МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Л.С. Лисицына

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 09.03.04, 15.03.06, 24.03.02, 27.03.04, 44.03.04
в качестве учебно-методического пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования бакалавриата,

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург
2020

Лисицына Л.С., Основы теории нечетких множеств– СПб: Университет ИТМО, 2020. – 74 с.

Рецензент(ы):
Селина Елена Георгиевна, преподаватель (квалификационная категория "преподаватель") факультета программной инженерии и компьютерной техники, Университета ИТМО.

Пособие содержит теоретический материал по основам современной теории множеств (теории нечетких множеств по Заде), проиллюстрированный многочисленными примерами. Пособие служит дополнительным материалом к лекциям по дискретной математике и предназначено для закрепления знаний и умений на практике. Пособие содержит вопросы и задания для самостоятельной работы студентов, выполнение которых поможет подготовиться к текущему и рубежному контролю в 1-ом модуле дисциплины "Дискретная математика" (решение практических задач, компьютерный тест, контрольная работа).

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Теория множеств является базовым разделом дискретной математики, понимание других ее разделов (теории графов, теории сетей, теории автоматов и т.д.) основывается на теоретико-множественном представлении процессов моделирования объектов окружающего мира. В своем развитии теория множеств прошла следующие три этапа.

Первый этап начался в конце 19-го века, когда немецкий математик **Георг Кант** обобщил результаты исследований и сформулировал ее основы (1872-1884 гг.). Сегодня эта теория получила название **наивной теории множеств**.

Второй этап стартовал в начале 20-го века, когда в 1908 г. выдающиеся ученые **Бертран Рассел** и **Эрнст Цермело** независимо друг от друга провели исследования по разрешению противоречий в теории множеств Канта (парадокс Рассела). Они предложили набор аксиом (утверждений, верность которых не подвергалась сомнению) для того, чтобы на их основе доказывать теоремы и дальше развивать теорию множеств. Сегодня эта теория получила название **аксиоматической теории множеств**.

Начало третьего этапа связано с публикацией в 1965 г. статьи «Fuzzy Sets» [1] американского математика **Лотфи Заде**, посвященной дальнейшему развитию теории множеств. После выхода этой статьи стало очевидно, что предыдущее представление о множествах является всего лишь частным случаем нечетких множеств (их сегодня называют четкими множествами). Сегодня эта теория получила название **теории нечетких множеств**. Следует заметить, что иногда используют и другие термины для таких множеств, например, *расплывчатые, размытые, пушистые* множества.

Содержание данного пособия посвящено основам теории нечетких множеств и знакомит читателей с основными понятиями и положениями этой теории. В этом пособии Вы найдете большое количество примеров, поясняющих их применение на практике. Выполнение предложенных заданий поможет Вам лучше усвоить изложенный в пособии теоретический материал. При подготовке пособия были использованы учебники по дискретной математике [2-6] .

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Множество – это простейшее математическое понятие, т.е. не имеет определения, а объясняется лишь примерами. Например, множество точек на доске, книг на полке, студентов в группе и т.п. Под множеством понимают совокупность объектов любой природы (точек, книг, студентов), называемых **элементами** данного множества, обладающих каким-либо общим для этого множества свойством (нахождение на доске, на полке, в составе группы). Основоположник теории множеств Г. Кант так трактовал понятие множества: «Многое, мыслимое как единое целое».

Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита, например: A, B, C и т.д., а его элементы – соответствующими прописными буквами, например: a, b, c и т.д. Часто используют индексированные имена множеств и их элементов, например: A_1, B_1, C_1 и т.д., a_1, a_2, a_3 и т.д.

1.1 Способы представления четких множеств

Для представления четких множеств используются следующие три способа.

1). **Путем перечисления всех элементов множества**. Формат записи $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, где A – имя множества, $a_1, a_2, ..., a_n$ – имена элементов этого множества, n – количество элементов в множестве. При этом каждый элемент в списке является оригинальным (без повтора).

2). **Путем определения характеристического свойства элементов множества**. Формат записи $A = \{a : P(a)\}$, где A – имя множества, a – обобщенное имя элемента, $P(a)$ – предикат, который является логическим условием или процедурой для проверки того, принадлежит ли данный элемент этому множеству или нет.

3). **Графический способ.** Для этого используются круги Эйлера или диаграммы Венна. Множество представляется кругом, в котором любая точка внутри этого круга представляет его элемент, а вне этого круга – элемент, не принадлежащий этому множеству. Ниже на рисунке 1.1 множество A

представлено кругом Эйлера. Здесь точка x принадлежит множеству A, а точка y не принадлежит множеству A. Формальная запись принадлежности – $x \in A$ и $y \notin A$.

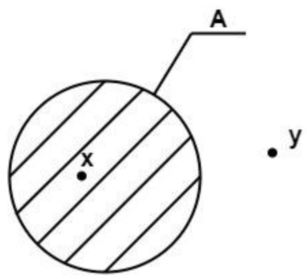


Рисунок 1.1 – Пример графического представления четкого множества

1.2 Мощность множества, виды множеств

Мощность или объемность множества $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ - это числовая характеристика, определяемая количеством элементов этого множества. Мощность обозначается прямыми скобками, т.е. $|A| = n$.

Все множества можно разделить на следующие виды.

1). Если $n = 0$, то множество называется *пустым*. Для обозначения пустого множества используется специальный символ ∅, например, $A = \varnothing$.

2). Если $n < \infty$, то и множество называется *конечным*.

3). Если $n \to \infty$, то и множество называется *бесконечным счетным* или *бесконечным несчетным* (для непрерывных множеств).

4). Конечные и бесконечные множества делятся на *упорядоченные* и *неупорядоченные* множества. В упорядоченных множествах в отличие от неупорядоченных множеств порядок перечисления элементов важен, каждый элемент занимает в списке вполне определенное место.

1.3 Понятие универсального множества

Универсальное множество – это четкое множество, которое используется для построения любых других множеств. Для универсального множества принято использовать следующую запись: $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$. Универсальное множество можно использовать в следующих аспектах.

1). Всеобъемлющее универсальное множество, включающее все объекты окружающего мира.

2). Универсальное множество в рамках решения некоторой практической задачи (перед решением задачи необходимо обязательно определить это множество).

1.4 Функция принадлежности, способы ее вычисления

Понятие функции принадлежности ввел основоположник теории нечетких множеств Л. Заде [1,2]. Оно принципиальным образом отличается от понятия характеристического свойства элементов, которое использовалось ранее для построения четких множеств.

Функция принадлежности устанавливает соответствие между элементами универсального множества $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ и числовыми значениями их *степеней принадлежности* некоторому новому множеству A $\mu_A(u)$ на отрезке [0,1]. Значение функции принадлежности $\mu_A(u)$ для некоторого элемента $u \in U$ показывает, в какой мере, в какой степени этот элемент принадлежит множеству A.

Если степени принадлежности $\mu_A(u)$ принимают только два значения 0 или 1, то множество A является четким, в противном случае это множество является нечетким (степени принадлежности могут принимать любые значения на отрезке [0,1], например, 0,2 или 0,8).

Для вычисления значений функции принадлежности при построении множества используются следующие способы.

1). **Прямые (экспертные) методы**. В этих методов решение о степенях принадлежности принимает эксперт, который тем самым выражает свое мнение на основе имеющегося у него опыта.

2). **Косвенные методы**. В этих методах степени принадлежности определяются на основе измерений свойств элементов.

Следует заметить, что использование различных методов приводит к установлению вполне конкретных (неслучайных) числовых значений степеней принадлежности.

1.5 Способы представления нечетких множеств

Для представления нечетких множеств используются следующие три способа.

1). **Путем перечисления всех элементов множества**. Формат записи $A = \mu_A(u_1)/u_1 + \mu_A(u_2)/u_2 + ... + \mu_A(u_n)/u_n$, где A – имя множества, $u_1, u_2, ..., u_n$ – имена элементов универсального множества, на котором построено множество A, $\mu_A(u_1), \mu_A(u_2), ..., \mu_A(u_n)$ - степени их принадлежности к множеству A, n – количество элементов в универсальном множестве. Знак «+» в этой форме означает не суммирование, а объединение элементов в множество. При перечислении опускаются те элементы универсального множества, степени принадлежности которых равны 0. Часто используют следующую свернутую форму записи: $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$.

2). **Путем определения функции принадлежности**. Формат записи $\mu_A(u): P(u)$, где A – имя множества, u – обобщенное имя элемента универсального множества, на котором построено множество A, $P(u)$ – предикат, который является логическим условием или процедурой для оценки того, в какой степени данный элемент принадлежит множеству A.

3). **Графический способ.** Для этого используется *диаграмма Заде*. Диаграмма Заде нечеткого множества A представляет собой фигуру под ломаной линией, построенной на основе функции принадлежности $\mu_A(u)$. На рисунке 1.2 приведен пример диаграммы Заде, в которой представлено нечеткое множество $A = 0{,}2/u_1 + 0{,}5/u_2 + 1/u_3 + 0{,}6/u_4 + 0{,}8/u_5 + 0{,}2/u_8$, построенное на основе универсального множества $U = \{u_1,\ldots,u_8\}$. Значение функции принадлежности 0,5 является самым нечетким и определяет *линию перегиба* диаграммы. Чем ближе степень принадлежности некоторого элемента к линии перегиба, тем более нечетким является этот элемент. Чем ближе степень принадлежности некоторого элемента к 0 или 1, тем более четким является этот элемент. Для примера, приведенного на рис. 1.2, самым нечетким элементом в множестве A является u_2, а самыми четкими – u_3, u_6, u_7.

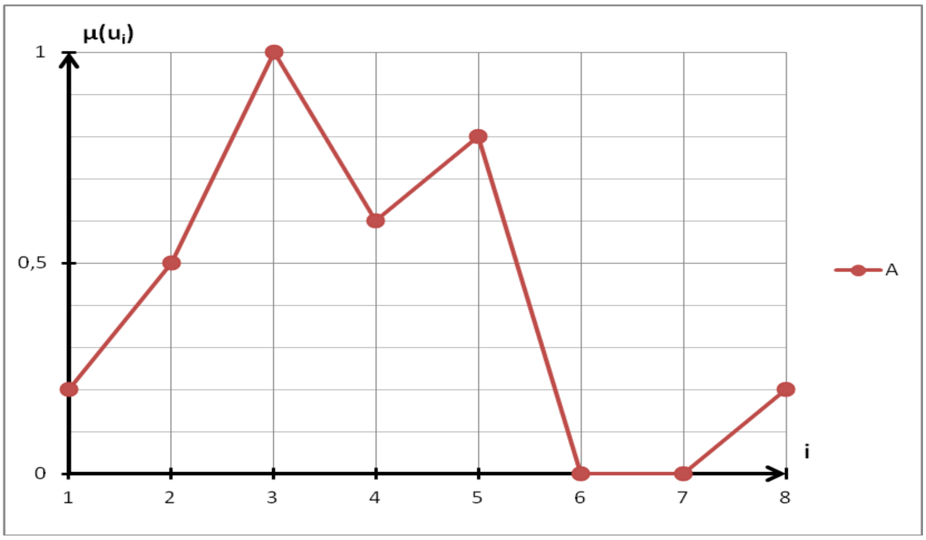


Рисунок 1.2 – Пример графического представления нечеткого множества

Пример 1.1. Задано универсальное множество $U = \{1,2,\ldots,10\}$. На нем надо построить два множества A и X, которые представлены следующими функциями принадлежности: $\mu_A(u): u < 7$, $\mu_X(u): u$ немного меньше, чем 7.

Функции принадлежности для множеств A и X являются логическими условиями, их проверка устанавливает степени принадлежности для каждого элемента заданного универсального множества U. Причем первое условие является четким (да или нет), а второе условие – нечетким, что требует применение того или иного метода вычисления степеней принадлежности. Например, некоторый эксперт выразил свое мнение относительно степеней принадлежности так, как показано в таблице ниже.

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_A(u)$	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
$\mu_X(u)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0	0	0	0

Перечислим элементы этих множеств с использованием соответствующих форматов записи.

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$X = 0{,}1/2 + 0{,}3/3 + 0{,}5/4 + 0{,}7/5 + 0{,}9/6$$

1.6 Нормирование нечетких множеств

Нечеткое множество $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$ называется **нормальным**, если в нем есть хотя бы один элемент универсального множества со степенью принадлежности 1 (т.е. $\exists u \in U : \mu_A(u) = 1$), в противном случае множество A называется **субнормальным**.

Всякое субнормальное множество A можно привести к виду нормального множества A' с помощью следующей **операции нормирования**

$$\forall u \in U : \mu_{A'}(u) = \frac{\mu_A(u)}{MAX}, \text{ где } MAX = \max_{i=1}^{n}(\mu_A(u_i)) .$$

Пример 1.2. Множество X из примера 1.1 является субнормальным, для его нормирования определим вначале $MAX = \max_{i=1}^{10}(\mu_A(u_i)) = 0{,}9$ и построим нормальное множество X'.

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_X(u)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	**0,9**	0	0	0	0
$\mu_{X'}(u)$	0	1/9	1/3	5/9	7/9	1	0	0	0	0

1.7 Носитель нечеткого множества

Носителем или **суппортом** нечеткого множества $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$ называется четкое множество supp(A), которое состоит только из таких элементов универсального множества U, для которых выполняется условие $\mu_A(u) > 0$.

Пример 1.3. Множество $X = 0{,}1/2 + 0{,}3/3 + 0{,}5/4 + 0{,}7/5 + 0{,}9/6$ из примера 1.1 построено на универсальном множестве $U = \{1,2,\ldots,10\}$. Тогда его носителем будет $\mathrm{supp}(A) = \{2,3,4,5,6\}$.

1.8 Срезы нечеткого множества

Пусть задано некоторое число $0 < \alpha \le 1$. **Множеством** α **- уровня** или α **-срезом** нечеткого множества $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$ называется четкое множество A_α, которое состоит только из таких элементов универсального множества U, для которых выполняется условие $\mu_A(u) \geq \alpha$.

Пример 1.4. Множество $X = 0{,}1/2 + 0{,}3/3 + 0{,}5/4 + 0{,}7/5 + 0{,}9/6$ построено на универсальном множестве $U = \{1,2,\ldots,10\}$. Тогда его α-срезом с $\alpha = 0{,}3$ будет множество $X_{0,3} = \{3,4,5,6\}$, а α-срезом с $\alpha = 0{,}7$ – множество $X_{0,7} = \{5,6\}$.

1.9 Отношения между множествами

Пусть на универсальном множестве U построены два множества $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$ и $B = \sum_{i=1}^{n} \mu_B(u_i)/u_i$. Говорят, что множество B **включено** в множество A (B является **подмножеством** A) тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\forall u \in U : \mu_A(u) \geq \mu_B(u). \tag{1.1}$$

Это условие является нестрогим и записывается как $B \subseteq A$.

Примечание.

1). Если $\forall u \in U : \mu_A(u) > \mu_B(u)$, то множество B строго включено в A и является его **собственным подмножеством**. В этом случае следует использовать запись $B \subset A$.

2). Если $\forall u \in U : \mu_A(u) = \mu_B(u)$, то множества B и A **равны между собой** (частный случай отношения включения). В этом случае следует использовать запись $B = A$.

3). Любое множество, построенное на универсальном множестве U, является его подмножеством.

