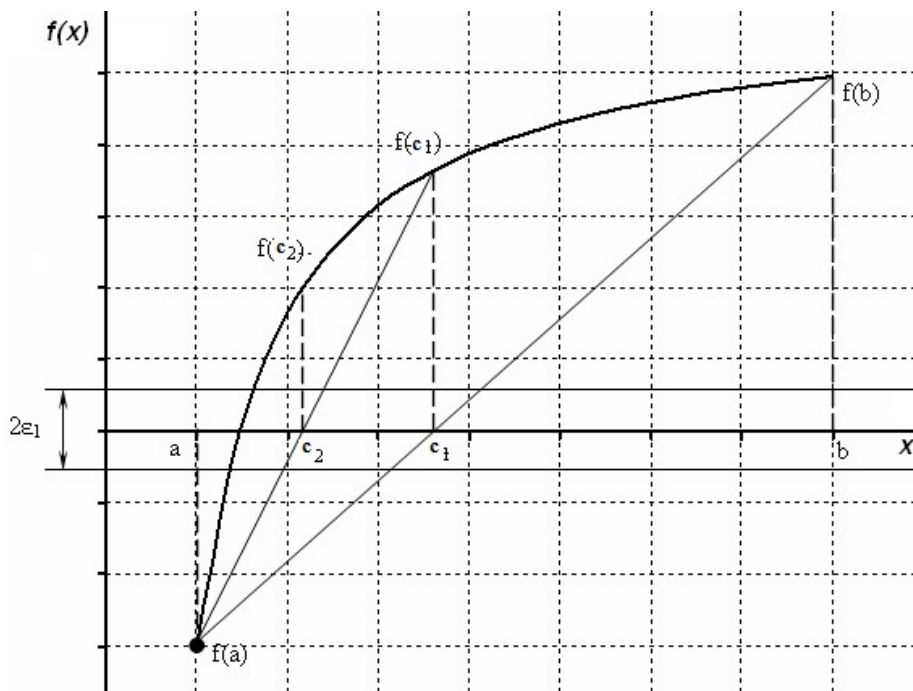


Рис.2.18. Геометрическая интерпретация метода хорд.

Вместо деления отрезка пополам разделим его в отношении $f(a)/f(b)$. Тогда первое приближение корня находится в точке $x=c$ пересечения отрезка $[a,b]$ хордой, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ (рис.2.18). Далее, как и в предыдущем методе, определяем отрезок, на котором находится корень, и

применяем к нему описанный алгоритм до достижения необходимой точности.

Формула для поиска точки c имеет вид: $c = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$ [1].

Листинг, описывающий решение уравнения данным способом, приведен ниже (рис.2.19).

```

x(a, b, ε) := || k ← 1
               || c ← 1
               || while |f(c)| > ε
               ||   || c ← a - (f(a) * (b - a)) / (f(b) - f(a))
               ||   || if f(c) * f(a) < 0
               ||   ||   || b ← c
               ||   ||   || else
               ||   ||   ||   || a ← c
               ||   ||   || k ← k + 1
               ||   || [ c ]
               ||   || [ k ]

a := 1    b := 3    ε := 10-6

x(a, b, ε) = [ 2.753 ]
              [ 7     ]

```

Рис.2.19. Реализация метода хорд и результаты работы

2.3. Рассмотрим итерационный способ решения нелинейного уравнения [1]. Для его осуществления необходимо определить начальное приближение корня x_0 с помощью графика и вычислить первую производную от функции $f(x)$ (рис.2.20).

```

f(x) := x2 - 20 sin(x)
x0 := 2.5

f1(x) := (d/dx) f(x)

f1(x0) = 21.023

```

Рис.2.20. Вычисление первой производной функции в точке начального приближения.

Затем привести уравнение к виду $F(x) = x - m \cdot f(x)$. Для определения коэффициента m нужно воспользоваться неравенством $0 < 1 - m \cdot f'(x_0) < 1$. Для решения неравенства нужно воспользоваться функцией **solve** с панели

инструментов «Символьные» (рис.2.21). Решение неравенства показывает, что $m \in [0, 0.47]$, поэтому можно принять $m = 0.04$.

$$\begin{array}{l}
 1 - m \cdot f_1(x_0) < 1 \xrightarrow{\text{solve, } m} 0.0 < m < \infty \\
 1 - m \cdot f_1(x_0) \geq 0 \xrightarrow{\text{solve, } m} -\infty < m \leq 0.047567239395716514962 \\
 \\
 m := 0.04
 \end{array}$$

Рис.2.21. Определение параметра m .

Итерационным способом решить уравнение $F(x)$ (рис.2.22).

$$\begin{array}{l}
 F(x) := x - m \cdot f(x) \\
 \\
 x(x_1, \varepsilon) := \left\| \begin{array}{l} k \leftarrow 1 \\ \text{while } 1 \\ \left\| \begin{array}{l} x_0 \leftarrow x_1 \\ x_1 \leftarrow F(x_0) \\ k \leftarrow k + 1 \\ \text{if } |x_0 - x_1| < \varepsilon \\ \left\| \text{break} \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x_1 \\ k \end{array} \right] \end{array} \right. \\
 \\
 x(x_0, 10^{-5}) = \left[\begin{array}{l} 2.753 \\ 6 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Рис.2.22. Реализация итерационного метода и результаты работы.

2.4. Решим уравнение с помощью встроенного в MathCAD вычислительного блока **Given-Find**, решающего уравнения итерационным методом. Перед вычислительным блоком требуется задать начальное приближение корня. В самом вычислительном блоке требуется использовать логический оператор « \Rightarrow » с панели инструментов «Булева алгебра» (рис.2.23).

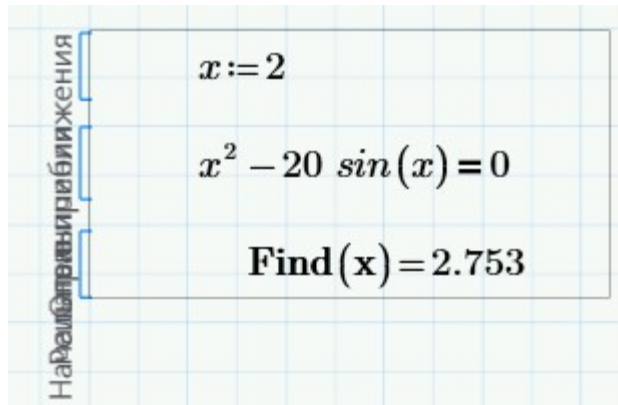


Рис.2.23. Использование блока решений.

2.5. Решим систему нелинейных уравнений $\begin{cases} x - \sin(y + 2) + 1.5 = 0 \\ \cos(x - 2) + y - 0.5 = 0 \end{cases}$. Для

этого можно воспользоваться итерационным методом (модифицированным методом Ньютона) [1,2].

На первом этапе необходимо преобразовать систему, выразив x из первого уравнения и y из второго: $\begin{cases} x = \sin(y + 2) - 1.5 \\ y = 0.5 - \cos(x - 2) \end{cases}$.

Задать начальные приближения x_0 и y_0 (рис.2.24) и запустить процедуру подстановки начальных приближений в систему. Листинг программы, реализующий данный этап, приведен ниже (2.25).

```
x0 := 2
y0 := 1
ε := 10-5
```

Рис. 2.24. Задание начальных приближений и погрешность вычислений.

Выход из цикла происходит по условию, что модуль разностей k и $k+1$ приближений для x или y становится меньше заданной погрешности вычисления корней системы уравнений. Результатом работы функции являются 2 числа - значения корней системы нелинейных уравнений, в качестве входных параметров в функцию передаются начальные приближения и ε - заданная погрешность вычисления.

```

ORIGIN := 1
F1(x, y) := sin(y + 2) - 1.5

F2(x, y) := 0.5 - cos(x - 2)

iter(x0, y0) := || k ← 0
                 || while 1
                 ||   || x ← x0
                 ||   || y ← y0
                 ||   || x0 ← F1(x, y)
                 ||   || y0 ← F2(x, y)
                 ||   || Δx ← x - x0
                 ||   || Δy ← y - y0
                 ||   || k ← k + 1
                 ||   || if max(|Δx|, |Δy|) < ε
                 ||   ||   || break
                 || [ x0 ]
                 || [ y0 ]

iter(x0, y0) = [ -1.703 ]
                [ 1.346 ]

```

Рис.2.25. Реализация модифицированного метода Ньютона и результаты работы.

2.6. Найдем решение системы уравнений с помощью вычислительного блока **Given-Find** (рис.2.26)

Решение системы уравнений

```

x := 2
y := 1

x - sin(y + 2) + 1.5 = 0
cos(x - 2) + y - 0.5 = 0

Find(x, y) = [ -1.703 ]
                [ 1.346 ]

```

Рис. 2.26. Использование блока решений *Given-Find*.

В случае неудачи применения функции **Find** в MathCAD возможно применение функции **Minerr**, которая позволяет найти значение x и y , при которых уравнения системы вычислительного блока получают наиболее близкие к 0 решения (рис.2.27). Недостатком этой функции является более высокая по сравнению с **Find** погрешность вычислений [4,5].

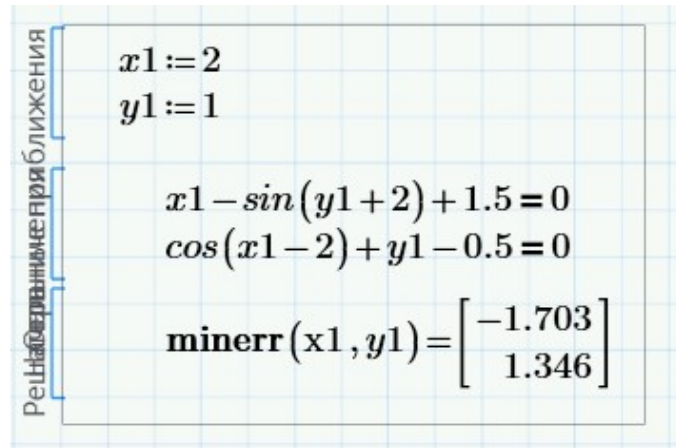


Рис.2.27. Использование блока решений Given-Minner.

2.7. Решим систему уравнений графически. Для этого выразим в уравнениях переменную y через x :

$$y = 0.5 - \cos(x - 2),$$

$$y = \arcsin(x + 1.5) - 2.$$

Форма записи последнего уравнения не очень удобна для представления в MathCAD, так как при попытке ее построить график строится только на

интервале $y \in \left[-\frac{\pi}{2} - 2; \frac{\pi}{2} - 2 \right]$. Поэтому можно задать x через параметр t :

$$x = \sin(t) - 1.5, \text{ тогда } y = t - 2.$$

Задавая второе уравнение системы как параметрическое, получаем графики функций, изображенные ниже, с помощью трассировки определяем точку пересечения и убеждаемся в отсутствии других решений системы уравнений (рис.2.28).

