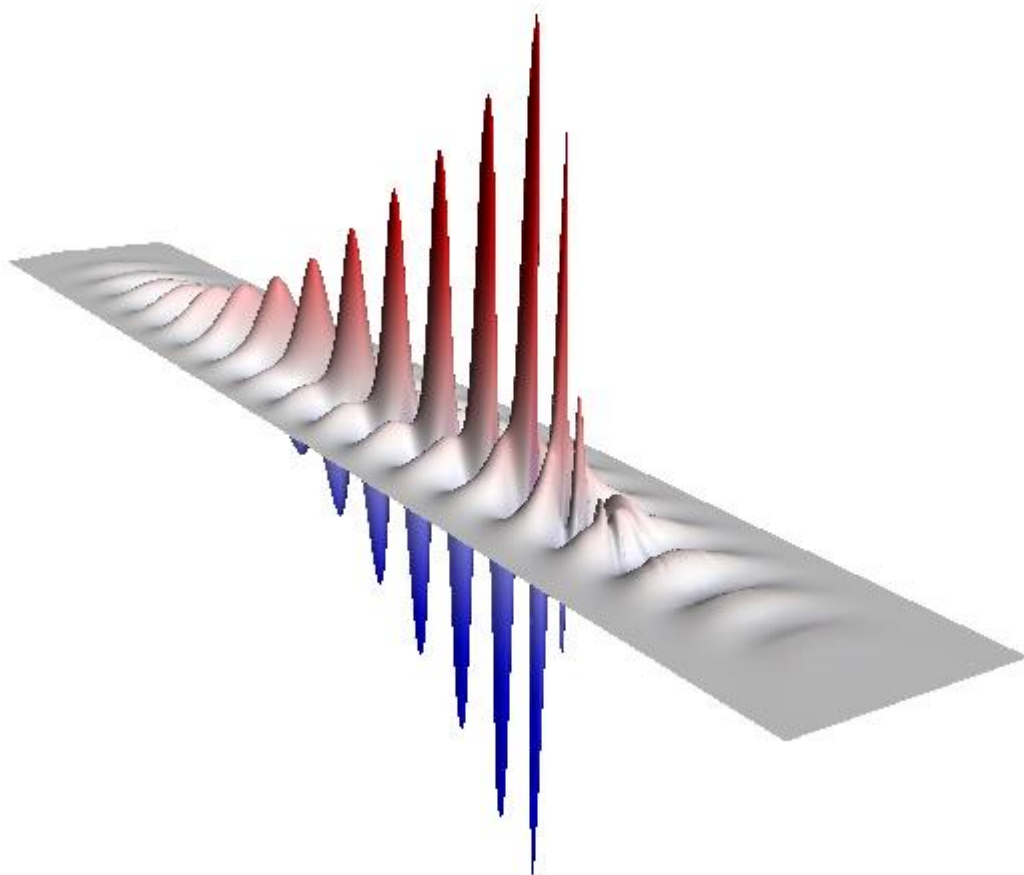


 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**А.А. Дроздов, С.А. Козлов**  
**ОСНОВЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКИ**



**Санкт-Петербург**  
**2021**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**А.А. Дроздов, С.А. Козлов**  
**ОСНОВЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКИ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО  
по направлению подготовки 12.03.03 Фотоника и оптоинформатика  
в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных  
образовательных программ высшего образования бакалавриата

 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург  
2021

Дроздов А.А., Козлов С.А., Основы нелинейной оптики– СПб: Университет ИТМО, 2021. – 69 с.

Рецензент(ы):

Петров Николай Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент, доцент (квалификационная категория "ординарный доцент") факультета фотоники и оптоинформатики, Университета ИТМО.

В данном учебном пособии рассматривается природа зависимости оптических характеристик вещества от интенсивности излучения. Обрисованы такие эффекты самовоздействия света, как самофокусировка и самодефокусировка световых пучков, самосжатие и самоуширение световых импульсов, генерация гармоник и комбинационных частот. При этом рассмотрены применения этих эффектов в системах управления оптическим излучением, в том числе разрабатываемых на факультете фотоники и оптоинформатики. Предусмотрено изучение различных приближений, используемых при решении теоретических задач нелинейной оптики как при описании отклика вещества на силовое воздействие оптического поля, так и при модификации нелинейных волновых уравнений. Изучены методы нормировки нелинейных материальных и волновых уравнений и итерационные методы их решения. Сформулирован широко распространенный в нелинейной оптике метод медленно меняющихся амплитуд, выведены укороченные волновые уравнения. Продемонстрирована природа нелинейности показателя преломления и коэффициента поглощения оптических сред в интенсивных световых волнах. Рассмотрены особенности взаимодействия встречных монохроматических волн в нелинейных средах, генерации в нелинейных изотропных средах третьей гармоники, а в анизотропных средах – второй гармоники излучения. Представлен расчет нелинейного интерферометра Фабри-Перо и демонстрация его мультистабильности. Показана возможность применения этого устройства в схеме оптического транзистора.



**Университет ИТМО** – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2021  
© Дроздов А.А., Козлов С.А., 2021

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ЛЕКЦИЯ 1. Введение в предмет: природа нелинейных явлений, самовоздействие света, генерация гармоник и комбинационных частот.....	4
ЛЕКЦИЯ 2. Методы анализа явлений нелинейной оптики: волновое уравнение, материальные уравнения, нелинейная поляризованность среды .....	12
ЛЕКЦИЯ 3. Решение нелинейного материального уравнения: нормировка уравнения, решение его методом малого параметра .....	19
ЛЕКЦИЯ 4. Нелинейные эффекты в поле поперечно однородных плоских монохроматических волн: полное и укороченное нелинейные волновые уравнения, нелинейность показателя преломления и коэффициента поглощения сред, взаимодействие встречных волн.....	25
ЛЕКЦИЯ 5. Нелинейные эффекты в поле поперечно однородных плоских монохроматических волн: генерация третьей гармоники, генерация второй гармоники, вынужденное комбинационное рассеяние, нелинейный интерферометр Фабри-Перо.....	32
ЛЕКЦИЯ 6. Нелинейные эффекты в поле поперечно неоднородных монохроматических волн (монохроматических световых пучков): полное и укороченное нелинейные волновые уравнения, нормировка укороченного уравнения, пространственные солитоны, крупномасштабная и мелкомасштабная самофокусировка волн .....	47
ЛЕКЦИЯ 7. Динамика поля световых импульсов.....	67
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА .....	69

## ВВЕДЕНИЕ

Уважаемые студенты! Настоящее пособие написано по мотивам лекционного курса по дисциплине «Нелинейная оптика», который читается уже много лет на факультете фотоники и оптоинформатики. Наличие такого курса в образовательной программе факультета для бакалавров связано с тем, что многие современные системы и устройства фотоники и оптоинформатики работают в условиях излучения высокой интенсивности. Взаимодействие интенсивного излучения с веществом демонстрирует особые закономерности, которые могут мешать функционированию систем фотоники, а могут и эффективно использоваться в них для управления излучением. Об этом и пойдет речь в данном пособии. При освоении данного курса Вы можете также использовать учебники и монографии учебного характера [1-3].

## ЛЕКЦИЯ 1

### ВВЕДЕНИЕ В ПРЕДМЕТ

В поле интенсивного лазерного излучения оптические характеристики вещества проявляют зависимость от интенсивности излучения. Так, зависимость показателя преломления вещества  $n$  от частоты излучения  $\omega$  в поле излучения с интенсивностью  $I$  принимает вид

$$n(\omega) = n_0(\omega) + n_2(\omega)I, \quad (1.1)$$

где  $n_2(\omega)$  называют коэффициентом нелинейного показателя преломления. Это важнейшая нелинейная характеристика материала оптической среды. Понятно, что при малых интенсивностях второе слагаемое в выражении (1.1) становится малым, и распространение света в среде можно рассматривать привычно, характеризуя среду ее показателем преломления, величина которого практически не зависит от интенсивности излучения.

Зависимость коэффициента поглощения  $\kappa$  от  $\omega$  можно записать в аналогичном виде

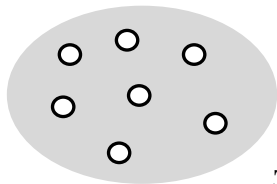
$$\kappa(\omega) = \kappa_0(\omega) + \kappa_2(\omega)I, \quad (1.2)$$

где  $\kappa_2(\omega)$  – коэффициент нелинейного показателя поглощения.

**Замечание:** напомним, что интенсивность волны – это энергия, переносимая волной в единицу времени через единицу площади поверхности (перпендикулярной к направлению распространения).

## I. Природа явления

Классическая модель вещества представляет его, как это показано на простом рисунке ниже, в виде совокупности большого числа молекул или атомов.



При анализе оптических явлений вводится понятие оптического электрона, который наиболее легко взаимодействует с электрическим полем излучения. Движение такого оптического электрона описывают с помощью классических уравнений

динамики вида

$$m\ddot{r} = -kr - ar^2 - br^3 - g\dot{r} + eE. \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) – это уравнение осциллятора:  $r$  в нем – отклонение оптического электрона от положения равновесия,  $m$  – масса электрона,  $k$  характеризует возвращающую в положение равновесия внутриатомную силу,  $e$  – заряд электрона,  $E$  – напряженность электрического поля излучения. В общем случае осциллятор (1.3) является ангармоническим, поскольку при больших отклонениях от равновесия проявляется нелинейность возвращающей силы, описываемая вторым и третьим слагаемыми в (1.3). Именно ангармонизм колебаний оптических электронов при их сильном отклонении от положения равновесия и определяет нелинейные эффекты в веществе.

Макроскопическая величина, характеризующая отклик единицы объема вещества, называется поляризованностью среды и в простейшем случае представляется в виде

$$P = N \cdot er, \quad (1.4)$$

где  $N$  – концентрация атомов вещества, а  $er$  – дипольный момент отдельного атома  $p$ .

Из уравнения движения отдельного оптического электрона (1.3) с учетом вида поляризованности среды вида (1.4) для отклика среды на электрическое поле излучения несложно получить уравнение вида

$$\ddot{P} + 2\gamma\dot{P} + \omega_0^2 P + \alpha P^2 + \beta P^3 + \dots = \frac{e^2}{m} NE. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) называют материальным уравнением и, решаемое совместно с уравнениями Максвелла, оно позволяет анализировать закономерности распространения поля излучения в оптических средах.

**Упражнение:** получить уравнение (1.5) из уравнения (1.3), приведя вид соотношений между коэффициентами одного и другого уравнения

$$\gamma = \gamma(e, m, N, g), \quad \omega_0^2 = \omega_0^2(e, m, N, k), \quad \gamma = \frac{1}{2} \frac{g}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

**Замечание о моделях:** Мы очень схематично рассмотрели обоснование уравнения динамики поляризованности оптической среды в поле излучения. При этом использовали очень простую классическую теорию строения вещества. Но отметим, что строгая квантовая модель вещества для материального уравнения во многих случаях дает аналогичный результат.

Рассмотрим теперь, как можно записать поляризационный отклик среды на поле простейшей модели излучения в виде монохроматической волны. При

$$E = \frac{1}{2} \mathcal{E}_\omega e^{i\omega t} + \text{к.с.}, \quad (1.6)$$

где  $\mathcal{E}_\omega = \mathcal{E}_0 e^{i\varphi}$  – комплексная амплитуда монохроматического излучения, материальное уравнение (1.5) принимает вид

$$P = \left( \frac{1}{2} \hat{P}_\omega e^{i\omega t} + \text{к.с.} \right) + \left( \frac{1}{2} \hat{P}_{2\omega} e^{2i\omega t} + \text{к.с.} \right) + \dots \quad (1.7)$$

**Замечание:** напомним, что комплексное представление поля в виде (1.6) есть простое гармоническое колебание. Действительно

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 e^{-i\varphi} e^{-i\omega t} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 \left[ \cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \cos(\omega t + \varphi) - i \sin(\omega t + \varphi) \right] = \\ &= \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

В (1.7), как это можно показать (что мы и сделаем в последующих лекциях),

$$\hat{P}_\omega = \chi(\omega) \mathcal{E}(\omega) + \chi^{(3)}(\omega) |\mathcal{E}(\omega)|^2 \mathcal{E}(\omega) = \tilde{\chi}(\omega) \mathcal{E}(\omega), \quad (1.8)$$

где  $\tilde{\chi}(\omega) = \chi(\omega) + \chi^{(3)}(\omega) |\mathcal{E}(\omega)|^2$ .

Сравнивая выражения для нелинейной восприимчивости среды (1.8) и ее нелинейного показателя преломления (1.1), видим, что они одинаковы по структуре, поскольку  $|E|^2$  с точностью до коэффициента и есть интенсивность среды. Свет сам себе меняет восприимчивость среды и ее показатель преломления, которые становятся зависимыми от интенсивности излучения. Явления, связанные с этим, называют явлениями **самовоздействия света**.

Как видно из (1.7) в среде появляются также колебания поляризованности на новых частотах.

$\hat{P}_0 = \chi^{(2)}(0) |\mathcal{E}_\omega|^2$  – обеспечивает появление квазипостоянных полей;

$\hat{P}_{2\omega} = \chi^{(2)}(2\omega) \mathcal{E}_\omega^2$  – обеспечивает генерацию второй гармоники;

$\hat{P}_{3\omega} = \chi^{(3)}(3\omega) \mathcal{E}_\omega^3$  – обеспечивает генерацию третьей гармоники.



## II. Самовоздействие света

Рассмотрим некоторые классические явления самовоздействия света.

### 1. Самофокусировка и самодефокусировка световых пучков

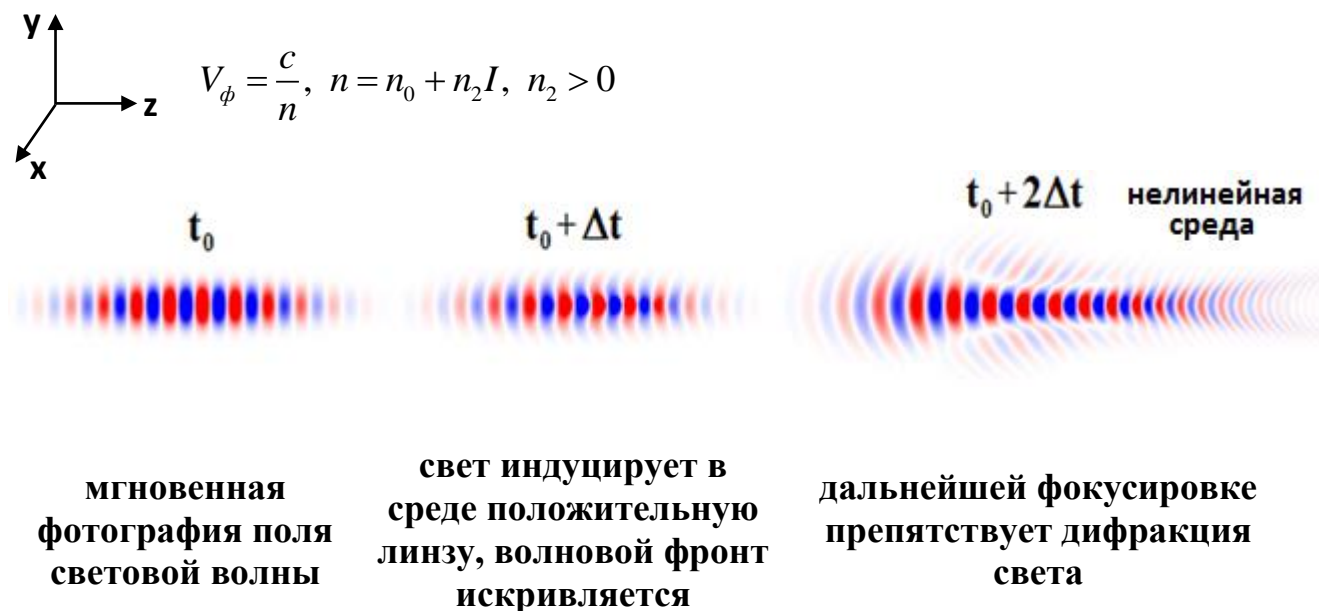


Рисунок 1.1 – Иллюстрация самовоздействия света: самофокусировка пучка

На приведенном выше рисунке 1.1 и подписях к нему поясняется, как происходит самофокусировка в среде с положительным коэффициентом нелинейного показателя преломления. Там, где наиболее высока интенсивность излучения (на оси пучка), показатель преломления среды становится большим, чем на периферии пучка, а фазовая скорость волны, соответственно, меньше, волновой фронт искривляется, свет сам себе в среде наводит линзу и затем самофокусируется. На рисунке 1.1 красным частям изображения соответствуют максимальные положительные значения электрического поля, а синим – максимальные отрицательные значения.

Самофокусировка является причиной ограничения яркости сверхмощных лазерных систем. Это пример негативного характера такого явления в определенных ситуациях. С другой стороны, самофокусировка позволяет осуществлять синхронизацию мод в фемтосекундных лазерах. Именно

сверхбыстрый эффект самовоздействия света и дает возможность управлять свойствами излучения на столь коротких временных диапазонах.

**Упражнение:** рассмотреть случай с  $n_2 < 0$ . Показать, как свет индуцирует в среде отрицательную линзу и самодефокусируется.

## 2. Самосжатие и самоуширение световых импульсов. Солитоны.

Ниже, на рисунке 1.2, приведена иллюстрация другого явления самовоздействия света – самосжатия импульса в оптической среде из-за нелинейности показателя преломления. Как и в вышерассмотренном случае, реализуется фазовая самомодуляция излучения. Дальнейшему самосжатию препятствует дисперсия света. Говорят, что свет индуцирует в среде «временную» линзу.