4). Диаграмма Заде множества *не ниже* диаграммы любого его подмножества.

5). Для двух срезов нечеткого множества A верно следующее утверждение

$$\alpha_1 > \alpha_2 \Rightarrow A_{\alpha_1} \subseteq A_{\alpha_2}. \qquad (1.2)$$

Пример 1.5. Множество $X = 0{,}1/2 + 0{,}3/3 + 0{,}5/4 + 0{,}7/5 + 0{,}9/6$ построено на универсальном множестве $U = \{1{,}2{,}\ldots{,}10\}$. Тогда множества Y и Z в таблице ниже являются его подмножествами (выполняется условие (1.1)), причем Z является собственным подмножеством, т.е. $Y \subseteq X$ и $Z \subset X$.

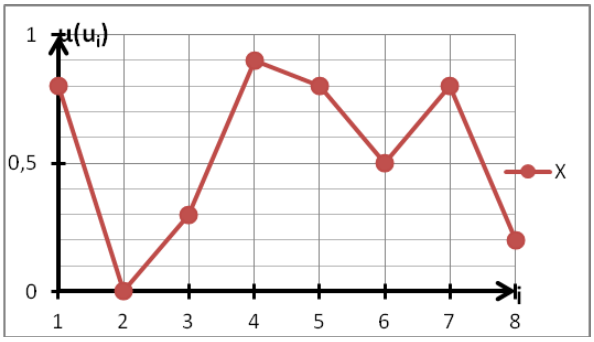
u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_X(u)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0	0	0	0
$\mu_Y(u)$	0	0,1	0,3	0,4	0,5	0,7	0	0	0	0
$\mu_Z(u)$	0	0	0,1	0,3	0,5	0,6	0	0	0	0

Пример 1.6. Множество $X = 0{,}1/2 + 0{,}3/3 + 0{,}5/4 + 0{,}7/5 + 0{,}9/6$ построено на универсальном множестве $U = \{1{,}2{,}\ldots{,}10\}$. Построим его срезы по условию $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$. Например, $X_{0,7} = \{5{,}6\}$, $X_{0,3} = \{3{,}4{,}5{,}6\}$, $X_{0,2} = \{3{,}4{,}5{,}6\}$. Очевидно, что в соответствии с условием (1.2) $X_{0,7} \subseteq X_{0,3} \subseteq X_{0,2}$, причем в этом примере $X_{0,7} \subset X_{0,3}$ и $X_{0,7} \subset X_{0,2}$, а $X_{0,2} = X_{0,3}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ТЕМЕ № 1

1. Задана следующая фраза: **Клиент всегда прав!** Построено множество A = {a: a – буква русского алфавита в этой фразе}. Мощность этого множества $|A| =$

2. На рисунке ниже приведена диаграмма Заде нечеткого множества X, построенного на основе универсального множества $U = \{u_1, ..., u_8\}$.

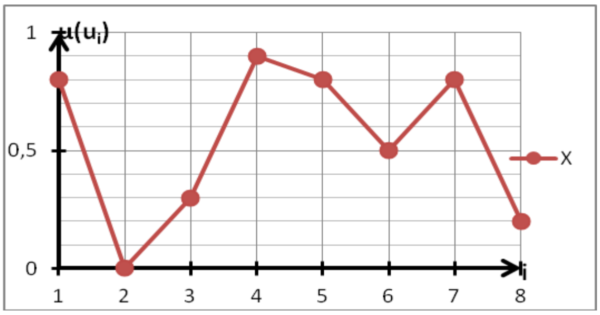


Какая запись этого множества путем перечисления его элементов является правильной?

   a. $X = 0{,}8/u_1 + 0/u_2 + 0{,}3/u_3 + 0{,}9/u_4 + 0{,}8/u_5 + 0{,}5/u_6 + 0{,}8/u_7 + 0{,}2/u_8$
   b. $X = 0{,}8/u_1 + 0{,}3/u_3 + 0{,}9/u_4 + 0{,}8/u_5 + 0{,}5/u_6 + 0{,}8/u_7 + 0{,}2/u_8$
   c. $X = \{u_1, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$

3. Какие из перечисленных ниже нечетких множеств являются нормальными?
   a. $0{,}8/u_1 + 0{,}3/u_3 + 0{,}9/u_4 + 0{,}8/u_5 + 0{,}5/u_6 + 0{,}8/u_7 + 0{,}2/u_8$
   b. $1/u_1 + 0{,}5/u_2 + 0{,}6/u_3 + 0{,}9/u_4 + 1/u_5 + 0{,}5/u_6 + 0{,}8/u_7 + 1/u_8$
   c. $0{,}8/u_1 + 1/u_2 + 0{,}3/u_3 + 0{,}9/u_4 + 0{,}8/u_5 + 0{,}5/u_6 + 0{,}8/u_7 + 0{,}2/u_8$
   d. $0{,}3/u_1 + 0{,}5/u_6 + 0{,}8/u_7$

4. На рисунке ниже приведена диаграмма Заде нечеткого множества X, построенного на основе универсального множества $U = \{u_1, ..., u_8\}$.



Какое из перечисленных множеств является его носителем?

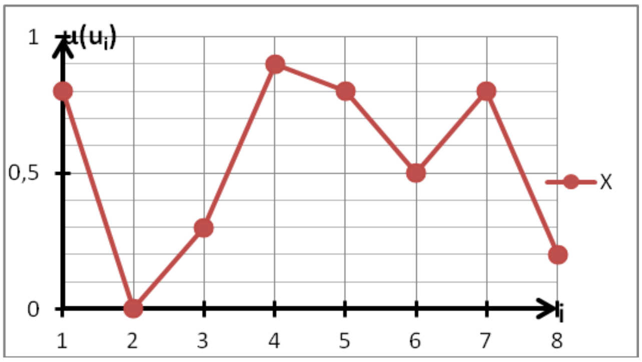
a. $0{,}8/u_1 + 0/u_2 + 0{,}3/u_3 + 0{,}9/u_4 + 0{,}8/u_5 + 0{,}5/u_6 + 0{,}8/u_7 + 0{,}2/u_8$

b. $0{,}8/u_1 + 0{,}3/u_3 + 0{,}9/u_4 + 0{,}8/u_5 + 0{,}5/u_6 + 0{,}8/u_7 + 0{,}2/u_8$

c. $\{u_1, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$

d. $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$

5. На рисунке ниже приведена диаграмма Заде нечеткого множества X, построенного на основе универсального множества $U = \{u_1, ..., u_8\}$.



Для него построен срез $X_\alpha = \{u_1, u_4, u_5, u_7\}$ с уровнем $\alpha =$

6. На универсальном множестве $U = \{u_1, ..., u_8\}$ построено нечеткое множество $X = 0{,}8/u_1 + 0{,}3/u_3 + 0{,}9/u_4 + 0{,}8/u_5 + 0{,}5/u_6 + 0{,}8/u_7 + 0{,}2/u_8$.
Какое множество является для него собственным подмножеством?

a. $0{,}8/u_1 + 0{,}3/u_3 + 0{,}9/u_4 + 0{,}8/u_5 + 0{,}5/u_6 + 0{,}8/u_7 + 0{,}2/u_8$

b. $0{,}1/u_3 + 0{,}5/u_5 + 0{,}6/u_7 + 0{,}1/u_8$

c. $1/u_1 + 0{,}6/u_3 + 1/u_4 + 0{,}9/u_5 + 1/u_6 + 1/u_7 + 0{,}4/u_8$

d. $0{,}8/u_1 + 0{,}1/u_3 + 0{,}6/u_4 + 0{,}7/u_5 + 0{,}4/u_6 + 0{,}7/u_7$

2. СРАВНЕНИЕ МНОЖЕСТВ ПО НЕЧЕТКОСТИ, МЕТРИКИ

Для сравнения множеств по нечеткости используются меры и индексы нечеткости множеств, которые базируются на понятиях расстояния между множествами. В математике способ определения расстояния между объектами любой природы называется метрикой. Рассмотрим далее две наиболее распространенные на практике метрики – линейная метрика (L) и евклидова метрика ($\mathcal{E}$).

2.1 Расстояния между множествами

Пусть имеются два множества $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$ и $B = \sum_{i=1}^{n} \mu_B(u_i)/u_i$. **Расстояние между множествами** в линейной метрике вычисляется по формуле

$$d^L(A,B) = \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_A(u_i) - \mu_B(u_i) \right|, \qquad (2.1)$$

а расстояние в евклидовой метрике – по формуле

$$d^{\varepsilon}(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(u_i) - \mu_B(u_i))^2}. \qquad (2.2)$$

Расстояния между множествами $d(A,B)$ в любой метрике обладают следующими свойствами.

1). Неотрицательность расстояний $d(A,B) \geq 0$ ($d(A,B) = 0$, если $A = B$).

2). Симметричность расстояний $d(A,B) = d(B,A)$.

3). Правило треугольника для расстояний $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$.

Пример 2.1. Пусть в универсальном множестве $U = \{u_1,...,u_5\}$ построены множества $X = 0{,}1/u_1 + 1/u_3 + 0{,}9/u_4 + 1/u_5$ и $Y = 0{,}2/u_2 + 0{,}8/u_3 + 1/u_4 + 0{,}5/u_5$. Тогда в соответствии с формулами (2.1) и (2.2):

$$d^L(X,Y) = \sum_{i=1}^{5} \left|\mu_X(u_i) - \mu_Y(u_i)\right| = |0{,}1-0| + |0-0{,}2| + |1-0{,}8| + |0{,}9-1| + |1-0{,}5| = 1{,}1$$

$$d^\varepsilon(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} (\mu_X(u_i) - \mu_Y(u_i))^2} = \sqrt{(0{,}1-0)^2 + (0-0{,}2)^2 + (1-0{,}8)^2 + (0{,}9-1)^2 + (1-0{,}5)^2} \approx 0{,}59$$

2.2 Меры нечеткости

Мера нечеткости множества $D(A)$ определяется расстоянием этого множества до ближайшего четкого к нему множества A_0, т.е $D(A) = d(A, A_0)$. Множество A_0 строится на основе множества A по следующему правилу:

$$\forall u \in U : \mu_{A_0}(u) = \begin{cases} 1(\mu_A\ (u) > 0{,}5) \\ 0(\mu_A\ (u) \le 0{,}5) \end{cases}$$

Мера нечеткости множества в линейной метрике рассчитывается по формуле

$$D^L(A) = \sum_{i=1}^{n} \left|\mu_A(u_i) - \mu_{A_0}(u_i)\right|, \qquad (2.3)$$

а мера нечеткости в Евклидовой метрике – по формуле

$$D^\varepsilon(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(u_i) - \mu_{A_0}(u_i))^2}. \qquad (2.4)$$

Отметим некоторые важные свойства мер нечеткости.

1). $D(A) \ge 0$ **,** так как она определяется расстоянием.

2). $D(A) = 0$, если множество A четкое.

3). Чем больше значение меры нечеткости, тем более нечетким является это множество, т.е. $D(A) \ge D(B) \Rightarrow A$ более нечеткое, чем B. Такое сравнение корректно только в том случае, если *носители этих множеств равны по мощности* и использовалась *одна и та же метрика*. При этом оба множества могут быть построены и в различных универсальных множествах, что значительно расширяет границы для сравнений самых различных по природе множеств.

Пример 2.2. Пусть в универсальном множестве $U = \{u_1,..., u_5\}$ построены множества $X = 0{,}1/u_1 + 1/u_3 + 0{,}9/u_4 + 1/u_5$ и $Y = 0{,}2/u_2 + 0{,}8/u_3 + 1/u_4 + 0{,}5/u_5$. Надо сравнить эти множества по нечеткости в линейной метрике.

Ближайшими четкими к ним будут множества $X_0 = \{u_3, u_4, u_5\}$ и $Y_0 = \{u_3, u_4\}$.

Тогда в соответствии с (2.3) меры нечеткости в линейной метрике:

$$D^L(X) = \sum_{i=1}^{5} \left|\mu_X(u_i) - \mu_{X_0}(u_i)\right| = |0{,}1-0| + |0-0| + |1-1| + |0{,}9-1| + |1-1| = 0{,}2,$$

$$D^L(Y) = \sum_{i=1}^{5} \left|\mu_Y(u_i) - \mu_{Y_0}(u_i)\right| = |0-0| + |0{,}2-0| + |0{,}8-1| + |1-1| + |0{,}5-0| = 0{,}9.$$

Корректно ли сравнивать эти множества по нечеткости с помощью этих мер нечеткости?

Для этого определим носители этих множеств supp(X) $= \{u_1, u_3, u_4, u_5\}$ и $\sup p(Y) = \{u_2, u_3, u_4, u_5\}$. Так как │ supp($X$) │ = │ supp($Y$) │ = 4, то такое сравнение корректно. Итак, множество Y более нечеткое, чем множество X.

Пример 2.3. Сравним по нечеткости множества $X = 0{,}1/u_1 + 1/u_3 + 0{,}9/u_4 + 1/u_5$ и $Y = 0{,}2/u_2 + 0{,}8/u_3 + 1/u_4 + 0{,}5/u_5$ из примера 2.2 в евклидовой метрике. Тогда в соответствии с (2.4) меры нечеткости:

$$D^\varepsilon(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} (\mu_X(u_i) - \mu_{X_0}(u_i))^2} = \sqrt{0{,}02} \approx 0{,}14,$$

$$D^{\varepsilon}(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{5}(\mu_Y(u_i) - \mu_{Y_0}(u_i))^2} = \sqrt{0{,}33} \approx 0{,}57 .$$

Так как │ supp(X) │ = │ supp(Y) │ = 4, то сравнение корректно: множество Y более нечеткое, чем множество X. На примерах 2.2 и 2.3 мы убедились в том, что результат сравнения множеств X и Y по нечеткости не зависит от метрики; главное, чтобы для сравнения использовались меры нечеткости в одной метрике.

2.3 Индексы нечеткости

Для сравнения двух множеств A и B по нечеткости при условии, что мощности их суппортов не равны, следует использовать индексы нечеткости. **Индекс нечеткости** множества в линейной метрике определяется по формуле

$$I^L(A) = \frac{D^L(A)}{|\sup p(A)|}, \tag{2.5}$$

а в евклидовой метрике – по формуле

$$I^{\varepsilon}(A) = \frac{D^{\varepsilon}(A)}{\sqrt{|\sup p(A)|}}. \tag{2.6}$$

Отметим некоторые важные свойства индексов нечеткости в любой метрике.

1). $I(A) \geq 0$ **,** так как он определяется расстоянием.

2). $I(A) = 0$, если множество A четкое.

3). Чем больше значение индекса нечеткости, тем более нечетким является это множество, т.е. $I(A) \geq I(B) \Rightarrow A$ более нечеткое, чем B. Такое сравнение всегда корректно, если использовалась *одна и та же метрика*.

Пример 2.4. Пусть в универсальном множестве $U = \{u_1, ..., u_5\}$ построены множества $X = 0{,}5/u_1 + 0{,}2/u_3 + 0{,}9/u_4$ и $Y = 0{,}2/u_2 + 0{,}8/u_3 + 1/u_4 + 0{,}5/u_5$. Надо сравнить эти множества по нечеткости в линейной метрике.

