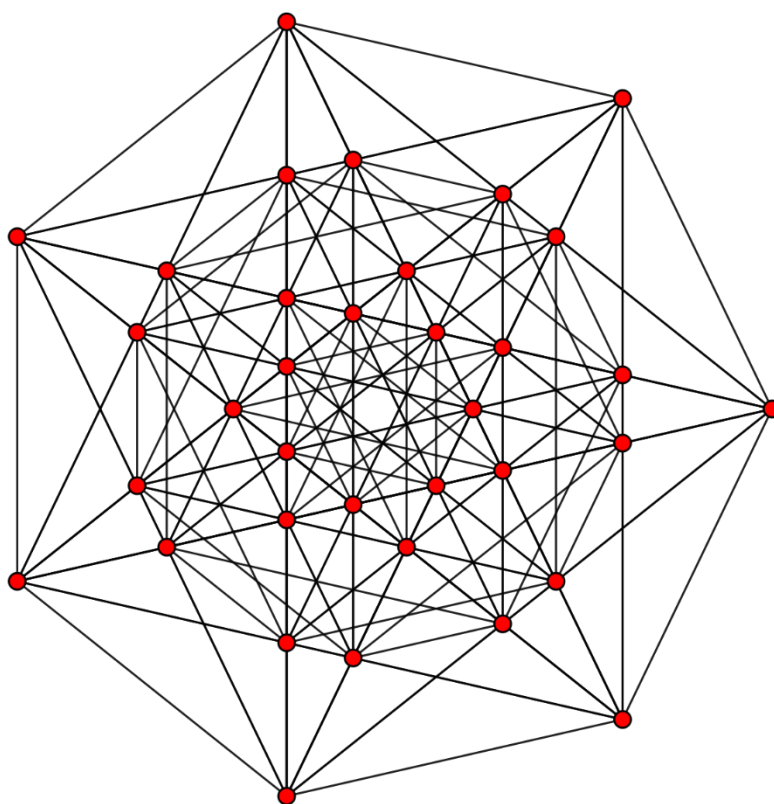


А.Г. Певнева, М.Е. Калинкина
МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ



Санкт-Петербург
2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.Г. Певнева, М.Е. Калинкина
МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ
ИТМО

по направлению подготовки 10.03.01 Информационная безопасность
в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных
образовательных программ высшего образования бакалавриата



Санкт-Петербург
2020

Певнева А.Г., Калинкина М.Е., Методы оптимизации– СПб: Университет ИТМО, 2020. – 64 с.

Рецензент(ы):

Ананченко Игорь Викторович, кандидат технических наук, доцент, доцент (квалификационная категория "доцент практики") факультета инфокоммуникационных технологий, Университета ИТМО.

В пособии рассматривается широкий круг задач математического программирования. Изложены аналитические и численные методы решения задач оптимизации. Применение каждого метода иллюстрируется решениями типовых примеров. Приведены задачи для самостоятельного решения. Целью данного пособия является первоначальное знакомство с алгоритмами оптимизации, а также формирование понимания идейных основ этих алгоритмов. Учебное пособие предназначено для обучения бакалавров по направлению подготовки 10.03.01 "Информационная безопасность", специальности 10.03.01 - "Организация и технология защиты информации" факультета безопасности информационных технологий по дисциплине "Методы оптимизации".



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2020
© Певнева А.Г., Калинкина М.Е., 2020

Содержание

Список использованных сокращений.....	5
Введение.....	6
1 Общие понятия теории оптимизации.....	8
1.1 Назначение методов оптимизации.....	9
1.1.1 Решение задачи оптимизации при проектировании систем.....	11
1.1.2. Задачи оптимизации в ходе распознавания объектов.....	14
1.2. Обзор задач и методов оптимизации.....	16
1.2.1. Постановка общей задачи оптимизации.....	16
1.2.2 Локальная и глобальная оптимизация.....	18
1.2.3 Условная и безусловная оптимизация.....	18
1.2.4. Линейная и нелинейная оптимизация.....	19
1.2.5 Непрерывная, дискретная, целочисленная оптимизация.....	20
1.2.6 Одно- и многокритериальная оптимизация.....	21
1.2.7. Классификация методов оптимизации.....	23
Контрольные вопросы.....	28
2 Задача линейного программирования.....	29
2.1 Прямая и двойственная задачи линейного программирования	29
2.1.1 Экономическая интерпретация.....	33
2.1.2 Интерпретация модели линейного программирования в информационной безопасности.....	34
2.2.1 Графический метод решения.....	37
2.2.2 Описание симплекс метода	38
2.2.3 Решение задачи оптимизации средствами MS Excel.....	44
2.2.4 Некорректные случаи задачи линейного программирования	50
2.3 Анализ решения задачи линейного программирования.....	54
2.3.1 Графический анализ чувствительности к изменению коэффициентов	

целевой функции.....	55
2.3.2 Чувствительность решения к изменению ограничений.....	57
2.3.3 Анализ решения с помощью теории двойственности.....	58
2.4 Задачи для выполнения.....	59
Контрольные вопросы	61
Литература.....	62

Список использованных сокращений

ГА – генетические алгоритмы

ЗО – задача оптимизации

ЗЛП – задача линейного программирования

ИБ – информационная безопасность

ИТ – информационные технологии

ИС – информационные системы

ЛП – линейное программирование

ММ – математическое моделирование

МО – методы оптимизации

СМО системы массового обслуживания

ЭВМ – электронно-вычислительная машина

ЦФ – целевая функция

Введение

Теория оптимизации — это область прикладной математики, которая объединяет теоретические обоснования и исследования алгоритмических реализаций методов наиболее эффективного управления различными системами. Управление понимается как процесс, имеющий выраженную цель. Зная закономерности протекания процесса, можно строго сформулировать наилучшие условия для достижения цели. Однако надо четко понимать, что все теоретические выводы должны быть подтверждены расчетами, основанными на измеренных данных, и эти расчеты обязательно проведены с погрешностью, поэтому следует быть осторожным с категоричными выводами.

Задачи оптимизации (ЗО) многообразны, как и задачи управления. Это можно увидеть по выпадающим вариантам запросов поисковой системы. В общем случае слова «оптимальный» и «наилучший» являются синонимами (от лат. Optimum). Критерий оптимальности — это, по сути, критерий выбора элемента из некоторого множества. Выбранный элемент должен наилучшим образом удовлетворять некоторым условиям.

Термин "оптимум" применил Готфрид Вильгельм Лейбниц в рассуждениях о философии и теологии. Иногда происхождение этого слова в латыни связывают с именем богини древнеиталийского племени сабинов Опы (богиня плодородия, урожая и богатства).

В развитии теории оптимизации значительную роль сыграл советский математик Леонид Витальевич Канторович, сформулировавший задачу линейного программирования для оптимизации экономических показателей и несколько методов ее решения. В СССР, однако, его разработки вызвали серьезные противодействия, прежде чем были окончательно приняты. [1] Термин «программирование» понимался тогда как «планирование». В 1975 году Л.В. Канторович получил Нобелевскую премию по экономике «за вклад в развитие в теорию распределения ресурсов». Формулировка наиболее общего метода решения оптимизационных задач - симплекс-метода принадлежит Джорджу Бернарду Данцигу. Прежде всего, его заслуга состоит в обобщении методик для случая задач большой размерности.

Данное пособие является первой частью изложения лекционного материала по теории оптимизации. Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 10.03.01 «Информационная безопасность» (Бакалавриат).

Пособие состоит из двух разделов. В первом разделе подробно освещены основные понятия теории оптимизации, дается исчерпывающая информация о месте и роли оптимизационных задач в общей структуре научного исследования, разработки и проектирования систем. Приводится полная характеристика ЗО с примерами и описание различных методологий, применяемых в алгоритмах оптимизации.

Второй раздел описывает решение 3О распределения ресурсов как с точки зрения максимизации выгоды, так и двойственной минимизации убытков.

Пособие содержит варианты для выполнения самостоятельного задания. Задание состоит из двух частей: в первой части следует решить задачу линейного программирования (ЛП). Так как в задаче две переменных, можно воспользоваться графическим методом. Необходимо провести анализ чувствительности задачи. Во второй части студентам предлагается составить интерпретацию задачи ЛП в сфере оценки рисков информационной безопасности. Данные в задаче могут быть произвольными, решение предусматривает использование симплекс- метода.

Глава 1. Общие понятия теории оптимизации

Оптимизация – определение условий существования объекта или протекания процесса, при которых достигается наилучшее значение какого-либо свойства этого объекта или процесса.

До второй половины 20 века, то есть до появления вычислительных машин, применения методов оптимизации (МО) носили частный характер. Высокая размерность задач и сложность параметрических зависимостей требовали большой вычислительной работы. В настоящее время МО встроены в основные автоматизированные системы для проектирования производств.

При постановке задачи оптимизации (ЗО) необходимо осмыслить оптимизируемый объект (систему) и цель оптимизации, то есть «что и где надо улучшить». При этом следует стремиться, чтобы в каждой ЗО определялось экстремальное значение лишь одного свойства объекта, так как практически всегда оптимизируемые свойства находятся в некотором смысловом противоречии: «качество» - «количество», «оперативность» - «точность» и т.д. Свойство объекта (системы), определяющее цель оптимизации – это **критерий оптимизации**. Например, предложение "Получить максимальную производительность при минимальной себестоимости" представляет собой неправильную постановку ЗО, так как поставлена задача поиска экстремумов двух свойств системы. В этом случае лучше рассмотреть два варианта ЗО:

1) найти максимальную производительность при фиксированной себестоимости. Здесь критерий оптимизации – производительность;

2) найти минимальную себестоимость при фиксированной производительности. Здесь критерий – себестоимость.

Далее необходимо осознать, от чего зависит критерий оптимизации, то есть влияющие величины, которые можно изменять произвольно. Это очень важный этап осознания ЗО, потому что именно он определяет способ численной оценки критерия. Необходимо также четко осознать, каким условиям должны удовлетворять элементы, влияющие на этот критерий. Таким образом формируется **множество оптимизации**.

На основании выбранного критерия оптимальности составляется целевая функция, представляющая собой зависимость критерия оптимальности от параметров, влияющих на ее значение. Вид критерия оптимальности или целевой функции определяется конкретной ЗО.

Таким образом, **ЗО сводится к нахождению экстремума целевой функции.**

1.1 Назначение методов оптимизации

Как правило, задача оптимизации ставится как часть системного исследования объекта или процесса, так что МО применяются на стадии проектирования процессов в системе для определения параметров, входных данных или управляющих воздействий, обеспечивающих наиболее приемлемое значение какого-либо свойства системы. Это свойство является критерием в каждой конкретной задаче. С точки зрения формального моделирования при этом решается **обратная задача** (Рисунок 1.1). В ходе обратной задачи математического моделирования необходимо определить такие наборы параметров, входных данных или управляющих воздействий, при которых результат расчетов будет удовлетворять установленным требованиям. Эти требования различны: экономические (прибыль или убытки), технологические, экологические, социальные (например, обеспечение информационной безопасности (ИБ) предприятия) в зависимости от проектируемой системы.

Обратная задача является в общем случае **некорректной**, так как не имеет единственного решения: один и тот же результат может быть достигнут на различных наборах входных данных и параметров. В общем случае множество таких наборов бесконечно. Поэтому МО необходимы для выбора из всего множества исходных наборов данных наиболее подходящих.

Если свойство системы формулируется в виде оператора, функции или функционала, то решается **задача оптимального синтеза**. Например, в простейших задачах экономической оптимизации необходимо найти параметры предприятия, при которых от реализации достигается максимальная прибыль. Если же в задаче необходимо найти параметры моделируемой системы, при которых рассчитанные по модели результаты наиболее точно отражают результаты эксперимента, то речь идет о **задаче распознавания**. В том и в другом случае ставится ЗО, причем для ее решения применяются самые различные методы.

Анализируя диаграмму на рисунке 1.1, можно заметить, что обязательным этапом в процессе исследования математической модели является решение прямой задачи. Решение обратной задачи представляет собой выбор оптимального в каком-либо смысле решения прямой задачи из множества решений, полученных при различных наборах входных данных и параметров модели.

Решение прямой задачи представляет собой расчет по формулам, реализующим математическую модель. Входные данные и параметры при этом полагаются известными. Но компьютерные реализации численных методов всегда имеют погрешности вычислений. Эти погрешности могут накапливаться и оказывать влияние на итоговое решение. Следует быть очень внимательным к оценке погрешностей.

В общем случае множеством оптимизации является объединение множеств векторов P параметров модели системы и множества входных данных – полученных в ходе эксперимента или назначаемых произвольно. Критерии, как сказано выше, формулируются исходя из цели моделирования.



Рисунок 1.1. Общая схема научного исследования

1.1.1 Решение задачи оптимизации при проектировании систем

Как говорилось выше, оптимальный синтез – определение таких значений входных данных, параметров и управляющих воздействий, при которых значение критерия оптимизации системы становится экстремальным.

В ходе проектирования системы на основе модельного описания рассматриваются: **принцип действия, структурный синтез, параметрический синтез** [2-6]. Задачи оптимального проектирования также подразделяют на:

- задачи выбора оптимального принципа действия;
- задачи структурной оптимизации;
- задачи параметрической оптимизации.

На уровне выбора оптимального принципа действия используются эвристические методы, которые, однако, опираются на знание базовых законов, принятых в современной концепции естествознания, например, законов сохранения или взаимодействия геофизических полей. В целом же ещё не выведены такие методы и критерии, которые бы позволили дать полную и точную картину поведения объекта в реальных условиях на основе ограниченного объема экспериментальных измерений, чтобы выбрать наиболее подходящий принцип действия.

На втором уровне проводится структурный оптимальный синтез системы, то есть поиск ее наилучшей структуры. Задача поиска оптимальной системы сводится к комбинаторной задаче, часто очень большой размерности. В её основе чаще всего лежит представление структуры в виде графов, сравнительный анализ структур на основе ограниченного числа параметров, синтез исследуемых структур [5,6].

В качестве примера простейшего структурного синтеза рассмотрим структурный анализ обслуживания информационной системы с позиции обнаружения в ней уязвимостей с возможностью последующей реализации атаки [7].

Пример 1.1.

Используя статистические данные, определяются входные величины:

λ - **интенсивность возникновения уязвимости** (число обнаруженных уязвимостей в фиксированный период времени).

μ - **интенсивность устранения уязвимостей**, то есть число устраненных одним специалистом. Работа специалиста ИБ здесь понимается как канал обслуживания.

Для структурного синтеза строится модель, определяющая P_{0Y} - вероятность того, что в системе устранены Y уязвимостей. При этом Y - коэффициент готовности информационной системы к безопасной работе в отношении возникновения уязвимостей одного типа. Очевидно, система должна быть спроектирована так, чтобы значения этой величины при известных допущениях были бы максимальными. В данной упрощенной

модели определяется необходимое количество обслуживающих специалистов в зависимости от статистически определенных параметров λ и μ .

