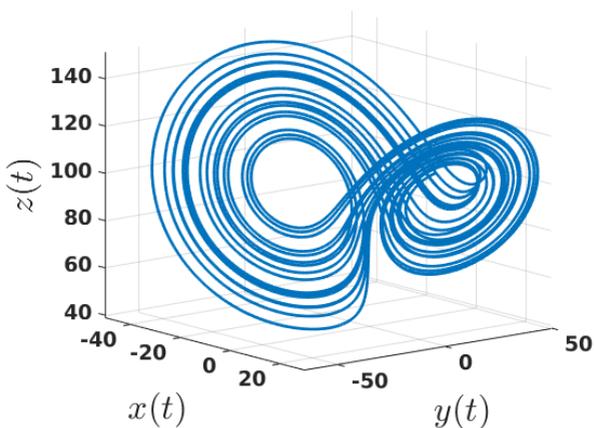


**С.А. Плотников, Д.М. Семенов,  
А.Л. Фрадков**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**



Санкт-Петербург  
2021

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**С.А. Плотников, Д.М. Семенов,  
А.Л. Фрадков**

# **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ  
В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО  
по направлениям подготовки 15.04.06, 24.04.02, 27.04.03, 27.04.04  
в качестве учебного пособия для реализации  
основных профессиональных образовательных программ  
высшего образования магистратуры

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

**Санкт-Петербург  
2021**

Плотников С.А., Семенов Д.М., Фрадков А.Л., Математическое моделирование систем управления. – СПб: Университет ИТМО, 2021. – 193 с.

Рецензент(ы):

Ананьевский Михаил Сергеевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, ИПМаш РАН.

Учебное пособие посвящено основам теории управления и математического моделирования. Представлены шесть лабораторных работ с последовательно увеличивающейся сложностью, начиная от исследования устойчивости линейных систем управления, заканчивая исследованием устойчивости систем управления с запаздываниями. Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки магистров 15.04.06 Мехатроника и робототехника, 24.04.02 Системы управления движением и навигация, 27.04.03 Системный анализ и управление, 27.04.04 Управление в технических системах.



**Университет ИТМО** – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2021

© Плотников С.А., Семенов Д.М., Фрадков А.Л., 2021

# Оглавление

|   |    |
|---|----|
| <b>Введение</b>   | 6  |
| <b>Глава 1 Методология математического моделирования</b>                                    | 9  |
| 1.1 Понятие мат. модели . . . . .   | 9  |
| 1.2 Мат. моделирование и теория систем . . . . .  | 11 |
| 1.3 Мат. моделирование и системный анализ . . . . .   | 17 |
| 1.4 Сложные и простые системы. Декомпозиция . . . . .                                       | 24 |
| 1.5 Классификация моделей . . . . .   | 27 |
| 1.6 Вопросы для самоконтроля . . . . .  | 28 |
| <b>Глава 2 Линейные системы управления</b>  | 29 |
| 2.1 Понятие устойчивости линейной системы . . . . .   | 29 |
| 2.1.1 Скалярный случай . . . . .  | 29 |
| 2.1.2 Векторный случай . . . . .  | 33 |
| 2.2 Линейные операторы . . . . .  | 35 |
| 2.2.1 Преобразование Лапласа . . . . .  | 37 |
| 2.2.2 $\delta$ -функция . . . . .   | 38 |
| 2.2.3 Импульсная характеристика . . . . .   | 39 |
| 2.3 Модели линейных систем . . . . .  | 41 |
| 2.3.1 Принципы управления . . . . .   | 41 |
| 2.3.2 Формы записи линейных систем . . . . .  | 42 |
| 2.3.3 Переход от системы в форме «вход-выход» к<br>форме пространства состояний . . . . .   | 43 |
| 2.3.4 Переход от системы в форме пространства со-<br>стояний к форме «вход-выход» . . . . . | 45 |
| 2.3.5 Передаточная функция . . . . .  | 46 |
| 2.3.6 Стабилизируемость линейной системы . . . . .  | 47 |
| 2.4 Практическая работа №1 . . . . .  | 48 |
| 2.4.1 Пример выполнения практической работы . . . . .                                       | 52 |

|                |  |            |
|----------------|--|------------|
| 2.5            | Вопросы для самоконтроля . . . . .   | 55         |
| <b>Глава 3</b> | <b>Нелинейные системы управления</b>   | <b>56</b>  |
| 3.1            | Понятия устойчивости нелинейной системы . . . . .                                | 56         |
| 3.2            | Анализ локальной устойчивости . . . . .  | 61         |
| 3.2.1          | Типы положений равновесия системы второго порядка . . . . .                      | 63         |
| 3.3            | Линейные матричные неравенства . . . . .   | 65         |
| 3.3.1          | Критерий Сильвестра . . . . .  | 67         |
| 3.4            | Анализ глобальной устойчивости . . . . .   | 68         |
| 3.4.1          | Метод функций Ляпунова . . . . .   | 68         |
| 3.4.2          | Исследование модели популяции . . . . .  | 70         |
| 3.4.3          | Абсолютная устойчивость . . . . .  | 72         |
| 3.5            | Практическая работа №2 . . . . .   | 74         |
| 3.5.1          | Пример выполнения практической работы . . . . .                                  | 79         |
| 3.6            | Колебательные системы . . . . .  | 85         |
| 3.7            | Бифуркации . . . . .   | 89         |
| 3.7.1          | Понятие бифуркации в динамических системах . . . . .                             | 89         |
| 3.7.2          | Седлоузловая бифуркация . . . . .  | 89         |
| 3.7.3          | Транскритическая бифуркация . . . . .  | 92         |
| 3.7.4          | Вилообразная бифуркация . . . . .  | 93         |
| 3.7.5          | Бифуркация Андронова-Хопфа . . . . .   | 96         |
| 3.8            | Практическая работа №3 . . . . .   | 100        |
| 3.8.1          | Пример выполнения практической работы . . . . .                                  | 101        |
| 3.9            | Хаотические системы . . . . .  | 102        |
| 3.9.1          | От колебаний – к хаосу . . . . .   | 102        |
| 3.9.2          | Определение хаотической системы . . . . .  | 105        |
| 3.9.3          | Критерии хаотичности . . . . .   | 111        |
| 3.9.4          | Зачем нужны хаотические модели? . . . . .  | 113        |
| 3.10           | Вопросы для самоконтроля . . . . .   | 115        |
| <b>Глава 4</b> | <b>Дискретные системы управления</b>   | <b>117</b> |
| 4.1            | Дискретные модели . . . . .  | 117        |
| 4.2            | Устойчивость дискретных систем . . . . .   | 120        |
| 4.3            | Формы записи дискретных систем . . . . .   | 122        |
| 4.3.1          | Переход от системы в форме «вход-выход» к форме пространства состояний . . . . . | 123        |
| 4.3.2          | Переход от системы в форме пространства состояний к форме «вход-выход» . . . . . | 124        |
| 4.3.3          | $Z$ -преобразование . . . . .  | 125        |

|                   |  |     |
|-------------------|--|-----|
| 4.3.4             | Передаточная функция . . . . .                                 | 127 |
| 4.4               | Дискретизация . . . . .  | 127 |
| 4.5               | Практическая работа №4 . . . . .                               | 132 |
| 4.5.1             | Пример выполнения практической работы . . .                    | 136 |
| 4.6               | Вопросы для самоконтроля . . . . .                             | 141 |
| <b>Глава 5</b>    | <b>Системы с задержками</b>                                    | 142 |
| 5.1               | Идея решения и метод шагов . . . . .                           | 143 |
| 5.2               | Устойчивость линейных систем с задержкой . . . . .             | 144 |
| 5.2.1             | Метод функционалов Ляпунова-Красовского . .                    | 146 |
| 5.2.2             | Метод Разумихина . . . . .                                     | 147 |
| 5.3               | Практическая работа №5 . . . . .                               | 148 |
| 5.3.1             | Пример выполнения практической работы . . .                    | 152 |
| 5.4               | Дескрипторный метод . . . . .                                  | 156 |
| 5.5               | Практическая работа №6 . . . . .                               | 159 |
| 5.5.1             | Пример выполнения практической работы . . .                    | 160 |
| 5.6               | Вопросы для самоконтроля . . . . .                             | 162 |
| <b>Глава 6</b>    | <b>Другие виды моделей</b>                                     | 163 |
| 6.1               | Нечеткие модели . . . . .                                      | 163 |
| 6.1.1             | Нечеткие множества и лингвистические пере-<br>менные . . . . . | 163 |
| 6.1.2             | Нечеткие системы . . . . .                                     | 167 |
| 6.1.3             | Задачи группировки и упорядочения . . . . .                    | 171 |
| 6.1.4             | Нечеткие числа . . . . .                                       | 173 |
| 6.1.5             | Вероятность или нечеткость? . . . . .                          | 176 |
| 6.2               | Нейронные сети . . . . .                                       | 177 |
| 6.2.1             | Математическая модель нейрона . . . . .                        | 178 |
| 6.2.2             | Прямое распространение . . . . .                               | 180 |
| 6.2.3             | Обратное распространение . . . . .                             | 182 |
| 6.3               | Вопросы для самоконтроля . . . . .                             | 186 |
| <b>Литература</b> |  | 187 |

# Введение

Дисциплина «Моделирование технических систем» имеет своей целью дать студентам подготовку в области теории математического моделирования систем управления; дать навыки по использованию средств математического моделирования и теории управления для исследования различного рода технических объектов и систем. Дисциплина формирует базовые знания в области теории управления и математического моделирования технических объектов и систем. Для изучения данной дисциплины студенты должны обладать математической подготовкой в объеме курса высшей математики технического вуза.

Математическое моделирование – это методология научной и практической деятельности людей, основанная на построении, исследовании и использовании математических моделей. Математическим моделированием занимался, в сущности, каждый, кто применял математику на практике – от великих ученых древности до школьников, решающих задачи «на составление уравнений». Однако в самостоятельную научную дисциплину математическое моделирование оформилось лишь в последние несколько десятилетий в связи с широким применением компьютеров. Математическое моделирование тесно связано с прикладной математикой и с общей теорией систем, но не совпадает с ними, поскольку теория систем, как и другие разделы математики, имеет дело лишь с математическими объектами. Предмет математического моделирования шире и включает, кроме исследования математических объектов, формализацию постановки практической задачи и интерпретацию полученных формальных результатов. Иными словами, началом и концом процесса математического моделирования является окружающая действитель-

ность, практика.

Центральным понятием математического моделирования является *математическая модель* (ММ) – совокупность математических объектов и отношений, которые отображают объекты и отношения, существующие в некоторой области реального мира (*предметной области*). Выделяют три этапа математического моделирования:

- построение ММ (формализация задачи);
- исследование ММ (анализ модели);
- использование ММ (синтез решения).