Носители этих множеств $\text{supp}(X) = \{u_1, u_3, u_4\}$ с количеством элементов $|\text{supp}(X)| = 3$ и $\text{supp}(Y) = \{u_2, u_3, u_4, u_5\}$ с $|\text{supp}(Y)| = 4$. Так как мощности суппортов не равны, то корректным будет сравнение только с помощью индексов нечеткости. Ближайшими четкими к ним будут множества $X_0 = \{u_4\}$ и $Y_0 = \{u_3, u_4\}$.

Тогда в соответствии с формулой (2.5) индексы нечеткости в линейной метрике

$$I^L(X) = \frac{D^L(X)}{|\sup p(X)|} = \frac{\sum_{i=1}^{5} |\mu_X(u_i) - \mu_{X_0}(u_i)|}{3} = \frac{0{,}8}{3} \approx 0{,}27,$$

$$I^L(Y) = \frac{D^L(Y)}{|\sup p(Y)|} = \frac{\sum_{i=1}^{5} |\mu_Y(u_i) - \mu_{Y_0}(u_i)|}{4} = \frac{0{,}9}{4} \approx 0{,}23.$$

Так как $I^L(X) > I^L(Y) \Rightarrow X$ более нечеткое, чем Y, хотя меры нечеткости у них 0,8 и 0,9, соответственно.

Пример 2.5. Сравним по нечеткости множества $X = 0{,}5/u_1 + 0{,}2/u_3 + 0{,}9/u_4$ и $Y = 0{,}2/u_2 + 0{,}8/u_3 + 1/u_4 + 0{,}5/u_5$ из примера 2.4 в евклидовой метрике. Тогда в соответствии с формулой (2.6)

$$I^\varepsilon(X) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{5} (\mu_X(u_i) - \mu_{X_0}(u_i))^2}}{\sqrt{|\sup p(X)|}} = \frac{\sqrt{0{,}3}}{\sqrt{3}} \approx 0{,}32,$$

$$I^{\varepsilon}(Y) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(\mu_Y(u_i) - \mu_{Y_0}(u_i))^2}}{\sqrt{|\sup p(Y)|}} = \frac{\sqrt{0{,}33}}{\sqrt{4}} \approx 0{,}29 \; .$$

Следовательно, множество X более нечеткое, чем Y, а результат сравнения не зависит от метрики.

2.4 Методики построение множеств по условиям нечеткости

Часто на практике требуется построить некоторое новое множество, которое будет более нечетким или более четким, чем заданное множество. При этом на новое множество могут быть наложены еще и другие условия.

Пусть имеется некоторое универсальное множество U, в котором задано нечеткое множество A. Необходимо построить в U новое множество B по заданному условию нечеткости.

Методика построения более нечеткого множества. Нам уже известно, что, чем ближе степень принадлежности элемента универсального множества к данному множеству к значению 0,5 (самое нечеткое значение), тем больший вклад в меру нечеткости вносит этот элемент. Тогда построение множества B, которое должно быть более нечетким по сравнению с заданным множеством A, включает в себя следующие действия.

В цикле по всем элементам универсального множества $u \in U$ выполнить следующие действия:

1. Оценить интервал для выбора $\mu_B(u)$ по правилу $0{,}5 - \delta < \mu_B(u) < 0{,}5 + \delta$, где $\delta = |0{,}5 - \mu_A(u)|$.
2. Если $\delta = 0$, то выбрать $\mu_B(u) = 0{,}5$, в противном случае выбрать $\mu_B(u)$ из данного интервала.

Данная методика дает решение, если $\exists u \in U : \mu_A(u) \neq 0{,}5$.

Пример 2.6. Пусть в универсальном множестве $U = \{u_1, ..., u_5\}$ построено множество $X = 0{,}2/u_2 + 0{,}7/u_3 + 1/u_4 + 0{,}5/u_5$. Надо построить пример нового множества Y, которое будет более нечетким, чем X. Так как $\exists u \in U : \mu_A(u) \neq 0{,}5$, то такое множество может быть построено. Ниже в таблице представлены результаты применения данной методики.

u	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
$\mu_X(u)$	0	0,2	0,7	1	0,5
δ	0,5	0,3	0,2	0,5	0
Интервал	]0;1[	]0,2;0,8[	]0,3;0,7[	]0;1[	-
$\mu_Y(u)$	0,1	0,4	0,6	0,2	0,5

Итак, построено множество $Y = 0{,}1/u_1 + 0{,}4/u_2 + 0{,}6/u_3 + 0{,}2/u_4 + 0{,}5/u_5$. Убедимся, что это решение верное. Так как мощности суппортов этих множеств не равны, то используем для сравнения множеств их индексы нечеткости в линейной метрике (2.5):

$$I^L(X) = \frac{D^L(X)}{|\sup p(X)|} = \frac{\sum_{i=1}^{5} \left| \mu_X(u_i) - \mu_{X_0}(u_i) \right|}{4} = \frac{1}{4} = 0{,}25,$$

$$I^L(Y) = \frac{D^L(Y)}{|\sup p(Y)|} = \frac{\sum_{i=1}^{5} \left| \mu_Y(u_i) - \mu_{Y_0}(u_i) \right|}{5} = \frac{1{,}6}{5} = 0{,}32.$$

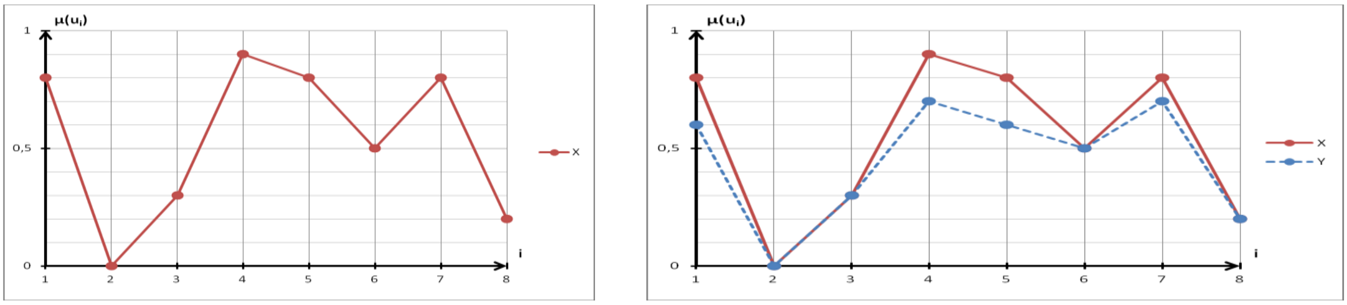
Методика построения более нечеткого подмножества. Построение множества B, которое должно быть более нечетким по сравнению с заданным множеством A и должно являться его подмножеством ($B \subseteq A$), включает в себя следующие действия в цикле по всем элементам универсального множества $u \in U$:

1. Оценить интервал для выбора $\mu_B(u)$ по правилу $0{,}5 - \delta < \mu_B(u) < 0{,}5 + \delta \vee \mu_B(u) \le \mu_A(u)$, где $\delta = |0{,}5 - \mu_A(u)|$.
2. Если интервал пустой, то выбрать $\mu_B(u) = \mu_A(u)$, в противном случае выбрать $\mu_B(u)$ из данного интервала.

Данная методика дает решение, если $\exists u \in U : \mu_A(u) \neq 0{,}5$.

Пример 2.7. Пусть в универсальном множестве $U = \{u_1, ..., u_8\}$ построено множество X, представленное диаграммой Заде на рисунке 2.1,а. Надо построить пример нового множества Y, которое будет более нечетким, чем X, и являться его подмножеством ($Y \subseteq X$). Ниже в таблице представлены результаты применения данной методики, а на рисунке 2.1,б – диаграмма Заде множества Y.

u	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
$\mu_X(u)$	0,8	0	0,3	0,9	0,8	0,5	0,8	0,2
δ	0,3	0,5	0,2	0,4	0,3	0	0,3	0,3
Интервал	]0,2;0,8[	-	-	]0,1;0,9[	]0,2;0,8[	-	]0,2;0,8[	-
$\mu_Y(u)$	0,6	0	0,3	0,7	0,6	0,5	0,7	0,2



а) б)

Рисунок 2.1 – Пример построения более нечеткого подмножества

Диаграмма Заде для множества Y на рисунке 2.1,б *не выше* диаграммы Заде для множества X, что свидетельствует о том, что $Y \subseteq X$. Убедимся, что построенное множество Y более нечеткое, чем X. Так как мощности суппортов этих множеств равны, то используем для сравнения множеств их меры нечеткости $D^L(X) = \sum_{i=1}^{8} \left|\mu_X(u_i) - \mu_{X_0}(u_i)\right| = 1{,}7$ и $D^L(Y) = \sum_{i=1}^{8} \left|\mu_Y(u_i) - \mu_{Y_0}(u_i)\right| = 2{,}4$.

Методика построения более четкого множества. Нам уже известно, что самые четкие элементы множества имеют степени принадлежности 0 или 1. Тогда построение множества B, которое должно быть более четким по сравнению с заданным множеством A, включает в себя следующие действия в цикле по всем элементам универсального множества $u \in U$:

1. Если $\mu_A(u) > 0{,}5$, то оценить интервалы для выбора $\mu_B(u)$ по правилу $\mu_B(u) > \mu_A(u)$ и $\mu_B(u) < 1 - \mu_A(u)$.
2. Если $\mu_A(u) \le 0{,}5$, то оценить интервалы для выбора $\mu_B(u)$ по правилу $\mu_B(u) < \mu_A(u)$ и $\mu_B(u) > 1 - \mu_A(u)$.
3. Выбрать $\mu_B(u)$ из данных интервалов.

Пример 2.8. Пусть в универсальном множестве $U = \{u_1, ..., u_5\}$ построено множество $X = 0{,}2/u_2 + 0{,}7/u_3 + 1/u_4 + 0{,}5/u_5$. Надо построить пример нового множества Y, которое будет более четким, чем X. Ниже в таблице представлены результаты применения данной методики.

u	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
$\mu_X(u)$	0	0,2	0,7	1	0,5
Интервалы	[0] [1]	[0;0,2[ ]0,8;1]	[0;0,3[ ]0,3;1]	[0] [1]	[0;0,5[ ]0,5;1]
$\mu_Y(u)$	1	0,1	0,8	1	0,4

Итак, построено множество $Y = 1/u_1 + 0{,}1/u_2 + 0{,}8/u_3 + 1/u_4 + 0{,}4/u_5$. Убедимся, что это решение верное. Так как мощности суппортов этих множеств не равны, то используем для сравнения множеств их индексы нечеткости в линейной метрике:

$$I^L(X) = \frac{D^L(X)}{|\sup p(X)|} = \frac{\sum_{i=1}^{5} \left| \mu_X(u_i) - \mu_{X_0}(u_i) \right|}{4} = \frac{1}{4} = 0{,}25,$$

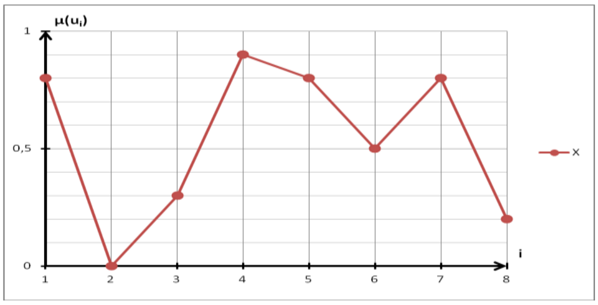
$$I^L(Y) = \frac{D^L(Y)}{|\sup p(Y)|} = \frac{\sum_{i=1}^{5} \left| \mu_Y(u_i) - \mu_{Y_0}(u_i) \right|}{5} = \frac{0{,}7}{5} = 0{,}14.$$

Методика построения более четкого подмножества. Построение множества B, которое должно быть более четким по сравнению с заданным множеством A и должно являться его подмножеством ($B \subseteq A$), включает в себя следующие действия в цикле по всем элементам универсального множества $u \in U$:

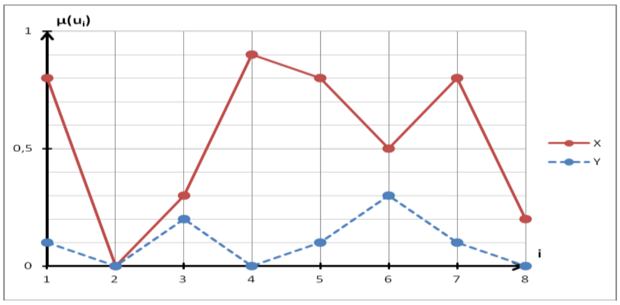
1. Если $\mu_A(u) > 0{,}5$, то оценить интервал для выбора $\mu_B(u)$ по правилу $\mu_B(u) < 1 - \mu_A(u)$.
2. Если $\mu_A(u) \le 0{,}5$, то оценить интервал для выбора $\mu_B(u)$ по правилу $\mu_B(u) < \mu_A(u)$.
3. Выбрать любое значение $\mu_B(u)$ из интервала.

Пример 2.9. Пусть в универсальном множестве $U = \{u_1, ..., u_8\}$ построено множество X, представленное диаграммой Заде на рисунке 2.2,а. Надо построить пример нового множества Y, которое будет более четким, чем X, и будет являться его подмножеством ($Y \subseteq X$). Ниже в таблице представлены результаты применения данной методики, а на рисунке 2.2,б – диаграмма Заде множества Y.

u	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
$\mu_X(u)$	0,8	0	0,3	0,9	0,8	0,5	0,8	0,2
Интервал	[0;0,2[	[0]	[0;0,3[	[0;0,1[	[0;0,2[	[0;0,5[	[0;0,2[	[0;0,2[
$\mu_Y(u)$	0,1	0	0,2	0	0,1	0,3	0,1	0



а)



б)

Рисунок 2.2 – Пример построения более четкого подмножества

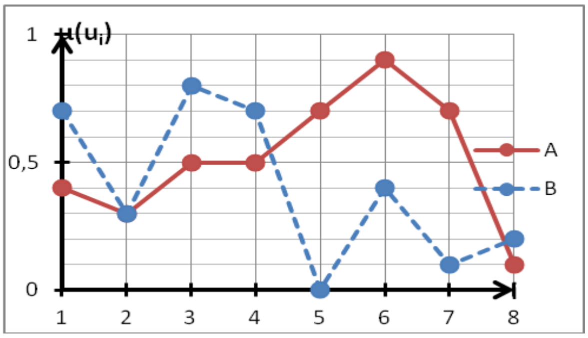
Диаграмма Заде множества Y на рисунке 2.2,б не выше диаграммы Заде множества X, что свидетельствует о том, что $Y \subseteq X$. Убедимся, что построенное множество Y более четкое, чем X. Так как мощности суппортов этих множеств не равны, то используем для сравнения множеств их индексы нечеткости в линейной метрике:

$$I^L(X) = \frac{D^L(X)}{|\sup p(X)|} = \frac{\sum_{i=1}^{8} |\mu_X(u_i) - \mu_{X_0}(u_i)|}{7} = \frac{1{,}7}{7} \approx 0{,}24,$$

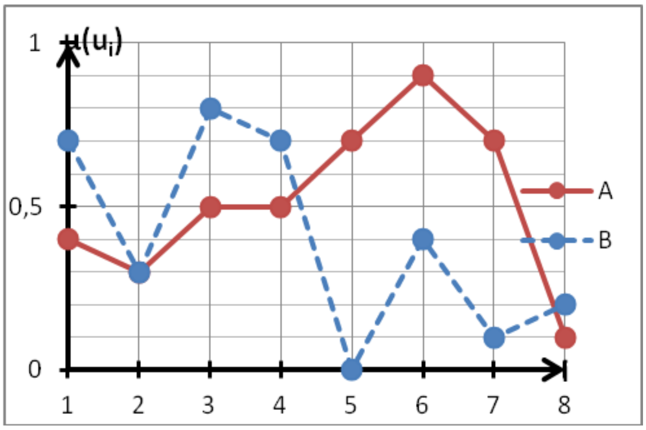
$$I^L(Y) = \frac{D^L(Y)}{|\sup p(Y)|} = \frac{\sum_{i=1}^{8} |\mu_Y(u_i) - \mu_{Y_0}(u_i)|}{5} = \frac{0{,}8}{5} = 0{,}16.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ТЕМЕ № 2

1. На рисунке ниже приведены диаграммы Заде нечетких множеств, построенных на основе универсального множества $U = \{u_1, ..., u_8\}$. Расстояние в линейной метрике $d^L(A, B) =$



2. На рисунке ниже приведены диаграммы Заде нечетких множеств, построенных на основе универсального множества $U = \{u_1, ..., u_8\}$.