Для проведения расчетов используют схему случайного процесса «гибели и размножения» [7], которая играет важную роль в теории систем массового обслуживания (СМО). В терминах теории СМО специалисты понимаются как обслуживающие каналы, а обнаруженная уязвимость – как заявка на обслуживание.

Графы состояния случайного процесса выявления и устранения уязвимостей представлены на рисунке 1.2: состояния - следующие:

S_0 – в системе нет уязвимостей;

S_1 – в системе выявлена и не устранена 1 уязвимость;

S_2 – в системе выявлены 2 неустранённые уязвимости;

S_n - в системе выявлено R неустранённых уязвимостей.

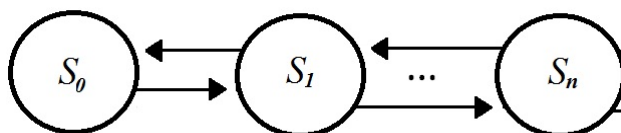


Рисунок 1.2. Схема «гибели и размножения»

Очевидно, что состав коллектива специалистов зависит от соотношения λ/μ . В [7] приводится пример расчета вероятностей состояний по формулам, справедливым для процесса гибели и размножения для коллектива из одного (таблица 1.1) и из двух (таблица 1.2.) специалистов.

Таблица 1.1 – Вероятность состояний для одноканальной системы

P_{Ry}	ρ				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
P_{0y}	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50
P_{1y}	0,09	0,16	0,21	0,24	0,25
$P_{R \geq 2y}$	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25

Таблица 1.2 - Вероятность состояний для двухканальной системы

P_{Ry}	ρ						
	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9

P_{0y}	0,74	0,68	0,60	0,56	0,51	0,47	0,43
P_{1y}	0,23	0,27	0,32	0,34	0,36	0,38	0,39
P_{2y}	0,03	0,05	0,08	0,10	0,13	0,15	0,18
$P_{R \geq 3y}$	0	0	0	0	0	0	0

Анализ этих таблиц показывает, что при $\rho \leq 0,2$ допустимо проектировать один канал обслуживания. Если же $\rho > 0,2$ необходимо использовать двухканальную СМО.

Отметим далее, что статистическая оценка параметра ρ зависима от многих условий эксплуатации, а также от субъективного мнения экспертов, поэтому неполнота исходных данных не позволяет произвести однозначный выбор даже на такой простой модели.

Третий уровень оптимального проектирования - параметрическая оптимизация. Задача параметрической оптимизации состоит в определении наилучших значений параметров системы для выбранной структуры с учетом всех требований. Надо найти экстремальное значение функции, зависящей от параметров системы, с учетом ограничений на параметры. Как раз на этом этапе применяются многообразные алгоритмы оптимизации, разработанные как эвристически, так и в рамках строгой теории.

Законы, описывающие процессы, протекающие в системе (математическая модель), могут быть весьма сложны с математической точки зрения. Множество оптимизации также может иметь сложную структуру. Например, часть параметров может принимать только натуральные значения, как число реакторов или их конструктивных составляющих, или быть дискретным (например, стандартные значения шага резьбы). Зависимости параметров могут быть нелинейными, кусочно-нелинейными. Целевые функции зачастую многоэкстремальны, имеют вид «оврагов» или «плато».

Для решения таких задач используются методы математического программирования. Термин «программирование» исторически употреблялся для обозначения «синтеза системы» или «планирования». Он не имеет отношения к современному программированию, в смысле написания кода.

1.1.2. Задачи оптимизации в ходе распознавания объектов

Целью научного исследования объекта, процесса, системы не всегда является проектирование. Существует целый класс обратных задач, в которых не требуется находить структуру и параметры «оптимальной конструкции». Их можно условно обозначить термином «задачи распознавания». Значения параметров объекта, системы, управляющие воздействия на протекающие процессы требуется определить так, чтобы наилучшим способом приблизиться к измеренным результатам работы этого объекта.

Примером служат обратные задачи геологической разведки. В ходе разведывательных работ необходимо определить форму и глубину залегания месторождения по измеренным значениям геологических полей. Математические модели полей представляют собой поверхностные интегралы. Вычисляя этот интеграл для разных параметров подынтегральной функции или множества интегрирования, можно получить множество расчетных значений поля. После этого необходимо сравнить полученные расчетные значения с измеренными на местности. Тот набор расчетных параметров, для которого рассчитанные значения поля «наиболее близки» к экспериментальным, даст «образ» формы и глубины залегания месторождения. Заметим, что вычисление поверхностного интеграла – это решение так называемой прямой задачи моделирования. Оно трудоемко, и возможны значительные вычислительные погрешности. МО должны использоваться в данной задаче в ходе поиска наиболее подходящих наборов параметров подынтегральной функции или множества интегрирования. Целевой функцией (критерием) служит невязка между расчетным значением интеграла и экспериментальными значениями полей.

В формализованном представлении задача распознавания есть определение значений X и/или P , при которых расчетное по модели значение Y наиболее близко к известному (полученному экспериментально), то есть необходимо найти минимум невязки:

$$\min_{X, P} \rightarrow \|Y - Y^*\|, \quad (1.1)$$

Именно формулировкой критерия задача распознавания отличается от задачи оптимального синтеза.

Пример 1.2. Рассмотрим модельный, упрощенный вариант задачи распознавания. Пусть на плоскости даны координаты 20 точек (рисунок 1.3а). Необходимо выбрать такой треугольник, образованный тремя точками, форма и площадь которого наиболее близка к образцу (рисунок 1.3б). Графическое представление и малый объем данных задачи позволяет решить ее не пользуясь формальными методами. На рисунке 1.3а цветом выделен «наиболее похожий» треугольник. Расчет площади тоже не представляет труда: $S=(5 \cdot 3)/2=7,5$.

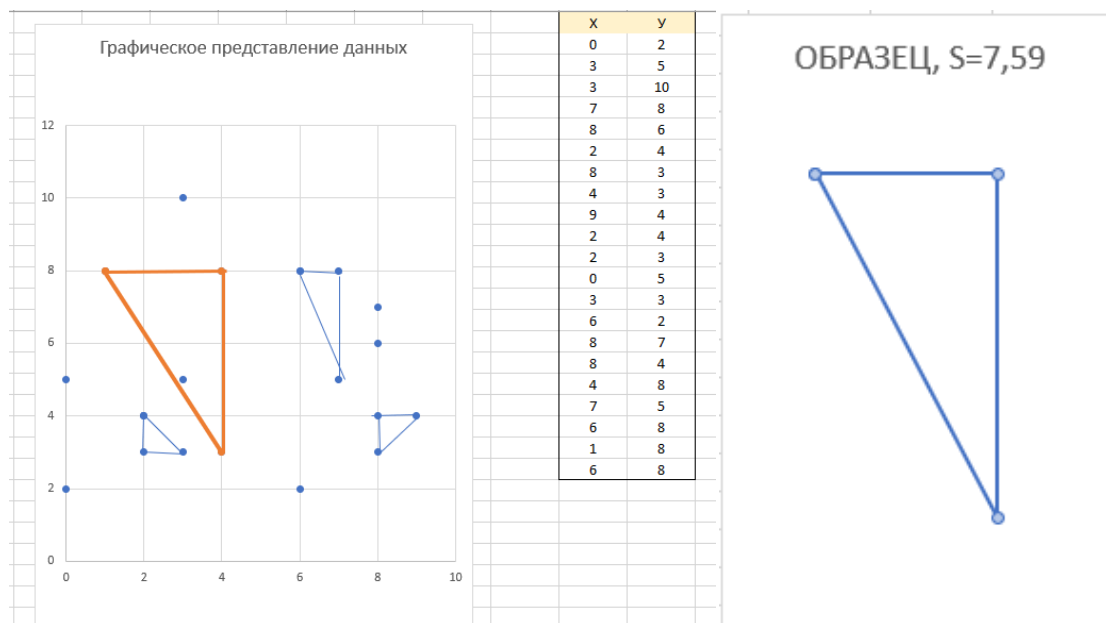


Рисунок 1.3 – а - координаты точек на плоскости, б – решение задачи распознавания.

Однако при увеличении объема данных всего лишь в два раза задача уже не выглядит такой элементарной в общем случае необходимо:

1. построить все треугольники на этом множестве точек;
2. выделить среди них прямоугольные, у которых катеты параллельны осям;
3. вычислить их площади;
4. методом полного перебора найти набор точек, образующий треугольник, наиболее близкий к образцу.

С увеличением числа точек метод перебора будет все более трудоемким, поэтому потребуются стратегии, которые его ограничивают. Эти стратегии предоставляют МО. На рисунке 1.4 представлено решение задачи распознавания треугольника заданной формы и площади среди множества точек.

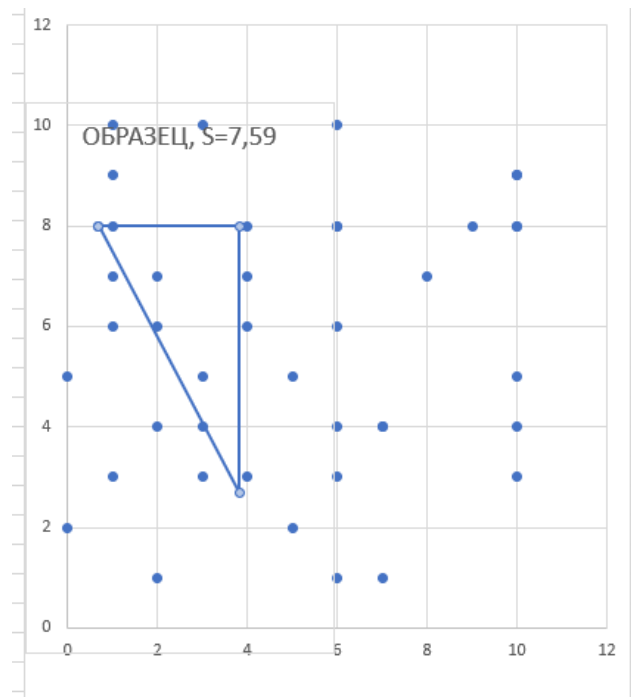


Рисунок 1.4 –Распознавание искомого треугольника увеличении числа точек

1.2. Обзор задач и методов оптимизации

1.2.1. Постановка общей задачи оптимизации

Многообразие ЗО обусловлено различными прикладными интерпретациями, общая постановка ЗО содержит два основных компонента [8-16].

1. Целевая функция (критерий оптимизации)

$$F(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad F(x): R^n \rightarrow R. \quad (1.2)$$

2. Множество оптимизации D (область допустимых значений), не только определяется по функции $F(x)$, но и ограничениями в виде неравенств, которые имеют прикладную интерпретацию:

$$g_j(x) \geq 0. \quad (1.3)$$

Условия могут задаваться равенствами:

$$h_k(x) = 0. \quad (1.4)$$

Необходимо найти $X^{opt} = \underset{x \in D}{\operatorname{Arg\,min}} F(x)$ $X^{opt} \in D \subset R^n$ и значение экстремума $F(X^{opt})$ при соблюдении ограничений I рода $h_k(x) = 0 \quad k = \overline{1, K}$, и ограничений II рода $g_j(x) \geq 0, \quad j = \overline{1, J}$.

Число n , являющееся размерностью пространства, называется **размерностью ЗО**.

Таким образом, в ЗО три основных компонента:

1. Целевая функция (критерий) оптимизации.
 2. Область определения аргументов целевой функции - множество оптимизации.
 3. Ограничения, налагаемые на аргументы целевой функции.
- Все ЗО можно классифицировать по виду этих компонент и по условиям, налагаемым на них.

Далее рассмотрены основные классы ЗО с указаниями методов решения.

1.2.2 Локальная и глобальная оптимизация

Поиск локально-оптимальных решений

В локальной задаче необходимо найти какой-либо аргумент во множестве оптимизации, доставляющий минимум целевой функции. [14,15,16] То есть X_{lopt} — точка локального минимума, если существует такая окрестность этой точки, полностью лежащая во множестве оптимизации, что значение функции в любой точке из этой окрестности меньше, чем в точке локального минимума. Более строго: точка $\hat{y} \in Q$ называется точкой локального минимума функции $f(y)$ на множестве Q , если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для всех $y \in Q$ таких, что $|y - \hat{y}| < \varepsilon$ выполняется $f(\hat{y}) \leq f(y)$.

Как правило, тогда, когда точность приближенной оценки y^0 глобально-оптимального решения неудовлетворительна, ставится задача уточнения этого значения локальными методами. В этом случае точка y^0 — это начальное приближение для метода локального поиска. Пусть

$$F(x) \rightarrow \min_{x \in X},$$

где функция цели $F(x)$ — многоэкстремальная, невыпуклая и не принадлежит определенному классу гладкости на всем допустимом множестве $X \subset R_k$.

Рассмотрим множество локально-оптимальных решений:

$$X^{lopt} = \{x \in X \mid \forall x' \in B_\varepsilon(x) \cap X \exists \varepsilon > 0 : F(x) < F(x')\} \quad (1.5)$$

Задача глобальной оптимизации состоит в определении точки x_{opt} ,

$$x_{opt} \in X^{opt}, \text{ такой, что } F(x_{opt}) < F(x).$$

В общем случае, для любой многоэкстремальной функции нельзя гарантировать, что решение задачи будет получено за конечное число шагов, то есть задача глобальной оптимизации неразрешима алгоритмически. Даже некоторые из разрешимых задач могут попасть в класс неразрешимых, так как число шагов, необходимых для получения решения, может быть чрезмерно большим.

1.2.3 Условная и безусловная оптимизация

Задача безусловной оптимизации состоит в нахождении минимума или максимума функции в отсутствие каких-либо ограничений [17,18]. В постановке 3О отсутствуют условия 1-го и 2-го типов, таким образом, получается, что все множество оптимизации совпадает с областью D допустимых значений функции цели $D \subset R^N$. Большинство практических 3О содержит ограничения.

Изучение методов безусловной оптимизации важно с нескольких точек зрения. Во-первых, ограничения в виде неравенств представляют собой границы множества оптимизации, то есть, фактически, определение этого множества. Ограничения в виде равенств предполагают поиск подходящего направления и последующей минимизации вдоль этого направления. Обоснование методов безусловной оптимизации может быть естественным образом распространено на обоснование процедур решения задач с ограничениями.

К задачам условной оптимизации относится задача распределения ресурсов. Критерием здесь служит выражение, определяющее цель использования ресурсов – прибыль, безопасность, и т.д. На ресурсы накладываются естественные ограничения: например, на производстве нельзя назначить «бесконечное рабочее время». В случае линейного критерия задача сводится в задаче ЛП, которая подробно рассмотрена во 2-й главе. Здесь же в качестве примера приведем одну из ее интерпретаций [21-23].

