



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.И. Попов, И.Ю. Попов

# ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ



Санкт-Петербург  
2020

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ**

**УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

**А.И. Попов, И.Ю. Попов**

**Основные уравнения математической  
физики**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО  
по направлениям подготовки 01.03.02, 12.03.03, 16.03.01 в качестве учебного  
пособия для реализации основных профессиональных образовательных  
программ высшего образования бакалавриата

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

**Санкт-Петербург**

**2020**

Попов А.И., Попов И.Ю. Основные уравнения математической физики. Учебное пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2020. – 200 с.

Рецензент:

Уздин Валерий Моисеевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник физико-технического факультета, Университета ИТМО.

Учебное пособие предназначено для студентов академического бакалавриата. В пособии рассмотрены следующие темы: “Одномерное волновое уравнение”, “Одномерное уравнение теплопроводности”, “Уравнение Лапласа”, “Теоремы единственности”, “Классификация линейных уравнений в частных производных 2-го порядка”, “Функция Грина обыкновенного дифференциального оператора”, “Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа”, “Уравнение Гельмгольца”.



**Университет ИТМО** – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2020

© Попов А.И., Попов И.Ю., 2020

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>7</b>
<b>Глава 1. Одномерное волновое уравнение</b>	<b>10</b>
1.1 Постановка задачи. Вывод одномерного уравнения струны	10
1.2 Метод Даламбера (метод бегущих волн, метод характеристик) . . . . .	13
1.3 Метод продолжения. Метод продолжения для полуограниченной струны . . . . .	16
1.4 Жесткое закрепление струны . . . . .	18
1.5 Свободное закрепление струны . . . . .	21
1.6 Конечная струна (начальная и конечная точки жестко закреплены) . . . . .	23
1.7 Метод Фурье (метод стоячих волн, метод разделения переменных). Метод разделения переменных для конечной струны (начальная и конечная точки жестко закреплены)	26
1.8 Метод Фурье для свободного закрепления струны . . . . .	31
1.9 Неоднородное уравнение струны (вынужденные колебания струны) . . . . .	36
1.10 Задачи о вынужденных колебаниях . . . . .	42
<b>Глава 2. Одномерное уравнение теплопроводности</b>	<b>45</b>
2.1 Постановка задачи. Вывод одномерного уравнения теплопроводности . . . . .	45
2.2 Метод Фурье для конечного стержня . . . . .	46
2.3 Метод Фурье для конечного теплоизолированного стержня	50
2.4 Неоднородное уравнение теплопроводности . . . . .	53
2.5 Уравнение теплопроводности с неоднородными краевыми условиями . . . . .	55
2.6 Уравнение теплопроводности для бесконечного стержня .	57

2.7	Задачи об установившихся процессах . . . . .	60
2.8	Законы Фурье для температурных колебаний в почве . . . . .	64
2.9	Метод подобия в теории теплопроводности . . . . .	67
2.10	Автомодельные решения нелинейных уравнений . . . . .	72
2.11	Уравнение Бюргерса . . . . .	73
2.12	Уравнение Кортевега-де Фриза . . . . .	75
2.13	Задача о возрасте Земли . . . . .	78
<b>Глава 3. Уравнение Лапласа</b>		<b>81</b>
3.1	Постановка задачи. Вывод уравнения Лапласа . . . . .	81
3.2	Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге . . . . .	81
3.3	Задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце . . . . .	87
3.4	Задача Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике	90
<b>Глава 4. Теоремы единственности</b>		<b>98</b>
4.1	Теорема единственности для уравнения струны . . . . .	98
4.2	Теорема единственности для уравнения теплопроводности	100
4.3	Формулы Грина . . . . .	105
4.4	Третья формула Грина в двумерном случае . . . . .	111
4.5	Теорема единственности для уравнения Лапласа . . . . .	117
4.6	Вторая формула Грина в пространстве $\mathbb{R}^n$ . . . . .	119
<b>Глава 5. Классификация линейных уравнений в частных производных 2-го порядка</b>		<b>125</b>
5.1	Классификация линейных уравнений в частных производных 2-го порядка в пространстве $\mathbb{R}^n$ . . . . .	125
5.2	Классификация линейных уравнений в частных производных 2-го порядка в пространстве $\mathbb{R}^2$ . . . . .	130
<b>Глава 6. Функция Грина обыкновенного дифференциального оператора</b>		<b>141</b>

6.1	Определение и процедура построения функции Грина . . .	141
6.2	Пример построения функции Грина обыкновенного дифференциального оператора . . . . .	147
6.3	Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля . . . . .	150
6.4	Пример. Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля . . . .	153
6.5	Пример. Задача Штурма-Лиувилля с неоднородными краевыми условиями. . . . .	155

## **Глава 7. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа**

157

7.1	Определение и способ построения функции Грина . . . . .	157
7.2	Инвариантность функции Грина относительно перестановки аргументов . . . . .	159
7.3	Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае . . . . .	163
7.4	Метод изображений . . . . .	164
7.5	Функция Грина задачи Дирихле для полупространства . .	164
7.6	Функция Грина для двугранного угла . . . . .	167
7.7	Функция Грина для различных двугранных углов . . . . .	168
7.8	Функция Грина для слоя между двумя параллельными плоскостями . . . . .	170
7.9	Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге . . . . .	171
7.10	Метод инверсий . . . . .	175
7.11	Функция Грина внешней задачи Дирихле для двух касающихся шаров . . . . .	181

## **Глава 8. Уравнение Гельмгольца**

184

8.1	Задача Дирихле для уравнения Гельмгольца . . . . .	185
-----	--	-----

8.2	Формулы Грина для оператора Гельмгольца в пространстве $\mathbb{R}^3$ . . . . .	187
8.3	Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца	192
	<b>Контрольные вопросы</b>	<b>194</b>
	<b>Литература</b>	<b>199</b>

## Введение

“Математики, которые всё открывают, всё устанавливают и всё доказывают, должны довольствоваться ролью сухих вычислителей и чернорабочих. Другой же, который ничего не может доказать, а только на всё претендует и хватает на лету, уносит всю славу как своих предшественников, так и своих последователей...”

И.Ньютон о разнице в подходах математика и физика к естествознанию. Цитирование по книге [1].

Математическая физика – раздел математики, который описывает математический аппарат физики. Это именно то, что объединяет математиков и физиков, несмотря на их различия (см. эпиграф). В данном пособии мы не сможем охватить всю эту огромную область математики, а остановимся только на одной, базовой, его части. Главным достижением И.Ньютона было осознание того, что для описания физических явлений надо решать дифференциальные уравнения, которые он и изобрел. С тех пор уже более трехсот лет решение дифференциальных уравнений и является основным математическим методом в физике. Именно его мы и осветим в данном учебном пособии.

Для физики естественно описывать движение, процессы, эволюцию объектов, поэтому в основном приходится иметь дело с функциями нескольких переменных (например, времени и пространственных координат) и, соответственно, с уравнениями в частных производных. Уравнения в частных производных обладают гораздо большим многообразием свойств, чем обыкновенные дифференциальные уравнения. В чём-то, благодаря этому, природа столь разнообразна. Обычно, если речь не идет о бурно протекающих процессах, скачках, катастрофах, для описания

хватает линейных уравнений. При этом физические законы в большинстве своем связаны с уравнениями второго порядка (например, второй закон Ньютона, из которого и проистекает большинство уравнений механики), которые мы и будем в основном рассматривать. И даже при таком серьезном ограничении (линейные уравнения в частных производных второго порядка) удастся описать огромное разнообразие физических явлений.

Линейные уравнения в частных производных второго порядка разбиваются на три типа (гиперболические, параболические и эллиптические), каждый из которых описывает свой класс явлений, обладающий совершенно различными свойствами. Математика в силу своей универсальности помогает понять причину этих различий, а с другой стороны, выявить общие черты у совершенно разных физических эффектов. Например, то, что распространение тепла и диффузия описываются одним и тем же уравнением, отражает глубинное родство этих процессов. В данном пособии мы рассматриваем все типы линейных уравнений в частных производных второго порядка сначала на примерах простых задач, позволяющих ясно показать поведение решений таких уравнений. Так, гиперболические уравнения продемонстрированы на примере одномерного волнового уравнения – уравнения струны, параболические – на примере одномерного уравнения теплопроводности, а эллиптические – на примере уравнения Лапласа. Далее делаются обобщения и рассматриваются более сложные ситуации. Мы старались сделать пособие максимально понятным для читателя, чтобы он мог почувствовать красоту математического подхода к физическим задачам.

Учебное пособие предназначено для студентов университетов, специализирующихся в области теоретической и математической физики, прикладной математики и информатики, фотоники и оптоинформатики, а также технической физики. Изложение материала основано на курсе

лекций, который читался авторами на протяжении ряда лет студентам факультетов информационных технологий и программирования, систем управления и робототехники, фотоники и оптоинформатики, физико-технического факультета.

## Глава 1. Одномерное волновое уравнение

### 1.1 Постановка задачи. Вывод одномерного уравнения струны

Рассмотрим уравнение колебаний струны (одномерное волновое уравнение). Под струной мы понимаем тонкую упругую нить, закрепленную с двух концов, которая может свободно изгибаться. Если мы выведем ее из положения равновесия, струна начнет колебаться.



Рис. 1: Колебания струны

Мы будем рассматривать только поперечные колебания (точки струны движутся перпендикулярно оси  $OZ$ ). Увеличим масштаб графика, чтобы колебания были лучше видны.

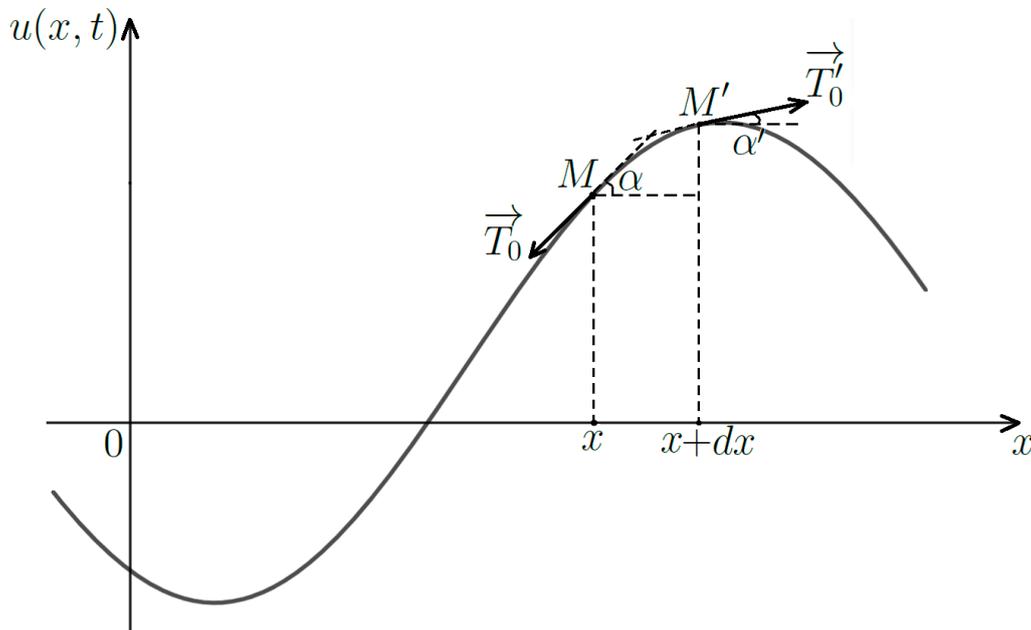


Рис. 2: Струна в зафиксированный момент времени

Положение точки определяется функцией  $u(x, t)$ . Зафиксируем момент времени  $t$  и посмотрим, какие силы действуют на струну. На участок  $MM'$  действуют силы натяжения со стороны других участков струны ( $\vec{T}_0$  и  $\vec{T}'_0$  соответственно;  $|\vec{T}_0| = |\vec{T}'_0| = \vec{T}_0$ ). Нас интересует движение

участка  $MM'$ . Суммарная сила, действующая на  $MM'$  – это  $\vec{T}_0 + \vec{T}'_0$ . Мы рассматриваем только поперечные колебания, следовательно, нас интересует проекция силы на ось  $u(x, t)$  (обозначим ее за  $F$ ).

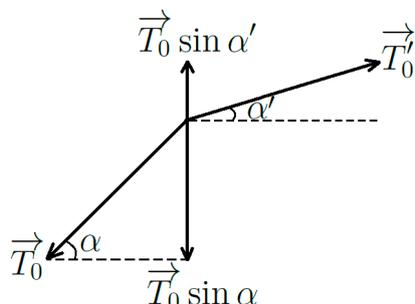


Рис. 3: Силы, действующие на струну

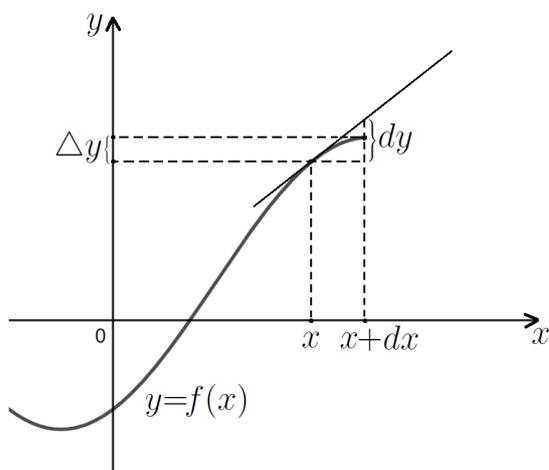
$$F = T_0 \sin \alpha' - T_0 \sin \alpha. \tag{1.1}$$

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \approx \left/ \begin{array}{l} |\operatorname{tg} \alpha| \ll 1, \text{ так как} \\ \text{отклонение струны малое} \end{array} \right/ \approx \operatorname{tg} \alpha = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M.$$

Последнее равенство имеет место, так как производная – это тангенс угла наклона касательной к графику функции. Тогда формулу (1.1) можно переписать в виде:

$$F = T_0 \left( \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M'} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M \right). \tag{1.2}$$

Напомним некоторые сведения из дифференциального исчисления.



При малых изменениях функции ее приращение  $\Delta y$  можно приближенно заменить дифференциалом  $dy$  :

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x + dx) - y(x) \approx \\ &\approx dy = y'(x)dx. \end{aligned}$$

Рис. 4: Разница между дифференциалом  $dy$  и приращением функции  $\Delta y$

Отклонение струны считаем малым, поэтому приращение функции  $\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$  мы можем приближенно заменить на ее дифференциал  $d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M'} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M &= \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(x+dx, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)}_{\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} \approx d\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right)dx = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \cdot dx. \end{aligned} \quad (1.3)$$

С учетом (1.3), формулу (1.2) можно переписать в виде:

$$F \approx T_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \cdot dx. \quad (1.4)$$

Посмотрим на задачу с другой стороны. Напишем второй закон Ньютона для участка струны  $MM'$ :

$$F = \underbrace{\rho dx}_{\text{масса}} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)}_{\text{ускорение}}. \quad (1.5)$$

Поясним формулу (1.5). Ускорение  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  – это вторая производная по времени от функции  $u(x, t)$ , задающей координату.  $\rho dx$  – это масса участка струны  $MM'$ , где  $\rho$  – линейная плотность (масса, приходящаяся на единицу длины). Приравниваем друг другу выражения для силы  $F$  в формулах (1.4) и (1.5):

$$\begin{aligned} T_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \cdot dx &= \rho dx \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \Big| \cdot \frac{1}{\rho dx} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{T_0}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \Leftrightarrow \left/ \begin{array}{c} \text{Обозначение:} \\ \frac{T_0}{\rho} = a^2 \end{array} \right/ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad - \text{уравнение свободных колебаний струны.} \end{aligned}$$

Если на струну дополнительно действует внешняя сила  $\vec{F}_1$ , то второй закон Ньютона следует переписать в виде:

$$F + F_1 = \rho dx \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \cdot dx + F_1 = \rho dx \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

Разделим обе части уравнения на  $\rho dx$  :

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \underbrace{\frac{F_1}{\rho dx}}_f = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f \quad - \text{уравнение вынужденных колебаний струны.}$$

Здесь  $f = \frac{F_1}{\rho dx}$  – внешняя сила, рассчитанная на единицу массы струны.

## 1.2 Метод Даламбера (метод бегущих волн, метод характеристик)

Задача Коши для свободных колебаний неограниченной струны:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u'_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases} \quad (1.6)$$

где  $\varphi(x)$  – функция, задающая форму струны в начальный момент времени,  $\psi(x)$  – функция, задающая скорость каждой точки струны в начальный момент времени.

Уравнение решается в явном виде с помощью замены переменных:  $(x, t) \rightarrow (\xi, \eta)$ :

$$\begin{cases} \xi = x + at, \\ \eta = x - at. \end{cases}$$

Для подстановки в уравнение нам понадобятся производные  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} - a \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = a \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - a \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \\ &= a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = a^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставим  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  в уравнение (1.6):

$$a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} \text{ не зависит от } \xi.$$

Следовательно,  $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \tilde{f}(\eta)$ , где  $\tilde{f}(\eta)$  зависит только от переменной  $\eta$ .

Проинтегрируем это равенство по  $\eta$  и получим:

$$u(\xi, \eta) = \int \tilde{f}(\eta) d\eta = f(\eta) + g(\xi),$$

где  $f$  и  $g$  – некоторые функции одной переменной. Вернемся к старым переменным  $(x, t)$ :

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at), \quad (1.7)$$

где  $f(x - at)$  – волна, бегущая направо,  $f(x + at)$  – волна, бегущая налево.

Теперь нужно удовлетворить начальным условиям:

$$u(x, 0) = f(x) + g(x) = \varphi(x), \quad (1.8)$$

$$u'_t(x, 0) = \frac{df(x - at)}{d(x - at)} \cdot \frac{\partial(x - at)}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{dg(x + at)}{d(x + at)} \cdot \frac{\partial(x + at)}{\partial t} \Big|_{t=0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u'_t(x, 0) = \frac{df}{dx} \cdot (-a) + \frac{dg}{dx} \cdot a = \psi(x). \quad (1.9)$$

Система уравнений (1.8), (1.9):

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ -af'(x) + ag'(x) = \psi. \end{cases} \quad \Big| \int_0^x dx$$

$$\begin{aligned}
& -a \int_0^x f'(x) dx + a \int_0^x g'(x) dx = \int_0^x \psi(x) dx \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow -a(f(x) - f(0)) + a(g(x) - g(0)) = \int_0^x \psi(s) ds \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow -f(x) + f(0) + g(x) - g(0) = \frac{1}{a} \int_0^x \psi(s) ds \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow -f(x) + g(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \psi(s) ds + g(0) - f(0).
\end{aligned}$$

С учетом преобразований систему уравнений (1.8), (1.9) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} -f(x) + g(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \psi(s) ds, & (1.10) \\ f(x) + g(x) = \varphi(x). & (1.11) \end{cases}$$

$$(1.10) + (1.11) : g(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(s) ds + \frac{1}{2}g(0) - \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}\varphi(x),$$

$$(1.11) - (1.10) : f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(s) ds - \frac{1}{2}g(0) + \frac{1}{2}f(0).$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= f(x - at) + g(x + at) = \\
&= \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds - \text{формула Даламбера.} \quad (1.12)
\end{aligned}$$

Формула Даламбера позволяет определить положение струны в любой момент времени. Для выявления характера решения (1.12) удобно использовать плоскость состояний  $(x, t)$  (фазовую плоскость).

Прямые  $x - at = const$ ,  $x + at = const$  – характеристики уравнения (1.6).

Функция  $u = f(x - at)$  сохраняет постоянное значение вдоль характеристики  $x - at = const$ , функция  $u = f(x + at)$  постоянна вдоль характеристики  $x + at = const$ . Рассмотрим некоторую точку  $(x_0, t_0)$  и проведем из нее характеристики  $x - at = x_0 - at_0$  и  $x + at = x_0 + at_0$ , пересекающие ось  $OX$  в точках  $x_1 = x_0 - at_0$ ,  $t = 0$  и  $x_2 = x_0 + at_0$ ,  $t = 0$ .

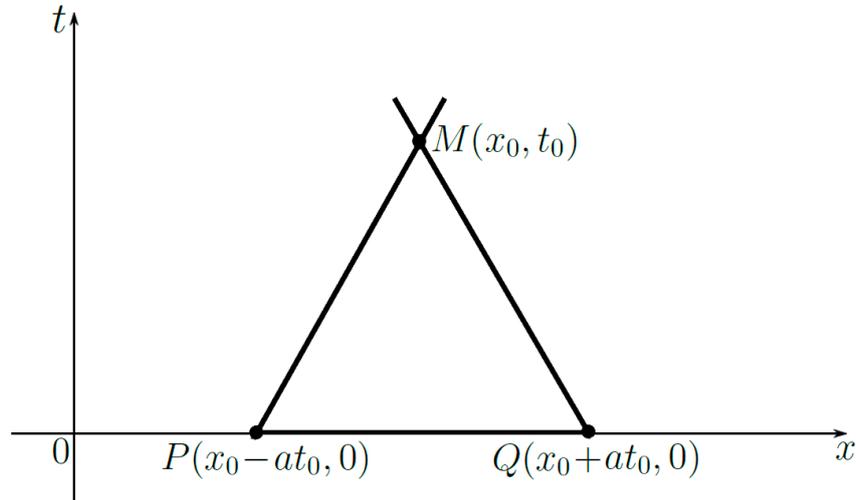


Рис. 5: Характеристический треугольник

$\Delta MPQ$  называется характеристическим треугольником точки  $(x_0, t_0)$ . Из формулы (1.12) видно, что отклонение  $u(x_0, t_0)$  точки струны в момент времени  $t_0$  зависит только от значений начального отклонения в вершинах  $P$  и  $Q$  треугольника  $\Delta MPQ$  ( $\varphi(P)$  и  $\varphi(Q)$ ) и от значений начальной скорости на стороне  $PQ$  ( $\psi(s)$  на отрезке  $PQ$ ).

$$u(M) = \frac{\varphi(P) + \varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{PQ} \psi(s) ds. \quad (1.13)$$

Начальные данные, заданные вне  $PQ$ , не оказывают влияния на значения  $u(x, t)$  в точке  $M(x_0, t_0)$ .

### 1.3 Метод продолжения. Метод продолжения для полугораниченной струны

Рассмотрим задачу о распространении волн на полугораниченной прямой ( $x \geq 0$ ). Существуют следующие основные способы закрепления

струны:

- 1) Жесткое закрепление.
- 2) Свободное закрепление.

Нам понадобятся следующие леммы:

### Лемма 1

Если начальные данные в задаче Коши (1.6) являются нечетными функциями относительно некоторой точки  $x_0$ , то соответствующее решение в этой точке равно 0.

Доказательство:

Примем  $x_0$  за начало координат  $x_0 = 0$ . Тогда условия нечетности начальных данных примут вид:

$$\varphi(x) = -\varphi(-x),$$

$$\psi(x) = -\psi(-x).$$

Согласно формуле (1.12):

$$u(0, t) = \frac{\varphi(-at) + \varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(s) ds = \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(s) ds = 0,$$

так как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку равен 0. ■

### Лемма 2

Если начальные данные в задаче Коши (1.6) являются четными функциями относительно некоторой точки  $x_0$ , то производная по  $x$  соответствующего решения в этой точке равно 0.

Доказательство:

Условия четности начальных данных примут вид:

$$\varphi(x) = \varphi(-x),$$

$$\psi(x) = \psi(-x).$$

Заметим, что производная четной функции является функцией нечетной:

$$\varphi'(x) = -\varphi'(-x).$$

Согласно формуле (1.12):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds \right) \Big|_{x=0} = \\ &= \frac{\varphi'(x-at) + \varphi'(x+at)}{2} \Big|_{x=0} + \frac{1}{2a} \psi(x+at) \Big|_{x=0} - \frac{1}{2a} \psi(x-at) \Big|_{x=0} = \\ &= \frac{\varphi'(-at) + \varphi'(at)}{2} + \frac{1}{2a} (\psi(at) - \psi(-at)) = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

#### 1.4 Жесткое закрепление струны

Сформулируем задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0, t) = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{— однородное граничное условие} \\ \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u'_t(x, 0) = \psi(x), \end{array} \right\} \quad \text{— начальные условия}$$

где  $0 < x < \infty$ ,  $t > 0$ .

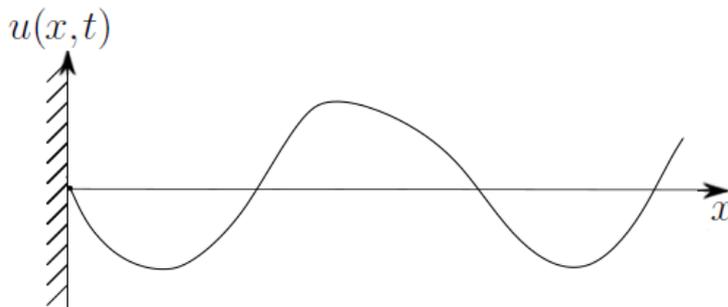


Рис. 6: Жестко закрепленная струна

$u(0, t) = 0$  для любого  $\forall t > 0$ , так как струна жестко закреплена.

Продолжим функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  нечетным образом на всю ось

$(-\infty < x < \infty)$ . Получим новые функции  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$ :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } x \geq 0, \\ -\varphi(-x) & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{при } x \geq 0, \\ -\psi(-x) & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Функции  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  определены на всей оси, значит, для задачи Коши с новыми начальными условиями (написанными для  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$ ) справедлива формула Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x + at) + \Phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(s) ds.$$

Начальные данные в задаче Коши являются нечетными функциями относительно точки 0, следовательно,  $u = 0$  по Лемме 1. Кроме того, при  $x > 0$  найденная функция  $u(x, t)$  удовлетворяет исходным начальным условиям:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \Phi(x) = \varphi(x), \\ u'_t(x, 0) = \Psi(x) = \psi(x), \end{cases} \quad \text{при } x > 0$$

Следовательно, при  $x \geq 0, t \geq 0$  полученная функция  $u(x, t)$  удовлетворяет всем условиям исходной задачи, значит,  $u(x, t)$  является решением задачи Коши. По теореме единственности такое решение единственно. Построим график колебаний жестко закрепленной полубесконечной струны. Пусть исходная форма струны задана функцией  $\varphi(x)$ . Для простоты рисования положим  $\psi(x) \equiv 0$ .

$t = 0$ :

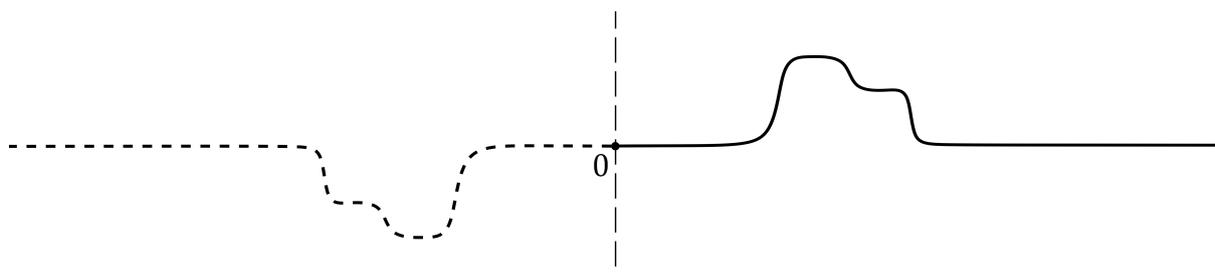


Рис. 7: Колебания струны при  $t = 0$

Сплошной линией изображена начальная форма струны, начальная скорость  $\equiv 0$ . Пунктиром отмечено нечетное продолжение струны (в реальности его нет и в точке 0 струна заканчивается).

$t_1 > 0$ :

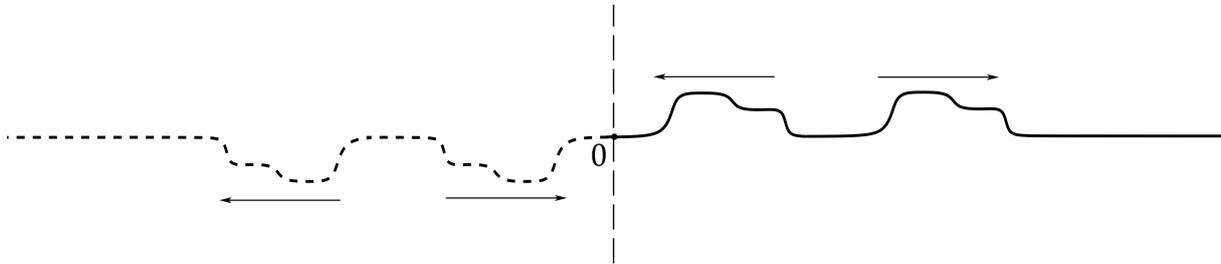


Рис. 8: Колебания струны при  $t_1 > 0$

По формуле Даламбера из исходной волны получится две волны с половинной амплитудой.

$t_2 > t_1$ :

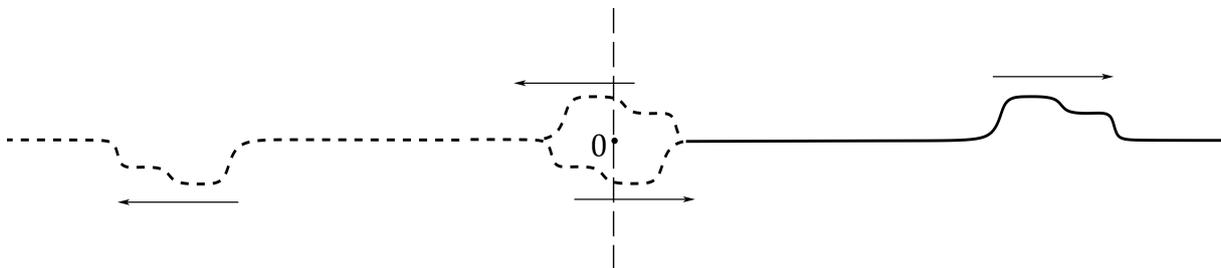


Рис. 9: Колебания струны при  $t_2 > t_1$

Две волны складываются, но в точке 0 амплитуда всегда равна 0: картинка обладает центральной симметрией относительно нуля.

$t_3 > t_2$ :

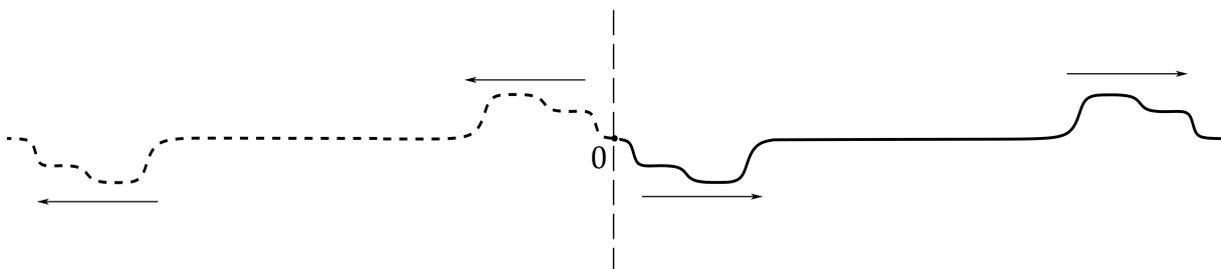


Рис. 10: Колебания струны при  $t_3 > t_2$

### 1.5 Свободное закрепление струны

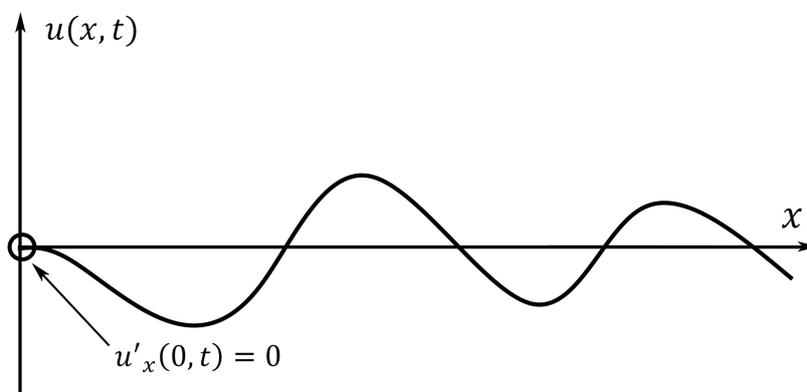


Рис. 11: Свободное закрепление струны

Касательная в точке 0 параллельна оси  $OX$ . С точки зрения физики это значит, что один из концов струны закреплен на невесомом кольце, которое надето на вертикальный стержень. Кольцо может свободно двигаться в вертикальном направлении.

Сформулируем задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u'_t(x, 0) = \psi(x), \end{array} \right\} \quad \text{— начальные условия}$$

$$u'_x(0, t) = 0. \quad \text{— граничное условие (условие Неймана)}$$

где  $0 < x < \infty$ ,  $t > 0$

Продолжим функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  четным образом на всю ось  $-\infty < x < \infty$ . Получим новые функции  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$ :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } x \geq 0, \\ \varphi(-x) & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{при } x \geq 0, \\ \psi(-x) & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Функции  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  определены на всей оси, значит, для задачи Коши с новыми начальными условиями (написанными для  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$ )

справедлива формула Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x + at) + \Phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(s) ds.$$

Начальные данные в задаче Коши являются четными функциями относительно точки ноль, следовательно  $u'(0, t) = 0$ . Кроме того, при  $x > 0$  найденная функция  $u(x, t)$  удовлетворяет исходным начальным условиям:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \Phi(x) = \varphi(x) \\ u'_t(x, 0) = \Psi(x) = \psi(x) \end{cases} \quad \text{при } x > 0$$

Следовательно, при  $x \geq 0, t \geq 0$  полученная функция  $u(x, t)$  удовлетворяет всем условиям исходной задачи, значит,  $u(x, t)$  является решением задачи Коши. По теореме единственности такое решение единственно. Построим график колебаний. Пусть исходная форма струны задана функцией  $\varphi(x)$ . Положим  $\psi(x) \equiv 0$  (начальная скорость струны  $\equiv 0$ ). Пунктиром отмечено четное продолжение формы струны.

$t = 0$ :

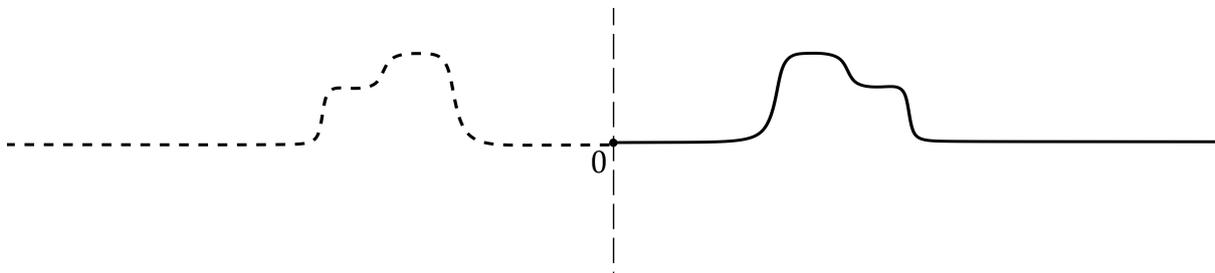


Рис. 12: Исходная волна

По формуле Даламбера из исходной волны получилось две волны с половинной амплитудой.

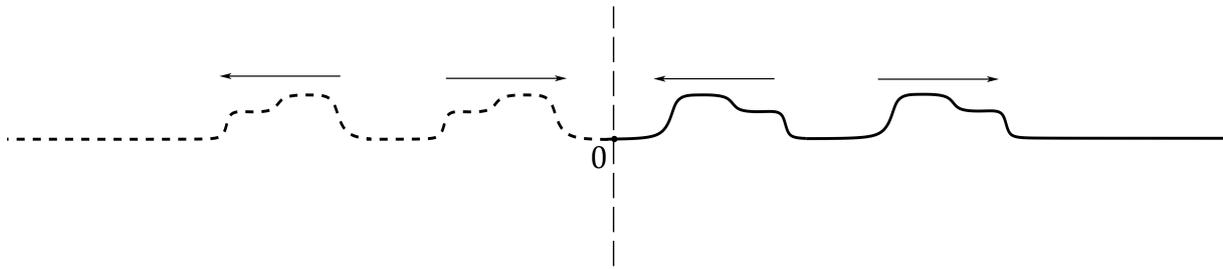


Рис. 13: Две волны с половинной амплитудой

Две волны складываются, амплитуда удваивается, но касательная в точке 0 всегда будет параллельна оси  $Ox$ .

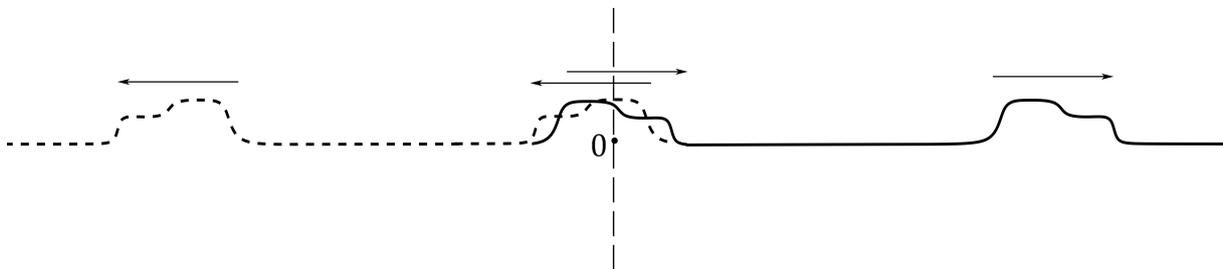


Рис. 14: Сложение волн

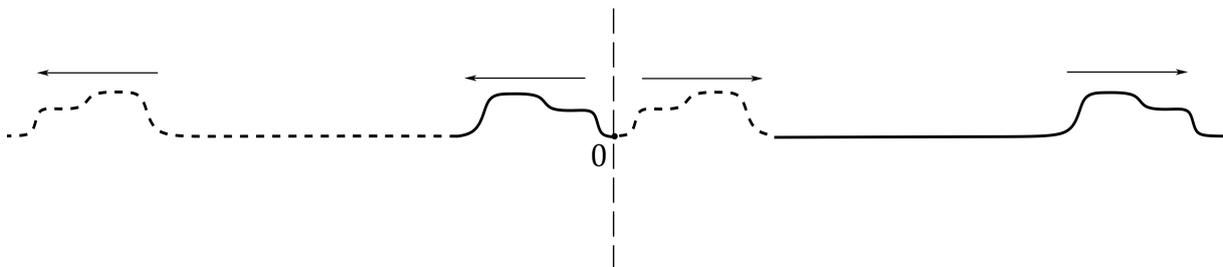


Рис. 15: Результат колебания

### 1.6 Конечная струна (начальная и конечная точки жестко закреплены)

Рассмотрим краевую задачу для ограниченного отрезка  $[0, l]$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ \left. \begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{– однородные граничные условия (Дирихле)} \\ \text{– начальные условия} \end{array}$$

где  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ . Пусть

$$\begin{cases} \Phi(x) = \varphi(x), \\ \Psi(x) = \psi(x), \end{cases} \quad \text{при } 0 \leq x \leq l.$$

Мы хотим использовать формулу Даламбера для всей прямой. Чтобы обеспечить выполнение условий Дирихле относительно точек  $x = 0$ ,  $x = l$ , необходимо продолжить функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  нечетным образом относительно точек  $x = 0$ ,  $x = l$ :

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x) &= -\Phi(-x), & \Phi(x) &= -\Phi(2l - x) \\ \Psi(x) &= -\Psi(-x), & \Psi(x) &= -\Psi(2l - x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \Phi(-x) = \Phi(2l - x), \\ \Psi(-x) = \Psi(2l - x). \end{cases}$$

Заменим переменную:  $x' = -x$ .

Тогда:

$$\begin{cases} \Phi(x') = \Phi(x' + 2l), \\ \Psi(x') = \Psi(x' + 2l), \end{cases}$$

то есть  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  являются периодическими функциями с периодом  $2l$ . Теперь можно воспользоваться формулой Даламбера для всей прямой:

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x + at) + \Phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(s) ds.$$

По лемме 1, при нечетном продолжении начальных условий в задаче Коши, мы получим нули функции  $u(x, t)$  в точках  $x = 0$  и  $x = l$  (то есть обеспечим выполнение условий Дирихле). Следовательно, на отрезке  $[0, l]$  функция  $u(x, t)$  удовлетворит всем условиям исходной задачи. По теореме единственности решение задачи Коши единственно.

Поясним графически метод продолжения функции  $\varphi(x)$  с отрезка  $[0, l]$  на всю числовую ось.



Рис. 16: Функция на отрезке  $[0, l]$

Для того, чтобы обеспечить нуль решения  $u(x, t)$  в точке  $x = 0$ , нужно продолжить  $\varphi(x)$  нечетным образом на отрезок  $[-l, 0]$ .

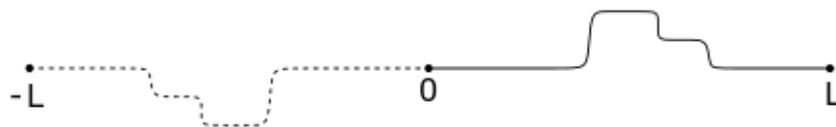


Рис. 17: Продолжение функции на отрезок  $[-l, 0]$

Теперь обеспечим нуль решения  $u(x, t)$  в точке  $x = l$ . Для этого продолжим получившуюся функцию нечетным образом на отрезок  $[l, 3l]$ .

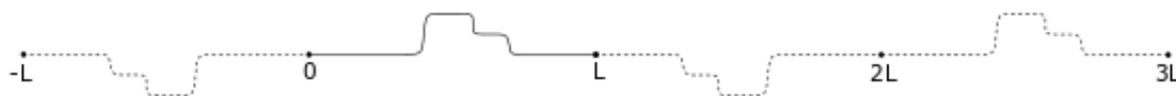


Рис. 18: Продолжение функции на отрезок  $[l, 3l]$

Но теперь начальные данные несимметричны относительно точки  $x = 0$ , значит, мы потеряли нуль решения  $u(x, t)$  в точке  $x = 0$ . Следовательно, нам придется продолжить функцию, лежащую справа от точки  $x = 0$  нечетным образом на отрезке  $[-3l, 0]$ . Снова потеряем нуль решения  $u(x, t)$  в точке  $x = l$ . И так далее.

Вывод: начальные данные нужно продолжать периодически с периодом  $2l$  на всю числовую ось.

**Замечание**

Несложно понять, как следует продолжать начальные данные в случае конечной струны со свободными концами, то есть в случае граничных условий:  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$ . При анализе полубесконечной струны мы установили, что для обеспечения данного краевого условия начальные данные следует продолжать четным образом. По тем же соображениям, что были приведены выше, для конечной струны здесь требуется четное продолжение начальных условий на отрезок  $[-l, 0]$ , а затем периодическое продолжение на всю ось с периодом  $2l$ .

**1.7 Метод Фурье (метод стоячих волн, метод разделения переменных). Метод разделения переменных для конечной струны (начальная и конечная точки жестко закреплены)**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \end{array} \right. \quad (1.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = u(l, t) = 0, \end{array} \right. \quad \text{– граничные условия} \quad (1.15)$$

$$\left. \begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u'_t(x, 0) = \psi(x). \end{array} \right\} \quad \text{– начальные условия} \quad (1.16)$$

Поясним естественность постановки начальных условий на примере музыкальных инструментов. Начальное отклонение струны присутствует в щипковых музыкальных инструментах таких как гитара, балалайка, домра, арфа, гусли и так далее. Начальная скорость задается в струнных ударных музыкальных инструментах: фортепиано, цимбалы, сантур и других. Будем искать решение уравнения (1.14) в следующем виде:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t), \quad (1.17)$$

где  $X(x)$  – функция только переменной  $x$ ,  $T(t)$  – функция только переменной  $t$ . Подставляем (1.17) в уравнение (1.14):

$$\begin{aligned} X(x) \cdot \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \cdot T(t) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow X(x) \cdot T''(t) &= a^2 \cdot X''(x) \cdot T(t) \Leftrightarrow \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Равенство (1.18) выполнено для всех  $t$  и  $x$ . Левая и правая части равенства (1.18) меняются независимо друг от друга. Это возможно только тогда, когда:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \text{const}. \quad (1.19)$$

Из (1.19) получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} X'' - \lambda X = 0, \end{array} \right. \quad \text{где } X(x) \neq 0, \quad (1.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T'' - \lambda a^2 T = 0, \end{array} \right. \quad \text{где } T(t) \neq 0. \quad (1.21)$$

$X(x)$  и  $T(t)$  тождественно не равны 0, так как иначе мы получили бы что  $u(x, t) \equiv 0$ , а это противоречит начальным условиям (1.16).