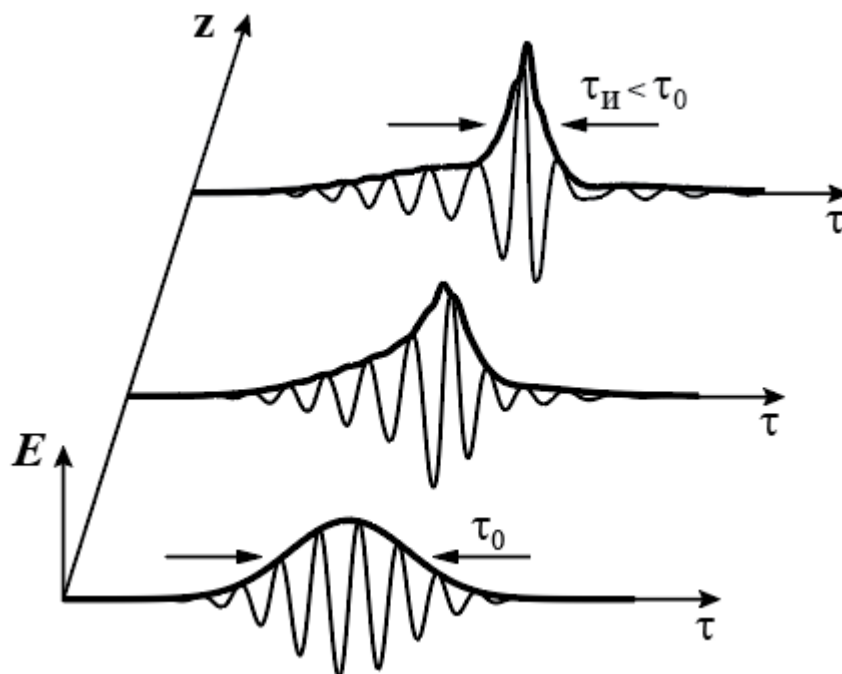


Рисунок 1.2 – Иллюстрация самосжатия импульса в оптической среде. Здесь

$$\tau = t - \frac{z}{V}$$

определяет сопровождающую импульс систему координат

Аналогично можно рассмотреть случай с самоуширением импульса в среде с отрицательным коэффициентом нелинейного показателя преломления. Подробнее эти явления мы рассмотрим в других лекциях.

### 3. Оптический транзистор

Новые интересные проявления самовоздействия света рассмотрим на конкретном примере интерферометра Фабри-Перо (ИФП). Его простая схема приведена на рисунке 1.3.



Рисунок 1.3 – Схема интерферометра Фабри-Перо

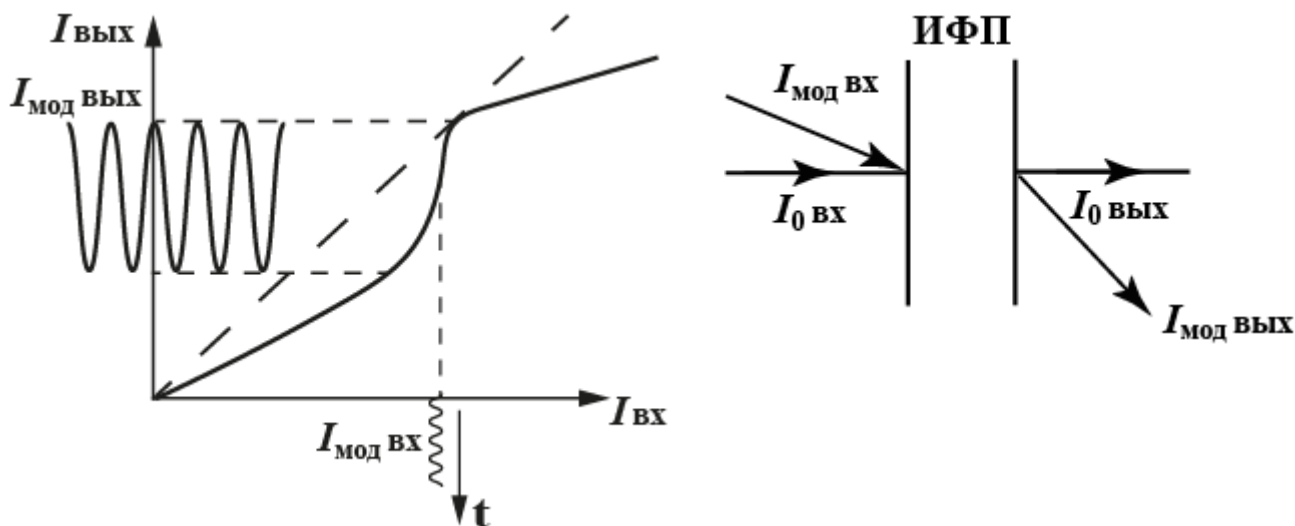


Рисунок 1.4 – Режим работы нелинейного ИФП в качестве оптического транзистора

При  $I_{\text{МОД Вых}} > I_{\text{МОД Вх}}$  обеспечивается функция усиления. Штриховая линия на левом рисунке 1.4 соответствует линейному режиму работы ИФП.

Возможна и следующая реализация, как показано на рисунке 1.5.

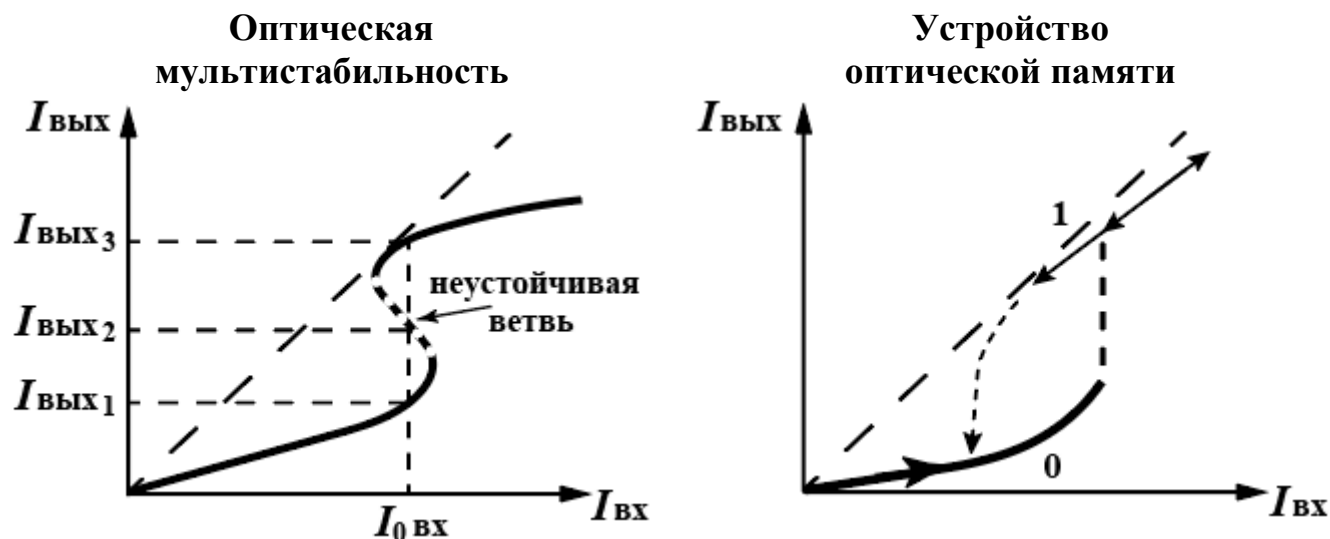


Рисунок 1.5 – Режим работы нелинейного ИФП в качестве элемента оптической памяти

Как мы видим из рисунков 1.4 и 1.5, нелинейный интерферометр Фабри-Перо может использоваться и как оптический транзистор, и как элемент оптической памяти.

### III. Генерация гармоник и комбинационных частот

Из уравнения (1.7) следует, что при распространении в нелинейной среде излучения на частоте  $\omega$  в среде появляется дополнительное излучение на утроенной частоте  $E_\omega \rightarrow E_{3\omega}$ . А при распространении в нелинейной среде излучения на двух частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в ней появляется излучение и на комбинационных частотах  $E_{\omega_1}$  и  $E_{\omega_2} \rightarrow E_{3\omega_1}, E_{3\omega_2}, E_{2\omega_1+\omega_2}, E_{\omega_1+2\omega_2}, E_{2\omega_1-\omega_2}$ .

Конечно, такие эффекты можно использовать для расширения спектрального диапазона источников излучения. Эти эффекты широко используются на практике.

Таким образом, мы получили некий абрис нелинейных явлений, которые реализуются в поле интенсивного излучения в оптических средах, и возможности их использования. Теперь приступим к последовательному изучению этих явлений. Начнем с рассмотрения методов анализа в нелинейной оптике.

## Вопросы для самоконтроля

1. Какую величину называют коэффициентом нелинейного показателя преломления?
2. Какова причина агармоничности колебаний оптических электронов в атомах вещества под воздействием поля излучения?
3. Какие эффекты относят к эффектам самовоздействия света?
4. За счет энергии какого источника происходит усиление модулированного света в оптическом транзисторе на основе нелинейного интерферометра Фабри-Перо?
5. При каких условиях можно наблюдать в оптической среде генерацию гармоник и излучения на комбинационных частотах?

## ЛЕКЦИЯ 2

### МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЯВЛЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКИ

#### 1. Методы классической оптики:

Динамика и поля, и вещества описывается классически.

#### 2. Полуклассический метод:

Динамика поля описывается классически, а вещество – законами квантовой механики.

#### 3. Методы квантовой электродинамики:

И поле, и вещество описываются законами квантовой физики.

Рассмотрим классические методы нелинейной оптики. Ими в данном пособии мы и ограничимся. Это означает, что в нашем анализе мы будем основываться на уравнениях Максвелла и следствиях из них. В нижеследующем разделе покажем, как уравнения Максвелла можно редуцировать к волновому уравнению.

### Волновое уравнение

Напомним, что уравнения Максвелла (в системе СИ) имеют вид

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \nabla \vec{D} = \rho, \\ \nabla \vec{B} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  – напряженности электрического и магнитного поля электромагнитной волны,  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$  – электрическая и магнитная индукция,  $\rho$  – плотность свободных зарядов,  $\vec{j}$  – плотность тока.

Отметим, что часто уравнения Максвелла записывают и в системе СГС, которую мы тоже будем использовать.

При анализе решений уравнений Максвелла важно понимать, что в этой системе пять векторных неизвестных и одна скалярная. Иными словами, в системе всего скалярных неизвестных  $3+3+3+3+3+1=16$ .

С другой стороны, в системе уравнений Максвелла два уравнения векторные, а два скалярные, т.е. в системе скалярных уравнений содержится  $3+3+1+1=8$ .

Получается, что неизвестных в системе уравнений Максвелла больше, чем самих уравнений. Это означает наличие множества нефизических решений в системе, т.е. при заданных граничных и/или начальных условиях решения оказываются не единственными.

Поэтому уравнения Максвелла дополняют так называемыми материальными уравнениями, которые описывают дополнительные взаимосвязи между неизвестными.

Рассмотрим их для частного случая диэлектрических сред:

$$\rho = 0, \vec{j} = 0 \quad 2.2(a)$$

– физически это означает, что свободных электрических зарядов в рассматриваемом объекте нет.

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad 2.2(b)$$

– полагаем, что среда – немагнитная.

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}) \quad 2.2(v)$$

– считаем, что электрическая индукция не определяется магнитным полем.

Приближения (2.2), которые мы выбрали в качестве материальных уравнений, не дают возможности анализа распространения излучения во многих интересных случаях, например, в металлах, магнитных или бианизотропных средах. Но, тем не менее, они хорошо описывают динамику поля излучения в широком круге оптических сред, например, в стеклах, жидкостях, газах, многих кристаллах. Кроме того, мы на простом примере объектов исследования, характеризуемых уравнениями (2.2), отработаем методы, применимые и для сред, описываемых более сложными материальными уравнениями.

Системы дифференциальных уравнений с несколькими переменными, подобные системе уравнений Максвелла, решают разными способами. Для понимания дальнейших манипуляций с уравнениями Максвелла, которые приведут нас к волновому уравнению, дадим предварительно математическое приложение, иллюстрирующее типичный метод решения простейшей системы, состоящей из всего двух обыкновенных дифференциальных уравнений.

### Математическое приложение

Пусть имеем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} + y = 0, \\ \dot{y} - a^2 x = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

где  $x$  и  $y$  – это искомые переменные, точкой в (2.3) обозначается дифференцирование по времени.

Типичный прием, позволяющий решить систему (2.3), заключается в дополнительном дифференцировании первого уравнения системы по времени,

$$\ddot{x} + \dot{y} = 0, \quad (2.4)$$

и подстановке в получившееся уравнение (2.4) значения производной  $y$  по времени из второго уравнения системы (2.3).

Вместо системы из двух уравнений с двумя неизвестными в итоге получаем одно уравнение и только с одним неизвестным

$$\ddot{x} + a^2 x = 0, \quad (2.5)$$

решение которого хорошо известно. Смотри, например, [4].

Можно аналогично тому, как рассмотрена процедура редукции системы дифференциальных уравнений в приложении, поступить и с системой уравнений Максвелла. Применим операцию дифференцирования к первому уравнению системы, но на этот раз более сложную, чем в приложении, векторную операцию дифференцирования вида  $\nabla \times$ . Потом, как и в приложении, подставляя выражение для векторной производной вида ротора  $\nabla \times \vec{H}$  из второго уравнения системы уравнений Максвелла (2.1), с учетом приближения (2.2а) для немагнитных диэлектриков получаем

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}. \quad (2.6)$$

Таким образом, для электромагнитного излучения в диэлектриках получили волновое уравнение вида

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0 \text{ (СИ)}, \quad (2.7a)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0 \text{ (СГС)}. \quad (2.7б)$$

Первое слагаемое в волновом уравнении (2.7а) описывает дифракцию излучения, а второе – отклик вещества на силовое воздействие электромагнитного поля.

Учтем, что электрическая индукция имеет вид

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \text{ (СИ)}$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \text{ (СГС)}, \text{ где } \vec{P} \text{ – поляризованность среды.}$$



Тогда волновое уравнение для диэлектрических сред примет вид

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \quad (2.8)$$

**Замечание:**  $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ .

**Упражнение:** вывести волновое уравнение для металлов, принимая дополнительно во внимание для них материальное уравнение в виде закона Ома  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ .

Как видно из волнового уравнения (2.8), анализ динамики электрического поля излучения (его иногда называют оптическим полем, поскольку обычно именно оно определяет взаимодействие излучения с веществом) можно провести, только зная вид поляризационного отклика среды на силовое воздействие этого поля. Рассмотрим характерный метод анализа такого отклика.

### Нелинейная поляризованность среды

Обычно удобно представлять поляризованность среды в виде  $\vec{P}(\vec{E}) = \vec{P}_l(\vec{E}) + \vec{P}_{нл}(\vec{E})$ , (2.9)

где  $\vec{P}_l$  – линейный, а  $\vec{P}_{нл}$  – нелинейный функционалы от  $\vec{E}$ .

В неполярных диэлектриках часто хорошим приближением, как обсуждалось на первой лекции, является представление поляризованности среды в виде  $\vec{P}(\vec{E}) = N\vec{p}$ , где  $N$  – концентрация частиц, а  $\vec{p}$  – дипольный момент частицы (атома или молекулы).

Тогда в сильном поле излучения поляризованность среды может быть записана в виде

$$\vec{P} = N\vec{p} = (N_0 + \Delta N)(\vec{p}_l + \vec{p}_{нл}) = N_0 \vec{p}_l + N_0 \vec{p}_{нл} + \Delta N \vec{p}_l + \Delta N \vec{p}_{нл}, \quad (2.10)$$

где  $N_0$  – концентрация в отсутствие поля,  $\Delta N$  – изменение концентрации в поле световой волны. Поскольку нелинейные изменения параметров среды малы, то слагаемое  $\Delta N \vec{p}_{нл}$  в (2.10) можно полагать еще более высокой степени малым и пренебречь им. Таким образом, первое слагаемое в (2.10) описывает линейный

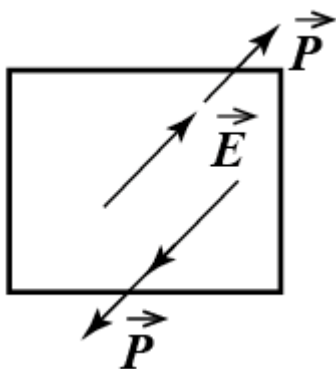
отклик среды, следующие два слагаемых – нелинейный отклик, а последним слагаемым можно пренебречь.

**Вывод:** можно выделить два механизма нелинейности оптических сред:

1. связанный с нелинейностью отклика отдельной частицы: электронный, ионный, электронно-колебательный и др.
2. связанный с изменением плотности среды: тепловой, химический (изменение  $N$  из-за химических реакций) и др.

Ограничимся в данном пособии анализом нелинейности макроскопического отклика среды, обусловленной отдельными ее частицами. При этом будем обсуждать поляризованность изотропной среды, для которой нелинейное материальное уравнение (1.5) несколько упростится и примет вид

$$\ddot{P} + 2\gamma\dot{P} + \omega_0^2 P + \beta P^3 = \frac{e^2}{m} NE. \quad (2.11)$$



**Замечание:** Из соображений симметрии в изотропной среде  $\alpha P^2 = 0$ .

Упрощая материальное уравнение (1.5) до уравнения (2.11), мы выводим из рассмотрения нелинейные эффекты в анизотропных кристаллах. Но опять напоминаем, что задача курса – продемонстрировать общие методы решения нелинейной оптики, пусть даже на самых простых объектах. Эти методы, будучи освоенными, позволят при необходимости изучать и нелинейные эффекты в более сложных для описания средах, например, в кристаллах.

При решении в оптической физике нелинейных уравнений типа (2.11) часто используют метод малого параметра. Это связано с тем, что нелинейная часть отклика среды на силовое воздействие интенсивного света обычно значительно меньше, чем линейная часть этого отклика. Рассмотрим этот метод согласно учебнику [5].

## Математическое приложение

### Метод малого параметра в теории нелинейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим этот метод на примере нелинейного дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + \mu F(t, \dot{x}, \mu), \quad (2.12)$$

где  $\mu$  – малый параметр,  $\ddot{x} + a^2 x = f(t)$  – порождающее для нелинейного уравнения.