Пример 1.3. Имеется m предприятий, на которых нужно разместить заказ n видов продукции в объемах x_j^* , $j=1,2,\dots,n$. Известна $C=\{c_{ij}\}_{m \times n}$ – затратная матрица, каждый элемент которой c_{ij} – общие затраты i -го предприятия на выполнения j -го вида продукции. Мощность каждого предприятия ограничена временными ресурсами T_i . Обозначим $X=\{x_{ij}\}_{m \times n}$ план заказов, здесь x_{ij} – количество времени, затраченное i -м предприятием на изготовление продукции. Требуется составить план размещения заказа так, чтобы заказ был выполнен с минимальными технологическими затратами при имеющихся производственных возможностях.

1.2.4. Линейная и нелинейная оптимизация

В зависимости от того, к какому классу принадлежит критерий $F(x)$ и ограничения $g(x)$ и $h(x)$, $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, различают следующие виды задач:

I. Если $F(x)$, $g_i(x)$ и $h(x)$, – линейные, т.е. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_i x_i$, то ставится задача линейной оптимизации (линейного программирования).

II. Если функция $F(x)$, или ограничения $g_i(x)$, $h(x)$, либо все вместе нелинейны, то ставится задача нелинейной оптимизации. Они также классифицируются по виду нелинейного критерия.

а) Если указанные функции можно отнести к классу выпуклых (вогнутых), то ставится задача выпуклой (вогнутой) оптимизации. Более широкий класс целевых функций определяется условием Липшица.

Если для любых точек x и x' , принадлежащих отрезку $[a, b]$, приращение функции удовлетворяет неравенству [24]:

$$|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|^\alpha, \quad (1.6)$$

где $0 < \alpha \leq 1$ и M — некоторая постоянная, то говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α на отрезке $[a, b]$, и пишут:

$$Mf(x) \in Lip\alpha, \alpha > 0. \quad (1.7)$$

Если критерий $F(x)$ имеет вид квадратичной зависимости, т.е.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i x_j, \quad (1.8)$$

а ограничения линейны $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b_i$, то ставится задача квадратичного программирования.

с) Если критерий и ограничения относятся к классу мультипликативных (позиномных) функций, то ставится задача геометрического программирования: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = cx_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ — позином, где a и c — вещественные числа.

1.2.5 Непрерывная, дискретная, целочисленная оптимизация

Если в ЗО все функции $F(x), g_i(x), h_i(x)$ непрерывны на множестве допустимых значений, то можно говорить о непрерывной ЗО.

Если же какая-либо из функций не задана как непрерывная, или множество оптимизации является дискретным, то говорят о дискретной ЗО. Примером задач дискретной оптимизации являются все задачи поиска в теории конечных графов — поиск кратчайших путей, поиск циклов и контуров минимального веса, поиск потока минимальной стоимости [25-29]. Естественным подмножеством задач дискретной оптимизации являются задачи целочисленной оптимизации. К этому классу принадлежат все комбинаторные оптимальные задачи, то есть оптимизационные задачи, где допустимым множеством оптимизации является множество всех возможных перестановок. Примером может служить задача о назначениях, далее приводится ее общая формулировка [26,27].

Имеется некоторое число работ и некоторое число исполнителей. Любой исполнитель может быть назначен на выполнение любой (но только одной) работы, но с неодинаковыми затратами. Нужно распределить работы между исполнителями так, чтобы выполнить работы с минимальными затратами.

Эта формулировка очень созвучна задаче из примера 1.3. Дело в том, что задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи,

которая, в свою очередь, есть частный случай задачи нахождения потока минимальной стоимости.

Пусть X — некоторое конечное или счетное множество с численными координатами $X - x_{i,j} = 1, r$. Тогда получаем целочисленную ЗО. Можно задать множество X как совокупность всех целочисленных решений некоторой системы линейных (нелинейных) неравенств. В этом случае получаем целочисленную ЗО с линейными (нелинейными) ограничениями.

Теперь рассмотрим множество X , состоящее из точек $(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s)$, где x_j принимает только целочисленные значения ($j = 1, r$), а y_j изменяется в интервале $a_j \leq y_j \leq b_j, a_j < b_j, (j = 1, s)$.

Тогда получаем смешанную целочисленную ЗО. В ней присутствуют как целочисленные переменные y_j , так и непрерывные переменные y_j . Аналогично характер ограничений, которым удовлетворяют точки (x, y) , определяет смешанную целочисленную ЗО с линейными (нелинейными) ограничениями.

1.2.6 Одно- и многокритериальная оптимизация

Если в задаче целевая функция представляет собой единственный критерий, то есть требуется минимизировать одно свойство системы, то речь идет об однокритериальной (скалярной) минимизации. Методология решения таких задач хорошо разработана. Многокритериальная оптимизация, когда критерий представляет собой вектор-функцию, где каждый компонент – оценка различных свойств, представляет собой перспективное научное направление.

Так как оптимизируемые свойства системы часто противоречат друг другу, как, например, в ЗО многоуровневой сети в теории надежности, то найденное решение является не наилучшим, а компромиссным. Компромисс разрешается введением тех или иных дополнительных ограничений или субъективных предположений. Таким образом, единственное решение такой задачи не существует, и эта задача в общем случае является некорректной. Вопросы многокритериальной оптимизации выходят за рамки данного пособия, ниже рассмотрим лишь некоторые подходы к их решению [30, 31].

Оптимизация по Парето представляет собой выделение области компромиссов и отбрасывание заведомо неудовлетворительных решений. Идея его близка к идее метода ветвей и границ, только в этом случае выделяется каким-либо способом множество допустимых решений, и это множество разбивается на множество худших и множество нехудших решений. Для худшего решения существует другое, значения критериев у которого либо такие же, либо лучше текущего. Решение, для которого во множестве допустимых решений не существует лучшего по всем

критериям, называется нехудшим. Замена одного решения из этого множества на другое ведет к улучшению одних критериев и обязательному ухудшению других.

В ходе оптимизации по Парето наибольшее усечение области допустимых решений достигается для двух критериев. При увеличении числа критериев эффективность этого метода падает. Если критериев более 5, применение этого метода считается нецелесообразным.

Замена критериев ограничениями состоит в решении однокритериальной ЗО в области с более жесткими ограничениями, задаваемой этими критериями и ранее заданными ограничениями.

Пример 1.4 Задачу минимизации массы и потерь энергии изделия сведем к задаче проектирования изделия массы, не превышающей $n\%$, у которого потери не превысят $m\%$. Если в полученной области будет находиться несколько решений, то область ограничений сужается, т.е. уменьшаются m , n , или оба сразу, если же решений нет, то область ограничений расширяется. Этот процесс, по сути, аналогичен выделению нехудших решений по Парето.

Очевидная сложность этой задачи в подборе конкретных параметров для критериев, заменяемых ограничениями.

Сведение задачи к однокритериальной и последующее её решение методами скалярной оптимизации.

Сведение задачи к однокритериальной проводится следующими способами:

- посредством выбора одного критерия из нескольких;
- введения общей единицы измерения для всех критериев;
- свертки нескольких критериев.

Выбор главного критерия, оценивающего существенные для проектирования свойства объекта, является субъективным и базируется на опыте экспертов. Оставшиеся критерии можно заменить ограничениями, параметры которых также определены субъективно.

Учет остальных критериев можно выполнить также на основе ранжирования по уровню важности свойств для проектирования. Далее решается однокритериальная ЗО, но из множества ее решений выбирается то, для которого значение очередного критерия в ранжированном ряду наилучшее.

Свёртка векторного критерия является заменой вектора рассматриваемых критериев функцией от его компонент, таким образом, получается новая целевая функция. Эта функция может быть аддитивной, мультипликативной или не быть ни той ни другой.

Аддитивная функция является суммой отдельных критериев K_i , $i=1, \dots, m$ с учётом их относительной важности λ_i , то есть $f = \sum \lambda_i K_i$. Коэффициент λ_i называется весовым, $\sum \lambda_i = 1$.

Мультипликативная функция — это произведение отдельных критериев с соответствующими степенями λ_i , то есть $f_j = \prod (K_{ij})_i^{\lambda_i}$.

В практике свертка показателей безопасности или их отбрасывание при ранжировании считается недопустимым.

1.2.7. Классификация методов оптимизации

В ходе решения ЗО отсутствуют единые рекомендации по выбору метода. При разработке алгоритмов решения задачи, естественно, учитывать особенности этой задачи. Однако все алгоритмы разработаны в рамках определенных методологических подходов, основные из которых обсуждаются ниже. Необходимо сказать, что наиболее общие методы, например метод множителей Лагранжа, применяются в композиции с другими, например динамическим программированием. Также методы локальной оптимизации часто используются для уточнения глобального оптимума.

В основном методологические подходы к решению ЗО можно разделить на две большие группы: **детерминированные и эвристические методы**.

Детерминированные методы основаны на известных математических свойствах целевой функции — непрерывности, дифференцируемости, монотонности, выполнении условия Липшица. Если в задаче априори имеется информация о таких свойствах целевой функции и доказательство этого факта не представляет труда, то возможно использование методов классического математического анализа, например, метода множителей Лагранжа, градиентных методов поиска, требующих вычисления производных.

К этому классу относятся **методы вариационного исчисления**, которые обычно используют для решения задач, где критерии оптимальности представляются в виде функционалов и решениями которых являются функции. Такие задачи возникают обычно при статической оптимизации процессов с распределенными параметрами или в задачах динамической оптимизации. Эти задачи объединены термином «задачи оптимального управления». Использование вариационных методов здесь приводит решение оптимальной задачи к интегрированию системы дифференциальных уравнений Эйлера. Здесь же надо упомянуть **принцип максимума**, который также применяют в теории управления для решения ЗО процессов, описываемых динамическими системами. Достоинством математического аппарата принципа максимума является то, что решение может определяться в виде разрывных функций. Принцип максимума для динамических систем при некоторых предположениях является достаточным условием оптимальности. Это и есть главное достоинство применения детерминированных методов в теории и практике оптимизации.

В настоящем пособии данные методы не рассматриваются, они подробно описаны, например, в [1,10,18,32,33]. Заметим также, что рассмотренный подробно далее симплекс-метод для задачи линейного программирования также можно отнести к этой группе, так как для его применения надо быть уверенным, что функция цели линейна и непрерывна на заданном многограннике. То же самое можно сказать о методе геометрического программирования решения одного специального класса задач, в которых критерий оптимальности и ограничения задаются в виде мультипликативных степенных функций нескольких переменных (позиномов), т.е. выражений, представляющих собой сумму произведений степенных функций от независимых переменных.

В основе *эвристических методов* лежит итерационная процедура приближения к точке предполагаемого оптимума. В рамках такой процедуры формулируется решающее правило выбора следующего приближения, которое учитывает только информацию о значениях критерия и выполнении ограничений. Для методов, разработанных в рамках эвристического подхода, необходимо доказательство сходимости последовательности приближений к экстремальному значению критерия.

Эвристический подход в конструировании оптимальных алгоритмов получил большое распространение в теории глобальной оптимизации. В рамках этой концепции строятся методы, моделирующие физические, биологические процессы. К ним относятся метод моделирования отжига, генетические алгоритмы, метод роя частиц [32].

Широкое распространение получил *метод динамического программирования*, разработанный для решения 30 многостадийных процессов, особенно тех, в которых состояние каждой стадии характеризуется относительно небольшим числом переменных состояния. Очень часто под динамическим программированием понимается именно разделение процесса на этапы, каждый из которых представляет собой отдельную оптимизационную задачу, т.е. метод декомпозиции задачи по времени. Эта декомпозиция зависит от условий протекания процесса и всегда выполняется эвристически. Но оптимизация каждой стадии может выполняться, в том числе, и рациональными методами, например, используя принцип максимума. Критерий оптимальности задается как аддитивная функция критериев оптимальности отдельных стадий. По существу, метод динамического программирования представляет собой алгоритм определения оптимальной стратегии управления на всех стадиях процесса. Результаты решения обычно представлены в виде таблиц.

Еще одна идея построения эвристических методов состоит в ограничении полного перебора для решения задач дискретной и комбинаторной оптимизации. Наиболее общая реализация этой идеи носит название *метода ветвей и границ* [33].

Применение метода ветвей и границ включает две процедуры: ветвление и нахождение оценок (границ).

Процедура ветвления состоит в разбиении множества оптимизации на подмножества. На границах полученных подмножеств строятся оценки критерия оптимизации. Если нижняя граница значений критерия на подмножестве больше, чем верхняя граница на какой-либо ранее просмотренном подмножестве, то критерий можно исключить из дальнейшего рассмотрения. Минимальную из полученных верхних оценок считают очередным приближением к глобальному минимуму. Далее эта процедура рекурсивно применяется к полученным подмножествам. Построенные таким образом подмножества являются узлами *дерева поиска* или *дерева ветвей и границ*. Если нижняя граница для узла дерева совпадает с верхней границей, то это значение является минимумом функции и достигается на соответствующей подобласти.

Заметим, что тернарный поиск на множестве – это частый случай метода ветвей и границ.

Наконец рассмотрим еще одну подход к построению эвристических итерационных правил – стратегии *случайного поиска*. В [32] приводится теорема о сходимости процесса случайного поиска к глобальному экстремуму. Она является теоретическим основанием применения алгоритмов этого класса. Далее приводим обзорные сведения о наиболее современных методах этого класса.

Генетические алгоритмы (ГА) — это алгоритмы поиска, основанные на моделировании процесса естественного отбора. Они были разработаны Джоном Холландом и Дэвидом Эдвардом Голдбергом в 70-х годах XX столетия и с тех пор достаточно успешно применяются в практике глобальной оптимизации.

В основе ГА лежит процедура скрещивания кодированных элементов множества оптимизации. Таким образом, получается следующее поколение (потомки) элементов. На поколении действует отбор, в роли решающего признака выступает значение критерия ЗО. На следующей итерации скрещиванию подвергаются только элементы с наилучшими значениями признака. На поколении также определена процедура мутации, состоящая в случайном изменении кода случайно выбранных элементов. Заметим, что успех применения ГА, также как успех всех эвристических методов, зависит от удачного выбора параметров поиска и конструкции процедур кодирования и скрещивания.

Метод роя частиц глобальной оптимизации [34,35] основан на идее коллективного интеллекта: индивидуумы объединяются в колонии для улучшения условий существования, каждый индивидуум в колонии в среднем имеет больше шансов на выживание, колония может более эффективно производить поиск, обработку и хранение пищи по сравнению с отдельными

особями и т. д. Таким образом, любая колония в течение всего времени своего существования решает различные, часто многокритериальные ЗО.