Выпишем граничные условия (1.15):

$$\begin{cases} u(0, t) = X(0) \cdot T(t) = 0, \\ u(l, t) = X(l) \cdot T(t) = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем дополнительное условие на  $X(x)$ :

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (1.22)$$

так как иначе  $T(t) \equiv 0 \Rightarrow u(x, t) \equiv 0$ , что противоречит (1.16).

Итак, для функции  $X(x)$  мы получили задачу о собственных значениях: Найти такие значения параметра  $\lambda$ , при которых существуют нетривиальные решения задачи:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases} \quad (1.23)$$

а также найти эти решения. Такие значения параметра  $\lambda$  называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения – собственными функциями задачи (1.23). Параметр  $\lambda$  может принимать различные значения:  $\lambda > 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\lambda < 0$ . Рассмотрим все 3 случая:  
1 случай:  $\lambda > 0$ ,  $\lambda = p^2$ .

$$X'' - \lambda X = 0 \Leftrightarrow X'' - p^2 X = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$q^2 - p^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm p.$$

Тогда общее решение уравнения:

$$X(x) = Ae^{-px} + Be^{px}.$$

Граничные условия (1.23):  $X(0) = X(l) = 0$ .

$$\begin{cases} X(0) = A + B = 0 \\ X(l) = Ae^{-pl} + Be^{pl} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ A(-e^{-pl} + e^{pl}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0, \\ A = 0. \end{cases}$$

Следовательно,  $X(x) \equiv 0$ .

2 случай:  $\lambda = 0$ .

$$X'' = 0 \Leftrightarrow X(x) = Ax + B.$$

Граничные условия (1.23) дают:

$$X(0) = (Ax + B)\Big|_{x=0} = B = 0,$$

$$X(l) = Al = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (\text{так как длина отрезка } l \neq 0).$$

Здесь также получаем нулевое решение:  $X(x) \equiv 0$ .

3 случай:  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = -p^2$ .

$$X'' - \lambda X = 0 \Leftrightarrow X'' + p^2 X = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$q^2 + p^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm ip.$$

Тогда общее решение уравнения:

$$X(x) = C \cos(px) + D \sin(px). \quad (1.24)$$

Граничные условия (1.23):  $X(0) = X(l) = 0$ .

$$\begin{cases} X(0) = C = 0, \\ X(l) = D \sin(pl) = 0, \end{cases}$$

$$X(x) \not\equiv 0 \Rightarrow D \neq 0 \Rightarrow \sin(pl) = 0 \Rightarrow p_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Получаем набор  $p_n = \frac{\pi n}{l}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  и, как следствие, набор решений

$$X_n = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \quad (1.25)$$

Формула (1.25) дает решение задачи (1.23), определяемое с точностью до произвольного множителя  $D$  (формула (1.24)), который мы положили

равным 1. Поскольку решение уравнения (1.13):  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ , множитель  $D$  можно включить в  $T(t)$ , которая на данном этапе остается неопределенной. Теперь из уравнения (1.21) найдем функцию  $T(t)$ :

$$T'' - \lambda a^2 T = 0.$$

Случай  $\lambda > 0$  и  $\lambda = 0$  уже были отброшены.

Рассмотрим случай  $\lambda < 0$ :

$$\lambda = -p^2, \text{ где } p = \frac{\pi n}{l}, \text{ } n \in \mathbb{Z},$$

$$T'' + p^2 a^2 T = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$q^2 + p^2 a^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm ipa.$$

Тогда общее решение уравнения:

$$T(t) = A \cos(pat) + B \sin(pat).$$

Так как  $p_n = \frac{\pi n}{l}$ , то получаем набор решений:

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right), \quad (1.26)$$

где  $A_n$  и  $B_n$  — произвольные константы.

Итак, мы получили следующие решения задачи (1.14), удовлетворяющие граничным условиям (1.15):

$$u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t) \Leftrightarrow \quad (1.27)$$

$$\Leftrightarrow u_n(x, t) = \left( A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \quad (1.28)$$

Попробуем удовлетворить начальным условиям:

$$u_n(x, 0) = \varphi(x) \Leftrightarrow A_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \varphi(x).$$

Условия выполнены лишь для конкретной функции  $\varphi(x)$  (а надо для произвольной  $\varphi(x)$ ). Для того, чтобы решение  $u(x, t)$  удовлетворило произвольным начальным условиям, воспользуемся следующим свойством

линейных однородных уравнений: сумма решений линейного однородного уравнения есть решение этого уравнения. Будем искать решение начально-краевой задачи (1.14) – (1.16) в виде ряда:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x, t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right). \quad (1.29)$$

Согласно начальным условиям (1.16) имеем:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \\ u'_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot a \cdot \frac{\pi n}{l} \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right). \end{cases} \quad (1.30)$$

В системе (1.30) имеем 2 ряда по синусам. Способ нахождения  $A_n$  и  $B_n$  в рядах Фурье по синусам известен:

$$\begin{cases} A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx, \\ B_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \end{cases} \quad (1.31)$$

Подставив (1.31) в (1.29), мы удовлетворим начальным условиям и получим решение начально-краевой задачи (1.14) – (1.16).

Покажем, что формулы Даламбера и Фурье дают один и тот же результат. Согласно формуле (1.19):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} a t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} a t\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \left( \sin\left(\frac{\pi n}{l} x - \frac{\pi n}{l} a t\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{l} x + \frac{\pi n}{l} a t\right) \right) + \\ &\quad + B_n \cdot \left( \cos\left(\frac{\pi n}{l} x - \frac{\pi n}{l} a t\right) - \cos\left(\frac{\pi n}{l} x + \frac{\pi n}{l} a t\right) \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \left( \sin \left( \frac{\pi n}{l} (x - at) \right) + \sin \left( \frac{\pi n}{l} (x + at) \right) \right) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \left( \cos \left( \frac{\pi n}{l} (x - at) \right) - \cos \left( \frac{\pi n}{l} (x + at) \right) \right).$$

Учитывая, что:

$$\int_{x-at}^{x+at} \sin \beta s ds = -\frac{1}{\beta} \cos \beta s \Big|_{x-at}^{x+at} = -\frac{1}{\beta} \left( \cos \beta (x + at) - \cos \beta (x - at) \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos \beta (x - at) - \cos \beta (x + at) = \beta \int_{x-at}^{x+at} \sin \beta s ds,$$

выражение для  $u(x, t)$  преобразуется к виду:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \frac{\pi n}{l} \int_{x-at}^{x+at} \sin \left( \frac{\pi n}{l} s \right) ds = \\ = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot a \cdot \frac{\pi n}{l} \cdot \sin \left( \frac{\pi n}{l} s \right) ds = \\ = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds.$$

Итак, из формулы Фурье мы вывели формулу Даламбера. ■

## 1.8 Метод Фурье для свободного закрепления струны

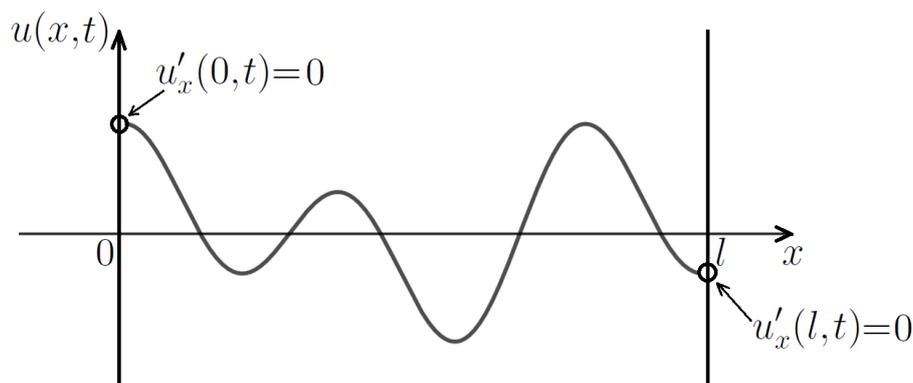


Рис. 19: Свободно закрепленная струна на отрезке  $[0, l]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \end{array} \right. \quad (1.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_x(0, t) = u'_x(l, t) = 0, \end{array} \right. \quad \text{– граничные условия} \quad (1.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u'_t(x, 0) = \psi(x), \end{array} \right. \quad \text{– начальные условия} \quad (1.34)$$

Задача решается аналогично методу Фурье для конечной струны. Решение уравнения (1.32) ищем в виде:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (1.35)$$

Подставляем (1.35) в (1.32):

$$X(x) \cdot T''(t) = a^2 \cdot X''(x) \cdot T(t) \Leftrightarrow \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \text{const.} \quad (1.36)$$

Из (1.36) получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} X'' - \lambda X = 0, \end{array} \right. \quad \text{где } X(x) \neq 0, \quad (1.37)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T'' - \lambda a^2 T = 0, \end{array} \right. \quad \text{где } T(t) \neq 0. \quad (1.38)$$

Выпишем граничные условия (1.33):

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_x(0, t) = X'(0) \cdot T(t) = 0, \\ u'_x(l, t) = X'(l) \cdot T(t) = 0. \end{array} \right.$$

$T(t) \neq 0 \Rightarrow$  получаем дополнительное условие на  $X'(x)$ :

$$X'(0) = X'(l) = 0. \quad (1.39)$$

Мы получаем задачу о собственных значениях для функции  $X(x)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} X'' - \lambda X = 0, \\ X'(0) = X'(l) = 0. \end{array} \right. \quad (1.40)$$

Параметр  $\lambda$  может принимать различные значения:  $\lambda > 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\lambda < 0$ .

1 случай:  $\lambda > 0$ ,  $\lambda = p^2$ :

$$X'' - \lambda X = 0 \Leftrightarrow X'' - p^2 X = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$q^2 - p^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm p.$$

Тогда общее решение уравнения:

$$X(x) = Ae^{-px} + Be^{px}.$$

Граничные условия (1.40):  $X'(0) = X'(l) = 0$ ,

$$X' = -Ape^{-px} + Bpe^{px}.$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} X'(0) = -Ap + Bp = 0 \\ X'(l) = -Ape^{-pl} + Bpe^{pl} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} B = A \\ A(-pe^{-pl} + pe^{pl}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} B = 0, \\ A = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно,  $X(x) \equiv 0$ .

2 случай:  $\lambda = 0$ .

$$X'' = 0 \Leftrightarrow X(x) = Ax + B.$$

Граничные условия (1.40) дают:

$$X' = A \Rightarrow X'(0) = A = 0, \quad X'(l) = A = 0 \Rightarrow X(x) \equiv B.$$

Решим уравнение (1.38) для  $\lambda = 0$ :

$$T'' = 0 \Leftrightarrow T = Ct + D.$$

Тогда решение уравнения (1.32), удовлетворяющее краевым условиям (1.33), имеет вид:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) = B(Ct + D) = \frac{1}{2}B_0t + \frac{1}{2}A_0t,$$

где  $B_0 = 2BC$ ,  $A_0 = 2BD$ .

$u(x, 0) = \frac{1}{2}A_0 \Rightarrow u(x, t)$  не удовлетворяет начальным условиям (1.34):

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u'_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

3 случай:  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = -p^2$ .

$$X'' - \lambda X = 0 \Leftrightarrow X'' + p^2 X = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$q^2 + p^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm ip.$$

Тогда общее решение уравнения:

$$X(x) = C \cos px + D \sin px. \quad (1.41)$$

Граничные условия (1.40):  $X'(0) = X'(l) = 0$

$$X' = -Cp \sin(px) + Dp \cos(px),$$

$$X'(0) = Dp = 0 \Rightarrow D = 0 \quad (\text{так как } \lambda < 0).$$

$$\left. \begin{array}{l} X'(l) = -Cp \sin(pl) = 0 \\ X(x) \not\equiv 0 \\ D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow X \not\equiv 0 \left. \vphantom{\begin{array}{l} X'(l) = -Cp \sin(pl) = 0 \\ X(x) \not\equiv 0 \\ D = 0 \end{array}} \right\} \Rightarrow \sin(pl) = 0 \Rightarrow p = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Получаем набор  $p_n = \frac{\pi n}{l}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , и, как следствие, набор решений:

$$X_n = \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \quad (1.42)$$

Формула (1.42) дает решение задачи (1.40), определяемое с точностью до произвольного множителя  $C$  (формула (1.41)), который мы положим равным 1. Теперь из уравнения (1.38) найдем  $T(t)$ :

$$T'' - \lambda a^2 T = 0.$$

Случаи  $\lambda > 0$  и  $\lambda = 0$  уже были разобраны. Рассмотрим случай  $\lambda < 0$ :

$$\lambda = -p^2, \quad \text{где } p = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$T'' + p^2 a^2 T = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$q^2 + p^2 a^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm ipa.$$

Тогда общее решение уравнения:

$$T(t) = A \cos(pat) + B \sin(pat).$$

Так как  $p = \frac{\pi n}{l}$ , то получаем набор решений:

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right), \quad (1.43)$$

где  $A_n$  и  $B_n$  – произвольные константы.

Итак, получаем следующие решения задачи (1.32), удовлетворяющие граничным условиям (1.33):

$$u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t) \Leftrightarrow \quad (1.44)$$

$$\Leftrightarrow u_n(x, t) = \left( A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) \right) \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \quad (1.45)$$

Попробуем удовлетворить начальным условиям:

$$u_n(x, 0) = \varphi(x) \Leftrightarrow A_n \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \varphi(x)$$

Условия выполнены лишь для конкретной функции  $\varphi(x)$ , а необходимо выполнить для произвольной. Сумма решений линейного однородного уравнения есть решение этого уравнения, следовательно, будем искать решение исходной начально-краевой задачи (1.32) – (1.34) в виде ряда:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} B_0 t + \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) \right) \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \quad (1.46)$$

Согласно начальным условиям (1.34) имеем:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \\ u'_t(x, 0) = \psi(x) = \frac{1}{2} B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot a \cdot \frac{\pi n}{l} \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \end{cases} \quad (1.47)$$

В системе (1.47) имеем два ряда по косинусам. Способ нахождения  $A_n$  и  $B_n$  в рядах Фурье по косинусам известен:

$$\begin{cases} A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx, \\ B_n = \frac{2}{\pi na} \int_0^l \psi(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx. \end{cases} \quad (1.48)$$

Подставив (1.48) в (1.46), мы удовлетворим начальным условиям и получим решение начально-краевой задачи (1.32) – (1.34).

### 1.9 Неоднородное уравнение струны (вынужденные колебания струны)

Пусть на струну (на все точки струны) действует внешняя сила  $\vec{F}$ . Это соответствует струнным смычковым музыкальным инструментам, таким как скрипка, альт, виолончель, контрабас, кобыз, хуцинь, хардангерфеле и другим. С точки зрения математики, задача формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & (1.49) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0, & \text{– граничные условия} \quad (1.50) \\ \left. \begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \\ u'_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l \end{array} \right\} & \text{– начальные условия} \quad (1.51) \end{cases}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$f = \frac{F}{\rho dx}$  – внешняя сила, рассчитанная на единицу массы струны (заданная функция в задаче);

$\rho dx$  – масса участка струны;

$\rho$  – линейная плотность (масса, приходящаяся на единицу длины).

Начальная и конечная точки струны жестко закреплены.

Ищем решение задачи в следующем виде:

$$u(x, t) = V(x, t) + W(x, t).$$

Тогда вместо системы уравнений (1.49) – (1.51) будем искать решения двух новых систем уравнений для функций  $V(x, t)$  и  $W(x, t)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \\ V(0, t) = V(l, t) = 0, \\ V(x, 0) = \varphi(x), \\ V_t'(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad (1.52)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + f(x, t), \\ W(0, t) = W(l, t) = 0, \\ W(x, 0) = W_t'(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (1.53)$$

Таким образом, мы представили вынужденные колебания струны в виде суммы двух колебательных движений:

1. Свободное колебание, которое струна совершает без действия силы (только вследствие начального возмущения) (система уравнений (1.52)).
2. Чисто вынужденное колебание (начального возмущения нет, струна в начальный момент находится в состоянии покоя. Однако есть внешняя сила  $f(x, t)$ ) (система уравнений (1.53)).

Задача о свободных колебаниях струны (1.52) уже была решена ранее (формула (1.29) с коэффициентами (1.31)). Решим задачу (1.53) о вынужденных колебаниях. Ищем решение  $W(x, t)$  в виде ряда Фурье по синусам:

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (1.54)$$

Этот ряд удовлетворяет краевым условиям:

$$W(0, t) = W(l, t) = 0.$$

Функцию  $f(x)$ , заданную на отрезке  $[0, l]$ , также разложим в ряд Фурье по синусам:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (1.55)$$

где коэффициенты

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(s, t) \cdot \sin \frac{\pi n s}{l} ds. \quad (1.56)$$

Для подстановки в систему (1.53) нам необходимо вычислить некоторые производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} W'_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l}, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} W''_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l}, \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \sum_{n=1}^{\infty} W'_n(t) \cdot \cos \frac{\pi n x}{l} \cdot \frac{\pi n}{l}, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} W''_n(t) \cdot \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \cdot \left( -\sin \frac{\pi n x}{l} \right). \end{aligned} \quad (1.58)$$

Подставим (1.55), (1.57), (1.58) в систему (1.53):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} W''_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} &= a^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} W''_n(t) \cdot \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \cdot \left( -\sin \frac{\pi n x}{l} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} \Leftrightarrow \\ \left( W''_n(t) + \frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} \cdot W_n(t) - f_n(t) \right) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} &= 0 - \text{выполнено для любого } x \Rightarrow \\ \Rightarrow W''_n(t) + \frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} \cdot W_n(t) - f_n(t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.59)$$

Мы получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Решим соответствующее однородное:

$$W''_n(t) + \frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} W_n(t) = 0.$$

Характеристическое уравнение:  $q^2 + \frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} = 0 \Leftrightarrow q = \pm i \frac{a \pi n}{l}$ .

$$W_{n0}(t) = A_n \cdot \cos \frac{\pi n a t}{l} + B_n \cdot \sin \frac{\pi n a t}{l}.$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения:

$$W_n(t) = A_n \cdot \cos \frac{\pi n a t}{l} + A_n \cdot \sin \frac{\pi n a t}{l} + \widetilde{W}_n(t), \quad (1.60)$$

где  $W_n(t)$  – частное решение неоднородного уравнения.

$\widetilde{W}_n$  ищем методом вариации произвольных постоянных.

$$\widetilde{W}_n = A_n(t) \cdot \cos \frac{\pi nat}{l} + B_n(t) \cdot \sin \frac{\pi nat}{l}.$$

$$\begin{cases} A'_n \cdot \cos \frac{\pi na}{l} t + B_n(t) \cdot \sin \frac{\pi na}{l} t = 0, & (1.61) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A'_n \cdot \left( -\frac{\pi na}{l} t \cdot \sin \frac{\pi na}{l} t \right) + B'_n \cdot \frac{\pi na}{l} t \cdot \cos \frac{\pi na}{l} t = f_n(t). & (1.62) \end{cases}$$

Решаем систему уравнений относительно  $A'_n$ ,  $B'_n$ .

Уравнение (1.61) \*  $\left( \frac{\pi na}{l} \cdot \sin \frac{\pi na}{l} t \right)$  + Уравнение (1.62) \*  $\left( \cos \frac{\pi na}{l} t \right)$  :

$$\frac{\pi na}{l} B'_n \cdot \sin^2 \left( \frac{\pi na}{l} t \right) + \frac{\pi na}{l} B'_n \cdot \cos^2 \left( \frac{\pi na}{l} t \right) = f_n(t) \cdot \cos \left( \frac{\pi na}{l} t \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi na}{l} B'_n = f_n(t) \cdot \cos \frac{\pi na}{l} t \Leftrightarrow B'_n = \frac{l}{\pi na} f_n(t) \cdot \cos \frac{\pi na}{l} t.$$

Уравнение (1.61) \*  $\left( -\frac{\pi na}{l} t \cdot \cos \frac{\pi na}{l} t \right)$  + Уравнение (1.62) \*  $\left( \sin \frac{\pi na}{l} t \right)$  :

$$-\frac{\pi na}{l} \cos^2 \left( \frac{\pi na}{l} t \right) \cdot A'_n - \frac{\pi na}{l} \sin^2 \left( \frac{\pi na}{l} t \right) \cdot A'_n = f_n(t) \cdot \sin \left( \frac{\pi na}{l} t \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A'_n = -\frac{l}{\pi na} f_n(t) \cdot \sin \frac{\pi na}{l} t.$$

Проинтегрируем, учитывая, что:  $\int f(t) dt = \int_0^t f(s) ds + C$ .

$$A_n = -\frac{l}{\pi na} \int_0^t f_n(s) \cdot \sin \left( \frac{\pi na}{l} s \right) ds + C_n.$$

$$B_n = \frac{l}{\pi na} \int_0^t f_n(s) \cdot \cos \left( \frac{\pi na}{l} s \right) ds + \widetilde{C}_n.$$

$$\widetilde{W}_n(t) = -\frac{l}{\pi na} \cdot \int_0^t f_n(s) \cdot \sin \left( \frac{\pi na}{l} s \right) ds \cdot \cos \frac{\pi na}{l} t + C_n \cdot \cos \frac{\pi na}{l} t +$$

$$+ \frac{l}{\pi na} \int_0^t f_n(s) \cdot \cos \left( \frac{\pi na}{l} s \right) ds \cdot \sin \frac{\pi na}{l} t + \widetilde{C}_n \cdot \sin \frac{\pi na}{l} t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \widetilde{W}_n(t) = \frac{l}{\pi na} \cdot \int_0^t f_n(s) \cdot \left( \sin \frac{\pi na}{l} t \cdot \cos \frac{\pi na}{l} s - \cos \frac{\pi na}{l} t \cdot \sin \frac{\pi na}{l} s \right) ds + \\ + C_n \cdot \cos \frac{\pi na}{l} t + \widetilde{C}_n \cdot \sin \frac{\pi na}{l} t.$$

Формула  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$  позволяет упростить выражение:

$$\widetilde{W}_n(t) = \frac{l}{\pi na} \cdot \int_0^t f_n(s) \cdot \sin \frac{\pi na}{l} (t - s) ds + C_n \cdot \cos \frac{\pi na}{l} t + \widetilde{C}_n \cdot \sin \frac{\pi na}{l} t.$$

Тогда:

$$W_n(t) = \widetilde{A}_n \cdot \cos \frac{\pi na}{l} t + \widetilde{B}_n \cdot \sin \frac{\pi na}{l} t + \frac{l}{\pi na} \cdot \int_0^t f_n(s) \cdot \sin \frac{\pi na}{l} (t - s) ds.$$

где:

$$\widetilde{A}_n = A_n + C_n,$$

$$\widetilde{B}_n = B_n + C_n.$$

Из начальных условий (1.53) получаем:

$$\begin{cases} W_n(0) = 0, \\ W'_n(0) = 0. \end{cases} \quad (1.63)$$

$$W_n(0) = 0 \Leftrightarrow \widetilde{A}_n + \frac{l}{\pi na} \cdot \int_0^0 f_n(s) \cdot \sin \frac{\pi na}{l} (-s) ds = 0 \Leftrightarrow \widetilde{A}_n = 0.$$

Напомним формулу для производной от интеграла по параметру:

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(s, t) ds = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) ds + f(\beta(t), t) \cdot \beta'(t) - f(\alpha(t), t) \cdot \alpha'(t).$$

Продифференцировав  $W_n(t)$ , получим:

$$W'_n(t) = \frac{\pi na}{l} \widetilde{B}_n \cdot \cos \frac{\pi na}{l} t + \frac{l}{\pi na} \int_0^t f_n(s) \cdot \frac{\pi na}{l} \cdot \cos \left( \frac{\pi na}{l} (t - s) \right) ds + \\ + f_n(t) \cdot \sin \frac{\pi na}{l} (t - t) \cdot 1 - f_n(0) \cdot \sin \frac{\pi na}{l} (-s) \cdot 0.$$

$$\begin{aligned}
W'_n(0) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\pi na}{l} \cdot \tilde{B}_n + \frac{l}{\pi na} \int_0^0 f_n(s) \cdot \frac{\pi na}{l} \cdot \cos\left(\frac{\pi na}{l}(-s)\right) ds = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\pi na}{l} \cdot \tilde{B}_n = 0 \Leftrightarrow \tilde{B}_n = 0.
\end{aligned}$$

Итак, решение уравнения (1.59) с начальными условиями (1.63):

$$W_n(t) = \frac{l}{\pi na} \int_0^t f_n(s) \cdot \sin\left(\frac{\pi na}{l}(t-s)\right) ds.$$

Подставляем  $W_n(t)$  в ряд (1.54) для  $W(x, t)$ :

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi na} \int_0^t f_n(s) \cdot \sin\left(\frac{\pi na}{l}(t-s)\right) ds \cdot \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right).$$

Получили решение системы (1.53).

Ответ в задаче (1.49) – (1.51) мы получим, если сложим решение задачи (1.52) о свободных колебаниях струны (формула (1.29) с коэффициентами (1.31)) с решением задачи (1.53) о вынужденных колебаниях струны.

$$\begin{aligned}
u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cdot \cos \frac{\pi na}{l} t + B_n \cdot \sin \frac{\pi na}{l} t \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x + \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi na} \int_0^t f_n(s) \cdot \sin \left( \frac{\pi na}{l} (t-s) \right) ds \cdot \sin \left( \frac{\pi nx}{l} \right),
\end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin \frac{\pi nx}{l} dx, \\
B_n &= \frac{2}{\pi na} \int_0^l \psi(x) \cdot \sin \frac{\pi nx}{l} dx, \\
f_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l f(s, t) \cdot \sin \frac{\pi ns}{l} ds.
\end{aligned}$$

### 1.10 Задачи о вынужденных колебаниях

**Задача 1.** Концы струны свободно закреплены. Описать движение струны под действием вынуждающей силы  $f(x, t) = 1$ , если начальное отклонение и начальная скорость струны равны нулю.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1, & (1.64) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u'_t(x, 0) = 0, & (1.65) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'(0, t) = u'_x(l, t) = 0. & (1.66) \end{cases}$$

Начальные и граничные условия нулевые. Следовательно, решение соответствующей однородной задачи также нулевое.

Частное решение неоднородной задачи ищем в виде:

$$u(x, t) = W_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) \cdot \cos \frac{\pi n x}{l}. \quad (1.67)$$

Ряд по косинусам нужен, чтобы удовлетворить краевым условиям (1.66).

Подставляем (1.67) в (1.64):

$$W_0''(t) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n''(t) \cdot \cos \frac{\pi n x}{l} = a^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{\pi^2 n^2}{l^2} \right) \cdot W_n(t) \cdot \cos \frac{\pi n x}{l} + 1.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых функциях:

$$\begin{cases} W_n'' + \frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} W_n = 0 \\ W_0'' = 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} W_0' = t + C &\Rightarrow W_0 = \frac{t^2}{2} + Ct + C_1, \\ W_0(0) = 0 &\Rightarrow C_1 = 0, \\ W_0'(0) = 0 &\Rightarrow C = 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow W_0 = \frac{t^2}{2},$$

Решим однородное уравнение  $W_n'' + \frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} W_n = 0$ . Составляем характеристическое уравнение:

$$q^2 + \frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} = 0 \Leftrightarrow q = \pm i \frac{\pi n a}{l}.$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Тогда } W_n &= A_n \cdot \cos \frac{\pi nat}{l} + B_n \cdot \sin \frac{\pi nat}{l}, \\ W_n(0) &= 0 \Rightarrow A_n = 0, \\ W'_n(0) &= 0 \Rightarrow B_n = 0. \end{aligned} \right\} \Rightarrow W_n \equiv 0.$$

Ответ:  $u(x, t) = \frac{t^2}{2}$ . В данном случае колебаний в струне не возникает и она как единое целое равноускоренно улетает на бесконечность.

**Задача 2.** Концы струны жестко закреплены. Описать движение струны под действием гармонической вынуждающей силы  $f(x, t) = \cos \frac{\pi at}{l} \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$ , если начальное отклонение и начальная скорость струны равны нулю.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & (1.68) \\ u(x, 0) = u'_t(x, 0) = 0, & (1.69) \\ u(0, t) = u_x(l, t) = 0. & (1.70) \end{cases}$$

Нулевые начальные и граничные условия, следовательно, решение соответствующей однородной задачи нулевое. Частное решение неоднородной задачи ищем в виде ряда Фурье по синусам:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) \cdot \sin \frac{\pi nx}{l}. \quad (1.71)$$

Подставляем (1.71) в уравнение (1.68):

$$\sum_{n=1}^{\infty} W''_n(t) \cdot \sin \frac{\pi nx}{l} = a^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{\pi^2 n^2}{l^2} \right) \cdot W_n(t) \cdot \sin \frac{\pi nx}{l} + \cos \frac{\pi at}{l} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых функциях.

При  $n = 1$  получим: 
$$W''_1 + \frac{\pi^2 a^2}{l^2} W_1 = \cos \frac{\pi at}{l}. \quad (1.72)$$

При  $n \neq 1$ : 
$$W''_n + \frac{\pi^2 a^2 n^2}{l^2} W_n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} W_n &= A_n \cdot \cos \frac{\pi nat}{l} + B_n \cdot \sin \frac{\pi nat}{l} \\ W_n(0) &= W'_n(0) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow W_n(t) \equiv 0, \quad n \neq 1$$

Решение уравнения (1.72) имеет вид:

$$W_1(t) = \underbrace{A \cos \frac{\pi at}{l} + B \sin \frac{\pi at}{l}}_{\text{общее решение однородного ур-я}} + \widetilde{W}_1(t).$$

Частное решение неоднородного уравнения  $\widetilde{W}_1(t)$  ищем методом неопределенных коэффициентов. Числа  $(\pm i \cdot \frac{\pi a}{l})$  являются корнями первой кратности характеристического уравнения, следовательно:

$$\widetilde{W}_1(t) = t \cdot \left( C \cos \frac{\pi at}{l} + D \sin \frac{\pi at}{l} \right).$$

Найдем первую и вторую производные от  $\widetilde{W}_1(t)$ :

$$\widetilde{W}'_1(t) = C \cos \frac{\pi at}{l} + D \sin \frac{\pi at}{l} - t \cdot \frac{\pi a}{l} C \cos \frac{\pi at}{l} + t \cdot \frac{\pi a}{l} D \sin \frac{\pi at}{l},$$

$$\begin{aligned} \widetilde{W}''_1(t) = & -C \cdot \frac{\pi a}{l} \sin \frac{\pi at}{l} + D \cdot \frac{\pi a}{l} \cos \frac{\pi at}{l} - C \cdot \frac{\pi a}{l} \sin \frac{\pi at}{l} + D \cdot \frac{\pi a}{l} \cos \frac{\pi at}{l} - \\ & - t \cdot \frac{\pi^2 a^2}{l^2} C \cos \frac{\pi at}{l} + t \cdot \frac{\pi^2 a^2}{l^2} D \sin \frac{\pi at}{l}. \end{aligned}$$

Подставляем  $\widetilde{W}''_1$  и  $\widetilde{W}_1$  в уравнение (1.72):

$$\widetilde{W}''_1 + \frac{\pi^2 a^2}{l^2} \widetilde{W}_1 = -2C \cdot \frac{\pi a}{l} \sin \frac{\pi at}{l} + 2D \cdot \frac{\pi a}{l} \cos \frac{\pi at}{l} = \cos \frac{\pi at}{l}.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях, получаем:

$C = 0$ ,  $D = \frac{l}{2\pi a}$ . Тогда частное решение неоднородного уравнения примет вид:  $\widetilde{W}_1(t) = \frac{l}{2\pi a} t \cdot \sin \frac{\pi at}{l}$ . Общее решение однородного уравнения:

$$\left. \begin{aligned} W_1(t) &= A \cos \frac{\pi at}{l} + B \sin \frac{\pi at}{l} + \frac{l}{2\pi a} t \cdot \sin \frac{\pi at}{l}, \\ W_1(0) &= 0 \Rightarrow A = 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_1(t) = B \sin \frac{\pi at}{l} + \frac{l}{2\pi a} t \sin \frac{\pi at}{l},$$

$$W'_1(t) = B \cdot \frac{\pi a}{l} \cdot \cos \frac{\pi at}{l} + \frac{l}{2\pi a} \sin \frac{\pi at}{l} + \frac{l}{2\pi a} \cdot t \cdot \frac{\pi a}{l} \cdot \cos \frac{\pi at}{l},$$

$$W'_1(0) = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Следовательно,

$$W_1(t) = \frac{l}{2\pi a} t \sin \frac{\pi at}{l} \Rightarrow u(x, t) = \frac{l}{2\pi a} t \sin \frac{\pi at}{l} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Мы получили резонанс: решение растет по амплитуде с течением времени. Если бы частота вынуждающей силы не совпадала с частотой собственных колебаний системы, резонанса бы не было. Например, можно взять  $f(x, t) = \cos \frac{1,5\pi at}{l} \sin \frac{\pi x}{l}$ , и резонанса не будет.

## Глава 2. Одномерное уравнение теплопроводности

### 2.1 Постановка задачи. Вывод одномерного уравнения теплопроводности

Рассмотрим однородный стержень, теплоизолированный с боков и достаточно тонкий, чтобы в любой момент времени температуру во всех точках поперечного сечения можно было бы считать одинаковой.

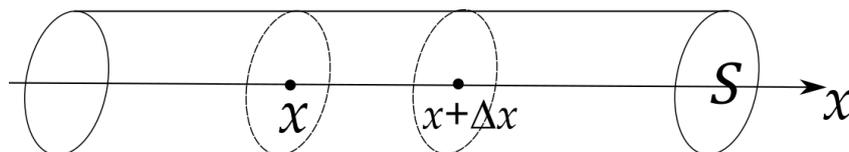


Рис. 20: Однородный стержень

Пусть  $S$  – площадь поперечного сечения,  $u(x, t)$  – температура стержня в точке  $x$  в момент времени  $t$ . Если температура стержня неравномерна, в нем возникают тепловые потоки. Тепло передается от горячего к холодному.

#### Закон Фурье для теплопередачи

Количество тепла, протекающее через сечение  $x$  за время  $t$ , равно:

$$Q = q \cdot S \cdot \Delta t, \quad \text{где } q = -k \frac{\partial u}{\partial x}, \quad k > 0. \quad (2.1)$$

Здесь  $q$  – плотность теплового потока, равная количеству тепла, протекшего в единицу времени через единицу площади. Количество тепла, полученное участком стержня  $(x, x + \Delta x)$  за время  $\Delta t$ , равно:

$$\underbrace{Q(x)}_{\text{вошедшее тепло}} - \underbrace{Q(x + \Delta x)}_{\text{вышедшее тепло}} = k \cdot S \cdot \Delta t \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right). \quad (2.2)$$

С другой стороны, количество тепла, которое необходимо сообщить телу, чтобы повысить его температуру на  $\Delta u$ , равно:

$$c \cdot m \cdot \Delta u = c \cdot \underbrace{\rho \cdot \Delta x \cdot S}_{\text{масса}} \cdot \Delta u. \quad (2.3)$$

Здесь  $c$  – удельная теплоемкость,  $m$  – масса тела,  $\rho$  – его плотность.

Напишем уравнение теплового баланса:

$$k \cdot S \cdot \Delta t \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right) = c \cdot \rho \cdot \Delta x \cdot S \cdot \Delta u. \quad (2.4)$$

Разделим обе части уравнения на  $S\Delta x\Delta t$ :

$$k \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x)}{\Delta x} = c\rho \frac{\Delta u}{\Delta t}. \quad (2.5)$$

При  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$  уравнение (2.4) примет вид:  $k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c\rho \frac{\partial u}{\partial t}$ , что эквивалентно выражению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{где } a^2 = \frac{k}{c\rho} > 0. \quad (2.6)$$

Полученное уравнение называется одномерным уравнением теплопроводности. Постоянная  $a$  называется коэффициентом теплоемкости и теплопроводности.

### *Замечание*

Уравнение диффузии имеет точно такой же вид, но роль  $u(x, t)$  играет концентрация диффундирующего вещества.

## 2.2 Метод Фурье для конечного стержня

Рассмотрим однородный стержень длины  $l$ , концы которого закреплены в термостате. Пусть температура термостата равна 0.

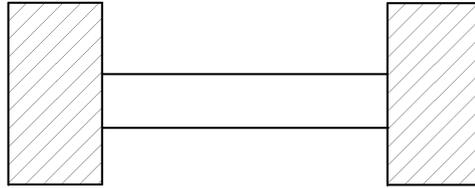


Рис. 21: Стержень, закрепленный в термостате с двух концов

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, t > 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad \text{– начальные условия} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases} \quad \text{– краевые условия} \quad (2.9)$$

где  $\varphi(x)$  – начальное распределение температуры в стержне.

Будем искать решение уравнения (2.7) в следующем виде:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad (2.10)$$

Подставляем (2.10) в уравнение (2.7):

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 \cdot X''(x) \cdot T(t) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (2.11)$$

Правая часть уравнения (2.11) зависит только от переменной  $t$ , левая – только от переменной  $x$ . Равенство должно быть выполнено для любых значений  $t$  и  $x$ . Следовательно,

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \text{const}. \quad (2.12)$$

Тогда (2.12) будет эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, & \text{где } X(x) \neq 0, \\ T' - \lambda a^2 T = 0, & \text{где } T(t) \neq 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\quad \quad \quad (2.14)$$

Из краевого условия (2.9) получаем:

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (2.15)$$

Итак, для функции  $X(x)$  мы получили задачу о собственных значениях:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Параметр  $\lambda$  может принимать различные значения:  $\lambda > 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\lambda < 0$ .

1 случай:  $\lambda > 0$ . Пусть  $\lambda = p^2$  :

$$X'' - p^2 X = 0.$$

Напишем характеристическое уравнение:

$$q^2 - p^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm p.$$

Тогда общее решение уравнения:

$$X(x) = Ae^{-px} + Be^{px}.$$

Граничные условия (2.16):  $X(0) = X(l) = 0$ .

$$\begin{cases} X(0) = A + B = 0 \\ X(l) = Ae^{-pl} + Be^{pl} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ A \underbrace{(e^{-pl} - e^{pl})}_{\neq 0, \text{ ибо } pl \neq 0} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0, \\ A = 0. \end{cases}$$

Следовательно,  $X(x) \equiv 0$ .

2 случай:  $\lambda = 0$ .

$$X'' = 0 \Leftrightarrow X(x) = Ax + B.$$

Удовлетворим граничным условиям:

$$X(0) = (Ax + b)|_{x=0} = B = 0,$$

$$X(l) = Al = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Здесь также получаем нулевое решение:  $X(x) \equiv 0$ .

3 случай:  $\lambda < 0$ . Пусть  $\lambda = -p^2$ :

$$X'' + p^2 X = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$q^2 + p^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm ip.$$

Общее решение уравнения:

$$X(x) = C \cos px + D \sin px. \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} X(0) = C = 0, \\ X(l) = D \sin pl = 0. \end{cases}$$

Нас интересует нетривиальное решение, поэтому:

$$X(x) \not\equiv 0 \Rightarrow D \neq 0 \Rightarrow \sin pl = 0 \Rightarrow p = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Получаем набор  $p_n = \frac{\pi n}{l}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  и, как следствие, набор решений:

$$X_n = \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.18)$$

Множитель  $D$  положим равным 1, так как его можно включить в  $T(t)$ .

Теперь из уравнения (2.14) найдем функцию  $T(t)$ :

$$T' - \lambda a^2 T = 0.$$

Нас интересует случай  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = -p^2$ :

$$\begin{aligned} T' = \lambda a^2 T &\Leftrightarrow \frac{dT}{dt} = -p^2 a^2 T \Leftrightarrow \frac{dT}{T} = -p^2 a^2 dt \mid \text{интегрируем} \\ &\Leftrightarrow \ln |T| = -p^2 a^2 t + C \Leftrightarrow |T| = e^{-p^2 a^2 t + C} \Leftrightarrow T = A \cdot e^{-p^2 a^2 t}. \end{aligned}$$

Так как  $p = \frac{\pi n}{l}$ , то получаем набор решений:

$$T_n(t) = A_n \cdot e^{-p_n^2 a^2 t}, \quad (2.19)$$

коэффициент  $A_n$  на данном этапе остается неопределенным.

Итак, получаем следующие решения задачи (2.7), удовлетворяющие краевым условиям (2.9):

$$u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = A_n \cdot e^{-p_n^2 a^2 t} \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.20)$$

Для того, чтобы удовлетворить начальному условию (2.8), будем искать решение задачи (2.7) – (2.9) в виде ряда:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-p_n^2 a^2 t} \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \cdot \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (2.21)$$

Удовлетворим начальному условию (2.8):

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (2.22)$$

Коэффициенты  $A_n$  в рядах Фурье по синусам известны:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} dx. \quad (2.23)$$

Подставив (2.23) в (2.21), мы удовлетворим начальному условию (2.8) и получим решение начально-краевой задачи (2.7) – (2.9).

### 2.3 Метод Фурье для конечного теплоизолированного стержня

Рассмотрим однородный стержень длины  $l$ . Пусть он теплоизолирован со всех сторон, а не только с боков, как в предыдущем случае.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, t > 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) & \text{– начальные условия} \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\begin{cases} u'_x(0, t) = u'_x(l, t) = 0 & \text{– краевые условия} \end{cases} \quad (2.26)$$

Здесь  $u(x, t)$  – температура стержня в точке  $x$  в момент времени  $t$ . Задача решается аналогично методу Фурье для конечного стержня. Решая уравнение методом разделения переменных, мы получим задачу о собственных значениях для функции  $X(x)$ :

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, \\ X'(0) = X'(l) = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

1 случай:  $\lambda > 0$ . Пусть  $\lambda = p^2$ .

$$X'' - p^2 X = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$q^2 - p^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm p.$$

Тогда общее решение уравнения:

$$X(x) = Ae^{-px} + Be^{px}.$$

Решение должно удовлетворять краевым условиям (2.26):

$$X'(0) = (-Ape^{-px} + Bpe^{px})_{x=0} = p(B - A) = 0 \Rightarrow A = B$$

$$X'(l) = -Ape^{-pl} + Bpe^{pl} = 0 \Leftrightarrow Ap \underbrace{(e^{pl} - e^{-pl})}_{\neq 0 \text{ ибо } pl \neq 0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow X(x) \equiv 0.$$

2 случай:  $\lambda = 0$ .

$$X'' = 0 \Leftrightarrow X(x) = Ax + B.$$

$$X'(0) = A = 0,$$

$$X'(l) = A = 0.$$

Следовательно,  $X(x) = B$ , где  $B = \text{const}$ . Решим уравнение для  $T(t)$  :

$$T' - \lambda a^2 T = 0 \Leftrightarrow T' = 0 \Leftrightarrow T = E, \text{ где } E = \text{const}.$$

Тогда  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t) = B \cdot E = \frac{1}{2} A_0$  (Обозначение:  $A_0 = 2 \cdot B \cdot E$ ).

3 случай:  $\lambda < 0$ . Пусть  $\lambda = -p^2$ .

$$X'' + p^2 X = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$q^2 + p^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm ip.$$

Общее решение уравнения:

$$X(x) = C \cos px + D \sin px.$$

Решение должно удовлетворять краевым условиям:

$$X'(0) = (-Cp \sin px + Dp \cos px) \Big|_{x=0} = Dp = 0 \Rightarrow D = 0,$$

$$X'(l) = -Cp \sin pl = 0.$$

Нас интересует нетривиальное решение, поэтому:

$$X(x) \neq 0 \Rightarrow C \neq 0 \Rightarrow \sin pl = 0 \Rightarrow p = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Получаем набор решений:

$$X_n = \cos \frac{\pi n}{l} x. \tag{2.28}$$

Теперь найдем функцию  $T(t)$  для  $\lambda = -p^2$ .

$$T' - \lambda a^2 T = 0 \Leftrightarrow T' + p^2 a^2 T = 0$$

Решение характеристического уравнения:  $q = -p^2 a^2$ . Тогда:

$$T(t) = A \cdot e^{-p^2 a^2 t}.$$

Так как  $p = \frac{\pi n}{l}$ , то получаем набор решений:

$$T_n(t) = A_n \cdot e^{-p_n^2 a^2 t}.$$

Итак, мы получили решение задачи (2.24), удовлетворяющее краевым условиям (2.26):

$$u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = A_n \cdot e^{-p_n^2 a^2 t} \cdot \cos \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.29)$$

Для того, чтобы удовлетворить начальному условию (2.25), будем искать решение задачи (2.24)–(2.26) в виде ряда:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-p_n^2 a^2 t} \cdot \cos \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.30)$$

Удовлетворим начальному условию (2.25):

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.31)$$

Коэффициенты  $A_n$  в рядах Фурье по косинусам известны:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \cos \frac{\pi n x}{l} dx. \quad (2.32)$$

Подставляем (2.32) в (2.30) и получаем решение исходной задачи.