Ищем решение уравнения (2.12) в виде ряда разложения по малому параметру

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots \quad (2.13)$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$\ddot{x}_0 + \mu \ddot{x}_1 + \mu^2 \ddot{x}_2 + a^2 x_0 + a^2 \mu x_1 + a^2 \mu^2 x_2 = f(t) + \mu \left[ F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) + \left( \frac{\partial F}{\partial \mu} \right)_{\substack{\mu=0 \\ x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} \mu + \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\substack{\mu=0 \\ x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} (x - x_0) + \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{\substack{\mu=0 \\ x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} (\dot{x} - \dot{x}_0) + \dots \right]. \quad (2.14)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu$  и получим систему

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 + a^2 x_0 = f(t), \\ \ddot{x}_1 + a^2 x_1 = F(t, x_0, \dot{x}_0, 0), \\ \ddot{x}_2 + a^2 x_2 = \left( \frac{\partial F}{\partial \mu} \right)_{\substack{\mu=0 \\ x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} + \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\substack{\mu=0 \\ x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_1}} x_1 + \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{\substack{\mu=0 \\ x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_1}} \dot{x}_1. \\ \dots \end{cases} \quad (2.15)$$

**Вывод:** Вместо одного сложного нелинейного уравнения (2.12) получили целую систему, но простых линейных дифференциальных уравнений (2.15). Эти уравнения обычно несложно решаются (смотри, например, справочник таких решений [4]), в то время как исходное нелинейное уравнение простого аналитического решения обычно не имеет.

### Вопросы для самоконтроля

1. В чем суть полуклассического метода анализа явлений нелинейной оптики?
2. Совпадает ли число уравнений в системе уравнений Максвелла с числом искомых величин в этой системе?
3. Какие механизмы нелинейности поляризованного отклика в поле оптического излучения можно различать?
4. Почему в изотропной среде отсутствует квадратичный по полю поляризационный отклик?
5. В чем суть метода малого параметра решения задач нелинейной физики?

## ЛЕКЦИЯ 3

### РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО МАТЕРИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим характерные для нелинейной оптики методы анализа типичных задач этого раздела оптической физики, демонстрируя особенности этих методов при решении полученного в предыдущей лекции материального уравнения для изотропных нелинейных диэлектрических сред

$$\ddot{P} + 2\gamma\dot{P} + \omega_0^2 P + \beta P^3 = \frac{e^2}{m} NE. \quad (3.1)$$

Получим решения (3.1) сначала для частного случая силового воздействия на среду монохроматического излучения, а затем обсудим это решение уже для общего случая, т.е. для поля  $E$  в виде произвольной функции от времени  $t$ .

#### I. Частное решение уравнения (3.1)

Рассматриваем случай воздействия на среду гармонического поля

$$E(t) = \frac{1}{2} \left( \mathcal{E}_\omega e^{i\omega t} + \mathcal{E}_\omega^* e^{-i\omega t} \right), \quad (3.2)$$

$$\text{здесь } \mathcal{E}_\omega = E_0 e^{i\varphi} \quad (3.3)$$

– комплексная амплитуда поля.

Поскольку методика получения решения может быть использована при анализе многих задач нелинейной физики, то предлагается освоить ее, выполнив ряд упражнений, каждое из которых полезно самостоятельно.

**Упражнение 1:** Провести нормировку уравнения (3.1). Следует ввести новые функции и переменные

$$\tilde{\mathcal{E}}_\omega = \frac{\mathcal{E}_\omega}{E_0}, \quad \tilde{t} = \omega t, \quad \tilde{P} = \frac{P}{E_0} \frac{1}{\frac{e^2 N}{m\omega^2}}, \quad (3.4)$$

которые являются безразмерными величинами. Надо показать, что для введенных таким образом безразмерных величин уравнение (3.1) может быть приведено к нормированному виду

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial \tilde{t}^2} + 2\Gamma \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{t}} + \Omega_0^2 \tilde{P} + \mu \tilde{P}^3 = \tilde{E}. \quad (3.5)$$

Нормированное уравнение (3.5) очень удобно в численных расчетах, поскольку переменные уравнения во времени заметно изменяются на масштабах порядка единицы. Например, при гармоническом воздействии поле  $E$  за полупериод меняется от единицы (максимума) до минус единицы (минимума) на нормированном временном отрезке  $\pi$ . Под такие параметры удобно строить численную сетку, в то время как реальное время за период волны меняется на величину порядка  $10^{-15}$  с. Удобно нормированное уравнение и в общем теоретическом анализе. Поскольку при заданной нормировке выполняется оценка  $\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial \tilde{t}^2} \sim \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{t}} \sim \tilde{P} \sim \tilde{P}^3 \sim \tilde{E}$ , то это означает, что значимость эффектов в процессе взаимодействия излучения с веществом определяется коэффициентами уравнения  $2\Gamma$ ,  $\Omega_0^2$ ,  $\mu$ . Мы, не решая уравнение, по простым оценкам этих

коэффициентов можем сказать, например, значительны ли нелинейные явления по сравнению с линейными. Нормировка математических моделей любых физических процессов – это практически всегда необходимая теоретическая процедура анализа процессов, не только в нелинейной оптике.

**Упражнение 2:** Используя метод малого параметра, о котором рассказано в математическом приложении на прошлой лекции, свести нелинейное уравнение (3.5) к системе линейных уравнений. Для быстроты, но не меняя сути методики, выполнить это упражнение для упрощенного уравнения (3.5), в котором пренебрегаем третьим слагаемым, описывающим поглощение излучения в веществе, вида

$$\ddot{\tilde{P}} + \Omega_0^2 \tilde{P} + \mu \tilde{P}^3 = \tilde{E}, \quad (3.6)$$

где  $\mu$  полагаем малым параметром.

Для удобства далее над переменными не пишем знак «~».

Ищем решение (3.6) в виде

$$P = P_0 + \mu P_1. \quad (3.7)$$

Тогда после подстановки (3.7) в (3.6) получаем

$$\ddot{P} + \mu \ddot{P}_1 + \Omega_0^2 P_0 + \mu \Omega_0^2 P_1 + \mu (P_0^3 + 3P_0^2 P_1 \mu + 3P_0 P_1^2 \mu^2 + P_1^3 \mu^3) = E. \quad (3.8)$$

Приравнявая в (3.8) коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu$ , исходное нелинейное уравнение (3.6) свести к системе простых линейных уравнений

$$\begin{cases} \ddot{P}_0 + \Omega_0^2 P_0 = E, \\ \ddot{P}_1 + \Omega_0^2 P_1 = -P_0^3, \\ \ddot{P}_2 + \Omega_0^2 P_2 = -3P_0^2 P_1. \end{cases} \quad (3.9)$$

**Упражнение 3:** Ищем решение первого уравнения системы (3.9)

$$\ddot{P}_0 + \Omega_0^2 P_0 = \frac{1}{2} (\mathcal{E}_\omega e^{it} + \mathcal{E}_\omega^* e^{-it}) \text{ в виде } P_0 = \frac{1}{2} (P_\omega e^{it} + P_\omega^* e^{-it}).$$

Тогда  $P_\omega(i)^2 e^{it} + P_\omega^*(-i)^2 e^{-it} + \Omega_0^2 P_\omega e^{it} + \Omega_0^2 P_\omega^* e^{-it} = \mathcal{E}_\omega e^{it} + \mathcal{E}_\omega^* e^{-it}$ .

И решение исходного уравнения принимает вид

$$P_\omega = \frac{1}{\Omega_0^2 - 1} \mathcal{E}_\omega = \tilde{\chi}_{\text{лин}} \mathcal{E}_\omega, \quad P_\omega^* = \frac{1}{\Omega_0^2 - 1} \mathcal{E}_\omega^*.$$

**Упражнение 4:** Ищем решение второго уравнения системы (3.9) в виде

$$P_1 = \frac{1}{2} (P_{\omega \text{ нел}} e^{it} + P_{\omega \text{ нел}}^* e^{-it}) + \frac{1}{2} (P_{3\omega \text{ нел}} e^{3it} + P_{3\omega \text{ нел}}^* e^{-3it}).$$

$$\text{Получаем } P_{\omega \text{ нел}} = \chi_1^3 |\mathcal{E}_\omega|^2 \mathcal{E}_\omega, \quad P_{3\omega \text{ нел}} = \chi_2^3 \mathcal{E}_\omega^3,$$

$$\text{где } \chi_1^3 = -\frac{3}{4} \frac{1}{(\Omega_0^2 - 1)^4}, \quad \chi_2^3 = -\frac{1}{4} \frac{1}{(\Omega_0^2 - 1)^3 (\Omega_0^2 - 9)}.$$

Промежуточные выкладки опускаем, предоставляя их провести читателю самостоятельно.

**Упражнение 5:** Вернуться к исходным ненормированным величинам

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} [(P_{\omega \text{ лин}} + P_{\omega \text{ нел}}) e^{i\omega t} + \text{к.с.}] + \frac{1}{2} [P_{3\omega \text{ нел}} e^{i3\omega t} + \text{к.с.}] = \\ &= \frac{1}{2} [P_\omega e^{i\omega t} + P_{3\omega} e^{i3\omega t} + \text{к.с.}], \end{aligned}$$

$$\begin{cases} P_{\omega \text{ лин}} = \chi(\omega) \mathcal{E}_\omega, \\ P_{\omega \text{ нел}} = \chi^{(3)}(\omega) |\mathcal{E}_\omega|^2 \mathcal{E}_\omega. \end{cases}$$

Следует показать, что

$$P_{3\omega} = \chi^{(3)}(3\omega) \mathcal{E}_\omega^3, \quad \chi_1^{(3)}(\omega) = -\frac{\frac{e^3 N^3}{m^3} \beta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^4}, \quad \chi_2^{(3)}(3\omega) = -\frac{\frac{e^3 N^3}{m^3} \beta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^3 (\omega_0^2 - 9\omega^2)}.$$

Таким образом, после выполнения ряда упражнений получены итерационные решения исходной задачи. Найден нелинейный поляризационный отклик сред на сильное гармоническое воздействие оптического поля излучения.

Теперь обратимся к общему решению поставленной задачи.

## II. Общее решение уравнения (3.1)

Решение первого уравнения системы (3.9) имеет вид

$$P_0(\tilde{t}) = C_1 e^{i\Omega_0 \tilde{t}} + C_2 e^{-i\Omega_0 \tilde{t}} + \frac{1}{\sqrt{1-\Gamma^2}} \int_{-\infty}^{\tilde{t}} E(\tilde{t}) e^{-\Gamma(t-t')} \sin(\sqrt{1-\Gamma^2}(t-t')) dt', \quad (3.10)$$

где первые два слагаемых описывают собственные колебания атомов на частоте  $\Omega_0$ , а последнее слагаемое описывает вынужденные колебания в поле  $E$ . Решение (3.10) можно найти, например, в справочнике [4].

В решении (3.10) удобно перейти к переменной  $\tau = t - t'$ , тогда

$$P_0(\tilde{t}) = \frac{1}{\sqrt{1-\Gamma^2}} \int_0^{\infty} \tilde{E}(\tilde{t} - \tau) e^{-\Gamma\tau} \sin(\Omega_0 \tau) d\tau. \quad (3.11)$$

Учтено, что при  $\tilde{t} \rightarrow t$ ,  $\tau \rightarrow 0$ , а при  $\tau \rightarrow +\infty$ ,  $\tilde{t} \rightarrow -\infty$ .

Получили для среды, не меняющей свои свойства с течением времени,  $\tilde{P}_0(\tilde{t}) = \int_0^{\infty} \tilde{\chi}(\tau) \tilde{E}(\tilde{t} - \tau) d\tau$ . (3.12)

Отклик, как видим из (3.12), зависит от поля, воздействующего на среду как в данный, так и предыдущие моменты времени.

**Замечание:** В общем случае  $\tilde{P}_0(\tilde{t}, \vec{r}) = \int_0^{\infty} \tilde{\chi}(\tau, \Delta\vec{r}) \tilde{E}(\tilde{t} - \tau, \vec{r} - \Delta\vec{r}) d\tau d\Delta\vec{r}$

характеризует зависимость поляризации от поля, действующего и в других точках пространства. Здесь  $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$ .

Можно показать, что общее решение второго уравнения системы (3.9) имеет вид



$$\tilde{P}_1(\tilde{t}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \chi^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \tilde{E}(\tilde{t} - \tau_1) \tilde{E}(\tilde{t} - \tau_1 - \tau_2) \tilde{E}(\tilde{t} - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \quad (3.13)$$

где  $\chi^{(3)}$  – нелинейная восприимчивость третьего порядка.

**Вывод:** В общем случае поляризованность изотропной среды имеет вид

$$P(t) = \int_0^\infty \chi(\tau) E(t - \tau) d\tau + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \chi^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) E(t - \tau_1) E(t - \tau_1 - \tau_2) E(t - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (3.14)$$

или, как и рассматривали в предыдущей лекции,  $P(t) = P_{\text{лин}}(t) + P_{\text{нел}}(t)$ .

### Вопросы для самоконтроля

1. Зачем полезно проводить нормировку математических моделей нелинейной динамики физических систем?
2. Чем проще решать целую систему уравнений, получаемую при использовании метода малого параметра, вместо всего одного исходного уравнения нелинейной динамики поляризованности оптической среды?
3. Каков вид нелинейного поляризационного отклика изотропной среды в поле интенсивного монохроматического излучения?

## ЛЕКЦИЯ 4

### НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ПОЛЕ ПОПЕРЕЧНО ОДНОРОДНЫХ ПЛОСКИХ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВОЛН

#### I. Полное нелинейное волновое уравнение

Для пространственно неограниченной плоской волны  $\vec{E} = \vec{E}(z, t)$  в изотропной среде волновое уравнение (2.8) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_{\text{лин}}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_{\text{нел}}}{\partial t^2}. \quad (4.1)$$

В значительно более простой математической модели распространения поля излучения в оптической среде (4.1) по сравнению с уравнением (2.8) отсутствуют производные по поперечным координатам, поскольку мы начинаем анализ решений волнового уравнения для простейшей модели излучения вида плоской поперечно однородной волны. Разумеется, это идеализированная и реально отсутствующая в природе волна. Но решения, которые мы получим, позволяют определить ключевые особенности многих нелинейных явлений, в которых не является существенной дифракция света. И, конечно, в следующих лекциях мы рассмотрим и такие нелинейные процессы, протекание которых существенно зависит от ограниченности поперечной структуры поля излучения.

**Замечание:** В изотропной среде плоская волна поперечна.

Сделаем еще одно упрощение, полагая, что волна монохроматическая. Для такой волны  $\vec{E}(z, t) = \frac{1}{2} \vec{E}_\omega(z) e^{i\omega t} + \text{к.с}$  уравнение (4.1) сводится к еще более простому виду:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_\omega}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_\omega = -\frac{4\pi\omega^2}{c^2} \vec{P}_{\omega \text{ лин}} - \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \vec{P}_{\omega \text{ нел}}. \quad (4.2)$$

Обратим внимание, что, в отличие от уравнений в частных производных (2.8) и (4.1), (4.2) является обыкновенным дифференциальным уравнением, т.е. значительно более простым математическим объектом для изучения.

**Замечание:** Каждый раз, дополнительно упрощая математическую модель распространения света в оптических средах, мы, конечно, «убираем» из рассмотрения все новые и новые эффекты. Так, при переходе к (4.2) от (4.1) мы не только перешли к еще более идеализированной модели бесконечной во времени монохроматической волны, но и пренебрегли генерацией третьей и более высоких нечетных гармоник. Попутно отметим, что уравнение для комплексно-сопряженных величин мы не пишем. Оно не дает новой информации.

Для линейно поляризованной волны (это еще одно упрощение), как было показано в предыдущей лекции, выполняется  $P_{\omega \text{ лин}} = \chi(\omega)E_{\omega}$  и  $P_{\omega \text{ нели}} = \chi^{(3)}(\omega)|E_{\omega}|^2 E_{\omega}$ . Тогда уравнение (4.2) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 E_{\omega}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2 n_{\text{лин}}^2}{c^2} E_{\omega} + \frac{4\pi\omega^2 \chi^{(3)}}{c^2} |E_{\omega}|^2 E_{\omega} = 0, \quad (4.3)$$

где  $n_{\text{лин}}^2 = 1 + 4\pi\chi$ . Это уравнение описывает распространение света, в общем случае, в обе стороны.

**Замечание:** Уравнение (4.3) можно записать также в виде

$$\frac{\partial^2 E_{\omega}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2 n_{\text{нели}}^2}{c^2} E_{\omega} = 0, \quad (4.4)$$

где  $n_{\text{нели}}^2 = n_{\text{лин}}^2 + 4\pi\chi^{(3)}|E_{\omega}|^2$ .

Обычно  $4\pi\chi^{(3)}|E_{\omega}|^2 \ll n_{\text{лин}}^2$  и

$$n_{\text{нели}} = \sqrt{n_{\text{лин}}^2 + 4\pi\chi^{(3)}|E_{\omega}|^2} = n_{\text{лин}} \sqrt{1 + \frac{4\pi\chi^{(3)}|E_{\omega}|^2}{n_{\text{лин}}^2}} \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \approx n_{\text{лин}} + \frac{2\pi\chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}^2}|E_{\omega}|^2.$$

Тогда получаем, что

$$n_{\text{нели}} = n_{\text{лин}} + \frac{1}{2}n_2|E_{\omega}|^2, \quad (4.5)$$

где  $n_2 = \frac{4\pi\chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}}$  – коэффициент нелинейного показателя преломления. Об этом мы говорили еще во вводной лекции.