В данной модели индивидуумы (частицы) – это элементы множества оптимизации. Пусть число таких элементов – m . Каждая частица занимается поиском наилучшего значения критерия (функции цели или качества). перемещаясь по пространству решений R^n . Траектория поиска каждой частицы – это последовательность приближений к экстремуму из начального приближения. Частицы движутся с различной скоростью $v_i \in R_n$, которая определяет, как изменяются координаты частицы со временем: $x_{i+1} = x_i + \tau v_i$, где τ – некоторая единица измерения скорости, например, продолжительность шага алгоритма. Ключевая особенность метода роя частиц – это пересчет скорости отдельных частиц:

$$v_{i+1} = v_i + \alpha(p_i - x_i) + \beta(g - x_i) \quad (1.9).$$

Здесь первое слагаемое представляет собой инерцию частицы, p_i во втором слагаемом, модель индивидуальной памяти – он равен лучшей точке траектории i -ой частицы за все время ее существования. Говорят, что второе слагаемое реализует принцип простой ностальгии – каждая частица «хочет» вернуться в ту точку, где ею было достигнуто лучшее значение критерия. Заметим, что роевой интеллект основан на обмене информацией между частицами, поэтому в формуле присутствует третье слагаемое, где коэффициенты α и β определяют влияние траекторий других частиц на положение текущей частицы.

Метод роя частиц в основе своей реализует широко известный в теории и практике глобальной оптимизации подход мултистарта [32]. В рамках этого похода выбирается некоторое количество начальных приближений, и процесс поиска запускается из каждого приближения. «Обмен информацией другими частицами» реализуется процедурой сравнения текущих приближений на каждом шаге.

Таким образом, ЗО, понимаемые как задачи поиска наилучшего значения возникли в ходе развития приложений науки. Они являются частью методологии системного анализа объектов, процессов систем. Это подтверждают публикации, предметы исследования в которых принадлежат различным прикладным областям науки и техники [36-39] Описание методов их решения, математические обоснования этих методов составляют существо теории оптимизации. Развитие алгоритмов и МО стало возможным при использовании вычислительной техники.

Контрольные вопросы

1. Определение оптимизации
2. Что такое критерий оптимальности?
3. Некорректная обратная задача
4. Что такое задача оптимального синтеза?
5. Опишите уровни оптимизации
6. Приведите пример структурной оптимизации системы
7. В чём отличие параметрической оптимизации?
8. Компоненты и условия задач оптимизации
9. Что такое локальная оптимизация?
10. Чем глобальная оптимизация отличается от локальной?
11. Определение условной и безусловной оптимизации
12. В чём заключается задача распределения ресурсов и к какому типу оптимизации она относится?
13. Что такое нелинейная оптимизация?
14. Что такое непрерывная оптимизация?
15. Условия для выполнения линейной задачи о назначениях
16. Отличие одно- и многокритериальной оптимизации
17. Определение задачи скалярной оптимизации
18. Дайте пояснение оптимизации по Парето
19. Для чего делают замену критериев ограничениями в ЗО?
20. Какие подходы к решению задач многокритериальной оптимизации наиболее разработаны?
21. Свойства детерминированных методов
22. Для чего применяют принцип максимума?
23. Какие методы относятся к классу эвристических?
24. В чём заключается задача динамического программирования?
25. Что такое дерево поиска?
26. Поясните идею метода роя частиц

Глава 2. Задача линейного программирования

Линейное программирование (ЛП) – глубоко проработанная область исследования операций. Как уже говорилось выше, термин «программирование» здесь употребляется в значении «планирование» или «проектирование». Более современное название раздела «математическое программирование» представляется как «теория принятия оптимальных решений». В целом же речь идет о математической модели, представленной задачей оптимизации, в которой целевая функция, представляющая критерий оптимизации, и функции, представляющие ограничения, являются линейными, т.е. входные переменные математической модели входят в функциональные выражения в степени не выше первой.

Любую задачу ЛП с заданной точностью позволяют решить современные системы компьютерной математики, электронные таблицы (MS Excel, Calc и пр.), также решение возможно в специализированных системах автоматизированного проектирования.

В 1939 году была опубликована работа "Математические методы организации и планирования производства" автора Леонида Витальевича Канторовича, профессора математико-механического факультета Ленинградского государственного университета. Но его идеи и методы не были восприняты советскими руководителями производств, и работы по его внедрению были отложены на неопределенное время. ЛП возродилось в начале 1950-х годов с появлением электронно-вычислительных машин, тогда возродился исследовательский энтузиазм по отношению к оптимизации производства, в том числе, линейному программированию. Было опубликовано большое количество научных работ, например, в 1947 г. А. Данциг разработал алгоритм численного решения задач ЛП, который назвали симплексным методом. Название отражает суть алгоритма – необходимо перебрать все вершины выпуклого многогранника, который и является допустимым множеством. В течение нескольких последующих лет идеи ЛП получили широкое распространение во всем мире, а имена создателей стали широко известными. В 1975 году Л.В. Канторович и Т. Купманс были награждены Нобелевской премией по экономике «за применение теории математического программирования в экономике» [40].

2.1 Прямая и двойственная задачи линейного программирования.

Задача определения максимума линейной формы:

$$F(x) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_n x_n , \quad (2.1)$$

на подмножестве D линейного пространства L , где D задается ограничениями:

$$\begin{aligned} 3x_2 + x_3 &\geq -5; \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1; \\ x_1 + 2x_2 &\leq -3; \\ x_1 &\geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

В каждое неравенство - ограничение вносятся фиктивные переменные x_4, x_5, x_6 , при этом учитывается знак неравенства: в третье неравенство x_6 прибавляется в левую часть, а в первом и втором неравенстве фиктивные переменные вычитаются:

$$\begin{aligned} 3x_2 + x_3 - x_4 &= -5; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 &= 1; \\ x_1 + 2x_2 + x_6 &= -3; \end{aligned}$$

Далее первое и 3-е уравнение умножим на -1, чтобы правые части стали положительными:

$$\begin{aligned} -3x_2 - x_3 + x_4 &= 5; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 &= 1; \\ -x_1 - 2x_2 - x_6 &= 3; \end{aligned}$$

Двойственная задача

Рассмотрим построение двойственной задачи ЛП на основании рассмотренной прямой задачи [41].

Прямая задача:

Найти $\max$
функции

$$F = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

Двойственная задача:

Найти $\min$ функции

$$Z = b_1y_1 + \dots + b_my_m$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1; \\ a_{12}y_1 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2; \\ \dots \\ a_{1n}y_1 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n. \\ y_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

Задачи ЛП являются двойственными (симметричными), если выполнены условия:

1. Коэффициенты c_j при переменных в целевой линейной форме F прямой задачи – это правые части системы ограничений двойственной задачи, и наоборот.

2. В прямой задаче необходимо отыскать максимум линейной формы F , а в двойственной – минимум линейной формы Z .

3. В двойственной задаче меняется знак неравенств со знаком « $\leq$ », на « $\geq$ » и наоборот.

4. Коэффициенты при переменных в системах ограничений описываются транспонированными матрицами.

5. Количество ограничений *прямой задачи* совпадает с количеством переменных *двойственной задачи*.

6. Условия неотрицательности переменных сохраняются

Пример 2.2 Построить двойственную задачу к модели ЛП:

$$\max Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 12$$

$$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 4$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 18$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Запишем целевую функцию для минимизации:

$$\min f = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3.$$

Теперь запишем транспонированные ограничения, поменяв знак неравенств:

$$-y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2;$$

$$3y_1 - y_2 + y_3 \geq 1;$$

$$-5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3.$$

В теории двойственности формулируются следующие утверждения:

Теорема 1. Для прямой и двойственной задач выполняется ровно одно из следующих утверждений:

1. Если одна из задач имеет конечное решение, то и двойственная к ней задача также имеет конечное решение, причём оптимальные значения целевых функций в двойственных задачах равны между собой.
2. Если целевая функция одной из задач не ограничена, то ограничения двойственной задачи противоречивы.
3. Обе задачи не имеют решения одновременно.

Теорема 2. Чтобы пара векторов допустимых планов $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ были оптимальными планами двойственных задач, необходимо и достаточно выполнение равенств:

$$y_i(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.3)$$

$$x_i(\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j - c_i) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

2.1.1 Экономическая интерпретация

Стандартная задача ЛП

Примерами практической ситуации, математическую модель которой можно представить в виде ЗЛП, являются задача о диете, а также задача о составлении плана производства [40-44].

В задаче о диете составляется наиболее экономный (то есть наиболее дешевый) рацион питания, удовлетворяющий требованиям стандартов по питанию. По смыслу переменные модели $x_1, x_2, \dots, x_n$ - это объемы продуктов в рационе.

В задаче о составлении производственного плана предполагается, что на производстве делается n видов товаров $G_1, G_2, \dots, G_n$, с использованием m видов сырьевых ресурсов $R_1, R_2, \dots, R_m$. Очевидно, что запасы ресурсов должны быть ограничены, например, складскими мощностями. Значения этих ограничений – величины $b_1, b_2, \dots, b_m$. Пусть для производства товара G_j требуется a_{j1} первого ресурса, a_{j2} – второго ресурса, и т. д. Числа a_{ji} , $i=1..n$, $j=1..m$ записываются в так называемую технологическую матрицу, или матрицу затрат, или матрицу ограничений:

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} & \begin{matrix} G_1 & G_2 & \dots & G_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Далее, если цены реализации единицы каждого товара $c_1, c_2, \dots, c_n$, то для производства $x_1, x_2, \dots, x_n$ единиц товара $G_1, G_2, \dots, G_n$ потребуется:

[illegible]

Из ограничений на запасы ресурсов, а также очевидных условий неотрицательности переменных имеем систему линейных неравенств-ограничений:

[illegible]

Естественная цель производства – это получение максимальной выручки за производственную продукцию, то есть в задаче необходимо найти такие значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ при которых достигается максимально возможное при выполнении ограничений значение функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (2.7)$$

2.1.2 Интерпретация модели линейного программирования в информационной безопасности

В стандарте NIST 800-30 представлена формула расчёта риска:

$$R = P(t) \cdot S, \quad (2.8)$$

где R – значение риска; $P(t)$ – вероятность реализации угрозы ИБ; s – степень влияния угрозы на актив. В ГОСТ Р ИСО/МЭК ТО 13335-3-2007 расчет риска, в отличие от стандарта NIST 800-30, детализирует понятие вероятности реализации угрозы:

$$R=P(t) \cdot P(v) \cdot S \text{ ,} \quad (2.9)$$

где R – значение риска, $P(t)$ – вероятность реализации угрозы атаки ИБ, $P(v)$ – вероятность наличия уязвимости, S – ценность актива.

Под ценностью актива следует понимать комплексный показатель, включающий эконометрическую оценку всех потерь. Ключевыми значениями в такой оценке являются расчётная стоимости актива и процентная доля актива, открытого перед угрозой. Подробно методика количественной оценки риска описана, например, в [44].

Фактически этот показатель характеризует убытки, которые может понести предприятие в результате атаки на данный актив. Если под активом понимать элемент информационной системы, то суммарный риск от возможных ИБ следует минимизировать при ограничениях, налагаемых на архитектуру информационной системы, например в отделе не более m клиентских рабочих мест на один сервер. Также учитываются ограничения, построенные исходя из здравого смысла, например, стоимость защитных мер

не должна превышать стоимость актива или величину прогнозируемого ущерба, а затраты на реализацию инцидента злоумышленником не превосходят возможную выгоду для него.

Таким образом, можно говорить о задаче структурной оптимизации информационной системы с позиции минимизации рисков.

Задача ЛП, которая является математической моделью, может быть поставлена следующим образом:

пусть X_1 , - количество элементов 1-го типа в информационной системе (ИС), X_2 - количество элементов 2-го типа в информационной системе, и т.д. Под структурными элементами (активами) в данном случае можно понимать как виды программного обеспечения, так и организационные меры и даже психологическое состояние сотрудников. Пусть согласно методике [44] рассчитаны коэффициенты $s_1 \dots s_n$, определяющие убыток от реализации атаки на каждый тип активов ИС. Пусть также путем анкетирования экспертов определены некоторые усредненные по взятому периоду времени значения вероятностей $P_i(t)$ и $P_i(v)$, $i=1..n$. Отдельно выделим важное замечание: в данной математической модели не производится аппроксимация этих вероятностей и не исследуется их закон распределения. Они полагаются известными параметрами модели.

Тогда задача минимизации рисков ИБ сводится к минимизации линейной функции:

$$R = \sum_{i=1}^n p v_i \cdot p t_i \cdot s_i \cdot x_i \rightarrow \min, \quad (2.10)$$

на множестве натуральных чисел.

Пусть далее на использование каждого актива (структурного элемента ИС) наложены ограничения по стоимости:

$$\sum_{k=1}^{m1} a_{kj} \cdot x_k \leq c_j, j = 1 \dots L_1, \quad (2.11)$$

где a_{kj} - стоимость реализации защиты одного актива, L_1 - число ограничений.

Также известны экспертные оценки возможной выгоды от реализации атаки, например, известна сумма, которую готов предоставить конкурент за информацию о базе клиентов:

$$\sum_{k=1}^{m2} a_{kj} \cdot x_k \leq c_j, j = 1 \dots L_2. \quad (2.12)$$

Возможны также другие ограничения, налагаемые спецификой ИС, например, схемой резервирования, размером вычислительных кластеров и т.д.

В результате решения можно получить количественную оценку объема активов в конкретных условиях, определяемых экспертными оценками. Но так

как эти оценки субъективны, в этом случае нельзя ограничиться только решением данной задачи. Необходимо будет провести анализ чувствительности решения к изменениям коэффициентов целевой функции и выявить, таким образом, промежутки изменений, для которых найденное решение не меняет качественно своего положения. Пример такого анализа рассмотрен в пункте 2.2.3 данной главы. Заслуживает также рассмотрения и анализ двойственной задачи, так как он предоставляет возможность соблюсти баланс между стоимостью возможных негативных последствий и стоимостью мер защиты, дать рекомендации руководству компании по обработке выявленных рисков [44].

2.2.1 Графический метод решения

Геометрический (графический) метод применим только к задачам, в которых количество переменных в задаче равно 2 или 3, так как он основан на геометрическом построении ряда возможных решений в задаче ЛП [45-49].

Рассмотрим геометрический метод решения задачи ЛП на нескольких примерах.

Пример 2.3

Геометрический метод реализуется в два этапа:

- построение допустимого множества решений задачи ЛП;
- нахождение оптимального решения среди всех допустимых.

$$\begin{cases} \max z = \max 5x_1 + 3x_2; \\ x_1 + x_2 \leq 4; \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Первому ограничению задачи соответствует прямая $x_1 + x_2 = 4$, обозначенная на рисунке 2.1 значком (1). Точки пересечения прямой $x_1 + x_2 = 4$ и осей координат: ((4,0), (0,4)). Второе ограничение - прямая $5x_1 + 2x_2 = 10$, пересекается с осями координат в точках ((2,0), (0,5)). Необходимо принять во внимание ограничения (3) на знак переменных. Множество допустимых решений данной задачи изображено на рисунке 2.1 в виде заштрихованного четырехугольника.