### **Замечание**

При  $t \rightarrow \infty$  получаем:

$$u(x, \infty) = \frac{1}{2} A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx = \frac{1}{l} \int_0^l u(x, 0) dx$$

– усредненное значение температуры в начальный момент времени, следовательно, при  $t \rightarrow \infty$  температура стержня во всех точках выровняется и будет равна некоторой константе.

## 2.4 Неоднородное уравнение теплопроводности

Внутри стержня может возникать или поглощаться тепло (например, при прохождении тока, вследствие химических реакций и так далее). Выделение тепла может быть охарактеризовано функцией  $f(x, t)$ , где  $f(x, t)$  – интенсивность тепловых источников, рассчитанная на единицу длины стержня.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < l, t > 0 & (2.33) \\ u(x, 0) = \varphi(x), & \text{– начальные условия} & (2.34) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0. & \text{– краевые условия} & (2.35) \end{cases}$$

Ищем решение в виде:

$$u(x, t) = V(x, t) + W(x, t).$$

Тогда вместо системы уравнений (2.33) – (2.35) будем искать решения двух новых систем уравнений для функций  $V(x, t)$  и  $W(x, t)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \\ V(0, t) = V(l, t) = 0, \\ V(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + f(x, t), \\ W(0, t) = W(l, t) = 0, \\ W(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности без источников тепла (2.36) уже была решена ранее (формула (2.21) с коэффициентами (2.23)).

Решим задачу (2.37) с нулевыми начальными и граничными условиями, но с источниками тепла. Ищем решение  $W(x, t)$  в виде ряда Фурье по синусам:

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (2.38)$$

Этот ряд удовлетворяет краевым условиям:

$$W(0, t) = W(l, t) = 0.$$

Функцию  $f(x)$ , заданную на отрезке  $[0, l]$ , также разложим в ряд Фурье по синусам:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (2.39)$$

где коэффициенты:

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(s, t) \cdot \sin \frac{\pi n s}{l} ds. \quad (2.40)$$

Подставляем  $W(x, t)$  и  $f(x, t)$  в систему (2.37). Все выкладки аналогичны задаче для неоднородного уравнения струны (1.57) – (1.59). Получим уравнение для  $W_n(t)$ :

$$W_n'(t) + \frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} W_n(t) - f_n(t) = 0. \quad (2.41)$$

Решим соответствующее однородное уравнение:

$$W_n'(t) + \frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} W_n(t) = 0. \quad (2.42)$$

Характеристическое уравнение:

$$q + \frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} = 0 \Leftrightarrow q = -\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2}.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$W_{n_0}(t) = A_n \cdot e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t}.$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения (2.41):

$$W_n(t) = A_n \cdot e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t} + \widetilde{W}_n(t).$$

$\widetilde{W}_n(t)$  ищем методом вариации произвольных постоянных:

$$\widetilde{W}_n(t) = A_n(t) \cdot e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t}.$$

$$A'_n \cdot e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t} = f_n(t) \Leftrightarrow A_n = \int_0^t e^{\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} \tau} \cdot f_n(\tau) d\tau + C. \quad (2.43)$$

В силу начальных условий:  $W(x, 0) = 0 \Rightarrow W_n(0) = 0 \Rightarrow C = 0$ . Мы используем  $\int_0^t$  вместо неопределенного интеграла, чтобы обеспечить выполнение условия  $W_n(0) = 0$ .

$$W_n(t) = A_n(t) \cdot e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t} + \int_0^t e^{\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} \tau} \cdot f_n(\tau) d\tau \cdot e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t}.$$

Из краевого условия:  $W_n(0) = 0 \Leftrightarrow A_n + \int_0^0 \dots = 0 \Rightarrow A_n = 0$ . Следовательно,

$$W_n(t) = \int_0^t e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} (t-\tau)} \cdot f_n(\tau) d\tau. \quad (2.44)$$

Теперь можно написать решение задачи (2.37):

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} (t-\tau)} \cdot f_n(\tau) d\tau \right) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (2.45)$$

где  $f_n(\tau)$  определяется формулой (2.40).

Ответ в исходной задаче (2.33) – (2.35) мы получим, если сложим решения задач (2.36) и (2.37).

## 2.5 Уравнение теплопроводности с неоднородными краевыми условиями

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \end{array} \right. \quad (2.46)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi(x), \end{array} \right. \quad \text{– начальные условия} \quad (2.47)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(l, t) = \mu_2(t). \end{array} \right\} \quad \text{– неоднородные краевые условия} \quad (2.48)$$

Попробуем решить задачу по методу разделения переменных:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t).$$

Приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, \\ T' - \lambda a^2 T = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим случай  $\lambda = -p^2 < 0$ .

$$X(x) = A \cos px + B \sin px,$$

$$T(t) = C \cdot e^{-p^2 a^2 t},$$

$$u(x, t) = A \cdot C \cdot e^{-p^2 a^2 t} \cos px + B \cdot C \cdot e^{-p^2 a^2 t} \sin px,$$

$$u(0, t) = A \cdot C \cdot e^{-p^2 a^2 t} = \mu_1(t).$$

Следовательно,  $A \cdot C$  есть функция от  $t$ , что противоречит тому, что  $A = const$ ,  $C = const$ . Попробуем другой способ. Будем искать решение в виде:

$$u(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)) + V(x, t). \quad (2.49)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \mu_1'(t) + \frac{x}{l}(\mu_2'(t) - \mu_1'(t)) + \frac{\partial V}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Подставим выражения для  $\frac{\partial u}{\partial t}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  в уравнение (2.46):

$$\mu_1' + \frac{x}{l}(\mu_2' - \mu_1') + \frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

Из уравнения (2.49) найдем  $V(x, 0)$ :

$$V(x, 0) = \underbrace{u(x, 0)}_{=\varphi(x)} - \mu_1(0) - \frac{x}{l}(\mu_2(0) - \mu_1(0))$$

Таким образом, мы получили неоднородное уравнение теплопроводности для  $V(x, t)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \mu_1' - \frac{x}{l}(\mu_2' - \mu_1'), \\ V(x, 0) = \varphi(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{l}(\mu_2(0) - \mu_1(0)), \\ V(0, t) = 0, \\ V(l, t) = 0. \end{cases}$$

Решается точно так же, как и задача (2.33) – (2.35).

## 2.6 Уравнение теплопроводности для бесконечного стержня

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, t > 0 & (2.50) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{– начальное условие} & (2.51) \end{cases}$$

Здесь  $\varphi(x)$  – начальное распределение температуры.

Сделаем преобразование Фурье по переменной  $x$  от уравнения (2.50) и начального условия (2.51).

### Преобразование Фурье

#### Определение

$L_2(-\infty, +\infty)$  – пространство функций, для которых существует  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$ .

$$f \in L_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Прямое преобразование Фурье:

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ipx} dx. \quad (2.52)$$

Обратное преобразование Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(p) e^{ipx} dp. \quad (2.53)$$

**Обозначение:**  $\widehat{\Phi}$  – преобразование Фурье. Тогда:

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi} \frac{d}{dx} &= ip \cdot \widehat{\Phi}, & \left( \frac{d}{dx} \rightarrow ip \right) \\ \widehat{\Phi} \frac{d^2}{dx^2} &= -p^2 \cdot \widehat{\Phi}. & \left( \frac{d^2}{dx^2} \rightarrow -p^2 \right) \end{aligned}$$

Докажем эти соотношения.

$$\widehat{\Phi} f' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ipx} dx = \left/ \begin{array}{l} u = e^{-ipx} \quad du = -ipe^{-ipx} dx \\ dv = f'(x) dx \quad v = f(x) \end{array} \right/ =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \underbrace{f(x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0} \cdot e^{-ipx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{ip}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ipx} dx = ip \cdot F(p). \\
\widehat{\Phi} f'' &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f''(x) e^{-ipx} dx = \left/ \begin{array}{l} u = e^{-ipx} \quad du = -ipe^{-ipx} dx \\ v = f'(x) \quad dv = f''(x) dx \end{array} \right/ = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0 \text{ ибо } f(x) \rightarrow 0} \cdot e^{-ipx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{ip}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ipx} dx = -p^2 \cdot F(p).
\end{aligned}$$

После преобразований Фурье по  $x$  система уравнений (2.50) – (2.51) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = -a^2 \cdot p^2 \cdot U, & (2.54) \\ U(p, 0) = \Phi(p). & (2.55) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
U(p, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-ipx} dx, \\
\text{где} \\
\Phi(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y) e^{-ipy} dy.
\end{aligned}$$

Для уравнения (2.54) составляем характеристическое:

$$q = -a^2 p^2.$$

Тогда решение (2.54) примет вид:

$$U = C \cdot e^{-a^2 p^2 t}, \text{ где } C = \text{const.}$$

Постоянную  $C$  определяем из начального условия (2.55):

$$U(p, 0) = C = \Phi(p), \text{ тогда:}$$

$$U = \Phi(p) \cdot e^{-a^2 p^2 t}. \quad (2.56)$$

Теперь проведем обратное преобразование Фурье:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(p) \cdot e^{ipx} dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(p) \cdot e^{-a^2 p^2 t} \cdot e^{ipx} dp =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \cdot e^{ipy} dy \right) \cdot e^{-a^2 p^2 t} \cdot e^{ipx} dp = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 p^2 t + ipx - ipy} dp. \tag{2.57}
 \end{aligned}$$

Для дальнейшей работы нам необходимо провести некоторые технические выкладки.

$$\begin{aligned}
 -a^2 p^2 t + ip(x-y) &= -a^2 t \left( p^2 - \frac{ip}{a^2 t} (x-y) + \left( \frac{i(x-y)}{2a^2 t} \right)^2 - \left( \frac{i(x-y)}{2a^2 t} \right)^2 \right) = \\
 &= -a^2 t \left( p - \frac{i(x-y)}{2a^2 t} \right)^2 - \frac{(x-y)^2}{4a^2 t}.
 \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 p^2 t + ip(x-y)} dp &= e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 t \left( p - \frac{i(x-y)}{2a^2 t} \right)^2} dp = \\
 &= e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 t \left( p - \frac{i(x-y)}{2a^2 t} \right)^2} dp = e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Интеграл Пуассона: } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}. \\
 &\text{Тогда } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 tz^2} dz = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 tz^2} d(a\sqrt{t}z) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}.
 \end{aligned}$$

С учетом приведенных выше построений, выражение (2.57) для  $u(x, t)$  примет вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 p^2 t + ipx - ipy} dp = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy. \tag{2.58}$$

Здесь

$$G(x, y, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \quad - \text{ функция Грина.} \tag{2.59}$$

Тогда решение (2.58) можно переписать в виде:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y, t) \varphi(y) dy. \tag{2.60}$$

Свойства решения уравнения теплопроводности:

$$1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad \text{— температура стержня в точке } x \text{ при } t = 0.$$

Пусть  $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$ , то есть стержень имеет ненулевую температуру лишь в некоторой окрестности точки 0.

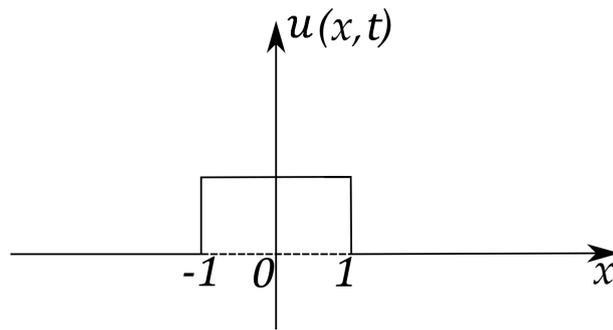


Рис. 22: Начальное распределение температуры в стержне

Однако уже при  $t > 0$  стержень будет иметь положительную температуру во всех точках, так как интеграл в формуле (2.58) будет положителен, следовательно, тепло передалось мгновенно. Так как скорость передачи тепла в стержне бесконечна, то метод характеристик (метод бегущих волн) для уравнения теплопроводности не работает. Тем не менее, данная модель распространения тепла (основанная на уравнении теплопроводности) дает результаты, приближенные к экспериментальным данным, так как по формуле (2.58) температура в дальних точках стержня пусть и ненулевая, но очень маленькая.

2) Функция  $u(x, t)$  в формуле (2.58) бесконечно дифференцируема, следовательно, решение имеет большую гладкость, чем начальные данные.

## 2.7 Задачи об установившихся процессах

Пусть на поверхности Земли заданы температурные колебания (смена дня и ночи, смена времен года). Рассмотрим, как эти колебания распространяются вглубь Земли. Впервые эту задачу решал Жан-Батист

Жозеф Фурье, рассматривая распространение температурных волн в почве. Считаем поверхность Земли плоской, а почву однородной и изотропной по всем направлениям, следовательно, все изменения происходят в вертикальном направлении. Выберем ось  $Ox$  следующим образом:

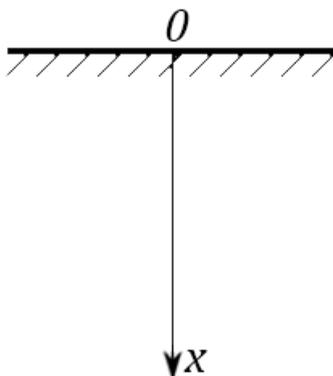


Рис. 23: Поверхность Земли и ось  $Ox$

Тогда исследование процесса теплопроводности сводится к решению следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x > 0, \end{cases} \quad (2.61)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases} \quad \text{– начальное условие} \quad (2.62)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = A \cos \omega t. \end{cases} \quad \text{– граничное условие} \quad (2.63)$$

### Замечание

С достаточно высокой точностью можно считать, что температура на поверхности меняется по косинусоидальному закону ( $u(0, t) = A \cos \omega t$ ).

Будем искать решение в виде:

$u = V + W$ , где  $W(x, t)$  – некоторое частное решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \\ W(0, t) = A \cos \omega t. \end{cases} \quad (2.64)$$

Вместо задачи (2.64) будем решать другую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial W_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2}, \\ W_1(0, t) = A e^{i\omega t}, \end{cases} \quad \text{где } W(x, t) = \operatorname{Re} W_1(x, t). \quad (2.65)$$

Решение задачи (2.65) ищем в виде:

$$W_1(x, t) = Ae^{\alpha x + \beta t}. \quad (2.66)$$

Подставляем  $W_1$  в уравнение:

$$A\beta e^{\alpha x + \beta t} = A \cdot a^2 \cdot \alpha^2 \cdot e^{\alpha x + \beta t} \Leftrightarrow \beta = \alpha^2 a^2. \quad (2.67)$$

Из краевого условия следует:  $W_1(0, t) = Ae^{\beta t} = Ae^{i\omega t}$  для любого  $t$ , следовательно:

$$\beta = i\omega. \quad (2.68)$$

Сравнивая (2.67) и (2.68), получаем:

$$\alpha^2 a^2 = i\omega \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{i\omega}{a^2}} = \frac{\sqrt{\omega}}{a} \sqrt{i} = \pm \frac{\sqrt{\omega}}{a} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Поясним последнее равенство и докажем, что  $\sqrt{i} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ .

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

$$\sqrt{i} = \sqrt{|i|} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} + i \cdot \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} \right), \quad k = 0, 1.$$

$$\sqrt{i} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, & k = 0, \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, & k = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{i} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Подставляем найденные значения для  $\alpha$  и  $\beta$  в формулу (2.66):

$$W_1(x, t) = \begin{bmatrix} A \cdot \exp\left(\frac{\sqrt{\omega}}{a} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot x + i\omega t\right) \\ A \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{\omega}}{a} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot x + i\omega t\right) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W_1(x, t) = \begin{bmatrix} A \cdot \exp\left(\frac{\sqrt{\omega}}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} + i \cdot \left(\frac{\sqrt{\omega}}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} + \omega t\right)\right), \\ A \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{\omega}}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} - i \cdot \left(\frac{\sqrt{\omega}}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} - \omega t\right)\right). \end{bmatrix}$$

$$W(x, t) = \operatorname{Re} W_1(x, t) = \begin{bmatrix} A \cdot \exp\left(\frac{\sqrt{\omega}}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}}\right) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} + \omega t\right), \\ A \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{\omega}}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}}\right) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} - \omega t\right). \end{bmatrix}$$

Первое из решений нам не подходит, так как решение должно убывать при погружении вглубь Земли (с ростом  $x$ ).

Итак, ищем решение исходной задачи (2.61) – (2.63) в виде:

$$u = V + W,$$

$$\text{где } W = A \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{\omega}}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}}\right) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{\omega}}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} - \omega t\right). \quad (2.69)$$

Подставляем  $u = V + W$  в систему (2.61) – (2.63):

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \\ V(x, 0) + W(x, 0) = \varphi(x), \\ V(0, t) + W(0, t) = A \cos \omega t. \end{cases} \quad (2.70)$$

$$W(x, t) \text{ удовлетворяет условиям: } \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ W(0, t) = A \cos \omega t \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  систему (2.70) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad x > 0, \\ V(x, 0) = \varphi(x) - W(x, 0), \\ V(0, t) = 0. \end{cases} \quad (2.71)$$

Докажем, что решение задачи (2.71)  $V(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ . Сведем задачу (2.71) к задаче (2.50) – (2.51), решение которой известно. Продолжим начальное условие нечетным образом на отрицательную полуось:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - W(x, 0), & x > 0, \\ \tilde{\varphi}(x) = -\varphi(-x) + W(-x, 0), & x < 0, \\ \tilde{\varphi}(x) = 0, & x = 0. \end{cases} \quad (2.72)$$

Тогда решение задачи (2.71) дается формулой (2.58):

$$V(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(y) \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy. \quad (2.73)$$

Граничное условие для  $V(x, t)$  также будет выполнено:

$$V(0, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(y) \cdot e^{-\frac{y^2}{4a^2t}} dy = 0,$$

так как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку равен 0.

$$V(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(y) \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} dy \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \\ \text{ограничен ибо } \tilde{\varphi}(y) \xrightarrow[y \rightarrow \infty]{} 0}}$

Поясним, почему  $\tilde{\varphi}(y) \xrightarrow[y \rightarrow \infty]{} 0$ .

Согласно формуле (2.72),  $\tilde{\varphi}(y) = \varphi(y) - W(y, 0)$  при  $y > 0$ . По формуле (2.69) получаем, что:  $W(y, 0) \xrightarrow[y \rightarrow \infty]{} 0$ . Мы считаем, что  $\varphi(y) \xrightarrow[y \rightarrow \infty]{} 0$ , а также  $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(y)| dy$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(y)|^2 dy$  сходятся. Эти ограничения использовались при применении метода Фурье в задаче (2.50)–(2.51). Ограничения имеют смысл, так как нас интересуют только колебания температуры, вызванные ее изменениями на поверхности.

Итак, при  $t \rightarrow \infty$  решение исходной задачи (2.61) – (2.63) примет вид:

$$u(x, t) = W(x, t) = A \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{\omega}}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}}\right) \cdot \cos\left(\omega \cdot \left(t + \frac{1}{a\sqrt{2\omega}}x\right)\right). \quad (2.74)$$

## 2.8 Законы Фурье для температурных колебаний в почве

1) Амплитуда колебаний экспоненциально убывает с глубиной:

$$A(x) = A \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}, \quad (2.75)$$

то есть если глубины растут в арифметической прогрессии, то амплитуды убывают в геометрической прогрессии.

2) Температурные колебания в почве происходят со сдвигом фазы. Время  $\delta$  запаздывания максимумов (минимумов) температуры в почве от

соответствующих моментов на поверхности пропорционально глубине:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2\omega a^2}}x. \quad (2.76)$$

3) Глубина проникновения тепла в почву зависит от периода колебаний температуры на поверхности. Относительное изменение температурной амплитуды равно:

$$\frac{A(x)}{A} = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}, \quad (2.77)$$

где  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $\omega$  – циклическая частота,  $T$  – период колебаний.

Данная формула показывает, что чем меньше период, тем меньше глубина проникновения температуры. Для температурных колебаний с периодами  $T_1$  и  $T_2$  глубины  $x_1$  и  $x_2$ , на которых происходит одинаковое относительное изменение температуры, связаны соотношением:

$$x_2 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \cdot x_1 \quad \text{– третий закон Фурье.} \quad (2.78)$$

Так, например, сравнение суточных и годовых колебаний, для которых  $T_2 = 365T_1$  показывает, что  $x_2 = \sqrt{365} \cdot x_1 = 19.1 \cdot x_1$ , то есть глубина проникновения годовых колебаний при одинаковой амплитуде на поверхности была бы в 19.1 раза больше глубины проникновения суточных колебаний.

### Примеры применения законов Фурье

Приведем результаты наблюдений над годовыми температурными колебаниями на станции Гош в Приамурье:

Глубина (м)	1	2	3	4
Амплитуды (°С)	11.5	6.8	4.2	2.6

Таблица 1: Результаты наблюдений

Эти данные показывают, что амплитуды годовых колебаний на глубине 4 метра уменьшаются до 13.3% своего значения на поверхности, равного 19.5°. На основании этих данных можно определить коэффициент теплопроводности почвы:

$$\ln \frac{A(x)}{A} = -\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x \Leftrightarrow \frac{\omega}{2a^2}x^2 = \ln^2 \frac{A(x)}{A} \Leftrightarrow a^2 = \frac{\omega x^2}{2 \ln^2 \frac{A(x)}{A}}.$$

Мы считаем коэффициент температуропроводности почвы и время запаздывания для глубины  $x = 4 \text{ м} = 400 \text{ см}$ . Посчитаем циклическую частоту:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3.14}{365} \text{ дней}^{-1} = \frac{6.28}{31536000} \text{ с}^{-1} = 1.991 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}.$$

Также из результатов наблюдений нам известно:

$$\frac{A(x)}{A} = 0.133.$$

Тогда:

$$a^2 = \frac{1.991 \cdot 10^{-7} \cdot 400^2}{2 \ln^2 0.133} = \frac{0.0319}{8.1399} = 3.9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$$

– коэффициент температуропроводности почвы.

Теперь посчитаем время запаздывания температуры на глубине  $x = 4 \text{ м}$ .

$$S = \sqrt{\frac{1}{2\omega a^2}}x.$$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 1.991 \cdot 10^{-7} \cdot 3.9 \cdot 10^{-3}}} \cdot 400 \text{ с} = \frac{400}{\sqrt{15.5298 \cdot 10^{-10}}} \text{ с} = \\ &= \frac{400}{3.9408} \cdot 10^5 \text{ с} = 10150223 \text{ с} = 117 \text{ дней}. \end{aligned}$$

Итак, время запаздывания температуры на глубине 4 м составляет 117 дней (около 4 месяцев).

Изложенная здесь теория относится к распространению тепла в сухой почве или горных породах. Наличие влаги усложняет температурные явления в почве, при замерзании происходит выделение скрытой теплоты, не учитываемой этой теорией.

## 2.9 Метод подобия в теории теплопроводности

Рассмотрим задачу для уравнения теплопроводности, где начальные условия имеют вид ступенчатой функции:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, 0 \leq t < \infty, \end{cases} \quad (2.79)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \begin{cases} u_0, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2.80)$$

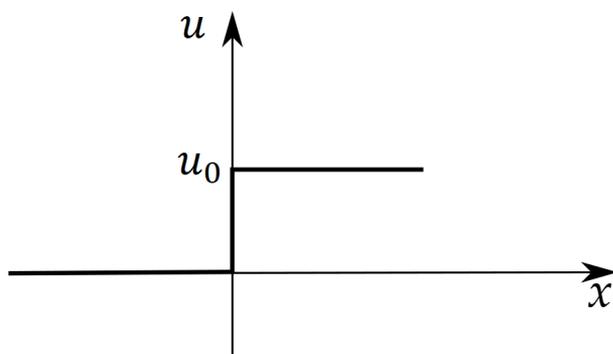


Рис. 24: Начальные условия. Распределение температуры при  $t = 0$

Уравнение теплопроводности остается неизменным при преобразовании переменных:

$$x' = kx, \quad t' = k^2 t,$$

то есть если масштабы длины меняются в  $k$  раз, то масштаб времени следует изменить в  $k^2$  раз. Будем искать решение задачи (2.79) – (2.80) в следующем виде:

$$u(x, t) = f(z), \quad \text{где } z = \frac{x}{2\sqrt{t}}.$$

Отметим, что новая координата  $z$  инвариантна относительно замены переменных:  $x' = kx$ ,  $t' = k^2 t$ . Посчитаем производные  $\frac{\partial u}{\partial t}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = -f'(z) \cdot \frac{x}{4t^{3/2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(z) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(z) \cdot \frac{1}{4t}.$$

Подставим  $\frac{\partial u}{\partial t}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  в уравнение (2.79):

$$-f'(z) \cdot \frac{x}{4t^{3/2}} = a^2 \cdot f''(z) \cdot \frac{1}{4t},$$

$$f''(z) = -\frac{x}{a^2 \sqrt{t}} \cdot f'(z) \Leftrightarrow f''(z) = -\frac{2z}{a^2} f'(z).$$

Проведем замену:  $f' = p(z)$ .

$$p'(z) = -\frac{2z}{a^2} p(z) \Leftrightarrow \frac{dp}{dz} = -\frac{2z}{a^2} p \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{2z}{a^2} dz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln |p| = -\frac{z^2}{a^2} + \tilde{C} \Leftrightarrow p = C \cdot e^{-\frac{z^2}{a^2}},$$

то есть  $f'(z) = C \cdot e^{-\frac{z^2}{a^2}}$ . Тогда общее решение уравнения (2.79) примет вид:

$$u(x, t) = f(z) = C \int_0^z e^{-\frac{y^2}{a^2}} dy + C_1. \quad (2.81)$$

Для новой координаты  $z$  начальные условия (2.80) преобразуются к виду:

$$\left. \begin{array}{l} x < 0 \\ t \rightarrow +0 \end{array} \right\} \Rightarrow z \rightarrow -\infty : f(-\infty) = 0 = C \int_0^{-\infty} e^{-\frac{y^2}{a^2}} dy + C_1 \quad (2.82)$$

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ t \rightarrow +0 \end{array} \right\} \Rightarrow z \rightarrow +\infty : f(+\infty) = u_0 = C \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{a^2}} dy + C_1 \quad (2.83)$$

Из уравнения (2.82) получаем:

$$C_1 = -C \int_0^{-\infty} e^{-\frac{y^2}{a^2}} dy = C \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{y^2}{a^2}} dy = \frac{Ca\sqrt{\pi}}{2}$$

Из уравнения (2.83) получаем:

$$u_0 = C \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{a^2}} dy + C \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{y^2}{a^2}} dy = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{a^2}} dy = Ca \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{a^2}} d\left(\frac{y}{a}\right) = Ca\sqrt{\pi}.$$

Следовательно,  $C = \frac{u_0}{a\sqrt{\pi}}$  и  $C_1 = \frac{Ca\sqrt{\pi}}{2} = \frac{u_0}{2}$ . Удовлетворим начальным условиям. Решение задачи (2.79) – (2.80) имеет вид:

$$f(z) = \frac{u_0}{a\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\frac{y^2}{a^2}} dy + \frac{u_0}{2}. \quad (2.84)$$

Вернемся к переменным  $(x, t)$  :

$$u(x, t) = \frac{u_0}{a\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\frac{y^2}{a^2}} dy + \frac{u_0}{2}. \quad (2.85)$$

Начальные условия можно задать по-другому:

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0, & x \geq x_1, \\ 0, & x < x_1. \end{cases}$$

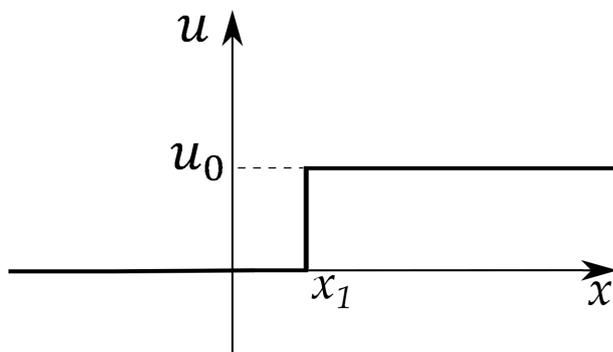


Рис. 25: Другой вид начальных условий

Тогда решение задачи будет иметь вид:

$$u(x, t) = \frac{u_0}{a\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-x_1}{2\sqrt{t}}} e^{-\frac{y^2}{a^2}} dy + \frac{u_0}{2}.$$

Теперь зададим начальные условия в виде:

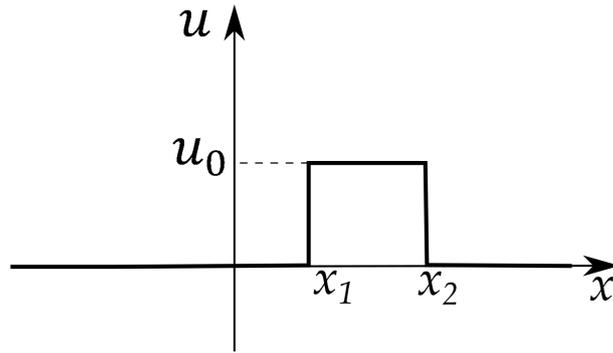


Рис. 26: Новые начальные условия для метода подобия

Данное распределение температуры можно представить как разность двух распределений:

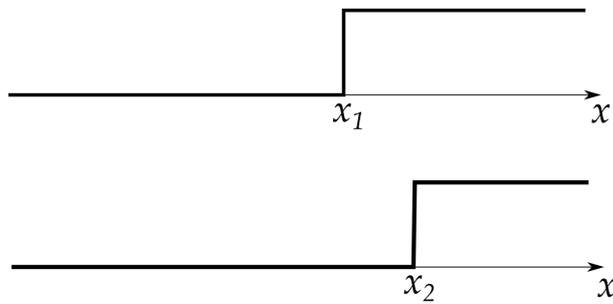


Рис. 27: Разность двух распределений температур

Тогда решение задачи есть разность двух решений:

$$u(x, t) = \frac{u_0}{a\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-x_1}{2\sqrt{t}}} e^{-\frac{y^2}{a^2}} dy + \frac{u_0}{2} - \frac{u_0}{a\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-x_2}{2\sqrt{t}}} e^{-\frac{y^2}{a^2}} dy - \frac{u_0}{2} = \frac{u_0}{a\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-x_2}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x-x_1}{2\sqrt{t}}} e^{-\frac{y^2}{a^2}} dy.$$

Новый вид начальных условий:

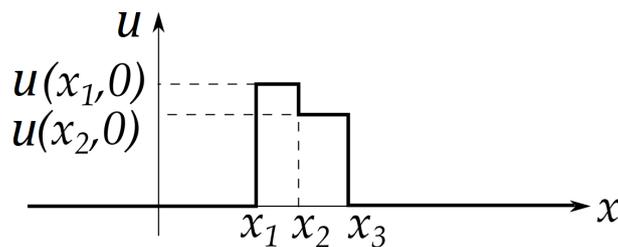


Рис. 28: Новый вид начальных условий

Тогда:

$$u(x, t) = \frac{u(x, 0)}{a\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-x_2}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x-x_1}{2\sqrt{t}}} e^{-\frac{y^2}{a^2}} dy + \frac{u(x, 0)}{a\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-x_3}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x-x_2}{2\sqrt{t}}} e^{-\frac{y^2}{a^2}} dy.$$

Воспользуемся свойством для интеграла от непрерывной функции:  $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \approx f(x_1) \cdot (x_2 - x_1)$  при малых  $(x_2 - x_1)$ . Тогда:

$$\begin{aligned} u(x, t) &\approx \frac{u(x_1, 0)}{a\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x-x_1}{2\sqrt{t}}\right)^2 \cdot \frac{1}{a^2}} \cdot \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{t}} + \frac{u(x_2, 0)}{a\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x-x_2}{2\sqrt{t}}\right)^2 \cdot \frac{1}{a^2}} \cdot \frac{x_3 - x_2}{2\sqrt{t}} = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left( u(x_1, 0) \cdot e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4ta^2}} \cdot (x_2 - x_1) + u(x_2, 0) \cdot e^{-\frac{(x-x_2)^2}{4ta^2}} \cdot (x_3 - x_2) \right). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай, когда начальное распределение температуры имеет вид произвольной функции:

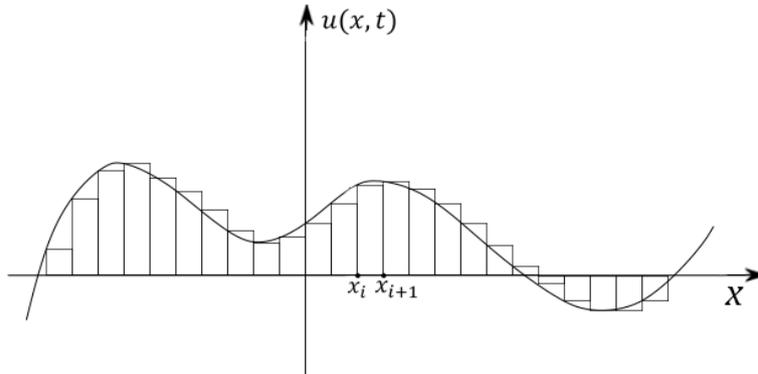


Рис. 29: Начальное распределение температуры. Общий случай

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_i u(x_i, 0) \cdot e^{-\frac{(x-x_i)^2}{4ta^2}} \cdot \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\Delta y_i} \approx \\ &\approx \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u(y, 0)}_{=\varphi(y)} \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4ta^2}} dy, \end{aligned} \quad (2.86)$$

что соответствует формуле (2.58) для задачи (2.50) – (2.51).

Итак, мы научились сводить задачи с произвольными начальными условиями  $u(x, 0) = \varphi(x)$  к набору более простых задач.

## 2.10 Автономные решения нелинейных уравнений

Рассмотренный выше метод подобия для уравнения теплопроводности является частным случаем поиска так называемого автомодельного решения.

### Определение

Говорят, что дифференциальное уравнение в частных производных для функции двух независимых переменных  $x$ ,  $t$  имеет автомодельное решение, если существуют такие функции времени  $A(t)$ ,  $\ell(t)$ , что решение  $u(x, t)$  может быть представлено в виде:

$$u(x, t) = A(t)f\left(\frac{x}{\ell(t)}\right). \quad (2.87)$$

Решение задачи сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению для  $f(\xi)$ . В физических задачах автомодельную подстановку часто можно найти, анализируя размерности.

Важным частным случаем автомодельных решений являются бегущие волны, то есть решения вида:

$$u(x, t) = f(x - vt), \quad (2.88)$$

где  $f$  – функция одной переменной,  $v = const$ . Покажем, что такое решение является автомодельным. Введем новую функцию  $g$  следующим образом:  $f(\xi) = g(e^\xi)$ , а также новые переменные:

$$\begin{cases} y = e^x, \\ \tau = e^t. \end{cases} \quad (2.89)$$

Тогда уравнение (2.88) можно преобразовать:

$$u(x, t) = f(x - vt) = g(e^{x-vt}) = g(e^x(e^t)^{-v}) = g\left(\frac{y}{\tau^v}\right),$$

то есть в новых переменных уравнение (2.88) приобретает вид (2.87):

$$u(y, \tau) = g\left(\frac{y}{\tau^v}\right).$$

Следует отметить, что если для уравнения теплопроводности помимо метода подобия существуют и другие способы построить решение, то для нелинейных уравнений построение автомодельного решения является зачастую единственным способом получить аналитическое решение. Мы рассмотрим два примера поиска автомодельных решений нелинейных уравнений.

## 2.11 Уравнение Бюргера

Уравнение Бюргера описывает слабые ударные волны в среде с диссипацией энергии. Оно имеет вид:

$$u'_t + uu'_x = \mu u''_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.90)$$

где  $\mu$  – вязкость среды.

Найдем решение уравнения (2.90) типа ударной волны, то есть удовлетворяющее условиям:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, t) = u_1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = u_2 \end{cases}, \quad \text{где } u_1 > u_2. \quad (2.91)$$

Будем искать решение типа (2.88), то есть решение следующего вида:

$$u(x, t) = f(x - vt).$$

Подставим (2.88) в (2.90). Учитывая, что:  $u'_t = f' \cdot (-v)$ ,  $u'_x = f'$ ,  $u''_{xx} = f''$ , уравнение примет вид:

$$-vf' + ff' = \mu f''. \quad (2.92)$$

Граничные условия (2.91) преобразуются в следующие:

$$\begin{cases} f(-\infty) = u_1, \\ f(+\infty) = u_2. \end{cases} \quad (2.93)$$

Проинтегрируем (2.92) от  $-\infty$  до  $+\infty$  :

$$-v \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f'(x) dx = \mu \int_{-\infty}^{\infty} f''(x) dx,$$

что эквивалентно:

$$-vf(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} + f^2(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \mu f'(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}. \quad (2.94)$$

Поскольку функция  $f(x)$  имеет на  $-\infty$  и на  $+\infty$  конечные пределы, то пределы ее производной на  $-\infty$  и на  $+\infty$  равны 0. Тогда, учитывая (2.93), формула (2.94) преобразуется к виду:

$$-v(u_2 - u_1) + \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) = 0 \Rightarrow v = \frac{u_1 + u_2}{2}. \quad (2.95)$$

Итак, мы уже получили физический результат: скорость ударной волны зависит только от граничных значений  $u_1$ ,  $u_2$  и не зависит от вязкости  $\mu$  среды.

Теперь найдем автомодельное решение. Проинтегрируем уравнение (2.92) от  $-\infty$  до  $\xi$ :

$$\begin{aligned} -vf(\xi) + vu_1 + \frac{1}{2}f^2(\xi) - \frac{1}{2}u_1^2 &= \mu f'(\xi) \Leftrightarrow \left/ v = \frac{u_1 + u_2}{2} \right/ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(-u_1f - u_2f + u_1^2 + u_1u_2 + f^2 - u_1^2) &= \mu f' \Leftrightarrow \frac{1}{2}(f - u_1)(f - u_2) = \mu f' \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{d\xi}{2\mu} = \frac{df}{(f - u_1)(f - u_2)} &= \left( \frac{df}{f - u_1} - \frac{df}{f - u_2} \right) \frac{1}{u_1 - u_2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(u_1 - u_2)\xi}{2\mu} + C &= \ln \frac{|f - u_1|}{|f - u_2|}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Изменение константы  $C$  соответствует сдвигу вдоль оси, поэтому выберем  $C = 0$  (то есть фронт волны расположен в начале координат). Мы ищем решение типа ступени, поэтому  $u_1 \geq f \geq u_2$ . Следовательно,  $|f - u_1| = u_1 - f$ ,  $|f - u_2| = f - u_2$ . Преобразуем уравнение (2.96):

$$\begin{aligned} e^{\frac{(u_1 - u_2)\xi}{2\mu}} = \frac{u_1 - f}{f - u_2} &\Leftrightarrow fe^{\frac{(u_1 - u_2)\xi}{2\mu}} - u_2e^{\frac{(u_1 - u_2)\xi}{2\mu}} = u_1 - f \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{u_1 + u_2e^{\frac{(u_1 - u_2)\xi}{2\mu}}}{1 + e^{\frac{(u_1 - u_2)\xi}{2\mu}}} &= \frac{\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}(u_1 + u_2)e^{\frac{(u_1 - u_2)\xi}{2\mu}}}{1 + e^{\frac{(u_1 - u_2)\xi}{2\mu}}} + \\ + \frac{\frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}(u_2 - u_1)e^{\frac{(u_1 - u_2)\xi}{2\mu}}}{1 + e^{\frac{(u_1 - u_2)\xi}{2\mu}}} &= \frac{u_1 + u_2}{2} - \frac{u_1 - u_2}{2} \frac{e^{\frac{(u_1 - u_2)\xi}{2\mu}} - 1}{e^{\frac{(u_1 - u_2)\xi}{2\mu}} + 1} = \end{aligned}$$

$$= v - \frac{u_1 - u_2}{2} \cdot \frac{e^{\frac{(u_1 - u_2)\xi}{4\mu}} - e^{-\frac{(u_1 - u_2)\xi}{4\mu}}}{e^{\frac{(u_1 - u_2)\xi}{4\mu}} + e^{-\frac{(u_1 - u_2)\xi}{4\mu}}} = v - \frac{u_1 - u_2}{2} \operatorname{th} \left( \frac{(u_1 - u_2)\xi}{4\mu} \right).$$

Форма ударной волны показана на рисунке. Фронт волны становится круче с уменьшением вязкости среды  $\mu$ .

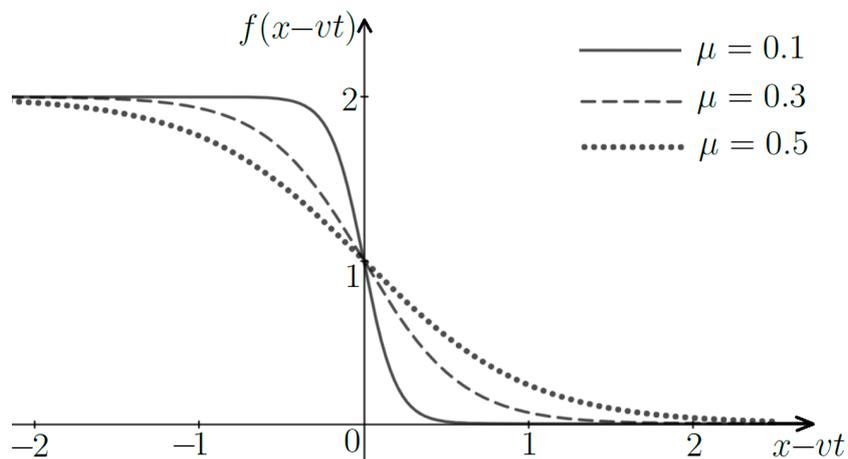


Рис. 30: Решение уравнения Бюргерса типа ударной волны:  $u_1 = 2$ ,  $u_2 = 0$ .

### Замечание

Ударную волну часто называют кинком.

## 2.12 Уравнение Кортевега-де Фриза

Уравнение Кортевега-де Фриза описывает волну в среде с дисперсией, где фазовая скорость зависит от длины волны. Уравнение имеет вид:

$$u'_t + 6uu'_x + u'''_{xxx} = 0. \tag{2.97}$$

Найдем решение этого уравнения типа бегущей волны, обращающееся в 0 на  $-\infty$  и  $+\infty$  вместе со своими первой и второй производными. Подстановка  $u(x, t) = f(x - vt)$  в (2.97) дает:

$$f''' + 6ff' - vf' = 0.$$

Проинтегрируем это уравнение. Получим:

$$f'' + 3f^2 - vf + C_1 = 0. \tag{2.98}$$

Так как  $f'' \xrightarrow[\xi \rightarrow \infty]{} 0$ ,  $f' \xrightarrow[\xi \rightarrow \infty]{} 0$ ,  $f \xrightarrow[\xi \rightarrow \infty]{} 0$ , получаем, что  $C_1 = 0$ .