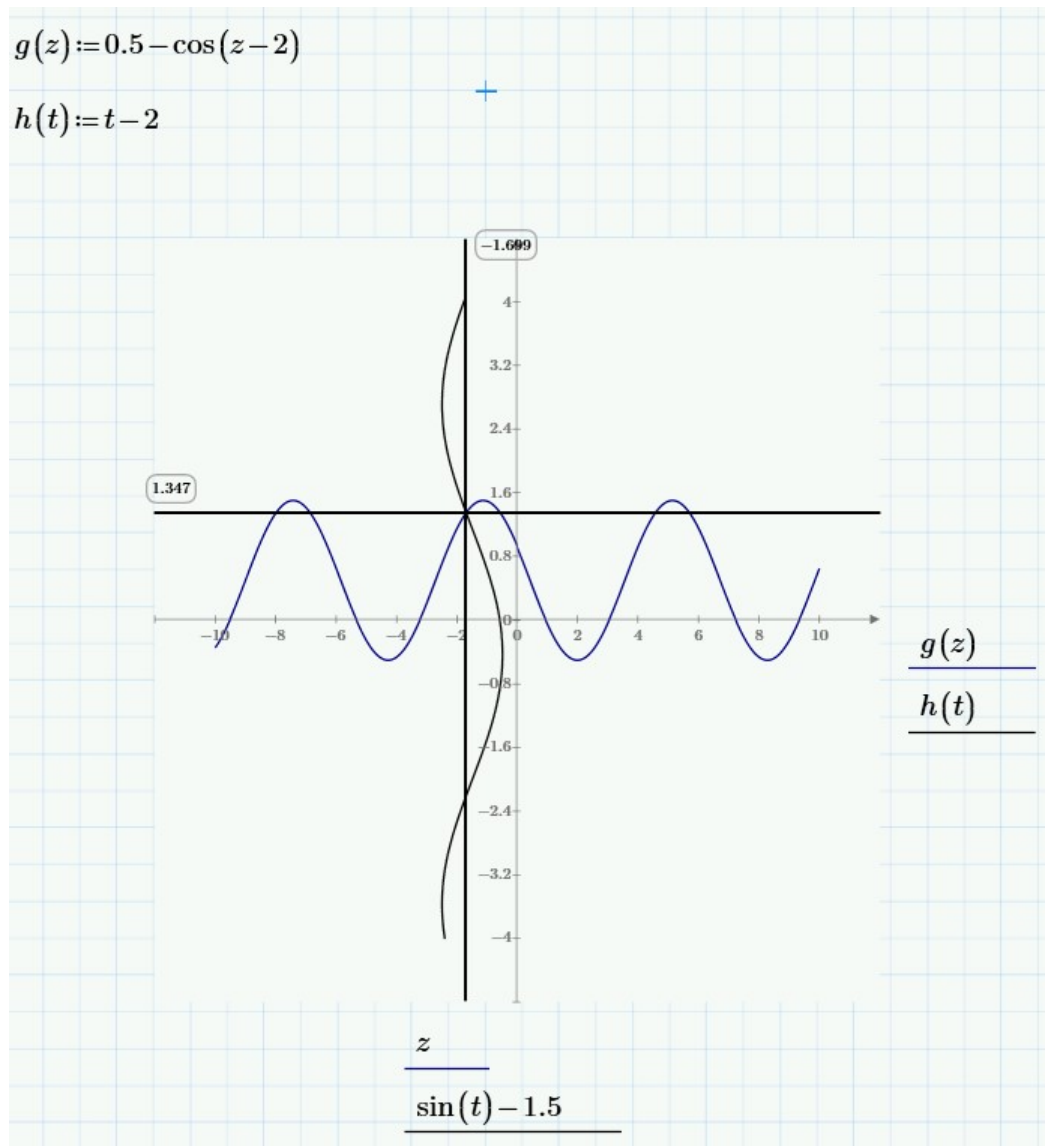


Рис.2.28. Графическое решение системы нелинейных уравнений.

Варианты заданий:

1. Решение систем линейных уравнений

Решить систему СЛУ методом Крамера, методом Гаусса и методом простых итераций. Проверить правильность полученных выражений, решив СЛУ с помощью встроенной функции. При применении итерационного метода необходимо выбрать количество итераций, обеспечивающее погрешность итераций не более 10^{-5} .

№ вар.	Исходная система уравнений	№ вар.	Исходная система уравнений
1	$\begin{cases} 4,25x_1 - 0,8x_2 + 1,5x_3 = 5,1 \\ 1,2x_1 + 7,18x_2 - 3,2x_3 = 4,2 \\ 0,5x_1 - 1,5x_2 + 7,1x_3 = -1,2 \end{cases}$	2	$\begin{cases} 6,5x_1 - 2,34x_2 + 1,4x_3 = 2,8 \\ 0,5x_1 + 7,3x_2 - 2,4x_3 = -3,8 \\ 6,4x_1 + 0,34x_2 - 8,6x_3 = 0,64 \end{cases}$

№ вар.	Исходная система уравнений	№ вар.	Исходная система уравнений
3	$\begin{cases} 6,7x_1 - 0,6x_2 + 0,83x_3 = 6,8 \\ 1,2x_1 + 5,4x_2 - 0,54x_3 = -3,2 \\ 0,8x_1 + 1,1x_2 + 7,2x_3 = 5,2 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 7,8x_1 + 3,3x_2 - 3,7x_3 = 5,1 \\ -0,45x_1 - 8,24x_2 + 4,8x_3 = 5,4 \\ 0,54x_1 + 2,3x_2 + 3,7x_3 = 1,54 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 8,3x_1 - 2,84x_2 - 1,5x_3 = -6,5 \\ 2,62x_1 + 6,1x_2 - 3,12x_3 = 5,6 \\ -1,32x_1 + 2,15x_2 + 7,6x_3 = -1,4 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 6x_1 + 0,13x_2 - 0,67x_3 = 1,9 \\ 3,8x_1 + 9,25x_2 - 4,3x_3 = 6,4 \\ 0,38x_1 - 0,64x_2 + 3,2x_3 = 5,4 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 10,2x_1 - 0,51x_2 - 3,62x_3 = -2,05 \\ 3,09x_1 + 4,64x_2 - 1,23x_3 = -5,6 \\ 3,2x_1 - 2,31x_2 - 8,4x_3 = 6,1 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 6,6x_1 + 1,3x_2 - 1,24x_3 = 5,3 \\ 0,85x_1 - 8,4x_2 + 4,7x_3 = 1,6 \\ 1,5x_1 - 2,6x_2 + 7x_3 = -11,2 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 7,12x_1 - 4,16x_2 + 2,6x_3 = -3,1 \\ -1,76x_1 + 6,5x_2 - 0,87x_3 = 2,85 \\ 0,65x_1 + 0,87x_2 - 8,7x_3 = 5,56 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 6,2x_1 - 0,52x_2 + 2,3x_3 = -1,8 \\ 3,4x_1 - 4,2x_2 - 0,5x_3 = 0,7 \\ 0,2x_1 + 0,8x_2 + 3,6x_3 = 3,6 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 6,4x_1 - 0,73x_2 + 2,1x_3 = 3,8 \\ -1,07x_1 + 3,8x_2 - 1,5x_3 = -1,2 \\ 2,7x_1 - 3,1x_2 + 6,2x_3 = -7,5 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 1,7x_1 - 0,54x_2 + 0,63x_3 = 3,6 \\ 0,65x_1 + 4,4x_2 + 0,15x_3 = 2,3 \\ 1,5x_1 + 0,2x_2 + 4,1x_3 = 2,8 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 9,21x_1 - 1,84x_2 + 0,7x_3 = -3,2 \\ -5,17x_1 + 8,5x_2 - 2,87x_3 = -3,75 \\ 0,7x_1 + 0,87x_2 - 8,7x_3 = 2,64 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 8,4x_1 - 0,25x_2 + 3,1x_3 = -5,7 \\ -0,3x_1 + 6,1x_2 - 1,54x_3 = 3,3 \\ -5,5x_1 + 1,2x_2 - 7x_3 = 4,5 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 10,3x_1 - 1,2x_2 + 4,3x_3 = 4,2 \\ 0,21x_1 + 6,2x_2 + 3,54x_3 = 5,1 \\ -0,31x_1 - 0,52x_2 + 3,6x_3 = -2,1 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 12x_1 + 4,2x_2 - 0,8x_3 = -5,4 \\ -4,1x_1 + 6,2x_2 - 0,16x_3 = 1,6 \\ -1,6x_1 - 4,3x_2 + 8,4x_3 = 12,2 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 6,9x_1 + 2,3x_2 + 1,21x_3 = 3,1 \\ x_1 + 2,3x_2 - 3,4x_3 = -2,3 \\ 0,21x_1 - 0,43x_2 + 6,3x_3 = 3,6 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 4,1x_1 + 2,06x_2 - 0,6x_3 = 2,4 \\ 0,76x_1 + 7x_2 - 5,5x_3 = 4,8 \\ -5,07x_1 - 1,1x_2 - 9,08x_3 = -3,7 \end{cases}$
19	$\begin{cases} 12,4x_1 - 0,56x_2 + 4,2x_3 = 6,3 \\ -0,65x_1 + 4,4x_2 + 1,5x_3 = 1,5 \\ 1,5x_1 + 1,1x_2 - 2,8x_3 = 1,7 \end{cases}$	20	$\begin{cases} -5x_1 + 3,6x_2 + 0,23x_3 = -3,85 \\ 5,2x_1 - 7,3x_2 - 0,48x_3 = 5,14 \\ 0,68x_1 - 4,98x_2 + 7,33x_3 = -4,67 \end{cases}$
21	$\begin{cases} 6,8x_1 + 0,6x_2 + 0,82x_3 = 0,83 \\ 4,2x_1 - 6,3x_2 - 0,9x_3 = -1,1 \\ 1,2x_1 - 1,06x_2 - 6,7x_3 = 2,12 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 7,31x_1 + 3,2x_2 + 2,06x_3 = -5,7 \\ 0,2x_1 - 6,7x_2 + 0,36x_3 = 3,68 \\ 3,6x_1 - 4,8x_2 - 9,7x_3 = -6,7 \end{cases}$

№ вар.	Исходная система уравнений	№ вар.	Исходная система уравнений
23	$\begin{cases} 9,7x_1 + 0,35x_2 - 1,84x_3 = 2,15 \\ 3,64x_1 - 7,1x_2 - 3,37x_3 = 1,5 \\ 0,32x_1 + 0,48x_2 - 3,3x_3 = -3,1 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 9,21x_1 - 1,84x_2 + 0,7x_3 = -3,2 \\ -5,17x_1 + 8,5x_2 - 2,87x_3 = -3,75 \\ 0,7x_1 + 0,87x_2 - 8,7x_3 = 2,64 \end{cases}$

2. Решение нелинейных систем уравнений

2.1. Решить уравнение методом дихотомии (методом хорд) и итерационным методом с погрешностью 10^{-5} . Начальные приближения выбрать, используя построенный график функции. Проверить полученный результат с помощью встроенных функций MathCAD.

№ вар.	Исходное уравнение	№ вар.	Исходное уравнение	№ вар.	Исходное уравнение
1	$\ln x + (x+1)^3 = 0$	9	$(x-1)^2 = \frac{1}{2}e^x$	17	$x(x+1)^2 = 1$
2	$x \cdot 2^x = 1$	10	$(2-x)e^x = 0.5$	18	$x = (x+1)^3$
3	$\sqrt{x+1} = \frac{1}{x}$	11	$2.2x - 2^x = 0$	19	$x^2 = \sin x$
4	$x - \cos x = 0$	12	$x^2 + 4\sin x = 0$	20	$x^3 = \sin x$
5	$3x + \cos x + 1 = 0$	13	$2x - \ln x = 7$	21	$x = \sqrt{\lg(x+2)}$
6	$x + \ln x = 0.5$	14	$5x - 8\ln x = 8$	22	$x^2 = \ln(x+1)$
7	$2 - x = \ln x$	15	$3x - e^x = 0$	23	$x = \sin x$
8	$\sqrt{1-x} = x$	16	$e^{-x^2} = x$	24	$x^2 = \cos x$

2.2. Решить систему нелинейных уравнений. Построить график и по нему определить начальные приближения неизвестных. Решить систему нелинейных уравнений итерационным методом с погрешностью 10^{-5} . Проверить полученный результат с помощью встроенных функций MathCAD.