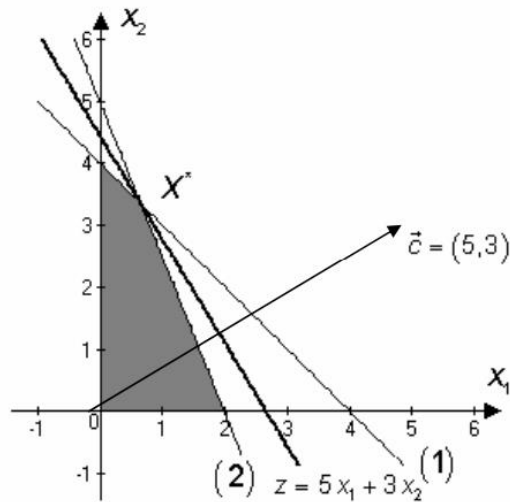


Рисунок 2.1 – Графический метод решения

Чтобы найти оптимальное решение, необходимо определить направление наиболее быстрого роста целевой функции. Z . Это направление является результатом градиента целевой функции:

$$\text{grad}(z(x_1, x_2)) = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \right), \quad (2.13)$$

Поскольку $z = 5x_1 + 2 \cdot x_2$ то направление наискорейшего роста функции z определяется вектором $\vec{c} = (5, 3)$. Этот вектор также является вектором нормали к линии уровня целевой функции $z = 5x_1 + 2x_2 = \text{const}$.

Пересечение диапазона возможных решений и линии, соответствующей максимальному значению целевой функции, является решением задачи ЛП.

На рисунке 2.1 показано, что эта точка является пересечением прямых (1) и (2). Эти координаты можно найти как решение системы уравнений, определяющей следующие строки:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 4 \\ 5\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{2}{3} \\ \dot{x}_2 = \frac{10}{3} \end{cases}$$

Следовательно,

$X^* = (\frac{2}{3}, \frac{10}{3})$ – оптимальное решение;

$z(X^*) = 5 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{10}{3} = \frac{40}{3}$ – максимальное значение целевой функции.

По этой таблице надо найти опорный план, т.е базисное решение, в котором не более чем n положительных элементов, т.е., если все $b_1, b_2, \dots, b_m$ неотрицательны, то план (3) - опорный, тогда строка φ остается пустой. Если же среди чисел $b_1, b_2, \dots, b_m$ есть отрицательные, то в строку φ записываются суммы тех строк таблицы, где стоят отрицательные значения b_i . затем эта строка считается разрешающей, и методом пересчета по ней определяется план до тех пор, пока все элементы строки не станут нулевыми В этом случае строка удаляется из таблицы, а решение анализируется по целевой строке z .

Это анализ проводится следующим образом:

1. Среди элементов $z_1, z_2, \dots, z_n$ целевой строки z или среди элементов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ находится максимальный по абсолютной величине отрицательный элемент. Столбец x_r в котором он находится, считается разрешающим.
2. Чтобы определить разрешающую строку: для всех вычисляются дроби b_i / a_{ir} для всех $i=1..m$ номер s наименьшей неотрицательной дроби определит номер разрешающей строки – $n+s$. Если все дроби отрицательны, то целевая функция неограниченная.
3. Элемент a_{sr} на пересечении разрешающей строки и столбца объявляется разрешающим. Если существует несколько возможностей для разрешающего элемента, то выбирается отрицательный.
4. Разрешающую переменную выводим из базиса, т.е. в следующей симплекс-таблице в первый столбец записывается x_r вместо x_{n+s} .
5. Далее по методу полных жордановых исключений с разрешающим элементом a_{sr} . пересчитываются остальные элементы предыдущей симплекс-таблицы, включая целевые строки z (или φ), b , и заполняется столбец $\sum$.

Алгоритм пересчета жордановых исключений [52]:

1. Разрешающий элемент заменяется обратным : $b_{rs} = \frac{1}{a_{rs}}$.
2. Остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент и изменяют знак на противоположный: $b_{rs} = -\frac{a_{rj}}{a_{rs}} \forall j \neq s$.
3. Остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент:

$$b_{rs} = \frac{a_{rj}}{a_{rs}} i \neq r \text{ .}$$

4. Элементы, не попавшие в разрешающую строку и разрешающий столбец, пересчитываются по формулам:

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rs} - a_{is} \cdot a_{rj}}{a_{rs}}, i \neq r, j \neq s.$$

Контроль правильности вычислений осуществляется посредством сравнений сумм элементов каждой строки с числами, записанными в последнем столбце $\sum$. Расхождение результатов свидетельствует об арифметической ошибке, и соответствующую строку надо пересчитать. После этого переходят к шагу 2.

В оптимальный план вводятся значения только исходных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, причем свободные полагаются равными нулю, а значения остальных переменных берутся из второго столбца таблицы. Из этого же столбца выписываем максимальное z .

Пример 2.4

Гатчинский молочный завод производит два вида йогуртов, каждый из которых производится на отдельном конвейере. Суточный объем производства первого вида йогуртов $A = 80$, второго вида йогуртов $B = 45$. Йогурт первого вида расходует $C = 18$ однотипных компонентов составляющих, йогурт второго типа $D = 14$ компонентов. Все компоненты одинаковы. Максимальный суточный запас использованных компонентов $E = 900$ шт. Прибыль от продажи йогуртов первого и второго типов составляет $Q = 30$ и $P = 20$, соответственно. Используя графическое решение задачи, определите оптимальную суточную выработку йогуртов первого и второго типа.

Цель предприятия - получение максимальной прибыли
 $L(x) = 30x_1 + 20x_2 \rightarrow \max$.

Ограничения:

- На производство йогуртов двух видов расходуются компоненты, суточный запас которых ограничен и составляет 900 ед., так как на производство йогурта первого вида необходимо затратить 18 ед. различных компонентов, а на производство одного йогурта второго вида необходимо 14 ед., то при производстве x_1 и x_2 расход компонентов йогурта составит: $8x_1 + 14x_2 \leq 900$.
- Мощность первой линии позволяет производить не более 80 йогуртов первого вида в сутки: $x_1 \leq 80$.
- Мощность второй линии позволяет производить не более 45 йогуртов второго вида в сутки: $x_2 \leq 45$.
- Неотрицательность переменных: $x_1, x_2 \geq 0$.

Математическая модель задачи:

$$L(x) = 30x_1 + 20x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 18x_1 + 14x_2 \leq 900 \\ x_1 \leq 80 \\ x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

От неравенств, ограничений переходим к ограничениям, равенствам.

$$\begin{cases} 18x_1 + 14x_2 = 900 \\ x_1 = 80 \\ x_2 = 45 \\ x_1, x_2 = 0 \end{cases}$$

Переменные x_3, x_4, x_5 - базисные, а x_1, x_2 - свободные.

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5 = b$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 900 \\ 80 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Заполним 1-ую симплекс-таблицу

Таблица 2.2 – Начальная симплекс-таблица

				C ₁ =30	C ₂ =20	C ₃ =0	C ₄ =0	C ₅ =0
№	БП	C ₆	b _i	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
1	A ₃	0	900	18	14	1	0	0
2	A ₄	0	80	1	0	0	1	0
3	A ₅	0	45	0	1	0	0	1
$\Delta = L^j - c_j$			0	30	2000	0	0	0

Найдем базисное решение. Для этого все свободные переменные приравняем к 0, а базисные к b_i :

$$x_0 = (0; 0; 900; 80; 45)$$

$$L_0 = 30 \cdot 0 + 20 \cdot 0 = 0$$

Решение базисное, так как все переменные не отрицательны.

Находим оценки плана и помещаем в строку: $\Delta = L^j - c_j$.

Так как два вектора A1, A2 имеют отрицательную оценку плана, то решение не оптимальное.

Решаем, какой из двух векторов выгоднее ввести в базис. Функция цели меняется по формуле:

$$L_k = L_{k-1} - \Theta(l^j - c_j).$$

Если вводим вектор A1:

$$(l^j - c_j) = -30;$$

$$\Theta = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}}, a_{ij} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{900}{18}; \frac{80}{1} \right\} = \min \{50, 80\} = 50.$$

Функция цели при вводе вектора A1 изменится на

$$\Theta(L^j - c_j) = 50 * (-30) = -1500;$$

увеличится на 1500 единиц:

$$L_2 = L_1 - \Theta(L^j - c_j) = 0 - (-1500) = 1500.$$

Если вводим вектор A2:

$$(L^j - c_j) = -20;$$

$$\Theta = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}}, a_{ij} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{900}{14}; \frac{41}{1} \right\} = \min \{64.3; 45\} = 45.$$

Функция цели при вводе вектора A2 изменится на

$$\Theta(L^j - c_j) = 45 * (-20) = -900 \quad \text{увеличится на 900 единиц:}$$

$$L_2 = L_1 - \Theta(L^j - c_j) = 0 - (-900) = 900.$$

Из рассмотренных случаев видно, что при вводе вектора A1 в базис значение ЦФ увеличивается в основном на 1500 единиц. Поэтому берем A1 в качестве разрешающего столбца. Разрешающая строка соответствует этому столбцу № 1 и вектору A3.

Меняем A1-A3 и переходим к новой таблице по правилу:

- все элементы ведущей строки делим на разрешающий элемент;
- заполняем базисные столбцы;
- все остальные элементы симплекс таблицы находим по формуле:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{sr} - a_{ir}a_{sj}}{a_{sr}}.$$

Таблица 2.2– продолжение симплекс метода

				C1=30	C2=20	C3=0	C4=0	C5=0
№	БП	Cб	bi	A1	A2	A3	A4	A5
1	A1	30	50	1	0,778	0,056	0	0
2	A4	0	30	0	-0,778	-0,056	1	0
3	A5	0	45	0	1	0	0	1
$\Delta = L^j - c_j$			150003	3331	66700			

Новое базисное решение = (50; 0; 0; 30; 45) $L_2(x) = 20 \cdot 50 + 20 \cdot 0 = 1500$

В строке оценок плана все коэффициенты не отрицательны, найденное решение является оптимальным.

Оптимальное решение: $x^* = (50; 0)$ $L^* = 1500$.

Вывод: для получения оптимальной суточной прибыли необходимо производить 50 йогуртов первого вида ($x_1=50$), а йогурты второго вида не производить ($x_2=0$), так как это приведет к снижению максимальной прибыли. В случае оптимального производства максимальная суточная прибыль составит 1500 усл.ед.

2.2.3. Решение задачи оптимизации средствами MS EXCEL

Рассмотрим пример решения задачи ЛП средствами MS Excel.

Пример 2.5

Задана целевая функция и система ограничений:

$$F = 17x_1 + 43x_2 + 62x_3 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 480; \\ 7x_1 + 7x_2 + 7x_3 \leq 960; \\ 8x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 1000. \end{cases}$$

Подготовим лист рабочей книги MS Excel к решению задачи оптимизации. Введите формулу целевой функции в ячейку A4 в следующем виде: =17*A1+43*A2+62*A3.

Значения в ячейках A1, A2, A3 отведем под значения переменных. В ячейки B1, B2, B3 введем математические формулы ограничений.

Заполним значения в ячейках A1, A2 и A3 значениями переменных x_1 , x_2 и x_3 . Числовые значения переменных x_1 , x_2 и x_3 в эти ячейки будут введены автоматически в процессе решения задачи.

В ячейки B1, B2 и B3 введём математические формулы ограничений следующим образом (см. таблицу 2.3).

СУММ	$=2*A1+3*A2+7*A3$	B
1	$=2*A1+3*A2+7*A3$	
СУММ	$=7*A1+7*A2+7*A3$	B
2	$=7*A1+7*A2+7*A3$	
СУММ	$=8*A1+2*A2+7*A3$	B
3	$=8*A1+2*A2+7*A3$	

Рисунок 2.2 – Заполнение значений листа

Далее заполним ячейки C1, C2 и C3 значениями 480, 960 и 1000 согласно условиям, ограничивающим численные значения переменных задачи. Все исходные данные задачи записаны в том виде, в котором они используются в окне "Поиск решения".

Чтобы настроить эту возможность табличного процессора, выполним следующие команды:

Файл → Параметры → Надстройки → Управление → Перейти (рисунок 2.3)

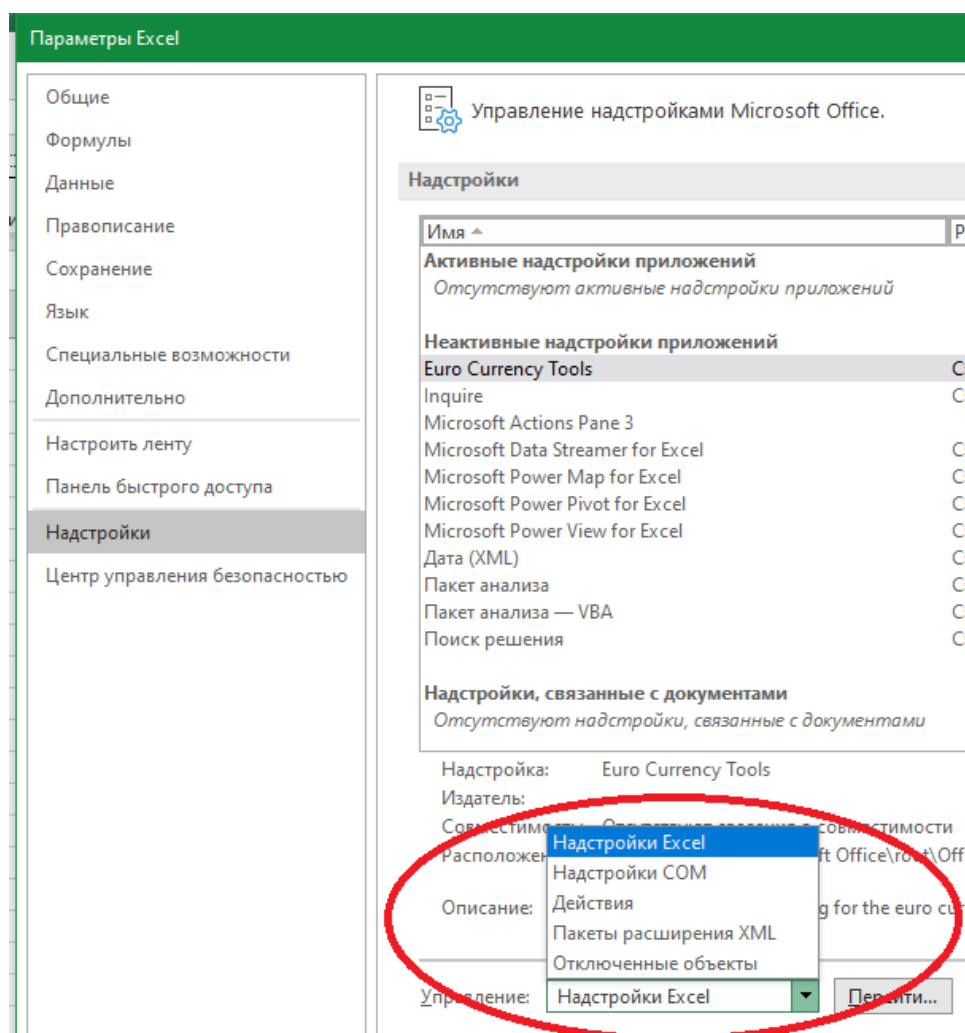


Рисунок 2.3 - Параметры надстройки

В открывшемся окне пометить «Поиск решения» (рисунок 2.4 слева). На ленте во вкладке **Данные** появится пункт «поиск решения» (рисунок 2.4 справа)