Домножим уравнение (2.98) на  $f'$  и проинтегрируем. Получим:

$$\frac{1}{2}(f')^2 + f^3 - \frac{1}{2}vf^2 + C_2 = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} f \xrightarrow[\xi \rightarrow \infty]{} 0 \\ f' \xrightarrow[\xi \rightarrow \infty]{} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C_2 = 0.$$

Следовательно,

$$(f')^2 = f^2(v - 2f). \quad (2.99)$$

Заметим, что  $f < \frac{v}{2}$ , так как левая часть (2.99) положительна. Пусть  $f > 0$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\xi} = f\sqrt{v-2f} &\Leftrightarrow \int d\xi = \int \frac{df}{f\sqrt{v-2f}} = \int \left/ \begin{array}{l} \sqrt{v-2f} = g \\ -\frac{df}{\sqrt{v-2f}} = dg \\ f = \frac{v-g^2}{2} \end{array} \right/ = \\ &= \int \frac{2dg}{g^2 - v} = \frac{1}{\sqrt{v}} \int \left( \frac{1}{g - \sqrt{v}} - \frac{1}{g + \sqrt{v}} \right) dg \Rightarrow \\ &\Rightarrow \xi + C = \frac{1}{\sqrt{v}} \ln \left| \frac{g - \sqrt{v}}{g + \sqrt{v}} \right|. \end{aligned}$$

Изменение константы  $C$  приводит к сдвигу вдоль оси. Поэтому положим  $C = 0$ . Кроме того,  $g < \sqrt{v}$ . Поэтому  $|g - \sqrt{v}| = \sqrt{v} - g$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{v} - g}{\sqrt{v} + g} = e^{\xi\sqrt{v}} &\Rightarrow g = \frac{\sqrt{v}(1 - e^{\xi\sqrt{v}})}{1 + e^{\xi\sqrt{v}}}. \\ f = \frac{v}{2} - \frac{g^2}{2} &= \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \frac{1 + e^{2\xi\sqrt{v}} - 2e^{\xi\sqrt{v}}}{1 + e^{2\xi\sqrt{v}} + 2e^{\xi\sqrt{v}}} = \frac{v}{2} - \frac{v}{2} + \frac{v}{2} \frac{4e^{\xi\sqrt{v}}}{(1 + e^{\xi\sqrt{v}})^2} = \\ &= \frac{v}{2} \frac{4}{(e^{\frac{\xi\sqrt{v}}{2}} + e^{-\frac{\xi\sqrt{v}}{2}})^2} = \frac{\frac{v}{2}}{\text{ch}^2(\frac{\sqrt{v}}{2}\xi)}. \end{aligned}$$

Итак,

$$u(x, t) = f(x - vt) = \frac{\frac{v}{2}}{\text{ch}^2(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt))}. \quad (2.100)$$

Решение (2.100) представляет собой уединенную волну (солитон – от англ. solitary wave), экспоненциально затухающую при  $\xi = x - vt \rightarrow \pm\infty$ .

Вид волны показан на рисунке (31).

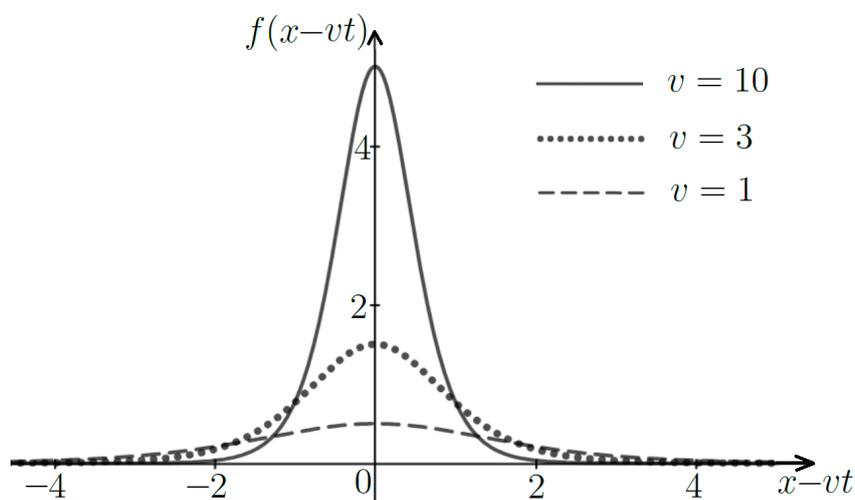


Рис. 31: Солитонное решение уравнения Кортевега-де Фриза

Заметим, что скорость солитона ( $v$ ) пропорциональна его амплитуде ( $\frac{v}{2}$ ). Ширину солитона обычно определяют по ширине пика на половине высоты.

### **Замечание**

Отметим известное свойство графиков функций. Если дан график функции  $y = f(x)$ , то график функции  $y = f(ax)$  есть сжатие графика  $y = f(x)$  вдоль оси  $OX$  в  $a$  раз, то есть при этом преобразовании ширина любого пика графика уменьшается в  $a$  раз. В формуле (2.100) для формы солитона аргумент гиперболического косинуса есть  $\frac{\sqrt{v}}{2}\xi$  ( $\xi = x - vt$ ). Следовательно, ширина пика пропорциональна  $\frac{2}{\sqrt{v}}$ , то есть уменьшается с ростом скорости  $v$ .

Солитон представляет из себя волновой пакет, то есть сумму гармоник различных частот (вернее, интеграл Фурье по разным частотам). Если в среде есть дисперсия, то есть скорость волны зависит от ее частоты, то волновой пакет будет “расплываться”, так как гармоники, из которых он составлен, будут обладать разными скоростями. С другой стороны, нелинейность уравнения влечет за собой увеличение крутизны

фронта волны. Солитон – это такое решение, в котором эти два фактора (дисперсия и нелинейность) взаимно скомпенсированы, поэтому он и распространяется без изменения формы.

### 2.13 Задача о возрасте Земли

Для суждения о внутренних температурных состояниях Земли мы имеем немногие данные, получаемые из наблюдений на ее поверхности. Основные сведения о термическом поле земной коры заключаются в следующем: суточные и годовые колебания температуры происходят в сравнительно тонком поверхностном слое (порядка 10–20 метров для годовых колебаний). Ниже этого слоя температура с течением времени меняется очень медленно.

Наблюдения в шахтах и скважинах, относящиеся к верхним 2–3 километрам земной коры, показывают, что температура с глубиной повышается в среднем на  $3^\circ\text{C}$  на каждые 100 метров.

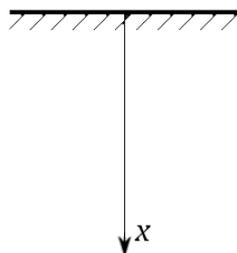


Рис. 32: Простейшая модель. Нулевой уровень температуры на поверхности Земли

В момент своего образования Земля представляет из себя расплавленный шар с температурой  $u_0 = 1200^\circ\text{C}$ . Далее Земля начинает остывать, то есть мы приходим к решению следующей начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x < \infty, \end{array} \right. \quad (2.101)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = 0, \end{array} \right. \quad (2.102)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = \begin{cases} u_0, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.103)$$

Уравнение теплопроводности уже решалось в задаче (2.79) – (2.80).

Его решение (2.81) имеет вид:

$$u(x, t) = C \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\frac{y^2}{a^2}} dy + C_1.$$

Константы  $C$  и  $C_1$  найдем из начального и краевого условий (2.102), (2.103).

$$u(0, t) = 0 = C \cdot 0 + C_1 \Leftrightarrow C_1 = 0.$$

Из начальных условий (2.103) получаем:

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ t \rightarrow +0 \end{array} \right\} \Rightarrow z \rightarrow +\infty : f(+\infty) = u_0 = C \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{a^2}} dy}_{=\frac{a\sqrt{\pi}}{2}} + \underbrace{C_1}_{=0}.$$

Следовательно,  $C = \frac{2u_0}{a\sqrt{\pi}}$ .

$$u(x, t) = \frac{2u_0}{a\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\frac{y^2}{a^2}} dy, \quad 0 \leq x < \infty, \quad t > 0. \quad (2.104)$$

Градиент температуры на поверхности известен:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0.03 \frac{\text{градус}}{\text{м}} \quad (3^\circ\text{C на 100 метров}).$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{2u_0}{a\sqrt{\pi}} \exp -\frac{x^2}{4ta^2} \frac{1}{2\sqrt{t}} \Big|_{x=0} = \frac{2u_0}{a\sqrt{\pi}2\sqrt{t}} = 0.03 \frac{\text{градус}}{\text{м}}.$$

Следовательно,  $t = \left( \frac{u_0}{a\sqrt{\pi} \cdot 0.0003} \right)^2$ .

$u_0 = 1200$  °С – температура Земли в момент своего образования.

$a^2 = 6 \times 10^{-3} \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$  – коэффициент теплопроводности гранитов и базальтов.

$$t = \frac{1200^2}{6 \cdot 10^{-3} \cdot 3.14 \cdot 0.0003^2} = \frac{144000}{1.6956 \cdot 10^{-3}} \cdot 10^{15} \text{ с} = 27 \times 10^6 \text{ лет}$$

– оценка для возраста Земли. Эта оценка оказывается заметно ниже реального значения. Ее удастся улучшить, если учесть другие имеющиеся факторы.

Физическая схема температурного режима Земли подверглась существенному пересмотру после открытия явления радиоактивного распада. Радиоактивные элементы, рассеянные в земной коре, при распаде вызывает ее нагревание, так что уравнение теплопроводности должно иметь вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \text{ где } f = \frac{A}{c\rho}$$

$A = 1.3 \times 10^{-12} \frac{\text{кал}}{\text{см}^3 \text{с}}$  – объемная плотность тепловых источников. Это значение учитывает тепло, выделяемое ураном, торием и калием вместе с их продуктами распада.

Учет радиоактивности позволяет приблизить оценку возраста Земли к реальному значению. Возраст Земли по современным данным составляет приблизительно 4,54 миллиарда лет.

## Глава 3. Уравнение Лапласа

### 3.1 Постановка задачи. Вывод уравнения Лапласа

Рассмотрим электрическое поле стационарных зарядов. Пусть  $\rho(x, y, z)$  – объемная плотность зарядов, имеющих в среде, характеризуемой диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 1$ . Распределение электрического поля в среде описывается уравнением Гаусса (одно из уравнений системы Максвелла):

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (3.1)$$

Заряды неподвижны (стационарны), следовательно, поле является потенциальным:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} u, \quad (3.2)$$

где  $u$  – потенциал электростатического поля. Подставляем выражение (3.2) в уравнение (3.1):

$$\Delta u = -4\pi\rho. \quad (3.3)$$

Если мы ищем электростатическое поле в точках, где объемных зарядов нет ( $\rho = 0$ ), то приходим к уравнению Лапласа:

$$\Delta u = 0. \quad (3.4)$$

### 3.2 Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ внутри круга,} & (3.5) \\ u(R, \varphi) = \mu(\varphi), \text{ на границе круга,} & (3.6) \end{cases}$$

где  $\mu(\varphi)$  – заданная функция,

$\varphi$  – полярный угол,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

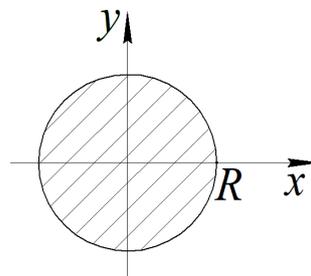


Рис. 33: Рассматриваемая область в задаче Дирихле

Введем полярную систему координат: 
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Перепишем уравнение Лапласа в координатах  $r, \varphi$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial r}}_{\cos \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial r}}_{\sin \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi, \end{array} \right. \quad (3.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}_{-r \sin \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}_{r \cos \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \varphi. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Из системы уравнений (3.7)–(3.8) выразим  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

$$(3.7)r \sin \varphi + (3.8) \cos \varphi : \frac{\partial u}{\partial r} r \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi = \frac{\partial u}{\partial y} (r \sin^2 \varphi + r \cos^2 \varphi) = \frac{\partial u}{\partial y} r,$$

$$(3.7)r \cos \varphi - (3.8) \sin \varphi : \frac{\partial u}{\partial r} r \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi = \frac{\partial u}{\partial x} (r \sin^2 \varphi + r \cos^2 \varphi) = \frac{\partial u}{\partial x} r.$$

Тогда:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi, \end{array} \right. \quad (3.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Используя формулы (3.9) и (3.10) для производных еще раз, получим выражение для вторых производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin \varphi = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) \sin \varphi = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cos^2 \varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi - \\ &\quad - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \sin^2 \varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \sin^2 \varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos \varphi = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) \cos \varphi = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \cos^2 \varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \cos^2 \varphi - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi. \end{aligned}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (3.11)$$

Решение уравнения Лапласа (3.5) ищем в виде:

$$u(r, \varphi) = P(r)\Phi(\varphi) \neq 0. \quad (3.12)$$

Подставляем анзац (3.12) в уравнение (3.5):

$$\begin{aligned} \Delta u &= P''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}P'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}P(r)\Phi''(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Phi(\varphi)(P''(r) + \frac{1}{r}P'(r)) = -\frac{1}{r^2}P(r)\Phi''(\varphi) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{r^2(P''(r) + \frac{1}{r}P'(r))}{P(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda = \text{const}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из (3.13) получаем:

$$\begin{cases} r^2(P''(r) + \frac{1}{r}P'(r)) = \lambda P(r), & \text{где } P(r) \neq 0, \\ \Phi''(\varphi) = -\lambda\Phi(\varphi), & \text{где } \Phi(\varphi) \neq 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\quad (3.15)$$

Параметр  $\lambda$  может принимать различные значения:  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\lambda > 0$ .

1 случай:  $\lambda < 0$ . Пусть  $\lambda = -p^2$ .

Рассмотрим уравнение (3.15):

$$\Phi''(\varphi) = p^2\Phi(\varphi) \Leftrightarrow \Phi'' - p^2\Phi = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$q^2 - p^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm p.$$

Тогда общее решение уравнения:

$$\Phi(\varphi) = Ae^{-p\varphi} + Be^{p\varphi}.$$

Это решение  $\Phi(\varphi)$  нам не подходит, так как должно быть выполнено условие периодичности:  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$  ибо при изменении угла  $\varphi$  на  $2\pi$  функция  $u(r, \varphi)$  должна вернуться к исходному значению:

$$u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi).$$

2 случай:  $\lambda = 0$ .

Тогда:

$$\left. \begin{array}{l} \Phi'' = 0 \Leftrightarrow \Phi(\varphi) = A\varphi + B \\ \text{Из условия периодичности } A = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi(\varphi) = B.$$

Решим уравнение (3.14) для  $\lambda = 0$ :

$$r^2(P''(r) + \frac{1}{r}P'(r)) = 0 \Leftrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ r \neq 0}}{P''(r) + \frac{1}{r}P'(r)} = 0.$$

Сделаем замену:  $V = P'(r)$ .

$$V' + \frac{1}{r}V = 0 \Leftrightarrow \frac{dV}{dr} = -\frac{V}{r} \Leftrightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{dr}{r} \mid \text{интегрируем}$$

$$\ln|V| = -\ln|r| + C_1 \Leftrightarrow |Vr| = e^{C_1} \Leftrightarrow V = \frac{C_2}{r}.$$

$$V = \frac{dP}{dr} = \frac{C_2}{r} \Leftrightarrow P = \int \frac{C_2}{r} dr = C_2 \ln r + C_3.$$

$$u = P(r) \cdot \Phi(\varphi) = (C_2 \ln r + C_3) \cdot B = C \ln r + D.$$

$u|_{r=0} \rightarrow \infty$ , то есть решение не определено в центре круга.

Это недопустимо, следовательно,  $C = 0 \Rightarrow u = D$ .

3 случай:  $\lambda > 0$ . Пусть  $\lambda = p^2$ .

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0 \Leftrightarrow \Phi'' + p^2\Phi = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$q^2 + p^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm ip.$$

Тогда общее решение уравнения (3.15):

$$\Phi(\varphi) = A \cos p\varphi + C \sin p\varphi, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Функция  $\Phi(\varphi)$  должна быть периодической, то есть  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ , следовательно, параметр  $p$  должен быть целым числом.

Решим уравнение (3.14) для  $\lambda = p^2 > 0$ :

$$r^2(a(a-1)r^{a-2} + ar^{a-2}) = p^2 \cdot r^a \Leftrightarrow a(a-1)r^a + ar^a = p^2 r^a.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях  $r$  :

$$a^2 - a + a = p^2 \Leftrightarrow a^2 = p^2 \Leftrightarrow a = \pm p.$$

Фундаментальная система решений (Ф.С.Р.):  $\begin{cases} P_1(r) = r^p, \\ P_2(r) = r^{-p}. \end{cases}$

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения есть линейная комбинация функций из Ф.С.Р. Для уравнения  $n$ -го порядка Ф.С.Р. состоит из  $n$  функций. Мы нашли 2 функции из Ф.С.Р., следовательно, общее решение – это их линейная комбинация:

$$P(r) = C \cdot r^p + D \cdot r^{-p}.$$

При  $r = 0$  :  $P(r) \rightarrow \infty$ , то есть решение не определено в центре круга. Это недопустимо, следовательно,  $D = 0$

$$\Rightarrow P(r) = C \cdot r^p$$

Итак, получили следующее решение уравнения (3.5):

$$u(r, \varphi) = (A \cos p\varphi + B \sin p\varphi) \cdot C \cdot r^p. \quad (3.16)$$

Попробуем удовлетворить краевому условию (3.6):

$$u(R, \varphi) = \mu(\varphi) \Leftrightarrow (A \cos p\varphi + B \sin p\varphi) \cdot C \cdot R^p = \mu(\varphi)$$

– выполнено лишь для конкретной функции  $\mu(\varphi)$ , а надо для произвольной  $\mu(\varphi)$ . Будем искать решение исходной краевой задачи (3.5) – (3.6) в виде ряда:

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \cdot r^n. \quad (3.17)$$

Удовлетворим краевому условию:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \cdot R^n = \mu(\varphi). \quad (3.18)$$

В уравнении (3.18) роль коэффициентов Фурье играют  $A_n \cdot R^n$  и  $B_n \cdot R^n$ .

Способ их нахождения известен:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\theta) d\theta, \\ A_n \cdot R^n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\theta) \cos n\theta d\theta \Leftrightarrow A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \mu(\theta) \cos n\theta d\theta, \\ B_n \cdot R^n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\theta) \sin n\theta d\theta \Leftrightarrow B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \mu(\theta) \sin n\theta d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Подставив (3.19) в (3.17), мы получим решение исходной краевой задачи (3.5) – (3.6):

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \mu(\theta) \frac{r^n}{R^n} (\cos n\theta \cos n\varphi + \sin n\theta \sin n\varphi) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\theta) d\theta \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} \cos(n(\varphi - \theta)) + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Согласно формулам Эйлера:

$$\cos n\varphi = \frac{e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}}{2} = \operatorname{Re} e^{in\varphi}, \quad \sin n\varphi = \frac{e^{in\varphi} - e^{-in\varphi}}{2i} = \operatorname{Im} e^{in\varphi}.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} \cos(n(\varphi - \theta)) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \cdot (e^{in(\varphi - \theta)} + e^{-in(\varphi - \theta)}) = \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \frac{r}{R} e^{i(\varphi - \theta)} \right)^n + \left( \frac{r}{R} e^{-i(\varphi - \theta)} \right)^n \right) \right). \end{aligned}$$

Мы решаем задачу внутри круга, следовательно,  $r < R$ , то есть  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} e^{i(\varphi - \theta)} \right)^n$  и  $\left( \frac{r}{R} e^{-i(\varphi - \theta)} \right)^n$  представляют из себя бесконечно убывающие геометрические прогрессии. Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} \cos(n(\varphi - \theta)) &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\frac{r}{R} e^{i(\varphi - \theta)}}{1 - \frac{r}{R} e^{i(\varphi - \theta)}} + \frac{\frac{r}{R} e^{-i(\varphi - \theta)}}{1 - \frac{r}{R} e^{-i(\varphi - \theta)}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\frac{r}{R} (\cos(\varphi - \theta) + i \sin(\varphi - \theta))}{1 - \frac{r}{R} \cos(\varphi - \theta) - i \frac{r}{R} \sin(\varphi - \theta)} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\frac{r}{R}(\cos(\varphi - \theta) - i \sin(\varphi - \theta))}{1 - \frac{r}{R} \cos(\varphi - \theta) + i \frac{r}{R} \sin(\varphi - \theta)} \Big) = \\
& = \frac{1}{2} \left( 1 + 2 \frac{r}{R} \cdot \frac{\cos(\varphi - \theta) - \frac{r}{R} \cos^2(\varphi - \theta) - \frac{r}{R} \sin^2(\varphi - \theta)}{1 - 2 \frac{r}{R} \cos(\varphi - \theta) + \frac{r^2}{R^2}} \right) = \\
& = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{r^2}{R^2}}{1 - 2 \frac{r}{R} \cos(\varphi - \theta) + \frac{r^2}{R^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\varphi - \theta) + r^2}.
\end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (3.20), получим:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\theta) d\theta \cdot \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\varphi - \theta) + r^2}. \quad (3.21)$$

Полученная интегральная формула дает решение задачи. Подынтегральное выражение  $\frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\varphi - \theta) + r^2}$  называется ядром Дирихле.

### 3.3 Задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в кольце.

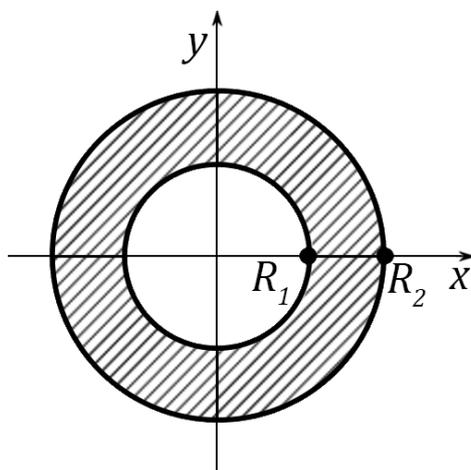


Рис. 34: Задача Дирихле в кольце

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{внутри кольца,} & (3.22) \\ \left. \begin{array}{l} u(R_1, \varphi) = f_1(\varphi) \\ u(R_2, \varphi) = f_2(\varphi) \end{array} \right\} & \text{краевые условия на границах,} & (3.23) \end{cases}$$

где  $f_1(x), f_2(x)$  – заданные функции,  $\varphi$  – полярный угол. Для простоты вычислений возьмем  $R_1 = 1, R_2 = 2, f_1(x) = 1, f_2(x) = 2$ . Тогда краевые условия (3.23) примут вид:

$$\begin{cases} u(1, \varphi) = 1, \\ u(2, \varphi) = 2. \end{cases} \quad (3.24)$$

Запишем уравнение (3.22) в полярных координатах:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (3.25)$$

Решение будем искать в следующем виде:

$$u(r, \varphi) = P(r) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0. \quad (3.26)$$

Подставим выражение (3.26) в уравнение (3.22):

$$\Delta u = P''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}P'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}P(r)\Phi''(\varphi) = 0.$$

Решаем задачу методом разделения переменных:

$$\frac{r^2(P'' + \frac{1}{r}P')}{P} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda = \text{const}. \quad (3.27)$$

Из (3.27) получаем:

$$\begin{cases} r^2(P'' + \frac{1}{r}P') = \lambda P, \\ \Phi'' = -\lambda \Phi. \end{cases} \quad (3.28)$$

$$(3.29)$$

Решение аналогично задаче Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

1 случай:  $\lambda < 0$  : решений нет.

2 случай:  $\lambda = 0$  :  $u = D_0 + C_0 \ln r$ .

3 случай:  $\lambda > 0$  :

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\varphi) &= A \cos p\varphi + B \sin p\varphi \\ P(r) &= C \cdot r^p + D \cdot r^{-p} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = A \cdot r^p \cos p\varphi + B \cdot r^p \sin p\varphi + C \cdot r^{-p} \cos p\varphi + D \cdot r^{-p} \sin p\varphi.$$

Для того, чтобы удовлетворить краевым условиям (3.23), будем искать решение исходной задачи (3.22) – (3.23) в виде ряда:

$$u(r, \varphi) = D_0 + C_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot r^n \cos n\varphi + B_n \cdot r^n \sin n\varphi + C_n \cdot r^{-n} \cos n\varphi + D_n \cdot r^{-n} \sin n\varphi). \quad (3.30)$$

В нашем случае краевые условия имеют вид (3.24):

$$u(1, \varphi) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi + C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) = 1$$

$$\Leftrightarrow u(1, \varphi) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((A_n + C_n) \cos n\varphi + (B_n + D_n) \sin n\varphi) = 1, \quad (3.31)$$

то есть функция 1 разложена в ряд Фурье по синусам, косинусам. Способ нахождения коэффициентов Фурье известен:

$$\begin{cases} A_n + C_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 1 \cdot \cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi n} \sin n\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0, \\ B_n + D_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin n\varphi d\varphi = -\frac{1}{\pi n} \cos n\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0, \\ D_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 d\varphi = 1. \end{cases} \quad (3.32)$$

Аналогично для второго краевого условия:

$$u(2, \varphi) = D_0 + C_0 \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(C_n \cdot 2^n + D_n \cdot 2^{-n}) \cos n\varphi + B_n(C_n \cdot 2^n + D_n \cdot 2^{-n}) \sin n\varphi) = 2. \quad (3.33)$$

Коэффициенты Фурье:

$$\begin{cases} A_n \cdot 2^n + C_n \cdot 2^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 2 \cdot \cos n\varphi d\varphi = 0, \\ B_n \cdot 2^n + D_n \cdot 2^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 2 \cdot \sin n\varphi d\varphi = 0, \\ D_0 + C_0 \ln 2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 d\varphi = 2. \end{cases} \quad (3.34)$$

Из (3.32) и (3.34), следует, что:

$$\begin{cases} A_n = B_n = C_n = D_n = 0, \\ D_0 = 1, \\ D_0 + C_0 \ln 2 = 2 \Rightarrow C_0 = \frac{1}{\ln 2}. \end{cases} \quad (3.35)$$

С учетом найденных коэффициентов формула (3.30) примет вид:

$$u(r, \varphi) = 1 + \frac{\ln r}{\ln 2}. \quad (3.36)$$

### 3.4 Задача Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad - \text{ в прямоугольнике,} \\ u(0, y) = f_1(y) \\ u(a, y) = f_2(y) \\ u(x, 0) = f_3(x) \\ u(x, b) = f_4(x) \end{array} \right\} \quad - \text{ краевые условия.} \quad (3.37)$$

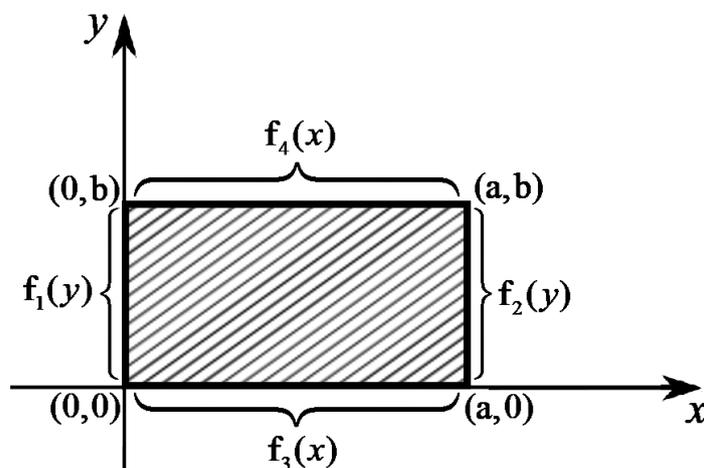


Рис. 35: Задача Дирихле в прямоугольнике

Граничные условия должны быть согласованы в угловых точках:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(0) = f_3(0) = u(0, 0), \\ f_1(b) = f_4(0) = u(0, b), \\ f_2(0) = f_3(a) = u(a, 0), \\ f_4(a) = f_2(b) = u(a, b). \end{array} \right. \quad (3.38)$$

Попробуем решить задачу методом разделения переменных:

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y).$$

Подставляем в уравнение Лапласа:

$$X'' \cdot Y + Y'' \cdot X = 0 \Leftrightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda = \text{const.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X'' - \lambda X = 0, \\ Y'' + \lambda Y = 0. \end{array} \right.$$

Рассмотрим случай:  $\lambda < 0$ . Пусть  $\lambda = -p^2$ .

$$X'' + p^2 X = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$q^2 + p^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm ip.$$

Общее решение уравнения:

$$X(x) = A \cos px + B \sin px.$$

Решим теперь уравнение для функции  $Y(y)$ .

$$Y'' - p^2 Y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$q^2 - p^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm p.$$

Общее решение уравнения:

$$Y(y) = C \cdot e^{py} + D \cdot e^{-py}.$$

Тогда:

$$u(x, y) = (A \cos px + B \sin px)(C \cdot e^{py} + D \cdot e^{-py}).$$

Подставляем краевые условия:

$$u(x, 0) = f_3(x) = (C + D)(A \cos px + B \sin px),$$

$$u(x, b) = f_4(x) = (C \cdot e^{pb} + D \cdot e^{-pb})(A \cos px + B \sin px).$$

Для произвольных функций  $f_3(x), f_4(x)$  выбрать коэффициенты  $A, B, C, D$  так, чтобы удовлетворить краевым условиям, не удастся. Квантование значений  $p$  происходит за счет нулевых граничных условий, следовательно, задачу нужно решать другим способом. Преобразуем исходную краевую задачу к задаче, в которой краевые условия в угловых точках нулевые. Пусть:

$$u(x, y) = v(x, y) + A + Bx + Cy + Dxy.$$

Тогда функция  $v$  удовлетворяет уравнению Лапласа:  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ .

Выберем коэффициенты  $A, B, C, D$  так чтобы функция  $v$  удовлетворяла нулевым условиям в угловых точках:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, 0) = A, \\ u(0, b) = A + Cb, \\ u(a, 0) = A + Ba, \\ u(a, b) = A + Ba + Cb + Dab, \end{array} \right. \quad (3.39)$$

что эквивалентно:

$$A = u(0, 0),$$

$$B = \frac{1}{a}(u(a, 0) - u(0, 0)),$$

$$C = \frac{1}{b}(u(0, b) - u(0, 0)),$$

$$u(a, b) = u(0, 0) + u(a, 0) - u(0, 0) + u(0, b) - u(0, 0) + Dab \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{1}{ab}(u(a, b) + u(0, 0) - u(a, 0) - u(0, b)).$$

Таким образом, мы получаем задачу для  $v(x, y)$  с согласованными в угловых точках граничными условиями, эквивалентную исходной краевой

задаче (3.37):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \\ v(0, y) = \tilde{f}_1(y), \\ v(a, y) = \tilde{f}_2(y), \\ v(x, 0) = \tilde{f}_3(y), \\ v(x, b) = \tilde{f}_4(y). \end{array} \right. \quad (3.40)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(y) &= v(0, y) = u(0, y) - A - Cy = f_1(y) - u(0, 0) - \frac{1}{b}(u(0, b) - u(0, 0))y = \\ &= f_1(y) - f_1(0) - \frac{1}{b}(f_1(b) - f_1(0))y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2(y) &= v(a, y) = u(a, y) - A - Ba - Cy - Day = f_2(y) - u(0, 0) - u(a, 0) + \\ &+ u(0, 0) - \frac{1}{b}(u(0, b) - u(0, 0))y - \frac{1}{ab}(u(a, b) + u(0, 0) - u(a, 0) - u(0, b))ay = \\ &= f_2(y) - \frac{1}{b}u(0, b)y + \frac{1}{b}u(0, 0)y - u(a, 0) - \frac{1}{b}u(a, b)y - \frac{1}{b}u(0, 0)y + \\ &+ \frac{1}{b}u(a, 0)y + \frac{1}{b}u(0, b)y = f_2(y) - f_2(0) - \frac{1}{b}(f_2(b) - f_2(0)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_3(y) &= v(x, 0) = u(x, 0) - A - Bx = f_3(x) - u(0, 0) - \frac{1}{a}(u(a, 0) - u(0, 0))x = \\ &= f_3(x) - f_3(0) - \frac{1}{a}(f_3(a) - f_3(0))x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_4(y) &= v(x, b) = u(x, b) - A - Bx - Cb - Dbx = f_4(x) - u(0, 0) - \frac{1}{a}(u(a, 0) - \\ &- u(0, 0))x - u(0, b) + u(0, 0) - \frac{1}{a}(u(a, b) + u(0, 0) - u(a, 0) - u(0, b))x = \\ &= f_4(x) - f_4(0) - \frac{1}{a}(f_4(a) - f_4(0))x. \end{aligned}$$

Для решения задачи (3.40), а значит и эквивалентной ей задачи (3.37)

нам потребуется решить вспомогательную задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right. \quad - \text{ в прямоугольнике,} \quad (3.41)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v(0, y) = \tilde{f}_1(y), \end{array} \right. \quad (3.42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v(a, y) = \tilde{f}_2(y), \end{array} \right. \quad (3.43)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v(x, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (3.44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v(x, b) = 0. \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Решаем уравнение методом разделения переменных:

$$v(x, y) = X(x) \cdot Y(y). \quad (3.46)$$

Подставляем в уравнение Лапласа:

$$X'' \cdot Y + Y'' \cdot X = 0 \Leftrightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda = \text{const.}$$

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, \\ Y'' + \lambda Y = 0. \end{cases} \quad (3.47)$$

$$(3.48)$$

1 случай:  $\lambda < 0$ . Пусть  $\lambda = -p^2$ .

$$Y'' - p^2 Y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$q^2 - p^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm p.$$

Общее решение уравнения (3.48):

$$Y(y) = C \cdot e^{py} + D \cdot e^{-py}.$$

Решим теперь уравнение для функции  $X(x)$ .

$$X'' + p^2 X = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$q^2 + p^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm ip.$$

Общее решение уравнения (3.47):

$$X(x) = A \cos px + B \sin px.$$

$$v(x, y) = X(x) \cdot Y(y) = (A \cos px + B \sin px)(C \cdot e^{py} + D \cdot e^{-py}). \quad (3.49)$$

Удовлетворим краевым условиям (3.44) – (3.45):

$$v(x, 0) = X(x) \cdot (C + D) = (A \cos px + B \sin px) \cdot (C + D) = 0.$$

Мы ищем ненулевые решения, то есть  $X(x) \neq 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Следовательно, } C + D = 0 \Leftrightarrow C = -D \\ v(x, b) = X(x) \cdot (C \cdot e^{pb} + D \cdot e^{-pb}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow D(e^{-pb} - e^{pb}) = 0.$$

$D \neq 0 \Rightarrow e^{-pb} = e^{pb} \Rightarrow p = 0 \Rightarrow v(x, y) = A \cdot (C + D) = \text{const}$ , что противоречит краевым условиям (3.42), (3.43).

2 случай:  $\lambda = 0$ .

Тогда уравнение для  $Y(y)$  примет вид:  $Y'' = 0 \Rightarrow Y = Cy + D$ .

$$v(x, 0) = v(x, b) = 0 \Rightarrow Y(0) = Y(b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} D = 0 \\ Cb + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow Y(y) \equiv 0 \Rightarrow v(x, y) \equiv 0.$$

3 случай:  $\lambda > 0$ . Пусть  $\lambda = p^2$ .

$$X'' - p^2 X = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$q^2 - p^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm p.$$

Общее решение уравнения (3.47):

$$X(x) = Ae^{px} + Be^{-px}.$$

Решим теперь уравнение для функции  $Y(y)$ .

$$Y'' + p^2 Y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$q^2 + p^2 = 0 \Leftrightarrow q = \pm ip.$$

Общее решение уравнения (3.48):

$$Y(y) = C \cos py + D \sin py.$$

$$v(x, y) = X(x) \cdot Y(y) = (Ae^{px} + Be^{-px}) \cdot (C \cos py + D \sin py). \quad (3.50)$$

Удовлетворим краевым условиям (3.44) – (3.45):

$$v(x, 0) = X(x) \cdot C = 0,$$

$$\text{Так как } X(x) \not\equiv 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$v(x, b) = X(x) \cdot (C \cos pb + D \sin pb) = 0 \Rightarrow D \sin pb = 0.$$

Мы ищем нетривиальное решение, следовательно,

$$D \neq 0 \Rightarrow \sin pb = 0 \Rightarrow p = \frac{\pi n}{b}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Получаем следующие решения уравнения (3.41), удовлетворяющие краевым условиям (3.44) – (3.45):

$$v_n(x, y) = (A_n \cdot e^{\frac{\pi n x}{b}} + B_n \cdot e^{-\frac{\pi n x}{b}}) \cdot \sin \frac{\pi n y}{b}. \quad (3.51)$$

Для того, чтобы удовлетворить краевым условиям (3.42) – (3.43), будем искать решение задачи в виде ряда:

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot e^{\frac{\pi n x}{b}} + B_n \cdot e^{-\frac{\pi n x}{b}}) \cdot \sin \frac{\pi n y}{b}. \quad (3.52)$$

$$v(0, y) = f_1(y) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \cdot \sin \frac{\pi n y}{b} = \tilde{f}_1(y), \quad (3.53)$$

то есть функция  $f_1(y)$  разложена в ряд Фурье по синусам. Способ нахождения коэффициентов Фурье известен:

$$A_n + B_n = \frac{2}{b} \int_0^b \tilde{f}_1(y) \sin \frac{\pi n y}{b} dy. \quad (3.54)$$

$$v(a, y) = \tilde{f}_2(y) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot e^{\frac{\pi n a}{b}} + B_n \cdot e^{-\frac{\pi n a}{b}}) \cdot \sin \frac{\pi n y}{b} = \tilde{f}_2(y). \quad (3.55)$$

$$A_n \cdot e^{\frac{\pi n a}{b}} + B_n \cdot e^{-\frac{\pi n a}{b}} = \frac{2}{b} \int_0^b \tilde{f}_2(y) \sin \frac{\pi n y}{b} dy \Rightarrow \quad (3.56)$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{2}{b} \int_0^b \tilde{f}_2(y) \sin \frac{\pi ny}{b} dy \cdot e^{\frac{\pi na}{b}} - A_n \cdot e^{\frac{2\pi na}{b}}.$$

Подставляем  $B_n$  в (3.54):

$$A_n(1 - e^{\frac{2\pi na}{b}}) = \frac{2}{b} \int_0^b \tilde{f}_1(y) \sin \frac{\pi ny}{b} dy - \frac{2}{b} \int_0^b \tilde{f}_2(y) \sin \frac{\pi ny}{b} dy \cdot e^{\frac{\pi na}{b}} \Leftrightarrow$$

$$A_n = \frac{1}{1 - e^{\frac{2\pi na}{b}}} \cdot \left( \frac{2}{b} \int_0^b \tilde{f}_1(y) \sin \frac{\pi ny}{b} dy - \frac{2}{b} \int_0^b \tilde{f}_2(y) \sin \frac{\pi ny}{b} dy \cdot e^{\frac{\pi na}{b}} \right). \quad (3.57)$$

$$B_n = \frac{2}{b} \int_0^b \tilde{f}_1(y) \sin \frac{\pi ny}{b} dy -$$

$$- \frac{1}{1 - e^{\frac{2\pi na}{b}}} \cdot \left( \frac{2}{b} \int_0^b \tilde{f}_1(y) \sin \frac{\pi ny}{b} dy - \frac{2}{b} \int_0^b \tilde{f}_2(y) \sin \frac{\pi ny}{b} dy \cdot e^{\frac{\pi na}{b}} \right). \quad (3.58)$$

Подставив полученные коэффициенты в формулу (3.52), получаем решение задачи Дирихле (3.41) – (3.45).

Вернемся к задаче (3.40) с произвольными краевыми условиями. Будем искать её решение в виде суммы двух функций:

$$v(x, y) = V(x, y) + W(x, y), \quad (3.59)$$

где  $V(x, y)$  и  $W(x, y)$  – решения соответствующих вспомогательных задач:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, \\ V(0, y) = \tilde{f}_1(y), \\ V(a, y) = \tilde{f}_2(y), \\ V(x, 0) = 0, \\ V(x, b) = 0, \end{array} \right. \quad (3.60) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \\ W(0, y) = 0, \\ W(a, y) = 0, \\ W(x, 0) = \tilde{f}_3(x), \\ W(x, b) = \tilde{f}_4(x). \end{array} \right. \quad (3.61)$$

Задача (3.60) уже была решена (формула (3.52) с коэффициентами (3.57), (3.58)), задача (3.61) решается аналогично.

## Глава 4. Теоремы единственности

### 4.1 Теорема единственности для уравнения струны

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi, \\ u'_t(x, 0) = \psi(x), \\ u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(l, t) = \mu_2(t). \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Положение точки на струне определяется функцией  $u(x, t)$ . Докажем, что начально-краевая задача (4.1) имеет единственное решение.

Доказательство:

Докажем от противного.

Пусть есть два решения:  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$ . Рассмотрим разность  $V(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ . Докажем, что  $V(x, t) \equiv 0$ . Функция  $V(x, t)$  будет удовлетворять следующему уравнению и начально-краевым условиям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x, t) - f(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \\ V(x, 0) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0, \\ V'_t(x, 0) = 0, \\ V(0, t) = V(l, t) = 0. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

$$(4.3)$$

$$(4.4)$$

Теорему единственности можно доказать из закона сохранения энергии.

Рассмотрим следующий функционал энергии:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l ((V'_t)^2 + a^2 (V'_x)^2) dx - \text{полная энергия струны в момент времени } t. \quad (4.5)$$

Функционал ставит в соответствие функции  $V(x, t)$  число  $E(t)$ . Здесь  $t$  рассматривается как параметр. Пусть плотность струны  $\rho = 1$ . Тогда:  $dx \cdot \frac{(V'_t)^2}{2}$  – кинетическая энергия элементарной части струны;

$V(x, t)$  – отклонение точки струны от положения равновесия;

$V'_t$  – скорость точки струны;

$dx \cdot \frac{a^2 \cdot (V'_x)^2}{2}$  – потенциальная энергия элементарной части струны;

$V'_x$  – удлинение элементарной части струны.

Сила, действующая на участок струны  $(x_i, x_i + \Delta x)$ , равна:

$$F_i = T_0 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_i + \Delta x} - T_0 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_i} = T_0 \int_{x_i}^{x_i + \Delta x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx.$$

Тогда суммарная сила, действующая на струну, равна:

$$F = T_0 \cdot \sum_{x_i} \int_{x_i}^{x_i + \Delta x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = T_0 \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx.$$

Потенциальная энергия – это работа силы натяжения струны:

$$\begin{aligned} E_{\text{пот}} &= \int_0^u F du = T_0 \int_0^u du \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = T_0 \int_0^l dx \int_0^u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) du = \\ &= \left| du = \frac{\partial u}{\partial x} dx \right| = T_0 \int_0^l dx \int_0^u \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = T_0 \int_0^l dx \int_0^u \frac{\partial u}{\partial x} \cdot d \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \\ &= T_0 \int_0^l dx \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \left| a^2 = \frac{T_0}{\rho} = T_0, \rho = 1 \right| = \frac{1}{2} \int_0^l a^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned}$$

– потенциальная энергия струны.

Докажем, что  $E(t) \equiv 0$ .

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left( (V'_t)^2 + a^2 (V'_x)^2 \right) dx.$$

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{2} \int_0^l (2V'_t \cdot V''_{tt} + 2a^2 V'_x \cdot V''_{xt}) dx = \int_0^l V'_t \cdot V''_{tt} dx + a^2 \int_0^l V'_x \cdot V''_{xt} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = V'_x \quad du = V''_{xx} dx \\ v = V'_t \quad dv = V''_{xt} dx \end{array} \right| = \int_0^l V'_t \cdot V''_{tt} dx + a^2 V'_x \cdot V'_t \Big|_0^l - a^2 \int_0^l V'_t \cdot V''_{xx} dx = \end{aligned}$$

$$= \int_0^l V_t' \cdot \underbrace{(V_{tt}'' - a^2 V_{xx}'')}_{=0 \text{ (в силу (4.2))}} dx + a^2 \underbrace{(V_x'(l, t) \cdot V_t'(l, t) - V_x'(0, t) \cdot V_t'(0, t))}_{=0} = 0. \quad (4.6)$$

$$/V_0(t) = V_l(t) = 0 \Rightarrow V_t'(0, t) = V_t'(l, t) = 0/$$

Следовательно,  $E(t) = const$ . В силу начальных условий (4.3) получаем:

$$E(t) = const = E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \underbrace{(V_t'(x, 0))^2}_{=0 \text{ (ибо } V(x, 0)=0)} + a^2 \underbrace{(V_x'(x, 0))^2}_{=0} \right) dx \equiv 0. \quad (4.7)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_x'(x, t) \equiv 0 \\ V_t'(x, t) \equiv 0 \end{array} \Rightarrow V(x, t) = const \right\} \Rightarrow V(x, t) \equiv 0. \quad (4.8)$$

Из начального условия (4.3):  $V(x, 0) = 0$

С другой стороны,  $V(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ .

Следовательно, если существуют две функции  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$ , удовлетворяющие всем условиям задачи (4.1), то  $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$ . ■

### Замечание

Попробуйте модифицировать доказательство для случая, когда струна неоднородна, то есть уравнение имеет вид:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t),$$

где  $\rho(x), k(x)$  – некоторые положительные функции переменной  $x$ .

## 4.2 Теорема единственности для уравнения теплопроводности

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) - \text{начальные условия,} \\ \left. \begin{array}{l} u(0, t) = \psi_1(t) \\ u(l, t) = \psi_2(t) \end{array} \right\} - \text{граничные условия.} \end{array} \right\} \quad (4.9)$$

$u(x, t)$  – температура стержня в точке  $x$  в момент времени  $t$ . Докажем, что начально-краевая задача (4.9) имеет единственное решение.