№ вар.	Исходная система уравнений	№ вар.	Исходная система уравнений
1	$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1.2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$	2	$\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1.2 \\ 2y - \cos x = 3 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0.5 \\ x - \cos y = 3 \end{cases}$	4	$\begin{cases} \sin y + 2x = 2 \\ \cos(x-1) + y = 0.7 \end{cases}$
5	$\begin{cases} \sin x + 2y = 2 \\ \cos(y-1) + x = 0.7 \end{cases}$	6	$\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0.5 \\ y - \cos x = 3 \end{cases}$

№ вар.	Исходная система уравнений	№ вар.	Исходная система уравнений
7	$\begin{cases} \cos(x+0.5) - y = 1 \\ \cos(y-2) + x = 0 \end{cases}$	8	$\begin{cases} \cos y + x = 1.5 \\ 2y - \sin(x-0.5) = 1 \end{cases}$
9	$\begin{cases} \cos x + y = 1.5 \\ 2x - \sin(y-0.5) = 1 \end{cases}$	10	$\begin{cases} \sin(y+0.5) - x = 1 \\ \cos(x-2) + y = 0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} \sin(x+0.5) - y = 1 \\ \cos(y-2) + x = 0 \end{cases}$	12	$\begin{cases} \cos(y+0.5) + x = 0.8 \\ \sin x - 2y = 1.6 \end{cases}$
13	$\begin{cases} \sin(x-1) = 1.3 - y \\ x - \sin(y+1) = 0.8 \end{cases}$	14	$\begin{cases} \sin(y-1) = 1.3 - x \\ y - \sin(x+1) = 0.8 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 2y - \cos(x+1) = 0 \\ x + \sin y = -0.4 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 2x - \cos(y+1) = 0 \\ y + \sin x = -0.4 \end{cases}$
17	$\begin{cases} \cos(x+0.5) - y = 2 \\ \sin y - 2x = 1 \end{cases}$	18	$\begin{cases} \cos(y+0.5) - x = 2 \\ \sin x - 2y = 1 \end{cases}$
19	$\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1.5 \\ x + \cos(y-2) = 0.5 \end{cases}$	20	$\begin{cases} \sin(y+2) - x = 1.5 \\ y + \cos(x-2) = 0.5 \end{cases}$
21	$\begin{cases} \sin(x) + 2y = 1.6 \\ x + \cos(y-1) = 1 \end{cases}$	22	$\begin{cases} \cos(y) + 2x = 1.6 \\ y + \sin(x-1) = 1 \end{cases}$
23	$\begin{cases} \sin y - 2x = 2 \\ 2x + \cos(y-0.5) = 1.5 \end{cases}$	24	$\begin{cases} \sin x - 2y = 2 \\ 2y + \cos(x-0.5) = 1.5 \end{cases}$

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы и задание для работы.
3. Текст программы с комментариями.
4. Результаты вычисления.
5. Выводы по проделанной работе.

Контрольные вопросы:

1. Укажите ограничение метода Крамера для решения систем линейных уравнений.
2. Кратко опишите алгоритм решения системы линейных уравнений методом Гаусса.
3. Дайте краткое определение термину "расширенная матрица" и "ранг матрицы".

4. Какой вывод можно сделать при совпадении значений ранга расширенной матрицы и матрицы коэффициентов?
5. Покажите, что в работе выполняется условие сходимости итераций при использовании метода простой итерации.
6. Кратко опишите, для каких итерационных вычислений используются матрицы a и b (основная и дополнительная матрицы).
7. Кратко опишите, каким образом определяется погрешность вычисления в методе простой итерации.
8. Проанализируйте, какое количество итераций было действительно необходимо в методе простых итераций в работе.
9. Кратко опишите, каким образом при использовании метода дихотомии и метода хорд определяется, что на заданном отрезке уравнение имеет корень.
10. Кратко опишите, в чем заключается отличие алгоритмов поиска корней нелинейного уравнения методом дихотомии и методом хорд.

Лабораторная работа №3.

Интерполяция табличных функций. Аппроксимация табличной функции по методу наименьших квадратов

Цель работы: изучение численных методов обработки экспериментальных данных.

Задачи работы:

1. Выполнить интерполяцию табличной функции с помощью классического полинома, многочлена Лагранжа и многочлена Ньютона.
2. Вычислить значение табличной функции точках, находящихся в координатах $x = (x_{n+1} + x_n)/2$, где n - номер узла табличной функции.
3. Подобрать аналитическую функцию, наиболее адекватно описывающую табличную функцию и вычислить ее коэффициенты

Порядок выполнения работы:

1. Интерполяция табличной функции

На практике часто возникает задача замены полученной экспериментально табличной функции вида:

X	1	2	3	4	5
Y	1.3	1.7	1.5	2.6	3

аналитической функцией вида $y(x) = a + bx^3$ которая на интервале $[x_0, x_n]$ близка к табличной функции. Такая потребность возникает при необходимости вычисления величины Y в точках X , для которых не производились измерения (например, для точки $X=1.5$), для математической обработки табличных функций (например, их дифференцирования или интегрирования, вычисления координат экстремума) [1,5].

Рассмотрим три способа интерполяции табличной функции:

x	-2.00	-1.60	-1.20	-0.8	-0.40	0.00	0.40	0.80	1.20	1.60
y	-16.30	-15.59	-14.57	-13.06	-10.85	-8.00	-5.15	-2.94	-1.43	-0.41

1. С помощью классического полинома.
2. С помощью многочлена Лагранжа.
3. С помощью многочлена Ньютона.

1.1. Проведем интерполяцию классическим полиномом.

Зададим координаты узлов табличной функции с помощью двух вектор-столбцов X и Y . Перед этим присвоим системной переменной **ORIGIN** значение 1 (рис.3.1).

ORIGIN := 1	
$Y :=$	$\begin{bmatrix} -16.30 \\ -15.59 \\ -14.57 \\ -13.06 \\ -10.85 \\ -8 \\ -5.15 \\ -2.94 \\ -1.43 \\ -0.41 \end{bmatrix}$
$X :=$	$\begin{bmatrix} -2 \\ -1.6 \\ -1.2 \\ -0.8 \\ -0.4 \\ 0 \\ 0.4 \\ 0.8 \\ 1.2 \\ 1.6 \end{bmatrix}$

Рис.3.1 Задание табличной функции.

Построим узлы табличной функции на X - Y графике. Для этого вместо переменной x на оси графика введем имя столбца X , а вместо наименования функции по оси y - имя столбца Y . Для того, чтобы заменить получившуюся на графике ломаную линию точками, надо зайти в меню форматирования графика и на вкладке «Трассировка» выбрать в столбце «Тип графика» - точки, а в столбце «Ширина символа» указать значение 3 (рис.3.2).

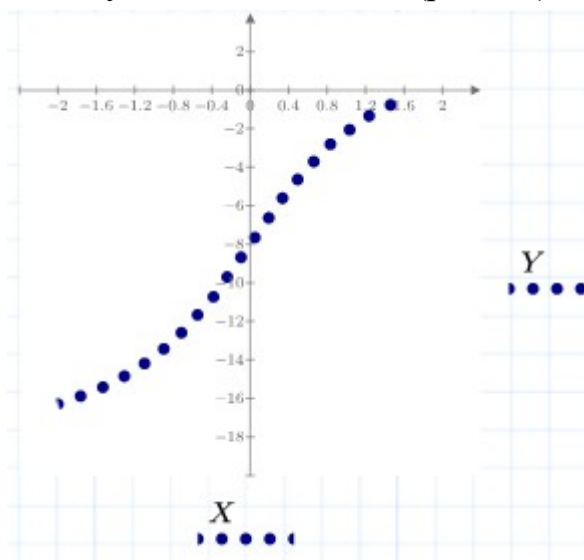


Рис.3.2. График табличной функции

Проведем интерполяцию табличной функции полиномом второй степени (функцией вида $y = ax^2 + bx + c$). Для этого требуется определить значения коэффициентов a , b и c . Для их вычисления требуется решить систему

$$\text{уравнений: } \begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases}, \text{ где } x_n, y_n \text{ - координаты узлов трех точек}$$

табличной функции [1]. Решим такую систему в MathCAD с помощью вычислительного блока **Given-Find** (рис.3.3).

Решатель на Спаранне (символический)

$$a := 0 \quad b := 0 \quad c := 0$$

$$a \cdot (-2)^2 - 2b + c = -16.3$$

$$a \cdot (-1.6)^2 - 1.6b + c = -15.59$$

$$a \cdot (-1.2)^2 - 1.2b + c = -14.57$$

$$\text{Find}(a, b, c) = \begin{bmatrix} 0.969 \\ 5.262 \\ -9.65 \end{bmatrix}$$

Рис.3.3. Определение коэффициентов с использованием блока решений.

Подставляя полученные коэффициенты в функцию интерполяционного полинома, получаем выражение для интерполяционной функции (рис.3.4).

$$F(x) := 0.969 x^2 + 5.262 x - 9.65$$

Рис.3.4. Задание функции интерполяционного полинома.

Построим график этой функции и посмотрим, как ее точки расположены относительно точек табличной функции (рис.3.5).

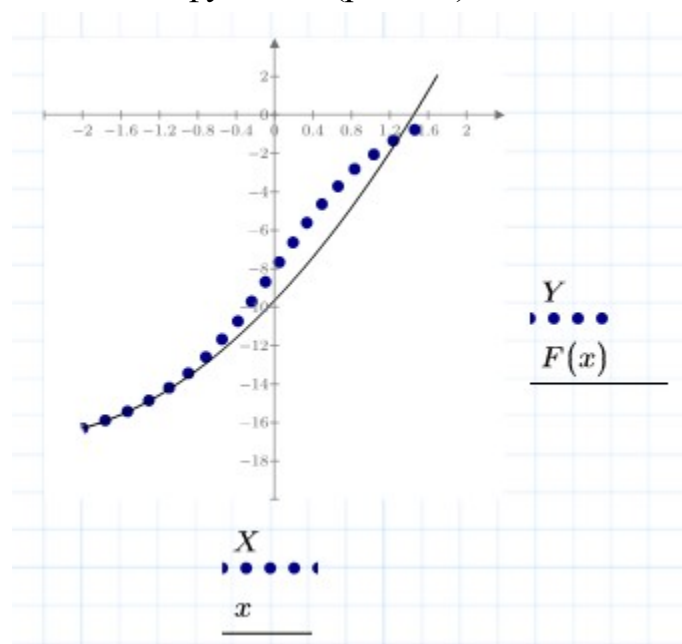


Рис.3.5. График интерполяции табличной функции полиномом второй степени.

Из графика видно, что интерполяционная функция хорошо описывает табличную функцию в области первых трех узлов, координаты которых были использованы для вычисления коэффициентов полинома, но в остальных точках имеет место большое расхождение результатов. Такой тип интерполяции называется **локальным**.

1.2. Выполним интерполяцию многочленом Лагранжа.

Интерполяция многочленом Лагранжа является наиболее общим способом интерполяции [1]. Сам многочлен представляет из себя функцию вида:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} y_i,$$

где $P_i(x_i) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$ - коэффициенты Лагранжа.

Максимальная степень многочлена n не может быть больше количества точек табличной функции минус единица. Поэтому примем $n=9$.

Вычислим коэффициенты Лагранжа, воспользовавшись выражением $P_i(x) = \prod_{j=0}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$. Так как в MathCAD нумерация элементов матриц начинается с 1, то n необходимо принять равным 10. Программный блок, вычисляющий i -й коэффициент Лагранжа, и сам многочлен приведены ниже (рис.3.6).

The image shows a MathCAD program block on a grid background. It defines the coefficients $P_i(x)$ and the polynomial $L(x)$ as follows:

$$P(x) := \begin{cases} \text{for } i \in 1..10 \\ \quad P_i \leftarrow \prod_{j=1}^{10} \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ \frac{(x-X_j)}{(X_i-X_j)} & \text{else} \end{cases} \end{cases}$$

$$L(x) := \sum_{i=1}^{10} (P(x)_i Y_i)$$

Рис. 3.6. Реализация вычисления коэффициентов Лагранжа.