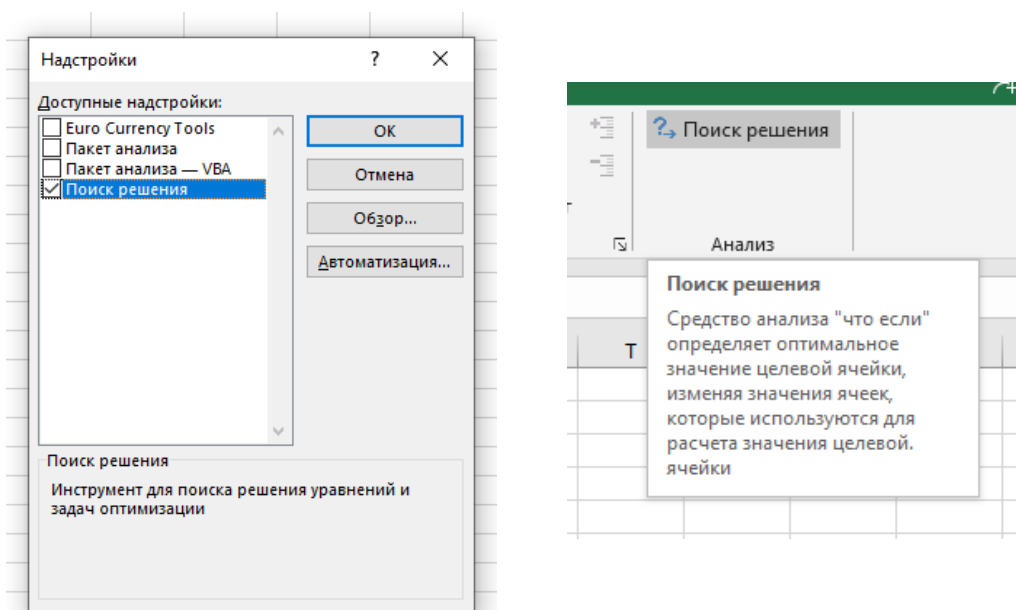


Рисунок 2.4 - Надстройка параметров поиск решения

После щелчка на кнопке ОК на экране появится окно (рисунок 2.5):

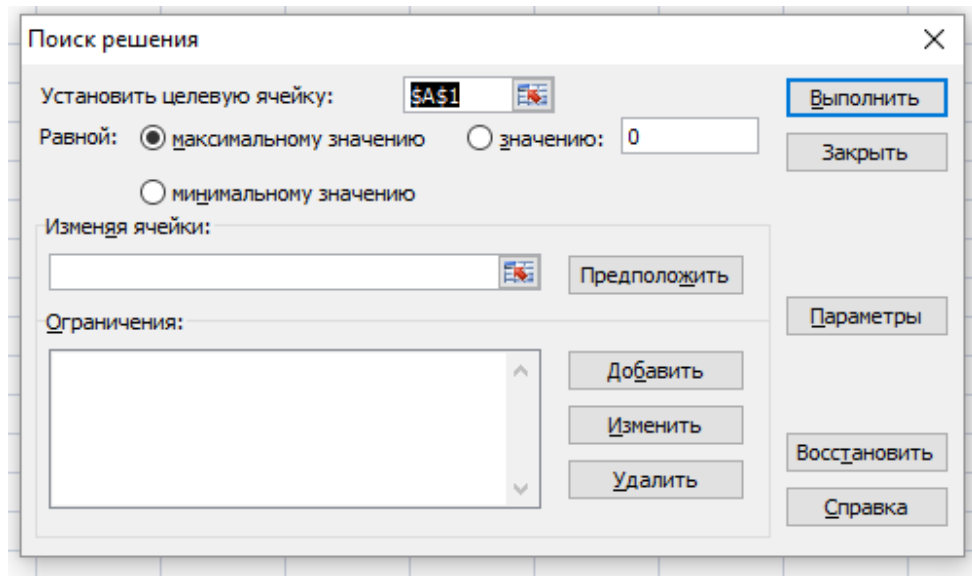


Рисунок 2.5 – Окно надстройки «Поиск решений»

В поле «Установить целевую ячейку» введите \$A\$4. Ищем решение для максимального значения, которое отображается переключателем поля «Равной», установленным в записи данных словами «Максимальное значение».

В поле «Изменить ячейки» введите диапазон, в котором вы хотите изменить ячейки с A1 на A3, а именно с \$A\$1:\$A\$3.

Для того, чтобы запустить математическую программу и найти оптимальное решение для данной задачи, необходимо установить ограничения, которые будут учитываться во время решения. Нажмите кнопку «Добавить» справа от поля «Ограничения». На экране появится следующее окно (рисунок 2.6):

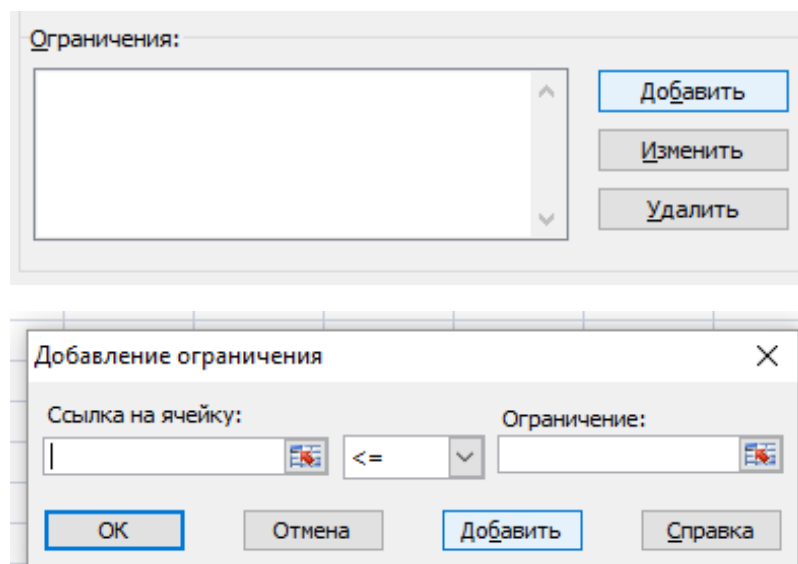


Рисунок 2.6 – Добавление ограничения

Добавим первое ограничение - $2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 480$. Для этого введите ячейку B1 в поле «Ссылка на ячейку», затем выберите $\leq$ в среднем списке и введите ячейку C1 в поле «Ограничение». После этого нажмите кнопку «Добавить». Аналогично добавляем оставшиеся ограничения. Нажмите кнопку «Отмена» для того, чтобы закрыть окно.

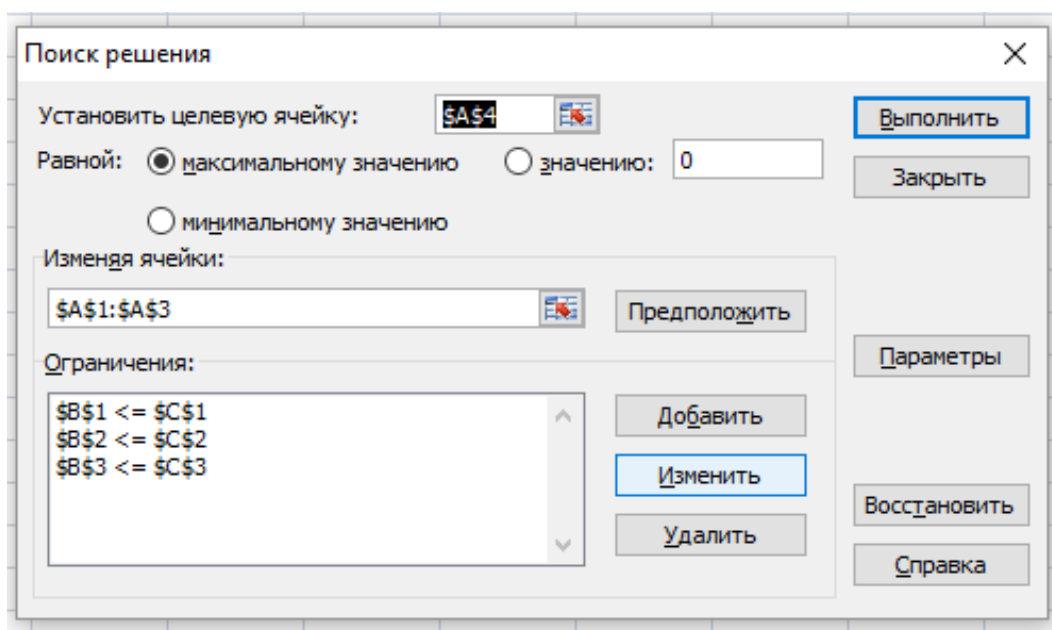


Рисунок 2.7 – Поиск решения

В диалоговом окне кнопки «Параметры», «Параметры поиска решений», можно получить параметры математического метода для поиска решения.

Если необходимо знать промежуточные результаты расчетов для того, чтобы найти оптимальное решение, в открывшемся окне необходимо установить флажок «Показать результаты итерации» (рисунок 2.8). В MS Excel в качестве метода решения проблемы предлагаются методы: Ньютона и сопряженных градиентов. Для решения задач ЛП чаще всего используют метод Ньютона. Ограниченное количество итераций, относительная погрешность и допуск выбираются так, чтобы соответствовать задаче, оптимальное решение которой найдено. Максимальное время выделяется на основе опыта решения проблем, аналогичных используемому компьютеру. Настройки в окне «Параметры поиска решений» на рисунке 2.4 достаточны для получения оптимального решения для задач ЛП.

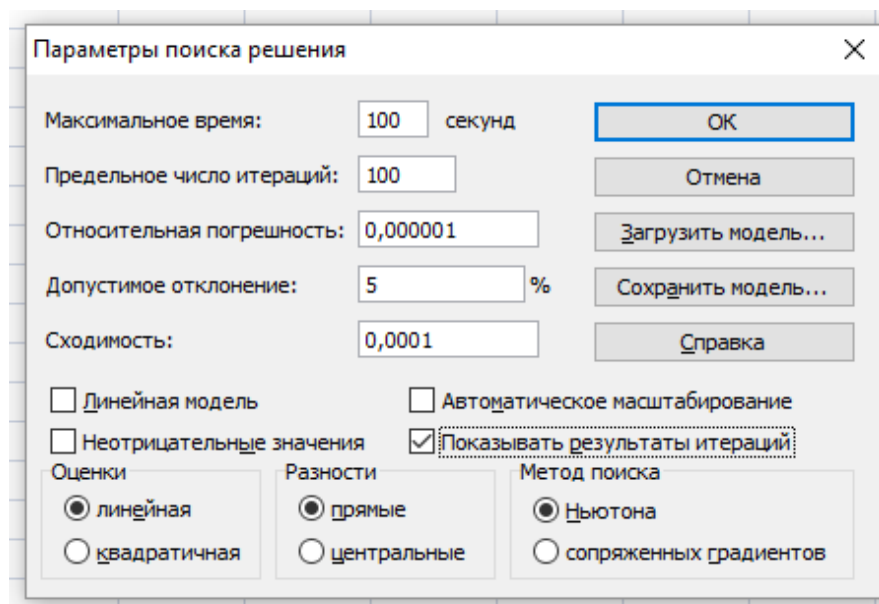


Рисунок 2.8 – Настройка параметров поиска решения

В этом окне «Линейная модель» и «Неотрицательные значения». Нажмите кнопку ОК. Снова появляется окно «Найти решение». В окне «Найти решение» нажмите кнопку «Выполнить». Параметры в окне следует подбирать реалистично, для соответствия введенным числовым характеристикам конкретной задачи. Увлечение большим количеством итераций и малыми значениями относительных ошибок в производственных задачах может привести к непропорциональному увеличению времени, необходимого для поиска решения.

На экран выводится окно "Результаты поиска решения" (рисунок 2.9).

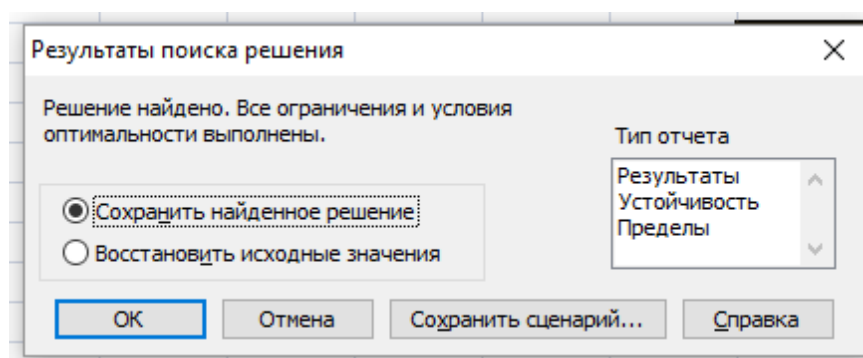


Рисунок 2.9 – Результаты поиска решений

Нажмите «ОК», чтобы закрыть окно.

После этого решения появятся в ячейках, отведенных для записи решения задачи (рисунок 2.10).

	A	B	C	D
1	0	480	480	
2	120	960	960	
3	17,14286	360	1000	
4	6222,857			
5				
6				
7				

Рисунок 2.10 – Результаты моделирования

В ячейке A4 находится значение целевой функции $F(X)$, соответствующее найденному решению. В ячейках A1, A2 и A3 указаны соответствующие значения переменных x_1, x_2, x_3 .

Для данной задачи оптимальное решение имеет следующий вид:

$$F = 6222,857, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 120 \quad \text{и} \quad x_3 = 17,14286.$$

2.2.4 Некорректные случаи задачи линейного программирования

Не всегда симплекс-метод решения ЗЛП дает удовлетворительные результаты [49-51]. Если условия задачи поставлены некорректно, возникают следующие особые случаи:

- 1) вырожденное решение;
- 2) альтернативные оптимальные решения;
- 3) неограниченные решения;
- 4) отсутствие допустимых решений.

Пример 2.6. Вырожденное оптимальное решение.

Необходимо найти максимум функции

$$Z = 3 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2$$

при ограничениях:

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Решение сведено в таблицу 2.3

Таблица 2.3 – вычисления примера 2.6.