В данном пособии рассматриваются в основном первые два этапа, но почти не затрагиваются вопросы синтеза решения, которым посвящена обширная литература по методам оптимизации и принятия решений (см. например, [5, 12, 20, 22, 35, 37, 38, 44, 50]).

Этап формализации тесно связан с научно-инженерной дисциплиной, именуемой системным анализом [37].

На этапе анализа решаются так называемые прямые задачи, т.е. по заданным значениям входов системы определяются ее выходы. Для этапа синтеза характерны обратные задачи, а именно определение входов системы по заданным (желаемым) значениям ее выходов. Использование ММ возможно для различных целей: прогнозирования, исследования, проектирования, управления.

Весь опыт человечества показывает, что одни и те же математические модели и методы могут одинаково применяться в различных областях и для различных целей. Это обстоятельство определяет внутреннее единство математического моделирования и его место в системе подготовки специалистов (об этом см. также [9, 10, 30, 46, 50]). Изучение математического моделирования должно идти вслед за изучением основных теоретических курсов и компьютерных технологий, но предшествовать выполнению основных курсовых и дипломных проектов.

Заметим, что при проектировании математическая модель используется для так называемого *предварительного* синтеза: структура и параметры модели и решения выбираются, когда реальной системы еще не существует. Напротив, в задачах управления синтез решения (выбор управляющего воздействия) осуществляется в

процессе работы системы на основе текущей информации о ее поведении (так называемый *совмещенный*, или *управляемый*, синтез). Управляемый синтез решения требует больше текущей, но меньше априорной информации, предоставляя новые возможности исследователю, проектировщику или конструктору системы.

Значительная часть пособия взята из [2], является переработкой [16, 51] и посвящена вопросам построения математической модели, выбора ее структуры и параметров и исследованию математических моделей. Материал пособия основан на лекциях и практических занятиях, проводившихся авторами в течение ряда лет со студентами и аспирантами Университета ИТМО, СПбГУ, БГТУ, и книге [2].

Пособие предназначено для студентов старших курсов факультета систем управления и робототехники Университета ИТМО для изучения дисциплины «Моделирование технических систем» по направлениям подготовки 15.04.06 «Мехатроника и робототехника», 24.04.02 «Системы управления движением и навигация», 27.04.03 «Системный анализ и управление», 27.04.04 «Управление в технических системах». Пособие содержит теоретический материал, читаемый на лекционных занятиях. В конце каждой из шести глав содержатся теоретические вопросы для самоконтроля приобретаемых студентами знаний. Кроме того, данное учебное пособие содержит шесть практических работ для закрепления теоретических знаний и умений студентов.

# Глава 1

## Методология математического моделирования

### 1.1 Понятие математической модели

Как уже было сказано в Предисловии, центральным понятием математического моделирования является понятие *математической модели* – совокупности математических объектов и отношений, которые отображают объекты и отношения некоторой области реального мира (предметной области).

Рассмотрим в качестве примера один из простейших видов математических моделей – линейное соотношение между двумя числовыми переменными. Если обозначить входную (независимую) переменную через  $u$ , а выходную (зависимую) через  $y$ , то такая модель имеет вид

$$y = ku, \quad (1)$$

где  $k$  – некоторый числовой параметр (коэффициент), выражающий свойства модели. Соотношение (1) является формальным выражением того факта, что между величинами  $u$  и  $y$  существует прямая пропорциональная зависимость. Подобными зависимостями описываются многие процессы в физических, биологических и других реальных (естественных или искусственных) объектах. Соотношение (1) (или другое аналогичное соотношение) может описывать как связь между конкретными переменными конкретного объекта, так и целый класс зависимостей, одинаковых для различных объектов. Наиболее общие и универсальные зависимости в естественных науках называются *законами*. Например, закон Ньютона в механике выражает тот факт, что ускорение тела прямо пропорционально приложенной к те-

лу силе. Закон Ома в физике говорит, что сила тока, протекающего через участок электрической цепи, прямо пропорциональна падению напряжения на этом участке и т.д.

С точки зрения математического моделирования и закон Ньютона, и закон Ома являются примерами линейных статических математических моделей (1). В случае закона Ньютона  $u \equiv F(t)$  – это сила, приложенная к телу в момент  $t$ ,  $y \equiv d^2s(t)/dt^2$  – ускорение тела, т.е. вторая производная от перемещения  $s(t)$ ,  $k = m^{-1}$  – масса тела. В случае закона Ома  $u \equiv I(t)$  – это сила тока в проводнике,  $y \equiv \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi(t)$  – падение напряжения на участке проводника (разность потенциалов),  $k = R$  – величина сопротивления рассматриваемого участка. Таким образом, математическая модель – это более общее понятие, чем закон, поскольку оно носит междисциплинарный характер. Успехи прикладной математики и математического моделирования основаны на том, что одними и теми же математическими моделями могут описываться совершенно различные по природе процессы, т.е. одни и те же приемы и методы построения и исследования математических моделей пригодны для различных объектов (задач).

С другой стороны, законы естественных наук часто являются «кирпичиками» для построения математической модели реального объекта (так называемые *теоретические модели*, или *модели на основе первичных принципов*). Такой подход является основным в теоретической и прикладной механике, а также в теоретической и прикладной физике, где модели конкретных процессов и объектов выводятся из общих вариационных принципов – законов (подробнее см., например, [42]). Однако готовых «кирпичиков» может оказаться недостаточно, и тогда при построении математической модели добавляются дополнительные соотношения – *связи*. В частности, такая ситуация возникает, когда реальный объект состоит из нескольких частей (элементов, компонентов) или требуется описать взаимодействие нескольких различных по природе процессов, протекающих в объекте. Правила соединения отдельных частей в единую математическую модель, отражающие структуру взаимодействия этих частей, часто называются *структурно-топологическими уравнениями (связями)*. Такие правила могут основываться на законах естественных наук, например, на законе Д'Аламбера для механических систем и аналогичном (в силу электромеханической аналогии) за-

коне Кирхгофа для электрических цепей. В общем случае для составления моделей целого из моделей отдельных частей используется аппарат теории графов и теории матриц [35, 47].

Однако даже если уравнения отдельных частей и уравнения связей построены, задачу построения математической модели рано считать решенной, поскольку модель может содержать ряд параметров, которые недоступны или трудно определяемы в реальной системе. Их определение может потребовать дополнительных экспериментов с реальной системой с целью определения (идентификации) параметров математической модели. Например, в линейной модели (1) требуется оценить коэффициент  $k$  по результатам экспериментов.

Хотя методы оценки параметров достаточно хорошо разработаны, их применение имеет принципиальные ограничения в силу невозможности построения абсолютно точной модели реальной системы. Наличие неустранимых погрешностей и помех создает ситуацию *неопределенности*, когда выходные переменные не определяются однозначно входными переменными и параметрами модели. Наличие неопределенности приводит к тому, что для одного и того же объекта или процесса может существовать несколько или даже бесконечно много математических моделей. Этот факт был отмечен еще Р. Декартом в XVII в.

## 1.2 Математическое моделирование и теория систем

Важным понятием математического моделирования является понятие «система» [27, 37]. Один из основателей общей теории систем М. Месарович в 1967 г. писал: «Мы рассматриваем математическую теорию абстрактных систем как такую теорию математических моделей реально существующих систем, в рамках которой основные свойства этих систем исследуются с помощью весьма простых математических структур (согласующихся с интуитивной интерпретацией этих свойств)». Система в абстрактном смысле – эквивалент понятия математической модели и задается парой множеств  $U$ ,  $Y$

( $\mathbf{U}$  – множество входов,  $\mathbf{Y}$ -множество выходов) и отношением<sup>1</sup> на множестве  $\mathbf{U} \times \mathbf{Y}$ , формализующим связь (зависимость) между входами и выходами.

Входы (входные сигналы) формализуют воздействия, которые можно прикладывать к системе, а выходы (выходные сигналы) – это совокупность всех данных (величин), доступных наблюдению или измерению. Например, при построении математической модели участка электрической цепи можно в качестве множеств  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{Y}$  входных и выходных сигналов взять множество непрерывных вещественнозначных функций, заданных на числовой оси  $\mathbb{R}$ . Тогда в качестве отношения  $S$  будет выступать отношение линейной связи между числовыми значениями силы тока и разности потенциалов:

$$\frac{\Delta\varphi(t)}{I(t)} = k = \text{const.}$$

Для системы, описывающей движение материальной точки по закону Ньютона, в качестве множества входных функций  $\mathbf{U}$  также можно взять множество непрерывных функций на  $\mathbb{R}$ , но тогда в качестве выходного множества  $\mathbf{Y}$  следует брать множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, а отношение  $S$  устанавливает линейную связь между входной функцией и второй производной от выходной функции по времени.

*Соединение систем* также является системой и задается отношением. Например, последовательное соединение систем  $S_1 \subset \mathbf{U}_1 \times \mathbf{Y}_1$  и  $S_2 \subset \mathbf{U}_2 \times \mathbf{Y}_2$  есть отношение  $S \subset \mathbf{U}_1 \times \mathbf{Y}_2$ , такое что  $(u_1, y_2) \in S$ , если существуют  $y_1 \in \mathbf{Y}_1$ ,  $u_2 \in \mathbf{U}_2$ , удовлетворяющие условиям  $(u_1, y_1) \in S_1$ ,  $(y_1, u_2) \in R$ ,  $(u_2, y_2) \in S_2$ , где  $R \subset \mathbf{Y}_1 \times \mathbf{U}_2$  – отношение, определяющее связь между<sup>2</sup>  $y_1$  и  $u_2$ . Таким образом можно определять сколь угодно сложные системы, исходя из простых, которые становятся частями (*подсистемами*) составной системы.

Приведенное определение отражает в абстрактном виде особенности, присущие нашему интуитивному представлению о системе:

<sup>1</sup> Напомним, что *отношением*  $R$  на множестве  $X \times Y$  (или *отношение между*  $X$  и  $Y$ ) называется подмножество множества  $X \times Y$ , т.е. некоторый набор пар  $R = \{(x, y)\}$ , где  $x \in X, y \in Y$ . Например, функция  $y = x^2$  может быть представлена как отношение между множествами  $X = (-\infty, \infty)$ ,  $Y = [0, \infty)$ , включающее те пары  $(x, y)$ , для которых  $y = x^2$ .

<sup>2</sup> В простейшем случае возможно, что  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{U}_2$ , а  $R$  задано как отношение тождества  $(y_1, u_2) \in R$ , если  $y_1 = u_2$ .