Построим график полученной функции и посмотрим, как он будет проходить относительно узлов табличной функции (рис.3.7).

В этом случае полученная кривая точно проходит через все узлы табличной функции.

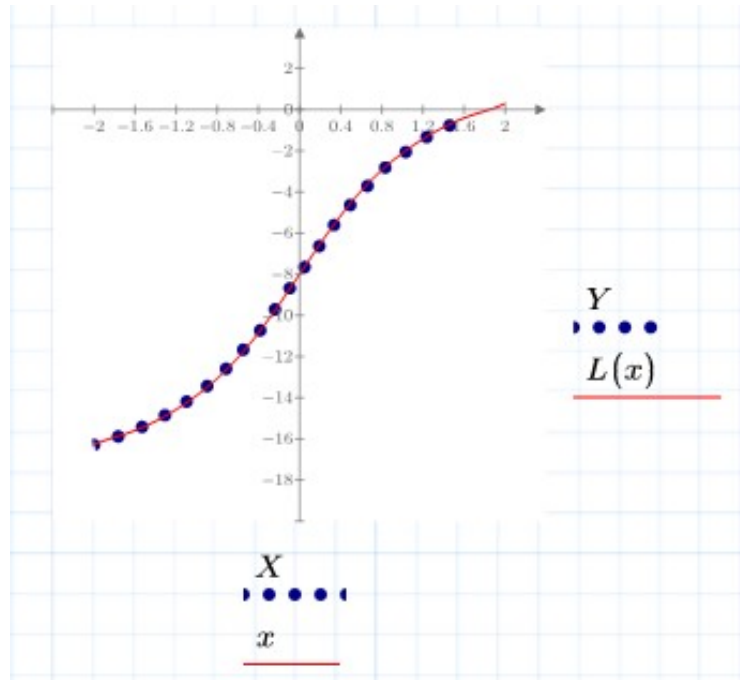


Рис.3.7. График интерполяции табличной функции полиномом Лагранжа.

1.3. Выполним интерполяцию многочленом Ньютона.

Другим вариантом интерполяционной функции является многочлен

$$N(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

Ньютона, имеющий вид

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

где $\Delta^m y_i = \Delta^{m-1} y_{i+1} - \Delta^{m-1} y_i, i = 0, n - m$ - конечные разности порядка m , $h = x_{i+1} - x_i = const$ - шаг интерполирования [1]. Максимальная степень многочлена равна количеству узлов табличной функции минус единица, т.е. 9. Т.к нумерация элементов массивов начинается с 1, то примем $n = 10$.

Вычислим матрицу конечных разностей (рис.3.9), составив следующий программный модуль, при этом разности получаются при вычитании соседних элементов столбцов (рис. 3.8).

```

n:=10
ΔY:=
  for k ∈ 1..n-1
    Δk,1 ← Yk+1 - Yk
  for j ∈ 2..n-1
    for i ∈ 1..n-j
      Δi,j ← Δi+1,j-1 - Δi,j-1
  Δ

```

Рис.3.8. Реализация вычисления матрицы конечных разностей.

$$\Delta Y = \begin{bmatrix} 0.71 & 0.31 & 0.18 & 0.03 & -0.3 & -0.01 & 0.9 & -1.79 & 1.79 \\ 1.02 & 0.49 & 0.21 & -0.27 & -0.31 & 0.89 & -0.89 & -1.044 \cdot 10^{-14} & 0 \\ 1.51 & 0.7 & -0.06 & -0.58 & 0.58 & 2.442 \cdot 10^{-15} & -0.89 & 0 & 0 \\ 2.21 & 0.64 & -0.64 & -4.441 \cdot 10^{-16} & 0.58 & -0.89 & 0 & 0 & 0 \\ 2.85 & 0 & -0.64 & 0.58 & -0.31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.85 & -0.64 & -0.06 & 0.27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.21 & -0.7 & 0.21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.51 & -0.49 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Рис.3.9. Матрица конечных разностей.

Вычислим множители $P(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ (рис.3.10).

$$P(x) := \prod_{i \in 1..n} \left(\prod_{j=1}^i (x - X_j) \right)$$

Рис.3.10. Реализация вычисления множителей P .

Зададим h как разность двух соседних значений X из таблицы и запишем получившийся многочлен (рис.3.11).

$$h := 0.4$$

$$N(x) := Y_1 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\Delta Y_{1,i} \cdot P(x)_i)}{i! \cdot h^i} \right)$$

Рис.3.11. Задание интерполяционного полинома Ньютона.

Результат построения графика интерполяционной функции приведен ниже (рис.3.12).

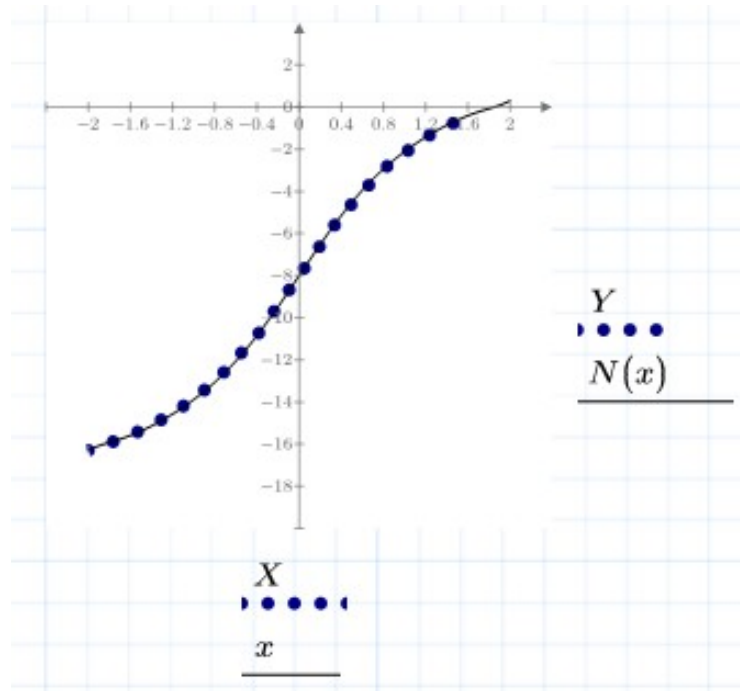


Рис. 3.12. График интерполяции табличной функции полиномом Ньютона

1.4. Вычислим значения табличной функции в промежуточных точках, пользуясь многочленами Лагранжа и Ньютона (рис.3.13).

$$j := 1 \dots n - 1$$

$$X1_j := \frac{X_{j+1} + X_j}{2}$$

$$L(X1_j) = \begin{bmatrix} -15.924 \\ -15.139 \\ -13.886 \\ -12.054 \\ -9.475 \\ -6.525 \\ -3.946 \\ -2.114 \\ -0.861 \end{bmatrix} \quad N(X1_j) = \begin{bmatrix} -15.924 \\ -15.139 \\ -13.886 \\ -12.054 \\ -9.475 \\ -6.525 \\ -3.946 \\ -2.114 \\ -0.861 \end{bmatrix}$$

Рис. 3.13. Вычисление значений табличной функции в промежуточных точках

2. Аппроксимация табличной функции

Если значения табличной функции получены в ходе выполнения эксперимента, то подобрать выражение, правильно описывающее зависимость

между экспериментальными данными, с помощью точной в узлах интерполяции проблематично. Это обусловлено тем, что значения табличной функции определяются с погрешностью, в результате интерполяционный полином строится с ошибкой. Вместо того, чтобы «сгладить» ошибки, интерполяционная функция включает их в себя. Кроме того, в случае наличия большого количества узлов таблицы и применения интерполяционного полинома большой степени математическое выражение становится слишком громоздким [5].

Одним из способов решить эту проблему является подбор математической функции по методу наименьших квадратов. Суть этого метода заключается в том, что подбираемая функция должна соответствовать условию:

$$\sum_{i=0}^n (y(X_i) - Y_i)^2 = \min ,$$

т.е сумма квадратов отклонений значений аппроксимирующей функции в узлах таблицы от экспериментально полученных данных должна была минимальна.

Подберем аппроксимирующую функцию для табличной функции.

x	-2.00	-1.60	-1.20	-0.8	-0.40	0.00	0.40	0.80	1.20	1.60
y	-16.30	-15.59	-14.57	-13.06	-10.85	-8.00	-5.15	-2.94	-1.43	-0.41

2.1. Зададим матрицы исходных данных X и Y в MathCAD (рис.3.1).

2.2. Построим на графике точки, соответствующие узлам табличной функции (рис.3.14), и по их виду выдвинем не менее трех гипотез о предполагаемом виде аппроксимирующей функции, пользуясь для этого Приложением.

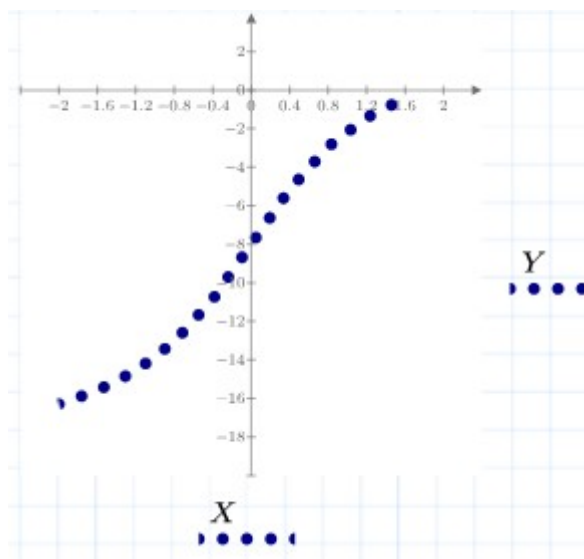


Рис. 3.14. График табличной функции.

Для данной табличной функции, судя по ее внешнему виду, аппроксимируемыми могут быть функции вида $y(x) = a + bx^3$, $y(x) = a + b\sin(x)$ и $y(x) = a + b\arctg(x)$ (рис.3.15).

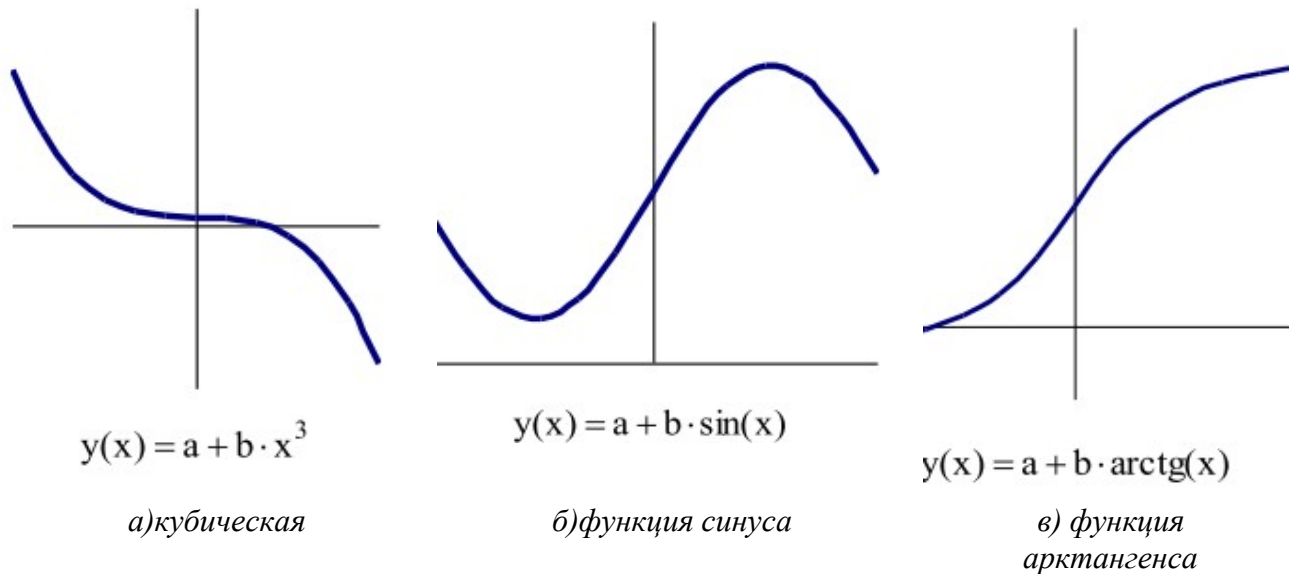


Рис.3.15. Гипотезы аппроксимирующей функции.