## II. Укороченное нелинейное волновое уравнение

Ищем решение полного (второго порядка) уравнения (4.4) в виде  $E_\omega(z) = \mathcal{E}(z)e^{-ikz}$ , где  $k = \frac{\omega}{c}n_{\text{лин}}$ . Т.е. полагаем, что полное поле волны имеет вид

$$E(z, t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(z) e^{i(\omega t - kz)} + \text{к.с.} \quad (4.6)$$

Соотношение (4.6) описывает однонаправленную плоскую монохроматическую волну.

Делая подстановку (4.6) в уравнение (4.4), получаем

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} e^{-ikz} - ik \mathcal{E} e^{-ikz} \right) + k^2 \mathcal{E} e^{-ikz} + k^2 \frac{4\pi\chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}^2} |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} e^{-ikz} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} e^{-ikz} - 2ik \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} e^{-ikz} - k^2 \mathcal{E} e^{-ikz} + k^2 \mathcal{E} e^{-ikz} + k^2 \frac{4\pi\chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}^2} |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} e^{-ikz} = 0.$$

И в итоге получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + k^2 \frac{4\pi\chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}^2} |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = 0. \quad (4.7)$$

Отметим, что (4.7) математически полностью эквивалентно уравнению (4.4). Оно лишь переписано для другой переменной.

Для дальнейшего упрощения уравнения (4.7) применим **метод медленно меняющейся амплитуды (ММА)**, считая изменение амплитуды поля импульса на длине волны малым и полагая

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \right) \ll \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \right). \quad (4.8)$$

Поясним неравенство (4.8).

В линейной среде  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\varphi} = const$ . В нелинейной среде  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(z)$ . Из-за малости нелинейности поляризационного отклика  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \approx \frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta z} \Big|_{\Delta z \rightarrow 0} \ll \frac{2\pi}{\lambda} \mathcal{E}$ .

Аналогично имеем неравенство (4.8) и для второй производной  $\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \right)$ .

С учетом (4.8) получаем укороченное (с первым порядком производной по координате  $z$ ) уравнение динамики поля излучения вида

$$2i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} - k \frac{4\pi\chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}^2} |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = 0. \quad (4.9)$$

Уравнение (4.9) – дифференциальное уравнение первого порядка, т.е. значительно более простое, чем (4.7). Еще раз подчеркнем, что физический смысл приближения ММА – переход к рассмотрению однонаправленной волны. Впрочем, взаимодействие встречных волн в дальнейшем мы тоже рассмотрим, но на основании дифференциального уравнения второго порядка (4.4).

### III. Нелинейность показателя преломления и коэффициента поглощения

Ищем комплексное решение укороченного уравнения (4.9) в виде

$$\mathcal{E}(z) = \mathcal{E}_0(z) e^{i\varphi(z)}. \quad (4.10)$$

Тогда уравнение (4.9) приводится к виду

$$2i \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial z} e^{i\varphi} + 2i \left( i \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \mathcal{E}_0 e^{i\varphi} - k \frac{4\pi\chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}^2} \mathcal{E}_0^3 e^{i\varphi} = 0. \quad (4.11)$$

Разделяя действительную и мнимую части уравнения (4.11), получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -k \frac{4\pi\chi^{(3)}}{2n_{\text{лин}}^2} \mathcal{E}_0^2, \\ \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Несложно получить решение системы уравнений (4.12) в виде

$$\begin{cases} \varphi = -k \frac{4\pi\chi^{(3)}}{2n_{\text{лин}}^2} \mathcal{E}_0^2 z + \text{начальная фаза,} \\ \mathcal{E}_0 = \text{const.} \end{cases} \quad (4.13)$$

Таким образом, решение нелинейного уравнения динамики плоской поперечно однородной монохроматической волны в изотропной среде с кубической по полю нелинейностью может быть записано в виде

$$E_\omega(z) = \mathcal{E}_0 e^{-i\left(k + \frac{4\pi\chi^{(3)}}{2n_{\text{лин}}^2} \varepsilon_0^2\right)z} = \mathcal{E}_0 e^{-ik_0\left(n_{\text{лин}} + \frac{4\pi\chi^{(3)}}{2n_{\text{лин}}^2} \varepsilon_0^2\right)z}, \quad (4.14)$$

где  $k = \frac{\omega}{c} n_{\text{лин}} = k_0 n_{\text{лин}}$ ,  $k_0$  – волновое число в вакууме.

**Вывод:**  $n = n_{\text{лин}} + \frac{2\pi\chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}} \mathcal{E}_0^2$ . Часто также используют соотношение

$\frac{2\pi\chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}} \mathcal{E}_0^2 = n'_2 I_0$ . Тогда нелинейное изменение показателя

преломления  $\Delta n_{\text{нел}} \equiv \frac{1}{2} n_2 \mathcal{E}_0^2 \equiv n'_2 I$ . Таким образом, мы строго доказали то, что изменение показателя преломления в изотропной нелинейной среде пропорционально интенсивности света.

**Замечание:** В общем случае  $\begin{cases} n_{\text{лин}} = \bar{n}_{\text{лин}} - i\kappa \\ \chi^{(3)} = \text{Re } \chi^{(3)} - i \text{Im } \chi^{(3)} \end{cases}$  являются комплексными

величинами. Тогда

$$E_\omega(z) = \mathcal{E}_0 e^{-ik_0\left(\bar{n}_{\text{лин}} + 2\pi \frac{\text{Re } \chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}} \varepsilon_0^2\right)z} \cdot e^{-ik_0\left(\kappa + 2\pi \frac{\text{Im } \chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}} \varepsilon_0^2\right)z}, \quad (4.15)$$

где второе слагаемое в последней экспоненте этого выражения описывает нелинейное поглощение. Обычно вводится понятие нелинейного изменения коэффициента поглощения  $\Delta\kappa_{\text{нел}} \equiv \frac{1}{2} \kappa_2 \mathcal{E}_0^2$ , где  $\kappa_2$  – коэффициент нелинейного показателя поглощения.

#### IV. Взаимодействие встречных волн

Ищем теперь решение полного уравнения (4.4) в виде встречных волн

$$E_\omega(z) = \mathcal{E}_+(z)e^{-ikz} + \mathcal{E}_-(z)e^{+ikz}, \quad (4.16)$$

где первое слагаемое описывает прямую волну, а второе – обратную волну.

Подставляя (4.16) в (4.4), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_+}{\partial z} e^{-ikz} - ik \mathcal{E}_+ e^{-ikz} + \frac{\partial \mathcal{E}_-}{\partial z} e^{+ikz} + ik \mathcal{E}_- e^{-ikz} \right) + k^2 \mathcal{E}_+ e^{-ikz} + k^2 \mathcal{E}_- e^{+ikz} + \\ & + k^2 \frac{4\pi\chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}^2} (\mathcal{E}_+ e^{-ikz} + \mathcal{E}_- e^{+ikz}) (\mathcal{E}_+^* e^{+ikz} + \mathcal{E}_-^* e^{-ikz}) (\mathcal{E}_+ e^{-ikz} + \mathcal{E}_- e^{+ikz}) = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

**Упражнение:** Довести выкладки до конца самостоятельно. Выделить два уравнения при разных высокоосциллирующих экспоненциальных множителях. Использовать приближение медленно меняющихся амплитуд для каждой из встречных волн. Решить эти два уравнения (это уравнения (4.20) ниже).

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \mathcal{E}_+}{\partial z^2} e^{-ikz} - 2ik \frac{\partial \mathcal{E}_+}{\partial z} e^{-ikz} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_-}{\partial z^2} e^{+ikz} + 2ik \frac{\partial \mathcal{E}_-}{\partial z} e^{+ikz} + \\ & + k^2 \frac{4\pi\chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}^2} (|\mathcal{E}_+|^2 + \mathcal{E}_+ \mathcal{E}_-^* e^{-2ikz} + \mathcal{E}_- \mathcal{E}_+^* e^{+2ikz} + |\mathcal{E}_-|^2) (\mathcal{E}_+ e^{-ikz} + \mathcal{E}_- e^{+ikz}) = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \mathcal{E}_+}{\partial z^2} e^{-ikz} - 2ik \frac{\partial \mathcal{E}_+}{\partial z} e^{-ikz} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_-}{\partial z^2} e^{+ikz} + 2ik \frac{\partial \mathcal{E}_-}{\partial z} e^{+ikz} + \\ & + k^2 \frac{4\pi\chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}^2} \left( \begin{aligned} & |\mathcal{E}_+|^2 \mathcal{E}_+ e^{-ikz} + |\mathcal{E}_+|^2 \mathcal{E}_- e^{+ikz} + \mathcal{E}_+^2 \mathcal{E}_-^* e^{-3ikz} + \\ & + \mathcal{E}_+ |\mathcal{E}_-|^2 e^{-ikz} + \mathcal{E}_- |\mathcal{E}_+|^2 e^{+ikz} + \mathcal{E}_-^2 \mathcal{E}_+^* e^{3ikz} + \\ & + |\mathcal{E}_-|^2 \mathcal{E}_+ e^{-ikz} + |\mathcal{E}_-|^2 \mathcal{E}_- e^{+ikz} \end{aligned} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{cases} -2i \frac{\partial \mathcal{E}_+}{\partial z} + k \frac{4\pi\chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}^2} \left( |\mathcal{E}_+|^2 \mathcal{E}_+ + 2|\mathcal{E}_-|^2 \mathcal{E}_+ \right) = 0, \\ 2i \frac{\partial \mathcal{E}_-}{\partial z} + k \frac{4\pi\chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}^2} \left( |\mathcal{E}_-|^2 \mathcal{E}_- + 2|\mathcal{E}_+|^2 \mathcal{E}_- \right) = 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

Решение ищется в виде 
$$\begin{cases} \mathcal{E}_+(z) = \mathcal{E}_{+0}(z) e^{i\varphi_+(z)}, \\ \mathcal{E}_-(z) = \mathcal{E}_{-0}(z) e^{i\varphi_-(z)}. \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\begin{cases} -2i \frac{\partial \mathcal{E}_{+0}}{\partial z} e^{i\varphi_+} + 2 \frac{\partial \varphi_+}{\partial z} \mathcal{E}_{+0} e^{i\varphi_+} + 4\pi k \frac{\chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}^2} \left( \mathcal{E}_{+0}^3 + 2\mathcal{E}_{-0}^2 \mathcal{E}_{+0} \right) e^{i\varphi_+} = 0, \\ +2i \frac{\partial \mathcal{E}_{-0}}{\partial z} e^{i\varphi_-} - 2 \frac{\partial \varphi_-}{\partial z} \mathcal{E}_{-0} e^{i\varphi_-} + 4\pi k \frac{\chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}^2} \left( \mathcal{E}_{-0}^3 + 2\mathcal{E}_{+0}^2 \mathcal{E}_{-0} \right) e^{i\varphi_-} = 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}_{+0}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}_{-0}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_+}{\partial z} = -2\pi k \frac{\chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}^2} \left( \mathcal{E}_{+0}^2 + 2\mathcal{E}_{-0}^2 \right), \\ \frac{\partial \varphi_-}{\partial z} = -2\pi k \frac{\chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}^2} \left( \mathcal{E}_{-0}^2 + 2\mathcal{E}_{+0}^2 \right). \end{cases} \quad (4.23)$$

В итоге, тогда получаем

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{+0} = \text{const}, \\ \mathcal{E}_{-0} = \text{const}, \\ \varphi_+ = -2\pi k \frac{\chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}^2} \left( \mathcal{E}_{+0}^2 + 2\mathcal{E}_{-0}^2 \right) z + \varphi_{0+}, \\ \varphi_- = -2\pi k \frac{\chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}^2} \left( \mathcal{E}_{-0}^2 + 2\mathcal{E}_{+0}^2 \right) z + \varphi_{0-}. \end{cases} \quad (4.24)$$



**Выводы:** В рассмотренных выше условиях в нелинейной среде интенсивности встречных волн не меняются, генерации встречной волны не происходит. Наблюдается явление фазовой невзаимности, которую используют в некоторых типах волоконных гироскопов.

### **Вопросы для самоконтроля**

1. Что такое укороченное нелинейное волновое уравнение?
2. В чем суть метода медленно меняющейся амплитуды поля излучения?
3. От каких характеристик поля излучения зависит показатель преломления и коэффициент поглощения изотропной нелинейной среды?
4. Как влияет встречная интенсивная волна на характеристики прямой интенсивной волны при их взаимодействии в изотропной нелинейной среде?

## **ЛЕКЦИЯ 5**

### **НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ**

#### **В ПОЛЕ ПОПЕРЕЧНО ОДНОРОДНЫХ ПЛОСКИХ**

#### **МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВОЛН**

#### **(ПРОДОЛЖЕНИЕ)**

Продолжаем изучать нелинейные эффекты в оптических средах в приближении плоских поперечно однородных волн. Но на этот раз будем рассматривать эффекты, в которых в поле исходно монохроматического излучения за счет нелинейности отклика среды в этих средах появляются волны на новых частотах.

## V. Генерация третьей гармоники

Ранее (в лекции 4) для описания нелинейной динамики поля линейно поляризованного излучения в оптической диэлектрической среде в приближении плоской поперечно однородной волны было обосновано упрощение волнового уравнения (2.8) к виду уравнения (4.1) (напомним (4.1) и в этой лекции:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P_{\text{лин}}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P_{\text{нел}}}{\partial t^2}.$$

Для бихроматического излучения, состоящего из волн на частотах  $\omega$  и  $3\omega$ ,

$$E(z, t) = \left( \frac{1}{2} E_{\omega}(z) e^{i\omega t} + \text{к.с.} \right) + \left( \frac{1}{2} E_{3\omega}(z) e^{3i\omega t} + \text{к.с.} \right), \quad (5.1)$$

уравнение (4.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_{\omega}}{\partial z^2} e^{i\omega t} + \frac{\partial^2 E_{3\omega}}{\partial z^2} e^{3i\omega t} + \frac{\omega^2}{c^2} E_{\omega} e^{i\omega t} + \frac{(3\omega)^2}{c^2} E_{3\omega} e^{3i\omega t} = -\frac{4\pi\omega^2}{c^2} P_{\omega \text{ лин}} e^{i\omega t} - \\ - \frac{4\pi(3\omega)^2}{c^2} P_{3\omega \text{ лин}} e^{3i\omega t} - \frac{4\pi\omega^2}{c^2} P_{\omega \text{ нел}} e^{i\omega t} - \frac{4\pi(3\omega)^2}{c^2} P_{3\omega \text{ нел}} e^{3i\omega t}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Полагаем также, что поляризационный отклик среды в поле (5.1) имеет вид

$$P(z, t) = P(z, t)_{\text{лин}} = \left( \frac{1}{2} P_{\omega \text{ лин}}(z) e^{i\omega t} + \text{к.с.} \right) + \left( \frac{1}{2} P_{3\omega \text{ лин}}(z) e^{3i\omega t} + \text{к.с.} \right). \quad (5.3)$$

**Замечание:** Считая поляризационный отклик среды имеющим вид (5.3), мы пренебрегли генерацией гармоник более высокого порядка, чем третья. Действительно, методом итераций получаем  $P_{\text{нел}} \sim P_{\text{лин}}^3$ ; в поле излучения на частоте  $\omega$  за счет кубичной нелинейности поляризованности среды появляются ее колебания на новых частотах  $E_{\omega} \rightarrow P_{\omega} ; P_{3\omega}$ ; в возникшем в среде

бихроматическом излучении за счет нелинейности появляются новые колебания поляризованности среды уже на частотах  $5\omega$  и т.д.  $E_{\omega}, E_{3\omega} \rightarrow P_{\omega} ; P_{3\omega}$

(самовоздействие),  $E_{\omega}, E_{3\omega} \rightarrow P_{5\omega}$  (генерация пятой гармоники),

$E_{\omega}, E_{3\omega} \rightarrow P_{7\omega}$  (генерация седьмой гармоники).

Выделяя в (5.2) два уравнения (при разных экспоненциальных множителях), получаем систему

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_\omega}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + 4\pi\chi(\omega)) E_\omega + 4\pi \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{(\omega)}^{(3)} |E_\omega|^2 E_\omega = 0, \\ \frac{\partial^2 E_{3\omega}}{\partial z^2} + \frac{(3\omega)^2}{c^2} (1 + 4\pi\chi(3\omega)) E_{3\omega} + 4\pi \frac{(3\omega)^2}{c^2} \chi_{(3\omega)}^{(3)} E_\omega^3 = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Уравнения для комплексно-сопряженных величин опять не пишем, поскольку они не дают новую информацию.

При выводе системы (5.4) полагали исходную волну на частоте  $\omega$  (волна накачки) сильной, а генерируемую третью гармонику слабой, поскольку  $P_{\text{лин}}^3 \sim E_\omega^3$ .

Решение первого уравнения системы (5.4) вида однонаправленной волны мы получали в прошлой лекции. Оно имеет вид

$$E_\omega(z) = \mathcal{E}_0 e^{-i \left( k(\omega) + 2\pi \frac{\chi^{(3)}(\omega)}{n^2(\omega)} \varepsilon_0^2 \right) z}.$$

Ищем решение второго уравнения системы (5.4) в виде

$$E_{3\omega}(z) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(z) e^{-ik(3\omega)z}, \text{ где } k(3\omega) = \frac{3\omega}{c} n(3\omega).$$

$$\text{Учитываем } E_\omega^3 = \mathcal{E}_0^3 e^{-3i \left( k(\omega) + 2\pi \frac{\chi^{(3)}(\omega)}{n^2(\omega)} \varepsilon_0^2 \right) z} \approx \mathcal{E}_0^3 e^{-3ik(\omega)z}.$$

Пользуясь накопленным опытом вывода решения нелинейных уравнений в предыдущих лекциях, далее самостоятельно выполните последующие выкладки.