Итерация	Базисные переменные	x_1	x_2	x_2	x_4	Решение
0 (начало вычислений) x_2 вводится x_3 исключается	Z	-3	-9	0	0	0
	x_3	1	4	1	0	8
	x_4	1	2	0	1	4
1 x_1 вводится x_4 исключается	Z	-3/4	0	9/4	0	18
	x_2	1/4	1	1/4	0	2
	x_4	1/2	0	-1/2	1	0
2 оптимум	Z	0	0	3/2	3/2	18
	x_2	0	1	1/2	-1/2	2
	x_1	1	0	-1	2	0

Выбрать базисную переменную после 0-й итерации можно произвольно. Однако на следующей итерации одна из базисных переменных (x_4) равна нулю. Тогда говорят, что полученное решение является вырожденным. Наличие вырожденного решения вызывает только теоретическое неудобство. В постановке задачи в этом случае присутствует хотя бы одно избыточное ограничение.

Вырожденность может проявляться в процессе решения, поэтому итерации симплекс-метода выполняются до тех пор, пока результаты не будут удовлетворять условию оптимальности. Рассмотрим пример.

Пример 2.6. Промежуточное вырожденное решение.

Максимизировать целевую функцию

$$Z = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$$

при ограничениях:

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12,$$

$$4x_1 + x_2 \leq 8,$$

$$4x_1 - x_2 \leq 8,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Таблица 2.4 – Вычисления примера 2.7

Итерация	Базисные переменные	x_1	x_2	x_2	x_4	x_5	Решение
0(начало вычислений) x_1 вводится, x_4 исключается	Z	-3	-2	0	0	0	0
	x_3	4	3	1	0	0	12
	x_4	4	1	0	1	0	8
	x_5	4	-1	0	0	1	8
1: x_2 вводится, x_3 исключается	Z	0	-5/4	0	3/4	0	6
	x_3	0	2	1	-1	0	4
	x_1	1	1/4	0	1/4	0	2
	x_5	0	-2	0	-1	1	0
2: оптимум	Z	0	0	5/8	1/8	0	17/2
	x_2	0	1	1/2	-1/2	0	2
	x_1	1	0	-1/8	3/8	0	3/2
	x_5	0	0	1	-2	1	4

Вырожденность обнаруживается на первой итерации., но на итерации 2 вырожденность уже не имеет места, а критерий возрастает с $Z=6$ до $Z= 17/2$ (итерация 2). Это связано с тем, что переменная x_2 , вводимая в базис на итерации 1, имеет отрицательный коэффициент (-2) в ограничении, соответствующем нулевой базисной переменной x_5 .

Пример 2.7. Выявление альтернативных решений. Бесконечное множество решений.

Необходимо найти максимум линейного критерия

$$Z = 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2$$

при ограничениях:

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Построим симплекс-таблицу 2.8.

Таблица 2.5 – таблица вычислений примера 2.8

Итерация	Базисные переменные	x_1	x_2	x_2	x_4	Решение
0 (начало вычислений) x_2 вводится x_3 исключается	Z	-2	-4	0	0	0
	x_3	1	2	1	0	5
	x_4	1	1	0	1	4
1 x_1 вводится	Z	0	0	2	0	10
	x_2	1/2	1	1/2	0	5/2

x_4 исключается	x_4	1/2	0	-1/2	1	3/2
2 оптимум	Z	0	0	2	0	10
	x_2	0	1	1	-1	1
	x_1	1	0	-1	2	3

На итерации. 2 переменная x_1 вводится в базис вместо x_4 . Коэффициент при ней нулевой. Ее включение в базис не изменит значение критерия, но значения других переменных изменятся, то есть будет получено такое же значение оптимума, но с другим оптимальным планом. Такая ситуация возникает, если в математической модели целевая функция и какое-либо ограничения имеют коллинеарные нормали (лежат на параллельных прямых).

Пример 2.9. Неограниченная целевая функция.

Найти максимум линейного критерия

$$Z = 2 \cdot x_1 + x_2$$

при ограничениях:

$$x_1 - x_2 \leq 10$$

$$2x_1 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Таблица 2.6 - Вычисления примера 2.9

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	Решение
Z	-2	-1	0	0	0
x_3	1	-1	1	0	10
x_4	2	0	0	1	40

Переменная x_1 имеет наибольший по модулю отрицательный коэффициент в первой строке, и именно такая переменная обычно вводится в базис. Так как в остальных ограничениях коэффициенты при x_2 меньше либо равны 0, то, x_2 возрастает, не нарушая ограничения. При этом целевая функция Z также возрастает, следовательно, решение данной задачи не ограничено.

Неограниченность решения ЗЛП говорит о недостаточной точности модели. Чаще всего к таким моделям приводит неучтенное ограничение, которое не является избыточным по смыслу задачи.

Вообще, если на некоторой итерации небазисная переменная имеет в ограничениях неположительные коэффициенты, пространство решений соответствующей задачи в данном направлении не ограничено. Если, при этом в задаче минимизации коэффициент в целевой функции при этой переменной отрицательный, или в задаче максимизации данный коэффициент положительный, то это приводит к неограниченности критерия.

Пример 2.10. Отсутствие допустимых решений.

Найти максимум линейного критерия

$$Z = 3 \cdot x_1 + 2x_2$$

при ограничениях:

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Поочередное построение прямых, ограничивающих допустимое множество данной задачи, приводит к невозможности построения этого множества. Это свидетельствует о некорректности построенной модели.

2.3 Анализ решения задачи линейного программирования

Модель ЛП является как бы "моментальным снимком" реальной ситуации, когда параметры модели (коэффициенты целевой функции и неравенств ограничений) предполагаются постоянными во времени [53,55]. Но на практике исследователи стремятся изучить влияние изменения параметров модели на полученное оптимальное решение задачи ЛП. Такое исследование называется *анализом чувствительности*. Очевидно, что с течением времени может изменяться как критерий оптимальности, так и ограничения в ЗЛП, поэтому чувствительность анализируется в двух вариантах. Экономико-математический анализ решений осуществляется в двух направлениях: в виде вариантных расчетов по моделям с сопоставлением различных вариантов плана и в виде анализа каждого из полученных решений с помощью двойственных оценок.

2.3.1 Графический анализ чувствительности к изменению коэффициентов целевой функции

Для наглядного представления проведем анализ чувствительности целевой функции двух переменных $z = c_1x_1 + c_2x_2$

Изменение коэффициентов нормали c_1 и c_2 может привести к тому, что оптимальное решение будет в другой угловой точке пространства решений. Задача анализа чувствительности состоит в определении интервалов изменения коэффициентов c_1 и c_2 , при которых текущее оптимальное решение сохраняется. В частности, определяют интервал для отношения коэффициентов c_1 / c_2 .

Пример 2.11

Найти интервал сохранения оптимального решения для целевой функции $z = 5x_1 + 4x_2$,

при ограничениях:

1 $6x_1 + 4x_2 \leq 24$.

2 $x_1 + 2x_2 \leq 6$

3 $-x_1 + 2x_2 \leq 1$

4 $x_2 \leq 2$

5 $x_1 \geq 0$

6 $x_2 \geq 0$

На рисунке 5 слева показана область допустимых планов, а справа приводится для данной для этой ЗЛП. Оптимальный план для этой задачи достигается в точке С.

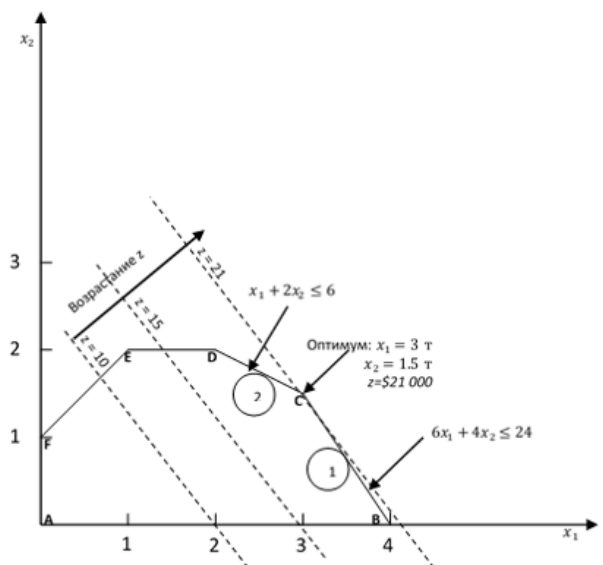
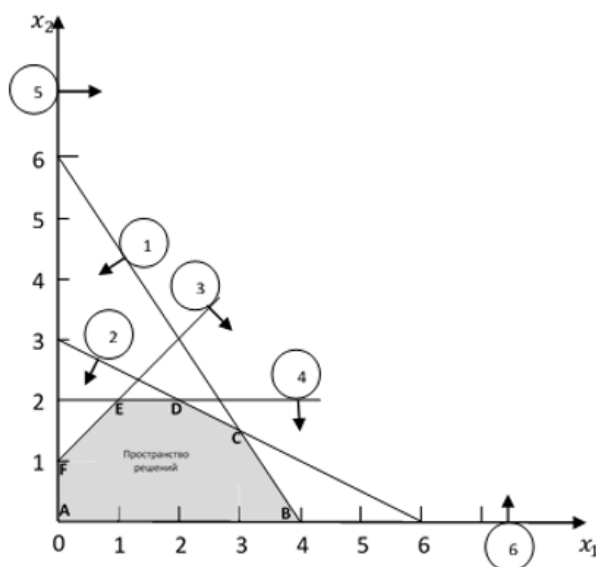


Рисунок 5. – Область допустимых планов для ЗЛП примера 8 (Слева) и решение ЗЛП (справа).

Далее будем изменять коэффициенты целевой функции z таким образом, что угол наклона будет лежать между углами наклона двух прямых, пересечением которых является точка C , то есть между прямыми, соответствующими ограничениям 1 и 2 (рисунок 2.11).

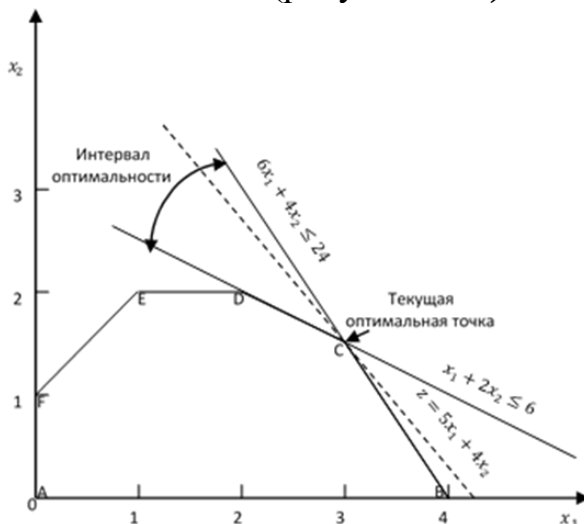


Рисунок 2.11. Изменение угла наклона целевой функции

Это условие запишется так: $\frac{4}{6} \leq \frac{c_2}{c_1} \leq \frac{2}{1}$, $c_1 \neq 0$, или $\frac{1}{2} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{6}{4}$, $c_2 \neq 0$.

Две системы неравенств определяют интервал сохранения оптимальности и взаимозависимость коэффициентов. Далее, в предположении, что значение одного из коэффициентов фиксировано, например, $c_1 = 5$, из первой системы получен интервал сохранения оптимальности для коэффициента c_2 : $10/3 \leq c_2 \leq 10$.

2.3.2 Чувствительность решения к изменению ограничений

Анализ чувствительности в этом случае позволяет ответить на вопрос: «Как изменяется максимальная прибыль при изменении стоимости ресурса в осуществимых пределах?».

В примере неравенства 1 и 2 — это ограничения на использование сырья двух видов $M1$ и $M2$ соответственно. Определим стоимость единиц этих ресурсов. Рассматривать будем на примере ограничения 1 (рисунок 2.12).

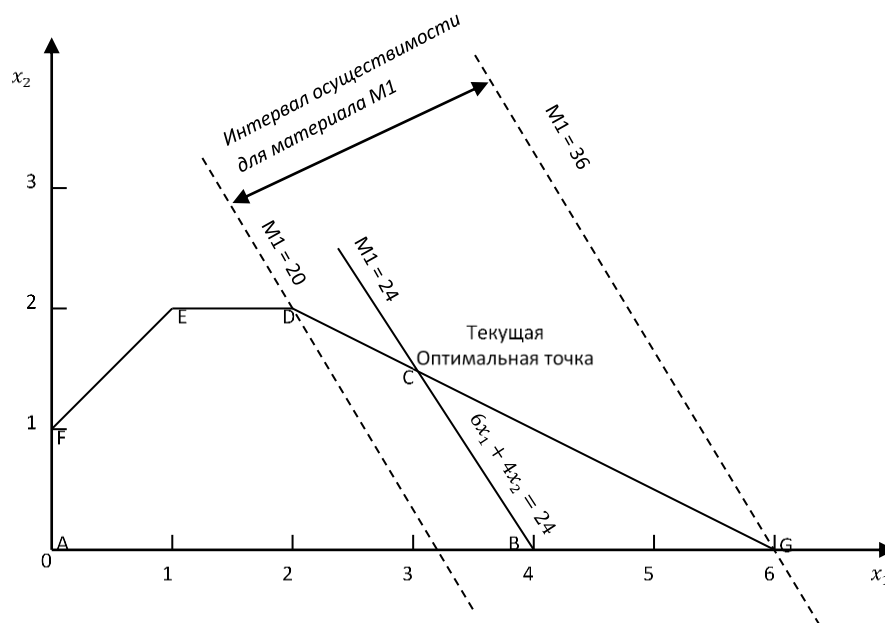


Рисунок 2.12. Изменение уровня доступности для 1-го вида ресурса

Будем изменять правую часть неравенства 1, т.е. двигать прямую, соответствующую этому ограничению вправо по оси Ox_1 . Концы отрезка DG — точки $D=(2,2)$ и $G=(6,0)$ определяют *интервал осуществимости* для ресурса R_1 , так как за границами этого отрезка оптимальное решение в точке C неосуществимо. Подставим в левую часть неравенства 1 точки D и G , получим границы осуществимости количества сырья R_1 в

$$R_1 = 6x_1 + 4x_2 = 6 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 20.$$

$$R_2 = 6 \cdot 6 + 4 \cdot 0 = 36$$

Если положить $R_1 = 24 + \Delta_1$, где Δ_1 — вариации количества ресурса R_1 от данного уровня (правая часть ограничения), тогда для вариации получим $20 \leq 24 + \Delta_1 \leq 36$ или $-4 \leq \Delta_1 \leq 12$.

Это означает, что если уровень доступности ресурса R_1 уменьшить не более чем на 4 или увеличить не более чем на 12 ед., то оптимальное решение будет достигаться в точке C — пересечения ограничений 1 и 2.