2.3. Подберем коэффициенты a и b для каждой из этих двух функций. Для этого зададим сумму квадратов разностей аппроксимирующей функции и экспериментальных данных в виде функции D , зависящей от a и b (рис.3.16).

$$D(a, b) := \sum_{i=1}^{10} \left((a + b \cdot (X_i)^3) - Y_i \right)^2$$

Рис. 3.16. Задание функции D .

Вычислим, при каких a и b функция $D(a, b) = \min$. Для этого воспользуемся вычислительным блоком **Given - Minimize**, в котором необходимо задать начальные приближения коэффициентов a и b . Результатом применения этого блока будет вектор-столбец, содержащий значения коэффициентов (рис.3.17).

$$\begin{aligned}
 & a := 0 \quad b := 0 \\
 & R := \text{minimize}(D, a, b) = \begin{bmatrix} -7.6 \\ 1.538 \end{bmatrix} \\
 & a := R_1 \\
 & b := R_2
 \end{aligned}$$

Рис. 3.17. Вычисление коэффициентов a и b .

2.4. Далее полученные коэффициенты подставляются в аппроксимирующую функцию и строится ее график (рис.3.18).

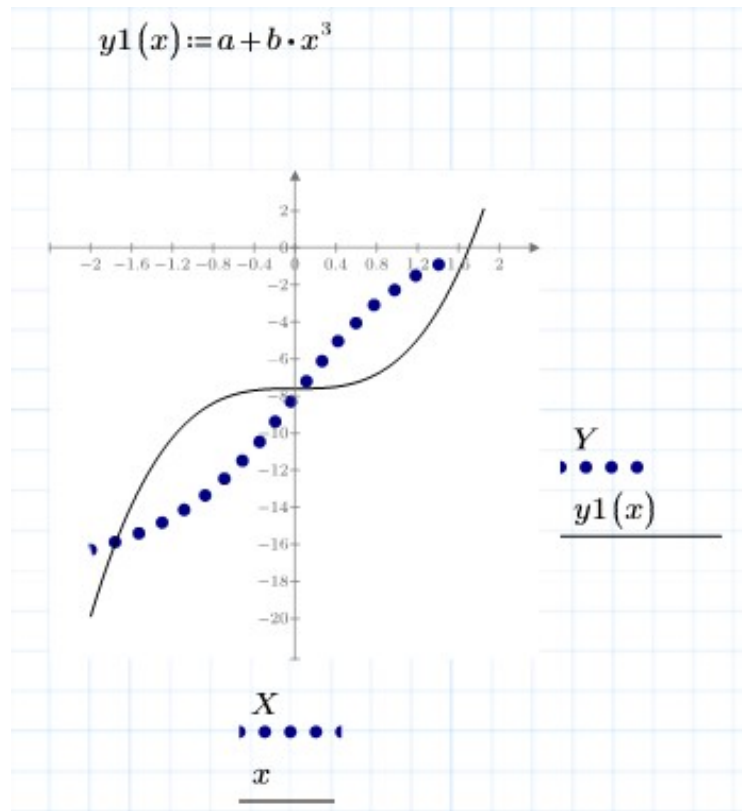


Рис. 3.18. График аппроксимации табличной функции кубической функцией. Аналогичным способом находят коэффициенты двух остальных аппроксимирующих функций (рис.3.19 и рис.3.20).

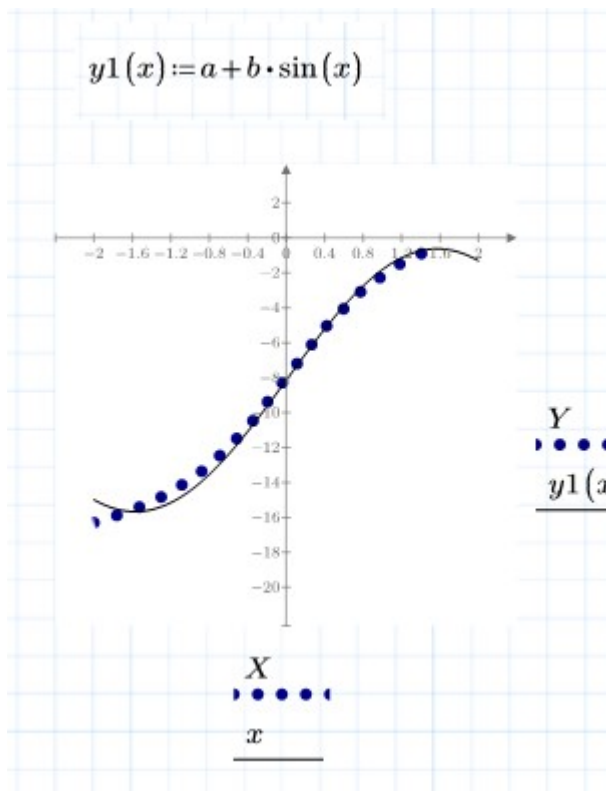


Рис. 3.19. График аппроксимации табличной функции функцией синуса.

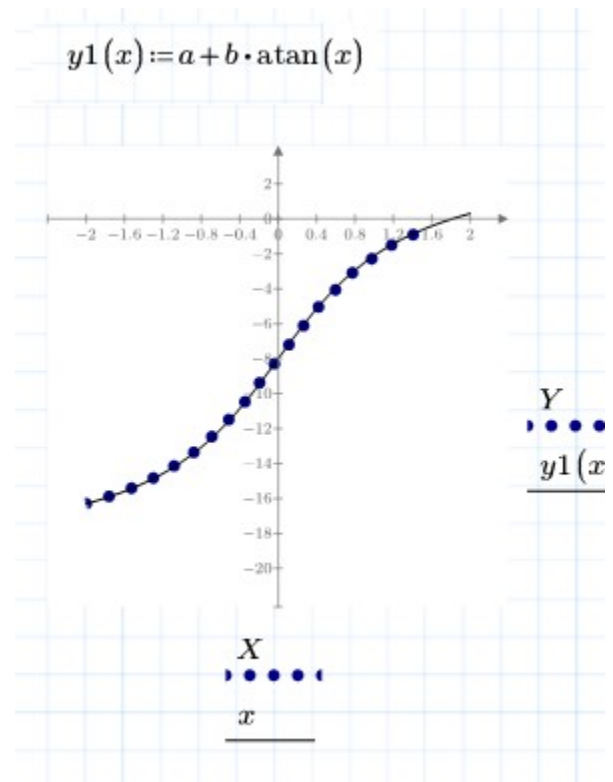


Рис. 3.20. График аппроксимации табличной функции функцией арктангенса.

2.5. Выполним оценку достоверности для выбранных аппроксимирующих

функций из выражения $\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y(X_i) - Y_i)^2}{n}}$ (рис.3.21).

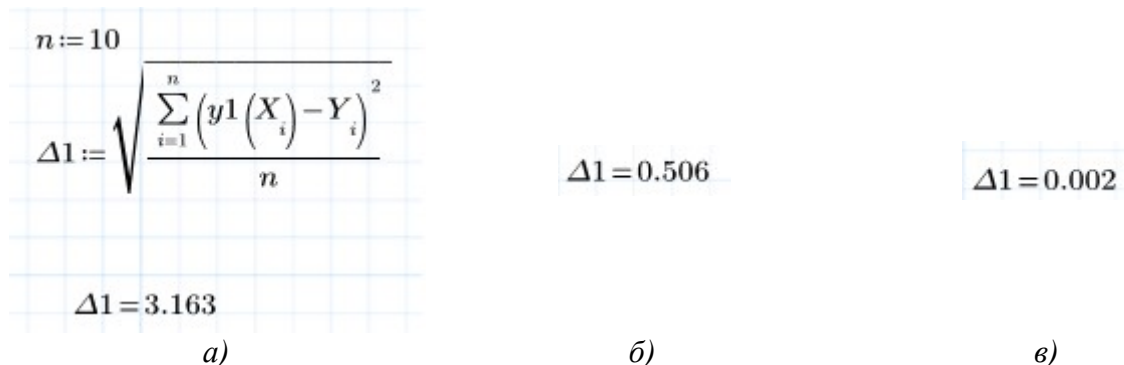


Рис.3.21. Оценка достоверности для аппроксимации табличной функции кубической (а) функцией, функцией синуса (б) и функцией арктангенса (в).

В случае аппроксимации функцией $y(x) = a + b \arctg(x)$ разность значений табличной и аппроксимирующей функции в узлах наименьшая, что позволяет говорить о том, что она наилучшим образом описывает табличную функцию.

Варианты заданий:

1. Интерполяция табличных функций.

№ вар.	Функция										
	x	-1	-0,80	-0,60	-0,40	-0,20	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80
1	y	0,81	0,97	1,17	1,40	1,67	2,00	2,39	2,87	3,43	4,11
	x	-2,00	-1,00	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,0-
2	y	12,50	10,00	8,00	6,40	5,12	4,10	3,28	2,62	2,10	1,68
	x	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
3	y	-4,91	-2,83	-1,61	-0,75	-0,08	0,47	0,93	1,33	1,68	2,00
	x	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
4	y	0,00	0,01	0,04	0,10	0,19	0,32	0,51	0,77	1,09	1,50
	x	-3,00	-2,70	-2,40	-2,10	-1,80	-1,50	-1,20	-0,90	-0,60	-0,30
5	y	47,00	38,45	30,80	24,05	18,20	13,25	9,20	6,05	3,80	2,45
	x	-3,00	-2,50	-2,00	-1,50	-1,00	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50
6	y	143,00	86,13	48,00	24,88	13,00	8,63	8,00	7,38	3,00	-8,88
	x	0,30	0,55	0,80	1,05	1,30	1,55	1,80	2,05	2,30	2,55
7	y	6,00	4,18	3,50	3,14	2,92	2,77	2,67	2,59	2,52	2,47
	x	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
8	y	2,24	1,50	1,01	0,67	0,45	0,30	0,20	0,14	0,09	0,06