**Упражнение:** В приближении медленно меняющейся амплитуды из второго уравнения системы (5.4) следует получить уравнение

$$-2ik(3\omega) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} e^{-ik(3\omega)z} + 4\pi \frac{(3\omega)^2}{c^2} \chi_{(3\omega)}^{(3)} \mathcal{E}_0^3 e^{-3ik(\omega)z} = 0. \quad (5.5)$$

После несложного преобразования (5.5) привести его к виду

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = \frac{2\pi(3\omega)^2 \chi_{(3\omega)}^{(3)} \mathcal{E}_0^3}{ic^2 k(3\omega)} e^{-i[3k(\omega) - k(3\omega)]z}. \quad (5.6)$$

Интегрируя обыкновенное дифференциальное уравнение (5.6) от нуля до  $z$ , получаем решение вида

$$\int_0^z \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} dz' = (\mathcal{E}(z) - \mathcal{E}(0)) \cdot A \int_0^z e^{-i[3k(\omega) - k(3\omega)]z'} dz', \quad (5.7)$$

где при отсутствии на входе в нелинейную среду излучения на утроенных частотах следует считать  $\mathcal{E}(0) = 0$ .

Рассмотрим решение (5.7) для двух характерных случаев:

1. При  $3k(\omega) = k(3\omega)$ , т.е. при  $3 \cdot \frac{\omega}{c} n(\omega) = \frac{3\omega}{c} n(3\omega)$  и, соответственно, при  $n(\omega) = n(3\omega)$ ,

$$(5.8)$$

решение (5.7) принимает вид

$$\mathcal{E}(z) = A \cdot z. \quad (5.9)$$

Как видно из решения (5.9), амплитуда волны третьей гармоники нарастает линейно с расстоянием. В таком случае говорят, что имеется **фазовый синхронизм**.



Рисунок 5.1 – Иллюстрация появления в нелинейной среде в поле монохроматического излучения волны на утроенной частоте

2. При  $3k(\omega) \neq k(3\omega)$  решение (5.7) записывается как

$$\mathcal{E}(z) = \frac{A}{i[k(3\omega) - 3k(\omega)]} e^{i[k(3\omega) - 3k(\omega)]z} \Big|_0^z, \text{ и, в итоге, принимает вид}$$

$$\mathcal{E}(z) = \frac{2\pi}{c^2} \cdot \frac{(3\omega)^2 \chi_{(3\omega)}^{(3)} \mathcal{E}_0^3}{3k(\omega) - k(3\omega)} \left[ e^{i[k(3\omega) - 3k(\omega)]z} - 1 \right]. \quad (5.10)$$

**Замечание:** В степени экспоненты в (5.10) находится не быстро осциллирующий множитель, поэтому в полученном решении не имеем противоречия с исходным приближением ММА. При этом обычно

$$k(3\omega) - 3k(\omega) = \frac{3\omega}{c} n(3\omega) - \frac{3\omega}{c} n(\omega) = \frac{3\omega}{c} [n(3\omega) - n(\omega)] \ll 3 \frac{\omega}{c} n(3\omega).$$

**Примечание:** В комплексном решении (5.10) поле можно преобразовать:

$$\mathcal{E} \sim e^{i\alpha} - 1 = \cos \alpha + i \sin \alpha - 1 = (\cos \alpha - 1) + i \sin \alpha = \sqrt{(\cos \alpha - 1)^2 + \sin^2 \alpha} \cdot e^{i\varphi}, \quad \text{где}$$

$$\text{tg} \varphi = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - 1}.$$

Тогда интенсивность излучения

$$I \sim |\mathcal{E}|^2 = \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + 1 + \sin^2 \alpha = 2(1 - \cos \alpha) \quad (5.11)$$

меняется по косинусоидальному закону.

**Вывод:** интенсивность третьей гармоники меняется периодически, увеличиваясь и обратно уменьшаясь до нуля.

**Упражнение:** Определить расстояние  $L$  (смотри рисунок 5.2), на котором интенсивность третьей гармоники сначала возрастает, а потом убывает до нуля. Используйте понятные соотношения

$$[k(3\omega) - 3k(\omega)]L = 2\pi,$$

$$\left[ \frac{2\pi}{\lambda/3} n(3\omega) - 3 \frac{2\pi}{\lambda} n(\omega) \right] L = 2\pi, \text{ где } L = \frac{\lambda}{3} \frac{1}{n(3\omega) - n(\omega)}.$$

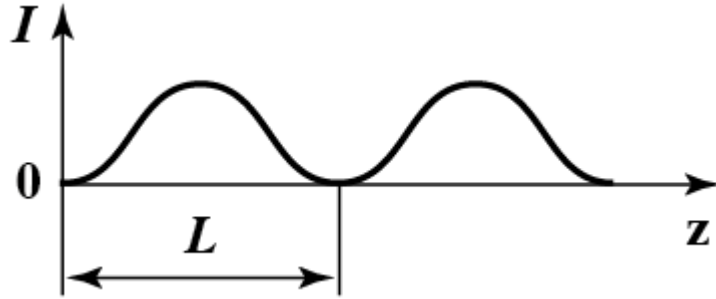


Рисунок 5.2 – Иллюстрация динамики интенсивности излучения третьей гармоники в среде с кубичной нелинейностью при отсутствии фазового синхронизма

## VI. О генерации второй гармоники и оптическом выпрямлении

До сих пор мы обсуждали нелинейные эффекты в изотропных средах, в которых из-за их высокой симметрии наименьший порядок нелинейности – кубичный по полю. Теперь обсудим нелинейные эффекты в средах, не имеющих центра инверсии. В таких средах наименьший порядок нелинейности – квадратичный по полю, и  $P_{\text{нел}} = \chi^{(2)} E^2$ .

Для монохроматической волны накачки  $E(t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_\omega e^{i\omega t} + \text{к.с.}$  нелинейный поляризационный отклик среды примет вид

$$P_{\text{нел}} = \frac{\chi^{(2)}}{2} \left[ \frac{1}{2} \mathcal{E}_\omega^2 e^{2i\omega t} + \text{к.с.} + |\mathcal{E}_\omega|^2 \right], \quad (5.12)$$

где первые два слагаемых в квадратных скобках отвечают за генерацию второй гармоники, а последнее слагаемое приводит к оптическому выпрямлению.

Можно показать, получив решение аналогично полученному выше решению для третьей гармоники (но после гораздо более громоздких выкладок), что наиболее эффективно вторая гармоника генерируется также при условии фазового синхронизма  $k(2\omega) - 2k(\omega) = 0$  или при  $n(2\omega) = n(\omega)$ .

Обычно в области прозрачности у веществ наблюдается **нормальная** дисперсия (с ростом частоты излучения показатель преломления среды увеличивается, смотри рисунок 5.3). Это означает, что для такого вида дисперсии, на первый взгляд, условия фазового синхронизма не достичь.

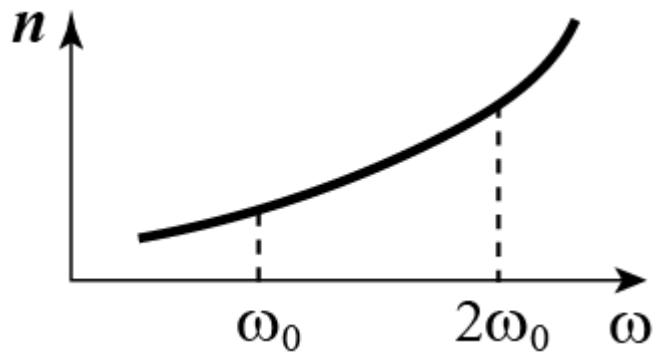


Рисунок 5.3 – Иллюстрация нормальной дисперсии показателя преломления материала оптической среды

Однако оказывается, что условие фазового синхронизма в кристалле с типичной нормальной дисперсией показателя преломления реализовать все-таки можно, поскольку в каждом направлении в кристалле возможно распространение двух волн: обыкновенной и необыкновенной. На рисунке 5.4 показаны сечения индикатрис показателя преломления в отрицательном одноосном кристалле ( $n_o > n_e$ ) для основной частоты (жирные кривые) и частоты второй гармоники (тонкие кривые). В направлениях **АБ** и **ВГ** (их называют **направлениями синхронизма**) выполняется равенство показателей преломления обыкновенной волны на основной частоте и необыкновенной волны на удвоенной частоте, т.е.  $n_o(\omega_0) = n_e(2\omega_0)$ . Это условие и является условием **фазового синхронизма** в одноосном кристалле для генерации второй гармоники. Направления синхронизма определяются пересечением сферы для обыкновенного показателя преломления на основной частоте и эллипсоида вращения вокруг оптической оси кристалла для необыкновенного показателя преломления второй гармоники. Место такого пересечения показано на графике заштрихованной областью.

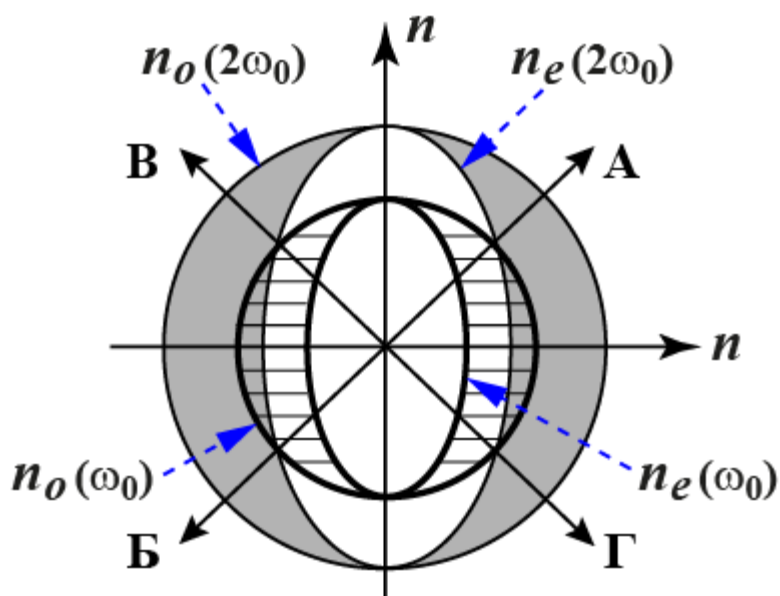


Рисунок 5.4 – Иллюстрация условия фазового синхронизма на примере отрицательно одноосного кристалла

Как видно из рисунка 5.5, в условиях фазового синхронизма интенсивность волны накачки в кристалле убывает, а интенсивность второй гармоники нарастает. По мере истощения энергии волны накачки усиление волны второй гармоники ослабляется.

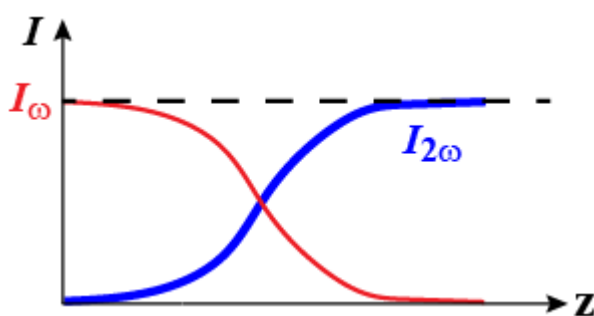


Рисунок 5.5 – Иллюстрация зависимостей интенсивности второй гармоники  $I_{2\omega}$  (синяя жирная линия) и интенсивности падающей волны на основной частоте  $I_\omega$  (красная линия) от пройденного излучением расстояния в среде



## VII. Вынужденное комбинационное рассеяние

Сначала о комбинационном рассеянии. Это фундаментальное явление было обнаружено в 1928 году советскими учеными Л.И. Мандельштамом и Г.С. Ландсбергом и параллельно индийским физиком Ч. Раманом. Суть явления, которое в зарубежной литературе часто называют рамановским, иллюстрирована на рисунке 5.6 ниже.

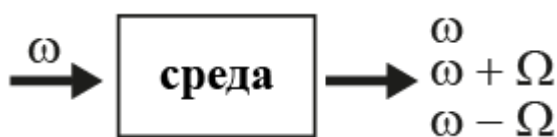


Рисунок 5.6 – Иллюстрация явления комбинационного рассеяния (эффекта Рамана)

$$\Omega \sim 10^{12} - 10^{13} \text{ Гц} \leftrightarrow T_{\Omega} = \frac{2\pi}{\Omega} \sim (6 - 0.6) \text{ пс};$$

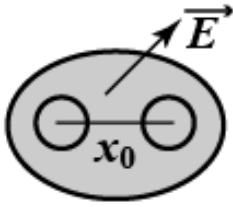
$$\omega \sim 10^{15} \text{ Гц} \leftrightarrow T_{\omega} = \frac{2\pi}{\omega} \sim 6 \text{ фс}$$

В среде наряду с распространяющимся излучением на частоте  $\omega$ , которое на практике обычно относится к видимому диапазону спектра (для него и дана оценка в описании к рисунку 5.6), появляются и волны на частотах  $\omega + \Omega$  и  $\omega - \Omega$ . Частота  $\Omega$  на два-три порядка меньше частоты  $\omega$ . Соответствующие им значения периодов колебаний также приведены в описании этого рисунка.

Этому явлению нашли простое объяснение. Дипольный момент молекулы в поле излучения  $E$  изменяется по закону

$$p = \alpha E = \left[ \alpha_0 + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_0 x(t) \right] E, \quad (5.13)$$

где  $\alpha$  – поляризуемость молекулы,  $x$  – отклонение атомов в молекуле от положения равновесия (смотри рисунок ниже),  $\mu \equiv \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_0$  – характеризует изменение поляризуемости при смещении атомов из положения равновесия.



$x_0$  – равновесное расстояние.

Пусть  $x(t) = x_0 \cos(\Omega t) = \frac{1}{2} x_0 e^{i\Omega t} + \text{к.с.}$ ,  $E(t) = E_0 \cos(\omega t) = \frac{1}{2} E_0 e^{i\omega t} + \text{к.с.}$

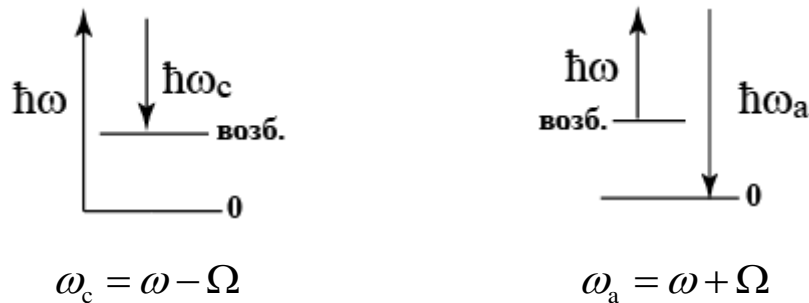
**Упражнение:** Определить отклик молекулы

$$\begin{aligned}
 p &= \alpha_0 E_0 \cos(\omega t) + \mu x_0 E_0 (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}) = \\
 &= \alpha_0 E_0 \cos(\omega t) + \mu x_0 E_0 (e^{i(\omega+\Omega)t} + e^{i(\omega-\Omega)t} + e^{-i(\omega+\Omega)t} + e^{-i(\omega-\Omega)t}) = \\
 &= \alpha_0 E_0 \cos(\omega t) + 2\mu x_0 E_0 (\cos(\omega + \Omega)t + \cos(\omega - \Omega)t).
 \end{aligned}$$

Спектры комбинационного рассеяния каждого химического соединения специфичны и позволяют идентифицировать эти соединения в смесях. Чувствительность метода – вплоть до единиц молекул в  $1 \text{ см}^3$ , так что эффект комбинационного рассеяния очень полезен в применениях.

**Замечание:**

С квантовой точки зрения излучение частоты  $\omega$  рассматривается как поток фотонов с энергией  $\hbar\omega$ , где  $\hbar$  – постоянная Планка. Сильно упрощенная энергетическая схема молекулы представлена на рисунке 5.7.



$I_a$  пропорциональна числу возбужденных молекул,  $I_a \ll I_c$

Рисунок 5.7 – Упрощенная энергетическая модель молекулы среды

Как видно из рисунка 5.7, молекула под воздействием фотона излучения частоты  $\omega$  может перейти в возбужденное энергетическое состояние, связанное с колебанием молекулы. По закону сохранения энергии в акте взаимодействия молекулы с исходным фотоном испускается другой фотон, уже на меньшей частоте  $\omega_c$ , который называется **стоксовым**. Но может произойти и обратное. Исходный фотон взаимодействует с уже возбужденной молекулой. В результате взаимодействия появляется фотон на частоте  $\omega_a$ , который называют **антистоксовым**. Понятно, что их в среде возникает гораздо меньше, чем стоксовых фотонов.

### О вынужденном комбинационном рассеянии

При спонтанном комбинационном рассеянии принимали во внимание только влияние колебаний молекулы на рассеиваемые ею световые волны. Но поле волны, в свою очередь, может раскачивать эти колебания. Можно показать, что поляризационный отклик среды, вызванный такими колебаниями молекул, имеет вид [3]

$$\begin{cases} P_v = \chi_v E, \\ \frac{\partial^2 \chi_v}{\partial t^2} + \frac{2}{T_v} \frac{\partial \chi_v}{\partial t} + \Omega^2 \chi_v = \gamma_v E^2, \end{cases} \quad (5.14)$$

где  $P_v$  – часть поляризованности, обусловленная вынужденным комбинационным рассеянием.

**Замечание:** Важно, что в правой части второго уравнения системы (5.14) стоит квадрат поля. Т.е. в приближении слабого поля эффекта вынужденного комбинационного рассеяния нет. Важно и то, что полем излучения молекула на частоте  $\Omega$  может и не возбуждаться. Указанные выше на энергетической схеме молекулы ее возбужденные состояния в линейной спектроскопии могут не проявляться в силу правил запрета. Спектроскопия комбинационного рассеяния диагностирует новые комбинационно активные состояния молекулы.

## VIII. Нелинейный интерферометр Фабри-Перо. Оптическая мультистабильность

В заключение этой лекции обсудим очень интересный для применений инновационный объект исследований нелинейной оптики – быстродействующий оптический транзистор и элемент оптической памяти. Мы их кратко концептуально обсудили во вводной лекции. Сейчас разберем работу подобных систем подробно на конкретном примере нелинейного интерферометра Фабри-Перо. Его схема приведена на рисунке 5.8. На расстояниях 0 и  $L$  стоят зеркала интерферометра с коэффициентом отражения по интенсивности  $R$ . Между зеркалами расположена нелинейная оптическая среда с кубичной по полю нелинейностью, поведение которой в интенсивном монохроматическом излучении мы изучили в этой лекции выше подробно. На схеме приведены используемые ниже обозначения.