Если подставить полученные граничные значения в целевую функцию, получим граничные значения для интервала полученной прибыли. Отношение его величины к величине интервала изменения ресурса R_1 является мерой изменения цены единицы ресурса:

$$\begin{aligned} z_1 &= 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 18 \\ z_2 &= 5 \cdot 6 + 4 \cdot 0 = 30 \\ y_1 &= \frac{z_1 - z_2}{R_1 - R_2} = \frac{30 - 18}{36 - 20} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Этот результат показывает, что изменение количества ресурса R_1 на одну единицу в пределах от 20 до 36 приводит к изменению прибыли до $\frac{3}{4}$ денежной единицы.

Аналогично можно получить значения для ресурса R_2 .

2.3.3 Анализ решения с помощью теории двойственности

Предположим теперь, что предприятие может и реализовывать сырье, и производить продукцию из него. Поставим вопрос: «какую минимальную цену надо установить за единицу каждого вида ресурсов, чтобы стоимость проданных ресурсов была бы не меньше дохода от реализации продукции?». Для ответа на этот вопрос необходимо исследовать решить и провести анализ чувствительности двойственной задачи.

Заметим, что двойственные оценки ресурсов позволяют судить об эффекте не любых, а лишь сравнительно малых вариаций ресурсов.

Для двойственных задач сформулированы следующие экономические выводы [54,55] :

1. Общая созданная стоимость не превосходит суммарной оценки ресурсов для любого допустимого плана производства и любого допустимого вектора оценки ресурсов;

2. Разрешимость задачи определения максимизации выпуска продукции равносильна разрешимости задачи определения оценок затрат. При этом стоимость продукции, полученная при реализации оптимального плана, совпадает с суммарной оценкой ресурсов. Таким образом, оценки двойственной задачи представляют инструмент балансирования затрат и результатов. Двойственные оценки гарантируют рентабельность оптимального плана, то есть равенство общей оценки продукции и затрат. Любой другой план, отличный от оптимального, является убыточным.

3. Если по некоторому оптимальному плану X^* производства расход i -го ресурса строго меньше его запаса, то в оптимальном плане соответствующая двойственная оценка единицы этого ресурса равна нулю. Если же в некотором оптимальном плане оценок Y^* его j -ая компонента строго больше нуля, то в оптимальном плане производства расход соответствующего ресурса равен его запасу. Следовательно, двойственные оценки есть мера дефицитности ресурса.

4. Двойственные оценки ресурсов показывают, на сколько денежных единиц изменится максимальная прибыль от реализации продукции при изменении запаса соответствующего ресурса на одну единицу.

2.4 Задачи для выполнения

Задание 1.

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 на предприятии используются три вида различного сырья: A_1, A_2, A_3 . Запасы сырья каждого вида A_i известны и равны b_i , кг, соответственно. Количество единиц сырья A_i , используемое на изготовление единицы продукции вида P_j , равно a_{ij} , кг. Величина прибыли, получаемой от реализации единицы продукции P_j , равна c_j , $i=1, 2, 3$; $j=1, 2$.

Составить математическую модель задачи по описанию производственных процессов и исходным данным из таблицы 2.4. Сформулировать двойственную задачу и записать ее математическую модель.

Составить план выпуска продукции, чтобы при её реализации предприятие получало максимальную прибыль, и определить величину этой максимальной прибыли. При решении задачи учитывать, что переменные удовлетворяют условиям неотрицательности: $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$.

Решить графическим способом, провести анализ чувствительности решения.

Задание 2.

Составить формулировку задачи ЛП в интерпретации информационной безопасности для минимизации рисков от $n > 3$ типов уязвимостей. Составить проект базы модельных данных экспертных оценок рисков информационной безопасности. В этом проекте предусмотреть исполнение сценария минимизации рисков. Для решения этой задачи использование надстройки «Поиск решения» MS Excel.

Таблица 2.7 - Варианты для самостоятельного решения

Вариант	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{12}	a_{22}	a_{32}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2
1	9	2	4	6	11	2	414	612	414	6	3
2	9	2	4	6	11	2	345	510	345	6	3
3	6	8	13	12	5	11	918	918	783	2	4
4	2	5	8	6	6	14	290	406	493	9	5
5	11	12	9	2	14	22	429	312	299	5	9
6	3	9	8	2	4	7	224	240	256	2	8
7	2	15	25	7	8	7	448	480	512	4	3
8	5	2	6	1	3	5	372	620	310	2	8
9	8	7	5	7	8	12	1850	1998	2109	3	5
10	5	12	18	6	24	4	828	690	828	5	3
11	9	2	4	6	11	2	238	346	386	6	3

12	5	8	2	3	5	7	284	148	156	8	5
13	10	5	4	12	7	9	148	198	160	4	7
14	12	10	24	16	18	34	205	168	185	7	2
15	11	12	9	2	14	22	338	240	230	5	9
16	13	7	8	9	6	11	144	196	132	3	6
17	8	12	15	22	14	7	248	256	362	7	5
18	1	5	4	6	7	9	117	191	183	5	2
19	4	3	1	2	5	8	136	185	324	1	1
20	2	6	1	5	8	4	124	44 4	564	2	4
21	5	3	8	5	4	2	146	154	124	3	7
22	5	12	18	6	24	4	412	104	124	5	3
23	7	9	8	2	5	6	144	164	174	3	7
24	3	11	10	14	4	15	415	182	619	9	8
25	5	12	18	6	24	4	512	610	612	5	3

Контрольные вопросы

1. Какие функции применяются в задачах ЛП?
2. Какая задача называется стандартной задачей ЛП?
3. Чем характеризуется каноническая задача ЛП?
4. Что называется областью допустимых планов задачи линейного программирования?
5. Какой план называется оптимальным?
6. Какими методами можно решить задачу ЛП?
7. Чем отличается решение задачи о минимуме функции от стандартной задачи ЛП?
8. В чём суть симплексного метода?
9. Какими методами определяется опорный план при решении симплексным методом?
10. В чём заключается графический метод решения задачи линейного программирования?
11. Когда не существует решения задачи ЛП?
12. Как определить число основных ограничений в двойственной задаче?
13. Как определить количество неизвестных в двойственной задаче?
14. Каков экономический смысл целевой функции и ограничений двойственной задачи, если исходная задача является задачей производственного планирования?
15. Существует ли связь между экстремальными значениями целевых функций двойственных задач?
16. В чем отличие решения задачи ЛП максимизации от задачи ЛП минимизации при геометрическом методе?
17. В чем сущность анализа оптимального решения на чувствительность?
18. Всегда ли изменение коэффициентов целевой функции приводит к изменению оптимального решения задачи ЛП?

ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б.Т. История математического программирования в СССР: анализ феномен. [электронный ресурс] режим доступа: <http://lab7.ipu.ru/files/polyak/Pol-rus-Baikal%2708.pdf> дата последнего обращения 17.11.2020.
2. Гончаров, В. А. Методы оптимизации: учеб. пособие для вузов / В. А. Гончаров. — М. : Издательство Юрайт ; ИД Юрайт, 2014. — 191 с. — Серия: Бакалавр. Базовый курс
3. Хорошев А.Н. Основы системного проектирования. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://www.cfin.ru/management/controlling/sys_project.shtml
4. Постановка задачи оптимизации и численные методы ее решения. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://hub.exponenta.ru/post/postanovka-zadachi-optimizatsii-i-chislennyye-metody-ee-resheniya356>
5. Задачи оптимального проектирования. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: infopedia.su/14x75e9.html
6. Методы проектирования. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: science.wikia.org/ru/wiki/Методы_проектирования
7. Щеглов А.Ю., Щеглов К.А. Математические модели и методы формального проектирования Учебное пособие Санкт-Петербург изд-во ИТМО 2015
8. Оптимизационные задачи в науке и технике [Электронный ресурс]. — Режим доступа: shlepotrun.narod.ru/11_1.html
9. Рейзлин В.И. Численные методы оптимизации. Учебное пособие. -Изд-во НИТПУ, 2013. – 105 с.
10. Оптимизация химико-технологических процессов [электронный ресурс]: режим доступа: studopedia.su/11_16556_postanovka-zadachi-optimizatsii.html
11. Постановка задачи оптимизации. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: studopedia.su/11_16556_postanovka-zadachi-optimizatsii.html
12. portal.tpu.ru/SHARED/v/VIR/Met/Tab1/p01.pdf — презентация на тему «методы оптимизации» 8%
13. Методы оптимизации. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://portal.tpu.ru/SHARED/v/VIR/Met/Tab1/p01.pdf> -
14. Критерий оптимизации. Целевая функция. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: megaobuchalka.ru/14/14609.html
15. Методы моделирования и оптимизации систем коммутационных программ. Граф установления соединений. Процесс последовательности этапов обслуживания вызовов, последовательности этапов установления соединения. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://cyberpedia.su/7x2102.html>
16. Методы оптимизации. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: poisk.ru.ru/s54094t9.html
17. Попова Т.М. Методы безусловной оптимизации. Тексты лекций. Хабаровск, Издательство ТОГУ, 2013 - 77 с. URL:

- http://pnu.edu.ru/media/filer_public/58/ce/58ce1a8c-a0e1-475a-98fa-f16b17f4ad03/popova_methods_optim.pdf
18. Динамическое программирование и метод множителей Лагранжа. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.chem21.info/info/41520/
 19. Оптимизационные задачи в науке и технике. shlepotrun.narod.ru/11_1.html13%
 20. Конспекты по методам оптимизации. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: studfile.net/preview/5246855/
 21. Разработка управленческих решений (практикум) Учебно-методическое пособие Под научной редакцией д.э.н., проф. В.Н. Некрасова Издательство Южно-Российского института филиала Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, г. Ростов-на-Дону
 22. Рушева А.В. Разработка управленческих решений. Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2017 – 45 с. http://www.lib.unn.ru/students/src/Rusheva_RUR.pdf
 23. Теоретические аспекты линейного программирования. Курсовая работа [Электронный ресурс]. – Режим доступа: otherreferats.allbest.ru/emodel/00120024_0.html
 24. Большая Советская энциклопедия. Условие Липшица. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.booksite.ru/fulltext/1/001/008/070/591.htm
 25. www.cfin.ru/management/controlling/sys_project.shtml
 26. Хемди А. Таха. Введение в исследование операций. 6-е издание. Пер. с англ. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2005 – 908 с.
 27. Дискретная Математика. Курсовая работа. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: studfile.net/preview/1625387/page:7
 28. Хохлюк В.И. Параллельные алгоритмы целочисленной оптимизации. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: math.nsc.ru/LBRT/u1/hohl/book.pdf
 29. Шкондин А.Ю., Свиридова О.В. Исследование и разработка алгоритмов автоматизации работы по учету отправки и прибытия грузов транспортной компании // Современная техника и технологии. 2016. № 12. Ч. 1 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://technology.snauka.ru/2016/12/11265>
 30. Методы оптимизации. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: ppt-online.org/592905 mypresentation.ru/presentation/odnomernaya-optimiz...a-metody-optimizacii
 31. Оптимизация. КНГТУ. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: studfile.net/preview/2030728/page:3/
 32. Методы поиска глобального экстремума Автор: Жиглявский А. А., Жилинскас А. Г. Издательство: Наука Год издания: 1991 Страниц: 248
 33. Романов А.Н., Одинцов Б.Е. Информационные системы в экономике (лекции, упражнения и задачи): Учеб. пособие. М.: Вузовский учебник, 2006. 300с

34. Ершов Н.М. Алгоритмы роевой оптимизации. Лекция 11. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: hrc-education.ru/files/lectures/2011/ershov/ershov_2011_lectures11.pdf
35. Ершов Н.М. Презентация лекции «Роевой интеллект». [Электронный ресурс]. – Режим доступа: hrc-education.ru/files/lectures/2011/ershov/ershov_2011_slides11.pdf
36. Задачи оптимизации в проектировании. Принцип максимума. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: zdamsam.ru/b9467.html
37. Элементы сетевой модели и их характеристики, правила построения. Курсовая работа [Электронный ресурс]. – Режим доступа: studopedia.ru/21_88288_optimizatsiya-i-kriterii-optimizatsii.html
38. Выбор методы оптимизации для определения оптимального средства защиты информации. Курсовая работа. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: ReferatBank.ru/market/referat/i/342880/kurovaya-v...hity-informacii.html 12%
39. Михненко Н.К. Определение оптимального наряда сил и средств для проведения поисково-спасательных работ. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://russian-science.com/wp-content/uploads/2017/10/12_%D0%9C%D0%B8%D1%85%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%BA%D0%BE.pdf
40. Математические методы в экономике. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: bb.dvfu.ru/bbcswebdav/orgs/FUFILIAL/Филиал ДВФУ в ...оды в экономике.docx
41. Двойственная задача линейного программирования. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: function-x.ru/zadacha_dvojtstvennaja.html
42. Математическое программирование задачи с решением. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: 9219603113.com/reshenie-zadach-programmaticheskomu-programmirovaniyu/
43. Методы принятия оптимальных решений. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: portal.tpu.ru/SHARED/g/GILENO/academic/educational...rials/Tab/mm_ve.pdf
44. Управление рисками информационной безопасности. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.securityvision.ru/blog/upravlenie-riskami-informatsionnoy-bezopasnosti-chast-1-osnovnye-ponyatiya-i-metodologiya-otsenki-ri/>
45. Графический анализ чувствительности. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: math.semestr.ru/lp/lpdvd.php
46. Основы линейного программирования. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: bodrenko.org/moptr/moptr-11.htm
47. Графический анализ чувствительности. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: studfile.net/preview/5358248/
48. Алгоритм графического решения задачи линейного программирования. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: studfile.net/preview/6371384/page:2/

49. Экономическая интерпретация двойственной задачи и теории двойственности. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: math.semestr.ru/simplex/lec_dv_econ.php
50. Методы оптимальных решений. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: irbis.amursu.ru/DigitalLibrary/AmurSU_Edition/6273.pdf
51. Хорина И.В., Бражников М.А. Методы исследования и моделирования национальной экономики. Учебное пособие. – Самара. Самарский гос. техн. ун-т, 2010 – 201 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: nme.samgtu.ru/sites/nme.samgtu.ru/files/metody_iss...elir_uch_posobie.pdf
52. Метод Крамера решения систем линейных уравнений. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://studopedia.ru/7_16089_metod-kramera-resheniya-sistem-lineynih-uravneniy.html
53. Анализ решения (модели) на чувствительность. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: matica.org.ua/metodichki-i-knigi-po-matematike/lin...i-na-chuvstvitelnost
54. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: andrey-2119163.narod.ru/method_optim/theory.htm
55. Двойственная задача линейного программирования. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: 100task.ru/sample/128.aspx

Певнева Анна Геннадьевна
Калинкина Мария Евгеньевна

Методы оптимизации

Учебное пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А