Доказательство:

Докажем от противного. Пусть есть два решения:  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$ . Рассмотрим разность  $V(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ . Докажем, что  $V(x, t) \equiv 0$ . Функция  $V(x, t)$  будет удовлетворять следующему уравнению и начально-краевым условиям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \end{array} \right. \quad (4.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V(x, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (4.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V(0, t) = V(l, t) = 0. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Для доказательства будем использовать принцип максимума (минимума).

### Принцип максимума (минимума)

Если функция  $u(x, t)$ , определенная и непрерывная в замкнутой области  $0 \leq t \leq T$  и  $0 \leq x \leq l$ , удовлетворяет уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.13)$$

в точках области  $0 < t \leq T$  и  $0 < x < l$ , то наибольшее и наименьшее значения функции  $u(x, t)$  достигаются или в начальный момент при  $t = 0$ , или в точках границы  $x = 0$  или  $x = l$ .

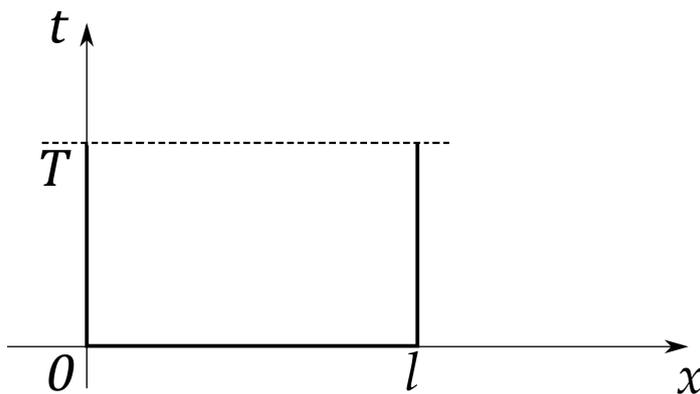


Рис. 36: К доказательству принципа максимума (минимума)

На рисунке жирной линией отмечена граница области, пунктирной линией – мнимая граница. В действительности, на мнимой границе при  $t = T$  никакие условия на функцию  $u(x, t)$  не ставятся.

Доказательство принципа максимума:

От противного.

Пусть  $M$  – наибольшее значение  $u(x, t)$  на границе  $\Gamma$  (то есть при  $t = 0$  ( $0 \leq x \leq l$ ), или при  $x = 0$  ( $0 \leq t \leq T$ ), или при  $x = l$  ( $0 \leq t \leq T$ )). Пусть функция  $u(x, t)$  достигает своего наибольшего значения в некоторой точке  $(x_0, t_0)$  внутри области ( $0 < x_0 < l$ ,  $0 < t_0 \leq T$ ):

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon. \quad (4.14)$$

Сравним знаки левой и правой частей уравнения (4.13) в точке  $(x_0, t_0)$ . Функция  $u(x, t_0)$  достигает своего наибольшего значения при  $0 < x_0 < l$ , следовательно, это экстремум-максимум.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leq 0. \quad (4.15)$$

С другой стороны, функция  $u(x_0, t)$  достигает своего наибольшего значения при  $0 < t_0 < T$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) = 0$$

либо на границе области при  $t_0 = T$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0. \quad (4.16)$$

Напишем уравнение теплопроводности:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0)}_{\geq 0 \text{ (в силу (4.16))}} = a^2 \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0)}_{\leq 0 \text{ (в силу (4.15))}} \quad (4.17)$$

Рассуждение (4.17) не является доказательством, так как левая и правая части могут быть равны 0, что не влечет за собой противоречия.

Немного изменим доказательство и найдем точку  $(x_1, t_1)$ , в которой  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0$  и  $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$ . Для этого рассмотрим вспомогательную функцию:

$$W(x, t) = u(x, t) + k(t_0 - t), \quad (4.18)$$

где  $k$  – некоторое постоянное число.

Очевидно, что:

$$W(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon. \quad (4.19)$$

$$k(t_0 - t) \leq kT, \quad \text{так как } t, t_0 \in (0, T]. \quad (4.20)$$

Выберем  $k > 0$  так, чтобы:  $kT < \frac{\varepsilon}{2}$ , то есть  $k < \frac{\varepsilon}{2T}$ .

$$W(x, t) \Big|_{\Gamma} = \underbrace{u(x, t) \Big|_{\Gamma}}_{\leq M} + \underbrace{k(t_0 - t) \Big|_{\Gamma}}_{\leq kT < \frac{\varepsilon}{2}} \leq M + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.21)$$

В силу непрерывности функции  $W(x, t)$  она должна в некоторой точке  $(x_1, t_1)$  достигать своего наибольшего значения.

$$W(x_1, t_1) \geq W(x_0, t_0) = M + \varepsilon. \quad (4.22)$$

Из неравенства (4.21) следует, что точка  $(x_1, t_1)$  не лежит на границе  $\Gamma$  (так как  $W(x, t) \Big|_{\Gamma} \leq M + \frac{\varepsilon}{2}$ , а у нас  $W(x_1, t_1) \geq M + \varepsilon$ ).

Функция  $W(x_1, t_1)$  достигает своего наибольшего значения при  $0 < x_1 < l$ , следовательно, это экстремум-максимум.

$$\frac{\partial W}{\partial x}(x_1, t_1) = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x_1, t_1) \leq 0. \quad (4.23)$$

С другой стороны, функция  $W(x_1, t)$  достигает своего наибольшего значения при  $0 < t_1 < T$ :

$$\frac{\partial W}{\partial t}(x_1, t_1) = 0,$$

либо на границе области при  $t_1 = T$ :

$$\frac{\partial W}{\partial t}(x_1, t_1) \geq 0. \quad (4.24)$$

Учитывая (4.18), получаем:

$$u''_{xx}(x_1, t_1) = W''_{xx}(x_1, t_1) \leq 0, \quad (4.25)$$

$$u'_t(x_1, t_1) = W'_t(x_1, t_1) + k \geq k > 0, \quad (4.26)$$

$$\underbrace{u'_t(x_1, t_1)}_{>0 \text{ (в силу (4.26))}} = a^2 \cdot \underbrace{u''_{xx}(x_1, t_1)}_{\leq 0 \text{ (в силу (4.25))}}.$$

Следовательно, в точке  $(x_1, t_1)$  уравнение не выполнено. ■

### **Замечание**

Уравнение теплопроводности должно быть выполнено во всех точках внутри области. Аналогично формулируется и доказывается принцип минимума.

### Доказательство теоремы единственности:

Рассмотрим задачу (4.10) – (4.12). Согласно принципу максимума (минимума), наибольшее и наименьшее значения функции  $V(x, t)$  достигаются в точках границы  $x = 0$  или  $x = l$ , либо при  $t = 0$ . В силу (4.11) – (4.12) имеем:

$$V(x, 0) = V(0, t) = V(l, t) = 0,$$

то есть наибольшее и наименьшее значения функции равны 0, следовательно,  $V(x, t) \equiv 0 \Rightarrow u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$ , то есть решения совпадают. ■

### **Следствие 1**

Рассмотрим две задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \\ u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \\ u_1(0, t) = u_1(l, t) = 0, \end{array} \right. \quad (4.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \\ u_2(x, 0) = \varphi_2(x), \\ u_2(0, t) = u_2(l, t) = 0, \end{array} \right. \quad (4.28)$$

и при этом  $0 < \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ .

Тогда  $u_1(x, t) \leq u_2(x, t)$  для всех значений  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Таким образом, если при  $t = 0$  одно тело горячее, чем другое, то в процессе остывания это соотношение не изменится (если тела имеют одинаковые характеристики).

### Доказательство:

Рассмотрим функцию  $V(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \\ V(x, 0) = \varphi_2(x) - \varphi_1(x) \geq 0, \\ V(0, t) = V(l, t) = 0. \end{array} \right. \quad (4.29)$$

Согласно принципу минимума, наименьшее значение функции  $V(x, t)$  находится на границе области, то есть  $V(x, t) \geq \varphi_2(x) - \varphi_1(x) \geq 0$ , следовательно,  $u_2(x, t) \geq u_1(x, t)$ . ■

### Следствие 2

В задачах (4.27) – (4.28): если из  $|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| < \varepsilon$  для любых  $x$  следует  $|u_2(x, t) - u_1(x, t)| < \varepsilon$  для любых  $x, t$ , то это означает устойчивость решения. То есть малое изменение начальных данных не приведет к большим изменениям решения.

Доказательство:

Рассмотрим функцию  $V(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$ .

Для  $V(x, t)$  выполнена задача (4.29). В силу принципов максимума (минимума):

$$\min_{\Gamma}(\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) \leq V(x, t) \leq \max_{\Gamma}(\varphi_2(x) - \varphi_1(x)),$$

и так как

$$\begin{cases} \min_{\Gamma}(\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) > -\varepsilon; \\ \max_{\Gamma}(\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) < \varepsilon; \end{cases}$$

то  $|V(x, t)| < \varepsilon$  для любых  $x, t$ . ■

### 4.3 Формулы Грина

Для изучения уравнения Лапласа нам понадобятся формулы Грина, являющиеся следствиями теоремы Остроградского-Гаусса:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A} \, d\Omega = \oiint_{\Sigma} (\vec{A}, \vec{n}) \, d\Sigma = \oiint_{\Sigma} A_n \, d\Sigma, \quad (4.30)$$

где  $\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  – некоторый вектор,

$A_n$  – проекция  $\vec{A}$  на вектор нормали  $\vec{n}$ ,

$A_n = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$ , где  $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ ,

$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ ,

$P, Q, R$  – произвольные дифференцируемые функции,

$\Omega$  — некоторая область, ограниченная гладкой поверхностью  $\Sigma$ .

### Замечание

Поверхность  $\Sigma$  должна быть настолько гладкой, чтобы в каждой ее точке можно было определить нормаль  $\vec{n}$ . В принципе, это условие можно ослабить. Достаточно потребовать, чтобы множество точек, где нормаль не определена, имело меру 0. Например, теорему Остроградского-Гаусса можно написать для куба, хотя нормаль на его ребрах не определена.

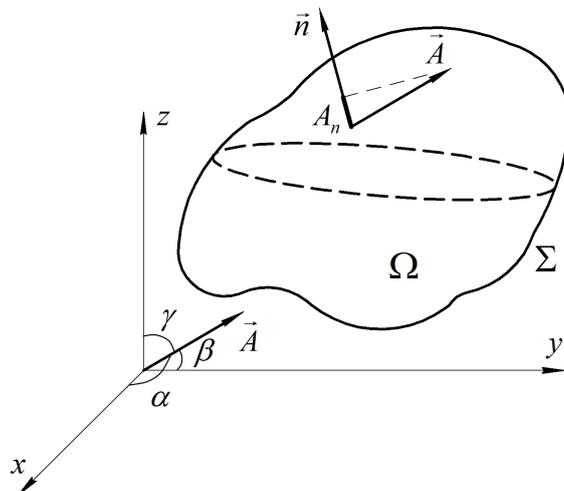


Рис. 37: Область  $\Omega$ , ограниченная гладкой поверхностью  $\Sigma$ .

Рассмотрим некоторые функции:  $u = u(x, y, z)$  и  $v = v(x, y, z)$  — функции, непрерывно дифференцируемые вплоть до второго порядка.

Тогда  $P$ ,  $Q$  и  $R$  можно выбрать следующим образом:

$$P = u \frac{\partial v}{\partial x}, \quad Q = u \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R = u \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Для данных  $P$ ,  $Q$  и  $R$  напишем формулу Остроградского-Гаусса:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + u \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \\ &= u \underbrace{\left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)}_{\Delta v} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned}$$

$$A_n = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma = u \underbrace{\left( \frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma \right)}_{\frac{\partial v}{\partial n}}.$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A} d\Omega = \oiint_{\Sigma} A_n d\Sigma \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \iiint_{\Omega} u \Delta v d\Omega = \oiint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\Sigma - \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (4.31)$$

— первая формула Грина.

Учитывая соотношение:

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = \nabla u \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z},$$

формулу Грина можно представить в виде:

$$\iiint_{\Omega} u \Delta v d\Omega = - \iiint_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega + \oiint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\Sigma. \quad (4.32)$$

Меняя местами функции  $u$  и  $v$ , получаем:

$$\iiint_{\Omega} v \Delta u d\Omega = - \iiint_{\Omega} \nabla v \nabla u d\Omega + \oiint_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\Sigma. \quad (4.33)$$

Вычтем из (4.32) равенство (4.33):

$$\iiint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) d\Omega = \oiint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma \quad (4.34)$$

— вторая формула Грина.

### **Замечание**

Для функций двух переменных имеют место аналогичные формулы Грина:

$$\iint_S u \Delta v dS = \int_C u \frac{\partial v}{\partial n} dC - \iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dS \quad (4.35)$$

— первая формула Грина.

$$\iint_S (u \Delta v - v \Delta u) dS = \int_C \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dC \quad (4.36)$$

— вторая формула Грина.

Здесь  $dS = dx dy$ ,  $dC$  — элемент дуги вдоль  $C$ .

**Пример**

Заметим, что функция  $v_0(M) = \frac{1}{R}$ ,

где  $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$  – расстояние между точками  $M(x, y, z)$  и  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta v = 0$  при  $M \neq M_0$ . Проверим это.

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

$$v_0 = \frac{1}{R} = ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial x} = -\frac{1}{2}((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2(x - x_0).$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = \frac{3}{2}((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2(x - x_0)^2 -$$

$$-((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{3(x - x_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Аналогичные формулы получаем для  $\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2}$ .

Очевидно, что  $\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} = 0$ . ■

Выведем третью формулу Грина. Пусть  $u$  – дважды непрерывно дифференцируемая функция в области  $\Omega$ . Функция  $v = \frac{1}{R}$  имеет разрыв в точке  $M_0$ , следовательно, непосредственно применить вторую формулу Грина в области  $\Omega$  к функциям  $u$  и  $v$  нельзя. Вырежем из области  $\Omega$  шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $M_0$  и поверхностью  $\Sigma_\varepsilon$ . Обозначим его за  $B_\varepsilon$ .

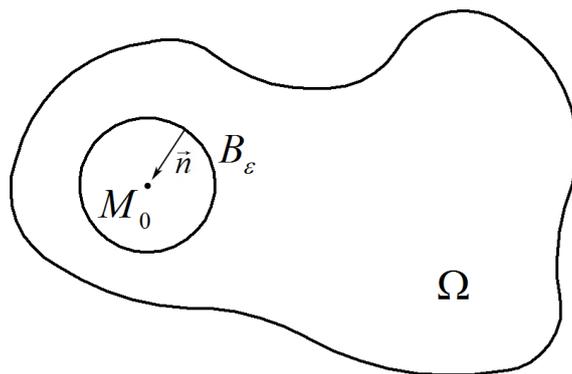


Рис. 38: Область  $\Omega$  с вырезанным из нее шаром  $B_\varepsilon$

В области  $\Omega \setminus B_\varepsilon$  вторую формулу Грина применить удастся:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \left( u \cdot \underbrace{\Delta \frac{1}{R}}_{=0 \text{ (см. Пример)}} - \frac{1}{R} \Delta u \right) d\Omega &= \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma + \\ &+ \iint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) d\Sigma - \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} d\Sigma. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Внешняя нормаль к области  $\Omega \setminus B_\varepsilon$  на поверхности шара  $B_\varepsilon$  будет направлена по радиусу внутрь шара, следовательно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) \Big|_{\Sigma_\varepsilon} &= - \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \right) \Big|_{R=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \iint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) d\Sigma &= \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Sigma_\varepsilon} u d\Sigma \stackrel{\text{Тем о среднем}}{=} \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot u(M_1) \cdot \underbrace{4\pi\varepsilon^2}_{\text{площадь сферы}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

где  $u(M_1)$  – значение функции  $u$  в некоторой точке  $M_1$  на поверхности  $\Sigma_\varepsilon$ .

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} d\Sigma = \frac{1}{\varepsilon} \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\Sigma \stackrel{\text{Тем о среднем}}{=} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial u}{\partial n}(M_2) \cdot 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}(M_2), \quad (4.39)$$

где  $M_2$  – некоторая точка на поверхности  $\Sigma_\varepsilon$ .

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем следующее:

$$1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(M_1) = u(M_0),$$

$$2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{4\pi\varepsilon}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}(M_2)}_{\text{ограничена}} = 0,$$

/  $\frac{\partial u}{\partial n}(M_2)$  – ограничена, так как  $u$  дважды непрерывно дифференцируема /

3) По определению несобственного интеграла:

$$\iint_{\Omega} \left( -\frac{1}{R} \Delta u \right) d\Omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \left( -\frac{1}{R} \Delta u \right) d\Omega.$$

В результате указанного предельного перехода мы приходим к основной формуле Грина:

$$\begin{aligned} - \iiint_{\Omega} \frac{1}{R} \Delta u \, d\Omega &= \oiint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma + 4\pi u(M_0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u(M_0) &= -\frac{1}{4\pi} \oiint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{1}{R} \Delta u \, d\Omega \quad (4.40) \end{aligned}$$

– третья формула Грина.

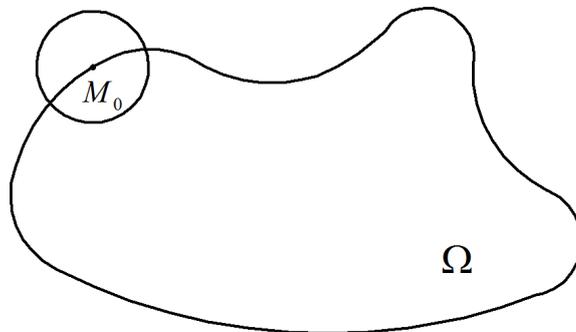


Рис. 39: Область  $\Omega$  с вырезанным из нее шаром  $B_\varepsilon$  (центр шара находится в граничной точке  $M_0$ )

Если точка  $M_0$  лежит на границе области  $\Omega$ , то в формуле (4.38) вместо площади сферы необходимо взять площадь полусферы.

Учитывая различные положения точки  $M_0$  относительно области  $\Omega$ , третью формулу Грина можно представить в следующем виде:

$$\delta \cdot u(M_0) = - \oiint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma - \iiint_{\Omega} \frac{1}{R} \Delta u \, d\Omega, \quad (4.41)$$

где  $\delta = \begin{cases} 4\pi, & \text{если точка } M_0 \text{ лежит внутри } \Omega, \\ 2\pi, & \text{если точка } M_0 \text{ лежит на границе } \Sigma, \\ 0, & \text{если точка } M_0 \text{ лежит вне } \Omega. \end{cases}$

Для гармонической функции ( $\Delta u = 0$ ) формула (4.40) принимает следующий вид:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) \right) d\Sigma, \quad (4.42)$$

где точка  $M_0$  лежит внутри  $\Omega$ .

#### 4.4 Третья формула Грина в двумерном случае

##### Пример

Проверим, что функция  $v_0(M) = \ln \frac{1}{R} = \ln R^{-1} = -\ln R$ , где  $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ , удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$  при  $M \neq M_0$ .

$$v_0 = -\ln R = -\frac{1}{2} \ln ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2),$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial x} = -\frac{1}{2} \cdot ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{-1} \cdot 2(x - x_0),$$

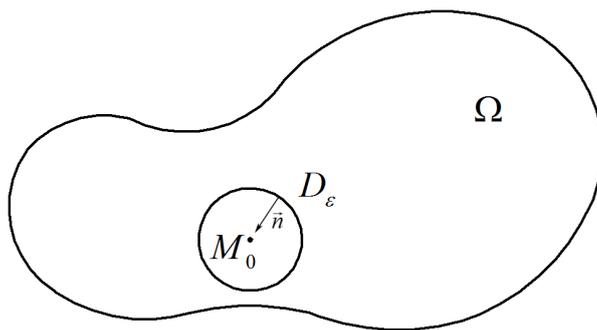
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} &= ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{-2} \cdot 2(x - x_0)^2 - ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{-1} = \\ &= \frac{2(x - x_0)^2 - ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^2}. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = 0$ . ■

##### Замечание

Проверьте, что функция  $v = \frac{1}{R}$  в двумерном случае не удовлетворяет уравнению Лапласа.

Выведем теперь третью формулу Грина в двумерном случае. Построения для функции  $v = \ln \frac{1}{R}$  проходят аналогично трехмерному случаю. Вырезаем из плоской области  $\Omega$  круг радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $M_0$  и границей  $\Sigma_\varepsilon$ . Обозначим его за  $D_\varepsilon$ .

Рис. 40: Область  $\Omega$  с вырезанным из нее кругом  $D_\varepsilon$ 

Применяем формулу Остроградского-Гаусса в области  $\Omega \setminus D_\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega \setminus D_\varepsilon} \left( u \cdot \underbrace{\Delta \ln \frac{1}{R}}_{=0 \text{ (см. Пример)}} - \ln \frac{1}{R} \Delta u \right) d\Omega = \\ & = \oint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{R} \right) - \ln \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma + \oint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{R} \right) d\Sigma - \oint_{\Sigma_\varepsilon} \ln \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} d\Sigma. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Внешняя нормаль к области  $\Omega \setminus D_\varepsilon$  на границе круга  $D_\varepsilon$  будет направлена по радиусу внутрь круга, следовательно:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{R} \right) \Big|_{\Sigma_\varepsilon} = - \frac{\partial}{\partial R} \left( \ln \frac{1}{R} \right) \Big|_{R=\varepsilon} = - \frac{\partial}{\partial R} \left( - \ln R \right) \Big|_{R=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \oint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{R} \right) d\Sigma = \frac{1}{\varepsilon} \oint_{\Sigma_\varepsilon} u d\Sigma \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Тем о среднем}}}{=} \frac{1}{\varepsilon} \cdot u(M_1) \cdot \underbrace{2\pi\varepsilon}_{\text{длина окружности}} \end{aligned} \quad (4.44)$$

где  $u(M_1)$  – значение функции  $u$  в некоторой точке  $M_1$  на границе  $\Sigma_\varepsilon$ .

$$\oint_{\Sigma_\varepsilon} \ln \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} d\Sigma = \ln \frac{1}{\varepsilon} \oint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\Sigma = \ln \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial u}{\partial n}(M_2) \cdot 2\pi\varepsilon, \quad (4.45)$$

где  $\frac{\partial u}{\partial n}(M_2)$  – значение производной  $\frac{\partial u}{\partial n}$  в некоторой точке  $M_2$  на границе  $\Sigma_\varepsilon$ .

Устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(M_1) = u(M_0),$$

2)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\ln \frac{1}{\varepsilon} \cdot 2\pi\varepsilon}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}(M_2)}_{\text{ограничена}} = 0$ , так как:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{1}{\varepsilon} \cdot 2\pi\varepsilon &= -2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \cdot \ln \varepsilon = -2\pi \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} \stackrel{\text{Правило Лопиталя}}{=} \\ &= -2\pi \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = 2\pi \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon = 0. \end{aligned}$$

3) По определению несобственного интеграла:

$$\iint_{\Omega} \left(-\ln \frac{1}{R} \Delta u\right) d\Omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \left(-\ln \frac{1}{R} \Delta u\right) d\Omega.$$

После предельного перехода мы приходим к основной формуле Грина:

$$\begin{aligned} - \iint_{\Omega} \ln \frac{1}{R} \Delta u \, d\Omega &= \oint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{R} \right) - \ln \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma + 2\pi u(M_0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u(M_0) &= -\frac{1}{2\pi} \oint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{R} \right) - \ln \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \ln \frac{1}{R} \Delta u \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.46)$$

– третья формула Грина для двумерного случая.

Учтем различные положения точки  $M_0$  относительно  $\Omega$ .

$$\delta \cdot u(M_0) = - \oint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{R} \right) - \ln \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma - \iint_{\Omega} \ln \frac{1}{R} \Delta u \, d\Omega, \quad (4.47)$$

где  $\delta = \begin{cases} 2\pi, & \text{если точка } M_0 \text{ лежит внутри } \Omega, \\ \pi, & \text{если точка } M_0 \text{ лежит на границе } \Sigma, \\ 0, & \text{если точка } M_0 \text{ лежит вне } \Omega. \end{cases}$

### Три следствия из формул Грина

1) Если функция  $u$  — гармоническая в некоторой области  $\Omega$ , ограниченной поверхностью  $\Sigma$ , то:

$$\oiint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0, \quad (4.48)$$

где  $S$  — любая замкнутая поверхность, целиком лежащая в области  $\Omega$ .

Доказательство:

Подставим во вторую формулу Грина (4.34) какую-нибудь гармоническую функцию  $u$  и функцию  $v \equiv 1$ :

$$\iiint_{\Omega} \left( u \underbrace{\Delta v}_{=0} - 1 \cdot \underbrace{\Delta u}_{=0} \right) d\Omega = \iint_{\Sigma} \left( u \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial n}}_{=0} - 1 \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma \Rightarrow \iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\Sigma = 0.$$

Мы получили результат для поверхности  $\Sigma$ , ограничивающей область  $\Omega$ . Если нам нужен результат для поверхности  $S$ , целиком лежащей в  $\Omega$ , то мы можем сузить область  $\Omega$  до размеров  $S$ . ■

### *Замечание*

Отсюда следует, что вторая краевая задача (задача Неймана):

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = f \end{cases}$$

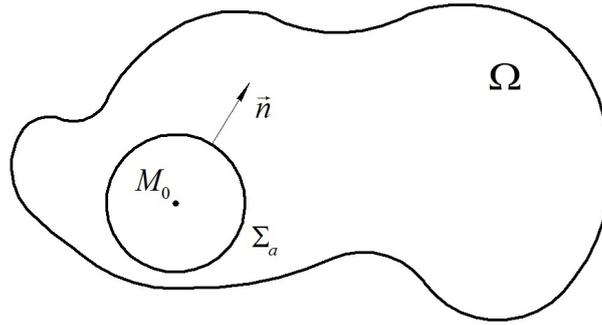
может иметь решение только при условии  $\iint_{\Sigma} f d\Sigma = 0$ , то есть граничное условие в задаче Неймана нельзя выбрать произвольным образом.

**2)** Пусть функция  $u$  гармонична в некоторой области  $\Omega$ ,  $M_0$  – произвольная точка, лежащая внутри области  $\Omega$ . Тогда имеет место следующая формула:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_a} f d\Sigma, \quad (4.49)$$

где  $\Sigma_a$  – сфера радиуса  $a$  с центром в точке  $M_0$ , целиком лежащая в области  $\Omega$ . Это утверждение можно интерпретировать следующим образом: значение гармонической функции  $u(M)$  в некоторой точке  $M_0$  равно среднему значению этой функции на любой сфере  $\Sigma_a$  с центром в точке  $M_0$ , если только эта сфера  $\Sigma_a$  не выходит из области гармоничности заданной функции  $u(M)$ .

Доказательство:

Рис. 41: Область  $\Omega$  с вырезанной из нее сферой  $\Sigma_a$ 

Напишем формулу Грина (4.42) для шара, ограниченного сферой  $\Sigma_a$ . Здесь внешняя нормаль к области будет внешней нормалью для шара.

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_a} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) \right) d\Sigma.$$

$$\iint_{\Sigma_a} \underbrace{\frac{1}{R}}_{=\frac{1}{a} \text{ на } \Sigma_a} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} d\Sigma = \frac{1}{a} \iint_{\Sigma_a} \frac{\partial u}{\partial n} d\Sigma = 0 \text{ согласно формуле (4.48).}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) \Big|_{\Sigma_a} = \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \right) \Big|_{R=a} = -\frac{1}{a^2}.$$

Итак,

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_a} f d\Sigma. \quad \blacksquare$$

### 3) Принцип максимума (минимума)

Пусть функция  $u$  – гармоническая в некоторой области  $\Omega$ . Тогда она достигнет своего наибольшего (наименьшего) значения на границе области.

Доказательство:

От противного. Пусть существует такая точка  $M_1$ , лежащая внутри области, в которой значение функции  $u$  больше, чем на границе области.

Тогда, построив шар радиуса  $\varepsilon$ , мы получим (формула (4.49)):

$$u(M_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \iint_{\Sigma_\varepsilon} f d\Sigma$$

– значение функции  $u$  в точке  $M_1$  равно усреднённому значению функции на сфере.

Но, согласно нашему предположению, значения функции  $u$  в точках сферы не могут превысить величину  $u(M_1)$ , следовательно, на всей сфере  $\Sigma_\varepsilon$  значения функции постоянны:

$$u|_{\Sigma_\varepsilon} = u(M_1).$$

Для сфер меньшего размера мы также можем получить, что значения функции  $u$  на сфере равны значению в центре, следовательно, функция будет равна  $u(M_1)$  для всех точек построенного шара.

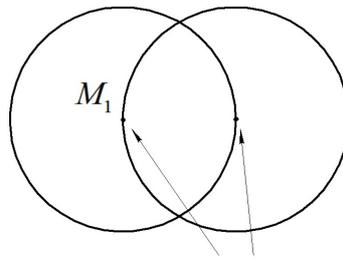


Рис. 42: Построение второго шара

Значения функции в точке  $M_1$  и на границе шара одинаковы и равны  $u(M_1)$ , следовательно, можно построить ещё один шар, для которого значения во всех точках также окажутся постоянными и равными  $u(M_1)$ . Построим третий шар, четвёртый и так далее.

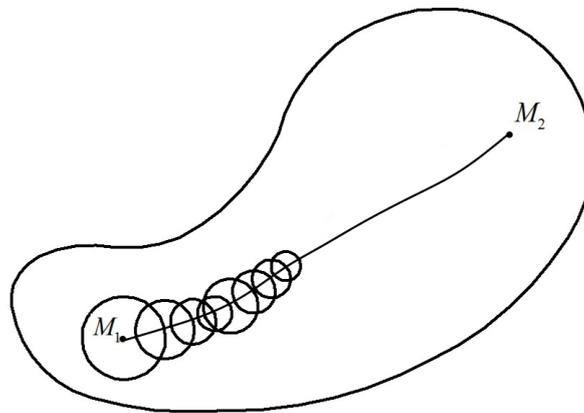


Рис. 43: Построение множества шаров

Поскольку область  $\Sigma$  – открытое связное множество, мы сможем добраться до произвольной точки  $M_2$  внутри  $\Sigma$ , покрывая путь шарами (возможно, разного размера).

### Замечание

Множество открытое, если все его точки – внутренние, то есть мы можем соединить любые две точки множества линией, целиком лежащей внутри этого множества.

Следовательно, значения функции  $u$  во всех точках внутри области  $\Sigma$  постоянны и равны  $u(M_1)$ . Функция  $u$  непрерывна, следовательно, её значение на границе также равно  $u(M_1)$ . Получили противоречие. ■

## 4.5 Теорема единственности для уравнения Лапласа

Задача Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma} = f, \end{cases} \quad (4.50)$$

имеет единственное решение.

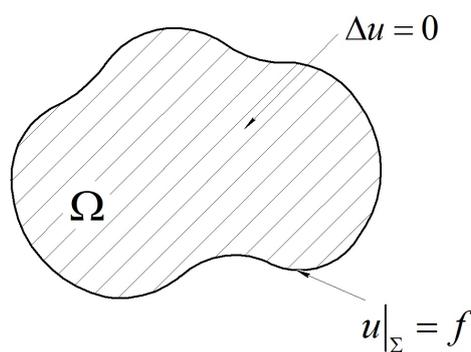


Рис. 44: Иллюстрация к задаче Дирихле для уравнения Лапласа

Здесь  $u$  – потенциал электростатического поля.

Доказательство:

От противного.

Пусть есть два решения  $u_1$  и  $u_2$ . Рассмотрим разность  $V = u_1 - u_2$ . Тогда

функция  $V$  будет удовлетворять следующей задаче:

$$\begin{cases} \Delta V = 0, \\ V|_{\Sigma} = 0, \end{cases} \quad (4.51)$$

На границе области  $V|_{\Sigma} \equiv 0$ , следовательно, по принципу максимума (минимума) во всей области  $V|_{\Omega} \equiv 0$ , значит,  $u_1 = u_2$ , то есть решения совпадают. ■

### Замечания

1) Единственность внешней задачи Дирихле требует дополнительного условия:  $u|_{\infty} \rightarrow 0$ .

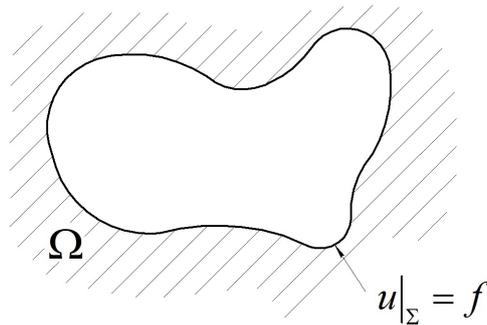


Рис. 45: Иллюстрация к внешней задаче Дирихле для уравнения Лапласа

2) Для задачи Неймана

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma} = f, \end{cases} \quad (4.52)$$

единственности решения нет. Ибо если  $u$  – решение, то  $u + const$  – тоже решение.

### Замечание

Для того, чтобы задача Неймана была разрешима, необходимо потребовать следующее:  $\iint_{\Sigma} f d\Sigma = 0$  (смотри замечание 1 к следствию из формул Грина).

#### 4.6 Вторая формула Грина в пространстве $\mathbb{R}^n$

Напишем вторую формулу Грина в пространстве  $\mathbb{R}^n$  для общего линейного дифференциального оператора второго порядка.

$$Lv = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + cv \quad (4.53)$$

– общий линейный оператор второго порядка.

Пусть  $v$  – дважды непрерывно дифференцируемая функция, следовательно:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Тогда коэффициенты  $a_{ij}$  и  $a_{ji}$  перед  $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$  и  $\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i}$  соответственно в выражении для  $Lv$  можно распределить произвольным образом.

Положим  $a_{ij} = a_{ji}$ . Скалярное произведение в пространстве  $L_2(\Omega)$ :

$$(Lv, u) = \int_{\Omega} Lv \cdot \bar{u} d\Omega \quad (4.54)$$

#### Замечание

$L_2(\Omega)$  – пространство функций, для которых существует интеграл  $\int_{\Omega} |v|^2 d\Omega$ . Здесь  $|v|$  – модуль комплексной функции  $v$ .

Написать вторую формулу Грина в  $\mathbb{R}^n$  – значит представить выражение (4.54) в виде:

$$(Lv, u) = \int_{\Omega} v \cdot \overline{Mu} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \dots = (v, Mu) + \int_{\partial\Omega} \dots, \quad (4.55)$$

где  $M$  – некоторый дифференциальный оператор второго порядка. Дифференциальный оператор  $M$  называется формально сопряжённым к оператору  $L$ . Нам понадобится формула интегрирования по частям в  $n$ -мерном случае:

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_k} d\Omega = \int_{\partial\Omega} vu \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_k}) dS - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Omega, \quad (4.56)$$

где  $\vec{n}$  – единичная внешняя нормаль,  $\vec{e}_k$  – орт оси  $x_k$ .

Докажем ее с помощью  $n$ -мерной формулы Остроградского-Гаусса:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS. \quad (4.57)$$

Выберем  $\vec{A}$  следующим образом:

$\vec{A} = uv \cdot \vec{e}_k$  – вектор направлен вдоль оси  $x_k$ . Тогда:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{\partial A_k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (uv) = \frac{\partial u}{\partial x_k} v + u \frac{\partial v}{\partial x_k}.$$

$$\vec{A} \cdot \vec{n} = uv \cdot (\vec{e}_k \cdot \vec{n}) = uv \cdot |\vec{n}| \cdot |\vec{e}_k| \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_k}) = uv \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_k}).$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A} \, d\Omega &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} v + u \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} uv \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_k}) \, dS \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_k} d\Omega = \int_{\partial\Omega} vu \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_k}) \, dS - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Omega. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Продолжим вывод второй формулы Грина в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

$$(Lv, u) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \bar{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \bar{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} cv \bar{u} \, d\Omega. \quad (4.58)$$

Второе слагаемое в формуле (4.58) интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n b_i \bar{u} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega &= \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n v \bar{u} b_i \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_i}) \, dS - \\ &- \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v \bar{u} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n b_i v \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} d\Omega. \quad (4.59) \end{aligned}$$

Для первого слагаемого в формуле (4.58) применяем формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \bar{u} \, d\Omega &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \bar{u} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) d\Omega = \\ &= \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_j} a_{ij} \bar{u} \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_i}) \, dS - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \bar{u}) \, d\Omega = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_j} a_{ij} \bar{u} \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_i}) dS - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_j} \bar{u} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_j} a_{ij} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} d\Omega = \\
&= \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_j} a_{ij} \bar{u} \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_i}) dS - \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^n v \cdot \bar{u} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_j}) dS + \\
&+ \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{u} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \right) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^n v \cdot a_{ij} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_j}) dS + \\
&+ \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \right) d\Omega.
\end{aligned}$$

Группируем слагаемые одного типа и приходим к формуле:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \bar{u} d\Omega &= \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_j} a_{ij} \bar{u} \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_i}) dS - \\
&- \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^n v \cdot \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_j}) \cdot \left( \bar{u} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} + a_{ij} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \right) dS + \\
&+ \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v \cdot \bar{u} \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} d\Omega + \\
&+ \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v \cdot a_{ij} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_i \partial x_j} d\Omega. \quad (4.60)
\end{aligned}$$

Учитывая формулы (4.59), (4.60), формулу (4.58) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
(Lv, u) &= \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_i \partial x_j} v + \underbrace{\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \left( 2 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right) - b_i \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} v}_{\text{Подробное объяснение приведено ниже в Замечании}} + \\
&+ \left( \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} + c \right) \bar{u} \right] v d\Omega + \\
&+ \int_{\partial\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_j} a_{ij} \bar{u} \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_i}) - v \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_j}) \left( \bar{u} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} + a_{ij} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^n v \bar{u} b_i \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_i}) dS. \quad (4.61)$$

### Замечание

Слагаемые с первой производной от  $\bar{u}$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \underbrace{\sum_{i,j=1}^n v \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}}_{\text{меняем индексы суммирования } i \leftrightarrow j} + \sum_{i,j=1}^n v \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n b_i v \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \right) d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^n v \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n v \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n b_i v \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \right) d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} v \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \left( 2 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right) - b_i \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} d\Omega. \end{aligned}$$

Это объясняет второе слагаемое в формуле (4.61).

Формально сопряжённое к  $L$  дифференциальное выражение:

$$\begin{aligned} Mu = \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \left( 2 \frac{\partial \bar{a}_{ij}}{\partial x_j} \right) - \bar{b}_i \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \\ + \left( \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \bar{a}_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{b}_i}{\partial x_i} + \bar{c} \right) u. \quad (4.62) \end{aligned}$$

С учётом (4.62), формулу (4.61) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} (Lv, u) - (v, Mu) = \int_{\partial\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_j} a_{ij} \bar{u} \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_i}) - \right. \\ \left. - v \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_j}) \left( \bar{u} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} + a_{ij} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n v \bar{u} b_i \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_i}) \right) dS \quad (4.63) \end{aligned}$$

– вторая формула Грина в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

### Частные случаи

1) Пусть

$$L = \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Тогда в формуле (4.53):

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad b_i = c = 0. \quad (4.64)$$

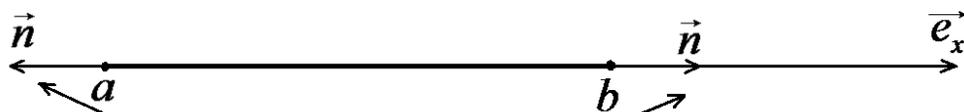
В этом случае формула (4.63) примет вид:

$$\begin{aligned} (Lv, u) - (v, Mu) &= \int_{\Omega} (\Delta v \bar{u} - v \Delta \bar{u}) d\Omega = \\ &= \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_i}) \bar{u} - v \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_i}) \right) dS = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial n} \bar{u} - v \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) dS. \end{aligned}$$

Если в формуле (4.64) вместо  $\bar{u}$  взять функцию  $u$ , мы в точности получим формулу (4.34) – вторую формулу Грина в пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

2) Пусть размерность пространства  $n = 1$ . Тогда формула интегрирования по частям в  $n$ -мерном случае (4.56) примет следующий вид:

$$\underbrace{\int_a^b u \frac{\partial v}{\partial x} dx}_{\text{1-мерный интеграл}} = \underbrace{uv \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_x}) \Big|_{x=b} + uv \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_x}) \Big|_{x=a}}_{\text{0-мерный интеграл}} - \int_a^b v \frac{\partial u}{\partial x} dx =$$



Внешняя нормаль в точках  $x=a$  и  $x=b$  соответственно

Рис. 46: Внешняя нормаль в точках  $x = a$  и  $x = b$

$$\begin{aligned} & \left/ \begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_x}) \Big|_{x=b} &= \cos 0 = 1, \\ \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_x}) \Big|_{x=a} &= \cos \pi = -1. \end{aligned} \right/ \\ &= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v \frac{\partial u}{\partial x} dx, \end{aligned}$$

что соответствует классической формуле интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

## Глава 5. Классификация линейных уравнений в частных производных 2-го порядка

### 5.1 Классификация линейных уравнений в частных производных 2-го порядка в пространстве $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с вещественными коэффициентами:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + f = 0, \tag{5.1}$$

где  $a_{ij} = a_{ji}$ , коэффициенты  $a, b, c, f$  являются функциями от координат точки пространства:  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Мы будем проводить классификацию уравнений только для непрерывных функций  $a_{ij}$ .

**Замечание**

Так как  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ , значит коэффициенты  $a_{ij}$  и  $a_{ji}$  перед  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$  соответственно в уравнении (5.1) можно распределить произвольным образом. Положим  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Мы хотим сделать замену переменных таким образом, чтобы коэффициенты перед смешанными производными  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, i \neq j$  были равны нулю. Введём новые переменные  $\xi_k$  следующим образом:

$$\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \dots, x_n), k = 1, 2, \dots, n. \tag{5.2}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \right) \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \right) \right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_s} \cdot \frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Подставим найденные производные в уравнение (5.1):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_s} \cdot \frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_{i=1}^n b_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + c \cdot u + f = 0 \Leftrightarrow \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \tilde{a}_{ks} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_s} + \sum_{k=1}^n \tilde{b}_k \frac{\partial u}{\partial \xi_k} + c \cdot u + f = 0. \quad (5.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ks} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}, \\ \tilde{b}_k &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы выбрать замену переменных правильным образом, решим задачу линейной алгебры о приведении квадратичной формы к сумме квадратов. Рассмотрим следующую квадратичную форму:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i y_j, \quad (5.5)$$

где  $y_i, y_j$  – координаты некоторого вектора в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

Перейдем к новому базису в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Координаты вектора преобразуются по следующему правилу:

$$y_i = \sum_{k=1}^n t_{ik} \cdot \eta_k, \quad (5.6)$$

где  $t_{ik}$  – некоторые коэффициенты, которые будут определены позднее.