№ вар.	Функция										
	x	y									
9	x	-1,00	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50
	y	0,72	1,29	2,30	4,11	7,36	13,17	23,55	42,13	75,37	134,82
10	x	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60
	y	-3,69	-2,83	-2,16	-1,61	-1,15	-0,75	-0,40	-0,08	0,21	0,47
11	x	0,08	0,20	0,32	0,44	0,56	0,68	0,80	0,92	1,04	1,16
	y	0,00	0,01	0,05	0,13	0,26	0,47	0,77	1,17	1,69	2,34
12	x	-1,00	-0,35	0,30	0,95	1,60	2,25	2,90	3,55	4,20	4,85
	y	-36,29	-34,10	-30,64	-25,91	-19,91	-12,65	-4,11	5,68	16,75	29,08
13	x	-1,00	-0,35	0,30	0,95	1,60	2,25	2,90	3,55	4,20	4,85
	y	13,00	10,56	9,08	8,32	8,04	8,00	7,96	7,68	6,92	5,44
14	x	0,38	0,58	0,78	0,98	1,18	1,38	1,58	1,78	1,98	2,18
	y	-1,16	-0,07	0,46	0,78	0,98	1,13	1,24	1,33	1,39	1,45
15	x	2,00	2,60	3,20	3,80	4,40	5,00	5,60	6,20	6,80	7,40
	y	1,11	1,41	1,80	2,29	2,91	3,69	4,70	5,97	7,59	9,65
16	x	-1,00	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50
	y	-0,85	-1,40	-2,30	-3,78	-6,21	-10,20	-16,77	-27,55	-45,27	-74,39
17	x	1,50	2,200	2,90	3,60	4,30	5,00	5,70	6,40	7,10	7,70
	y	3,00	2,10	1,70	0,90	0,20	-0,30	-0,60	-0,70	-1,20	-1,60
18	x	-0,40	-0,10	0,20	0,50	0,80	1,10	1,40	1,70	2,00	2,30
	y	0,33	0,40	0,43	0,45	0,45	0,46	0,46	0,47	0,47	0,48
19	x	0,25	0,40	0,55	0,70	0,85	1,00	1,15	1,30	1,45	1,60
	y	3,19	3,77	4,73	6,08	7,081	9,92	12,42	15,31	18,58	22,23
20	x	0,46	0,66	0,86	1,06	1,26	1,46	1,66	1,86	2,06	2,26
	y	2,21	4,12	6,57	8,12	8,54	8,83	9,35	9,51	9,66	9,89
21	x	-1,50	-0,90	-0,30	0,30	0,90	1,50	2,10	2,70	3,30	3,90
	y	1,40	3,13	4,15	4,87	5,42	5,88	6,26	6,60	6,89	7,16
22	x	0,02	0,27	0,52	0,77	1,02	1,27	1,52	1,77	2,02	2,27
	y	5,00	6,40	7,20	7,80	8,20	8,60	8,90	9,10	9,40	9,60
23	x	-3,00	-2,05	-1,10	-0,15	0,80	1,75	2,70	3,65	4,60	5,55
	y	7,00	1,75	0,80	0,44	0,29	0,19	0,14	0,11	0,09	0,07
24	x	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
	y	-0.85	-1.40	-2.30	-3.78	-6.21	-10.20	-16.77	-27.55	-45.27	-74.39

2. Аппроксимация табличной функции по методу наименьших квадратов

№ вар.	Функция										
	x	y									
1	x	2,00	2,60	3,20	3,80	4,40	5,00	5,60	6,20	6,80	7,40
	y	1,11	1,41	1,80	2,29	2,91	3,69	4,70	5,97	7,59	9,65
2	x	-0,40	-0,10	0,20	0,50	0,80	1,10	1,40	1,70	2,00	2,30
	y	0,33	0,40	0,43	0,45	0,45	0,46	0,46	0,47	0,47	0,48

№ вар.	Функция											
3	x	0,38	0,58	0,78	0,98	1,18	1,38	1,58	1,78	1,98	2,18	
	y	-1,16	-0,07	0,46	0,78	0,98	1,13	1,24	1,33	1,39	1,45	
4	x	0,02	0,27	0,52	0,77	1,02	1,27	1,52	1,77	2,02	2,27	
	y	5,00	6,40	7,20	7,80	8,20	8,60	8,90	9,10	9,40	9,60	
5	x	-3,00	-2,70	-2,40	-2,10	-1,80	-1,50	-1,20	-0,90	-0,60	-0,30	
	y	47,00	38,45	30,80	24,05	18,20	13,25	9,20	6,05	3,80	2,45	
6	x	0,08	0,20	0,32	0,44	0,56	0,68	0,80	0,92	1,04	1,16	
	y	0,00	0,01	0,05	0,13	0,26	0,47	0,77	1,17	1,69	2,34	
7	x	0,30	0,55	0,80	1,05	1,30	1,55	1,80	2,05	2,30	2,55	
	y	6,00	4,18	3,50	3,14	2,92	2,77	2,67	2,59	2,52	2,47	
8	x	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	
	y	2,24	1,50	1,01	0,67	0,45	0,30	0,20	0,14	0,09	0,06	
9	x	-1,00	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	
	y	0,72	1,29	2,30	4,11	7,36	13,17	23,55	42,13	75,37	134,82	
10	x	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	
	y	-3,69	-2,83	-2,16	-1,61	-1,15	-0,75	-0,40	-0,08	0,21	0,47	
11	x	-1,00	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	
	y	0,72	1,29	2,30	4,11	7,36	13,17	23,55	42,13	75,37	134,82	
12	x	-1,00	-0,35	0,30	0,95	1,60	2,25	2,90	3,55	4,20	4,85	
	y	-36,29	-34,10	-30,64	-25,91	-19,91	-12,65	-4,11	5,68	16,75	29,08	
13	x	-1,00	-0,35	0,30	0,95	1,60	2,25	2,90	3,55	4,20	4,85	
	y	13,00	10,56	9,08	8,32	8,04	8,00	7,96	7,68	6,92	5,44	
14	x	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	
	y	0,00	0,01	0,04	0,10	0,19	0,32	0,51	0,77	1,09	1,50	
15	x	-2,00	-1,00	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,0-	
	y	12,50	10,00	8,00	6,40	5,12	4,10	3,28	2,62	2,10	1,68	
16	x	-1,00	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	
	y	-0,85	-1,40	-2,30	-3,78	-6,21	-10,20	-16,77	-27,55	-45,27	-74,39	
17	x	-1	-0,80	-0,60	-0,40	-0,20	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	
	y	0,81	0,97	1,17	1,40	1,67	2,00	2,39	2,87	3,43	4,11	
18	x	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	
	y	-4,91	-2,83	-1,61	-0,75	-0,08	0,47	0,93	1,33	1,68	2,00	
19	x	0,25	0,40	0,55	0,70	0,85	1,00	1,15	1,30	1,45	1,60	
	y	3,19	3,77	4,73	6,08	7,081	9,92	12,42	15,31	18,58	22,23	
20	x	0,46	0,66	0,86	1,06	1,26	1,46	1,66	1,86	2,06	2,26	
	y	2,21	4,12	6,57	8,12	8,54	8,83	9,35	9,51	9,66	9,89	
21	x	-1,50	-0,90	-0,30	0,30	0,90	1,50	2,10	2,70	3,30	3,90	
	y	1,40	3,13	4,15	4,87	5,42	5,88	6,26	6,60	6,89	7,16	
22	x	0,02	0,27	0,52	0,77	1,02	1,27	1,52	1,77	2,02	2,27	
	y	5,00	6,40	7,20	7,80	8,20	8,60	8,90	9,10	9,40	9,60	

№ вар.	Функция										
	23	x	-3,00	-2,05	-1,10	-0,15	0,80	1,75	2,70	3,65	4,60
y		7,00	1,75	0,80	0,44	0,29	0,19	0,14	0,11	0,09	0,07
24	x	1,50	2,200	2,90	3,60	4,30	5,00	5,70	6,40	7,10	7,70
	y	3,00	2,10	1,70	0,90	0,20	-0,30	-0,60	-0,70	-1,20	-1,60

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы и задание для работы.
3. Текст программы с комментариями.
4. Результаты вычисления и полученные графики.
5. Выводы по проделанной работе.

Контрольные вопросы:

1. Дайте краткое определение термину "интерполяция".
2. Что является результатом интерполяции?
3. Перечислите методы интерполяции, используемые в работе.
4. Укажите название типа интерполяции, при котором интерполяционная функция хорошо описывает табличную функцию только в нескольких узловых точках.
5. Сделайте краткий вывод о возможном использовании каждого из трех методов интерполяции в работе.
6. Дайте краткое определение термину "аппроксимация".
7. Укажите, какие функции использовали в работе в качестве гипотез для выбора аппроксимирующей функции.
8. Назовите метод, с помощью которого происходит оценка достоверности для выбранных аппроксимирующих функций в работе.
9. Сделайте вывод о выборе аппроксимирующей функции, наилучшим образом описывающей заданную табличную функцию в работе.

Лабораторная работа №4. Численное интегрирование и численное дифференцирование

Цель работы: освоить применение вычислительных методов к теории интегрального и дифференциального исчисления,

Задачи работы:

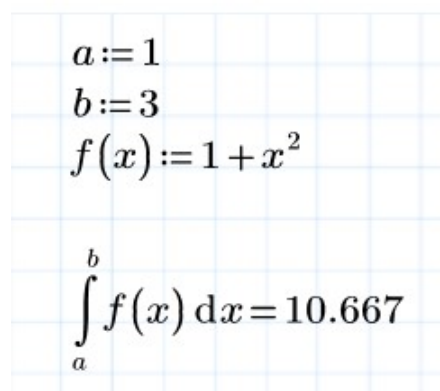
1. Вычислить определенный интеграл методами прямоугольников, трапеций и Симпсона и с использованием встроенной функции.
2. Вычислить производные табличной функции в узлах таблицы и промежуточных точках.

Порядок выполнения работы:

1. Численное интегрирование

1.1. Вычислим определенный интеграл методом прямоугольников.

Зададим в MathCAD подынтегральную функцию $f(x)$ и границы интегрирования a и b . Вычислим значение интеграла с помощью встроенной в MathCAD функции вычисления определенного интеграла (рис.4.1).



$$\begin{aligned}
 a &:= 1 \\
 b &:= 3 \\
 f(x) &:= 1 + x^2 \\
 \int_a^b f(x) dx &= 10.667
 \end{aligned}$$

Рис. 4.1. Вычисление определенного интеграла.

Рассмотрим интеграл как функцию $I = \int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=1}^n f(x_i + h/2)$, где h - ширина основания прямоугольников, площадь которых соответствует площади фигуры, ограниченной подынтегральной функцией и прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис.4.2) [1].

Определим количество прямоугольников n , необходимых для вычисления интеграла, исходя из заданной погрешности вычисления интеграла $\Delta I = 0.01$. Функция **ceil** позволяет округлить полученный результат (рис.4.3). Ширина основания h вычисляется по формуле $n = ((b - a) / h) + 1$.

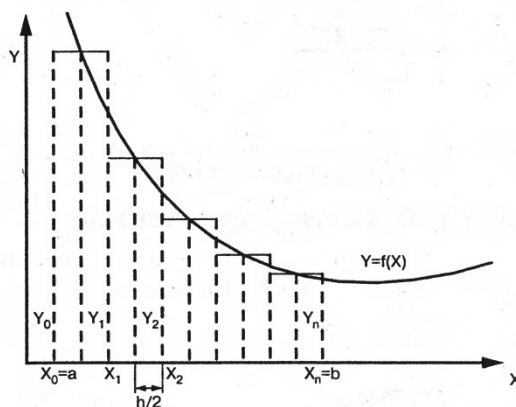


Рис. 4.2. Графическая интерпретация интегрирования по методу средних прямоугольников

$$\Delta I := 0.01$$

$$n1 := \text{ceil} \left(\frac{(b-a)}{\Delta I} \right)$$

$$n1 = 200$$

Рис.4.3. Определение количества прямоугольников.

После этого вычисляем интеграл с помощью программного модуля, который последовательно рассчитывает и складывает площади прямоугольников (рис.4.4). При условии, что интервал $[a, b]$ разбит на достаточно большое количество интервалов, результат вычисления получается аналогичным к результату вычисления с помощью встроенного оператора.

$$I_p(a, b, n1, f) := \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{(b-a)}{n1} \\ S \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n1 \\ \quad \begin{array}{l} x_i \leftarrow a + h \cdot i \\ S \leftarrow S + f\left(x_i - \frac{h}{2}\right) \end{array} \\ S \leftarrow S \cdot h \end{array}$$

$$I_p(a, b, n1, f) = 10.667$$

Рис. 4.4. Реализация метода прямоугольников и результат работы.