Определите меры нечеткости этих множеств $D(A)$ и $D(B)$ и выберите верное утверждение.

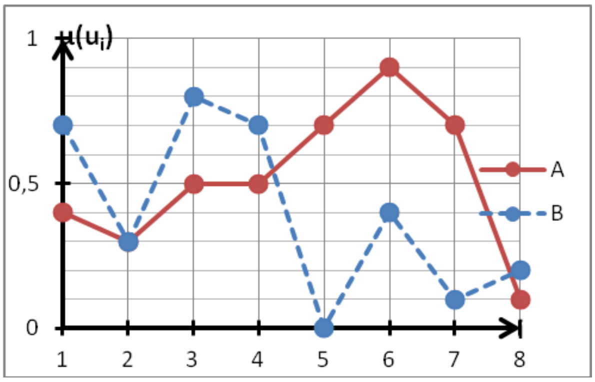
a. $D(A) > D(B)$, поэтому множество A более нечеткое, чем B.

b. $D(A) < D(B)$, поэтому множество B более нечеткое, чем A.

c. $D(A) = D(B)$, поэтому множества A и B по нечеткости одинаковы.

d. Сравнение множеств A и B по нечеткости с использованием $D(A)$ и $D(B)$ некорректно.

3. На рисунке ниже приведены диаграммы Заде нечетких множеств, построенных на основе универсального множества $U=\{u_1,...,u_8\}$.



Определите индексы нечеткости этих множеств $I(A)$ и $I(B)$ и выберите верное утверждение.

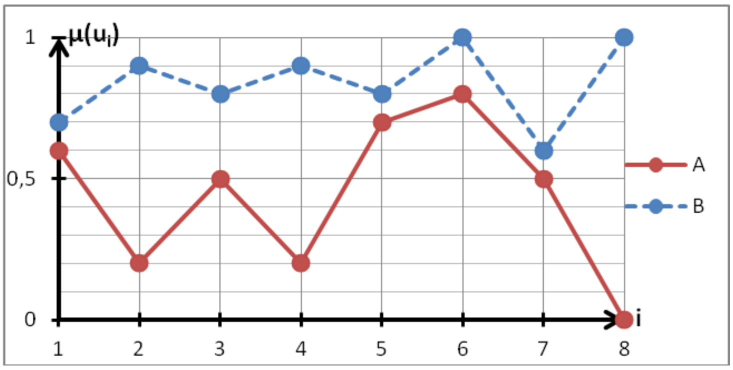
a. $I(A) > I(B)$, поэтому множество А более нечеткое, чем В.

b. $I(A) < I(B)$, поэтому множество В более нечеткое, чем А.

c. $I(A) = I(B)$, поэтому множества А и В по нечеткости одинаковы.

d. Сравнение множеств А и В по нечеткости с использованием $I(A)$ и $D(B)$ некорректно.

4. На рисунке ниже приведены диаграммы Заде нечетких множеств, построенных на основе универсального множества $U=\{u_1,...,u_8\}$.



Выберите верные утверждения.

a. $B \subset A$

b. $A \subset B$

c. $B \subseteq A$

d. $A \subseteq B$

e. Множество A более нечеткое, чем B
f. Множество B более нечеткое, чем A
g. Множества A и B по нечеткости одинаковые

3. АЛГЕБРА НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Алгебра нечетких множеств базируется на правилах выполнения арифметических операций над нечеткими множествами и на основных тождествах и законах алгебры. Результатом выполнения любой арифметической операции является новое множество, в том числе и пустое. Различают **одноместные** операции (для их выполнения требуется только одно множество) и **двуместные** операции (для их выполнения требуются два множества). Математические выражения на основе арифметических операций выполняются слева направо, порядок может быть изменен с помощью скобок. Одноместные операции имеют приоритет над двуместными операциями.

3.1 Дополнение множества

Пусть в некотором универсальном множестве U построено нечеткое множество $A=\sum_{i=1}^{n}\mu_A(u_i)/u_i$. **Дополнением множества** A является новое нечеткое множество $\overline{A}$, в котором

$$\forall u \in U : \mu_{\overline{A}}(u) = 1 - \mu_A(u) . \qquad (3.1)$$

Данная операция является одноместной, при вычислении выражений всегда выполняется в первую очередь.

Пример 3.1. Множество $X = 0{,}1/u_2 + 0{,}3/u_3 + 0{,}5/u_4 + 0{,}7/u_5 + 0{,}9/u_6$ построено на универсальном множестве $U = \{u_1, u_2, ..., u_{10}\}$. Выполним над множеством X операцию дополнения в соответствии с (3.1), ниже в таблице приведены значения степеней принадлежности для множеств X и $\overline{X}$.

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$\mu_X(u)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0	0	0	0
$\mu_{\overline{X}}(u)$	1	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1	1	1	1	1

Тогда
$\overline{X} = 1/u_1 + 0{,}9/u_2 + 0{,}7/u_3 + 0{,}5/u_4 + 0{,}3/u_5 + 0{,}1/u_6 + 1/u_7 + 1/u_8 + 1/u_9 + 1/u_{10}$.

3.2 Объединение множеств

Пусть в некотором универсальном множестве U построено два нечетких множества $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$ и $B = \sum_{i=1}^{n} \mu_B(u_i)/u_i$. **Объединением** двух множеств A и B будет новое множество $A \cup B$, в котором

$$\forall u \in U : \mu_{A \cup B}(u) = \max[\mu_A(u), \mu_B(u)]. \qquad (3.2)$$

Пример 3.2. Множества X и Y построены на универсальном множестве $U = \{u_1, u_2, ..., u_{10}\}$ (ниже в таблице приведены значения степеней принадлежности для этих множеств). Определим степени принадлежности множеству $X \cup Y$ по правилу объединения (3.2) и представим результаты в следующей.

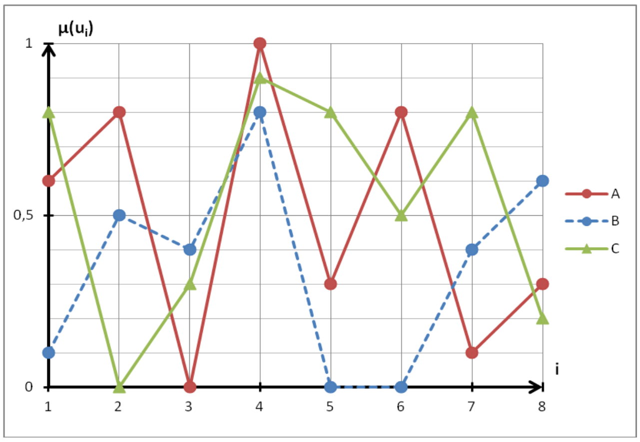
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$\mu_X(u)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0	0	0	0
$\mu_Y(u)$	0,2	0,1	0,7	0,5	1	0	1	0,6	0	0,4
$\mu_{X \cup Y}(u)$	0,2	0,1	0,7	0,5	1	0,9	1	0,6	0	0,4

Тогда
$X \cup Y = 0{,}2/u_1 + 0{,}1/u_2 + 0{,}7/u_3 + 0{,}5/u_4 + 1/u_5 + 0{,}9/u_6 + 1/u_7 + 0{,}6/u_8 + 0{,}4/u_{10}$.

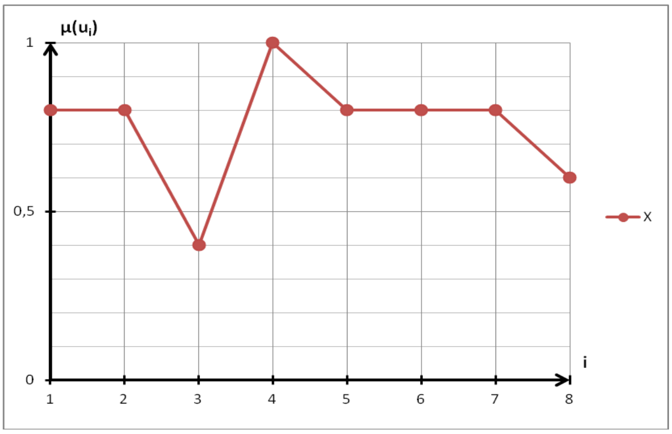
Пусть в некотором универсальном множестве U построено m нечетких множеств $A_1 = \sum_{i=1}^{n} \mu_{A_1}(u_i)/u_i$, ..., $A_m = \sum_{i=1}^{n} \mu_{A_m}(u_i)/u_i$. **Объединением** нескольких множеств $A_1,..., A_m$ будет множество $\bigcup_{j=1}^{m} A_j$, в котором

$$\forall u \in U : \mu_{\bigcup_{j=1}^{m} A_j}(u) = \max_{j=1}^{m} \mu_{A_j}(u) . \qquad (3.3)$$

Пример 3.3. Рассмотрим графический способ объединения нескольких нечетких множеств (3.3). На рисунке 3.1,а представлены диаграммы Заде трех множеств A, B и C, а на рисунке 3.1,б – диаграмма Заде множества X, являющегося их объединением. Для построения диаграммы Заде (рис. 3.1,б) для каждого элемента $u \in U$ выбиралась точка, расположенная **выше всех** на диаграммах Заде (рис. 3.1,а) у этого элемента.



а)



б)

Рисунок 3.1 – Пример графического способа объединения нескольких нечетких множеств

3.3 Пересечение множеств

Пусть в некотором универсальном множестве U построено два нечетких множества $A=\sum_{i=1}^{n}\mu_A(u_i)/u_i$ и $B=\sum_{i=1}^{n}\mu_B(u_i)/u_i$. **Пересечением** двух множеств A и B будет новое множество $A\cap B$, в котором

$$\forall u\in U:\mu_{A\cap B}(u)=\min[\mu_A(u),\mu_B(u)]. \qquad (3.4)$$

Пример 3.4. Множества X и Y построены на универсальном множестве $U=\{u_1,u_2,...,u_{10}\}$ (ниже в таблице приведены значения степеней принадлежности для этих множеств). Определим степени принадлежности множеству $X\cap Y$ по правилу пересечения (3.4) и представим результаты в следующей таблице.

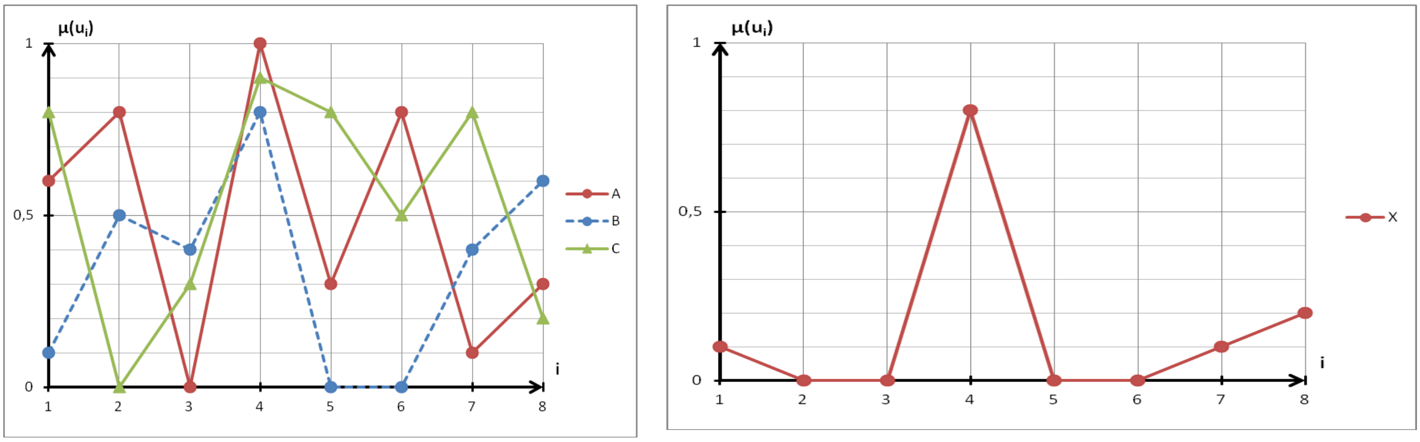
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$\mu_X(u)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0	0	0	0
$\mu_Y(u)$	0,2	0,1	0,7	0,5	1	0	1	0,6	0	0,4
$\mu_{X\cap Y}(u)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0	0	0	0	0

Тогда $X\cap Y=0{,}1/u_2+0{,}3/u_3+0{,}5/u_4+0{,}7/u_5$.

Пусть в некотором универсальном множестве U построено m нечетких множеств $A_1=\sum_{i=1}^{n}\mu_{A_1}(u_i)/u_i$, …, $A_m=\sum_{i=1}^{n}\mu_{A_m}(u_i)/u_i$. **Пересечением** нескольких множеств $A_1,...,A_m$ будет новое множество $\bigcap_{j=1}^{m}A_j$, в котором

$$\forall u\in U:\mu_{\bigcap_{j=1}^{m}A_j}(u)=\min_{j=1}^{m}\mu_{A_j}(u). \qquad (3.5)$$

Пример 3.5. Рассмотрим графический способ пересечения нескольких нечетких множеств (3.5). На рисунке 3.2,а представлены диаграммы Заде трех множеств A, B и C, а на рисунке 3.2,б – диаграмма Заде множества X, являющегося их пересечением. Для построения диаграммы Заде (рис. 3.2,б) для каждого элемента $u \in U$ выбиралась точка, расположенная **ниже всех** на диаграммах Заде (рис. 3.2,а) у этого элемента.



а) б)

Рисунок 3.2 – Пример графического способа пересечения нескольких нечетких множеств

3.4 Разность множеств

Пусть в некотором универсальном множестве U построено два нечетких множества $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$ и $B = \sum_{i=1}^{n} \mu_B(u_i)/u_i$. **Разностью** двух множеств A и B **(** A без B **)** будет новое множество $A \setminus B$, в котором

$$\forall u \in U : \mu_{A \setminus B}(u) = \min[\mu_A(u), \mu_{\overline{B}}(u)]. \quad (3.6)$$

Из определения данной операции очевидно, что $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. Следует также заметить, что $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Пример 3.6. Множества X и Y построены на универсальном множестве $U = \{u_1, u_2, ..., u_{10}\}$ (ниже в таблице приведены значения степеней принадлежности для этих множеств). Для построения новых множеств $X \setminus Y$ и $Y \setminus X$ воспользуемся тождеством $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. Ниже в таблице вначале найдены дополнения $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, а затем определены степени принадлежности множествам $X \setminus Y$ и $Y \setminus X$ по правилу пересечения (3.6).