В новых координатах квадратичная форма (5.5) примет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n t_{ik} \cdot \eta_k \sum_{s=1}^n t_{js} \cdot \eta_s = \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \hat{a}_{ks} \eta_k \eta_s. \quad (5.7)$$

Здесь

$$\widehat{a}_{ks} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} t_{ik} t_{js}.$$

Найдем  $t_{ik}$  такие, чтобы квадратичная форма содержала только квадраты. Для этого найдем собственные числа и собственные векторы матрицы  $\{a_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ . Собственные числа матрицы  $\{a_{i,j}\}$  – это корни характеристического уравнения:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Решаем уравнение и находим  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Полином } n\text{-ной степени имеет ровно } n \text{ корней} \\ \text{Матрица } \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^n \text{ симметрична, т.к. } a_{ij} = a_{ji} \\ \text{Коэффициенты } a_{ij} \text{ вещественны} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  получается ровно  $n$  вещественных корней  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  (с учётом кратности).

$$\text{Собственный вектор } z_p = \begin{pmatrix} z_{1p} \\ z_{2p} \\ \vdots \\ z_{np} \end{pmatrix}, \text{ отвечающий собственному значению}$$

$\lambda = \lambda_p$ , находится как решение матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_p & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_p & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1p} \\ z_{2p} \\ \vdots \\ z_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Матрица  $\{a_{i,j}\}_{i,j=1}^n$  симметрична, следовательно, из собственных векторов  $z_p$  можно составить ортогональный базис в  $\mathbb{R}^n$ . Нормируем собствен-

ные векторы:

$$T_p = \frac{1}{\sqrt{\sum_{q=1}^n Z_{qp}^2}} z_p. \quad (5.9)$$

Составляем из собственных векторов  $T_p$  матрицу  $T$  – матрицу перехода к новому базису:

$$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix} = \{t_{qp}\}_{q,p=1}^n, \quad (5.10)$$

$$\text{где } t_{qp} = \frac{z_{qp}}{\sqrt{\sum_{q=1}^n z_{qp}^2}}. \quad (5.11)$$

В базисе из собственных векторов матрицы  $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  квадратичная форма приобретает вид суммы квадратов, а ее матрица – диагональна:

$$\hat{a}_{ks} = \begin{cases} \lambda_s, k = s, \\ 0, k \neq s, \end{cases}, \text{ где } \lambda_s \text{ – собственные числа матрицы } \{a_{ij}\},$$

то есть квадратичная форма (5.7) примет вид:

$$\sum_{s=1}^n \lambda_s \eta_s^2. \quad (5.12)$$

Докажем это.

$$\hat{a}_{ks} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} t_{ik} t_{js} = \sum_{i=1}^n t_{ik} \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot t_{js}}_{=\lambda_s \cdot t_{is}}.$$

### Замечание

$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot t_{js} = \lambda_s \cdot t_{is}$ , так как:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_s & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1s} \\ \vdots \\ t_{ns} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}t_{1s} + a_{12}t_{2s} + \dots + a_{1n}t_{ns} = \lambda_s t_{1s}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}t_{1s} + a_{n2}t_{2s} + \dots + a_{nn}t_{ns} = \lambda_s t_{ns}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\hat{a}_{ks} = \sum_{j=1}^n t_{jk} \lambda_s t_{js} = \begin{cases} \lambda_s, & k = s, \\ 0, & k \neq s. \end{cases} \quad \blacksquare$$

**Замечание**

Ортонормированность собственных векторов  $T_k, T_s$  означает, что их скалярное произведение равно 0 :

$$\sum_{j=1}^n t_{jk} t_{js} = \begin{cases} 1, & k = s, \\ 0, & k \neq s. \end{cases}$$

Для того, чтобы уравнение (5.4) не содержало смешанных производных  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_s}$ ,  $k \neq s$ , нам нужно, чтобы было выполнено:  $\tilde{a}_{ks} = \hat{a}_{ks}$  (ибо в этом случае квадратичная форма (5.7) приобретет вид суммы квадратов (5.12)). Следовательно, замену переменных (5.2) нужно делать так, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = t_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n. \tag{5.13}$$

Решение системы (5.13) дает нам функции  $\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , определяющие замену переменных. После замены переменных уравнение (5.3) сведется к следующему виду:

$$\sum_{s=1}^n \lambda_s \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_s^2} + \Phi = 0, \tag{5.14}$$

где  $\Phi$  содержит все оставшиеся члены уравнения – функцию  $u$  и производные  $\frac{\partial u}{\partial \xi_k}$ .

**Классификация уравнений:**

1. Эллиптические уравнения: все  $\lambda_s$  одного знака.

2. Гиперболические уравнения:  $n - 1$  коэффициент  $\lambda_s$  имеют одинаковые знаки, а один коэффициент противоположен им по знаку.
3. Ультрагиперболические уравнения:  $m$  коэффициентов одного знака и  $n - m$  противоположного знака ( $n - m > 1$ ).
4. Параболическое уравнение: хотя бы один из коэффициентов  $\lambda_s$  равен нулю, но при этом соответствующий коэффициент при первой производной  $\frac{\partial u}{\partial \xi_s}$  отличен от нуля.

### *Замечание*

Так как коэффициенты  $a_{ij}$  – функции от координат  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то тип уравнения может зависеть от точки пространства, в которой мы находимся (из-за того, что могут поменяться собственные значения  $\lambda_s$ ).

## 5.2 Классификация линейных уравнений в частных производных 2-го порядка в пространстве $\mathbb{R}^2$

Общий вид линейного дифференциального уравнения в частных производных 2-го порядка в пространстве  $\mathbb{R}^2$ :

$$F(x, y, u, u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy}) = 0. \quad (5.15)$$

Квазилинейное уравнение – его частный случай:

$$a_{11}u''_{xx} + 2a_{12}u''_{xy} + a_{22}u''_{yy} + F(x, y, u, u'_x, u'_y) = 0, \quad (5.16)$$

где коэффициенты  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  являются функциями от координат  $x, y$ . Мы будем проводить классификацию уравнений только для непрерывных функций  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$ . Сделаем замену переменных в уравнении (5.16) следующим образом:

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y). \end{cases} \quad (5.17)$$

Функции  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  будут определены позднее из условия равенства нулевых коэффициентов при  $u''_{\xi\xi}, u''_{\eta\eta}$ .

Заменяем производные в уравнении (5.16):

$$\begin{aligned}
u'_x &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = u'_\xi \cdot \xi'_x + u'_\eta \cdot \eta'_x, \\
u'_y &= u'_\xi \cdot \xi'_y + u'_\eta \cdot \eta'_y, \\
u''_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \\
&= u''_{\xi\xi} \cdot (\xi'_x)^2 + 2u''_{\xi\eta} \cdot \xi'_x \cdot \eta'_x + u''_{\eta\eta} \cdot (\eta'_x)^2 + u'_\xi \cdot \xi''_{xx} + u'_\eta \cdot \eta''_{xx}, \\
u''_{yy} &= u''_{\xi\xi} \cdot (\xi'_y)^2 + 2u''_{\xi\eta} \cdot \xi'_y \cdot \eta'_y + u''_{\eta\eta} \cdot (\eta'_y)^2 + u'_\xi \cdot \xi''_{yy} + u'_\eta \cdot \eta''_{yy}, \\
u''_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow u''_{xy} &= u''_{\xi\xi} \cdot \xi'_x \cdot \xi'_y + u''_{\xi\eta} \cdot \xi'_y \cdot \eta'_x + u'_\xi \cdot \xi''_{xy} + u''_{\eta\eta} \cdot \eta'_x \cdot \eta'_y + u''_{\xi\eta} \cdot \eta'_y \cdot \xi'_x + u'_\eta \cdot \eta''_{xy}.
\end{aligned}$$

Подставляя производные в уравнение (5.16), получим:

$$\tilde{a}_{11} \cdot u'_{\xi\xi} + 2\tilde{a}_{12} \cdot u'_{\xi\eta} + \tilde{a}_{22} \cdot u'_{\eta\eta} + \tilde{F} = 0, \quad (5.18)$$

где:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{11} &= a_{11} \cdot (\xi'_x)^2 + 2a_{12} \xi'_x \xi'_y + a_{22} \cdot (\xi'_y)^2, \\
\tilde{a}_{12} &= a_{11} \cdot \xi'_x \cdot \eta'_x + a_{12} (\xi'_x \cdot \eta'_y + \xi'_y \cdot \eta'_x) + a_{22} \xi'_y \cdot \eta'_y, \\
\tilde{a}_{22} &= a_{11} \cdot (\eta'_x)^2 + 2a_{12} \eta'_x \eta'_y + a_{22} \cdot (\eta'_y)^2, \\
\tilde{F} &= \tilde{F}(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta).
\end{aligned}$$

В замене (5.17) выберем  $\varphi(x, y)$  так, чтобы было выполнено:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{11} = 0 &\Leftrightarrow a_{11} \cdot (\xi'_x)^2 + 2a_{12} \cdot \xi'_x \cdot \xi'_y + a_{22} \cdot (\xi'_y)^2 = 0 \Big| \cdot \frac{1}{(\xi'_y)^2} \\
&\Leftrightarrow a_{11} \left( \frac{\xi'_x}{\xi'_y} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\xi'_x}{\xi'_y} + a_{22} = 0.
\end{aligned} \quad (5.19)$$

Рассмотрим уравнение:

$$\xi(x, y) = C, \quad (5.20)$$

которое неявно задает функцию  $y = y(x)$ .

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\xi'_x}{\xi'_y}. \quad (5.21)$$

Подставим полученное выражение для  $\frac{\xi'_x}{\xi'_y}$  в уравнение (5.19).

$$a_{11} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = 0. \quad (5.22)$$

Итак, если функция  $\xi(x, y)$  является решением уравнения (5.19), то функция  $y = y(x)$ , задаваемая равенством (5.20), будет являться решением уравнения (5.22). И наоборот.

### Определение

Первый интеграл обыкновенного дифференциального уравнения – это функция двух переменных, которая на решениях этого уравнения обращается в константу.

В нашем случае функция  $\xi(x, y)$  из (5.20) будет являться первым интегралом для уравнения (5.22). Первый интеграл будет неявно задавать решение уравнения (5.22). Решения уравнения (5.22) называются характеристиками уравнения (5.18).

Характеристики задают новую удобную систему координат, в которых исходное уравнение приобретает канонический вид. В нашем случае характеристиками являются функции  $\xi(x, y)$  и  $\eta(x, y)$ , которые будут решениями уравнений:

$$a_{11} \left( \frac{\xi'_x}{\xi'_y} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\xi'_x}{\xi'_y} + a_{22} = 0, \quad (5.19)$$

$$a_{11} \left( \frac{\eta'_x}{\eta'_y} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\eta'_x}{\eta'_y} + a_{22} = 0. \quad (5.23)$$

Решения этих уравнений дадут нам искомые функции  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$ .

После замены переменных уравнение (5.18) примет вид:

$$2\tilde{a}_{12} \cdot u''_{\xi\eta} + \tilde{F} = 0. \quad (5.24)$$

Однако такую замену переменных удастся сделать не всегда, а только в случае, когда уравнения (5.19), (5.23) имеют два независимых решения. Как мы уже выяснили, для того, чтобы решить уравнение (5.19) (или

эквивалентное ему (5.23)), достаточно решить уравнение (5.22):

$$a_{11} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[ \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \right. \tag{5.25}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \right. \tag{5.26}$$

В зависимости от знака дискриминанта ( $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ ) мы можем получить либо два независимых вещественных решения ( $\Delta > 0$ ), либо одно решение ( $\Delta = 0$ ), либо два независимых комплексных решения ( $\Delta < 0$ ). Это определяет тип уравнения.

**Определение**

Характеристической квадратичной формой уравнения (5.16) называется выражение:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2. \tag{5.27}$$

Выражение

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}. \tag{5.28}$$

называется дискриминантом квадратичной формы (5.27).

**Классификация уравнений**

1. Эллиптическое уравнение:  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ .
2. Гиперболическое уравнение:  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ .
3. Параболическое уравнение:  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ .

**Замечание 1**

Так как коэффициенты  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  – функции от координат  $x, y$ , то дискриминант  $\Delta$  также есть функция от  $x, y$ . Следовательно, уравнение может иметь разный тип в разных областях пространства  $\mathbb{R}^2$ .

**Замечание 2**

Тип уравнения не изменяется при невырожденной замене переменных:

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y). \end{cases} \quad (5.29)$$

Мы классифицируем уравнения по соотношениям между коэффициентами  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  в исходном уравнении. После замены переменных соотношение между коэффициентами  $\widetilde{a}_{11}, \widetilde{a}_{12}, \widetilde{a}_{22}$  изменится. При этом это не повлияет на смену знака выражения  $\widetilde{a}_{12}^2 - \widetilde{a}_{11}\widetilde{a}_{22} < 0$ , в чем можно убедиться простой подстановкой:

$$\widetilde{a}_{12}^2 - \widetilde{a}_{11}\widetilde{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) \cdot J^2, \quad (5.30)$$

где:

$$J = \xi'_x \cdot \eta'_y - \eta'_x \cdot \xi'_y. \quad (5.31)$$

Отсюда следует инвариантность типа уравнения при условии, что Якобиан замены переменных  $J$  отличен от нуля.  $J \neq 0$  при условии независимости переменных  $\xi$  и  $\eta$ .

### ***Определение***

Каноническим видом уравнения

1) гиперболического типа называется вид:

$$\begin{aligned} u''_{\xi\xi} - u''_{\eta\eta} + \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u &= G(\xi, \eta), \quad \text{либо} \\ u''_{\xi\eta} + \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u &= G(\xi, \eta); \end{aligned}$$

2) эллиптического типа называется вид:

$$u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} + \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u = G(\xi, \eta);$$

3) параболического типа называется вид:

$$u''_{\eta\eta} + \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u = G(\xi, \eta).$$

**Алгоритм приведения уравнения к каноническому виду**

1) Найти  $\Delta$  и определить тип уравнения.

2) Найти первые интегралы характеристических уравнений:

$$\text{В случае, когда } a_{11} \neq 0 : \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}};$$

$$\text{В случае, когда } a_{22} \neq 0 : \quad \frac{dx}{dy} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{22}};$$

3) Первые интегралы имеют вид:

$$\text{В случае гиперболического типа: } \varphi(x, y) = C, \quad \psi(x, y) = C;$$

$$\text{В случае эллиптического типа: } \alpha(x, y) \pm i\beta(x, y) = C;$$

$$\text{В случае параболического типа: } \delta(x, y) = C.$$

4) Сделать замену переменных:

$$\text{В случае гиперболического типа: } \begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y). \end{cases}$$

$$\text{В случае эллиптического типа: } \begin{cases} \xi = \alpha(x, y), \\ \eta = \beta(x, y). \end{cases}$$

$$\text{В случае параболического типа: } \begin{cases} \xi = \delta(x, y), \\ \eta = \varepsilon(x, y), \end{cases}$$

где  $\varepsilon(x, y)$  – любая функция из  $C^1$  такая, что:  $J = \begin{vmatrix} \delta'_x & \delta'_y \\ \varepsilon'_x & \varepsilon'_y \end{vmatrix} \neq 0$ .

После замены уравнение примет канонический вид.

Мы будем рассматривать, в основном, линейные уравнения:

$$a_{11}u''_{xx} + 2a_{12}u''_{xy} + a_{22}u''_{yy} + b_1u'_x + b_2u'_y + cu = F(x, y), \quad (5.32)$$

где коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c$  являются функциями от координат  $x$ ,  $y$ .

**Пример 1**

Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду.

$$x^4u''_{xx} - y^4u''_{yy} = 0 \quad \text{в пространстве } \mathbb{R}^2.$$

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^4y^4 > 0 \quad \text{при } x \neq 0, y \neq 0.$$

Следовательно, уравнение гиперболическое всюду, кроме осей координат, и параболическое на осях координат. По формуле (5.22):

$$x^4 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - y^4 = 0 \Leftrightarrow x^4 (dy)^2 = y^4 (dx)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 dy = \pm y^2 dx \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = \pm \frac{dx}{x^2} \Big| \text{интегрируем}$$

$$-\frac{1}{y} = \mp \frac{1}{x} + C \Leftrightarrow \frac{1}{y} \mp \frac{1}{x} = -C \text{ что соответствует формуле (5.20).}$$

Проведем замену переменных:

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \\ \eta = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\xi - \eta}, \\ y = \frac{2}{\xi + \eta}. \end{cases}$$

$$u'_x = u'_\xi \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) + u'_\eta \cdot \frac{1}{x^2},$$

$$u'_y = u'_\xi \cdot \left( -\frac{1}{y^2} \right) + u'_\eta \cdot \left( -\frac{1}{y^2} \right),$$

$$\begin{aligned} u''_{xx} &= u''_{\xi\xi} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) \left( -\frac{1}{x^2} \right) + u'_\xi \cdot \frac{2}{x^3} + u''_{\xi\eta} \left( -\frac{1}{x^2} \right) \cdot \frac{1}{x^2} + \\ &+ u''_{\eta\xi} \left( -\frac{1}{x^2} \right) \cdot \frac{1}{x^2} + u''_{\eta\eta} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} - u'_\eta \cdot \frac{2}{x^3} = \\ &= u''_{\xi\xi} \cdot \frac{1}{x^4} + u'_\xi \cdot \frac{2}{x^3} - u''_{\xi\eta} \cdot \frac{1}{x^4} - u''_{\eta\xi} \cdot \frac{1}{x^4} + u''_{\eta\eta} \cdot \frac{1}{x^4} - u'_\eta \cdot \frac{2}{x^3}, \\ u''_{yy} &= u''_{\xi\xi} \cdot \frac{1}{y^4} + u''_{\xi\eta} \cdot \frac{1}{y^4} + u''_{\eta\xi} \cdot \frac{1}{y^4} + u''_{\eta\eta} \cdot \frac{1}{y^4} + u'_\xi \cdot \frac{2}{y^3} + u'_\eta \cdot \frac{2}{y^3}. \end{aligned}$$

Подставляем  $u''_{xx}$ ,  $u''_{yy}$  в исходное уравнение:

$$2xu'_\xi - u''_{\xi\eta} - u''_{\eta\xi} - 2xu'_\eta - u''_{\xi\eta} - u''_{\xi\eta} - 2yu'_\xi - 2yu'_\eta = 0.$$

Сделаем подстановку:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\xi - \eta}, \\ y = \frac{2}{\xi + \eta}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -4u''_{\xi\eta} + \frac{4}{\xi - \eta} u'_\xi - \frac{4}{\xi - \eta} u'_\eta - \frac{4}{\xi + \eta} u'_\xi - \frac{4}{\xi + \eta} u'_\eta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4u''_{\xi\eta} + \frac{8\eta}{\xi^2 - \eta^2} u'_\xi - \frac{8\xi}{\xi^2 - \eta^2} u'_\eta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u''_{\xi\eta} - \frac{2\eta}{\xi^2 - \eta^2} u'_\xi + \frac{2\xi}{\xi^2 - \eta^2} u'_\eta = 0.$$

**Ответ:**

$$\begin{cases} u''_{\xi\eta} - \frac{2\eta}{\xi^2 - \eta^2} u'_\xi + \frac{2\xi}{\xi^2 - \eta^2} u'_\eta = 0 & \text{при } x \neq 0, y \neq 0, \text{ гиперболический тип;} \\ x^4 u''_{xx} = 0 & \text{при } y = 0, \text{ параболический тип;} \\ y^4 u''_{yy} = 0 & \text{при } x = 0, \text{ параболический тип.} \end{cases}$$

При этом

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}, \eta = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, y \neq 0; \\ \xi = x, \eta = y & \text{при } y = 0. \\ \xi = x, \eta = y & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

### Пример 2

Привести уравнение к каноническому виду в каждой из областей, где его тип сохраняется; назвать тип уравнения.

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0.$$

1) Найдем дискриминант  $\Delta$ . В нашем случае  $a_{11} = y, a_{12} = 0, a_{22} = 1$ , следовательно:

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y.$$

Поэтому

- а) в полуплоскости  $y < 0$  дискриминант  $\Delta > 0 \Rightarrow$  гиперболический тип;
  - б) в полуплоскости  $y > 0$  дискриминант  $\Delta < 0 \Rightarrow$  эллиптический тип;
  - в) на прямой  $y = 0$  дискриминант  $\Delta = 0 \Rightarrow$  параболический тип;
- 2) Составим характеристические уравнения. Так как  $a_{22} = 1 \neq 0$ , характеристические уравнения имеют вид:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a_{11} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{22}}, \quad \text{то есть} \quad \frac{dx}{dy} = \pm \sqrt{-y}.$$

Получили 2 уравнения с разделяющимися переменными. Решаем их:

а) в полуплоскости  $y < 0$  :

$$dx = \pm \sqrt{-y} dy \Rightarrow x + C = \mp \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}.$$

Следовательно, первые интегралы имеют вид:

$$\varphi(x, y) = x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = C, \quad \psi(x, y) = x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = C.$$

б) в полуплоскости  $y > 0$  :

$$dx = \pm i\sqrt{y} dy \Rightarrow x + C = \pm i\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}.$$

Следовательно, первые интегралы имеют вид:

$$\alpha(x, y) \pm i\beta(x, y) = C, \quad \text{где } \alpha(x, y) = x, \quad \beta(x, y) = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}.$$

в) на прямой  $y = 0$  :

$$dx = 0 \cdot dy \Rightarrow x = C.$$

Следовательно, первый интеграл (единственный линейно независимый) имеет вид:

$$\delta(x, y) = x.$$

3) Сделаем замену переменных.

а) в полуплоскости  $y < 0$  :

$$\begin{cases} \xi = x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}; \\ \eta = x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

$$u'_x = u'_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + u'_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = u'_\xi + u'_\eta, \quad u'_y = (-u'_\xi + u'_\eta)\sqrt{-y},$$

$$u''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (u'_\xi + u'_\eta) = u''_{\xi\xi} \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{=1} + u''_{\xi\eta} \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{=1} + u''_{\eta\xi} \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{=1} + u''_{\eta\eta} \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{=1} = u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}$$

$$\begin{aligned} u''_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( (-u'_\xi + u'_\eta)\sqrt{-y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (-u'_\xi + u'_\eta) \cdot \sqrt{-y} + (-u'_\xi + u'_\eta) \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{-y}) = \\ &= -y(u''_{\xi\xi} - 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}) - \frac{1}{2\sqrt{-y}}(-u'_\xi + u'_\eta). \end{aligned}$$

Подставим найденные производные в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} yu''_{xx} + u''_{yy} &= y(u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}) - y(u''_{\xi\xi} - 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}) - \frac{1}{2\sqrt{-y}}(-u'_\xi + u'_\eta) = \\ &= y\left(4u''_{\xi\eta} - \frac{1}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}(-u'_\xi + u'_\eta)\right) = 0. \end{aligned}$$

Из замены переменных выразим  $2(-y)^{\frac{3}{2}}$ :

$$\frac{4}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = \xi - \eta \Rightarrow 2(-y)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}(\xi - \eta).$$

Для приведения к каноническому виду разделим наше уравнение на  $4y$  и подставим в него  $2(-y)^{\frac{3}{2}}$ :

$$u''_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}(-u'_\xi + u'_\eta) = 0.$$

**б)** в полуплоскости  $y > 0$ :

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

$$u'_x = u'_\xi, u'_y = u'_\eta\sqrt{y}, \quad u''_{xx} = u''_{\xi\xi}, \quad u''_{yy} = u''_{\eta\eta}y + \frac{1}{2\sqrt{y}}u'_\eta.$$

Подставим найденные производные в исходное уравнение:

$$yu''_{xx} + u''_{yy} = y(u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta}) + \frac{1}{2\sqrt{y}}u'_\eta = y\left(u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} + \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}u'_\eta\right) = 0.$$

Из замены переменных выражаем  $2y^{\frac{3}{2}} = 3\eta$  и подставляем в уравнение:

$$y\left(u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}u'_\eta\right) = 0.$$

Разделим уравнение на  $y$  и получим его канонический вид:

$$u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}u'_\eta = 0.$$

в) на прямой  $y = 0$  :

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = y. \end{cases}$$

Вторая координата  $\eta(x, y)$  может быть выбрана произвольным образом с единственным условием:  $\eta$  и  $\xi$  должны быть линейно независимыми.

$$u'_x = u'_\xi, \quad u'_y = u'_\eta, \quad u''_{xx} = u''_{\xi\xi}, \quad u''_{yy} = u''_{\eta\eta}.$$

Подставим найденные производные в исходное уравнение при  $y = 0$ :

$$u''_{yy} = u''_{\eta\eta} = 0.$$

**Ответ:**

$$\begin{cases} u''_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi-\eta)}(-u'_\xi + u'_\eta) = 0 & \text{в области } y < 0, \quad \text{гиперболический тип;} \\ u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}u'_\eta = 0 & \text{в области } y > 0, \quad \text{эллиптический тип;} \\ u''_{yy} = 0 & \text{в области } y = 0, \quad \text{параболический тип.} \end{cases}$$

При этом

$$\begin{cases} \xi = x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}, & \eta = x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} & \text{в области } y < 0; \\ \xi = x, & \eta = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} & \text{в области } y > 0; \\ \xi = x, & \eta = y & \text{в области } y = 0. \end{cases}$$

## Глава 6. Функция Грина обыкновенного дифференциального оператора

### 6.1 Определение и процедура построения функции Грина

Обыкновенный дифференциальный оператор – это оператор вида:

$$L(y) = p_0(x) \cdot y^{(n)} + p_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_n(x), \quad (6.1)$$

где  $p_0(x)$  не обращается в нуль ни в одной точке.

Здесь  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$  – непрерывные функции на отрезке  $[a, b]$ .

Однородные краевые условия в общем виде имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_j(y) = & \alpha_{j0} \cdot y(a) + \alpha_{j1} \cdot y'(a) + \dots + \alpha_{j,n-1} \cdot y^{(n-1)}(a) + \\ & + \beta_{j0} \cdot y(b) + \beta_{j1} \cdot y'(b) + \dots + \beta_{j,n-1} \cdot y^{(n-1)}(b) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (6.2)$$

#### Определение

Функцией Грина называют функцию двух переменных  $G(x, \xi)$ , которая удовлетворяет следующим условиям:

1. Имеет на промежутке  $[a, b]$  непрерывные производные до  $(n - 2)$  порядка включительно. На промежутках  $[a, \xi)$  и  $(\xi, b]$  имеет непрерывные производные вплоть до  $n$ -го порядка.

2. Скачок  $(n - 1)$ -ой производной у функции  $G(x, \xi)$  при  $x = \xi$ :

$$\left. \frac{\partial^{(n-1)}G}{\partial x^{(n-1)}}(x, \xi) \right|_{x=\xi+0} - \left. \frac{\partial^{(n-1)}G}{\partial x^{(n-1)}}(x, \xi) \right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)}. \quad (6.3)$$

3. На промежутках  $[a, \xi)$  и  $(\xi, b]$  выполняются условия:

$$\begin{cases} LG(x, \xi) = 0 \\ u_j(G) = 0 \end{cases}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.4)$$

#### Теорема 1

Если однородное уравнение  $Ly = 0$  с однородными краевыми условиями  $u_j(y) = 0$  имеет только тривиальное решение  $y \equiv 0$ , то функция Грина





Учитывая, что  $b_i = a_i + c_i$ , получаем:

$$\begin{aligned}
& \alpha_{j_0} \left( a_1 y_1(a) + \dots + a_n y_n(a) \right) + \dots + \alpha_{j_{n-1}} \left( a_1 y_1^{(n-1)}(a) + \dots + a_n y_n^{(n-1)}(a) \right) + \\
& + \beta_{j_0} \left( a_1 y_1(b) + \dots + a_n y_n(b) \right) + \dots + \beta_{j_{n-1}} \left( a_1 y_1^{(n-1)}(b) + \dots + a_n y_n^{(n-1)}(b) \right) + \\
& + \beta_{j_0} \left( c_1 y_1(b) + \dots + c_n y_n(b) \right) + \dots + \beta_{j_{n-1}} \left( c_1 y_1^{(n-1)}(b) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(b) \right) = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{jk} \sum_{i=0}^n a_i y_i^{(k)}(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{jk} \sum_{i=0}^n a_i y_i^{(k)}(b) = - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{jk} \sum_{i=0}^n c_i y_i^{(k)}(b).
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Решив систему уравнений (6.11), найдем коэффициенты  $a_i$ . Неоднородная система (6.11) имеет единственное решение, если ее определитель отличен от 0 (согласно формулам Крамера).

Итак, для того чтобы доказать, что коэффициенты  $a_i$  определяются единственным образом, нам достаточно показать, что определитель системы (6.11) не равен 0.

Докажем от противного: пусть определитель равен 0. Напомним читателю формулировку **альтернативы Фредгольма**: либо однородная система уравнений имеет нетривиальное решение ( $\Leftrightarrow$  определитель системы равен нулю), либо соответствующая неоднородная система разрешима единственным образом при любой правой части ( $\Leftrightarrow$  определитель системы не равен нулю).

Мы предположили, что определитель равен нулю, следовательно, соответствующая системе (6.11) однородная система имеет нетривиальное решение:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{jk} \underbrace{\sum_{i=0}^n a_i y_i^{(k)}(a)}_{=y^{(k)}(a)} + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{jk} \underbrace{\sum_{i=0}^n a_i y_i^{(k)}(b)}_{=y^{(k)}(b)} = 0, \tag{6.12}$$

где

$$y(x) = \sum_{i=1}^n a_i y_i(x). \tag{6.13}$$

Но (6.12) представляет из себя краевые условия для функции (6.13). Таким образом, функция (6.13) будет являться нетривиальным решением

$$\text{однородной задачи } \begin{cases} Ly = 0, \\ u_j(y) = 0. \end{cases}$$

Однако по условиям теоремы данная задача имеет только тривиальное решение. Следовательно, коэффициенты  $a_i$  находятся единственным образом, следовательно, функция Грина  $G(x, \xi)$  также строится единственным образом. Существование функции Грина мы доказали автоматически, построив её в процессе доказательства. ■

### Теорема 2

Если однородная задача  $\begin{cases} Ly = 0 \\ u_j(y) = 0 \end{cases}$  имеет только тривиальное решение  $y \equiv 0$ , то решение задачи  $\begin{cases} Ly = f \\ u_j(y) = 0 \end{cases}$ , где  $f$  – непрерывная функция на  $[a, b]$ , даётся формулой:

$$y(x) = \int_b^a G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \tag{6.14}$$

где  $G(x, \xi)$  – функция Грина оператора  $L$ .

Доказательство:

$G(x, \xi)$  удовлетворяет краевому условию  $u_j(y) = 0 \Rightarrow y(x)$  ему также удовлетворяет. Проверим, что функция  $y(x)$  удовлетворяет уравнению  $Ly = f$ . Нам понадобится формула дифференцирования интеграла по параметру.

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} F(x, \xi) d\xi = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial F}{\partial x}(x, \xi) d\xi + F(x, b(x)) \cdot b'(x) - F(x, a(x)) \cdot a'(x), \tag{6.15}$$

где  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, \xi)$  должна быть непрерывной функцией.

Вычислим производные от функции  $y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi$

$$y'(x) = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

.....

$$y^{(n-2)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^{(n-2)} G}{\partial x^{(n-2)}}(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Для того, чтобы вычислить  $y^{(n-1)}(x)$ , разобьем последний интеграл на сумму двух интегралов:

$$y^{(n-2)}(x) = \int_a^x \frac{\partial^{(n-2)} G}{\partial x^{(n-2)}}(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b \frac{\partial^{(n-2)} G}{\partial x^{(n-2)}}(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

$$\begin{aligned} y^{(n-1)}(x) &= \int_a^x \frac{\partial^{(n-1)} G}{\partial x^{(n-1)}}(x, \xi) f(\xi) d\xi + \cancel{\frac{\partial^{(n-2)} G}{\partial x^{(n-2)}}(x, \xi) f(\xi)} \Big|_{\xi=x-0} + \\ &+ \int_x^b \frac{\partial^{(n-1)} G}{\partial x^{(n-1)}}(x, \xi) f(\xi) d\xi - \cancel{\frac{\partial^{(n-2)} G}{\partial x^{(n-2)}}(x, \xi) f(\xi)} \Big|_{\xi=x+0} = \end{aligned}$$

В силу непрерывности  $\frac{\partial^{(n-2)} G}{\partial x^{(n-2)}}(x, \xi)$  будет выполнено:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(n-2)} G}{\partial x^{(n-2)}}(x, \xi) f(\xi) \Big|_{\xi=x-0} &= \frac{\partial^{(n-2)} G}{\partial x^{(n-2)}}(x, \xi) f(\xi) \Big|_{\xi=x+0} = \frac{\partial^{(n-2)} G}{\partial x^{(n-2)}}(x, x) f(x) / \\ &= \int_a^x \frac{\partial^{(n-1)} G}{\partial x^{(n-1)}}(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b \frac{\partial^{(n-1)} G}{\partial x^{(n-1)}}(x, \xi) f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= \int_a^x \frac{\partial^{(n)} G}{\partial x^{(n)}}(x, \xi) f(\xi) d\xi + \frac{\partial^{(n-1)} G}{\partial x^{(n-1)}}(x, \xi) f(\xi) \Big|_{\xi=x-0} + \\ &+ \int_x^b \frac{\partial^{(n)} G}{\partial x^{(n)}}(x, \xi) f(\xi) d\xi - \frac{\partial^{(n-1)} G}{\partial x^{(n-1)}}(x, \xi) f(\xi) \Big|_{\xi=x+0}. \end{aligned}$$

Согласно формуле (6.3):

$$f(x) \cdot \left( \frac{\partial^{(n-1)}G}{\partial x^{(n-1)}}(x, \xi) \Big|_{\xi=x-0} - \frac{\partial^{(n-1)}G}{\partial x^{(n-1)}}(x, \xi) \Big|_{\xi=x+0} \right) = f(x) \cdot \frac{1}{p_0(x)}.$$

Следовательно, выражение для  $y^{(n)}(x)$  можно упростить:

$$y^{(n)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^n G}{\partial x^n}(x, \xi) f(\xi) d\xi + f(x) \cdot \frac{1}{p_0(x)}.$$

Подставляем вычисленные производные  $y'(x), \dots, y^{(n)}(x)$  в формулу (6.1):

$$\begin{aligned} Ly &= p_0(x) \cdot y^{(n)} + p_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) = \\ &= p_0(x) f(x) \frac{1}{p_0(x)} + \int_a^b \underbrace{\left( p_0(x) \frac{\partial^n G}{\partial x^n} + p_1(x) \frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}} + \dots + p_n(x) G \right)}_{=LG(x,\xi)=0 \text{ (в силу формулы (6.4))}} f(\xi) d\xi = f(x), \end{aligned}$$

### **Замечание к последней формуле**

Интеграл  $\int_a^b$  можно разбить на сумму двух интегралов:  $\int_a^x$  и  $\int_x^b$ , для каждого из которых по формуле (6.4) будет выполнено:  $LG(x, \xi) = 0$ .

Таким образом, мы доказали, что функция  $y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi$  удовлетворяет уравнению  $Ly = f$ . ■

## **6.2 Пример построения функции Грина обыкновенного дифференциального оператора**

**Задача.** Построить функцию Грина (если она существует) данного дифференциального уравнения:

$$y^{(4)} = 0$$

с краевыми условиями

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y(1) = 0. \tag{6.16}$$



Еще одно уравнение можно получить, если подставить  $G(x, \xi)$  в уравнение (6.3):

$$\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial^{(n-1)} y_i}{\partial x^{(n-1)}} \Big|_{\xi} - \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial^{(n-1)} y_i}{\partial x^{(n-1)}} \Big|_{\xi} = \frac{1}{p_0(\xi)}. \quad (6.23)$$

В нашем случае:

$$6b_4 - 6a_4 = 1. \quad (6.24)$$

### Замечание

Производные в формулах (6.23) и (6.24) считаются в точке  $x = \xi$ , а не при  $x = \xi + 0$  и  $x = \xi - 0$ , так как функции  $y_i$  непрерывны вместе со своими производными вплоть до  $n$ -го порядка на всем отрезке  $[a, b]$ .

**Обозначение:**  $c_i = b_i - a_i$ .

Тогда формулы (6.22), (6.24) дают нам систему из 4 уравнений на коэффициенты  $c_i$ :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \cdot \xi + c_3 \cdot \xi^2 + c_4 \cdot \xi^3 = 0, \\ c_2 + 2c_3 \cdot \xi + 3c_4 \cdot \xi^2 = 0, \\ 2c_3 + 6c_4 \cdot \xi = 0, \\ 6c_4 = 1. \end{cases} \quad (6.25)$$

Решение этой системы:

$$\begin{cases} c_4 = \frac{1}{6}, \\ 2c_3 + 6 \cdot \frac{1}{6} \xi = 0 \Leftrightarrow c_3 = -\frac{1}{2} \xi, \\ c_2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \xi \cdot \xi + 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \xi^2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = \frac{1}{2} \xi^2, \\ c_1 + \frac{1}{2} \xi^2 \cdot \xi - \frac{1}{2} \xi \cdot \xi^2 + \frac{1}{6} \cdot \xi^3 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -\frac{1}{6} \xi^3. \end{cases} \quad (6.26)$$

$$\text{Итак, } c_1 = -\frac{1}{6} \xi^3, \quad c_2 = \frac{1}{2} \xi^2, \quad c_3 = -\frac{1}{2} \xi, \quad c_4 = \frac{1}{6}. \quad (6.27)$$

Далее воспользуемся тем, что функция Грина должна удовлетворять краевым условиям, то есть:

$$G(0, \xi) = G'_x(0, \xi) = G''_{xx}(0, \xi) = G(1, \xi) = 0. \quad (6.28)$$

Подставляя функцию Грина (6.20) в соотношения (6.28), получаем выражения для коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$ :

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \\ b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0. \end{cases} \quad (6.29)$$

Учитывая, что  $c_i = b_i - a_i$ , по формулам (6.27) и (6.29) окончательно находим коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$ :

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{6}\xi^3, \quad (6.30)$$

$$b_1 = -\frac{1}{6}\xi^3, \quad b_2 = \frac{1}{2}\xi^2, \quad b_3 = -\frac{1}{2}\xi, \quad b_4 = \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{6}\xi^3. \quad (6.31)$$

Подставляем найденные коэффициенты в формулу (6.20) и получаем искомую функцию Грина:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{6}\xi^3\right) x^3, & 0 \leq x \leq \xi, \\ -\frac{1}{6}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^2 x - \frac{1}{2}\xi x^2 + \left(\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{6}\xi^3\right) x^3, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (6.32)$$

### 6.3 Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля

Задача Штурма-Лиувилля, названная в честь Жака Шарля Франсуа Штурма и Жозефа Лиувилля, состоит в отыскании нетривиальных решений на промежутке  $(a, b)$  следующей задачи:

$$Ly = (p(x)y')' - q(x)y = 0, \quad y(a) = y(b) = 0, \quad (6.33)$$

где  $p(x) \neq 0$  на  $[a, b]$ ,  $p(x) \in C^1[a, b]$ ,  $q(x) \in C[a, b]$ .

Мы будем рассматривать условия Дирихле (обращение в нуль функции на концах промежутка):  $y(a) = 0$ ,  $y(b) = 0$ . В задаче Штурма-Лиувилля возможна постановка и других условий. Важно лишь, чтобы эти условия были разделенными, то есть в каждом из условий могут участвовать

значения функции и ее производной только на одном из концов промежутка. Граничные условия в общем виде выглядят следующим образом:

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0, \quad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0,$$

$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0, \quad \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0.$$

### **Замечание**

В данной постановке задачи оператор  $L$  является самосопряженным. Задачу Штурма-Лиувилля можно обобщить на случай не обязательно самосопряженного оператора:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ly = p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \quad p_0(x) > 0, \quad x \in [a, b], \\ y(a) = 0, \\ y(b) = 0, \end{array} \right\} \text{краевые условия} \quad (6.34)$$

где  $p_0(x)$ ,  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$  – непрерывные функции на отрезке  $[a, b]$ . Несмотря на отсутствие самосопряженности у оператора  $L$ , все формулы для функции Грина сохраняются.

Пусть однородная задача имеет только тривиальное решение. Тогда по **теореме 1** функция Грина существует. Построим её. Нам потребуется следующая лемма:

### **Лемма**

Пусть однородная задача (6.33) имеет только тривиальное решение. Пусть  $y_1(x)$  – нетривиальное решение уравнения  $Ly = 0$ , удовлетворяющее краевому условию  $y_1(a) = 0$ . Пусть  $y_2(x)$  – нетривиальное решение уравнения  $Ly = 0$ , удовлетворяющее краевому условию  $y_2(b) = 0$ . Тогда  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  образуют фундаментальную систему решений (то есть они линейно независимы).

Доказательство:

Докажем от противного. Пусть  $y_1$ ,  $y_2$  линейно зависимы, то есть:

$y_1(x) = C \cdot y_2(x)$ . Следовательно, они обращаются в 0 одновременно. Тогда  $y_1(b) = C \cdot y_2(b) = 0$  (ибо по условию леммы  $y_2(b) = 0$ ). Итак, мы получили, что  $y_1(a) = y_1(b) = 0$ . Следовательно,  $y_1(x)$  является нетривиальным решением задачи (6.33):

$$\begin{cases} Ly = 0, \\ y(a) = y(b) = 0, \end{cases}$$

что противоречит исходному предположению (мы предположили, что однородная задача имеет только тривиальное решение). ■

Найдем функцию Грина. Будем искать её в виде:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1 y_1(x), & a \leq x \leq \xi, \\ b_2 y_2(x), & \xi \leq x \leq b. \end{cases} \quad (6.35)$$

$G(x, \xi)$  удовлетворяет краевым условиям, так как  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  удовлетворяют краевым условиям при  $x = a$  и  $x = b$  соответственно. Удовлетворим условиям в точке  $x = \xi$ :

$$\begin{cases} a_1 y_1(\xi) = b_2 y_2(\xi) & \text{— непрерывность функции} \\ b_2 y_2' \Big|_{x=\xi+0} - a_1 y_1' \Big|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p(\xi)} & \text{— скачок производной} \end{cases}$$

Отсюда следует:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{b_2 y_2(\xi)}{y_1(\xi)}, \\ b_2 y_2'(\xi) - \frac{b_2 y_2(\xi)}{y_1(\xi)} y_1'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}. \end{cases}$$

Выразим коэффициент  $b_2$ :

$$\begin{aligned} b_2 \left( y_2'(\xi) - \frac{y_2(\xi) y_1'(\xi)}{y_1(\xi)} \right) &= \frac{1}{p(\xi)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow b_2 &= \frac{y_1(\xi)}{p(\xi) \underbrace{(y_2'(\xi) y_1(\xi) - y_2(\xi) y_1'(\xi))}_{W(y_1, y_2)}} = \frac{y_1(\xi)}{p(\xi) W(y_1, y_2) \Big|_{x=\xi}}, \end{aligned}$$

где  $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$  – определитель Вронского.