целостность, структурированность и целенаправленность [37].

*Целостность* (единство) означает, что система отделена от внешней среды; среда может оказывать на нее действие (акцию) через входы и воспринимать отклик (реакцию) на эти действия через выходы.

*Структурированность* означает, что система может быть разделена внутри на несколько подсистем, связанных и взаимодействующих между собой так же, как целая система взаимодействует с внешней средой.

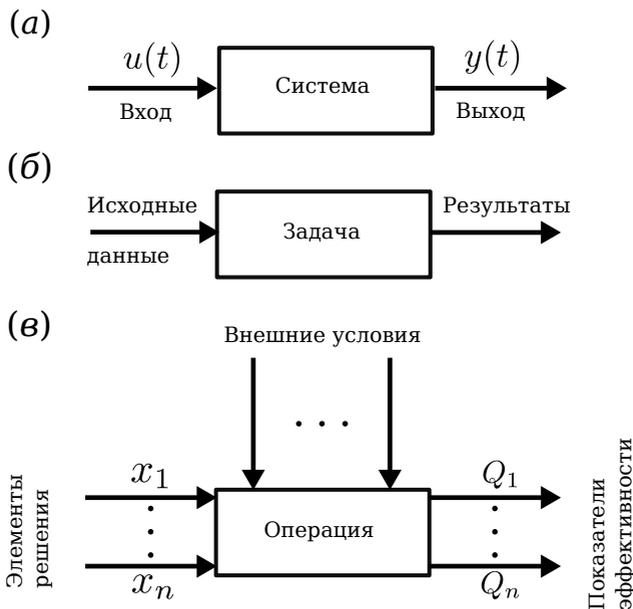


Рис. 1.1: Описание системы.

Третье свойство, присущее системе – *целенаправленность* – требует задания некоторой цели, достижение которой говорит о правильной работе системы. Цель также задается некоторым отношением, которое иногда включают в математическую модель реальной системы, а иногда – нет в зависимости от удобства для решения конкретной задачи.

Приведенное выше формальное определение весьма общо; под него подпадают практически все виды математических моделей систем: дифференциальные и разностные уравнения, регрессионные модели, системы массового обслуживания, конечные и стохастические автоматы, дедуктивные системы (исчисления) и т.д. Можно трактовать как систему любой преобразователь входных данных в выходные (рис. 1.1, а). Например, системой можно назвать процесс решения любой задачи. При этом входами будут являться исходные данные, выходами – результаты, а целью – правильное решение (рис. 1.1, б). Такой подход к системе подчеркивает ее целенаправленность и ведет свое происхождение от исследования операций [10] – научной дисциплины, занимающейся разработкой количественных методов обоснования решений. Основное понятие здесь – *операция*, т.е. действие, которое подвергается исследованию (проектирование, конструирование, управление, экономическая деятельность и т.д.). Операция соответствует некоторой системе. Входами этой системы являются элементы принимаемого решения о проводимой операции, выходами – результаты проведения операции (показатели ее эффективности (рис. 1.1, в)).

В дальнейшем будем рассматривать так называемые *временные системы*, функционирование которых – это процесс, разворачивающийся во времени, т.е. множества возможных входов и выходов  $U$ ,  $Y$  – это множества функций времени со значениями соответственно во множествах  $U$ ,  $Y$ :

$$U = \{u : T \rightarrow U\}, \quad Y = \{y : T \rightarrow Y\},$$

где  $T$  – множество моментов времени, на котором рассматривается система.

Система называется *функциональной (определенной)*, если каждой входной функции  $u(t)$  соответствует единственная выходная функция  $y(t)$ . В противном случае система называется *неопределенной*. Неопределенность обычно возникает из-за неполноты информации о внешних условиях работы системы. Важным свойством, присущим реальным системам, является *причинность*. Она означает, что если входные функции  $u_1(s)$  и  $u_2(s)$  совпадают при  $s \leq t$ , т.е.  $u_1(s) = u_2(s)$  при  $s \leq t$ , то соответствующие выходные функции удовлетворяют условию  $y_1(t) = y_2(t)$ , т.е. «настоящее не зависит от будущего при заданном прошлом».

Числовые величины, связанные с системой, делятся на переменные и параметры. *Параметры* – это величины, которые можно считать постоянными в промежутке времени рассмотрения системы. Остальные числовые величины являются *переменными*. Значения переменных и параметров определяют количественную информацию о системе. Оставшаяся информация, качественная, определяет *структуру* системы. Различие между переменными и параметрами, а также между параметрами и структурой может быть условным, однако знание о нем может быть полезным в методическом отношении. Так, типовым приемом построения математической модели системы является *параметризация* – выбор в качестве математической модели семейства соотношений, зависящих от конечного (обычно небольшого) количества чисел – параметров.

На ранних этапах развития теории систем и кибернетики, в 60–70-х гг. XX в., был популярен подход к рассмотрению системы как «*черного ящика*» («*black box*»), когда существующая внутренняя структура системы игнорировалась, а структура и соответствующие параметры ее математической модели выбирались по результатам экспериментов с этой системой, исходя из наилучшей точности описания ее поведения. При отсутствии априорной<sup>1</sup> информации о системе такой подход является единственно возможным. Однако при наличии априорной информации более предпочтителен и современен подход «*серого ящика*» («*grey box*»), при котором структура модели задается из физических соображений, а цель экспериментов с объектом состоит в определении параметров модели.

Для простых систем, подобных уже упоминавшимся в примерах о материальной точке и участке электрической цепи, выбор структуры (например, в виде (1)) обычно не вызывает сомнений (если, конечно, нет необходимости учитывать дополнительные факторы, например, распределенность массы и заряда, квантовые и релятивистские эффекты) и построение математической модели конкретной системы состоит в оценке единственного параметра  $k$  по результатам эксперимента.

Однако, если количество соотношений, описывающих систему, велико, может оказаться разумным учесть только небольшое число основных из них, а остальные задать в упрощенном виде или во-

---

<sup>1</sup> *a priori* – до опыта (лат.).

обще пренебречь ими. При этом из эксперимента будут определены как параметры, так и (частично) структура, т.е. будет использовано сочетание подходов «серого ящика» и «черного ящика».

Что касается определенности (детерминизма) системы, то может оказаться, что ее нет даже после определения всех параметров математической модели, но неопределенность устраняется, если ввести в математическую модель системы некоторые дополнительные *скрытые (латентные) параметры*  $a_1, a_2, \dots, a_N$ . Например, закон Ньютона не определяет однозначно движения точки: для этого требуется задать дополнительно два параметра – положение и скорость точки в какой-либо момент времени, например,  $a_0 = y(0), a_1 = dy/dt(0)$ . В общем случае формально это означает, что выход модели задается некоторой функцией от входа системы и от набора скрытых параметров  $a = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ , т.е.

$$y = R(u, a). \quad (2)$$

Набор  $a$  называется также *глобальным состоянием системы*, а функция  $R(\cdot, \cdot)$  – *глобальной реакцией системы*.

В теории систем доказывается [27], что представление (2) всегда существует, если не накладывать ограничений на функцию реакции  $R$ . Однако для временных систем в этом результате мало смысла, так как представление (2) должно согласовываться с временной структурой системы, в частности сохранять ее причинность. Обеспечить нужное согласование при фиксированных параметрах  $a$  часто не представляется возможным. Например, если рассмотреть движение материальной точки со сдвигом по времени на величину  $\tau$ , то дифференциальное уравнение движения не изменится, а выбор в качестве скрытых параметров  $y(\tau), dy/dt(\tau)$  не подойдет, так как окажется, что параметры не постоянны.

Однако ничего страшного не произойдет, если разрешить скрытым параметрам изменяться во времени, т.е. стать переменными. Нужно только, чтобы зависимость скрытых параметров от времени поддавалась описанию, т.е. включалась в математическую модель системы. Таким образом, мы приходим к понятиям *переменных состояний* и *моделей состояний*, играющих важную роль в естествознании и технике.

Системы, допускающие описание в пространстве состояний, называются *системами с памятью*, или *динамическими системами*

(см. [1, 17]).

В заключение параграфа отметим, что иногда при исследовании системы не удается однозначно определить, какие из переменных, связывающих систему с внешним миром, являются входными, а какие – выходными. Например, если участок цепи рассматривается как часть сложной электрической или электронной схемы, то исследователь не может произвольно, по своему усмотрению, менять напряжение на участке. Эксперимент со схемой может состоять лишь в подаче и измерении сигналов на некоторых узлах схемы (так называемые «порты», или «терминалы»), причем входные и выходные порты могут меняться от эксперимента к эксперименту. Эти и другие соображения мотивировали появление более общего, так называемого *бихевиористского подхода* в теории систем [79], особенно удобного для изучения взаимосвязанных систем. Бихевиористская модель системы имеет вид  $m$ -арного отношения

$$S \subset W_1 \times W_2 \times \dots \times W_m \quad (3)$$

между явными (внешними) переменными сигналами  $w_1, w_2, \dots, w_m$ , среди которых могут быть как входные, так и выходные сигналы. Разумеется, в системе могут быть и латентные (скрытые) переменные.

Бихевиористские модели являются более общими, чем модели состояния [56, 79].

### 1.3 Математическое моделирование и системный анализ

Системный анализ в широком смысле – это методология (совокупность методических приемов) постановки и решения задач построения и исследования систем, тесно связанная с математическим моделированием. В более узком смысле системный анализ – методология формализации сложных (трудно формализуемых, плохо структурированных) задач. Системный анализ возник как обобщение приемов, накопленных в задачах исследования операций и управления в технике, экономике, военном деле. Соответствующие модели и методы заимствовались из математической статистики, математического программирования, теории игр, теории массового обслуживания,

теории автоматического управления. Фундаментом перечисленных дисциплин является теория систем [27].

Остановимся на различии в употреблении терминов «системный анализ» и «системный подход». Системный анализ – это целенаправленная творческая деятельность человека, на основе которой составляется представление исследуемого объекта в виде системы. Системный анализ характеризуется упорядоченным составом методических приемов исследования. Что касается термина «системный подход», то традиция его применения связана с исследованиями, проводимыми многоаспектно, комплексно, при изучении с разных сторон предмета или явления. Этот подход предполагает, что все частные задачи, решаемые на уровне подсистем, должны быть увязаны между собой и решаться с позиции целого (принцип системности). Системный анализ – более конструктивное направление, содержащее методику разделения процессов на этапы и подэтапы, систем на подсистемы, целей на подцели и т.д.