1.2. Вычислим интеграл методом трапеций.

В этом случае вместо площади прямоугольников под кривой, описывающей функцию $f(x)$, рассчитываются площади трапеций (рис. 4.5) [1].

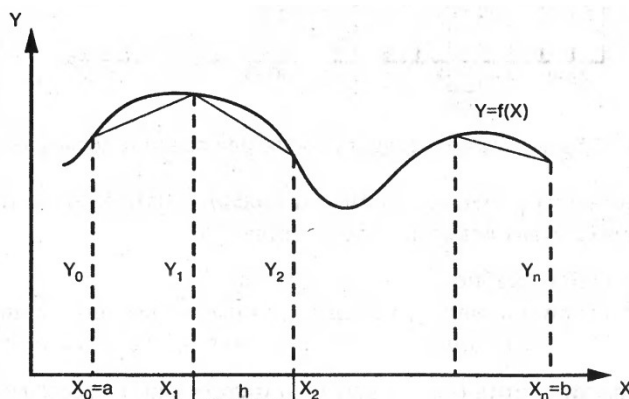


Рис. 4.5. Геометрическая интерпретация интегрирования по методу трапеций

Количество трапеций, необходимых для достижения заданной точности, рассчитывается исходя из выражения, приведенного ниже. Видно, что количество трапеций должно быть на порядок меньшим, чем количество прямоугольников (рис.4.6).

$$n2 := \text{ceil} \left(\sqrt{\frac{(b-a)^2}{\Delta I}} \right)$$

$$n2 = 20$$

Рис.4.6. Определение количества трапеций.

Вычисляем площадь трапеций с помощью формулы

$$I = \int_a^b f(x)dx = h \left((f(a) + f(b))/2 + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right), \quad \text{где } h = (b-a)/n \text{ - ширина основания трапеции.}$$

Программный модуль, реализующий это выражение, приведен ниже (рис.4.7).

$$It(a, b, n2, f) := \left\| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{(b-a)}{n2} \\ S \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1 .. n2 - 1 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} x_i \leftarrow a + h \cdot i \\ S \leftarrow S + f(x_i) \end{array} \right. \\ S \leftarrow h \cdot \left(\left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right) + S \right) \end{array} \right\|$$

$$It(a, b, n2, f) = 10.67$$

Рис. 4.7. Реализация метода трапеций и результат работы.

Полученный результат несколько отличается от результата, полученного при использовании встроенного в MathCAD алгоритма, но эта разница находится в пределах допуска.

1.3. Вычислим интеграл методом Симпсона.

В этом случае площадь фигуры задается совокупностью криволинейных трапеций (рис. 4.8), количество которых может быть определено из формулы, представленной на рис.4.9 [1].

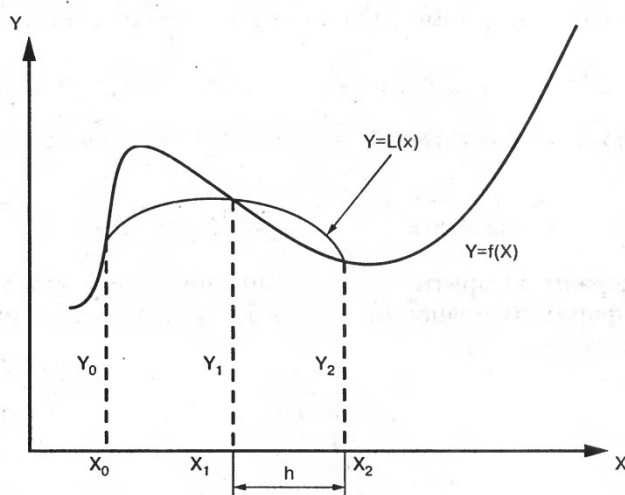


Рис. 4.8. Геометрическая интерпретация интегрирования по методу Симпсона.

$$n3 := \text{ceil} \left(\sqrt[4]{\frac{(b-a)^4}{\Delta I}} \right)$$

$$n3 = 7$$

Рис.4.9. Определение количества криволинейных трапеций.

Интеграл вычисляется по формуле

$$I = \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{6} (f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + f(b)) =$$

$$= \frac{h}{6} \left(f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} p f(x_i) \right)$$

Результат применения соответствующего вычислительного блока приведен ниже (рис.4.10).

$$\begin{aligned}
 I_s(a, b, n3, f) := & \left\| \begin{array}{l}
 h \leftarrow \frac{(b-a)}{n3} \\
 S \leftarrow f(a) + f(b) \\
 \text{for } i \in 0..n3-1 \\
 \left\| S \leftarrow S + 4 \cdot f\left(a + i \cdot h + \frac{h}{2}\right) \right\| \\
 \text{for } i \in 1..n3-1 \\
 \left\| S \leftarrow S + 2 \cdot f(a + i \cdot h) \right\| \\
 \frac{h}{6} \cdot S
 \end{array} \right\| \\
 I_s(a, b, n3, f) = & 10.667
 \end{aligned}$$

Рис.4.10. Реализация метода Симпсона и результат работы.

2. Численное дифференцирование

Пусть задана функция $y = 3x^5 + e^{3x}$ на интервале $x \in [-2; 2]$ с шагом $h=0.1$. Требуется найти производные от этой функции в узлах таблицы и для значения $x=0.05$, которое находится между двумя узлами.

Количество узлов таблицы с известными значениями x и y будет равно $n = ((b-a)/h) + 1$, а значения x можно задать как $x_i = a + h(i-1)$, $i = 1, 2, 3 \dots n$ (рис.4.11). Результаты представления табличной функции в MathCAD приведены ниже (рис.4.12).

$$\begin{aligned}
 a & := -2 & b & := 2 & h & := 0.1 \\
 n & := \frac{(b-a)}{h} \\
 n & = 40 \\
 i & := 1 .. (n+1) \\
 x_i & := a + h \cdot (i-1)
 \end{aligned}$$

Рис. 4.11. Задание аргумента.

$$y_i := 3 \cdot (x_i)^5 + e^{3 \cdot x_i}$$

$$x^T = [-2 \quad -1.9 \quad -1.8 \quad -1.7 \quad -1.6 \quad -1.5 \quad -1.4 \quad -1.3 \quad -1.2 \quad -1.1 \quad -1 \quad -0.9 \quad -0.8 \quad -0.7 \quad -0.6 \quad \dots]$$

$$y^T = [-95.998 \quad -74.28 \quad -56.683 \quad -42.59 \quad -31.449 \quad -22.77 \quad -16.12 \quad -11.119 \quad -7.438 \quad -4.795 \quad \dots]$$

Рис.4.12. Задание табличной функции.

Для вычисления производной табличной функции с помощью интерполяционной формулы Ньютона необходимо найти как минимум конечные разности 1-го, 2-го и 3-го порядков $\Delta y^{(1)} = y_{i+1} - y_i$, $\Delta y^{(2)} = \Delta y^{(1)}_{i+1} - \Delta y^{(1)}_i$, $\Delta y^{(3)} = \Delta y^{(2)}_{i+1} - \Delta y^{(2)}_i$. Для вычисления конечных разностей удобно использовать программный модуль, результатом применения которого является матрица [1], столбцы которой содержат конечные разности (рис.4.13, рис.4.14).

```

Δy := ||
      || for k ∈ 1..n
      || || Δk,1 ← yk+1 - yk
      ||
      || for j ∈ 2..3
      || || for i ∈ 1..(n+1)-j
      || || || Δi,j ← Δi+1,j-1 - Δi,j-1
      || ||
      || Δ
  
```

Рис.4.13. Реализация метода конечных разностей.

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 21.718 & -4.121 & 0.617 \\ 17.597 & -3.504 & 0.552 \\ 14.093 & -2.952 & 0.491 \\ 11.141 & -2.462 & 0.433 \\ 8.679 & -2.028 & 0.379 \\ 6.65 & -1.649 & 0.329 \\ 5.001 & -1.32 & 0.282 \\ 3.681 & -1.038 & 0.239 \\ 2.643 & -0.799 & 0.2 \\ 1.844 & -0.598 & 0.164 \\ 1.246 & -0.434 & 0.133 \\ 0.812 & -0.301 & 0.105 \\ & & \vdots \end{bmatrix}$$

Рис.4.14. Результат определения конечных разностей.

Для вычисления производной в узлах таблицы применяется интерполяционная функция Ньютона $y'_i = (\Delta y_i^{(1)} - \Delta y_i^{(2)} / 2 + \Delta y_i^{(3)} / 3) / h$.

Результат ее применения и сравнение с результатами вычисления производной с помощью встроенного в MathCAD оператора дифференцирования приведен ниже. Применение интерполяционной функции дает довольно большую погрешность, но сама процедура вычисления довольно проста (рис.4.15) [1,2].

$$\begin{aligned}
 & i := 1 .. n \\
 & ydifnut_i := \left(\frac{1}{h} \right) \cdot \left(\Delta y_{i,1} - \left(\frac{\Delta y_{i,2}}{2} \right) + \left(\frac{\Delta y_{i,3}}{3} \right) \right) \\
 & ydif(x) := \frac{d}{dx} (3 \cdot (x)^5 + e^{3 \cdot x}) \\
 & ydiff_i := ydif(x_i) \\
 & ydiff^T = [240.007 \ 195.492 \ 157.478 \ 125.3 \ 98.329 \ 75.971 \ 57.669 \ 42.902 \ 31.186 \ \dots] \\
 & ydifnut^T = [239.838 \ 195.331 \ 157.326 \ 125.158 \ 98.196 \ 75.847 \ 57.554 \ 42.797 \ \dots]
 \end{aligned}$$

Рис. 4.15. Реализация и результат расчета интерполяционной функции Ньютона.

Для расчета производной табличной функции в точке, находящейся между узлами табличной функции, можно использовать вариант интерполяционной функции в виде $y' = (\Delta y^{(1)} + (2t - 1)\Delta y^{(2)} / 2 + (3t^2 - 6t + 2)\Delta y^{(3)} / 6) / h$, где $t = (x - x_0) / h$, x - точка, в которой ищется производная, x_0 - значение переменной в узле таблицы, находящемся слева от x . Вычислим производную в точке $x = 0.05$. Ближайшее слева к этому значению табличное значение функции $x_0 = 0$. Номер этого узла равен $k = 21$. Подставляя в формулу конечные разности с этим индексом, получаем значение производной в точке x и сравниваем с результатом, полученным с помощью встроенного оператора (рис.4.16).

$$\begin{aligned}
 x1 &:= 0.05 & k &:= 21 \\
 x0 &:= x_k = 0 & t &:= \frac{(x1 - x0)}{h} \\
 ydifnutx &:= \left(\frac{1}{h} \right) \cdot \left(\Delta y_{k,1} + \frac{\Delta y_{k,2} \cdot (2 \cdot t - 1)}{2} + \frac{\Delta y_{k,3} \cdot (3 \cdot t^2 - 6 \cdot t + 2)}{6} \right) \\
 ydifnutx &= 3.479 \\
 ydif(x1) &= 3.486
 \end{aligned}$$

Рис.4.16. Вычисление производной в заданной точке с использованием формулы Ньютона.

Также для вычисления производной в точках между узлами таблицы, можно использовать интерполяционную формулу Лагранжа $y' = (y_k(2t - 3)/2 - y_{k+1}(2t - 2) + y_{k+2}(2t - 1)/2)/h$, где y_k - значение табличной функции, соответствующее точке x_0 . Пример вычисления производной в точке $x = 0.05$ приведен ниже (рис.4.17).

$$\begin{aligned}
 ydiflag &:= \left(\frac{1}{h} \right) \cdot \left(\left(y_k \cdot \frac{(2 \cdot t - 3)}{2} \right) - y_{k+1} \cdot (2 \cdot t - 2) + y_{k+2} \cdot \frac{(2 \cdot t - 1)}{2} \right) \\
 ydiflag &= 3.499
 \end{aligned}$$

Рис.4.17. Вычисление производной в заданной точке с использованием формулы Лагранжа.