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$\mu_X(u)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0	0	0	0
$\mu_Y(u)$	0,2	0,1	0,7	0,5	1	0	1	0,6	0	0,4
$\mu_{\overline{X}}(u)$	1	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1	1	1	1	1
$\mu_{\overline{Y}}(u)$	0,8	0,9	0,3	0,5	0	1	0	0,4	1	0,6
$\mu_{X \setminus Y}(u)$	0	0,1	0,3	0,5	0	0,9	0	0	0	0
$\mu_{Y \setminus X}(u)$	0,2	0,1	0,7	0,5	0,3	0	1	0,6	0	0,4

Тогда:

$X \setminus Y = 0{,}1/u_2 + 0{,}3/u_3 + 0{,}5/u_4 + 0{,}9/u_6$,

$Y \setminus X = 0{,}2/u_1 + 0{,}1/u_2 + 0{,}7/u_3 + 0{,}5/u_4 + 0{,}3/u_5 + 1/u_7 + 0{,}6/u_8 + 0{,}4/u_{10}$.

Как видно из этого примера, $X \setminus Y \neq Y \setminus X$.

Симметрической разностью двух множеств A и B будет новое множество $A + B$, в котором

$$\forall u \in U : \mu_{A+B}(u) = \max(\min[\mu_A(u), \mu_{\overline{B}}(u)], \min[\mu_B(u), \mu_{\overline{A}}(u)]) . \qquad (3.7)$$

Из определения данной операции очевидно, что $A+B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. Следует также заметить, что $A+B=B+A$.

Пример 3.7. Множества X и Y построены на универсальном множестве $U=\{u_1,u_2,...,u_{10}\}$ (ниже в таблице приведены значения степеней принадлежности для этих множеств). Для построения нового множества $X+Y$ воспользуемся результатами построения двух множеств $X\setminus Y$ и $Y\setminus X$ из примера 3.6, а затем определим степени принадлежности множеству $X+Y$ по правилу объединения (3.7) для этих двух множеств. Ниже в таблице приведены расчеты для построения множества $X+Y$.

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$\mu_X(u)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0	0	0	0
$\mu_Y(u)$	0,2	0,1	0,7	0,5	1	0	1	0,6	0	0,4
$\mu_{X\setminus Y}(u)$	0	0,1	0,3	0,5	0	0,9	0	0	0	0
$\mu_{Y\setminus X}(u)$	0,2	0,1	0,7	0,5	0,3	0	1	0,6	0	0,4
$\mu_{X+Y}(u)$	0,2	0,1	0,7	0,5	0,3	0,9	1	0,6	0	0,4

Тогда

$$X+Y=0{,}2/u_1+0{,}1/u_2+0{,}7/u_3+0{,}5/u_4+0{,}3/u_5+0{,}9/u_6+1/u_7+0{,}6/u_8+0{,}4/u_{10}$$

3.5 Декартово произведение множеств

Пусть заданы два непустых множества $A\neq\varnothing$ и $B\neq\varnothing$. Результатом **прямого декартова произведения** этих множеств будет новое множество $A\cdot B$, элементами которого будут *все возможные упорядоченные пары*, составленные из элементов этих множеств, т.е.

$$\forall(a,b) \in A \cdot B : a \in A, b \in B\,. \qquad (3.8)$$

Следует заметить, что множества могут быть построены на различных универсальных множествах. Из определения этой операции следуют следующие ее основные свойства.

1). $|A| = n, |B| = m \Rightarrow |A \cdot B| = n \cdot m$,

2). $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пример 3.8. Заданы множества $X = \{1,2,3\}$ и $Y = \{a,b\}$. Для нахождения $X \cdot Y$ определим вначале количество упорядоченных пар в нем: $|X| = 3, |Y| = 2 \Rightarrow |X \cdot Y| = 6$. Затем перечислим упорядоченные пары: $X \cdot Y = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$. Порядок перечисления элементов (пар) в этом множестве не важен, упорядоченность относится только к паре: в ней на первом месте должен быть элемент из множества X, а на втором месте – элемент из множества Y. А теперь перечислим упорядоченные пары для $Y \cdot X$: $Y \cdot X = \{(a,1),(b,1),(a,2),(b,2),(a,3),(b,3)\}$. Очевидно, что множества $X \cdot Y$ и $Y \cdot X$ содержат одинаковое количество упорядоченных пар, но являются различными множествами, причем отличаются только порядком перечисления в парах элементов из множеств X и Y.

3.6 Тождества и законы алгебры нечетких множеств

Тождества (табл. 3.1) и законы (табл. 3.2) алгебры множеств отражают свойства операций дополнения, пересечения и объединения нечетких множеств.

Таблица 3.1 – Основные тождества алгебры множеств

№	Свойство	Тождества
1.	Коммутативность	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
2.	Ассоциативность	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3.	Дистрибутивность	$A \cup (B \cap C) = (A \cup C) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap C) \cup (A \cap C)$
4.	Идемпотентность	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
5.	Свойство нуля	$A \cup \varnothing = A$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
6.	Свойство единицы	$A \cup U = U$ $A \cap U = A$

Таблица 3.2 – Основные законы алгебры множеств

№	Закон	Тождества
1.	Закон поглощения	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
2.	Закон двойного дополнения	$\overline{\overline{A}} = A$
3.	Закон де Моргана	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Следует заметить, что тождества $A \cup \overline{A} = U$ и $A \cap \overline{A} = \varnothing$ [3-5] исключены из перечня, так как их верность опровергается для нечетких множеств. Докажем это утверждение.

Пусть имеется некоторое нечеткое множество $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$. Очевидно, что в этом множестве $\exists u \in U : \mu_A(u) \neq \{0,1\}$, например, степени принадлежности могут принимать значения 0,8 или 0,4. Тогда такие элементы в множестве дополнения (3.1) будут обладать свойством $\exists u \in U : \mu_{\overline{A}}(u) \neq \{0,1\}$, например, 0,2 или 0,6, соответственно.

При объединении $A \cup \overline{A}$ (3.2) такие элементы никогда не будут иметь степень принадлежности 1, что требуется для универсального множества U. Их степени принадлежности будут выбираться как максимум среди степеней принадлежности множеству A или $\overline{A}$. Например, max[0,8; 0,2]=0,8 или max[0,4; 0,6]=0,6. Следовательно, тождество $A \cup \overline{A} = U$ неверно для нечетких множеств.

При пересечении $A \cap \overline{A}$ (3.4) такие элементы никогда не будут иметь степень принадлежности 0, что требуется для пустого множества. Их степени принадлежности будут выбираться как минимум среди степеней принадлежности множеству A или $\overline{A}$. Например, min[0,8; 0,2]=0,2 или min[0,4; 0,6]=0,4. Следовательно, тождество $A \cap \overline{A} = \varnothing$ неверно для нечетких множеств.

Пример 3.9. Заданы два нечетких множества $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$ и $B = \sum_{i=1}^{n} \mu_B(u_i)/u_i$. Требуется доказать для них верность закона поглощения $A \cup (A \cap B) = A$.

С использованием формул (3.2) и (3.4) определим следующее правило вычисления степеней принадлежности:

$$\forall u \in U : \mu_{A \cup (A \cap B)}(u) = \max[\mu_A(u), \min(\mu_A(u), \mu_B(u))].$$

При вычислении могут быть следующие два случая:

1). Если $\mu_A(u) \leq \mu_B(u)$, то $\min(\mu_A(u), \mu_B(u)) = \mu_A(u)$, следовательно, $\mu_{A \cup (A \cap B)}(u) = \max[\mu_A(u), \mu_A(u)] = \mu_A(u)$.

2). Если $\mu_A(u) > \mu_B(u)$, то $\min(\mu_A(u), \mu_B(u)) = \mu_B(u)$, следовательно, $\mu_{A\cup(A\cap B)}(u) = \max[\mu_A(u), \mu_B(u)] = \mu_A(u)$.

Таким образом, мы доказали, что $\forall u \in U : \mu_{A\cup(A\cap B)}(u) = \mu_A(u)$. Поэтому закон поглощения $A \cup (A \cap B) = A$ верен и для нечетких множеств.

Пример 3.10. Множества X и Y построены на универсальном множестве $U = \{u_1, u_2, ..., u_{10}\}$ (ниже в таблице приведены значения степеней принадлежности для этих множеств). Требуется построить новое множество $Z = \overline{X} \setminus Y$.

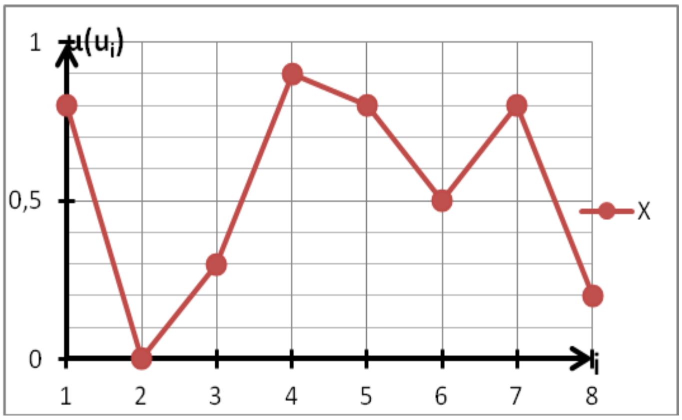
Воспользуемся формулой (3.6) и заменим операцию вычитания по правилу $\overline{X} \setminus Y = \overline{X} \cap \overline{Y}$, а затем применим закон де Моргана $\overline{X} \cap \overline{Y} = \overline{X \cup Y}$. Таким образом, искомое множество может быть найдено как $Z = \overline{X \cup Y}$. Ниже в таблице приведены расчеты для построения множества Z.

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$\mu_X(u)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0	0	0	0
$\mu_Y(u)$	0,2	0,1	0,7	0,5	1	0	1	0,6	0	0,4
$\mu_{X\cup Y}(u)$	0,2	0,1	0,7	0,5	1	0,9	1	0,6	0	0,4
$\mu_{\overline{X\cup Y}}(u)$	0,8	0,9	0,3	0,5	0	0,1	0	0,4	1	0,6

Тогда $Z = 0{,}8/u_1 + 0{,}9/u_2 + 0{,}3/u_3 + 0{,}5/u_4 + 0{,}1/u_6 + 0{,}4/u_8 + 1/u_9 + 0{,}6/u_{10}$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ТЕМЕ № 3

1. На рисунке ниже приведена диаграмма Заде нечеткого множества X, построенного на основе универсального множества $U = \{u_1,..., u_8\}$.



Выберите верные утверждения.

a. $\mu_{\overline{X}}(u_1) = 0{,}2$

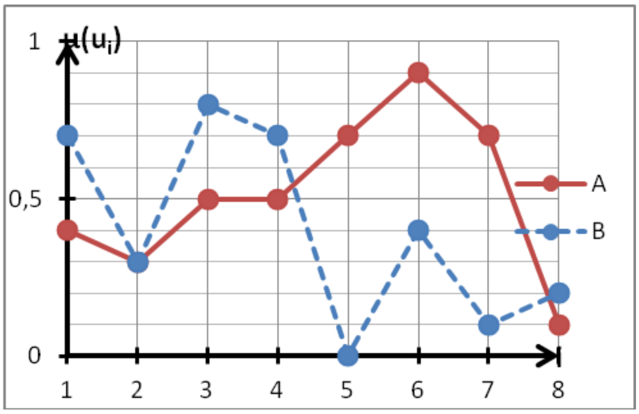
b. $\mu_{\overline{X}}(u_2) = 0$

c. Множество X более нечеткое, чем его дополнение $\overline{X}$

d. Множество X более четкое, чем его дополнение $\overline{X}$

e. Множество X и его дополнение $\overline{X}$ по нечеткости одинаковы

2. На рисунке ниже приведены диаграммы Заде нечетких множеств, построенных на основе универсального множества $U = \{u_1,..., u_8\}$.



Выберите верные утверждения.

a. $\mu_{A \cup B}(u_4) = 0{,}5$

b. $\mu_{A \cup B}(u_8) = 0{,}3$

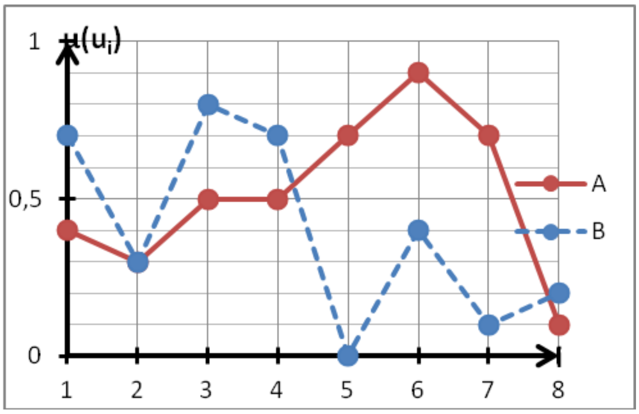
c. $A \subset A \cup B$

d. $B \subset A \cup B$

e. $A \subseteq A \cup B$

f. $B \subseteq A \cup B$

3. На рисунке ниже приведены диаграммы Заде нечетких множеств, построенных на основе универсального множества $U = \{u_1, ..., u_8\}$.



Выберите верные утверждения.

a. $\mu_{A \cap B}(u_4) = 0{,}5$

b. $\mu_{A \cap B}(u_6) = 0{,}5$

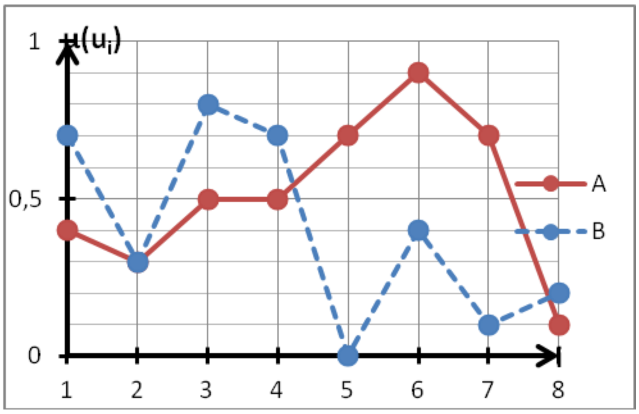
c. $A \subset A \cap B$

d. $A \cap B \subset A$

e. $A \subseteq A \cap B$

f. $A \cap B \subseteq B$

4. На рисунке ниже приведены диаграммы Заде нечетких множеств, построенных на основе универсального множества $U = \{u_1, ..., u_8\}$.