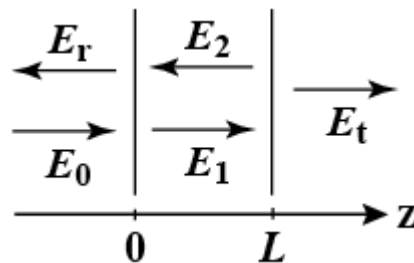


Рисунок 5.8 – Схема нелинейного интерферометра Фабри-Перо и используемые при его анализе обозначения

Поле отраженного от второго зеркала излучения можно записать в виде

$$E_2(L) = \sqrt{R}E_1(L), \quad (5.15)$$

где  $R$  – коэффициент отражения зеркал по интенсивности, а поле, прошедшее интерферометр – в виде

$$E_t(L) = \sqrt{1-R}E_1(L). \quad (5.16)$$

Соотношения (5.15) и (5.16) есть следствие закона сохранения энергии

$$|E_1|^2 (R) + |E_1|^2 (1-R) = |E_1|^2.$$

На другом зеркале выполняется

$$E_1(0) = \sqrt{R}E_2(0) + \sqrt{1-R}E_0(0). \quad (5.17)$$

Кроме того,

$$E_1(L) = E_1(0)e^{-i\Phi_1} \quad (5.18)$$

и

$$E_2(L) = E_2(0)e^{i\Phi_2}, \quad (5.19)$$

где в линейной среде  $\Phi_1 = \Phi_2 = kL$ .

**Пояснение:**  $\omega t - kz$  описывает фазу волны, распространяющейся в направлении "+z",  $\omega t + kz$  – в направлении "-z".

Тогда получаем:

$$E_2(0) = \sqrt{R}E_1(L)e^{-i\Phi_2},$$

$$E_1(0) = RE_1(L)e^{-i\Phi_2} + \sqrt{1-R}E_0(0) = RE_1(0)e^{-i(\Phi_1+\Phi_2)} + \sqrt{1-R}E_0(0),$$

$$E_1(0) = \frac{\sqrt{1-R}}{1 - Re^{-i(\Phi_1+\Phi_2)}},$$

$$E_t(L) = \sqrt{1-R}E_1(L) = \sqrt{1-R}E_1(0)e^{-i\Phi_1} = \frac{1-R}{1 - Re^{-i(\Phi_1+\Phi_2)}} E_0(0)e^{-i\Phi_1}. \quad (5.20)$$

Тогда для интенсивности из выражения (5.20) после несложных, но громоздких вычислений можно получить

$$I_t \sim |E_t|^2 = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)} \cdot I_0. \quad (5.21)$$

**Замечание:**

В **линейной** среде  $\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} = \frac{2 \cdot kL}{2} = kL = \frac{2\pi n}{\lambda} L$ . И, как видно из рисунка 5.9, линейный интерферометр Фабри-Перо является фильтром для излучения определенных частот, фильтрующие свойства которого зависят от коэффициентов отражения зеркал интерферометра.

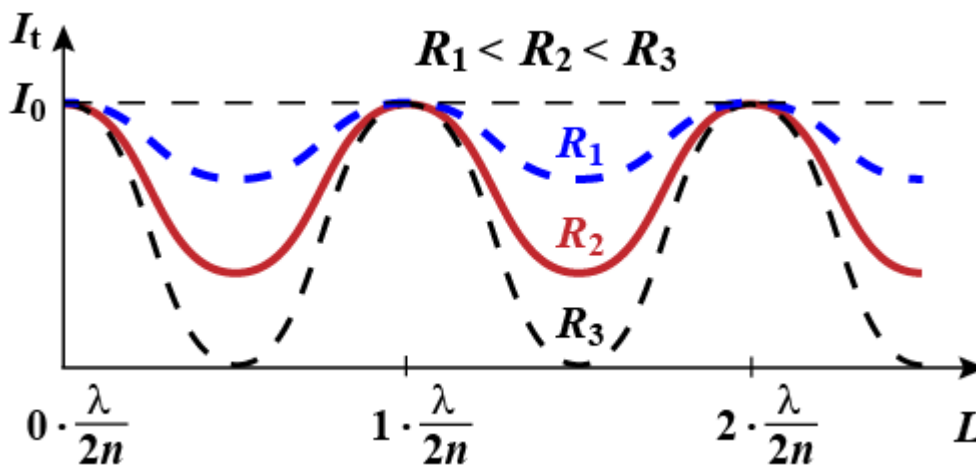


Рисунок 5.9 – Зависимость пропускания линейного интерферометра Фабри-Перо от расстояния между его зеркалами

В **нелинейной** среде, как было показано в этой лекции выше в разделе IV «Взаимодействие встречных волн»,

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} &= kL + \frac{2\pi k}{n_0^2} \chi^{(3)} \left[ \left( |E_1|^2 + 2|E_2|^2 \right) + \left( |E_2|^2 + 2|E_1|^2 \right) \right] L = \\ &= kL + \frac{2\pi k}{n_0^2} \chi^{(3)} \cdot 3 \left( |E_1|^2 + |E_2|^2 \right) L = kL + 3n_2 (I_1 + I_2) \frac{2\pi L}{\lambda}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Учтем далее понятные соотношения

$$I_2 = RI_1, \quad I_t = (1 - R)I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{I_t}{1 - R}, \quad \text{откуда} \quad I_2 = \frac{R}{1 - R} I_t.$$

$$I_1 + I_2 = \left( \frac{1}{1 - R} + \frac{R}{1 - R} \right) I_t = \frac{1 + R}{1 - R} I_t.$$

И в итоге получаем:

$$I_t = \frac{(1-R)^2 I_0}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \left( kL + \frac{6\pi L}{\lambda} \frac{1+R}{1-R} \cdot n_2 I_t \right)}. \quad (5.23)$$

Выражение (5.23) связывает выходную интенсивность излучения с входной.

Отсюда

$$I_0 = I_t \cdot \left( 1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \left( kL + \frac{6\pi L}{\lambda} \cdot \frac{1+R}{1-R} \cdot n_2 I_t \right) \right). \quad (5.24)$$

Это соотношение (5.24) позволяет строго описать работу оптического транзистора и оптической памяти, иллюстрированные ранее на рисунке 1.4 и рисунке 1.5. Такая возможность предоставляется читателю в виде самостоятельно выполняемого **упражнения**.

### Вопросы для самоконтроля

1. Что такое фазовый синхронизм?
2. Как меняется интенсивность излучения третьей гармоники в нелинейной изотропной среде в отсутствие фазового синхронизма с расстоянием?
3. Как достигается фазовый синхронизм излучения накачки и второй гармоники в кристаллах с дисперсией показателя преломления?
4. В чем суть комбинационного рассеяния света?
5. В чем суть вынужденного комбинационного рассеяния света?

## ЛЕКЦИЯ 6

### НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ПОЛЕ ПОПЕРЕЧНО НЕОДНОРОДНЫХ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВОЛН (МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ)

В данной лекции мы будем анализировать теоретически более сложные, но более близкие к реальности оптические явления в нелинейных средах, рассматривая динамику поля волны с учетом ее ограниченности по поперечным размерам. Т.е. переходим ниже к обсуждению особенностей нелинейных эффектов в поле световых пучков. Теперь нам необходимо учитывать дифракцию излучения. Как мы показывали в лекции 2, в диэлектрической среде волновое уравнение может быть записано в виде

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \quad (6.1)$$

Учитывая ограниченность поперечных размеров реальных световых пучков, идеализацию бесконечного существования во времени такого пучка излучения мы сохраняем и полагаем в этой лекции излучение по-прежнему монохроматическим. Рассмотрим, как упростится уравнение (6.1) при использовании приближения монохроматического излучения.

#### I. Полное нелинейное волновое уравнение

Для монохроматической волны

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{E}_\omega(\vec{r}) e^{i\omega t} + \text{к.с.} \quad (6.2)$$

волновое уравнение для диэлектриков (6.1), как несложно показать, принимает вид

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}_\omega - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_\omega = \frac{4\pi\omega^2}{c^2} (\vec{P}_{\omega \text{ лин}} + \vec{P}_{\omega \text{ нел}}). \quad (6.3)$$



**Замечание:** При переходе от (6.1) к (6.3) в приближении (6.2) пренебрегли генерацией второй (в анизотропных средах), третьей и более высоких гармоник.

Используем далее известное математическое преобразование

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}_\omega = \nabla(\nabla \vec{E}_\omega) - (\nabla \nabla) \vec{E}_\omega = \nabla(\nabla \vec{E}_\omega) - \Delta \vec{E}_\omega.$$

Учтем также еще одно уравнение Максвелла  $\nabla \vec{D} = 0$ , которое для монохроматического излучения (с учетом замечания выше) запишется в виде

$$\nabla \vec{D}_\omega = 0 \quad (6.4)$$

или в виде

$$\nabla(\vec{E}_\omega + 4\pi \vec{P}_\omega) = 0. \quad (6.5)$$

В изотропной среде (6.5) переписывается как соотношение

$$\nabla(\vec{E}_\omega + 4\pi\chi(\omega)\vec{E}_\omega + 4\pi\vec{P}_{\omega \text{ нел}}) = 0 \text{ или}$$

$$\nabla \vec{E}_\omega = -\frac{4\pi}{1 + 4\pi\chi(\omega)} \cdot \nabla \vec{P}_{\omega \text{ нел}}. \quad (6.6)$$

Подставляя (6.6) в (6.3), получаем волновое уравнение вида

$$\Delta \vec{E}_\omega + \frac{[1 + 4\pi\chi(\omega)]\omega^2}{c^2} \vec{E}_\omega + \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \vec{P}_{\omega \text{ нел}} + \frac{4\pi}{1 + 4\pi\chi(\omega)} \nabla(\nabla \vec{P}_{\omega \text{ нел}}) = 0 \text{ или}$$

$$\Delta \vec{E}_\omega + \frac{[1 + 4\pi\chi(\omega)]\omega^2}{c^2} \vec{E}_\omega + \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \left( \vec{P}_{\omega \text{ нел}} + \frac{1}{k^2} \nabla(\nabla \vec{P}_{\omega \text{ нел}}) \right) = 0. \quad (6.7)$$

Полезно теперь провести оценки слагаемых в преобразованном уравнении (6.7):

$$\frac{1}{k^2} \nabla(\nabla \vec{P}_{\omega \text{ нел}}) \sim \lambda^2 \frac{\Delta(\Delta \vec{P}_{\omega \text{ нел}})}{\Delta x \Delta y} \sim \Delta(\Delta \vec{P}_{\omega \text{ нел}}) \ll P_{\omega \text{ нел}},$$

здесь  $\Delta\tilde{P}_{\omega \text{ нел}}$  – изменение нелинейной части поляризованности среды на расстоянии  $\Delta x \sim \lambda$ . Последнее неравенство в оценке записано для широких пучков, для которых поперечный размер  $\rho \gg \lambda$ .

Учтем также, что в изотропной среде для линейно поляризованной волны, как было показано в лекции 3, выполняется соотношение  $P_{\omega \text{ нел}} = \chi^{(3)}(\omega) |E_{\omega}|^2 E_{\omega}$ .

Таким образом, в изотропной нелинейной среде динамика широких линейно поляризованных монохроматических пучков описывается уравнением

$$\Delta E_{\omega} + k^2 E_{\omega} + \frac{4\pi k \chi^{(3)}}{n^2} |E_{\omega}|^2 E_{\omega} = 0, \quad (6.8)$$

которое, конечно, выглядит значительно более простым, чем уравнение (6.3). Но и приближений дополнительных (пренебрегли генерацией излучения на новых частотах, полагаем излучение линейно поляризованным, а световые пучки – широкими) мы сделали немало.

**Примечание:** Читателю полезно обдумать модификацию уравнения вне сделанных приближений. Прежде всего, если пучки неширокие и их поперечный размер соизмерим с длиной волны излучения, то приведенное упрощение (6.8) не применимо. Для таких случаев часто обсуждают не динамику поля, а динамику спектров поля в нелинейных средах [3]. Уравнения для спектров оказываются часто проще, чем уравнения для полей.

## II. Укороченное нелинейное волновое уравнение

Уравнение (6.8) описывает распространение света, в общем случае, в обе стороны. В том числе, с его помощью можно описывать взаимодействие встречных волн так, как это мы делали в лекции 4, но теперь и с учетом дифракции встречных пучков. Однако на практике часто можно ограничиться рассмотрением нелинейных эффектов в поле однонаправленного излучения. Как было показано в предыдущих лекциях, в таком приближении волновое уравнение еще более сильно упрощается. Прделаем такие упрощения и для уравнения (6.8).

Ищем решение полного уравнения (6.8) в виде

$$E_{\omega}(x, y, z) = \mathcal{E}(x, y, z)e^{-ikz}, \quad (6.9)$$

т.е. будем полагать, что исходный световой пучок является монохроматической волной, распространяющейся в положительном направлении оси

$$E(x, y, z, t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(x, y, z)e^{i(\omega t - kz)}. \quad (6.10)$$

Подстановка (6.9) в уравнение динамики поля (6.8) приводит его для новой переменной к виду

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y^2} + \frac{4\pi k^2}{n^2} \chi^{(3)} |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = 0. \quad (6.11)$$

На рисунке 6.1 приведена иллюстрация увеличения поперечных размеров светового пучка из-за дифракции. Если пучок широкий (говорят, что излучение параксиальное) и его поперечный размер много больше длины волны излучения, то, как известно из практики и продемонстрировано на рисунке, изменение этих поперечных размеров на расстоянии, равном длине волны излучения, мало, и выполняются неравенства  $\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} \ll k \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}$  и  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \ll k \mathcal{E}$ .

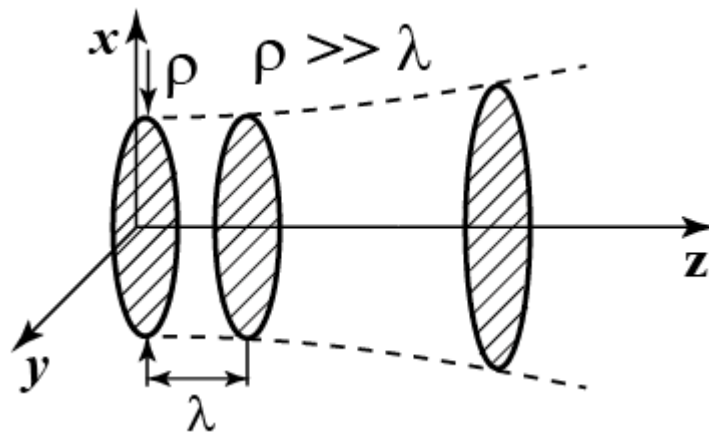


Рисунок 6.1 – Иллюстрация уширения поперечных размеров светового пучка из-за дифракции

Такое приближение, как было сказано в лекции 4, называется **приближением медленно меняющейся (на длине волны) амплитуды**.

Учитывая неравенства  $\left( \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} \ll k \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}, \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \ll k \mathcal{E} \right)$ , т.е. пренебрегая в (6.11)

первым слагаемым, получаем для однонаправленного излучения редуцированное нелинейное уравнение вида

$$-2ik \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \Delta_{\perp} \mathcal{E} + \frac{4\pi k^2}{n^2} \chi^{(3)} |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = 0, \quad (6.12)$$

где  $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – поперечный лапласиан.

### III. Нормировка укороченного нелинейного волнового уравнения

Несмотря на значительно более простой вид, чем (6.3), уравнение (6.12) в общем виде аналитически тоже не решается. Для дальнейшего анализа этого уравнения его полезно нормировать.

Решение дифференциального уравнения определяется также и его граничными (начальными) условиями. Пусть на границе нелинейной среды при  $z = 0$  поле излучения имеет гауссово распределение:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{\rho_0^2}}, \quad (6.13)$$

где  $\mathcal{E}_0$  – амплитуда поля волны на границе среды, а  $\rho_0$  характеризует исходный поперечный размер пучка на этой границе.

Введем безразмерные нормированные переменные  $\tilde{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0}$ ,  $\tilde{x} = \frac{x}{\rho_0}$  и

$\tilde{y} = \frac{y}{\rho_0}$ . Тогда граничное условие (6.13) в новых переменных принимает вид

$$\tilde{\mathcal{E}} \Big|_{z=0} = e^{-(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)}. \quad (6.14)$$

Уравнение (6.12) последовательно преобразуется,

$$-2ik \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z} + \rho_0^{-2} \tilde{\Delta}_\perp \tilde{\mathcal{E}} + \frac{4\pi k^2}{n^2} \chi^{(3)} |\tilde{\mathcal{E}}|^2 \tilde{\mathcal{E}} = 0,$$

и в новых переменных принимает вид

$$-i \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z} + \frac{1}{2k\rho_0^2} \tilde{\Delta}_\perp \tilde{\mathcal{E}} + \frac{2\pi k}{n^2} \chi^{(3)} |\tilde{\mathcal{E}}|^2 \tilde{\mathcal{E}} = 0. \quad (6.15)$$

Удобно ввести **дифракционную длину**  $L_{\text{дифр}} = 2k\rho_0^2 = 2 \cdot \frac{2\pi n}{\lambda} \rho_0^2 = 4\pi n \frac{\rho_0^2}{\lambda}$ , на которой дифракция приводит к заметному изменению пучка, а также **нелинейную длину**

$$L_{\text{нел}} = \left( \frac{2\pi k \chi^{(3)} \mathcal{E}_0^2}{n^2} \right)^{-1} = \left( \frac{4\pi^2 \chi^{(3)} \mathcal{E}_0^2}{n\lambda} \right)^{-1} \Bigg|_{\Delta n_{\text{нел}} = n_2 I = \frac{2\pi}{n} \chi^{(3)} \mathcal{E}_0^2} = \left( 2\pi \frac{\Delta n_{\text{нел}}}{\lambda} \right)^{-1} = \left( 2\pi \frac{n_2 I}{\lambda} \right)^{-1},$$

на которой становятся значительными нелинейные эффекты. Обратим внимание, что введенные указанным образом длины определяются как характеристиками среды, так и параметрами излучения.