В обширной литературе по системному анализу содержится большое число рекомендаций и методических приемов построения математических моделей и принятия решений на их основе. Выделяя общие части различных приемов и рассматривая их во взаимодействии, можно сформулировать последовательность действий (этапов) при постановке и решении задач, которую будем называть *методикой математического моделирования*. В упрощенном виде один из возможных вариантов такой методике представлен на схеме рис. 1.2. Эта методика помогает более осмысленно и грамотно ставить и решать прикладные задачи. Опыт показал, что она полезна и в преподавании предмета, легко воспринимается обучающимися с различной степенью подготовки. Если на каком-то этапе возникают затруднения, то нужно вернуться на один из предыдущих этапов и изменить (модифицировать) его. Если и это не помогает, то, значит, задача оказалась слишком сложной, и ее нужно разбить на несколько более простых подзадач, т.е. провести декомпозицию (см. п. 1.4). Каждую из полученных подзадач решают по той же методике. Для иллюстрации применения методике математического моделирования приведем пример [30].

**Пример 1.3.1.** Рассмотрим автомобиль, находящийся перед гаражом на некотором расстоянии от него (рис. 1.3, *a*). Требуется поставить автомобиль в гараж и сделать это по возможности наилучшим



Рис. 1.2: Методика математического моделирования.

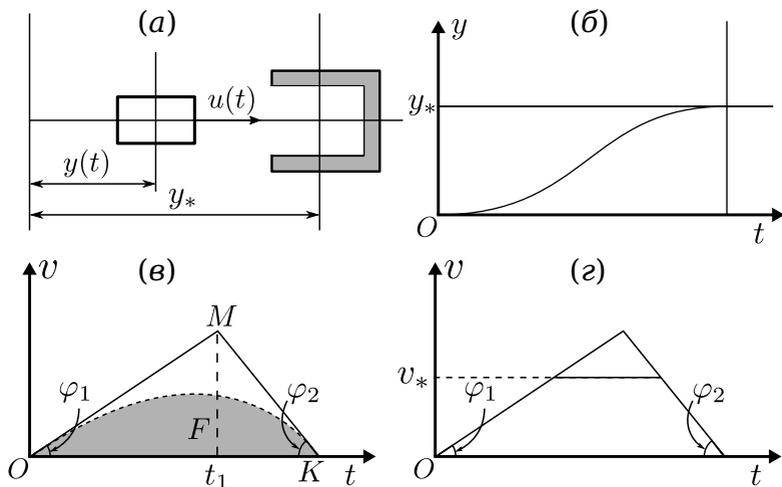


Рис. 1.3: Постановка автомобиля в гараж.

образом. При решении попытаемся руководствоваться алгоритмом системного анализа (см. рис. 1.2).

*Этап 1.* Система – автомобиль и гараж (автомобиль, приближающийся к гаражу).

*Этап 2.* Вход – сила тяги двигателя. Выход – пройденный путь.

*Этап 3.* Цель – автомобиль должен проехать заданный путь и затормозить.

*Этап 4.* Построение ММ начинается с обозначения всех величин (переменных и постоянных), существенных для задачи. Введем следующие обозначения:

$u(t)$  – сила тяги в момент времени  $t$  (входная переменная);

$y(t)$  – путь, пройденный к моменту  $t$  (выходная переменная);

$y_*$  – расстояние от автомобиля до гаража (параметр).

Затем выписываются все уравнения и соотношения, существующие между введенными величинами, как в школьных задачах на составление уравнений. Если возможных уравнений несколько, выбирают простейшее. В нашей задаче – это уравнение динамики

(второй закон Ньютона)

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = u(t), \quad (4)$$

где  $m$  – масса автомобиля, а также начальные условия<sup>1</sup>

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0. \quad (5)$$

*Этап 5.* Модель (4),(5) достаточно хорошо изучена и в детальном анализе не нуждается. Укажем лишь, что она адекватна, если можно пренебречь размерами автомобиля, ограничением на его мощность, силами трения и сопротивления и другими более второстепенными факторами.

*Этап 6.* Простейший вариант формализации цели

$$y(t_*) = y_*, \quad (6)$$

где  $t_*$  – момент остановки, который оказывается неудовлетворительным, поскольку в (6) не формализовано само требование остановки  $\dot{y}(t_*) = 0$ , и, значит, не ясно, как система будет вести себя при  $t > t_*$ . Правильнее задать цель соотношением

$$y(t_*) = y_*, \quad \text{при } t \geq t_*, \quad (7)$$

из которого следует, в частности, что  $\dot{y}(t) = 0$  при  $t > t_*$ . На первый взгляд, задача поставлена, и можно, пропуская этап 7 (см. рис. 1.2), переходить к ее решению, т.е. к этапу 8. Но, оказывается, однозначного решения так поставленная задача не имеет: здравый смысл подсказывает, что существует бесконечно много способов достичь цели (7). Значит, нужно дополнить цель правилом отбора способов, позволяющим ответить на вопрос, какой способ лучше. Зададимся следующим разумным правилом: тот способ считается лучшим, который позволяет быстрее достичь цели. Формально новую цель можно записать так:

$$\min\{t_* : y(t) = y_* \text{ при } t \geq t_*\}. \quad (8)$$

---

<sup>1</sup> Здесь и далее через  $\dot{y}(t)$  будем обозначать производную по времени от функции  $y(t)$ . Будем также использовать обозначение  $\dot{y}(t) = py(t)$ .

Но теперь физические соображения показывают, что решение поставленной задачи тривиально: искомый минимум в (8) равен нулю! Действительно, выбрав достаточно большую силу тяги, можно придать автомобилю как математическому объекту, описываемому ММ (4), (5), сколь угодно большое ускорение и сколь угодно быстро<sup>1</sup> переместить его на любое заданное расстояние. Видимо, требуется ввести какие-то ограничения, исключающие бессмысленные решения. Можно было бы усложнить ММ системы: учесть ограниченную мощность двигателя, его инерционность, силы трения и т.д. Однако разумнее попытаться остаться в рамках ММ (4), (5), (8), введя дополнительно лишь ограничения на силу тяги:

$$-a \leq u(t) \leq b. \quad (9)$$

Таким образом, чтобы придать задаче смысл, нам пришлось вернуться на этап 7.

*Этап 8.* Для решения задачи можно было бы применить мощный и хорошо разработанный аппарат теории оптимального управления (вариационное исчисление, принцип максимума Понтрягина и др., см., например, [22, 36]). Однако сначала надо попытаться решить задачу элементарными средствами. Для этого часто бывает полезно перейти к геометрической интерпретации задачи, чтобы привлечь нашу геометрическую интуицию. Естественная интерпретация, в координатах «время – пройденный путь» (рис. 1.3, б), не дает ключа к решению, так как не позволяет в удобной форме представить ограничения на допустимые траектории движения автомобиля. Дело меняется коренным образом, если перейти к другой ММ. Введем новую переменную  $v(t) = \dot{y}(t)$  (скорость). Тогда вместо (4),(5) возникает уравнение

$$m\dot{v} = u, \quad v(0) = 0, \quad (10)$$

---

<sup>1</sup> Математик здесь, конечно, заметит, что минимум в (8), строго говоря, может не достигаться и в формулировке (8) нужно заменить  $\min$  на  $\inf$  («инфимум» – точная нижняя грань множества). Однако ситуация от этого не изменится: формализация в данном случае не отражает существа задачи, т.е. проведена неверно. В дальнейшем мы будем пользоваться более привычными обозначениями  $\min$ ,  $\max$ , имея в виду, что при необходимости их следует заменить на более общие  $\inf$ ,  $\sup$ .

цель (8) запишется в виде

$$\min\{t_* : \int_0^t v(s)ds = y_* \text{ при } t > t_*\}, \quad (11)$$

а ограничения (9) превратятся в ограничения на скорость изменения новой переменной:

$$-a/m \leq \dot{v}(t) \leq b/m. \quad (12)$$

Итак, мы изменили выход системы, из-за чего пришлось заново пройти этапы 2 – 6.

Геометрическая интерпретация движения системы (10) – (12) в плоскости  $\{v, t\}$  изображена на рис. 1.3, *в*. Из него видно, что для решения задачи нужно найти кривую  $v(t)$  ( $t \geq 0$ ) с заданной площадью фигуры  $F$  под ней и наименьшей возможной координатой правого конца  $t_*$ , лежащую в треугольнике  $ОМК$  с заданными углами наклона  $\varphi_1, \varphi_2$  боковых сторон (в соответствии с (12)  $\text{tg}\varphi_1 = b/m$  при  $\text{tg}\varphi_2 = a/m$ ).

Геометрическое решение очевидно: фигура  $F$  должна заполнять весь треугольник  $ОМК$ . Это значит, что автомобиль должен двигаться с максимальным ускорением до некоторого момента  $t_1$ , затем включить максимальное торможение и в момент  $t_*$  выключить двигатель. Формулы для определения момента переключения  $t_1$  выводятся из элементарного расчета треугольника  $ОМК$  по заданной площади и углам. Обозначив за  $v_1$  максимальную скорость, получим:

$$\frac{v_1}{t_1} = \frac{b}{m}, \quad \frac{v_1}{t_* - t_1} = \frac{a}{m}, \quad \frac{1}{2}t_*v_1 = y_*.$$

Выразив  $v_1$  из последнего уравнения и подставив ее в первые два, получим:

$$\frac{2y_*}{t_*t_1} = \frac{b}{m}, \quad \frac{2y_*}{t_*(t_* - t_1)} = \frac{a}{m},$$

откуда

$$t_1 = \frac{2y_*m}{t_*b}, \quad t_*^2 = \frac{2y_*m}{a} + \frac{2y_*m}{b}.$$

Таким образом, формулы для  $t_1$  и  $t_*$  имеют вид:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2may_*}{b(a+b)}}, \quad t_* = \sqrt{\frac{2m(a+b)y_*}{ab}}. \quad (13)$$

Рассмотренная геометрическая модель позволяет решать и более сложные задачи. Например, если по соображениям безопасности нужно учесть ограничение на максимальную скорость:  $|\dot{y}(t)| \leq v^*$ , то из рис. 1.3, *г* легко усмотреть решение: график оптимальной траектории представляет собой трапецию.

Еще более сложные задачи (например, при введении ограничений на расход топлива в виде  $\int_0^\infty |u(t)| dt \leq A$ ) не имеют простого аналитического решения, подобного (13), и практически решаются лишь численно, с привлечением математического аппарата приближенной минимизации функционалов (см., например, [36]). Однако и для них решение упрощенной задачи не теряет важности, поскольку оно позволяет получить начальное приближение к решению сложной задачи, установить качественные свойства решения сложной задачи, выявить факторы, наиболее сильно влияющие на решение сложной задачи, и, главное, соотнести результаты математического исследования со здравым смыслом.