Мы получили коэффициенты  $a_1$  и  $b_2$ :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{y_2(\xi)}{p(\xi)W(y_1, y_2)|_{x=\xi}}, \\ b_2 = \frac{y_1(\xi)}{p(\xi)W(y_1, y_2)|_{x=\xi}}. \end{cases}$$

Теперь можно написать функцию Грина:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{p(\xi)W(y_1, y_2)|_{x=\xi}}, & a \leq x \leq \xi, \\ \frac{y_1(\xi)y_2(x)}{p(\xi)W(y_1, y_2)|_{x=\xi}}, & \xi \leq x \leq b. \end{cases} \quad (6.36)$$

#### 6.4 Пример. Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля

**Задача.** Построить функцию Грина для дифференциального уравнения второго порядка

$$Ly = y'' - y \quad (6.37)$$

с краевыми условиями

$$y(0) = y(\pi) = 0. \quad (6.38)$$

**Решение.** В случае задачи Штурма-Лиувилля:

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0, \quad y(a) = y(b) = 0, \quad (6.39)$$

где  $p(x) \neq 0$  на  $[a, b]$ ,  $p(x) \in C^1[a, b]$ ,  $q(x) \in C[a, b]$ , можно воспользоваться формулой (6.36) для функции Грина:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{p(\xi)W(y_1, y_2)|_{x=\xi}}, & a \leq x \leq \xi, \\ \frac{y_1(\xi)y_2(x)}{p(\xi)W(y_1, y_2)|_{x=\xi}}, & \xi \leq x \leq b. \end{cases} \quad (6.40)$$

Здесь  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  – линейно независимые решения дифференциального уравнения, удовлетворяющие граничным условиям, соответственно, на левом и правом концах промежутка:

$$y_1(a) = 0, \quad y_2(b) = 0, \quad (6.41)$$

а также условиям  $y_1'(a) \neq 0$ ,  $y_2'(b) \neq 0$ . Составим определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}. \quad (6.42)$$

Найдем линейно независимые решения уравнения  $y'' - y = 0$ . Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1.$$

Общее решение уравнения:

$$y = A \operatorname{ch}(x) + B \operatorname{sh}(x).$$

Найдем решение уравнения  $y_1(x)$ , удовлетворяющее краевому условию на левом конце промежутка:

$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$$

то есть решение с точностью до коэффициента примет вид:

$$y_1(x) = \operatorname{sh}(x). \quad (6.43)$$

Найдем решение уравнения  $y_2(x)$ , удовлетворяющее краевому условию на правом конце промежутка:

$$y(\pi) = 0 \Rightarrow A \operatorname{ch}(\pi) + B \operatorname{sh}(\pi) = 0 \Rightarrow A = -B \operatorname{th}(\pi).$$

Следовательно,

$$y_2(x) = -B \operatorname{th}(\pi) \operatorname{ch}(x) + B \operatorname{sh}(x) = \frac{B}{\operatorname{ch}(\pi)} \underbrace{(-\operatorname{sh}(\pi) \operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(\pi) \operatorname{sh}(x))}_{\operatorname{sh}(x-\pi)},$$

то есть решение с точностью до коэффициента примет вид:

$$y_2(x) = \operatorname{sh}(x - \pi). \quad (6.44)$$

По найденным  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  напишем вронскиан, вычисленный в точке  $x = \xi$ :

$$W(y_1, y_2) \Big|_{x=\xi} = \begin{vmatrix} \operatorname{sh} \xi & \operatorname{sh}(\xi - \pi) \\ \operatorname{ch} \xi & \operatorname{ch}(\xi - \pi) \end{vmatrix} = \underbrace{\operatorname{sh}(\xi) \operatorname{ch}(\xi - \pi) - \operatorname{ch}(\xi) \operatorname{sh}(\xi - \pi)}_{=\operatorname{sh}(\xi - (\xi - \pi))} = \operatorname{sh}(\pi). \quad (6.45)$$

Отсюда находим выражение для функции Грина:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(\xi - \pi)}{\operatorname{sh}(\pi)}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\operatorname{sh}(\xi) \operatorname{sh}(x - \pi)}{\operatorname{sh}(\pi)}, & \xi \leq x \leq \pi. \end{cases} \quad (6.46)$$

### 6.5 Пример. Задача Штурма-Лиувилля с неоднородными краевыми условиями.

**Задача.** Пусть задана функция Грина  $G(x, \xi)$  для краевой задачи

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0, \quad (6.47)$$

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (6.48)$$

Найти решение неоднородной краевой задачи

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = f(x), \quad (6.49)$$

$$y(a) = A \neq 0, \quad y(b) = B \neq 0. \quad (6.50)$$

**Решение.** Введем функцию  $z(x)$ , которая будет удовлетворять однородным краевым условиям:

$$z(x) = y(x) - \frac{B - A}{b - a}(x - a) - A. \quad (6.51)$$

Подставим  $y(x)$  из формулы (6.51):

$$z''(x) + p_1(x) \left( z'(x) + \frac{B - A}{b - a} \right) + p_2(x) \left( z(x) + \frac{B - A}{b - a}(x - a) + A \right) = f(x). \quad (6.52)$$

Таким образом, мы получаем следующую задачу для функции  $z(x)$ :

$$z''(x) + p_1(x)z'(x) + p_2(x)z(x) = g(x) \quad - \text{уравнение}, \quad (6.53)$$

$$\text{где } g(x) = f(x) - \frac{B-A}{b-a}p_1(x) - \left( \frac{B-A}{b-a}(x-a) + A \right) p_2(x),$$

$$z(a) = 0, \quad z(b) = 0 \quad - \text{краевые условия}. \quad (6.54)$$

Так как задача (6.53)–(6.54) имеет однородные краевые условия, то ее решение можно найти по стандартной формуле (6.14):

$$z(x) = \int_a^b G(x, \xi)g(\xi)d\xi. \quad (6.55)$$

Учитывая связь  $y(x)$  и  $z(x)$  (формула (6.51)), находим искомое решение:

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)g(\xi)d\xi + \frac{B-A}{b-a}(x-a) + A. \quad (6.56)$$

## Глава 7. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа

### 7.1 Определение и способ построения функции Грина

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в ограниченной области с гладкой границей:

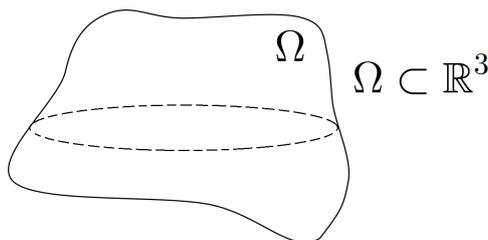


Рис. 47: Область  $\Omega$  с гладкой границей

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{внутри } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = f. \end{cases} \quad (7.1)$$

Согласно третьей формуле Грина (4.40):

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma - \iiint_{\Omega} \frac{1}{R} \Delta u d\Omega. \quad (7.2)$$

Согласно второй формуле Грина (4.34):

$$\iiint_{\Omega} (u \Delta V - V \Delta u) d\Omega = \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma. \quad (7.3)$$

Пусть  $V$  – гармоническая функция, то есть  $\Delta V = 0$ . Тогда формулу (7.3) можно переписать в виде:

$$0 = \iint_{\Sigma} \left( V \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\Sigma - \iiint_{\Omega} V \Delta u d\Omega. \quad (7.4)$$

Складывая (7.2) и (7.4), получаем:

$$u(M_0) = \iint_{\Sigma} \left( G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\Sigma - \iiint_{\Omega} \Delta u G d\Omega, \quad (7.5)$$

$$\text{где } G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + V \quad (7.6)$$

– функция двух точек:  $M_0(x, y, z)$  и  $M(\xi, \eta, \zeta)$ . Точка  $M_0$  фиксирована,  $x, y, z$  играют роль параметров.

### Определение

Функция  $G(M, M_0)$  есть функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $G(M, M_0)$  как функция точки  $M(\xi, \eta, \zeta)$  при фиксированной точке  $M_0(x, y, z)$  удовлетворяет уравнению Лапласа:  $\Delta G = 0, M \neq M_0$  во всех точках  $M$  области  $\Omega$ , кроме точки  $M = M_0$ .
- 2)  $G(M, M_0)$  представима в виде (7.6), где  $V = V(M, M_0)$  – гармоническая функция внутри  $\Omega$ .  $G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + V$ ,  $V$  называется компенсирующей функцией.
- 3)  $G(M, M_0)$  на границе обращается в 0:  $G(M, M_0)|_{M \in \Sigma} = 0$ .

### Замечание

Условию 3 можно удовлетворить, если потребовать, чтобы:

$$V|_{M \in \Sigma} = -\frac{1}{4\pi R_{MM_0}}.$$

Если  $G(M, M_0)$  – функция Грина, то  $G(M, M_0)|_{M \in \Sigma} = 0$ , что позволяет переписать формулу (7.5) в более простом виде:

$$u(M_0) = -\oint_{\Sigma} u \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma - \iiint_{\Omega} \Delta u G d\Omega. \quad (7.7)$$

Формула (7.7) даёт решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона (неоднородного уравнения Лапласа):

$$\begin{cases} \Delta u = g & \text{внутри } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = f. \end{cases}$$

$$u(M_0) = -\oint_{\Sigma} f \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma - \iiint_{\Omega} g G d\Omega. \quad (7.8)$$

Формула (7.7) даёт следующее решение для задачи (7.1):

$$u(M_0) = - \oiint_{\Sigma} f \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma. \quad (7.9)$$

Итак, для того чтобы получить решение задачи, нам нужно найти функцию Грина  $G(M, M_0)$ . Функцию Грина можно найти по формуле (7.6). Но тогда нам потребуется найти функцию  $V$ . Функцию  $V$  можно найти как решение следующей задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta V = 0, \\ V|_{\partial\Omega} = -\frac{1}{4\pi R_{MM_0}}. \end{cases} \quad (7.10)$$

Тогда полученная по формуле (7.6) функция  $G(M, M_0)$  будет удовлетворять определению функции Грина (Уравнение  $\Delta G = 0$  выполнено, так как  $\Delta v = 0$  и  $\Delta\left(\frac{1}{4\pi R_{MM_0}}\right) = 0$  при  $M \neq M_0$ ). Решив задачу (7.10) для данной области, мы сможем по формуле (7.9) получить решение задачи Дирихле (7.1) для произвольного краевого условия  $f$ .

## 7.2 Инвариантность функции Грина относительно перестановки аргументов

### Теорема

Функция Грина симметрична относительно своих аргументов  $M_1$  и  $M_2$ :

$$G(M_1, M_2) = G(M_2, M_1). \quad (7.11)$$

Доказательство:

Пусть  $M_1$  и  $M_2$  – некоторые фиксированные точки области  $\Omega$ . Построим шары  $B_{M_1, \varepsilon}$  и  $B_{M_2, \varepsilon}$  радиуса  $\varepsilon$  с центрами в точках  $M_1$  и  $M_2$  соответственно. Поверхности этих шаров – это сферы  $\Sigma_{M_1, \varepsilon}$  и  $\Sigma_{M_2, \varepsilon}$ .

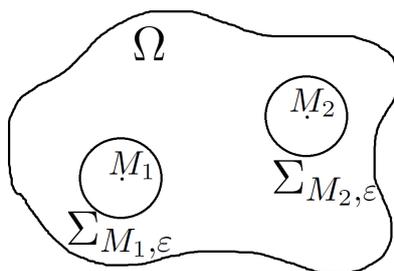


Рис. 48: Область  $\Omega$  с вырезанными шарами  $B_{M_1, \epsilon}$  и  $B_{M_2, \epsilon}$

Область  $\Omega$  с вырезанными шарами  $B_{M_1, \epsilon}$  и  $B_{M_2, \epsilon}$  обозначим за  $\tilde{\Omega}$  :

$$\tilde{\Omega} = \Omega \setminus B_{M_1, \epsilon} \setminus B_{M_2, \epsilon}.$$

Рассмотрим функции  $u = G(M, M_1)$  и  $v = G(M, M_2)$ . Применим вторую формулу Грина:

$$\iiint_{\tilde{\Omega}} \left( u \underbrace{\Delta v}_{=0} - v \underbrace{\Delta u}_{=0} \right) d\Omega = \iint_{\partial \tilde{\Omega}} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma \Leftrightarrow$$

$$\left/ \Delta u = 0, \text{ так как } \Delta G(M, M_1) = 0 \text{ при } M \in \tilde{\Omega}, \right.$$

$$\Delta v = 0, \text{ так как } \Delta G(M, M_2) = 0 \text{ при } M \in \tilde{\Omega} \left/$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 0 &= \iint_{\partial \Omega} \left( \underbrace{G(M, M_1)}_{=0 \text{ на границе области}} \frac{\partial G}{\partial n_M}(M, M_2) - \underbrace{G(M, M_2)}_{=0} \frac{\partial G}{\partial n_M}(M, M_1) \right) d\Sigma + \\ &+ \underbrace{\iint_{\Sigma_{M_1, \epsilon}} \left( G(M, M_1) \frac{\partial G}{\partial n_M}(M, M_2) - G(M, M_2) \frac{\partial G}{\partial n_M}(M, M_1) \right) d\Sigma_{M_1, \epsilon}}_I + \\ &+ \underbrace{\iint_{\Sigma_{M_2, \epsilon}} \left( G(M, M_1) \frac{\partial G}{\partial n_M}(M, M_2) - G(M, M_2) \frac{\partial G}{\partial n_M}(M, M_1) \right) d\Sigma_{M_2, \epsilon}}_{II}. \end{aligned}$$

(7.12)

**Замечание**

Индекс “ $M$ ” в формулах для  $\frac{\partial G}{\partial n_M}(M, M_1)$  и  $\frac{\partial G}{\partial n_M}(M, M_2)$  указывает, по какой переменной берется производная (а также по какой переменной берется интеграл в формуле (7.12)).

Перейдем к вычислению интегралов (I) и (II). Напомним, что функции Грина имеют вид:

$$G(M, M_1) = \frac{1}{4\pi R_{MM_1}} + V_1(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} + V_1(M),$$

$$G(M, M_2) = \frac{1}{4\pi R_{MM_2}} + V_2(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} + V_2(M).$$

Функции  $V_1(M)$ ,  $V_2(M)$  ограничены, так как дважды непрерывно дифференцируемы (удовлетворяют уравнению Лапласа  $\Delta V = 0$ ). Производная  $\frac{\partial G}{\partial n_M}(M, M_2)$  ограничена на  $\Sigma_{M_1, \varepsilon}$ , так как  $G$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta G = 0$  (её особенность в точке  $M_2$ , а мы находимся на сфере  $\Sigma_{M_1, \varepsilon}$ ). Преобразуем первое слагаемое в интеграле (I) :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma_{M_1, \varepsilon}} G(M, M_1) \frac{\partial G}{\partial n_M}(M, M_2) d\Sigma_{M_1, \varepsilon} = \\ & = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iint_{\Sigma_{M_1, \varepsilon}} \frac{\partial G}{\partial n_M}(M, M_2) d\Sigma_{M_1, \varepsilon} + \iint_{\Sigma_{M_1, \varepsilon}} V_1(M) \frac{\partial G}{\partial n_M}(M, M_2) d\Sigma_{M_1, \varepsilon} = \end{aligned}$$

/ Применим теорему о среднем:  $\iint_{\Sigma} \varphi(M) d\Sigma_M = \varphi(\tilde{M}) \cdot \underbrace{S_{\Sigma}}_{\text{площадь}}, \quad \tilde{M} \in \Sigma,$

где  $\varphi$  – непрерывная функция. /

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \underbrace{\frac{\partial G}{\partial n_M}(M, M_2) \Big|_{M=\tilde{M}}}_{\text{ограничена}} \cdot 4\pi\varepsilon^2 + \underbrace{V_1(M)}_{\text{ограничена}} \cdot \underbrace{\frac{\partial G}{\partial n_M}(M_1, M_2) \Big|_{M=\tilde{M}}}_{\text{ограничена}} \cdot 4\pi\varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Теперь преобразуем второе слагаемое в интеграле (I) :

$$\iint_{\Sigma_{M_1, \varepsilon}} G(M, M_2) \frac{\partial G}{\partial n_M}(M, M_1) d\Sigma_{M_1, \varepsilon} =$$

$$= \iint_{\Sigma_{M_1, \varepsilon}} G(M, M_2) \frac{\partial}{\partial n_M} \frac{1}{4\pi R_{MM_1}} d\Sigma_{M_1, \varepsilon} + \iint_{\Sigma_{M_1, \varepsilon}} G(M, M_2) \frac{\partial}{\partial n_M} V_1(M) d\Sigma_{M_1, \varepsilon} =$$

$$\left/ \frac{\partial}{\partial n_M} = -\frac{\partial}{\partial R_{MM_1}}, \right.$$

$$\frac{\partial}{\partial n_M} \frac{1}{4\pi R_{MM_1}} = \frac{1}{4\pi R_{MM_1}^2} = \frac{1}{4\pi \varepsilon^2}.$$

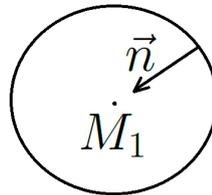


Рис. 49: Внутренняя нормаль для шара

Внутренняя нормаль для шара  $B_{M_1, \varepsilon} \Leftrightarrow$  внешней нормали для  $\tilde{\Omega}$ .

$$= \frac{1}{4\pi \varepsilon^2} \iint_{\Sigma_{M_1, \varepsilon}} G(M, M_2) d\Sigma_{M_1, \varepsilon} + \iint_{\Sigma_{M_1, \varepsilon}} G(M, M_2) \frac{\partial}{\partial n_M} V_1(M) d\Sigma_{M_1, \varepsilon} \quad \begin{array}{c} = \\ \uparrow \\ \text{Теорема о среднем} \end{array}$$

$$= \frac{1}{4\pi \varepsilon^2} \underbrace{G(M, M_2) \Big|_{M=\widehat{M}}}_{\rightarrow G(M_1, M_2) \text{ ибо } \widehat{M} \rightarrow M_1} \cdot 4\pi \varepsilon^2 + \underbrace{G(M, M_2) \frac{\partial}{\partial n_M} V_1(M) \Big|_{M=\widehat{M}}}_{\text{ограничена}} \cdot 4\pi \varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} G(M_1, M_2).$$

Таким образом, интеграл (I) примет вид:

$$(I) = 0 - G(M_1, M_2) = G(M_1, M_2).$$

Аналогично для интеграла (II) :

$$(II) = \underbrace{\iint_{\Sigma_{M_2, \varepsilon}} G(M, M_1) \frac{\partial G}{\partial n_M}(M, M_2) d\Sigma_{M_2, \varepsilon}}_{\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} G(M_2, M_1)} - \underbrace{\iint_{\Sigma_{M_2, \varepsilon}} G(M, M_2) \frac{\partial G}{\partial n_M}(M, M_1) d\Sigma_{M_2, \varepsilon}}_{\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0}.$$

Тогда, согласно формуле (7.12) получаем:

$$(I) + (II) = 0 \Leftrightarrow -G(M_1, M_2) + G(M_2, M_1) = 0.$$



### 7.3 Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в ограниченной плоской области с гладкой границей:

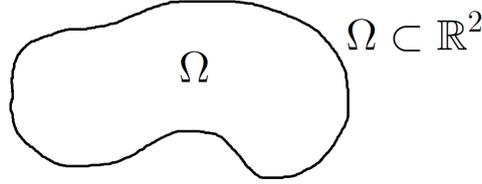


Рис. 50: Плоская область  $\Omega$  с гладкой границей

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{внутри } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = f. \end{cases} \quad (7.13)$$

Согласно третьей формуле Грина в двумерном случае (4.46):

$$u(M_0) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{R} \right) - \ln \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \ln \frac{1}{R} \Delta u d\Omega. \quad (7.14)$$

Вторая формула Грина в двумерном случае (4.36) дает

$$\iint_{\Omega} (u \Delta V - V \Delta u) d\Omega = \oint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma. \quad (7.15)$$

Пусть  $V$  – гармоническая функция ( $\Delta V = 0$ ). Тогда формулу (7.15) можно переписать в виде:

$$0 = \oint_{\Sigma} \left( V \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\Sigma - \iint_{\Omega} V \Delta u d\Omega. \quad (7.16)$$

Складываем (7.14) и (7.16), получаем:

$$u(M_0) = \oint_{\Sigma} \left( G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\Sigma - \iint_{\Omega} \Delta u G d\Omega, \quad (7.17)$$

где

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} + V \quad (7.18)$$

– функция двух точек:  $M_0(x, y)$  и  $M(\xi, \eta)$ .

### Определение

Функция  $G(M, M_0)$  есть функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $G(M, M_0)$  как функция точки  $M(\xi, \eta)$  при фиксированной точке  $M_0(x, y)$  удовлетворяет уравнению Лапласа:  $\Delta G = 0$ ,  $M \neq M_0$  во всех точках  $M$  области  $\Omega$  кроме точки  $M = M_0$
- 2)  $G(M, M_0)$  представима в виде (7.18), где  $V = V(M, M_0)$  – гармоническая функция внутри  $\Omega$ :

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} + V.$$

- 3)  $G(M, M_0)$  на границе обращается в 0:

$$G(M, M_0) \Big|_{M \in \Sigma} = 0.$$

### Замечание

Условию 3 можно удовлетворить, если потребовать, чтобы:

$$V \Big|_{M \in \Sigma} = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}}.$$

## 7.4 Метод изображений

Физический смысл функции Грина  $G(M, M_0)$  – это потенциал электростатического поля в точке  $M$ , создаваемого точечным зарядом, помещенным в точку  $M_0$ . Метод изображений позволяет построить функцию Грина  $G(M, M_0)$  в случае простой геометрии области без решения задачи Дирихле (7.10).

## 7.5 Функция Грина задачи Дирихле для полупространства

Пусть  $\Omega = \mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) : z \geq 0\}$ .

Согласно определению, функция Грина должна удовлетворять следующим условиям:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + V, \quad (7.19)$$

где  $\Delta V = 0$  для любой точки  $M \in \mathbb{R}_+^3$ .

$$G(M, M_0) \Big|_{M \in \Sigma} = 0, \quad \text{где } \Sigma = \{(x, y, z) : z = 0\}. \quad (7.20)$$

Построим точку  $M_1(\xi, \eta, -\zeta)$  (заряд-изображение), симметричную точке  $M_0(\xi, \eta, \zeta)$  относительно плоскости  $\Sigma$ .

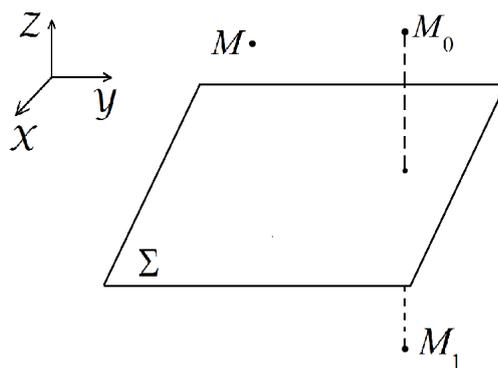


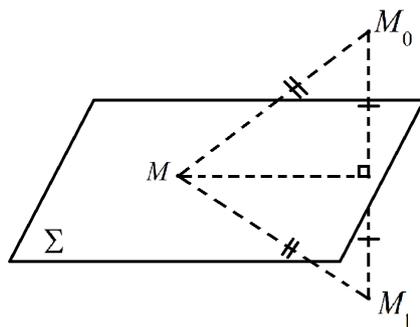
Рис. 51: Построение заряда-изображения  $M_1$

Область  $\Omega = \mathbb{R}_+^3$  не ограничена, поэтому к определению функции Грина нужно добавить условие  $G(M, M_0) \xrightarrow{|MM_0| \rightarrow \infty} 0$ .

Выберем функцию  $V$  следующим образом:

$$V = -\frac{1}{4\pi R_{MM_1}}.$$

$\Delta V = 0$  всюду, кроме точки  $M = M_1$ , но  $M_1 \notin \mathbb{R}_+^3$ , то есть  $\Delta V = 0$  всюду в  $\mathbb{R}_+^3$ , из чего следует, что  $\Delta G = 0$  при  $M \neq M_0$ . Проверим граничное условие (7.20).

Рис. 52: Проверка равенства сторон треугольников:  $MM_0 = MM_1$ 

Если  $M \in \Sigma$ , то  $R_{MM_1} = R_{MM_0} \Rightarrow G \Big|_{M \in \Sigma} = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi R_{MM_1}} = 0$

Итак, удовлетворили уравнению Лапласа и краевому условию. Следовательно, функция Грина имеет следующий вид:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi R_{MM_1}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} - \frac{1}{4\pi \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2}}. \quad (7.21)$$

Итак, мы нашли функцию Грина и можем написать решение задачи

Дирихле  $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\Sigma} = f \end{cases}$  по формуле (7.9):

$$u(M_0) = - \iint_{\Sigma} f \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma. \quad (7.22)$$

$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = - \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{\Sigma}$ , так как  $\vec{n}$  – внешняя нормаль.

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{z - \zeta}{R_{MM_0}^3} + \frac{z + \zeta}{R_{MM_1}^3} \right), \quad (7.23)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = - \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=0} = - \frac{\zeta}{2\pi R_{MM_0}^3}. \quad (7.24)$$

Тогда решение задачи Дирихле примет вид:

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\zeta}{R_{MM_0}^3} f d\Sigma. \quad (7.25)$$

$$\Leftrightarrow u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \zeta^2)^{3/2}} f(x, y) dx dy. \quad (7.26)$$

### Замечание

В двумерном случае решение строится аналогично:

$$\Omega = \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) : y \geq 0, \}.$$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} + V, \quad \text{где } M_0 = (\xi, \eta).$$

$$V = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_1}} \quad \text{где } M_1 = (\xi, -\eta).$$

## 7.6 Функция Грина для двугранного угла

Рассмотрим область  $\Omega$  следующего вида:

$$\Omega = \mathbb{R}_{++}^3 = \{(x, y, z) : y \geq 0, z \geq 0\}.$$

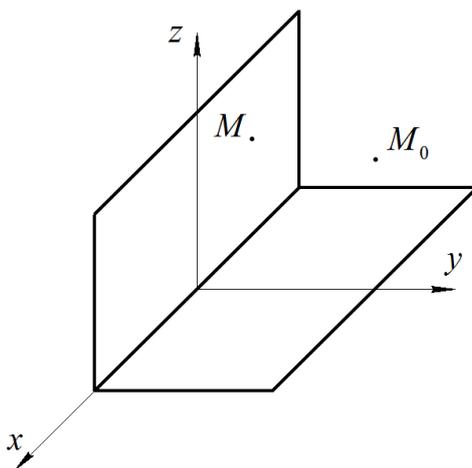


Рис. 53: Двугранный угол

Аналогично задаче для полупространства, мы обеспечим ноль функции Грина на плоскости  $\Sigma$ , если построим заряд-изображение  $M_1$ , симметричный заряду  $M_0$  относительно  $\Sigma$ .

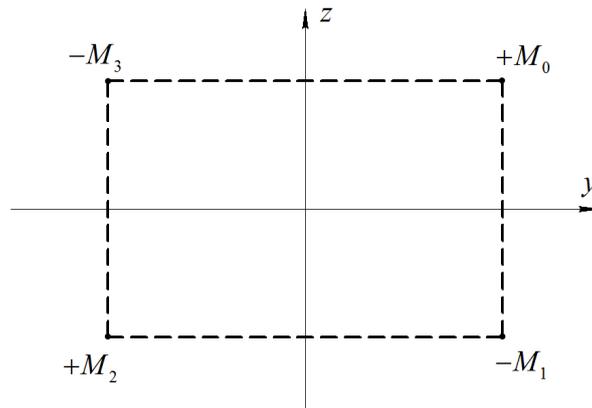


Рис. 54: Построение зарядов-изображений

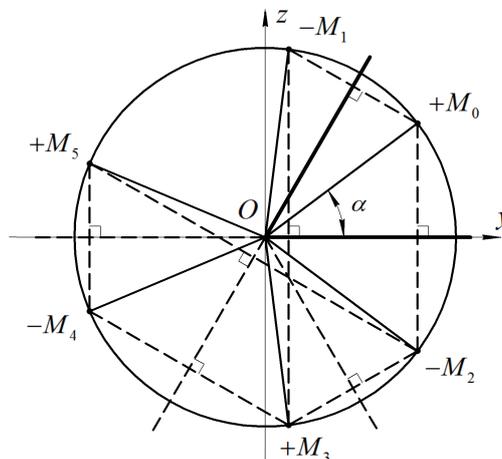
Для двугранного угла получим заряды-изображения в точках  $M_1(\xi, \eta, -\zeta)$ ,  $M_2(\xi, -\eta, -\zeta)$ ,  $M_3(\xi, -\eta, \zeta)$ . Напишем функцию Грина для двугранного угла:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} - \underbrace{\frac{1}{4\pi R_{MM_1}} + \frac{1}{4\pi R_{MM_2}} - \frac{1}{4\pi R_{MM_3}}}_{V(M)}. \quad (7.27)$$

Компенсирующая функция  $V$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta V = 0$ , так как все особенности находятся в точках  $M_1, M_2, M_3$ , которые не входят в область  $\mathbb{R}_{++}^3$ .

## 7.7 Функция Грина для различных двугранных углов

Пусть двугранный угол имеет величину  $\omega = \frac{\pi}{3}$ .

Рис. 55: Построение зарядов-изображений для двугранного угла  $\omega$

Пусть точка  $M_0$  соответствует углу  $\alpha$ . Тогда:

$$M_1 \mapsto \frac{\pi}{3} + \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{2\pi}{3} - \alpha, \quad M_2 \mapsto \alpha, \quad M_3 \mapsto \alpha - \frac{2\pi}{3}.$$

Точки  $M_2, M_3$  получаются из  $M_1, M_0$  поворотом на угол  $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ . При этом  $M_0$  переходит в  $M_2$ ,  $M_1$  переходит в  $M_3$ , так как в зеркале правая и левая стороны меняются местами.

Как было показано в задаче для полупространства, зеркальное отражение не меняет расстояний:  $OM_0 = OM_1 = \dots$ , то есть все точки  $M_0, M_1, M_2, M_3, \dots$  расположены на окружности.

В каждом секторе величиной  $\frac{\pi}{3}$  получится по одному заряду-изображению. При переходе от сектора к сектору заряды меняют знак. После трех поворотов на угол  $\frac{2\pi}{3}$  вернется к исходной паре зарядов  $M_0, M_1$  с правильными знаками.

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi R_{MM_1}} - \frac{1}{4\pi R_{MM_2}} + \frac{1}{4\pi R_{MM_3}} - \frac{1}{4\pi R_{MM_4}} + \frac{1}{4\pi R_{MM_5}}. \quad (7.28)$$

Аналогично для двугранного угла  $\omega = \frac{\pi}{n}$ . Здесь придется сделать  $n$  поворотов на угол  $\frac{\pi}{n}$ .

Если угол  $\omega \neq \frac{\pi}{n}$ , то после возвращения в исходный сектор мы получим заряд-изображение в точке, отличной от  $M_0$ , что недопустимо, так как компенсирующая функция  $V$  должна быть гармонической во всех точках внутри двугранного угла. Это не означает, что функции Грина  $G(M, M_0)$  не существует, это лишь указывает на то, что ее нельзя построить методом изображений.

### 7.8 Функция Грина для слоя между двумя параллельными плоскостями

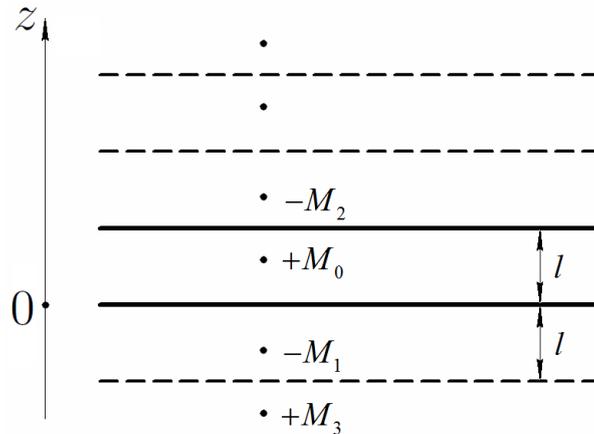


Рис. 56: Построение зарядов-изображений в слое

Последовательно строя заряды-изображения, обеспечивая нулевое условие на каждой из плоскостей, получим бесконечное число таких зарядов. Функция Грина для точек  $M(x, y, z)$  и  $M_0(\xi, \eta, \zeta)$  представляет из себя ряд:

$$G(M, M_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4\pi \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta - 2l \cdot n)^2}} - \frac{1}{4\pi \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta - 2l \cdot n)^2}} \right) \quad (7.29)$$

Покажем, что полученный ряд сходится. Ряд (7.29) ведет себя также как следующий ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{z - \zeta - 2l \cdot n} - \frac{1}{z + \zeta - 2l \cdot n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\zeta}{(z - 2l \cdot n)^2 - \zeta^2} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

— сходится.

#### **Замечание**

В двумерном случае все построения для двугранных углов сохраняются с заменой  $\frac{1}{4\pi R}$  на  $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R}$ . Для пары параллельных прямых метод изображений не подходит, так как последовательность изображений дает расходящийся ряд для функции Грина.

### 7.9 Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге

Метод изображений применим для круга, но здесь заряды-изображения строятся с использованием геометрической инверсии. В качестве области  $\Omega$  рассмотрим круг радиуса  $R$ .

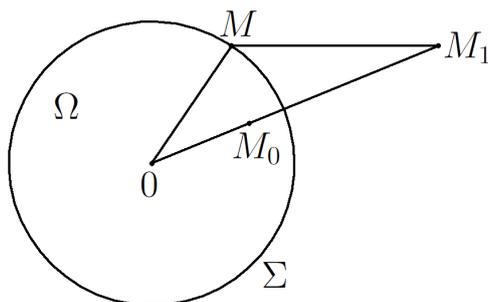


Рис. 57: Задача Дирихле в круге

Введем некоторые обозначения. Пусть  $OM_0 = \rho_0$ . Тогда положение точки  $M_1$  на луче  $OM_0$  определяется следующим образом:

$$OM_1 = \rho_1, \quad \text{где } \rho_1 = \frac{R^2}{\rho_0}. \quad (7.30)$$

Заряд в точке  $M_1$  будет отличен от заряда в точке  $M_0$  и равен  $\left(-\frac{R}{\rho_0}\right)$ . Проверим, что функцию Грина можно взять в следующем виде:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left( \ln \frac{1}{R_{MM_0}} - \ln \left( \frac{R}{\rho_0} \frac{1}{R_{MM_1}} \right) \right). \quad (7.31)$$

Ясно, что  $G(M, M_0)$  удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta G = 0 \quad \text{при } M \neq M_0, \quad \text{так как } \Delta \left( \ln \frac{1}{R_{MM_0}} \right) = 0 \quad \text{при } M \neq M_0.$$

Компенсирующая функция  $V = -\frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{R}{\rho_0} \frac{1}{R_{MM_1}} \right)$  гармонична внутри круга, так как ее особенность лежит в точке  $M_1$  (вне круга). Остается проверить, что  $G(M, M_0)$  обращается в 0 на границе круга:

$$G(M, M_0) \Big|_{M \in \Sigma} = 0. \quad (7.32)$$

$$\left. \begin{array}{l} \rho_1 = \frac{R^2}{\rho_0} \Rightarrow \frac{\rho_1}{R} = \frac{R}{\rho_0} \Rightarrow \frac{OM_1}{OM} = \frac{OM}{OM_0} \\ \angle MOM_1 - \text{общий} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta OMM_0 \sim \Delta OM_1M$$

$$\frac{R}{\rho_0} = \frac{OM}{OM_0} = \frac{MM_1}{MM_0} = \frac{R_{MM_1}}{R_{MM_0}} \Rightarrow \frac{1}{R_{MM_0}} = \frac{R}{\rho_0} \frac{1}{R_{MM_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(M, M_0) \Big|_{M \in \Sigma} = 0 \text{ по формуле (7.31).}$$

Используя полученную формулу Грина, решим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ внутри } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = f. \end{cases}$$

Решение задачи нам даст формула (7.9), написанная для двумерного случая:

$$u(M_0) = - \oint_{\Sigma} f \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma. \quad (7.33)$$

Найдем  $\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{r=R}$ . Для вычисления производной по нормали нам нужно знать значение функции  $G$  во внутренних точках области (круга). Поэтому возьмем точку  $M$  внутри круга.

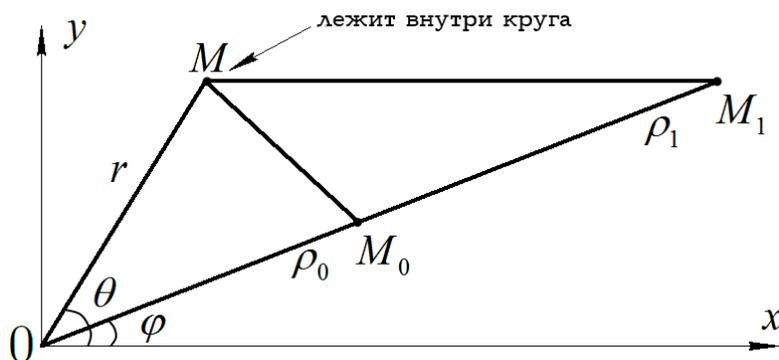


Рис. 58: Переход в полярные координаты

Пусть полярные координаты точек таковы:  $M = (r, \theta)$ ,  $M_0 = (\rho_0, \varphi)$ . Тогда  $M_1 = (\rho_1, \varphi) = \left(\frac{R^2}{\rho_0}, \varphi\right)$ .

По теореме косинусов:

$$R_{MM_0} = \sqrt{r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos(\theta - \varphi)},$$

$$R_{MM_1} = \sqrt{r^2 + \rho_1^2 - 2r\rho_1 \cos(\theta - \varphi)} = \sqrt{r^2 + \frac{R^4}{\rho_0^2} - 2r\frac{R^2}{\rho_0} \cos(\theta - \varphi)}.$$

Продифференцируем формулу (7.31), учитывая, что  $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{1}{2} \ln(r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos(\theta - \varphi)) - \right. \\ &\quad \left. - \ln \frac{R}{\rho_0} + \frac{1}{2} \ln \left( r^2 + \frac{R^4}{\rho_0^2} - 2r\frac{R^2}{\rho_0} \cos(\theta - \varphi) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{-r + \rho_0 \cos(\theta - \varphi)}{r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos(\theta - \varphi)} + \frac{r - \frac{R^2}{\rho_0} \cos(\theta - \varphi)}{r^2 + \frac{R^4}{\rho_0^2} - 2r\frac{R^2}{\rho_0} \cos(\theta - \varphi)} \right). \\ \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{r=R} &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{-R + \rho_0 \cos(\theta - \varphi)}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \varphi)} + \frac{R - \frac{R^2}{\rho_0} \cos(\theta - \varphi)}{R^2 + \frac{R^4}{\rho_0^2} - 2R\frac{R^2}{\rho_0} \cos(\theta - \varphi)} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-R^3 + \rho_0^2 R}{R^2(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \varphi))} = \frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{\rho_0^2 - R^2}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \varphi)}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Подставляем (7.34) в (7.33):

$$\begin{aligned} u(M_0) &= - \oint_{\Sigma} f \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma = \oint_{\Sigma} \frac{1}{2\pi R} \cdot f \cdot \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \varphi)} d\Sigma = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \cdot \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \varphi)}, \end{aligned} \quad (7.35)$$

что соответствует формуле (3.21).

Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре пишется аналогично.

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{R}{\rho_0} \frac{1}{R_{MM_1}} \right). \quad (7.36)$$

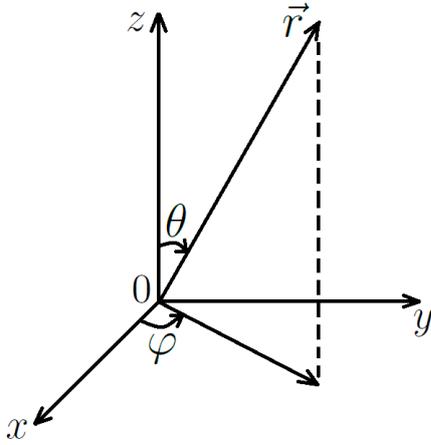
Теперь решим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.

$$u(M_0) = - \iint_{\Sigma} f \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma. \quad (7.37)$$

Рисунок аналогичен двумерному случаю. Пусть  $\gamma$  – угол между  $OM$  и  $OM_0$ .

$$\cos \gamma = \frac{\vec{e}_{OM} \cdot \vec{e}_{OM_0}}{|\vec{e}_{OM}| \cdot |\vec{e}_{OM_0}|} = \vec{e}_{OM} \cdot \vec{e}_{OM_0}, \quad (7.38)$$

где  $\vec{e}_{OM}$  – орт вектора  $O\vec{M}$ .



Введем сферические координаты:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

Рис. 59: Сферические координаты

Пусть сферические координаты точек таковы:  $M = (r, \varphi, \theta)$ ,  $M_0 = (\rho_0, \varphi_0, \theta_0)$ . Тогда  $M_1 = (\rho_1, \varphi_0, \theta_0) = (\frac{R^2}{\rho_0}, \varphi_0, \theta_0)$ . Соответственно, орты векторов  $O\vec{M}$  и  $O\vec{M}_0$  имеют следующие координаты:

$$\vec{e}_{OM} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta),$$

$$\vec{e}_{OM_0} = (\cos \varphi_0 \sin \theta_0, \sin \varphi_0 \sin \theta_0, \cos \theta_0).$$

Угол между ними:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 (\cos \varphi \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0) = \\ &= \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cdot \cos (\varphi - \varphi_0). \end{aligned} \quad (7.39)$$

По теореме косинусов:

$$\begin{aligned} R_{MM_0} &= \sqrt{r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos \gamma}, \\ R_{MM_1} &= \sqrt{r^2 + \frac{R^4}{\rho_0^2} - 2r\frac{R^2}{\rho_0} \cos \gamma}. \end{aligned}$$

Продифференцируем формулу (7.36), учитывая, что  $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left( (r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos \gamma)^{-1/2} - \frac{R}{\rho_0} (r^2 + \frac{R^4}{\rho_0^2} - 2r\frac{R^2}{\rho_0} \cos \gamma)^{-1/2} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{-r + \rho_0 \cos \gamma}{(r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos \gamma)^{3/2}} + \frac{\frac{R}{\rho_0} (r - \frac{R^2}{\rho_0} \cos \gamma)}{(r^2 + \frac{R^4}{\rho_0^2} - 2r\frac{R^2}{\rho_0} \cos \gamma)^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{r=R} &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{-R + \rho_0 \cos \gamma}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{3/2}} + \frac{\frac{R}{\rho_0} (R - \frac{R^2}{\rho_0} \cos \gamma)}{(R^2 + \frac{R^4}{\rho_0^2} - 2R\frac{R^2}{\rho_0} \cos \gamma)^{3/2}} \right) = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{-R + \rho_0 \cos \gamma}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{3/2}} + \frac{\frac{R}{\rho_0} (R - \frac{R^2}{\rho_0} \cos \gamma)}{\frac{R^3}{\rho_0^3} (R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{3/2}} \right) = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{(-R + \rho_0 \cos \gamma) R^2 + \rho_0^2 R - \rho_0 R^2 \cos \gamma}{R^2 (R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{3/2}} \right) = \\
 &= \frac{1}{4\pi R} \frac{\rho_0^2 - R^2}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{3/2}}. \quad (7.40)
 \end{aligned}$$

Подставляем (7.40) в (7.37):

$$\begin{aligned}
 u(M_0) &= - \iint_{\Sigma} f \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma = \iint_{\Sigma} \frac{1}{4\pi R} \cdot f \cdot \frac{R^2 - \rho_0^2}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{3/2}} d\Sigma = \\
 &= \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \cdot f(\theta, \varphi) \cdot \frac{R^2 - \rho_0^2}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \gamma)^{3/2}} \sin \theta, \quad (7.41)
 \end{aligned}$$

где  $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cdot \cos (\varphi - \varphi_0)$ .

Эта формула называется интегралом Пуассона для сферы.

## 7.10 Метод инверсий

Метод инверсий позволяет получить более простую геометрическую область для метода изображений. Инверсия относительно сферы радиуса  $a$  – это преобразование точек пространства по следующему правилу:

$$\tilde{r} = \frac{a^2}{r}, \quad (7.42)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор исходной точки,  $\vec{\tilde{r}}$  – сонаправленный с ним радиус-вектор инвертированной точки,  $a$  – радиус инверсии.

### Теорема об инверсии

Пусть  $u(r, \theta, \varphi)$  – потенциал, создаваемый системой точечных зарядов  $q_i$  в точках  $(r_i, \theta_i, \varphi_i)$ . Тогда функция

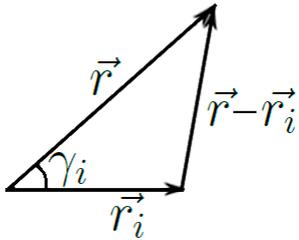
$$\tilde{u}(r, \theta, \varphi) = \frac{a}{r} u\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \varphi\right) \quad (7.43)$$

является потенциалом системы зарядов

$$\tilde{q}_i = \frac{a}{r_i} q_i, \quad (7.44)$$

расположенных в точках  $\left(\frac{a^2}{r_i}, \theta_i, \varphi_i\right)$ .

Доказательство:



Потенциал электростатического поля в точке  $\vec{r}$ , создаваемый зарядом  $q_i$ , равен:

$$\frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

Рис. 60: Потенциал поля

Потенциал системы точечных зарядов  $\{q_i\}_{i=1}^n$ :

$$u = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{теорема косинусов}}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{(r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos \gamma_i)^{1/2}}. \quad (7.45)$$

При преобразовании инверсии углы не меняются, следовательно, угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{r}_i$  (где  $\vec{r}_i = \frac{a^2}{r_i}$ ) сохранится и будет равен  $\gamma_i$ .

$$\tilde{u}(r, \theta, \varphi) = \frac{a}{r} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\left(\frac{a^4}{r^2} + r_i^2 - \frac{2a^2}{r} r_i \cos \gamma_i\right)^{1/2}} \quad (7.46)$$

Вынося  $\frac{r_i^2}{r^2}$  за знак корня, получаем:

$$\tilde{u}(r, \theta, \varphi) = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{aq_i}{r_i}}{\left(\frac{a^4}{r_i^2} + r^2 - 2r \cdot \frac{a^2}{r_i} \cos \gamma_i\right)^{1/2}} \quad (7.47)$$

Сравнивая формулы (7.45) и (7.47), получаем, что  $\tilde{u}$  есть потенциал системы зарядов  $\left\{\frac{a}{r_i} q_i\right\}_{i=1}^n$ , расположенных в точках  $\left(\frac{a^2}{r_i}, \theta_i, \varphi_i\right)$ . ■

### Геометрические свойства преобразования инверсии

Пусть  $O$  – центр инверсии,  $a$  – радиус инверсии,  $\Sigma$  – поверхность до преобразования инверсии,  $\tilde{\Sigma}$  – поверхность после преобразования инверсии.

1. Углы пересечения не меняются.
2. Величина элементарной площадки  $dS$  на поверхности  $\Sigma$  связана с величиной соответствующей площадки  $d\tilde{S}$  на инвертированной поверхности  $\tilde{\Sigma}$  соотношением:

$$\frac{dS}{d\tilde{S}} = \frac{r^2}{\tilde{r}^2}. \quad (7.48)$$

3. Сфера инверсии не меняет своего положения при преобразовании инверсии.
4. Сфера переходит в сферу (в частности, бесконечного радиуса, см. пункт 5).
5. Сфера, проходящая через центр инверсии, переходит в плоскость, и наоборот.

Объясним свойства 4 и 5.

### Различные варианты инверсии сферы

- а) Центр инверсии находится вне сферы.