Выберите верные утверждения.

a. $\mu_{A\setminus B}(u_4) = 0{,}3$

b. $\mu_{A\setminus B}(u_6) = 0{,}5$

c. $\mu_{B\setminus A}(u_4) = 0{,}2$

d. $\mu_{B\setminus A}(u_6) = 0{,}1$

e. $\mu_{A+B}(u_5) = 0{,}7$

f. $\mu_{A+B}(u_7) = 0{,}8$

5. Заданы множества $X = \{x_1, x_2\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.
Выберите верные утверждения.

a. $|X \cdot Y| = 6$

b. $|X \cdot Y| = 8$

c. $(x_1, y_4) \in X \cdot Y$

d. $(x_1, x_2) \in X \cdot Y$

e. $(x_2, y_4) \in Y \cdot X$

f. $|X \cdot Y| = |Y \cdot X|$

6. Выражение $\overline{(A \cap B)} \setminus (A \bigcap B) =$

a. $\overline{A \cap B}$

b. $\overline{A \cup B}$

c. $\overline{A} \cap \overline{B}$

d. $\overline{A} \cup \overline{B}$

4. ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВАХ

4.1 Понятие бинарного отношения

Пусть заданы два непустых множества $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$. **Бинарным отношением** R на заданных множествах A и B называется новое множество $R \subseteq A \cdot B$, где $A \cdot B$ – результат прямого декартова произведения этих множеств (3.8). Таким образом, для построения любого бинарного отношения R множество $A \cdot B$ является универсальным, на нем можно строить самые различные бинарные отношения R. Если некоторая упорядоченная пара $(a,b) \in R$, то говорят, что элемент $a \in A$ находится в отношении R с элементом $b \in B$ (для этого используется запись aRb).

Областью определения бинарного отношения R является множество $DomR = \{a : (a,b) \in R\}$, элементы этого множества определяют *первую координату* отношения R. **Множеством значений** бинарного отношения R является множество $\operatorname{Im} R = \{b : (a,b) \in R\}$, элементы этого множества определяют *вторую координату* отношения R. Следует заметить, что $DomR \subseteq A$ и $\operatorname{Im} R \subseteq B$, т.е. могут и не включать все элементы A и B.

Для построения бинарного отношения R необходимо определить функцию принадлежности $\mu_R(a,b)$, которая устанавливает степени принадлежности данной пары $(a,b) \in A \cdot B$ к множеству R на отрезке $[0,1]$. При этом множество R может получиться как четким, так и нечетким.

Часто бинарное отношение R представляют в виде матрицы отношения $\|M_R\|$, в которой количество строк $n = |A|$ и количество столбцов $m = |B|$, а элементы матрицы являются степени принадлежности данной пары $(a,b) \in A \cdot B$ к множеству R.

Пример 4.1. Заданы множества $A = \{2,3,5,7\}$ и $B = \{10,15\}$. Построим на множестве $A \cdot B = \{(2,10),(2,15),(3,10),(3,15),(5,10),(5,15),(7,10),(7,15)\}$ два бинарных отношения R_1 и R_2 со следующими функциями принадлежности: $\mu_{R_1}(a,b)$: «a делит нацело b», $\mu_{R_2}(a,b)$: «$5a$ намного больше, чем b».

Функция принадлежности $\mu_{R_1}(a,b)$ является четким логическим условием (истина или ложь). Тогда $R_1 = \{(2,10),(3,15),(5,10),(5,15)\}$, $DomR_1 = \{2,3,5\}$, $\operatorname{Im} R_1 = \{10,15\}$.

Функция принадлежности $\mu_{R_2}(a,b)$ является нечетким логическим условием. Для оценки степеней принадлежности проведем следующие расчеты (здесь степени принадлежности пар $(3,10),(5,10),(5,15),(7,10),(7,15)$ установлены экспертно).

a	5a	**b**	5a>b?	5a-b	$\mu_{R_2}(a,b)$
2	10	**10**	-		0
2	10	**15**	-		0
3	15	**10**	+	5	0
3	15	**15**	-		0
5	25	**10**	+	15	0,5
5	25	**15**	+	10	0,25
7	35	**10**	+	25	1
7	35	**15**	+	20	0,75

Тогда R_2 =0,5/(5,10)+ 0,25/(5,15)+ 1/(7,10)+ 0,75/(7,15), $DomR_2 = \{5,7\}$, $\operatorname{Im} R_2 = \{10,15\}$.

Ниже приведено матричное представление бинарных отношений R_1 и R_2.

$$M_{R_1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\\0&0\end{pmatrix}\qquad M_{R_2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0{,}5&0{,}25\\1&0{,}75\end{pmatrix}$$

4.2 Обратное отношение

Пусть имеется некоторое бинарное отношение R на множествах A и B. **Обратным отношением** для отношения R будет множество $R^{-1}=\{(b,a):(a,b)\in R\}$, т.е. множество тех же упорядоченных пар, в которых координаты поменялись местами. Следовательно, область определения обратного отношения $DomR^{-1}=\operatorname{Im}R$, а множество его значений – $\operatorname{Im}R^{-1}=D\,o\,m$. Если бинарное отношение R представлено матрицей $\|M_R\|$, то обратное отношение R^{-1}может быть представлено также матрицей, полученной путем транспонирования исходной матрицы.

Пример 4.2. Заданы два бинарных отношения $R_1=\{(2{,}10),(3{,}15),(5{,}10),(5{,}15)\}$, R_2 =0,5/(5,10)+ 0,25/(5,15)+ 1/(7,10)+ 0,75/(7,15) со следующими функциями принадлежности: $\mu_{R_1}(a,b)$: «a делит нацело b», $\mu_{R_2}(a,b)$: «5 a намного больше, чем b».

Тогда обратным отношением для R_1 будет множество $R_1^{-1}=\{(10{,}2),(15{,}3),(10{,}5),(15{,}5)\}$ с областью определения $DomR_1^{-1}=\{10{,}15\}$, множеством значений $\operatorname{Im}R_1^{-1}=\{2{,}3{,}5\}$. При этом функция принадлежности обратного отношения $\mu_{R_1^{-1}}(a,b)$: «a делится нацело b».

Тогда обратным отношением для R_2 будет множество R_2^{-1}=0,5/(10,5)+ 0,25/(15,5)+ 1/(10,7)+ 0,75/(15,7) с областью определения $DomR_2^{-1}=\{10{,}15\}$, множеством значений $\operatorname{Im} R_2^{-1} = \{5,7\}$. При этом функция принадлежности обратного отношения $\mu_{R_2^{-1}}(a,b)$: «a намного меньше, чем $5b$».

Пример 4.3. Бинарные отношения R_1 и R_2 представлены следующими матрицами:

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{R_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}25 \\ 1 & 0{,}75 \end{pmatrix}$$

Тогда их обратные отношения R_1^{-1} и R_2^{-1} представляются следующими матрицами:

$$M_{R_1^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{R_2^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$$

4.3 Композиция отношений

Композицией двух бинарных отношений $R_1 \subseteq A \cdot B$ и $R_2 \subseteq B \cdot C$ называется множество $R_1 \circ R_2$, включающее в себя только упорядоченные пары по условию

$$(a,b) \in R_1, (b,c) \in R_2 \Rightarrow (a,c) \in R_1 \circ R_2, \qquad (4.1)$$

степени принадлежности которых вычисляются по правилу

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(a,c) = \max_{b \in B}(\min(\mu_{R_1}(a,b), \mu_{R_2}(b,c))). \qquad (4.2)$$

Композиция устанавливает бинарное отношение между элементами множеств A и C опосредованно через элементы множества B.

Пример 4.4. На трех множествах $A=\{a : a-$студенты университета$\}$, $B=\{b : b-$студенческие группы$\}$, $C=\{c : c-$факультеты университета$\}$ построены бинарные отношения $R_1 \subseteq A\cdot B$ и $R_2 \subseteq B\cdot C$ со следующими функциями принадлежности $\mu_{R_1}(a,b)$: «студент a учится в группе b», $\mu_{R_2}(b,c)$: «группа b относится к факультету c». Тогда композиция $R_1 \circ R_2=\{(a,c):(a,b)\in R_1,(b,c)\in R_2\}$ приведет к построению бинарного отношения с функцией принадлежности $\mu_{R_1\circ R_2}(a,c)$: «студент a учится на факультете c».

.

Пример 4.5. Бинарные отношения $R_1 \subseteq A\cdot B$ и $R_2 \subseteq B\cdot C$ представлены следующими матрицами:

$$M_{R_1}=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}9\\ 1 & 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}3\\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5\end{pmatrix}\qquad M_{R_2}=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}5\\ 0{,}2 & 0{,}7\\ 0{,}9 & 0{,}3\\ 1 & 0{,}7\end{pmatrix}$$

Так как $|A|=3, |B|=4, |C|=2$, то матрица композиции этих бинарных отношений $\|M_{R_1\circ R_2}\|$ будет иметь три строки и два столбца, а элементы в ней вычисляются (4.2) как $m_{R_1\circ R_2}(i,j)=\max\limits_{k=1}^{4}(\min(m_{R_1}(i,k),m_{R_2}(k,j)))$, например:

$m_{R_1\circ R_2}(1{,}1)=\max\limits_{k=1}^{4}(\min(m_{R_1}(1,k),m_{R_2}(k,1)))=$ max[min(0,8; 0,8), min(0,5; 0,2), min(0,2; 0,9), min(0,9; 1)]= max[0,8; 0,2; 0,2; 0,9]=0,9

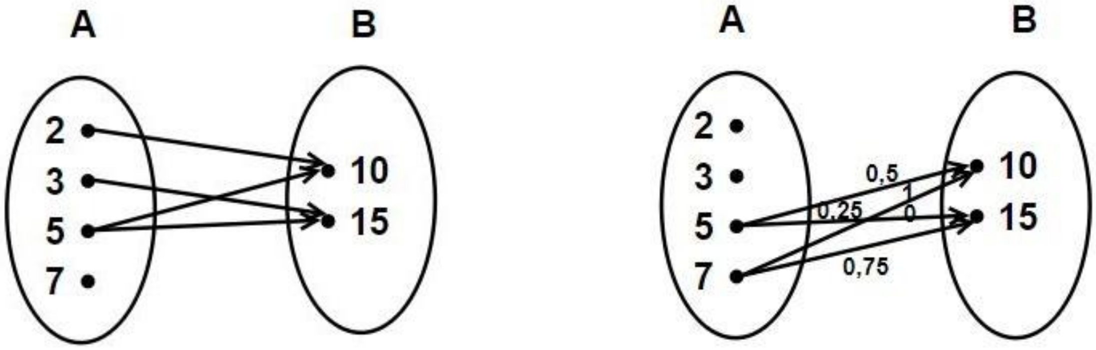
$m_{R_1\circ R_2}(1{,}2)=\max\limits_{k=1}^{4}(\min(m_{R_1}(1,k),m_{R_2}(k,2)))=$ max[min(0,8; 0,5), min(0,5; 0,7), min(0,2; 0,3), min(0,9; 0,7)]= max[0,5; 0,5; 0,2; 0,7]=0,7

Тогда матричное представление композиции бинарных отношений R_1 и R_2 имеет следующий вид:

$$M_{R_1 \circ R_2} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}7 \\ 0{,}7 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

4.4 Отображения множеств, функции на множествах

Всякое бинарное отношение $R \subseteq A \cdot B$ можно рассматривать как отображение $f : A \to B$. **Отображением** $f : A \to B$ называется соответствие, установленное между элементами *множества оригиналов (прообразов)* A и элементами *множества образов* B в отношении R. Если упорядоченная пара $(a,b) \in R$, то ее можно рассматривать как отображение оригинала a в образ b: $f(a) = b$. Графически соответствие элементов при отображении $f : A \to B$ изображается с помощью дуг, у которых истоком является оригинал, а стоком – его образ. Если отношение R нечеткое, то дугам присваиваются веса, равные степеням принадлежности соответствующих пар $(a,b) \in R$. На рисунке 4.1 приведены примеры графического представления отображений $f : A \to B$ для бинарных отношений R_1 и R_2 из примера 3.1: $\mu_{R_1}(a,b)$: «a делит нацело b» (рис. 4.1а), $\mu_{R_2}(a,b)$: «5 a намного больше, чем b» (рис. 4.1б).



а) б)

Рисунок 4.1 – Примеры отображений множеств

Отображение $f: A \to B$ называется **функцией**, если оно устанавливает однозначное соответствие оригиналов, т.е. $f(a) = b \vee f(a) = c \Rightarrow b = c$ (у оригинала может быть только один образ или ни одного). Не всякое отображение является функцией, например, на рисунке 4.1 приведены примеры отображений, которые не являются функциями.

Областью определения функции или областью отправления функции $f: A \to B$ называется множество $Domf = \{a : a \in A, \exists b \in B(b = f(a))\}$. **Областью значений функции** или областью прибытия функции $f: A \to B$ называется множество $\operatorname{Im} f = \{b : b \in B, \exists a \in A(b = f(a))\}$. Очевидно, что $Domf \subseteq A$, $\operatorname{Im} f \subseteq B$.

Если у функции $f: A \to B$ область определения $Domf = A$, то такая функция называется **тотальной**, в противном случае – **частичной**. **Сужением** функции $f: A \to B$ на множество $M \subset A$ называется функция $f|M$, определяемая бинарным отношением $R|M = \{(a,b) : (a,b) \in R, a \in M\}$. В этом случае функция $f: A \to B$ является **продолжением** функции $f|M$.

Следует заметить, что фунциональность отображения $f: A \to B$ и тотальность функции определяется только множеством оригиналов A.

Пример 4.6. На множествах $A = \{a : a -$ студенты университета$\}$, $B = \{b : b -$ студенческие группы$\}$ построено бинарное отношение $R \subseteq A \cdot B$ с функцией принадлежности $\mu_R(a,b)$: «студент a учится в группе b». Отображение $f: A \to B$ схематично представлено на рисунке 4.2. Проанализируем множество оригиналов: каждый оригинал имеет один образ. Следовательно, отображение $f: A \to B$ на рисунке 4.2 является функцией, причем тотальной. Сузим данную функцию на множество $M \subset A$, где будут студенты, фамилии которых начинаются с буквы «А». Тогда функция $f|M$ будет определяться бинарным отношением $R|M = \{(a,b) : (a,b) \in R, a \in M\}$ и задавать соответствие студентов, фамилии которых начинаются с буквы «А», и всех студенческих групп университета.

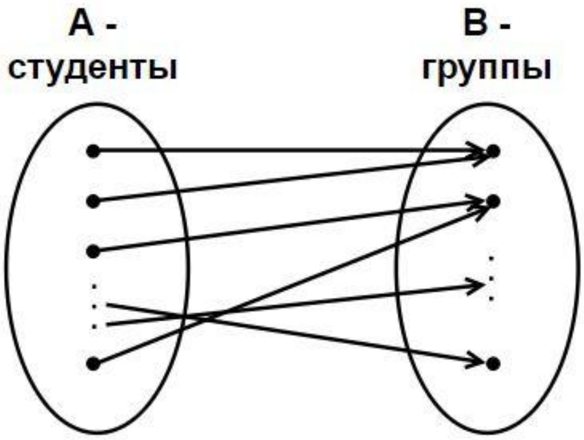


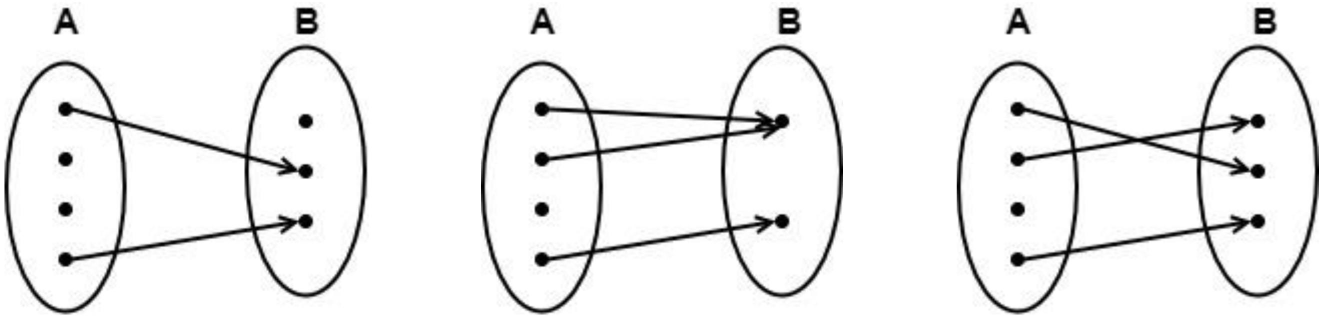
Рисунок 4.2 – Пример тотальной функции

В зависимости от множества образов B различают следующие **виды** функций.