Резюмируя сказанное, можно дать совет изучающему математическое моделирование: «Не решай сложную задачу, не решив сначала более простую!».

## 1.4 Сложные и простые системы. Декомпозиция

Известно, что системный анализ родился как метод исследования и проектирования сложных систем. Что же такое «сложная» система? Понятие это неформальное, и обычно, говоря о сложных системах, перечисляют их основные особенности:

- наличие большого числа разнородных элементов (подсистем);
- сложный характер, неоднородность связей между подсистемами;
- сложность функций, выполняемых системой;
- наличие неопределенности в описании системы;
- сложность определения (организации) требуемого управляющего воздействия на систему и т.д.

Однако понятно, что каждая из этих особенностей может оказаться существенной или несущественной: все зависит от конкретной ситуации и целей исследования. Поэтому более универсальный способ выделения класса сложных систем связан со сложностью самого процесса исследования системы. Если методика математического моделирования (см. рис. 1.2) приводит к успеху сразу же, «за один проход», то нет оснований называть систему «сложной». Введение этого термина оправдано, если решить задачу в исходном виде не удастся. В этом случае она разбивается на несколько вспомогательных подзадач, решаемых по отдельности. Такой прием называется *декомпозицией* и является основным методом исследования сложных систем.

При декомпозиции исходная система делится на подсистемы, а цель – на подцели. Далее для решения каждой подзадачи пользуются той же методикой, что и для всей системы. Если в ходе решения (а возможно, и до того) какие-то из подзадач окажутся слишком сложными, то снова проводится декомпозиция: возникают подзадачи следующего уровня и т.д. Результатом этого процесса является структуризация: исходная система приобретает иерархическую (многоуровневую) структуру<sup>1</sup> [27, 28, 37]. Соответствующая структура возникает и в множестве подцелей; она называется деревом целей (рис.1.4), поскольку представляет собой граф типа дерева (без циклов).<sup>2</sup>

Вообще теория графов является естественным математическим аппаратом описания сложных систем [19, 41]. Действительно, каждой сложной системе ставится в соответствие граф (*структурный*), вершинами которого являются подсистемы, а дугами - имеющиеся между ними связи. Если связи направленные (т.е. наличие такой связи  $S_i \rightarrow S_j$  означает, что воздействие  $S_i$  на  $S_j$  не вызывает обратного воздействия или им можно пренебречь), то граф системы является *ориентированным (направленным)*. К этому классу отно-

---

<sup>1</sup> Здесь термин «структура» используется в несколько более узком смысле, чем в п. 1.2, и означает состав подсистем в системе и типы связей между ними.

<sup>2</sup>Графом называется пара  $(G, R)$ , где  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  – конечное множество вершин, а  $R \subset G \times G$  – бинарное отношение на  $G$ . Если  $(g_i, g_j) \in R$  тогда и только тогда, когда  $(g_j, g_i) \in R$ , то граф называется *неориентированным*, в противном случае – *ориентированным*. Пары  $(g_i, g_j) \in R$  называются дугами (ребрами), а элементы  $g_i$  множества  $G$  – вершинами графа.

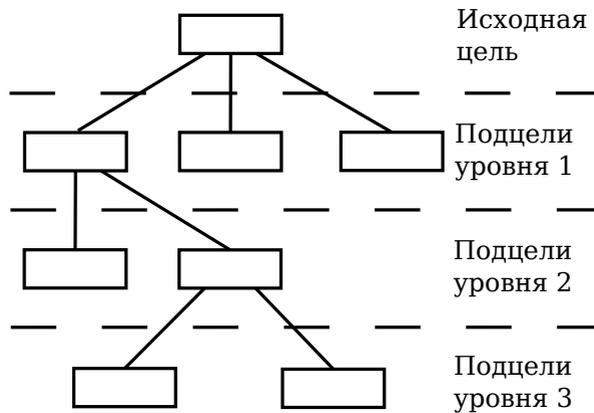


Рис. 1.4: Структуризация системы.

ются, например, структурные схемы (*граф-схемы*) систем автоматического управления. У других систем влияние связанных подсистем обоюдно, и они описываются неориентированными графами (например, сложные электрические и электронные схемы).

Приведенное понятие декомпозиции вполне соответствует идее структурного программирования. Создание сложных программных систем – одна из важнейших областей применения системного анализа. Вопросы математического обоснования декомпозиции рассматривались в [28, 37, 41]. Отметим лишь, что раздробление системы на подсистемы обычно проводится по принципу «слабых» связей, т.е. так, чтобы связи между подсистемами были слабее, чем связи между элементами каждой подсистемы.

В сложных системах часто приходится проводить несколько вариантов декомпозиции и соответственно строить несколько деревьев целей. Это обычно связано с наличием нескольких критериев функционирования системы. Возникающие при этом задачи многокритериального выбора изучаются в теории принятия решений [50]. Успех декомпозиции часто определяется интуицией и опытом исследователя. Человек, по данным психологов, может мысленным взором охва-

тить структуру декомпозированной системы, если на каждом уровне возникает не более чем  $5 \pm 2$  подзадач.

## 1.5 Классификация моделей

Этап построения математической модели (ММ) системы разбивается на две части: выбор структуры и выбор параметров. Как было сказано в п. 1.2, структура сложной системы определяется типами моделей каждой ее подсистемы и характером связей (отношений) между ними. Все многообразие имеющихся типов ММ можно классифицировать по нескольким основным признакам, см. табл. 1.1.

Таблица 1.1: Математические модели систем

| Статические<br>(системы без «памяти»)   | Динамические<br>(системы с «памятью»)   |
|---|---|
| Дискретные ( $U, Y, T$ – конечные (счетные) множества)  | Непрерывные ( $U, Y, T$ – континуумы (прямые, отрезки, тела в многомерных пространствах)) |
| Детерминированные   | Стохастические; нечеткие  |
| Сосредоточенные (уравнения конечные <sup>1</sup> , разностные, обыкновенные дифференциальные) | Распределенные (уравнения с запаздыванием, в частных производных, интегральные)           |
| Линейные  | Нелинейные  |
| Стационарные (параметры не меняются со временем)  | Нестационарные (параметры изменяются со временем)   |

Кроме того, структура модели определяется также набором размерностей – количеством переменных (входа, выхода, состояния) и параметров. В следующих главах будут рассмотрены основные типы ММ.

<sup>1</sup> То есть алгебраические или трансцендентные.

## 1.6 Вопросы для самоконтроля

- Что такое математическая модель?
- Что такое система?
- Какие свойства присущи системе?
- Что такое временные системы?
- Чем отличается подход «серого ящика» от подхода «черного ящика»?
- Чем отличаются параметры от переменных?
- Приведите пример простейшей системы.
- Опишите методику математического моделирования.
- Зачем нужна декомпозиция?
- Каким образом можно классифицировать математические модели?

# Глава 2

## Линейные системы управления

### 2.1 Понятие устойчивости линейной системы

#### 2.1.1 Скалярный случай

В данной главе будем рассматривать динамические непрерывные линейные системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Для начала рассмотрим простейшее скалярное линейное однородное дифференциальное уравнение:

$$\dot{x}(t) = ax(t), \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}$  – переменная состояния, а  $a$  – некоторый постоянный параметр. Нас интересует решение этого дифференциального уравнения. Для его решения воспользуемся методом разделения переменных, имея в виду, что  $\dot{x} = dx/dt$ :

$$\frac{dx}{x} = a dt. \quad (2)$$

Проинтегрировав обе части выражения (2) и возведя их в степень экспоненты, получим:

$$x(t) = Ce^{at}, \quad (3)$$

где  $C$  – константа, возникшая при интегрировании. Так как нас интересует конкретное решение уравнения (1), необходимо выбрать начальные данные, т.е. задать задачу Коши, чтобы выбрать одно решение из множества решений (3). Не умаляя общности, рассмотрим

начальный момент времени  $t_0 = 0$  и выберем  $x(0) = x_0$ . Подставив это выражение в обе части уравнения (3), получим решение обыкновенного однородного дифференциального уравнения:

$$x(t) = x_0 e^{at}. \quad (4)$$

Рассмотрим тривиальное решение системы (1)  $x(t) \equiv 0$ . Оно является *положением равновесия* системы (1). Решение  $x(t)$  называется положением равновесия, если оно остается в той же точке, в которой начиналось (траектория состоит из одной этой точки). Другими словами, производная такого решения тождественно равняется нулю. С физической стороны это означает отсутствие скорости, т.е. система находится в покое. Таким образом, чтобы найти положение равновесия системы, нужно приравнять ее правую часть к нулю. Линейная система имеет единственное положение равновесия.

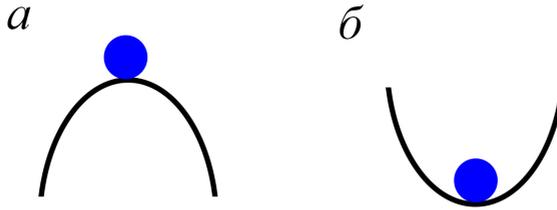


Рис. 2.1: Устойчивость положений равновесия.

Центральным понятием теории управления является *устойчивость*. Здесь мы поговорим об устойчивости положения равновесия. Рассмотрим рис. 2.1: на нем изображен шарик, находящийся на горке (рис. 2.1, а), и шарик, находящийся в ямке (рис. 2.1, б). В обоих случаях шарик неподвижен, т.е. его положение является положением равновесия. Немного отклоним шарик, находящийся на горке, от его положения равновесия. Тогда с течением времени шарик скатится с горки. В случае шарика, находящегося в ямке, при его отклонении от положения равновесия, он вернется в исходное положение с течением времени. В одном случае (рис. 2.1, а) малые отклонения приводят к тому, что положение шарика со временем отдаляется от положения равновесия, тогда как во втором случае (рис. 2.1, б)

– приближается к нему. Таким образом, мы приходим к понятию устойчивости.

Тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$  линейной системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что для всех начальных данных таких, что  $|x_0| < \delta$ , выполнено:  $|x(t, x_0)| < \varepsilon, \forall t \geq 0$ .

Тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$  линейной системы (1) называется *асимптотически устойчивым*, если для любого  $\varepsilon > 0$  и для всех начальных данных выполнено:  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = 0$ .

Неустойчивость по Ляпунову – это логическое отрицание устойчивости по Ляпунову. Тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$  линейной системы (1) называется *неустойчивым по Ляпунову*, если существует такое  $\varepsilon > 0$  и такие начальные данные, для которых выполнено:  $|x(t, x_0)| \geq \varepsilon$ .