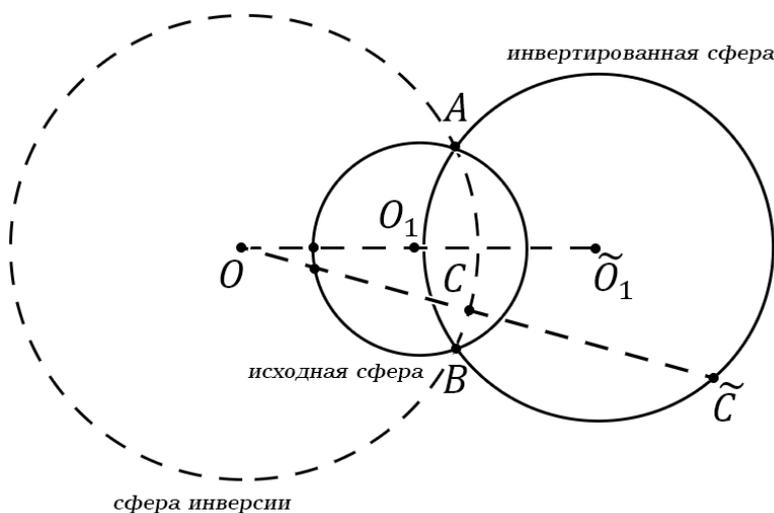


Рис. 61: Центр инверсии находится вне сферы

Точки  $A$  и  $B$  – точки пересечения исходной сферы со сферой инверсии, при преобразовании инверсии остаются на месте и могут быть использованы как реперные точки при построении инвертированной сферы. Таким образом, будет достаточно выяснить положение центра инвертированной сферы.

б) Центр инверсии находится на сфере.

Сфера переходит в плоскость, ее внутренность – в область правее плоскости.

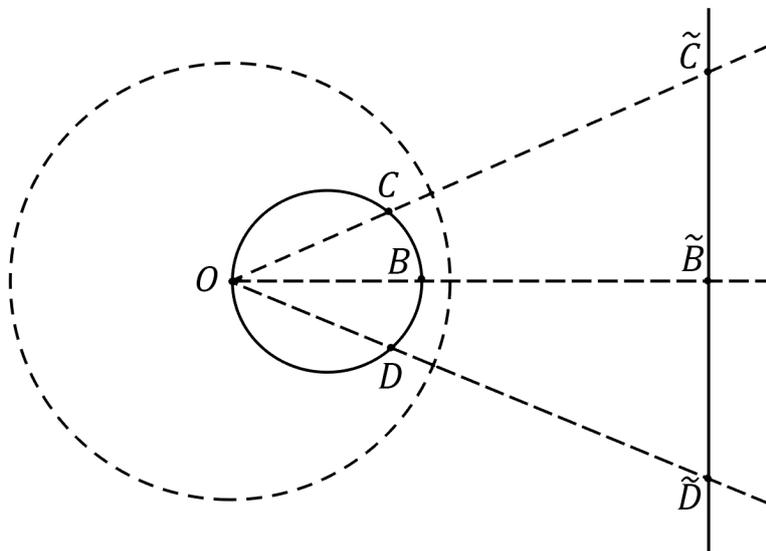


Рис. 62: Центр инверсии находится на сфере

в) Центр инверсии находится внутри сферы

Сфера переходит в сферу, ее внутренность – во внешность сферы.

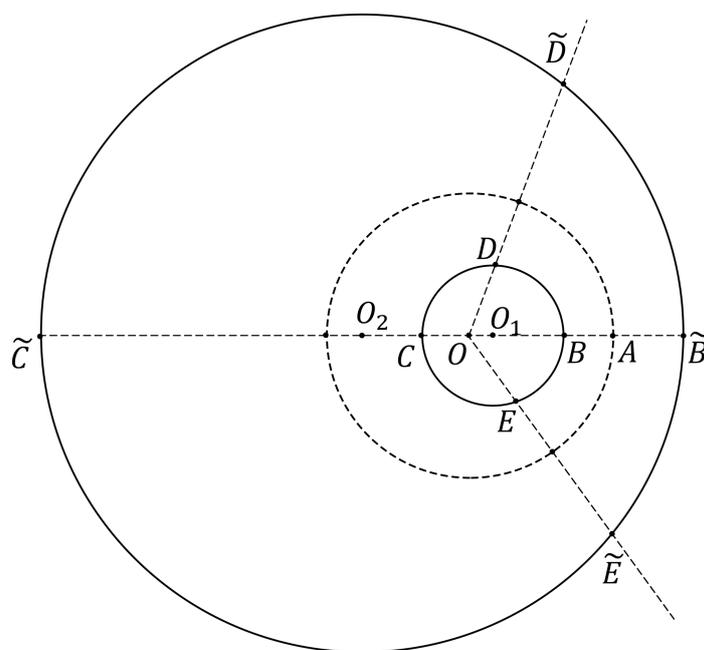


Рис. 63: Центр инверсии находится внутри сферы

Пусть точка  $O$  – центр инверсии, радиус сферы инверсии  $a = 3$ .

Пусть точка  $O_1$  – центр исходной сферы, ее радиус  $O_1B = 1.5$ .

$$\left. \begin{aligned} O\tilde{B} &= \frac{a^2}{OB} = \frac{3^2}{2} = 4.5 \\ O\tilde{C} &= \frac{a^2}{OC} = \frac{3^2}{1} = 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  диаметр инвертированной сферы  $\tilde{C}\tilde{B} = 9 + 4.5 = 13.5$ .

Следовательно, радиус инвертированной сферы  $O_2\tilde{C} = 6.75$ , где  $O_2$  – центр инвертированной сферы. Для определения положения точек на инвертированной сфере можно использовать следующие соотношения:

$$O\tilde{D} = \frac{a^2}{OD}, \quad O\tilde{E} = \frac{a^2}{OE}, \quad \text{и так далее.}$$

Если введена система координат, то можно просто проводить прямые линии  $O\tilde{D}$ ,  $O\tilde{E}$  и так далее, и смотреть координаты соответствующих точек (ибо инвертированная сфера уже построена).

### Пример применения метода инверсий

Построим функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.

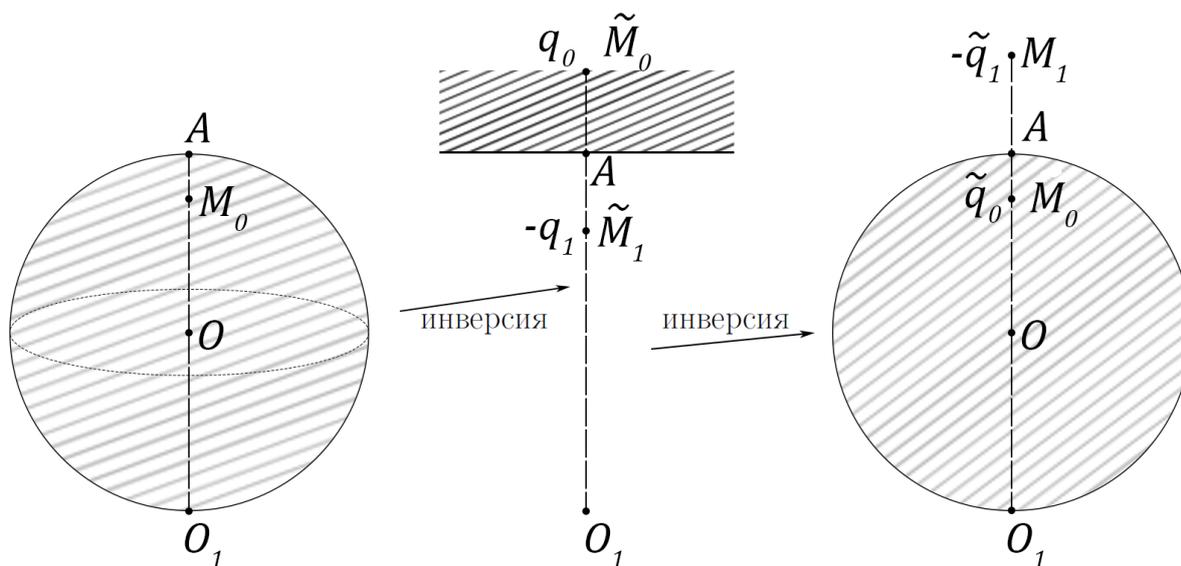


Рис. 64: Инверсия и обратная инверсия для шара

Здесь  $O_1$  – центр инверсии, радиус инверсии  $a = 2R$ , где  $R$  – радиус сферы. Сделаем инверсию сферы: построим заряд-изображение  $\tilde{M}_1$  для

точки  $\widetilde{M}_0$  относительно плоскости и вернемся к исходной сфере посредством ещё одной инверсии. Мы получим заряд-изображение в точке  $\widetilde{M}_1$ . Найдём его положение. Пусть  $OM_0 = \rho_0$ . Согласно преобразованию инверсии:

$$O_1\widetilde{M}_0 = \frac{a^2}{O_1M_0} = \frac{4R^2}{\rho_0 + R}. \quad (7.49)$$

Так как  $\widetilde{M}_1$  – изображение  $\widetilde{M}_0$ , то  $A\widetilde{M}_0 = A\widetilde{M}_1$ .

$$\begin{aligned} O_1\widetilde{M}_1 &= O_1A - A\widetilde{M}_1 = 2R - A\widetilde{M}_0 = 2R - (O_1\widetilde{M}_0 - O_1A) = \\ &= 2R - \left(\frac{4R^2}{O_1M_0} - 2R\right) = 4R - \frac{4R^2}{O_1M_0}. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Найдём положение заряда после второй инверсии:

$$O_1M_1 = \frac{a^2}{O_1\widetilde{M}_1} = \frac{4R^2}{4R - \frac{4R^2}{O_1M_0}}. \quad (7.51)$$

$$\begin{aligned} OM_1 &= O_1M_1 - OO_1 = \frac{4R^2}{4R - \underbrace{\frac{4R^2}{O_1M_0}}_{\rho_0}} - R = \\ &= \frac{4R^2(\rho_0 + R)}{4R \cdot \rho_0 + 4R^2 - 4R^2} - R = \frac{R(\rho_0 + R)}{\rho_0} - R = \frac{R^2}{\rho_0}, \end{aligned} \quad (7.52)$$

что соответствует формуле (7.30). Итак, методом инверсии мы нашли положение заряда-изображения.

Теперь найдём соотношение между величинами исходного заряда  $\widetilde{q}_0$  и заряда-изображения  $\widetilde{q}_1$ . При построении заряда-изображения для полупространства выбрали  $q_1 = q_0$ . В соответствии с теоремой об инверсии:

$$\widetilde{q}_1 = q_1 \cdot \frac{a}{O_1\widetilde{M}_1}, \quad (7.53)$$

$$\widetilde{q}_0 = q_0 \cdot \frac{a}{O_1\widetilde{M}_0}, \quad (7.54)$$

$$\frac{\widetilde{q}_1}{\widetilde{q}_0} = \frac{O_1\widetilde{M}_0}{O_1\widetilde{M}_1} = \frac{\frac{4R^2}{\rho_0 + R}}{4R - \frac{4R^2}{\rho_0 + R}} = \frac{R}{\rho_0}, \quad (7.55)$$

что соответствует величине заряда-изображения в формуле (7.31).

**Замечание**

В процессе доказательства использовался тот факт, что если на исходной поверхности потенциал равен 0, то на инвертированной поверхности он также будет равен 0 (см. формулу (7.43)).

**7.11 Функция Грина внешней задачи Дирихле для двух касающихся шаров**

Пусть область  $\Omega$  – внешность двух одинаковых касающихся сфер радиусов  $R$ .

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = f. \end{cases} \quad (7.56)$$

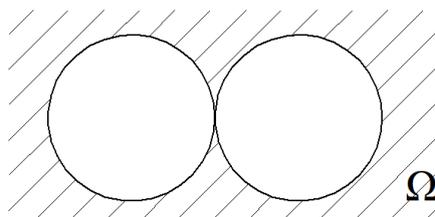


Рис. 65: Задача Дирихле для двух шаров

1) Выберем центр инверсии в точке касания шаров, радиус инверсии  $a = 2R$ . Инверсия переводит область  $\Omega$  в слой между двумя параллельными плоскостями на расстоянии  $2a$ , а единичный заряд в точке  $M_0(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  в заряд величиной  $\frac{a}{r_0}$  в точке  $\tilde{M}_0(\frac{a}{r_0}, \theta_0, \varphi_0)$  (точки  $M_0$  и  $\tilde{M}_0$  записаны в сферических координатах с началом координат в центре инверсии).

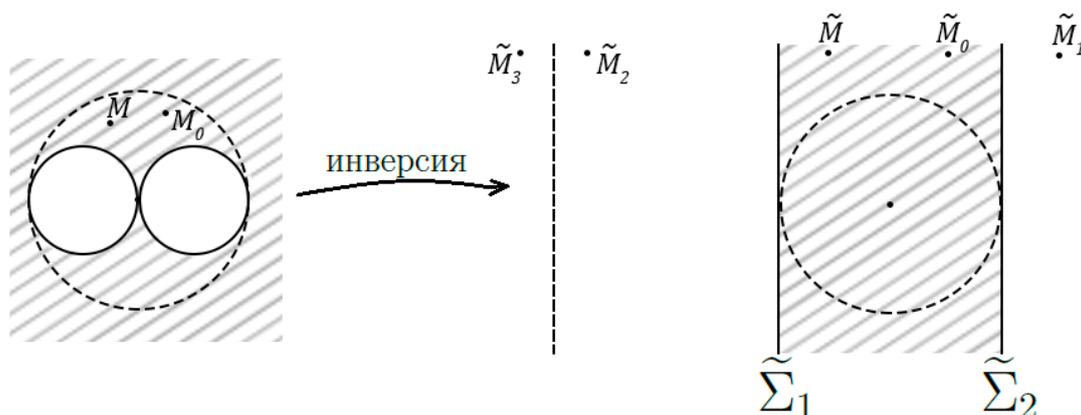


Рис. 66: Первая инверсия

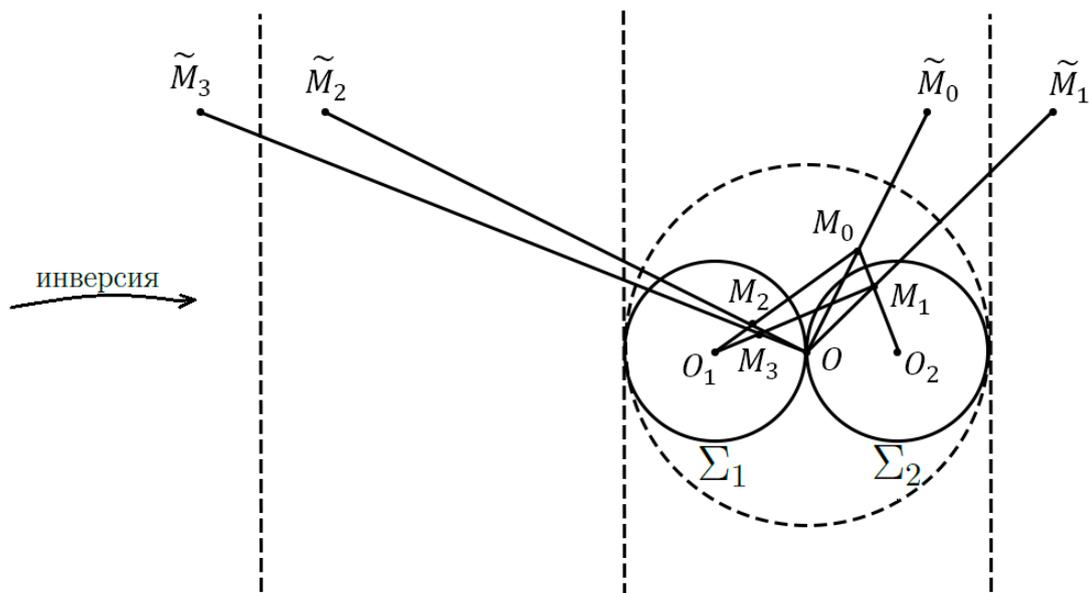


Рис. 67: Результат второй инверсии

Объясним построение инвертированных точек после второй инверсии. Для  $\tilde{M}_0$  строим инвертированную точку  $M_0$ . Она лежит на луче  $O\tilde{M}_0$ , так как углы  $\theta$ ,  $\varphi$  при инверсии не меняются (см. формулу (7.43)).

Точка  $M_1$  лежит на луче  $O\tilde{M}_1$ , так как она получается из  $\tilde{M}_1$  инверсией. С другой стороны,  $\tilde{M}_1$  является изображением  $\tilde{M}_0$  относительно плоскости  $\tilde{\Sigma}_2$ . Следовательно,  $M_1$  есть изображение  $M_0$  относительно сферы  $\Sigma_2$ , то есть  $M_1$  лежит на луче  $O_2M_0$ . Таким образом, точка  $M_1$  – пересечение лучей  $O\tilde{M}_1$  и  $O_2M_0$ .

Точки  $M_2$  и  $M_3$  получаются инверсией точек  $\tilde{M}_2$  и  $\tilde{M}_3$ , то есть они лежат на лучах  $O\tilde{M}_2$  и  $O\tilde{M}_3$  соответственно. С другой стороны, точки  $\tilde{M}_2$  и  $\tilde{M}_3$  являются изображениями точек  $\tilde{M}_0$  и  $\tilde{M}_1$  относительно плоскости  $\tilde{\Sigma}_1$ . Следовательно,  $M_2$  и  $M_3$  есть изображения точек  $M_0$  и  $M_1$  относительно сферы  $\Sigma_1$ , то есть они лежат на лучах  $O_1M_0$  и  $O_1M_1$  соответственно. Итак,  $M_2$  есть пересечение  $O\tilde{M}_2$  и  $O_1M_0$ ,  $M_3$  – пересечение  $O\tilde{M}_3$  и  $O_1M_1$ . Продолжим построение функции Грина.

2) Сделав первую инверсию, выпишем функцию Грина задачи Дирихле

для слоя:

$$G(\widetilde{M}, \widetilde{M}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\frac{a}{r_0}}{4\pi R_{\widetilde{M}\widetilde{M}_i}} - \frac{\frac{a}{r_0}}{4\pi R_{\widetilde{M}\widetilde{M}_{i+1}}} \right), \quad (7.57)$$

где заряды-изображения  $\widetilde{M}_i$  получаются последовательным отражением относительно плоскостей.

**3)** Исходный заряд в точке  $\widetilde{M}_0$  и заряды-изображения имеют величины  $\frac{a}{r_0}$  и координаты  $\widetilde{M}_0(\widetilde{r}_0, \theta_0, \varphi_0)$  и  $M_i(\widetilde{r}_i, \theta_i, \varphi_i)$  соответственно, где  $\widetilde{r}_0 = \frac{a^2}{r_0}$ .

**4)** После инверсии получим исходный заряд и заряды-изображения величиной  $\frac{a}{r_0} \cdot \frac{a}{\widetilde{r}_i} = \frac{\widetilde{r}_0}{\widetilde{r}_i}$  в точках  $\widetilde{M}_i(\frac{a^2}{\widetilde{r}_i}, \theta_i, \varphi_i)$ .

**5)** Функция Грина исходной задачи строится как сумма потенциалов исходного заряда и зарядов-изображений:

$$G(M, M_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\frac{\widetilde{r}_0}{\widetilde{r}_i}}{4\pi R_{MM_i}} - \frac{\frac{\widetilde{r}_0}{\widetilde{r}_{i+1}}}{4\pi R_{MM_{i+1}}} \right), \quad (7.58)$$

где  $R_{MM_i}$  – расстояние между точками  $M$  и  $M_i$ .

## Глава 8. Уравнение Гельмгольца

Распространение волн в пространстве описывается волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \Delta V + f \quad (8.1)$$

– неоднородное волновое уравнение, где  $f$  – вынуждающая сила, порождающая колебания. Впрочем, и без вынуждающей силы колебания в пространстве могут существовать. Тогда они будут описываться однородным волновым уравнением.

Сделаем от уравнения (8.1) преобразование Фурье по времени  $t$ .

### *Замечание*

Прямое преобразование Фурье:

$$u(x, y, z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x, y, z, t) e^{-i\omega t} dt. \quad (8.2)$$

При преобразовании Фурье дифференцирование переходит в умножение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow (i\omega)^2.$$

После преобразования Фурье по времени  $t$  уравнение (8.1) примет вид:

$$(i\omega)^2 u = a^2 \Delta u + F, \quad \text{где } F(x, y, z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, t) e^{-i\omega t} dt.$$

$$a^2 \Delta u + \omega^2 u = -F \Leftrightarrow \Delta u + \underbrace{\frac{\omega^2}{a^2}}_{=C} u = -\frac{F}{a^2} \Leftrightarrow \Delta u + Cu = -\frac{F}{a^2} \quad (8.3)$$

– неоднородное уравнение Гельмгольца. Соответственно:

$$\Delta u + Cu = 0, \quad \text{где } u = u(x, y, z) \quad (8.4)$$

– однородное уравнение Гельмгольца.

**Второй способ вывода уравнения Гельмгольца**

Рассмотрим неоднородное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \Delta V + F, \quad (8.5)$$

$$\text{где } F(x, y, z, t) = f(x, y, z, \omega) \cdot e^{i\omega t}, \quad (8.6)$$

$\omega$  – частота вынуждающей силы.

**Замечание**

Выбор гармонической вынуждающей силы не умаляет общность задачи, так как любая вынуждающая сила может быть представлена как линейная комбинация гармонических.

$$F(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{– интеграл Фурье.}$$

Решение уравнения (8.5) ищем в виде:

$$V = u \cdot e^{i\omega t}. \quad (8.7)$$

Подставляя (8.7) в (8.5), получаем:

$$\begin{aligned} (i\omega)^2 u e^{i\omega t} &= a^2 \Delta u e^{i\omega t} + f \cdot e^{i\omega t} \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{a^2 e^{i\omega t}} \\ \Leftrightarrow \Delta u + \underbrace{\frac{\omega^2}{a^2}}_{=C} u &= -\frac{f}{a^2} \quad \Leftrightarrow \Delta u + Cu = -\frac{f}{a^2}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

**8.1 Задача Дирихле для уравнения Гельмгольца**

$$\begin{cases} \Delta + Cu = 0 & \text{в } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ – однородное уравнение Гельмгольца} & (8.9) \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x, y, z) & \text{– начальное условие} & (8.10) \end{cases}$$

Рассмотрим различные варианты значений  $C$  :

$C < 0$ : задача Дирихле имеет единственное решение.

$C = 0$ : получаем уравнение Лапласа  $\Delta u = 0$ . Задача Дирихле для уравнения Лапласа имеет единственное решение.

$C > 0$ : в общем случае единственности решения задачи Дирихле нет (существуют такие значения  $C$ ).

Теорема единственности решения задачи Дирихле доказывается на основании принципа максимума (минимума).

### Принцип максимума (минимума)

Решение  $u(M)$  уравнения  $\Delta u + Cu = 0$  ( $C < 0$ ), определенное внутри некоторой области  $\Omega$ , не может достигать во внутренних точках  $\Omega$  положительных максимальных (и отрицательных минимальных) значений.

Доказательство:

От противного. Пусть в точке  $M(x_0, y_0, z_0)$  достигается положительный максимум.

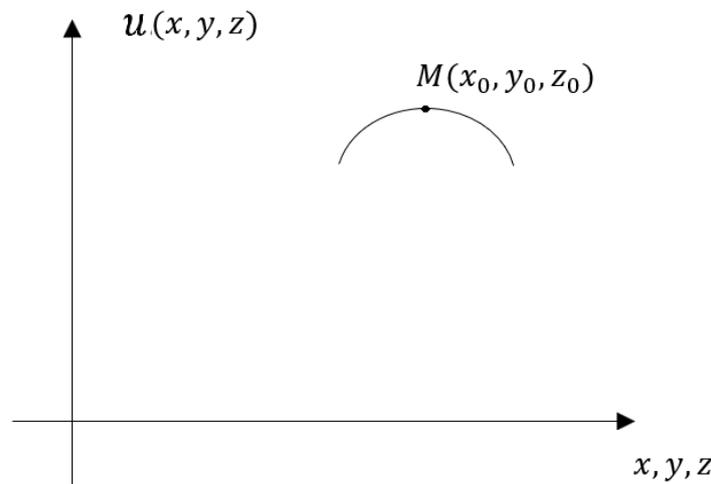


Рис. 68: К доказательству принципа максимума

Тогда:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_M \leq 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_M \leq 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_M \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta u \Big|_M \leq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} u \Big|_M > 0 \\ C < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Cu \Big|_M < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_M \leq 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_M \leq 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_M \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta u \Big|_M \leq 0 \\ \left. \begin{array}{l} u \Big|_M > 0 \\ C < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Cu \Big|_M < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (\Delta u + Cu) \Big|_M < 0,$$

то есть уравнение Гельмгольца не выполнено в точке  $M$ . Противоречие. Аналогично для отрицательного минимального значения.

■

### Теорема единственности задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца

Задача Дирихле для уравнения Гельмгольца:

$$\begin{cases} \Delta u + Cu = -f, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases} \quad (8.11)$$

при  $C < 0$  имеет единственное решение.

Доказательство:

От противного. Пусть есть два решения:  $u_1$  и  $u_2$ . Рассмотрим разность  $V = u_1 - u_2$ . Тогда функция  $V$  будет удовлетворять следующей задаче:

$$\begin{cases} \Delta V + CV = 0, \\ V|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (8.12)$$

На границе области  $V|_{\partial\Omega} \equiv 0$ . Следовательно, по принципу максимума (минимума) во всей области  $V|_{\partial\Omega} \equiv 0$ , то есть  $u_1 = u_2$ , решения совпадают.

■

## 8.2 Формулы Грина для оператора Гельмгольца в пространстве $\mathbb{R}^3$

Первая формула Грина для оператора Лапласа (формула (4.31)):

$$\iiint_{\Omega} u \Delta V d\Omega = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial V}{\partial n} d\Sigma - \iiint_{\Omega} \nabla u \nabla V d\Omega. \quad (8.13)$$

Добавим к обеим частям уравнения  $\iiint_{\Omega} k^2 u V d\Omega$ :

$$\iiint_{\Omega} u(\Delta V + k^2 V) d\Omega = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial V}{\partial n} d\Sigma - \iiint_{\Omega} (\nabla u \nabla V - k^2 u V) d\Omega. \quad (8.14)$$

Введем оператор  $\mathcal{L}V = \Delta V + k^2V$  – оператор Гельмгольца. Тогда формула (8.14) переписется в виде:

$$\iiint_{\Omega} u \mathcal{L}V d\Omega = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial V}{\partial n} d\Sigma - \iiint_{\Omega} (\nabla u \nabla V - k^2 u V) d\Omega \quad (8.15)$$

– первая формула Грина для оператора Гельмгольца.

Вторая формула Грина для оператора Лапласа (формула (4.34)):

$$\iiint_{\Omega} (u \Delta V - V \Delta u) d\Omega = \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma. \quad (8.16)$$

Добавим и вычтем  $k^2 u V$  в подынтегральном выражении в тройном интеграле:

$$\iiint_{\Omega} \left( u \underbrace{(\Delta V + k^2 V)}_{\mathcal{L}V} - V \underbrace{(\Delta u + k^2 u)}_{\mathcal{L}u} \right) d\Omega = \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma \quad (8.17)$$

– вторая формула Грина для оператора Гельмгольца.

Третья формула Грина выводится аналогично третьей формуле Грина для оператора Лапласа (формула (4.40)). Найдем такую функцию  $V(M)$ , которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца и имеет особенность типа  $\frac{1}{R}$ , где  $R$  – расстояние между точками  $M$  и  $M_0$ . Запишем уравнение Гельмгольца:  $\Delta V + CV = 0$  в сферических координатах  $(r, \theta, \varphi)$  и будем искать его решение в виде  $V = V(r)$ .

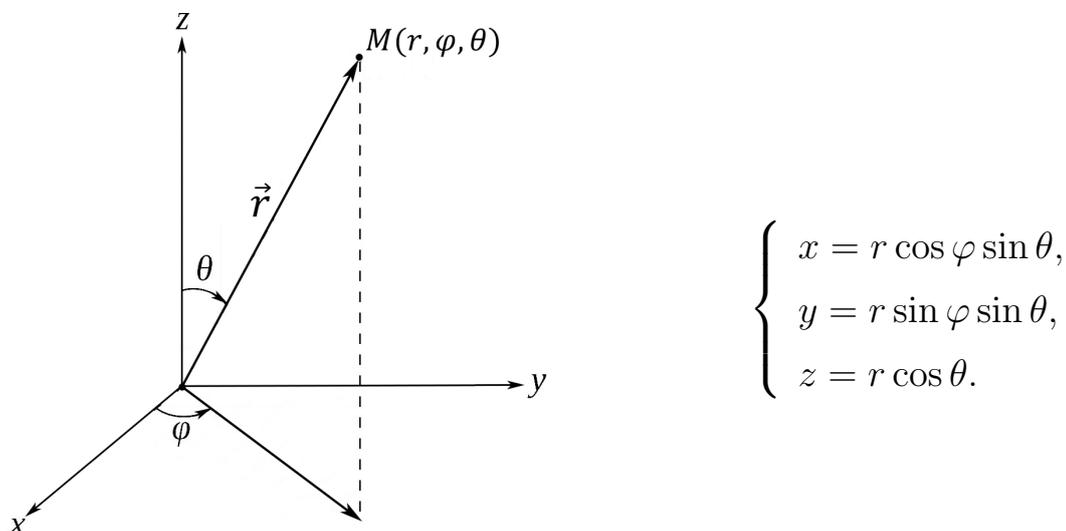


Рис. 69: Сферические координаты

Оператор Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}. \quad (8.18)$$

Учитывая, что  $V = V(r)$ , получаем:

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right). \quad (8.19)$$

Уравнение Гельмгольца в сферических координатах примет вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right) + CV = 0. \quad (8.20)$$

Сделаем замену:

$$V = \frac{w(r)}{r}. \quad (8.21)$$

Найдем производные:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{w' \cdot r - w}{r^2},$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right) = \frac{d}{dr} (w' \cdot r - w) = w'' \cdot r + w' - w' = w'' \cdot r.$$

Подставим в уравнение (8.20):

$$\frac{w''}{r} + \frac{Cw}{r} = 0 \Leftrightarrow w'' + Cw = 0. \quad (8.22)$$

1 случай:  $C = k^2 > 0$ . Тогда:

$$w = C_1 e^{ikr} + C_2 e^{-ikr}, \quad V = C_1 \frac{e^{ikr}}{r} + C_2 \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (8.23)$$

2 случай:  $C = -\kappa^2 < 0$ . Тогда:

$$w = C_1 e^{-\kappa r} + C_2 e^{\kappa r}, \quad V = C_1 \frac{e^{-\kappa r}}{r} + C_2 \frac{e^{\kappa r}}{r}. \quad (8.24)$$

### **Замечание**

Посмотрим, какой физический смысл имеют найденные решения в случае  $C > 0$ :  $\frac{e^{ikr}}{r}$ ,  $\frac{e^{-ikr}}{r}$ . Вернемся к волновому уравнению. Его решение  $V$  было связано с решением уравнения Гельмгольца  $u$  по формуле (7):

$$V = u e^{i\omega t}.$$

Значит, найденным нами решениям отвечают следующие решения волнового уравнения:

$$\frac{e^{i(-kr+\omega t)}}{r}, \quad \frac{e^{i(kr+\omega t)}}{r}. \quad (8.25)$$

Легко видеть, что это расходящаяся и, соответственно, сходящаяся сферические волны.

Получим третью формулу Грина. Пусть  $u$  – дважды непрерывно дифференцируемая функция в области  $\Omega$ . Функция  $V = \frac{e^{ikR}}{R}$  имеет разрыв в точке  $M_0 \Rightarrow$  непосредственно применить вторую формулу Грина в области  $\Omega$  к функциям  $u$  и  $V$  нельзя. Вырежем из области  $\Omega$  шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $M_0$  и поверхностью  $\Sigma_\varepsilon$ . Обозначим его за  $B_\varepsilon$ .

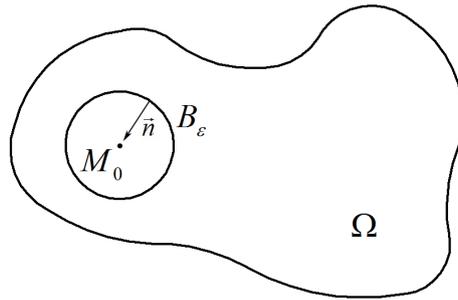


Рис. 70: Область  $\Omega$  с вырезанным из нее шаром  $B_\varepsilon$

В области  $\Omega \setminus B_\varepsilon$  вторую формулу Грина применить возможно:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \left( u \underbrace{\mathcal{L} \frac{e^{ikR}}{R}}_{=0} - \frac{e^{ikR}}{R} \mathcal{L} u \right) d\Omega = \\ & \left/ \mathcal{L} \frac{e^{ikR}}{R} = 0 \text{ ибо мы уже проверили, что функция } V = \frac{e^{ikR}}{R} \right. \\ & \left. \text{удовлетворяет уравнению Гельмгольца: } \mathcal{L} V = (\Delta + k^2)V = 0 \right/ \\ & = \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) - \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma + \iint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) d\Sigma - \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial u}{\partial n} d\Sigma. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Внешняя нормаль к области  $\Omega \setminus B_\varepsilon$  на поверхности шара  $B_\varepsilon$  будет направлена по радиусу внутрь шара, следовательно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) \Big|_{\Sigma_\varepsilon} &= - \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) \Big|_{R=\varepsilon} = \left( -\frac{ik}{R} e^{ikr} + \frac{1}{R^2} e^{ikr} \right) \Big|_{R=\varepsilon} = (-ik\varepsilon + 1) \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon^2} \\ \Rightarrow \iint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) d\Sigma &= (-ik\varepsilon + 1) \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon^2} \iint_{\Sigma_\varepsilon} u d\Sigma \quad \begin{array}{c} = \\ \uparrow \\ \text{теорема о среднем} \end{array} \\ &= (-ik\varepsilon + 1) \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon^2} \cdot u(M_1) \cdot \underbrace{4\pi\varepsilon^2}_{\text{площадь сферы}}, \end{aligned} \quad (8.27)$$

где  $u(M_1)$  – значение функции  $u$  в некоторой точке  $M_1$  на поверхности  $\Sigma_\varepsilon$ .

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial u}{\partial n} d\Sigma = \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\Sigma \quad \begin{array}{c} = \\ \uparrow \\ \text{теорема о среднем} \end{array} \quad 4\pi\varepsilon \cdot e^{ik\varepsilon} \cdot \frac{\partial u}{\partial n}(M_2), \quad (8.28)$$

где  $M_2$  – некоторая точка на поверхности  $\Sigma_\varepsilon$ .

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  получим следующее:

$$1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-ik\varepsilon + 1) e^{ik\varepsilon} \cdot u(M_1) \cdot 4\pi = 4\pi u(M_0).$$

$$2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{4\pi\varepsilon \cdot e^{ik\varepsilon}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}(M_2)}_{\text{ограничена}} = 0.$$

Производная  $\frac{\partial u}{\partial n}(M_2)$  – ограниченная функция, так как  $u$  дважды непрерывно дифференцируема.

3) По определению несобственного интеграла:

$$\iiint_{\Omega} \left( -\frac{e^{ikR}}{R} \mathcal{L}u \right) d\Omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \left( -\frac{e^{ikR}}{R} \mathcal{L}u \right) d\Omega.$$

Делаем предельный переход и получаем третью формулу Грина:

$$\begin{aligned} - \iiint_{\Omega} \frac{e^{ikR}}{R} \mathcal{L}u d\Omega &= \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{R} \right) - \frac{e^{ikr}}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma + 4\pi u(M_0). \\ u(M_0) &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{R} \right) - \frac{e^{ikr}}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{e^{ikR}}{R} \mathcal{L}u d\Omega \end{aligned} \quad (8.29)$$

– третья формула Грина для оператора Гельмгольца.

Для случая  $C = -\kappa^2$  имеет место аналогичная формула:

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-\kappa r}}{R} \right) - \frac{e^{-\kappa r}}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{e^{-\kappa R}}{R} \mathcal{L}u d\Omega. \quad (8.30)$$

### 8.3 Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$\begin{cases} \Delta u + Cu = 0 & \text{в } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}, \quad \text{где } C = -\kappa^2 < 0. \quad (8.31)$$

Пусть функция  $V$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца:  $\mathcal{L}V = 0$ . Тогда вторая формула Грина (8.17) примет вид:

$$\oint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma + \iiint_{\Omega} V \mathcal{L}u d\Omega = 0. \quad (8.32)$$

Из формулы (8.30) вычтем (8.32):

$$\begin{aligned} u(M_0) = & - \oint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-\kappa R}}{4\pi R} + V \right) - \left( \frac{e^{-\kappa R}}{4\pi R} + V \right) \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Sigma - \\ & - \iiint_{\Omega} \left( \frac{e^{-\kappa R}}{4\pi R} + V \right) \mathcal{L}u d\Omega. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Пользуясь возможностью произвольного выбора функции  $V$ , выбираем её следующим образом:

$$V|_{\Sigma} = -\frac{e^{-\kappa R}}{4\pi R}. \quad (8.34)$$

Тогда формулу (8.33) можно переписать в виде:

$$u(M_0) = - \oint_{\Sigma} u \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma - \iiint_{\Omega} G \cdot \mathcal{L}u d\Omega, \quad (8.35)$$

$$\text{где } G(M, M_0) = \frac{e^{-\kappa R}}{4\pi R} + V \quad (8.36)$$

– функция двух точек:  $M_0(x, y, z)$  и  $M(\xi, \eta, \zeta)$ .

Точка  $M_0$  фиксирована  $\Rightarrow x, y, z$  играют роль параметров.

#### Определение

Функция  $G(M, M_0)$  есть функция Грина задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца, если она удовлетворяет следующим условиям:

1)  $G(M, M_0)$  как функция точки  $M(\xi, \eta, \zeta)$  при фиксированной точке

$M_0(x, y, z)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца:  $\mathcal{L}G = 0$ ,  $M \neq M_0$  во всех точках  $M$  области  $\Omega$  кроме точки  $M = M_0$ .

2)  $G(M, M_0)$  представима в виде (8.36), где функция  $V = V(M, M_0)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца:  $\mathcal{L}V = 0$ .

$G(M, M_0) = \frac{e^{-\kappa R}}{4\pi R_{MM_0}} + V$ ,  $V$  называется компенсирующей функцией.

3)  $G(M, M_0)$  на границе обращается в 0 :

$$G(M, M_0) \Big|_{M \in \Sigma} = 0.$$

### Замечание

Условию 3 можно удовлетворить, если потребовать, чтобы:

$$V \Big|_{M \in \Sigma} = -\frac{e^{-\kappa R}}{4\pi R}.$$

Формула (8.35) даёт решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = -f & \text{внутри } \Omega, \\ u \Big|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases}$$

$$u(M_0) = - \iint_{\Sigma} \varphi \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma + \iiint_{\Omega} G \cdot f d\Omega. \quad (8.37)$$

Соответственно, решение задачи (8.31) для однородного уравнения имеет вид:

$$u(M_0) = - \iint_{\Sigma} \varphi \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma. \quad (8.38)$$

### Замечание

Функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца можно строить методом изображений, но работать это будет только в случае плоской границы области: полупространство, двугранный угол, слой между двумя параллельными плоскостями (либо в случае прямой границы области, если работаем в  $\mathbb{R}^2$ ). Для сферических поверхностей типа круга, шара и так далее метод изображений не работает.

## Контрольные вопросы

Контрольные вопросы для самопроверки. Вопросы сгруппированы по главам.

### Глава 1. Одномерное волновое уравнение

1. Каков общий вид решения волнового уравнения?
2. Как связана скорость распространения волны с коэффициентами волнового уравнения?
3. Как следует продолжать начальные условия в случаях жесткого и свободного закреплений концов струны?
4. Что такое характеристика?
5. В каком виде следует искать решение волнового уравнения методом разделения переменных?
6. Как следует решать задачу о вынужденных колебаниях струны?

### Глава 2. Одномерное уравнение теплопроводности

1. В каком виде следует искать решение уравнения теплопроводности методом разделения переменных?
2. Как следует решать задачу при наличии источников тепла?
3. Как решать задачу с неоднородными краевыми условиями?
4. В каком виде ищется решение уравнения теплопроводности методом подобия?
5. Что такое автомодельное решение?
6. Что такое уравнение Бюргерса и что оно описывает?
7. Что такое солитон для уравнения Кортевега-де-Фриза?

### Глава 3. Уравнение Лапласа

1. Какие физические системы может описывать уравнение Лапласа?
2. Как выглядит оператор Лапласа в полярных координатах?
3. В каком виде ищется решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге?
4. Чем отличаются виды решений задач Дирихле для уравнения Лапласа в круге и кольце?
5. Какие особенности имеет процедура решения задачи в прямоугольнике по сравнению с задачей в круге?

### Глава 4. Теоремы единственности

1. На чем основано доказательство теоремы единственности для уравнения струны?
2. На чем основано доказательство теоремы единственности для уравнения теплопроводности?
3. Как связаны первая и вторая формулы Грина?
4. Как меняется третья формула Грина, если участвующая в ней функция – гармоническая?
5. Как меняются формулы Грина в двумерном случае по сравнению с трехмерным?
6. Что такое принцип максимума для уравнения Лапласа?
7. Какие следствия формул Грина используются в доказательстве теоремы единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа
8. Что такое формально сопряженный дифференциальный оператор?

9. Как выглядит формула интегрирования по частям в  $n$ -мерном случае?

### **Глава 5. Классификация линейных уравнений в частных производных 2-го порядка**

1. Какова связь преобразования уравнения второго порядка при замене переменных с теорией квадратичных форм?
2. Какова процедура приведения квадратичной формы к сумме квадратов ортогональным преобразованием?
3. Сколько есть типов линейных уравнений в частных производных второго порядка?
4. Как классифицируются линейные уравнения в частных производных второго порядка?
5. Каков альтернативный способ приведения уравнения в частных производных второго порядка к каноническому виду в случае двух переменных?

### **Глава 6. Функция Грина обыкновенного дифференциального оператора**

1. Как определяется функция Грина обыкновенного дифференциального оператора?
2. Какова процедура построения функции Грина обыкновенного дифференциального оператора?
3. Что позволяет найти функция Грина обыкновенного дифференциального оператора?
4. Что такое задача Штурма-Лиувилля?

5. Как упрощается процедура построения функции Грина для задачи Штурма-Лиувилля?
6. Как использовать функцию Грина в задаче Штурма-Лиувилля с неоднородными краевыми условиями?

## **Глава 7. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа**

1. Как определяется функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном случае?
2. На чем основано доказательство инвариантности функции Грина относительно перестановки аргументов?
3. Как найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа с помощью функции Грина?
4. Чем отличается определение функции Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае?
5. Что такое метод изображений и на чем он основан?
6. Для каких двугранных углов можно построить функцию Грина методом изображений?
7. Что такое метод инверсий и на чем он основан?

## **Глава 8. Уравнение Гельмгольца**

1. Какова связь уравнения Гельмгольца с распространением волн?
2. Чем отличаются формулы Грина для операторов Гельмгольца и Лапласа?
3. Как определяется функция Грина задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в трехмерном случае?

4. Как определяется функция Грина задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в двумерном случае?
5. Как найти решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца с помощью функции Грина?

## Список литературы

- [1] Арнольд В.И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук – первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов. Москва: Ленанд. 2020, 96 с.
- [2] Блинова И.В., Попов И.Ю. Простейшие уравнения математической физики. Санкт-Петербург: СПбГУ ИТМО, 2009, 60 с.
- [3] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1988, 512 с.
- [4] Джексон Д. Классическая электродинамика. Москва: Мир, 1965, 702 с.
- [5] Колоколов И.В., Кузнецов Е.А., Мильштейн А.И., Подивилов Е.В., Черных А.И., Шапиро Д.А., Шапиро Е.Г. Задачи по математическим методам физики. Москва: Книжный дом “Либроком”, 2009, 288 с.
- [6] Лобанов И.С., Попов А.И., Попов И.Ю., Трифанов А.И. Типовой расчет по математической физике. Учебно-методическое пособие. Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2018, 39 с.
- [7] Попов И.Ю. Математическая физика. Санкт-Петербург: СПбГУ ИТМО, 2005, 104 с.
- [8] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том 2. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2017, 842 с.
- [9] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: МГУ, Наука, 2004, 798 с.

Попов Антон Игоревич  
Попов Игорь Юрьевич

## **Основные уравнения математической физики**

**Учебное пособие**

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

**Редакционно-издательский отдел**  
**Университета ИТМО**  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49