Получили в итоге преобразований нормированное уравнение, которое описывает нелинейное распространение параксиальных линейно поляризованных оптических волн в изотропных нелинейных средах вида

$$-i \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z} + \frac{1}{L_{\text{дифр}}} \tilde{\Delta}_\perp \tilde{\mathcal{E}} + \frac{1}{L_{\text{нел}}} |\tilde{\mathcal{E}}|^2 \tilde{\mathcal{E}} = 0. \quad (6.16)$$

Важно, что во введенных нормированных переменных выполняются оценки  $\tilde{\Delta}_\perp \tilde{\mathcal{E}} \sim \frac{\Delta}{\Delta x} \left( \frac{\Delta \tilde{\mathcal{E}}}{\Delta \tilde{x}} \right) \sim 1$  и  $|\tilde{\mathcal{E}}|^2 \tilde{\mathcal{E}} \sim 1$ . Это означает, что, сопоставляя длину дифракции и длину нелинейности, мы можем определить, какое из этих явлений доминирует при распространении излучения в конкретной задаче.

**Вывод:** Введены параметры, по которым можно определить доминирующий в процессе распространения излучения эффект – дифракция это, или нелинейная рефракция, или оба этих эффекта не наблюдаются на данном расстоянии.

Рассмотрим ниже возможные ситуации:

$$1. z \ll L_{\text{дифр}}, L_{\text{нел}}.$$

Это означает, что можно пренебречь и явлением дифракции, и нелинейными эффектами. Уравнение (6.16) при указанном условии принимает вид

$$-i \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z} = 0, \tag{6.17}$$

и решение его тривиально

$$\tilde{\mathcal{E}}(\tilde{x}, \tilde{y}, z) = e^{-(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)}. \tag{6.18}$$

Как показано на рисунке 6.2, это решение не зависит от  $z$ .

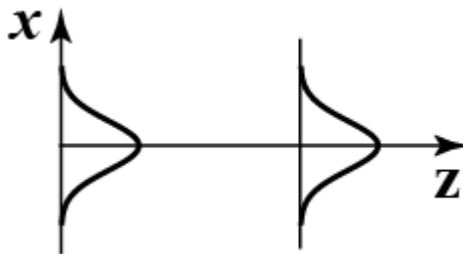


Рисунок 6.2 – Иллюстрация неизменяющегося профиля светового пучка при распространении на расстояния, много меньшие длин дифракции и нелинейности

$$2. z \sim L_{\text{дифр}} \ll L_{\text{нел}}.$$

Это означает, что на данных расстояниях можно пренебречь нелинейными эффектами, но надо учитывать дифракцию излучения. Уравнение (6.16) принимает вид

$$-i \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z} + \frac{1}{L_{\text{дифр}}} \tilde{\Delta}_{\perp} \tilde{\mathcal{E}} = 0. \tag{6.19}$$

Это уравнение хорошо известно в линейной оптике, и его часто называют основным уравнением квазиоптики. Оно описывает дифракцию Френеля. Для гауссовых пучков его решение имеет вид, иллюстрируемый на рисунке 6.3. На этом рисунке  $z_0 = \frac{k\rho^2}{2}$ ,  $L_{\text{дифр}} = 4z_0$ .

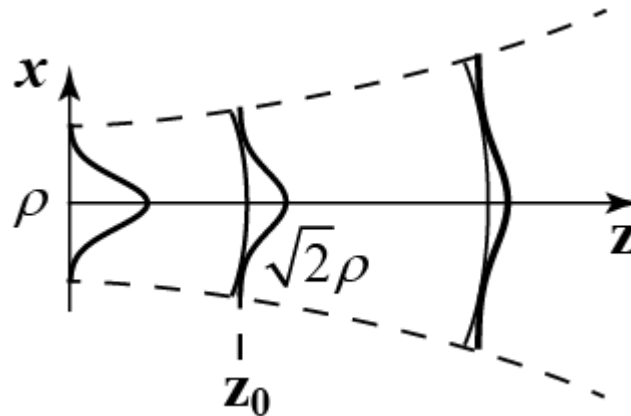


Рисунок 6.3 – Иллюстрация изменения профиля гауссова светового пучка из-за дифракции

3.  $z \sim L_{\text{нел}} \ll L_{\text{дифр}}$ .

При таком условии можно пренебречь дифракцией, но важными становятся нелинейные эффекты. Уравнение (6.16) принимает вид

$$-i \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z} + \frac{1}{L_{\text{нел}}} |\tilde{\mathcal{E}}|^2 \tilde{\mathcal{E}} = 0. \quad (6.20)$$

Мы уже решали это уравнение. Решение его приведено в лекции 4, и для данного случая оно принимает вид

$$\tilde{\mathcal{E}} = e^{-(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)} \cdot e^{-i \exp[-2(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)] \frac{z}{L_{\text{нел}}}}. \quad (6.21)$$

**Упражнение:**

Вывести решение уравнения динамики поля излучения (6.20), сделав подстановку вида  $\tilde{\mathcal{E}}(x, y, z) = \tilde{\mathcal{E}} e^{i\varphi}$ . После этой подстановки (6.20) преобразуется к виду

$$-i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} e^{i\varphi} + \mathcal{E} \frac{\partial \varphi}{\partial z} e^{i\varphi} + \frac{1}{L_{\text{нел}}} \mathcal{E}^3 = 0. \text{ Откуда, аналогично анализу, приведенному ранее}$$

в лекции 4, получаем  $\mathcal{E} = \text{const}$ ,  $\varphi = \mathcal{E}^2 \cdot \frac{z}{L_{\text{нел}}}$ . Под константой понимается отсутствие зависимости от  $z$ . Т.е. общий вид решения принимает вид (6.21), он иллюстрирован на рисунке 6.4.

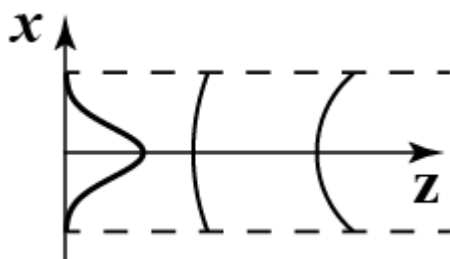


Рисунок 6.4 – Иллюстрация изменения фазовых поверхностей гауссова светового пучка из-за нелинейной рефракции

4. При  $z \sim L_{\text{дифр}} \sim L_{\text{нел}}$  задача обычно решается численно.

### Упражнение:

Пусть  $L_{\text{дифр}} = L_{\text{нел}}$ . Это означает, что влияние и нелинейной рефракции, и дифракции – одного порядка. Оценить по этому равенству критическую мощность самофокусировки  $P_{\text{кр}}$ .

Из равенства следует, что  $4\pi n \frac{\rho^2}{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi n_2 I}$ , и  $I(\pi \rho^2) = \frac{\lambda^2}{8\pi n n_2} \equiv P_{\text{кр}}$ .



#### IV. Пространственные солитоны

Как было показано во вводной лекции 1, явления самофокусировки и дифракции действуют разнонаправлено. Закономерен вопрос: а возможна ли ситуация, когда они компенсируют друг друга, и световой пучок будет распространяться в среде без изменения своего поперечного профиля? Оказывается, что возможна. Найдем такой профиль пучка, при котором его дифракционное расплывание точно компенсируется нелинейной рефракцией. Ограничимся в данном пособии частным случаем двумерных (щелевых) световых пучков.

Для двумерных пучков уравнение (6.16) принимает вид

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z} + \frac{i}{L_{\text{дифр}}} \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{E}}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{i}{L_{\text{нел}}} |\tilde{\mathcal{E}}|^2 \tilde{\mathcal{E}} = 0. \quad (6.22)$$

Ищем решение (6.22) в виде стационарного пучка

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_c(x) e^{-i\alpha z}, \quad (6.23)$$

поперечный профиль которого не зависит от  $z$ . Подстановка (6.23) в (6.22) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-i\alpha \mathcal{E}_c + \frac{i}{L_{\text{дифр}}} \mathcal{E}_c'' + \frac{i}{L_{\text{нел}}} \mathcal{E}_c^3 = 0,$$

которое удобно переписать как

$$\frac{1}{L_{\text{дифр}}} \mathcal{E}_c'' - \alpha \mathcal{E}_c + \frac{1}{L_{\text{нел}}} \mathcal{E}_c^3 = 0. \quad (6.24)$$

Прямой подстановкой можно показать, что уравнение (6.24) имеет решение вида гиперболического секанса

$$\mathcal{E}_c(\tilde{x}) = \mathcal{E}_{c0} \operatorname{sech}\left(\frac{\tilde{x}}{a}\right), \quad (6.25)$$

где  $\alpha = \frac{1}{L_{\text{дифр}} \cdot a^3} = \frac{\mathcal{E}_{c0}^2}{2L_{\text{нел}}}$ .

Решение (6.25) иллюстрировано на рисунке 6.5.

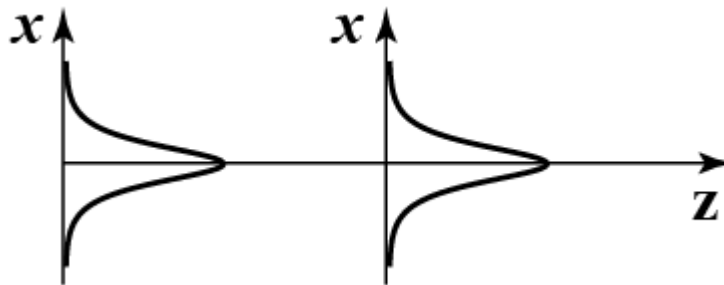


Рисунок 6.5 – Иллюстрация неизменяющегося с распространением в нелинейной среде поперечного профиля пучка

## V. Самофокусировка волн

Мы рассмотрели выше аналитические решения волнового уравнения (6.16) для многих частных случаев, когда можно пренебречь дифракцией или, наоборот, нелинейной рефракцией, а также когда эти явления полностью компенсируют друг друга и в нелинейной среде формируются пространственные солитоны. Но столь простыми аналитические и численные решения уравнения

$$-i \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z} + \frac{1}{L_{\text{дифр}}} \tilde{\Delta}_{\perp} \tilde{\mathcal{E}} + \frac{1}{L_{\text{нел}}} |\tilde{\mathcal{E}}|^2 \tilde{\mathcal{E}} = 0$$

являются не всегда. В этом разделе лекции мы обсудим явление самофокусировки, которое наступает при высокой мощности излучения, превышающей так называемую **критическую мощность самофокусировки**

$$P_{\text{кр}} = \frac{\lambda^2}{8\pi n n_2}. \quad (6.26)$$

Оценку величины (6.26) мы дали ранее, исходя из равенства дифракционной и нелинейной длин, т.е. из условий, когда дифракция и нелинейная рефракция характеризуются примерно одинаковым вкладом в эволюцию светового пучка и компенсируют друг друга.

Различают крупно- и мелкомасштабную самофокусировку излучения. Рассмотрим их.

## 1. Крупномасштабная самофокусировка

Данное явление в 1962 году предсказал советский физик Г.А. Аскарьян. Оно иллюстрировано на рисунке 6.6. При превышении критической мощности самофокусировки, когда нелинейная рефракция является более сильной, чем дифракция, световой пучок самофокусируется. Из рисунка видно, что фазовые поверхности излучения в нелинейной среде искривляются. Это связано с тем, что при положительной нелинейности среды на оси пучка, где выше интенсивность излучения и больше индуцированная светом нелинейная добавка в показатель преломления среды, фазовая скорость волны становится меньшей, чем на периферии пучка. Свет сам себе индуцирует линзу. Ее действие приводит к оптическому коллапсу.

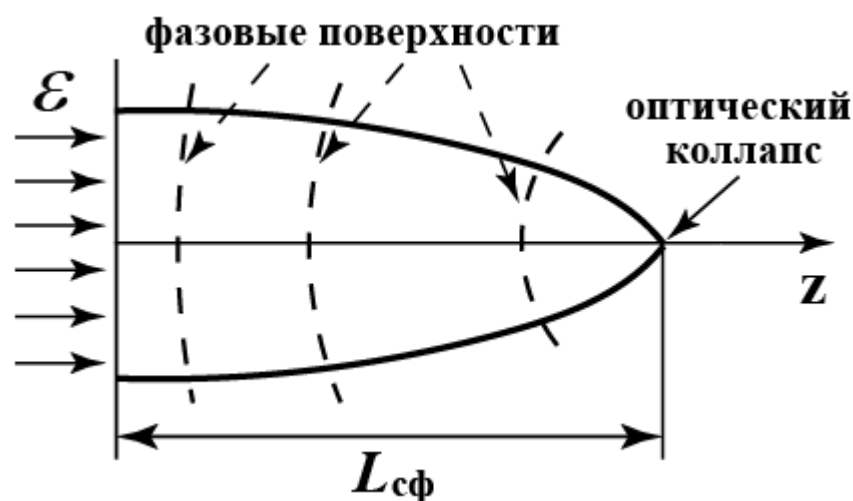


Рисунок 6.6 – Иллюстрация явления самофокусировки светового пучка

### 1.1 Об аналитическом рассмотрении самофокусировки

Опишем только схему получения аналитического решения задачи о самофокусировке пучка, строгое изложение которого можно найти, например, в учебнике [2].

Рассматривается граничное условие вида гауссова пучка

$$\tilde{\mathcal{E}} \Big|_{z=0} = e^{-r^2}, \quad (6.27)$$

где  $r^2 = x^2 + y^2$ .

Ищется решение в безабберационном приближении в виде, который ожидается по известному решению линеаризованного уравнения (6.16),

$$\tilde{\mathcal{E}}(r, z) = \frac{1}{f(z)} e^{-\frac{r^2}{f^2(z)}} e^{-i[g(z)r^2 + \varphi(z)]}, \quad (6.28)$$

где  $f(z)$  характеризует ширину пучка, а  $g(z)$  и  $\varphi(z)$  – его фазовую самомодуляцию. Полагается, что пучок сохраняет свою форму и рассматривается при осевом приближении  $r \ll f(z)$ .

Решение, как можно показать [2], имеет вид

$$f(z) = \sqrt{1 + \left( \frac{1}{L_{\text{дифр}}^2} - \frac{1}{L_{\text{нел}}^2} \right) z^2} = \sqrt{1 + \left( \frac{z}{L_{\text{дифр}}} \right)^2 \left( 1 - \frac{P_0}{P_{\text{кр}}} \right)}. \quad (6.29)$$

**Вывод:** При  $P_0 = P_{\text{кр}}$  дифракция и нелинейная рефракция уравновешивают друг друга. При  $P_0 > P_{\text{кр}}$  пучок самофокусируется. Явление носит пороговый характер.

**Замечание:** То, что порог самофокусировки определяется лишь мощностью пучка, может показаться странным. Ведь  $\Delta n_{\text{нел}} \sim I$ . При  $P = I \cdot S = \text{const}$  ( $S$  – размер пучка)  $\Delta n_{\text{нел}}$  растет с уменьшением  $S$ . Но уменьшение  $S$  увеличивает и дифракционную расходимость.

**Упражнение:** Найти  $L_{\text{сф}}$  из условия  $f(L_{\text{сф}}) = 0$ .

$$1 + \left( \frac{L_{\text{сф}}}{L_{\text{дифр}}} \right)^2 \left( 1 - \frac{P_0}{P_{\text{кр}}} \right) = 0, \quad \text{откуда} \quad L_{\text{сф}} = L_{\text{дифр}} \left( \sqrt{\frac{P_0}{P_{\text{кр}}} - 1} \right)^{-1}$$

– зависит не только от мощности, но и от размеров пучка.

## 1.2 О численном моделировании самофокусировки

Строгий анализ самофокусировки гауссова пучка обнаруживает качественное отличие этого явления от выше рассмотренной картины приосевого приближения. Смотри рисунок 6.7.

Как видно из рисунка, пучок, в общем случае, не фокусируется в точку как целое. Периферийные лучи пересекают ось пучка на больших расстояниях, чем приосевые. Аберрации проявляются в виде кольцевой поперечной структуры самофокусирующегося пучка. В каждом кольце сосредотачивается мощность, близкая к  $P_{кр}$ .

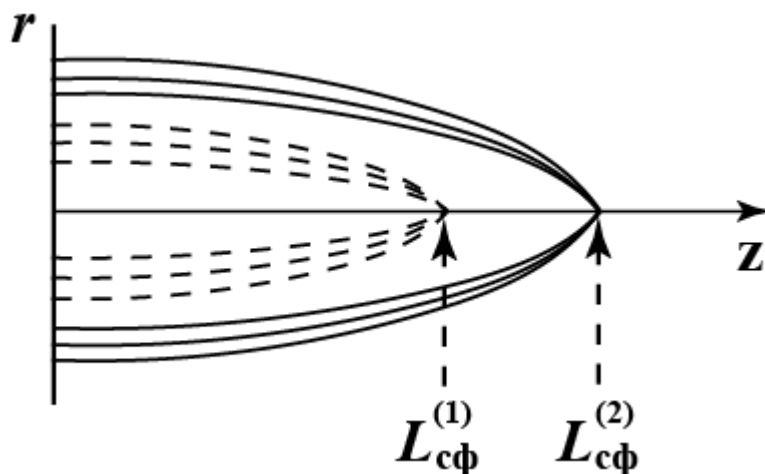


Рисунок 6.7 – Иллюстрация двухфокусной самофокусировки пучка

**Замечание:** О волновом коллапсе.

В фокусе становится неприменимой рассматриваемая математическая модель взаимодействия света с веществом.