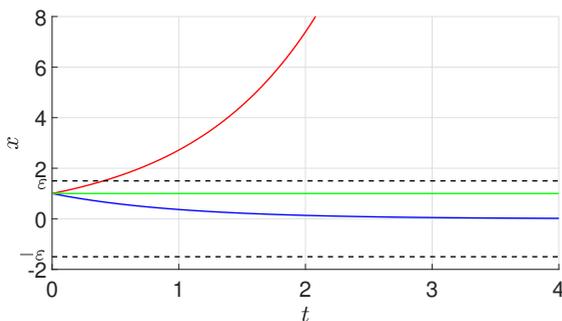


Рис. 2.2: Решения системы (1).

Рассмотрим тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$  системы (1) и найдем условия, при которых оно является устойчивым. В качестве  $\varepsilon$  и  $\delta$  выберем  $|\varepsilon| = |\delta| = 1.5$  для иллюстрации. Выберем начальные данные  $x(0) = 1 < \delta$  и рассмотрим решения системы (1) при различных значениях параметра  $a$ , которые представлены на рис. 2.2. Пунктирной линией изображены прямые  $x = \varepsilon, x = -\varepsilon$ , образующие трубку. При положительных значениях параметра  $a > 0$  график решения системы (изображен красным цветом) с некоторого момента времени  $t^*$  пересекает пунктирную линию, т.е.  $x(t) > \varepsilon$  при  $t > t^*$ , а значит,

разность между рассматриваемым решением и тривиальным увеличивается с течением времени. Таким образом, при  $a > 0$  тривиальное решение является неустойчивым. Теперь рассмотрим случай  $a < 0$ : график решения изображен синим цветом. При  $t \rightarrow \infty$ ,  $x(t) \rightarrow 0$ , т.е. разность между рассматриваемым решением и тривиальным стремится к нулю. Следовательно, в этом случае тривиальное решение является асимптотически устойчивым. Последний случай – решение при  $a = 0$ , оно является постоянным  $x(t) \equiv x(0) = 1$ . Разность между рассматриваемым решением и тривиальным равняется постоянной величине для любого значения  $t$ . Таким образом, в данном случае тривиальное решение является устойчивым по Ляпунову, но не асимптотически, т.е. оно находится на границе устойчивости. Подытожим:

- $a < 0$ : положение равновесия асимптотически устойчиво;
- $a = 0$ : положение равновесия устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически;
- $a > 0$ : положение равновесия неустойчиво.

Так как линейная система имеет единственное положение равновесия, то обычно говорят об устойчивости системы, имея в виду устойчивость положения равновесия.

Теперь рассмотрим линейную скалярную систему с управлением:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \quad (5)$$

где  $u \in \mathbb{R}$  – управление, а  $b$  – некоторый постоянный параметр. Эта система является неоднородной, а ее решение можно найти с помощью метода вариации постоянной:

$$x_{\text{неодн}}(t) = x_{\text{одн}}(t) + \bar{x}(t),$$

где

$$\bar{x}(t) = \tilde{C}(t)e^{at}. \quad (6)$$

Здесь мы берем решение однородного уравнения (3) и варьируем постоянную  $C$ , т.е. заменяем ее некоторой функцией  $\tilde{C}(t)$ . Подставим выражение (6) в исходное неоднородное уравнение (5):

$$\dot{\tilde{C}}(t) = be^{-at}u(t).$$

Интегрируя обе части полученного выражения, найдем функцию  $C(t)$ . Тогда

$$\bar{x}(t) = e^{at} \int_0^t b e^{-as} u(s) ds.$$

Теперь мы можем выписать решение линейной системы с управлением (5):

$$x(t) = e^{at} x(0) + \int_0^t b e^{a(t-s)} u(s) ds. \quad (7)$$

Формула (7) называется *формулой Коши*.

### 2.1.2 Векторный случай

Рассмотрим теперь линейную векторную систему с управлением:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (8)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^m$  – вектор управления, а  $A$ ,  $B$  – матрицы размера  $n \times n$  и  $n \times m$  соответственно. Для данной системы аналогично решению записывается по формуле Коши:

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t B e^{A(t-s)} u(s) ds. \quad (9)$$

В данном случае важно следить за порядком матриц в произведении. У внимательного читателя может возникнуть вопрос: что же такое  $e^{At}$  в данном случае? Для ответа на этот вопрос разложим функцию  $e^{at}$  в ряд Тейлора в нуле:

$$e^{at} = 1 + \frac{at}{1} + \frac{a^2 t^2}{2} + \frac{a^3 t^3}{6} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^k}{k!}.$$

Аналогичную процедуру можно провести и для  $e^{At}$ :

$$e^{At} = I + \frac{At}{1} + \frac{A^2 t^2}{2} + \frac{A^3 t^3}{6} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!},$$

где  $I$  – единичная матрица. В полученной формуле фигурируют суммы и произведения квадратных матриц, поэтому величину  $e^{At}$  можно вычислить. Она называется *матричной экспонентой*.

Нас интересует вопрос устойчивости линейной векторной системы. Для нее можно ввести определения, аналогичные скалярному случаю, заменив в определении модуль  $|\cdot|$  на норму  $\|\cdot\|$ . Рассмотрим систему (8) без управления:

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \quad (10)$$

Для исследования ее устойчивости нам понадобятся некоторые сведения из теории матриц. Напомним, что для квадратной матрицы  $A$  существует набор ненулевых векторов  $x \in \mathbb{C}^n$ , называемых собственными векторами, и чисел  $\lambda \in \mathbb{C}$ , им соответствующих и называемых собственными числами, для которых выполнено равенство  $Ax = \lambda x$ . То есть при домножении матрицы на вектор получается коллинеарный вектор – тот же вектор, умноженный на некоторое скалярное значение (ориентация вектора в пространстве сохраняется при домножении на матрицу). Рассмотрим случай, когда собственные векторы матрицы  $A$  образуют базис. Тогда из координат собственных векторов можно составить матрицу  $U$  такую, что  $A = UDU^{-1}$ , где  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  – диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные числа матрицы  $A$ . Соответственно, чтобы найти матрицу  $D$ , нужно  $D = U^{-1}AU$ . Домножим обе части уравнения (10) на  $U^{-1}$  слева:

$$U^{-1}\dot{x}(t) = U^{-1}Ax(t).$$

Имея в виду, что  $AI = A$  и  $U^{-1}U = UU^{-1} = I$ , получим:

$$U^{-1}\dot{x}(t) = U^{-1}AUU^{-1}x(t).$$

Произведя замену  $z = U^{-1}x$ , получим уравнение системы (10) в новых координатах:

$$\dot{z}(t) = Dz(t),$$

которое можно представить в координатной форме:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \lambda_1 z_1(t), \\ \dot{z}_2(t) = \lambda_2 z_2(t), \\ \dots \\ \dot{z}_n(t) = \lambda_n z_n(t). \end{cases}$$

Уравнения полученной системы являются независимыми, поэтому их можно рассматривать по отдельности. Каждая полученная подсистема является устойчивой, если соответствующее значение  $\lambda_i$  меньше нуля. Таким образом вся система будет устойчива, если все  $\lambda_i < 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , а значит, будет устойчива и исходная система (10).

В случае, если матрица  $A$  не допускает базис из собственных векторов, нужно описывать общую структуру, используя нормальные жордановы формы (см., например, [11]). В этом случае получится следующее условие устойчивости системы (10):  $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Таким образом, мы показали важность собственных чисел матрицы для анализа ее устойчивости. Отметим, что найти собственные числа матрицы можно, приравняв ее характеристический многочлен к нулю, т.е.  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

## 2.2 Линейные операторы

Объектами любых действий, выполняемых всеми элементами информационных и управляющих систем, являются сигналы. Математическими моделями сигналов служат функции одного или нескольких аргументов. Будем рассматривать вещественные функции одного вещественного аргумента времени  $t \in \mathbb{R}$ . Под динамической системой будем понимать объект некоторой природы, поведение которого может быть описано эволюционным оператором. Таким образом, общая структура динамической системы может быть представлена в виде схемы, изображенной на рис. 2.3.

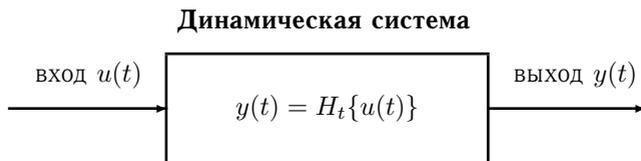


Рис. 2.3: Структурная схема динамической системы.

Здесь  $H_t : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{Y}$  – эволюционный оператор динамической системы,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{Y}$  – линейные пространства непрерывно-дифференцируемых функций на числовой оси, а сигналы  $u = u(\cdot) \in \mathbf{U}$  и  $y = y(\cdot) \in \mathbf{Y}$  есть непрерывно-дифференцируемые функции на числовой оси со значениями  $u(t) \in U$  и  $y(t) \in Y$ , соответственно.

Одним из операторов обработки сигналов, наиболее широко распространенных в технике управления, является ПИД-регулятор, который определяется следующим выражением:

$$H_t\{u(t)\} : y(t) = k_1 u(t) + k_2 \dot{u}(t) + k_3 \int_0^t u(s) ds.$$

ПИД-регулятор формирует управляющий сигнал, являющийся суммой трёх слагаемых, первое из которых – пропорциональная составляющая с коэффициентом усиления  $k_1$ , второе – производная входящего сигнала с коэффициентом усиления  $k_2$ , третье – интеграл входящего сигнала с коэффициентом усиления  $k_3$ .

В данной главе мы рассматриваем линейные стационарные операторы, поэтому введем определение линейности и стационарности. Оператор  $H_t$  обработки сигналов называется *линейным*, если он одновременно обладает свойством однородности,

$$H_t\{\alpha u\} = \alpha H_t\{u\},$$

для любых чисел  $\alpha \in \mathbb{C}$ , и свойством аддитивности,

$$H_t\{u_1 + u_2\} = H_t\{u_1\} + H_t\{u_2\},$$

для любых сигналов  $u_1$  и  $u_2$ .

Оператор  $H_t$  обработки сигналов называется *стационарным*, если он инвариантен по отношению к сдвигу аргумента, т.е. условием стационарности служит соотношение

$$H_t\{u(t - \tau)\} = y(t - \tau), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

### 2.2.1 Преобразование Лапласа

Для дальнейшей работы нам понадобится преобразование Лапласа. *Преобразованием Лапласа* функции  $f(t)$  называется преобразование следующего вида:

$$\tilde{f}(\lambda) = \mathcal{L}\{f(\cdot)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt. \quad (11)$$

Результат преобразования Лапласа  $\tilde{f}(\cdot)$  называется *изображением* функции  $f(\cdot)$ , а функция  $f(\cdot)$  называется *оригиналом*. Связь между изображением и оригиналом определяется следующим образом:  $f(\cdot) \doteq \tilde{f}(\cdot) \Leftrightarrow \tilde{f}(\cdot) \doteq f(\cdot)$ .