1). Функция $f : A \to B$ называется **инъективной** (или инъекцией), если выполняется следующее условие: $f(a) = b \vee f(a) = c \Rightarrow b = c$, т.е. у каждого образа может быть только один прообраз или ни одного. Пример инъекции приведен на рисунке 4.3,а.

2). Функция $f : A \to B$ называется **сюръективной** (или сюръекцией), если выполняется следующее условие: $\forall b \in B(\exists a \in A: f(a) = b)$, т.е. у каждого образа есть хотя бы один прообраз. Пример сюръекции приведен на рисунке 4.3,б. Сюръективной является и функция в примере 4.6 (рис. 4.2).

2). Функция $f : A \to B$ называется **биективной** (или биекцией), если она одновременно инъективна и сюръективна, т.е. выполняется следующее условие: $\forall b \in B(\exists! a \in A: f(a) = b)$, т.е. у каждого образа есть только один прообраз. Биекцию часто называют *взаимно однозначным* соответствием. Пример биекции приведен на рисунке 4.3,в.



а) инъекция б) сюръекция в) биекция

Рисунок 4.3 – Примеры видов функций

Отметим следующие важные особенности отображений для обратных бинарных отношений.

1). Если функция $f: A \to B$ является тотальной биекцией для отношения $R \subseteq A \cdot B$, то обратное отношение $R^{-1} \subseteq B \cdot A$ также является тотальной биекцией.

2). Если функция $f: A \to B$ является инъекцией для отношения $R \subseteq A \cdot B$, то обратное отношение $R^{-1} \subseteq B \cdot A$ также является функцией (возможно, частичной).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ТЕМЕ № 4

1. На множествах $A = \{1,2,3\}$ и $B = \{4,5,9\}$ построено бинарное отношение R со следующей функцией принадлежности: $\mu_R(a,b) : a^2 < b$.

   Выберите верные утверждения.

   a. $|A \cdot B| = 9$

   b. $|R| = 6$

   c. $\mu_R(1,4) = 1$

   d. $(4,5) \in R$

   e. $\mu_R(2,5) = 0,5$

   f. $(2,9) \in R$

   g. $DomR = A$

   h. $\operatorname{Im} R = B$

2. На множествах $A = \{1,2,3\}$ и $B = \{4,5,9\}$ построено бинарное отношение $R = \{(1,4),(1,5),(1,9),(2,5),(2,9)\}$.

   Выберите верные утверждения.

   a. $R^{-1} = \{(4,1),(5,1),(9,1),(5,2),(9,2)\}$

   b. $R^{-1} = \{(4,1),(5,1),(9,1),(5,4),(9,4)\}$

   c. $|R| = |R^{-1}|$

   d. $DomR^{-1} = B$

   e. $\operatorname{Im} R^{-1} = A$

3. Бинарные отношения $R_1 \subseteq A \cdot B$ и $R_2 \subseteq B \cdot C$ представлены следующими матрицами:

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,2 & 1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,7 & 0,8 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{R_2} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 \\ 0,8 & 0,3 \\ 1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

   Выберите верные утверждения.

   a. Матрица $\|M_{R_1 \circ R_2}\|$ имеет 3 строки и 2 столбца.

b. Матрица $\left\| M_{R_1 \circ R_2} \right\|$ имеет 4 строки и 2 столбца.

c. Матрица $\left\| M_{R_1 \circ R_2} \right\|$ не имеет единичных элементов.

d. Матрица $\left\| M_{R_1 \circ R_2} \right\|$ не имеет нулевых элементов

e. $m_{R_1 \circ R_2}(1,2) = 0,9$

f. $m_{R_1 \circ R_2}(2,2) = 0,3$

4. На множествах $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ построено бинарное отношение $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_3, b_2), (a_4, b_3)\}$.
Выберите верные утверждения.

a. Отображение $f : A \to B$ является функцией, причем тотальной.

b. Отображение $f : A \to B$ является функцией, причем частичной.

c. Отображение $f : A \to B$ не является функцией.

d. Функция $f : A \to B$ является инъекцией.

e. Функция $f : A \to B$ является сюръекцией.

f. Функция $f : A \to B$ является биекцией.

5. СВОЙСТВА СПЕЦИАЛЬНЫХ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

5.1 Понятие специального бинарного отношения

Пусть задано непустое множество $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. **Специальным бинарным отношением** R на множестве X называется новое множество $R \subseteq X \cdot X$, где $X \cdot X$ – результат прямого декартова произведения множества X самого на себя. Таким образом, специальное бинарное отношение R имеет $DomR \subseteq X$ и $\operatorname{Im} R \subseteq X$, т.е. в нем могут быть упорядоченные пары с одинаковыми координатами $(x,x) \in R$, а также упорядоченные пары вида $(x,y) \in R$ и $(y,x) \in R$. При отображении $f : X \to X$ множество оригиналов (прообразов) и множество образов совпадает с исходным множеством X. Графическое изображение специального бинарного отношения называется **графом**. Если отношение $R \subseteq X \cdot X$ нечеткое, то и граф является нечетким (каждая дуга $(x,y) \in R$ имеет вес, равный степени принадлежности соответствующей пары к множеству R). При этом одному и тому же специальному бинарному отношению R можно поставить в соответствие не один, а несколько графов, отличающихся между собой только кратностью дуг.

Пример 5.1. Город Кёнигсберг, центр сегодняшнего города Калининграда, располагается в устье реки Перголя. Все жители этого города проживают на берегах этой реки, которые мы обозначим как «a» и «d», а также на островах – «b» и «c». Все эти участки суши соединены семью мостами так, как показано на рисунке 5.1 слева. Построим специальное бинарное отношение R на множестве $X = \{a,b,c,d\}$ с функцией принадлежности $\mu_R(x,y)$: «участки суши x и y соединены мостом».

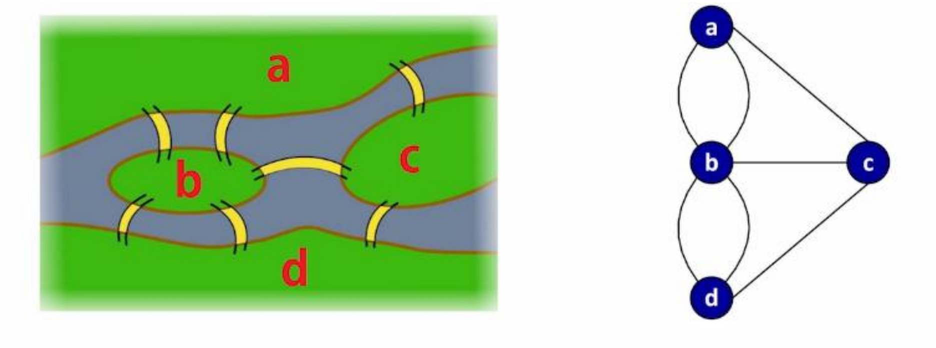


Рисунок 5.1 – Граф для задачи о Кёнингсбергских мостах

Тогда $R = \{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(b,d),(c,a),(c,b),(c,d),(d,b),(d,c)\}$. Эйлера заинтересовал вопрос о том, сможет ли любой житель Кёнигсберга, где бы он ни проживал, выйти из своего дома, пройти по всем мостам ровно один раз без повтора и вернуться домой? Справа на рисунке 5.1 граф, который Эйлер построил для решения этой задачи. Здесь каждая пара встречных дуг заменена ребром, а кратность ребер отражает важное свойство моделируемого объекта в контексте решаемой задачи (наличие нескольких мостов).

5.2 Основные свойства специальных бинарных отношений

5.2.1 Рефлексивность

Рефлексивность – это основное свойство специальных бинарных отношений, зависящее от наличия (отсутствия) в нем упорядоченных пар с одинаковыми координатами.

Специальное бинарное отношение $R \subseteq X \cdot X$ называется **рефлексивным**, если выполняется условие

$$\forall x \in X : \mu_R(x,x) = 1. \qquad (5.1)$$

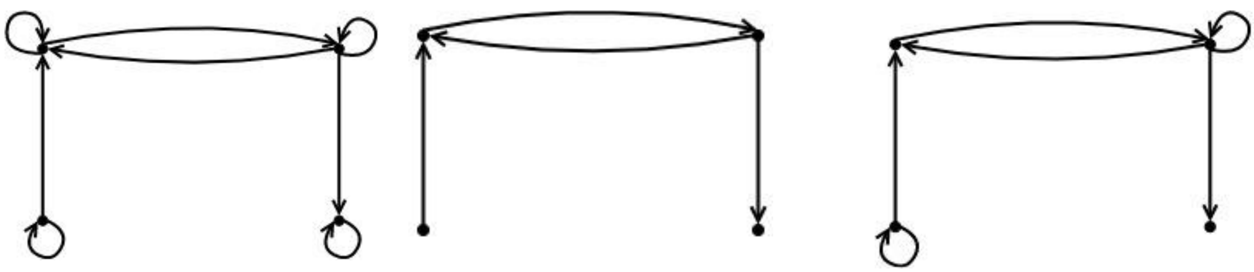
Специальное бинарное отношение $R \subseteq X \cdot X$ называется **антирефлексивным**, если выполняется условие

$$\forall x \in X : \mu_R(x,x) = 0. \quad (5.2)$$

В противном случае отношение $R \subseteq X \cdot X$ не обладает свойством рефлексиности, т.е. оно и **не рефлексивное, и не антирефлексивное**.

Следует заметить, что матрица $\|M_R\|$ для рефлексивного отношения имеет только единичные элементы, а для антирефлексивного отношения – только нулевые элементы на главной диагонали.

На рисунке 5.2 приведены примеры графического изображения рефлексивного (рис. 5.2,а), антирефлексивного (рис. 5.2,б) и не обладающего свойством рефлексивности (рис. 5.2,в) специального бинарного отношения.



а) рефлексивное б) антирефлексивное в) не рефлексивное и не антирефлексивное

Рисунок 5.2 – Примеры специального бинарного отношения

5.2.2 Симметричность

Симметричность – это основное свойство специальных бинарных отношений, зависящее от наличия (отсутствия) в нем упорядоченных пар вида $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$.

Специальное бинарное отношение $R \subseteq X \cdot X$ называется **симметричным**, если для $x \neq y$ выполняется условие

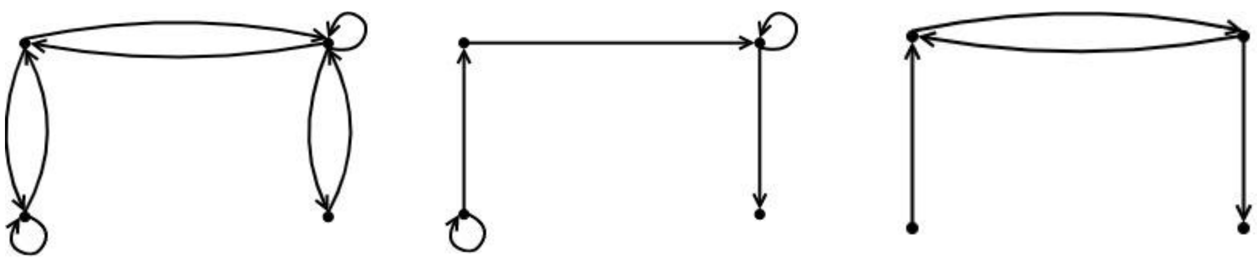
$$\forall (x, y) \in R \exists (y, x) \in R : \mu_R(x, y) = \mu_R(y, x) . \qquad (5.3)$$

Специальное бинарное отношение $R \subseteq X \cdot X$ называется **антисимметричным**, если для $x \neq y$ выполняется условие

$$\forall (x, y) \in R \exists (y, x) \in R : \mu_R(x, y) \neq \mu_R(y, x) \wedge \mu_R(x, y) = \mu_R(y, x) = 0 . \qquad (5.4)$$

В противном случае отношение $R \subseteq X \cdot X$ не обладает свойством симметричности, т.е. оно **и не симметричное, и не антисимметричное**.

Следует заметить, что для симметричного отношения матрица $\|M_R\|$ симметрична относительно главной диагонали, т.е. каждая i–ая строка совпадает с i–ым столбцом. На рисунке 5.3 приведены примеры графического изображения симметричного (рис. 5.3,а), антисимметричного (рис. 5.3,б) и не обладающего свойством симметричности (рис. 5.3,в) специального бинарного отношения.



а) симметричное б) антисимметричное б) не симметричное и не антисимметричное

Рисунок 5.3 – Примеры специального бинарного отношения

5.2.3 Транзитивность

Отношением второй степени для специального бинарного отношения $R \subseteq X \cdot X$ называется новое множество $R^2 = R \circ R$, которое строится по правилам (4.1) и (4.2). Множество R^2 содержит в себе упорядоченные пары, для которых выполняется условие

$$\forall(x,z)\in R^2:(x,y)\in R\vee(y,z)\in R. \tag{5.5}$$

Специальное бинарное отношение $R\subseteq X\cdot X$ называется **транзитивным**, если для каждой тройки элементов $x\neq y\neq z$ из множества X выполняется условие

$$(x,y)\in R\vee(y,z)\in R\Rightarrow(x,z)\in R. \tag{5.6}$$

Пусть отношение $R\subseteq X\cdot X$ представлено матрицей M_R, тогда отношение второй степени R^2 будет представлено матрицей M_{R^2} , элементы в которой вычисляются по формуле (4.2). Проверка условия транзитивности этого отношения (5.6) сводится к поэлементному сравнению матриц M_R и M_{R^2} . Если каждый элемент в матрице M_{R^2} **не больше** соответствующего элемента в матрице M_R, то это отношение R транзитивно, в противном случае это отношение не обладает свойством транзитивности.

Пример 5.2. Специальное бинарное отношение $R\subseteq X\cdot X$ построено на множестве $X=\{a,b,c,d\}$ и представлено в виде матрицы отношения

$$M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

Необходимо проверить, является ли это отношение транзитивным?

Для это вначале построим матрицу по правилу (4.2) для композиции $R\circ R$

$$M_{R^2}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Здесь $m_{R^2}(1,1) = \max\limits_{i=1}^{4}(\min(m_R(1,i), \mu_R(i,1))) =$

$$\max\,(\min(0,0), \min(1,0), \min(0,0), \min(1,0)) = 0,$$

$$m_{R^2}(1,2) = \max\limits_{i=1}^{4}(\min(m_R(1,i), \mu_R(i,2))) =$$

$$\max\,(\min(0,1), \min(1,0), \min(0,1), \min(1,1)) = 1 \text{ и т.д.}$$

Очевидно, что $R^2 = \{(a,b),(c,b)\}$. Поэлементное сравнение матриц M_R и M_{R^2} установило, что отношение $R \subseteq X \cdot X$ транзитивно (каждый элемент в матрице M_{R^2} *не больше* соответствующего элемента в матрице M_R). На рисунке 5.4 слева изображен граф для отношения R, а справа – граф для отношения R^2. Наличие дуг (a,b) и (c,b) в обоих графах характеризует транзитивность специального бинарного отношения R.