## 2. Мелкомасштабная самофокусировка

В 1966 году В.И. Беспалов и В.И. Таланов обнаружили неустойчивость плоских волн к поперечным пространственным возмущениям. Рассмотрим это явление.

### Вспомогательная выкладка

Для плоской однородной волны выполняется

$$-i \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z} + \frac{1}{L_{\text{нел}}} |\tilde{\mathcal{E}}|^2 \tilde{\mathcal{E}} = 0.$$

Ищем решение в виде  $\tilde{\mathcal{E}} = A e^{i\varphi(z)}$

$$-i \left[ \frac{\partial A}{\partial z} e^{i\varphi} + A \cdot i \frac{\partial \varphi}{\partial z} e^{i\varphi} \right] + \frac{1}{L_{\text{нел}}} A^3 e^{i\varphi} = 0.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{L_{\text{нел}}} A^2. \end{cases}$$

Решение имеет вид

$$\begin{cases} A = \text{const}, \\ \varphi = -\frac{z}{L_{\text{нел}}} + \text{const}. \end{cases}$$

Подчеркнем, что приведенное решение является и точным решением нелинейного уравнения динамики пучков (которое записано с учетом дифракции).

Предположим, что плоская волна в нелинейной среде приобрела малые амплитудно-фазовые возмущения

$$\tilde{\mathcal{E}}(x, y, z) = e^{i\varphi(z) \cdot z [1 + \alpha(x, y, z) + i\beta(x, y, z)]}. \quad (6.30)$$

**Замечание:**

$$e^{i\varphi(1+\alpha+i\beta)} \Big|_{\alpha, \beta \ll 1} \approx e^{i\varphi} e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha e^{i(\varphi+\beta)} \approx (1+\alpha)e^{i(\varphi+\beta)},$$

где первый множитель  $1+\alpha$  описывает амплитудное возмущение, а  $e^{i(\varphi+\beta)}$  – фазовое возмущение.

Подставим возмущенное решение (6.30) в уравнение динамики пучков (6.16).

**Упражнение:** Провести эту подстановку, пренебрегая для простоты зависимостью от  $y$  (т.е. рассматривая щелевые пучки, для которых  $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0$ ) и малыми более высокого порядка  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$  и т.п. Разделяя действительную и мнимую части, получить два уравнения для  $\alpha$  и  $\beta$ .

$$\begin{aligned} & -i \left[ \left( \frac{\partial \alpha}{\partial z} + i \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) e^{-i \frac{z}{L_{\text{нел}}}} - i \frac{1}{L_{\text{нел}}} (1 + \alpha + i\beta) e^{-i \frac{z}{L_{\text{нел}}}} \right] + \frac{1}{L_{\text{дифр}}} \left( \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \tilde{x}^2} + i \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tilde{x}^2} \right) e^{-i \frac{z}{L_{\text{нел}}}} + \\ & + \frac{1}{L_{\text{нел}}} (1 + \alpha + i\beta)^2 (1 + \alpha - i\beta) e^{-i \frac{z}{L_{\text{нел}}}} = 0. \end{aligned}$$

$$(1 + \alpha + i\beta)^2 (1 + \alpha - i\beta) \approx (1 + 2\alpha + 2i\beta)(1 + \alpha - i\beta) = 1 + 3\alpha + i\beta.$$

$$-i \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{1}{L_{\text{нел}}} (1 + \alpha) - \frac{i}{L_{\text{нел}}} \beta + \frac{1}{L_{\text{дифр}}} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{i}{L_{\text{дифр}}} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{L_{\text{нел}}} (1 + 3\alpha) + \frac{i}{L_{\text{нел}}} \beta = 0.$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{1}{L_{\text{дифр}}} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \\ \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{1}{L_{\text{дифр}}} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{2\alpha}{L_{\text{нел}}} = 0. \end{cases}$$

В итоге получить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{1}{L_{\text{дифр}}} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tilde{x}^2} & | = A \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \beta}{\partial z} = -\frac{1}{L_{\text{дифр}}} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{2\alpha}{L_{\text{нел}}} & | = -A \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} - B\alpha. \end{cases} \quad (6.31)$$

**Упражнение:** Привести величины  $A$  и  $B$ .

Ограничимся далее анализом эволюции одной фурье-компоненты спектра возмущения:

$$\alpha(\tilde{x}, z) = \alpha_q(z) \sin(\tilde{q}\tilde{x}), \quad \beta(\tilde{x}, z) = \beta_q(z) \sin(\tilde{q}\tilde{x}), \quad (6.32)$$

где  $\tilde{q} = q \cdot \rho$  – нормированная пространственная частота,  $q = \frac{2\pi}{a}$  – пространственная частота возмущения,  $a$  – период возмущения. Для  $\alpha_q$  и  $\beta_q$  получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_q}{\partial z} = -\frac{\tilde{q}^2}{L_{\text{дифр}}} \beta_q & | = -A' \beta_q, \\ \frac{\partial \beta_q}{\partial z} = -\frac{\tilde{q}^2}{L_{\text{дифр}}} \alpha_q - \frac{2\alpha_q}{L_{\text{нел}}} & | = A' \alpha_q - B' \alpha_q. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial z^2} = -\frac{\tilde{q}^2}{L_{\text{дифр}}} \frac{\partial \beta_q}{\partial z} = -\frac{\tilde{q}^2}{L_{\text{дифр}}} \left( \frac{\tilde{q}^2}{L_{\text{дифр}}} \alpha_q - \frac{2\alpha_q}{L_{\text{нел}}} \right).$$

$$\frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial z^2} + \frac{\tilde{q}^4}{L_{\text{дифр}}^2} \left( 1 - 2 \frac{L_{\text{дифр}}}{L_{\text{нел}}} \frac{1}{\tilde{q}^2} \right) \alpha_q = 0 \quad (6.33)$$

– обыкновенное дифференциальное уравнение.

Рассмотрим решения уравнения (6.33) эволюции возмущения плоской поперечно однородной волны в нелинейной среде.



При  $1 - 2 \frac{L_{\text{дифр}}}{L_{\text{нел}}} \frac{1}{\tilde{q}^2} > 0$  имеем осциллирующее синусно-косинусное решение. Это означает, что амплитуда возмущения при распространении пучка **не нарастает**.

При  $1 - 2 \frac{L_{\text{дифр}}}{L_{\text{нел}}} \frac{1}{\tilde{q}^2} < 0$  имеем **нарастающую** функцию вида

$$\alpha_q(z) = \alpha_q(0) e^{\frac{z}{L_{\text{возм}}}}, \quad (6.34)$$

$$\text{где } \frac{1}{L_{\text{возм}}^2} = \frac{\tilde{q}^4}{L_{\text{дифр}}^2} \left( 2 \frac{L_{\text{дифр}}}{L_{\text{нел}}} \frac{1}{\tilde{q}^2} - 1 \right),$$

т.е. длина, на которой возмущение нарастает в  $e$  раз, определяется соотношением

$$L_{\text{возм}} = \frac{L_{\text{дифр}}}{\tilde{q}^2 \sqrt{2 \frac{L_{\text{дифр}}}{L_{\text{нел}}} \frac{1}{\tilde{q}^2} - 1}}. \quad (6.35)$$

**Упражнение:** Найти  $a_{\text{опт}}$ , при котором  $L_{\text{возм}}$  минимальна. Учитывать, что  $q = \frac{2\pi}{a}$ .

Длины  $L_{\text{дифр}} = 4\pi n \frac{\rho^2}{\lambda}$ ,  $L_{\text{нел}} = \frac{\lambda}{2\pi n_2 I}$  от  $a$  не зависят.

На рисунке 6.8  $a_{\text{опт}}$  – это масштаб неоднородности поля, наиболее легко увлекаемый мелкомасштабной самофокусировкой.

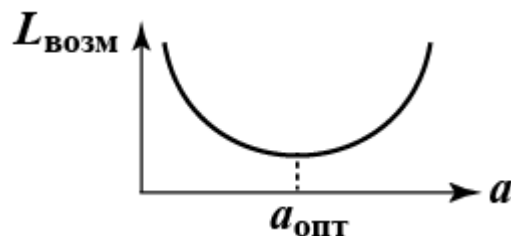


Рисунок 6.8 – Зависимость расстояния, на котором возмущение профиля пучка возрастает в  $e$  раз, от размера возмущения

Приведем ниже решение упражнения

$$L_{\text{возм}} = \frac{L_{\text{дифр}}}{\tilde{q}^2 \sqrt{2 \frac{L_{\text{дифр}}}{L_{\text{нел}}} \frac{1}{\tilde{q}^2} - 1}}, \quad q = \frac{2\pi}{a}, \quad \tilde{q} = q \cdot \rho.$$

Тогда  $\tilde{q} = \frac{2\pi}{a/\rho}$ .

Введем  $\tilde{a} = \frac{a}{\rho}$ ,  $q = \frac{2\pi}{\tilde{a}}$ . Тогда

$$L_{\text{возм}} = \frac{\tilde{a}^2}{4\pi^2} \frac{L_{\text{дифр}}}{\sqrt{2 \frac{L_{\text{дифр}}}{L_{\text{нел}}} \frac{\tilde{a}^2}{4\pi^2} - 1}} = \frac{\alpha \cdot \tilde{a}^2}{\sqrt{\beta \cdot \tilde{a}^2 - 1}},$$

где  $\alpha = \frac{L_{\text{дифр}}}{4\pi^2}$ ,  $\beta = \frac{1}{2\pi^2} \frac{L_{\text{дифр}}}{L_{\text{нел}}}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{\text{возм}}}{\partial \tilde{a}} &= \frac{2\alpha \cdot \tilde{a}}{\sqrt{\beta \cdot \tilde{a}^2 - 1}} - \frac{\tilde{a}^3 \cdot \alpha \cdot \beta}{\left(\sqrt{\beta \cdot \tilde{a}^2 - 1}\right)^3} = \frac{2\alpha \cdot \tilde{a}}{\sqrt{\beta \cdot \tilde{a}^2 - 1}} \left[ 1 - \frac{\beta \cdot \tilde{a}^2}{2(\beta \cdot \tilde{a}^2 - 1)} \right] = \\ &= \frac{\alpha \cdot \tilde{a}}{(\beta \cdot \tilde{a}^2 - 1)^{3/2}} [2(\beta \cdot \tilde{a}^2 - 1) - \beta \cdot \tilde{a}^2] = \frac{\alpha \cdot \tilde{a}}{(\beta \cdot \tilde{a}^2 - 1)^{3/2}} (\beta \cdot \tilde{a}^2 - 2). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L_{\text{возм}}}{\partial \tilde{a}} = 0 \quad \text{при} \quad \tilde{a}_{\text{опт}}^2 = \frac{2}{\beta}, \quad \text{т.е.} \quad \tilde{a}_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2}{\beta}}.$$

Тогда

$$\tilde{a}_{\text{опт}} = \sqrt{4\pi^2 \frac{L_{\text{нел}}}{L_{\text{дифр}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{L_{\text{нел}}}{L_{\text{дифр}}}}.$$

$$a_{\text{опт}} = \tilde{a}_{\text{опт}} \cdot \rho = 2\pi\rho \sqrt{\frac{L_{\text{нел}}}{L_{\text{дифр}}}}.$$

$$a_{\text{опт}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2n \cdot n_2 I}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2n \cdot \Delta n_{\text{нел}}}}.$$

## **Выводы:**

1. Крупномасштабная самофокусировка – это самофокусировка пучка как целого.
2. Мелкомасштабная самофокусировка обусловлена неустойчивостью волн, проявляющейся в разбиении пучка на световые нити. При  $P_0 \gg P_{кр}$  мелкомасштабная самофокусировка доминирует.

## **Вопросы для самоконтроля**

1. При переходе в нелинейном волновом уравнении для диэлектрических сред от операции двойного применения ротора к оператору Лапласа какие приближения используются?
2. Что такое дифракционная и нелинейная длины?
3. Что в нелинейной оптике называют пространственными солитонами?
4. Что такое критическая мощность самофокусировки?
5. Чем отличается крупномасштабная самофокусировка от мелкомасштабной?

Уважаемый читатель! Мы с Вами довольно внимательно рассмотрели явления нелинейной оптики в поле монохроматических волн. В заключительной лекции кратко остановимся на вопросе, как описывают задачи нелинейной оптики оптических импульсов. При этом ограничимся обсуждением методов описания нелинейной динамики квазимонохроматических волн. Нелинейную динамику импульсов с широким спектром рассмотрим в курсе дисциплины «Фемтосекундная оптика и фемтотехнологии».

## ЛЕКЦИЯ 7

### ДИНАМИКА ПОЛЯ СВЕТОВЫХ ИМПУЛЬСОВ

Мы обсудили некоторые явления нелинейной оптики, сначала пользуясь самой простой идеализированной моделью излучения вида плоской поперечно однородной монохроматической волны. Затем обсудили, каковы новые явления сможем описать, если усложним задачу и станем рассматривать поперечно ограниченные световые пучки, что, конечно, гораздо ближе к реальности. Но мы по-прежнему сохраняли идеализацию монохроматического излучения. Попробуем теперь снять еще одно ограничение и рассмотреть квазимонохроматические пучки:

$$E(z, x, y, t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(z, x, y, t) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} + \text{к.с.} \quad (7.1)$$

$$\text{где } k_0 = \frac{\omega_0 n(\omega_0)}{c} = \frac{2\pi n_0}{\lambda_0}.$$

Излучение (7.1) описывает квазиплоскую, квазимонохроматическую волну. Как ясно из предыдущего рассмотрения, приближение квазиплоской волны – это очень хорошее приближение для анализа эволюции в пространстве световых пучков, поперечные размеры которых много больше длины волны излучения. Смотри рисунок 7.1. Приближение квазимонохроматической волны – это очень хорошее приближение при описании распространения импульсов, длительности которых много больше периода колебаний поля волны. Также смотри рисунок 7.1.

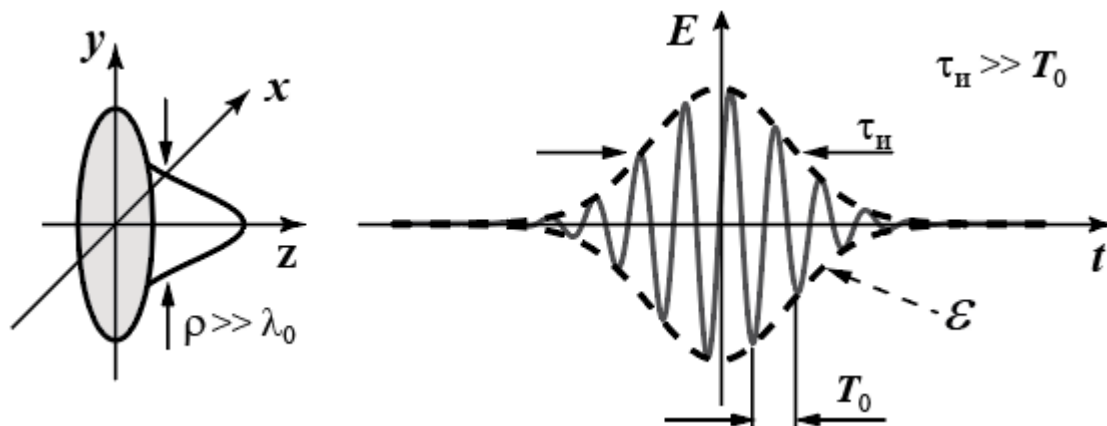


Рисунок 7.1 – Иллюстрации квазиплоских волн и квазимонохроматических импульсов.  $T_0$  – центральный период колебаний электрического поля

При анализе нелинейных явлений в поле волны (7.1) уравнение однонаправленной динамики поля излучения (6.16) усложнится и примет вид

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{1}{V} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - i \gamma |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = \frac{i}{2k_0} \Delta_{\perp} \mathcal{E}, \quad (7.2)$$

где второе и третье слагаемые описывают дисперсию света, четвертое слагаемое описывает нелинейность среды, а слагаемое в правой части уравнения описывает дифракцию света.

Обратим внимание читателя, что описание нелинейной оптики импульсов математически эквивалентно описанию нелинейной оптики монохроматических пучков. Ведь уравнение (7.2) без пятого слагаемого (такое уравнение описывает динамику импульсов) формально эквивалентно уравнению (7.2) без второго и третьего слагаемых (а такое уравнение уже описывает динамику пучков). И дисперсия, и дифракция математически учитываются вторыми производными: по времени для описания дисперсии, и по поперечной координате при описании дифракции. Это означает, что, например, изучив явление самофокусировки, мы представляем себе, как будет описываться явление самосжатия светового импульса или процесс проявления неустойчивости светового импульса.

Мы не будем далее обсуждать нелинейную оптику импульсного излучения, отослав читателя к изучению дисциплины «Фемтосекундная оптика и фемтотехнологии», в которой будут изучены и более сложные вопросы описания динамики волн не только квазиплоских и квазимонохроматических, но характеризующихся широким и пространственным и временным спектром. Там же будет дано обоснование уравнению (7.2). Смотри также монографию [3].

### **Вопросы для самоконтроля**

1. Какие оптические эффекты дополнительно следует учитывать в волновом уравнении при переходе от рассмотрения динамики монохроматического излучения к анализу нелинейной оптики импульсов?
2. В чем сходство в математическом описании нелинейной динамики монохроматических световых пучков и импульсов?

### **РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА**

1. Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. Т. IV. Оптика. – 3-е изд., стереот. М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2002. – 792 с.
2. М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков. Теория волн. – М: Наука, 1979. – 384 с.
3. С.А. Козлов, В.В. Самарцев. Основы фемтосекундной оптики. – М.: Физматлит, 2009. – 292 с.
4. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Пер. с нем. – 4-е изд., испр. – М.: Наука: Гл. ред. физ-мат. лит., 1971. – 576 с.
5. Л.Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М., 1969. – 424 с.

Дроздов Аркадий Анатольевич  
Козлов Сергей Аркадьевич

## **Основы нелинейной оптики**

**Учебное пособие**

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

**Редакционно-издательский отдел**  
**Университета ИТМО**  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А