Варианты заданий:

1. Численное интегрирование

Вычислить определенный интеграл от заданной функции на интервале $[a;b]$ с погрешностью 0.01.

№ вар.	Функция	Отрезок [a;b]	№ вар.	Функция	Отрезок [a;b]
1.	$f(x) = \sqrt{x^4 - x^3} + 8$	$a = 0, b = 3.2$	2.	$f(x) = x^2 \ln x$	$a=1, b=2$
3.	$f(x) = \ln(x)$	$a = 1, b = 3$	4.	$f(x) = x^2(x+1)^{-2}$	$a=1, b=4$
5.	$f(x) = 2\sin^3(x)$	$a = 0, b = 1$	6.	$f(x) = x \cos 2x$	$a=0, b=1$
7.	$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 5x + 1}$	$a = 1, b = 3$	8.	$f(x) = \sqrt{x} \ln x$	$a=1, b=4$
9.	$f(x) = 1 + \cos(x)$	$a = 0, b = 4.3$	10.	$f(x) = x^2 \ln x$	$a=1, b=2$

№ вар.	Функция	Отрезок [a;b]	№ вар.	Функция	Отрезок [a;b]
11.	$f(x) = x - x^2$	$a = 0, b = 10$	12.	$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$	$a = -0.5, b = 0.5$
13.	$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\ln x}$	$a = 2, b = 3$	14.	$f(x) = e^{-x} \cos x$	$a = 0, b = 2$
15.	$f(x) = x^4(1+x^2)^{-1}$	$a = 1, b = 2$	16.	$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$	$a = 1, b = 4$
17.	$f(x) = x^2 e^{-2x}$	$a = 0, b = 1.6$	18.	$f(x) = e^{-\sqrt{x}}$	$a = 1, b = 4$
19.	$f(x) = x^{0.5} \ln x$	$a = 1, b = 3$	20.	$f(x) = x \arctan x$	$a = 0, b = 1$
21.	$f(x) = x \sin 3x$	$a = 0, b = 1$	22.	$f(x) = x \arccos x$	$a = -0.5, b = 0.5$
23.	$f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \lg(x+1)$	$a = 0.1, b = 1.1$	24.	$f(x) = \lg(x) - 1$	$a = 1, b = 2.5$

2. Численное дифференцирование

Таблично задать на указанном интервале функцию и найти ее производные в узлах таблицы и точках, находящихся посередине между узлами таблицы. Для проведения операции дифференцирования заданный интервал разбить на 20 участков.

№ вар.	Функция	Отрезок [a;b]	№ вар.	Функция	Отрезок [a;b]
1.	$f(x) = x^2 \cos x$	[0;1]	2.	$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$	$\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$
3.	$f(x) = e^x \sin x$	[1;2]	4.	$f(x) = e^{-x^2}$	[0;1]
5.	$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$	[0;1]	6.	$f(x) = \sin(0.01x^2)$	$\left[0; 10\sqrt{\pi}\right]$
7.	$f(x) = x\sqrt{1+x^2}$	[-1;0]	8.	$f(x) = \frac{e^x}{x}$	[0;10]
9.	$f(x) = \sin(x+x^2)$	[0;1]	10.	$f(x) = \ln(2x)$	[1;3]
11.	$f(x) = \arcsin^2 x$	$\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$	12.	$f(x) = \sqrt{(x-1)(x^2+1)}$	[-1;1]
13.	$f(x) = \frac{1}{1+\sin x}$	$\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$	14.	$f(x) = \sin 2x + \cos 3x$	$\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$
15.	$f(x) = \sin 2x \cdot \cos x$	$\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$	16.	$f(x) = \ln(x+1)$	[1;2]
17.	$f(x) = \sqrt{4-x^2}$	[0;1]	18.	$f(x) = (x^2+1)e^x$	[1;2]
19.	$f(x) = x^3 \ln x$	[2;3]	20.	$f(x) = \cos 2x + \sin 3x$	$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

№ вар.	Функция	Отрезок [a;b]	№ вар.	Функция	Отрезок [a;b]
21.	$f(x) = x \arctan x$	[0;1]	22.	$f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 2}$	[0;1]
23.	$f(x) = x^2 - 1 $	$\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$	24.	$f(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$	$\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы и задание для работы.
3. Текст программы с комментариями.
4. Результаты вычисления и полученные графики.
5. Выводы по проделанной работе.

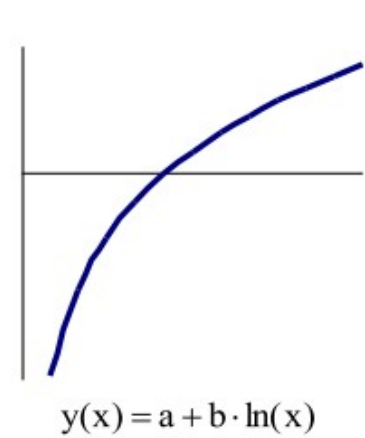
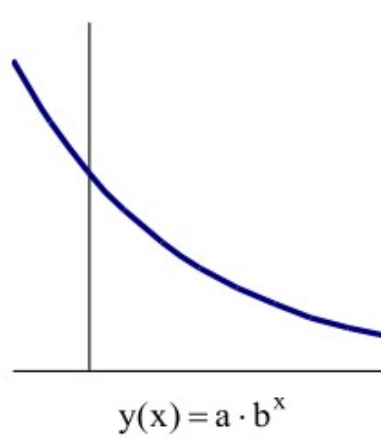
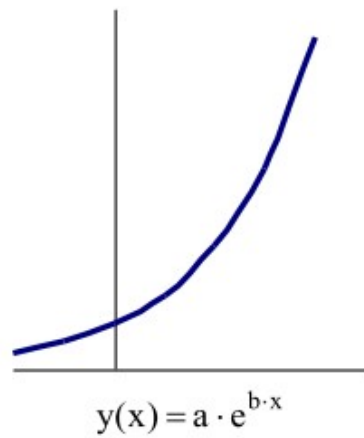
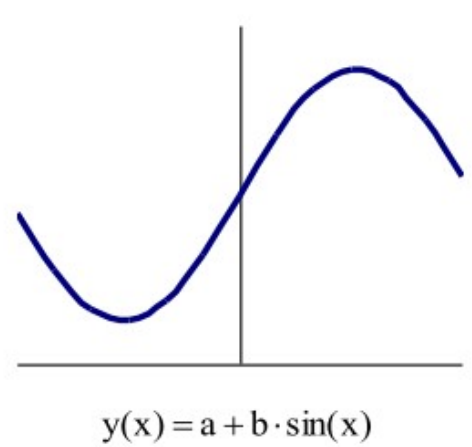
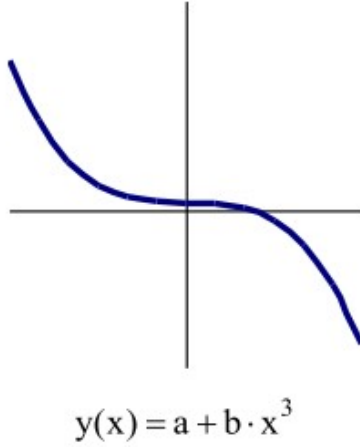
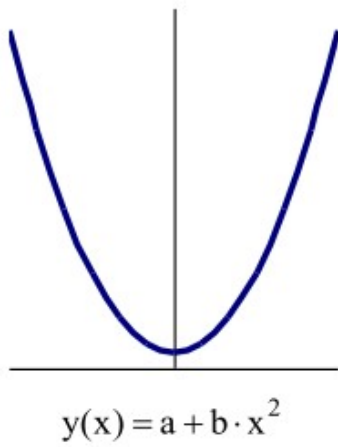
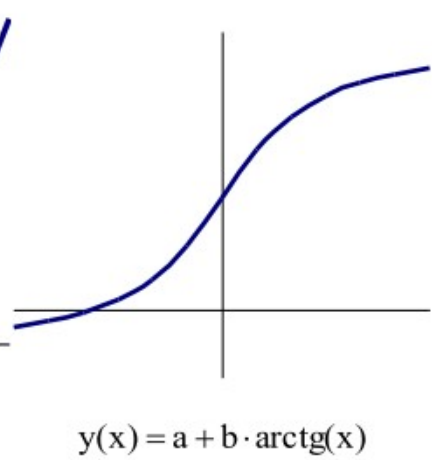
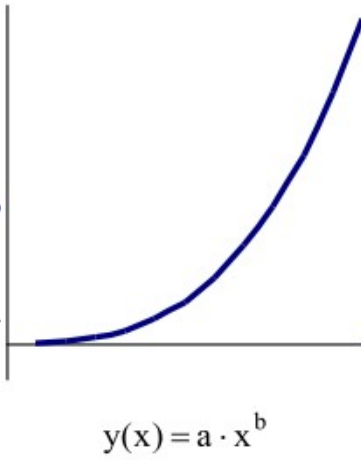
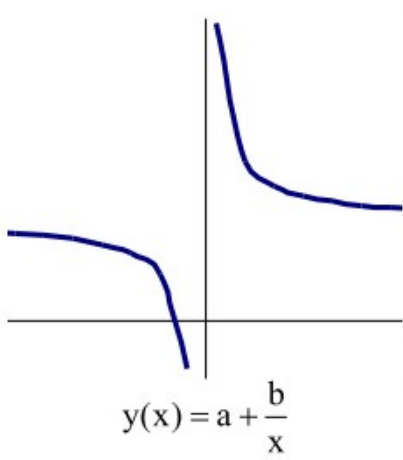
Контрольные вопросы:

1. Кратко сформулируйте геометрический смысл определенного интеграла.
2. Кратко сформулируйте физический смысл определенного интеграла.
3. Перечислите, какие методы интегрирования были использованы в работе.
4. Сравните результаты вычисления определенного интеграла различными методами в работе.
5. Дайте определение производной.
6. Кратко сформулируйте геометрический смысл производной.
7. Кратко сформулируйте физический смысл производной.
8. Кратко опишите алгоритм нахождения значений производной функции, заданной таблично, в узловых точках и в промежуточной точке методами численного дифференцирования.
9. Сравните результаты численного дифференцирования различными методами в работе.

Литература

1. Основы вычислительной математики :/ Б. П. Демидович, И. А. Марон .— Изд. 7-е, стер. — СПб.: Издательство "Лань", 2009 .— 664 с.
2. Вычислительная математика в примерах и задачах/ Н. В. Копченова, И. А. Марон .— Изд. 3-е, стер. — СПб.: Издательство "Лань", 2009 .— 366 с.
3. Краткий курс вычислительной математики/ Э. В. Денисова, А. В. Кучер; СПбНИУ ИТМО.— СПб. : НИУ ИТМО, 2013 .— 89 с.
4. Практикум по работе в математическом пакете MathCAD/ С.В. Рыков, И.В. Кудрявцева, С.А. Рыков, В.А. Рыков. - СПбНИУ ИТМО.— СПб. : НИУ ИТМО, 2015. - 87 с.
5. Основы применения пакета MathCAD в инженерных расчетах: пособие к выполнению практических работ по дисциплине "Введение в специальность" / А. Н. Иванов, Ю. А. Каракулев ;СПбГУ ИТМО.— СПб. : СПбГУ ИТМО, 2010 .— 79 с

ПРИЛОЖЕНИЕ
Графики нелинейных зависимостей



Ежова Ксения Викторовна
Острун Алексей Борисович
Иванов Александр Николаевич

Основы численных методов

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверский пр., 49