Однако не для любой функции существует преобразование Лапласа. Функция  $f(t)$  допускает преобразование Лапласа, если

$$\exists \rho \in \mathbb{R} \text{ (абсцисса сходимости)} : \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\rho t} dt < \infty,$$

т.е.  $f(t)e^{-\rho t} \in L_1$ , где  $L_1$  – пространство абсолютно интегрируемых функций, а  $\lambda \in H_\rho = \{\lambda : \text{Re } \lambda > \rho\}$ .

При использовании преобразования Лапласа мы вместо функции  $f(t)$  во временной области рассматриваем новую функцию комплексного аргумента  $\tilde{f}(\lambda)$  в частотной области. Между двумя этими функциями существует взаимно однозначное соответствие, т.е. существует обратное преобразование Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} e^{\lambda t} \tilde{f}(\lambda) d\lambda,$$

где  $\rho$  – некоторое вещественное число.

Одной из особенностей преобразования Лапласа, которые предопределили его широкое распространение в научных и инженерных расчётах, является то, что многим соотношениям и операциям над оригиналами соответствуют более простые соотношения над их изображениями. Преобразование Лапласа обладает рядом свойств, некоторые из которых мы перечислим ниже.

### Свойства преобразования Лапласа:

- Линейность:  $\mathcal{L}\{\alpha x(\cdot) + \beta y(\cdot)\} = \alpha \mathcal{L}\{x(\cdot)\} + \beta \mathcal{L}\{y(\cdot)\}$ ,  
где  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ;
- Умножение на число:  $\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} \tilde{f}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$ , где  $\alpha \in \mathbb{C}$ ;
- Производная:  $\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = \lambda \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0^+)$ ;
- Свертка:  $[x * y](t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}\{x(t)\} \mathcal{L}\{y(t)\}$ ,  
где  $[x * y](t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)y(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t-s)ds$  – это  
свертка функций  $x(t)$  и  $y(t)$ .

### 2.2.2 $\delta$ -функция

Для работы с линейными стационарными операторами введем в рассмотрение функцию непрерывного времени с вещественным параметром  $\gamma$ :

$$\delta(t, \gamma) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma}, & \text{если } 0 \leq t \leq \gamma; \\ 0, & \text{если } t > \gamma. \end{cases}$$

График рассматриваемой функции изображен на рис. 2.4.

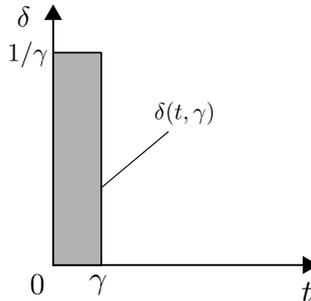


Рис. 2.4: Конечный прямоугольный импульс  $\delta(t, \gamma)$ .

Теперь введем в рассмотрение  $\delta$ -функцию как поточечный предел  $\delta(t) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \delta(t, \gamma)$ . Следовательно, значения  $\delta$ -функции в любой точке, кроме нуля, равны нулю, т.е.  $\delta(t) = 0, \forall t \neq 0$ ; а  $\lim_{t \rightarrow 0} \delta(t) = \infty$ .

Теперь вычислим интеграл и преобразование Лапласа от  $\delta$ -функции:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, \gamma) dt = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_0^{\gamma} \delta(t, \gamma) dt = \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma} dt = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\gamma} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл от  $\delta$ -функции равен 1, а преобразование Лапласа:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\delta(t)\} &= \mathcal{L}\{\lim_{\gamma \rightarrow 0} \delta(t, \gamma)\} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathcal{L}\{\delta(t, \gamma)\} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \delta(t, \gamma) e^{-st} dt = \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_0^{\gamma} \delta(t, \gamma) e^{-st} dt = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma} e^{-st} dt = \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{-1}{\gamma s} e^{-st} \Big|_0^{\gamma} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\gamma s}}{\gamma s} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{se^{-\gamma s}}{s} = 1. \end{aligned}$$

При вычислении преобразования Лапласа мы использовали правило Лопиталья. Таким образом, изображение по Лапласу для  $\delta$ -функции тоже равно 1.

Наряду с введенной базовой  $\delta$ -функцией удобно также ввести и смещенные  $\delta$ -функции  $\delta(t - \tau)$ , удовлетворяющие условиям:  $\delta(t - \tau) = 0, \forall t \neq \tau$ ;  $\lim_{t \rightarrow \tau} \delta(t - \tau) = \infty$ . Очевидно, что интеграл и преобразование Лапласа от смещенных  $\delta$ -функций также равны 1.

### 2.2.3 Импульсная характеристика

Результатом линейной обработки  $\delta$ -функции  $h(t) = H_t\{\delta(t)\}$  называется *импульсная (весовая) характеристика* оператора  $H_t$ .

Кроме импульсной характеристики, для оператора  $H_t$  можно еще ввести семейство результатов обработки смещенных  $\delta$ -функций:  $h(t, \tau) = H_t\{\delta(t - \tau)\}$ . Если оператор  $H_t$  является стационарным, то  $h(t, \tau) = H_t\{\delta(t - \tau)\} = h(t - \tau)$ .

Рассмотрим теперь произвольный сигнал  $u(t)$ , для него справедливо следующее представление:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t - \tau)d\tau.$$

Используя данное представление, вычислим результат обработки сигнала  $u(t)$  линейным стационарным оператором  $H_t$ :

$$\begin{aligned} y(t) = H_t\{u(t)\} &= H_t\left\{\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t - \tau)d\tau\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)H_t\{\delta(t - \tau)\}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t - \tau)d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, результат обработки произвольного сигнала  $u(t)$  с использованием линейного стационарного оператора  $H_t$  может быть представлен в виде его свертки с импульсной характеристикой  $h(t)$  этого оператора:

$$y(t) = H_t\{u(t)\} = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (12)$$

Если обработка сигнала в соответствии с заданным оператором  $H_t$  осуществляется с помощью некоторой системы, то будем говорить, что она *реализует* этот оператор.

Если некоторая система реализует обработку в соответствии с линейным стационарным оператором  $H_t$ , то будем называть ее *LTI-системой* (Linear Time Invariant).

Если обрабатываемые системы имеют по одному скалярному входу и выходу, их принято называть *SISO-системами* (Single Input Single Output), а если входы и выходы векторные, то мы имеем дело с *MIMO-системами* (Multiple Input Multiple Output).

## 2.3 Модели линейных систем

### 2.3.1 Принципы управления

При рассматривании системы как объекта управления возникает задача выбора входящего сигнала (управления) для получения желаемого выхода. Тем самым можно определить цели управления. Основными целями управления для линейных систем являются:

- $y(\cdot) \equiv y_0 = \text{const}$  – стабилизация,
- $y(\cdot) \equiv y_0(\cdot)$  – слежение.

Стабилизация является частным случаем слежения.

Для достижения цели управления можно использовать *принцип разомкнутого управления* или *принцип обратной связи*.

Рассмотрим линейный объект управления  $y(\cdot) = H_t\{u(\cdot)\}$ . В качестве цели управления выберем слежение:  $y(\cdot) \equiv y_0(\cdot)$ , т.е.  $H_t\{u(\cdot)\} = y_0(\cdot)$ . Управление будем строить по принципу разомкнутого управления (его можно называть программным):  $u(\cdot) = H_t^{-1}\{y_0(\cdot)\}$ . Схема работы данного принципа представлена на рис. 2.5.

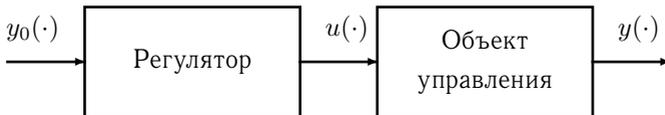


Рис. 2.5: Принцип разомкнутого управления.

Отсутствие измерений результата подразумевает:

1. Точное знание  $H_t$  (реальный объект должен совпадать с номинальным).
2. Отсутствие внешних входов или их точное знание.

Приведенные требования выполнены далеко не всегда, поэтому в теории управления актуальным является использование принципа

обратной связи. В данном случае мы будем использовать измерения результата для построения регулятора, т.е. получим следующую систему:

$$\begin{cases} y(t) = H_t\{u(t)\}, \\ u(t) = L_t\{y(t)\}, \end{cases}$$

где  $L_t$  – оператор обратной связи. Схема работы данного принципа представлена на рис. 2.6.

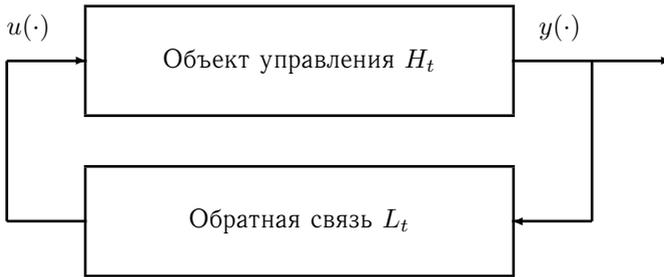


Рис. 2.6: Принцип обратной связи.

### 2.3.2 Формы записи линейных систем

Линейные динамические системы удобно представлять в двух формах: в функциональной форме «вход-выход» и в канонической форме пространства состояний.

**Линейная система в функциональной форме «вход-выход»**

$$y^{(r)} + a_1 y^{(r-1)} + \dots + a_r y = b_0 u^{(q)} + b_1 u^{(q-1)} + \dots + b_q u,$$

где  $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y = y(t) \in \mathbb{R}^l$ ,  $t \in [0, +\infty)$ ,  $u(\cdot) \in \mathbb{C}^q$ ,  $y(\cdot) \in \mathbb{C}^r$ ,  $r \geq q$ . Для формы «вход-выход» существует более краткая, эквивалентная запись:

$$a(d/dt)y = b(d/dt)u,$$

где  $d/dt$  – это оператор дифференцирования, а  $a(\lambda) = \lambda^r + a_1 \lambda^{r-1} + \dots + a_r$ ,  $b(\lambda) = b_0 \lambda^q + b_1 \lambda^{q-1} + \dots + b_q$ ,  $a_i \in \mathbb{R}^{l \times l}$ ,  $b_i \in \mathbb{R}^{l \times m}$  есть

характеристические многочлены линейной динамической системы с постоянными матричными коэффициентами.