а) отношение R б) отношение R^2

Рисунок 5.4 – Графическое изображение отношений

Пример 5.3. Нечеткое специальное бинарное отношение $R \subseteq X \cdot X$ построено на множестве $X = \{a,b,c,d\}$ и представлено в виде матрицы отношения

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Необходимо проверить все основные свойства этого отношения.

Так как на главной диагонали матрицы M_R не все элементы равны 1, то это отношение не является рефлексивным. Отсутствие всех нулей на главной диагонали матрицы M_R указывает на то, что это отношение и не антирефлексивно. Поэтому $R \subseteq X \cdot X$ не обладает свойством рефлексивности.

Сравнение каждой i–ой строки с i–ым столбцом установило, что все они различны, что указывает на антисимметричность этого отношения.

Для проверки транзитивности заданного отношения построим матрицу

$$M_{R^2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поэлементное сравнение матриц M_R и M_{R^2} установило, что отношение $R \subseteq X \cdot X$ транзитивно (каждый элемент в матрице M_{R^2} *не больше* соответствующего элемента в матрице M_R).

Таким образом, заданное нечеткое специальное бинарное отношение $R \subseteq X \cdot X$ является антисимметричным и транзитивным.

Транзитивным замыканием специального бинарного отношения $R \subseteq X \cdot X$ называется множество R_T, являющееся объединением отношений всех его степеней, т.е. $R_T = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$. Считается, что $R^1 = R$, а отношение $i-$степени определяется как $R^i = R^{i-1} \circ R$ (4.1). Если отношение $R \subseteq X \cdot X$ представлено матрицей M_R, то каждое R^i может быть представлено матрицей M_{R^i} (4.2). Построение ряда множеств $R^1, R^2, \dots$ завершается, если на некотором $i-$шаге выполняется условие $M_{R^i} = M_{R^{i-1}}$.

Очевидно, что поиск транзитивного замыкания R_T конечен, т.к. множество X конечно. Для транзитивного специального бинарного отношения $R \subseteq X \cdot X$ справедливо утверждение $R = R_T$.

Пример 5.4. Найдем транзитивное замыкание R_T для отношения $R \subseteq X \cdot X$ из примера 5.2. Мы там установили, что это отношение транзитивно, и построили отношение R^2 (оно представлено матрицей M_{R^2}). Так как $M_{R^1} \neq M_{R^2}$, то перейдем к построению отношения R^3, которое представлено матрицей

$$M_{R^3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как $M_{R^3} = M_{R^2}$, то поиск степеней отношения R можно завершить. Следовательно, транзитивное замыкание для этого отношения $R_T = R^1 \cup R^2$. После объединения этих множеств представим R_T матрицей

$$M_{R_T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

На этом примере мы убедились, что для транзитивного специального бинарного отношения $R = R_T$.

Различные сочетания основных свойств специального бинарного отношения $R \subseteq X \cdot X$ определяют другие свойства этого отношения.

5.3 Свойства четких специальных бинарных отношений

Всякое рефлексивное, симметричное и транзитивное четкое специальное бинарное отношение R называется **эквивалентным**.

Пусть $R \subseteq X \cdot X$ – отношение эквивалентности. Тогда **классом эквивалентности** $[x]$, порожденным элементом $x \in X$, называется такое подмножество элементов $y \in X$, для которых $(x, y) \in R$. Для классов эквивалентности верны следующие утверждения.

1). $x \in X \Rightarrow x \in [x]$

2). $(x, y) \in R \Rightarrow [x] = [y]$

3). Отношение эквивалентности R разбивает множество X на непересекающиеся между собой классы эквивалентности.

Фактор-множеством X / R называется множество, содержащее в качестве элементов все классы эквивалентности $[x]$ в отношении R.

Пример 5.5. Задано X ={Москва, Санкт-Петербург, Тамбов, Берлин, Мюнхен, Лондон}. Построим специальное бинарное отношение $R \subseteq X \cdot X$ с функцией принадлежности $\mu_R(x, y)$: «x и y – города одного государства». Граф этого отношения (рис. 5.5) имеет петлю при каждой вершине (рефлексивность R), у каждой дуги есть встречная дуга (симметричность R). На свойство транзитивности R указывает наличие дуги (Москва, Тамбов) для цепочки

(Москва, Санкт-Петербург), (Санкт-Петербург, Тамбов), а также дуги (Тамбов, Москва) для цепочки (Тамбов, Санкт-Петербург), (Санкт-Петербург, Москва). Следовательно, построенное специальное бинарное отношение R – отношение эквивалентности.

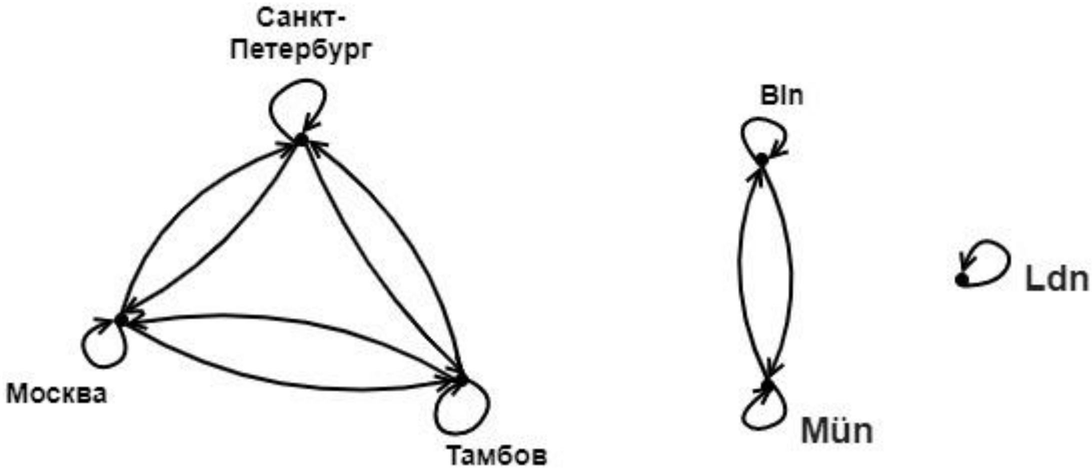


Рисунок 5.5 – Пример эквивалентного отношения

Построим в множестве X классы эквивалентности и перечислим их далее.

[Москва]={Москва, Санкт-Петербург, Тамбов}=[Санкт-Петербург]= [Тамбов]

[Берлин]={Берлин, Мюнхен}=[Мюнхен]

[Лондон]={Лондон}

Тогда фактор-множество X/R={{Москва, Санкт-Петербург, Тамбов}, {Берлин, Мюнхен}, {Лондон}}.

Всякое рефлексивное, антисимметричное и транзитивное специальное бинарное отношение $R \subseteq X \cdot X$ называется отношением **порядка** или частичного порядка на множестве X и обозначается символом $\prec$. Говорят, что элемент

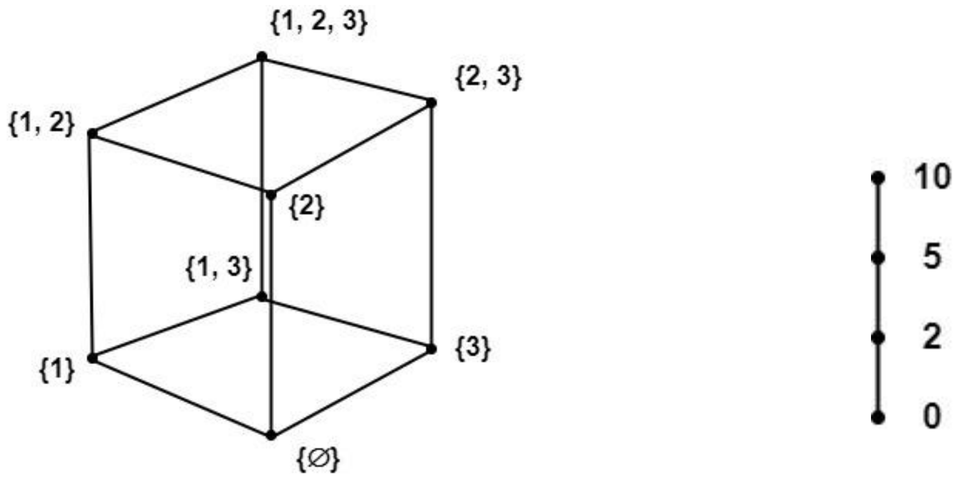
$y \in X$ непосредственно покрывает элемент $x \in X$ в отношении R ($x \prec y$), если нет другого такого элемента $z \in X$, что $x \prec z \prec y$, где $x \neq y \neq z$.

Отношение порядка R на множестве X, для которого любые два элемента сравнимы, называется отношением **линейного порядка**. Множество $X_R = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ называется **упорядоченным**, если $x_1 \prec x_2 \prec ... \prec x_n$ в отношении R, т.е. в таких множествах порядок перечисления важен.

Пример 5.6. На множестве $X = \{5,2,10,0\}$ построено отношение $R \subseteq X \cdot X$ с функцией принадлежности $\mu_R(x,y)$: «$x \geq y$». Так как любые два элемента множества X сравнимы в отношении R, то R – отношение линейного порядка. Оно определяет упорядоченное множество $X_R = \{10,5,2,0\}$.

Любое упорядоченное множество X_R можно представить в виде **диаграммы Хассе**, в которой каждый элемент изображается точкой на плоскости. Если $x \prec y$, то эти точки соединяют на схеме отрезком, причем точка x изображается на схеме **ниже**, чем y.

Пример 5.7. Пусть имеется множество $A = \{1,2,3\}$. Булеан $\mathrm{P}(A)$ – это множество, включающее в себя в качестве элементов все возможные подмножества A, в том числе и пустое. Известно, что $|A| = n \Rightarrow |\mathrm{P}(A)| = 2^n$. Тогда X= P(A)= $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$. Построим отношение порядка R на множестве X с функцией принадлежности $\mu_R(x,y)$: «x включает y». На рисунке 5.6,а представлено с помощью диаграммы Хассе частично упорядоченное множество X_R для этого отношения, а на рисунке 5.6,б – для отношения линейного порядка из примера 5.6.



а) отношение нелинейного порядка б) отношение линейного порядка

Рисунок 5.6 – Примеры диаграмм Хассе

5.4 Свойства нечетких специальных бинарных отношений

Некоторые важные свойства нечетких специальных бинарных отношений представлены далее в таблице. Здесь Р – рефлексивность, АР – антирефлексивность, Т – транзитивность, С – симметричность, АС – антисимметричность.

Свойство	**Р**	**АР**	**Т**	**С**	**АС**
сходство	+			+	
несходство		+		+	
подобие	+		+	+	
препорядок	+		+		
нестрогий порядок	+		+		+
строгий порядок		+	+		+

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ТЕМЕ № 5

1. На множестве $X = \{1,2,3,4\}$ построено специальное бинарное отношение R со следующей функцией принадлежности: $\mu_R(a,b) : a \le b$.

   Выберите верные утверждения.

   a. $|X \cdot X| = 12$

   b. $|R| = 10$

   c. $\forall a \in X : \mu_R(a,a) = 1$

   d. $\forall a \in X : \mu_R(a,a) = 0$

   e. $(2,3) \in R$

   f. $(3,2) \in R$

2. Специальное бинарное отношение R представлено матрицей

$$M_R = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 1 & 0{,}8 & 0.3 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}9 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 1 & 1 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

   Выберите верные утверждения.

   a. Это рефлексивное отношение.

   b. Это антирефлексивное отношение.

   c. Данное отношение не обладает свойством рефлексивности.

3. Специальное бинарное отношение R представлено матрицей

$$M_R = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 1 & 0{,}8 & 0.3 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}9 & 1 \\ 0{,}8 & 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

   Выберите верные утверждения.

   a. Это симметричное отношение.

   b. Это антисимметричное отношение.

   c. Данное отношение не обладает свойством симметричности.

4. На множестве $X = \{1,2,3,4\}$ построено специальное бинарное отношение R со следующей функцией принадлежности: $\mu_R(a,b) : a < b$.
   Выберите верные утверждения.
   a. Это транзитивное отношение.
   b. Это отношение не обладает свойством транзитивности.
   c. Отношение $R^2 = \{(1,3),(1,4),(2,3)\}$.
   d. Отношение $R^2 = \{(1,3),(1,4),(2,4)\}$.
   e. Отношение $R^2 = \{(1,2),(1,4),(2,4)\}$.

5. Специальное бинарное отношение R представлено следующей матрицей:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Выберите верные утверждения.
   a. Это эквивалентное отношение.
   b. Это отношение не обладает свойством эквивалентности, так как оно рефлексивное, симметричное, но не обладает свойством транзитивности.
   c. Это отношение не обладает свойством эквивалентности, так как оно рефлексивное, транзитивное, но антисимметричное.
   d. Это отношение не обладает свойством эквивалентности, так как оно рефлексивное, транзитивное, но не обладает свойством симметричности.
   e. Это отношение не обладает свойством эквивалентности, так как оно симметричное, транзитивное, но не обладает свойством рефлексивности.
   f. Это отношение не обладает свойством эквивалентности, так как оно симметричное, транзитивное, но антирефлексивное.

6. Специальное бинарное отношение R представлено следующей матрицей:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Выберите верные утверждения.
   a. Это отношение линейного порядка.

b. Это отношение нелинейного порядка.

c. Это отношение не обладает свойством порядка, так как оно рефлексивное, антисимметричное, но не обладает свойством транзитивности.

d. Это отношение не обладает свойством порядка, так как оно рефлексивное, транзитивное, но не антисимметричное.

e. Это отношение не обладает свойством порядка, так как оно рефлексивное, транзитивное, но не обладает свойством симметричности.

f. Это отношение не обладает свойством порядка, так как оно антисимметричное, транзитивное, но не обладает свойством рефлексивности.

g. Это отношение не обладает свойством порядка, так как оно антисимметричное, транзитивное, но антирефлексивное.

Литература

1. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets // Information and Control. 1965. T. 8, № 3. P. 338-353.
2. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М.: Мир, 1976. — 166 с.
3. *Конышева Л.К., Назаров Д.М.* Основы теории нечетких множеств: Учебное пособие. – СПб.: Питер, 2011. – 192с.: ил.
4. *Осипова В.*А. Основы дискретной математики: Учебное пособие. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2006. – 160с.: ил. – (Высшее образование).
5. *Новиков Ф.*А. Дискретная математика: Учебник для вузов. Стандарт третьего поколения. – СПб.: Питер, 2011. – 384с.: ил.
6. *Андерсон, Джеймс А.* Дискретная математика и комбинаторика.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 960с.: ил.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Миссия университета – открывать возможности для гармоничного развития конкурентоспособной личности и вдохновлять на решение глобальных задач.

Лисицына Любовь Сергеевна

Основы теории нечетких множеств

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49