### Линейная система в форме пространства состояний

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx.\end{aligned}\tag{13}$$

Здесь  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^l$ . Матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  заданы и имеют соответствующие размерности.

На самом деле все функциональные модели «вход-выход» неявно подразумевают модель в пространстве состояний, иначе негде было бы взять существование и единственность решения.

Рассмотрим линейную систему в пространстве «вход-выход» (13), где  $u = 0 \in \mathbb{R}$ . Начальные данные выберем  $x(0) = B$  (в данном случае  $B$  будет вектором). Рассмотрим формулу Коши (9) и с ее помощью вычислим  $y(t)$ :

$$y(t) = Cx(t) = Ce^{At}B.$$

С другой стороны, вычислим импульсную характеристику для нулевых начальных данных  $x(0) = 0$ :

$$h(t) = C \int_0^t e^{A(t-s)} B \delta(s) ds = Ce^{At} e^{A \cdot 0} B = Ce^{At} B.$$

Таким образом, мы показали, что импульсная характеристика совпадает с собственным движением системы (системы без управления).

Теперь рассмотрим, каким образом можно переходить от одной форме записи системы к другой и обратно.

### 2.3.3 Переход от системы в форме «вход-выход» к форме пространства состояний

Рассмотрим непрерывную линейную систему в функциональной форме «вход-выход», которая имеет следующий вид:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_1 u^{(n-1)} + b_2 u^{(n-2)} + \dots + b_n u.\tag{14}$$

Для простоты будем считать, что сигналы входа и выхода скалярны, то есть  $y(t), u(t) \in \mathbb{R}$ . Введем переменные состояния следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= y, \\ x_2 &= \dot{y} + a_1 y - b_1 u, \\ x_3 &= \ddot{y} + a_1 \dot{y} - b_1 \dot{u} + a_2 y - b_2 u, \\ &\dots \\ x_n &= y^{(n-1)} + a_1 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y - b_1 u^{(n-2)} - \dots - b_{n-1} u. \end{aligned} \quad (15)$$

Дифференцируя уравнения (15), получаем выражения для  $\dot{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Для последнего  $\dot{x}_n$  используем исходную систему (14):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 - a_1 x_1 + b_1 u, \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} + a_1 \dot{y} - b_1 \dot{u} = x_3 - a_2 x_1 + b_2 u, \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} - b_1 u^{(n-1)} - \dots - b_{n-1} \dot{u} = \\ &= -a_n x_1 + b_n u. \end{aligned} \quad (16)$$

Полученную систему в форме пространства состояний (16) легко записать в матричном виде

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\text{матрица Фробениуса}}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}, \quad C = \underbrace{[1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]}_n. \quad (17)$$

### 2.3.4 Переход от системы в форме пространства состояний к форме «вход-выход»

Теперь рассмотрим непрерывную линейную систему в форме пространства состояний:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (18)$$

При переходе от системы в пространстве состояний (18) к системе в форме «вход-выход» мы будем использовать следующее определение.

Характеристический многочлен матрицы  $A$  является её *аннулирующим многочленом*, т.е. верно тождество

$$a(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_n I = 0. \quad (19)$$

Тождество (19) носит название *тождества Гамильтона-Кэли* (или просто тождество Кэли).

Кроме тождества Кэли, мы будем использовать следующую систему многочленов, рекуррентно выводимых из многочлена  $a(\lambda) = \det\{\lambda I - A\}$ :

$$\begin{aligned} a_{(1)}(\lambda) &= (a(\lambda) - a(0))\lambda^{-1} = \lambda^{n-1} + a_1 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}, \\ a_{(k)}(\lambda) &= (a_{(k-1)}(\lambda) - a_{(k-1)}(0))\lambda^{-1}, \quad k = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (20)$$

Продифференцируем  $n$  раз переменную состояния  $x$  в уравнении (18) и умножим каждую из полученных производных на соответствующий коэффициент многочлена  $a(\lambda)$ . Получившийся результат может быть представлен в виде следующей таблицы:

|                  |   |
|------------------|---|
| $a_n \times$     | $x = Ix,$   |
| $a_{n-1} \times$ | $\dot{x} = Ax + Bu,$  |
| $a_{n-2} \times$ | $\ddot{x} = A^2x + ABu + B\dot{u},$   |
| $a_{n-3} \times$ | $\dddot{x} = A^3x + A^2Bu + AB\dot{u} + B\ddot{u},$   |
| $\dots$          | $\dots$   |
| $1 \times$       | $x^{(n)} = A^n x + A^{n-1} Bu + A^{n-2} B\dot{u} + \dots + Bu^{(n-1)}.$   |
| $\sum C \times$  |   |
|                  | $a(d/dt)y = \underbrace{Ca(A)x}_{=0 \text{ по тождеству Кэли}} +$<br>$\underbrace{+ Ca_{(1)}(A)Bu + Ca_{(2)}(A)B\dot{u} + \dots + Ca_{(n)}(A)Bu^{(n-1)}}_{=b(d/dt)u}$ |

Нижняя часть данной таблицы представляет собой сумму строк верхней части, умноженную на матрицу  $C$  из системы уравнений (18). Легко видеть, что данная сумма есть ничто иное, как запись динамической системы в форме «вход-выход».

### 2.3.5 Передаточная функция

При работе с линейными системами очень удобно перейти от временной области к частотной. Для этого используется преобразование Лапласа. Рассмотрим скалярную функциональную модель системы в форме «вход-выход» (14) и предположим, что начальные данные рассматриваемой системы – нулевые. Применим к данной системе преобразование Лапласа и воспользуемся его свойствами, а именно свойством линейности и взятия производной, для получения следующего выражения:

$$(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n\lambda)\tilde{y}(\lambda) = (b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_n\lambda)\tilde{u}(\lambda).$$

Таким образом, можно ввести в рассмотрение следующую функцию:

$$W(\lambda) = \frac{\tilde{y}(\lambda)}{\tilde{u}(\lambda)} = \frac{b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_n\lambda}{\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n\lambda},$$

называемую *передаточной функцией* системы. Данная функция позволяет найти изображение выхода системы путем умножения передаточной функции на изображение входа системы. Аналогичным образом можно ввести в рассмотрение *передаточную матрицу* для векторного случая системы в форме «вход-выход».

Теперь рассмотрим линейную систему в форме пространства состояний (18) и применим преобразование Лапласа к обоим уравнениям:

$$\begin{aligned}\lambda\tilde{x}(\lambda) &= A\tilde{x}(\lambda) + B\tilde{u}(\lambda), \\ \tilde{y}(\lambda) &= C\tilde{y}(\lambda).\end{aligned}$$

Выразим  $\tilde{x}$  из первого уравнения и подставим во второе, тогда

$$\tilde{y}(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B\tilde{u}(\lambda),$$

где  $W(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B$  – передаточная матрица рассматриваемой системы.

Рассмотрим обработку сигнала в соответствии с оператором  $H_t$  (12) и применим преобразование Лапласа к данному выражению. Используя свойство свертки для преобразования Лапласа, получим, что преобразование Лапласа от импульсной характеристики системы является ее передаточной функцией.

### 2.3.6 Стабилизируемость линейной системы

Линейная система  $\dot{x} = Ax + Bu$  называется *стабилизируемой по состоянию*, если существует такая обратная связь  $Kx$ , что управление  $u = Kx$  делает замкнутую систему  $\dot{x} = (A + BK)x$  устойчивой.

Рассмотрим простейший случай, когда  $B = I$  – единичная матрица, тогда стабилизирующую обратную связь можно найти в виде  $u = kx$ , где  $k \in \mathbb{R}$ .

Покажем, что это действительно так. Для этого подставим обратную связь в уравнение системы. Получим следующее:

$$\dot{x} = Ax + Iu = Ax + kIx = \underbrace{(A + kI)}_{=\tilde{A}} x. \quad (21)$$

Из последнего уравнения следует, что замкнутая система (21) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда матрица  $\tilde{A}$  устойчива.

Легко видеть, что собственные числа матриц  $A$  и  $\tilde{A}$  связаны следующими соотношениями:

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i + k, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $\lambda$  и  $\tilde{\lambda}$  – собственные числа матриц  $A$  и  $\tilde{A}$ , соответственно. Таким образом, если матрица  $A$  неустойчива, то, выбрав  $k < k^*$ , где  $k^* = -\max_i \{\operatorname{Re}(\lambda_i)\}$ , получаем асимптотически устойчивую замкнутую систему (21).

## 2.4 Практическая работа №1

**Задание 1.** Дана каноническая модель непрерывной системы в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, \\ y = Cx, \end{cases}$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^3$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}$ . Начальные данные – нулевые.

Перейти к функциональной модели «вход-выход» и построить передаточную функцию системы.

1. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1].$$

2. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1].$$

3. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1].$$

4. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1].$$

5. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1].$$

6. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1].$$

7. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1].$$

8. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1].$$

9. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1].$$

10. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1].$$

**Задание 2.** Дана функциональная модель непрерывной системы в форме «вход-выход»,  $u(t) \in \mathbb{R}$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}$ . Начальные данные – нулевые.

Перейти к канонической модели в пространстве состояний.

1. Вариант.

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 6y - 6y = 2\dot{u} + u.$$

2. Вариант.

$$\ddot{y} + 2\dot{y} - \dot{y} - 2y = -\ddot{u} + 2\dot{u} - 8u.$$

3. Вариант.

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 3y - 4y = \ddot{u} - 2\dot{u} + u.$$

4. Вариант.

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y - y = \ddot{u} - 2\dot{u} - u.$$

5. Вариант.

$$\ddot{y} - 2\dot{y} - \dot{y} - 2y = -2\dot{u} - 2u.$$

6. Вариант.

$$\ddot{y} - \dot{y} - 6\dot{y} + 6y = \ddot{u} + \dot{u} - 10u.$$

7. Вариант.

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 3y - y = 2\ddot{u} - 6\dot{u} + 4u.$$

8. Вариант.

$$\ddot{y} + \dot{y} + 3y - 3y = \ddot{u} + 5u.$$

9. Вариант.

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y + 2y = \ddot{u} - 3\dot{u} + 2u.$$

10. Вариант.

$$\ddot{y} - \dot{y} - 4\dot{y} + 6y = \ddot{u} - 2\dot{u} + u.$$

**Задание 3.** Дана система в пространстве состояний

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $B$  — единичная матрица размера  $3 \times 3$ ,

1. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 2 \\ 3 & -4 & 6 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

3. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

4. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

5. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

8. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

9. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

10. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Необходимо промоделировать систему с ненулевыми начальными данными и найти такое  $k^*$ , что при любых  $k < k^*$  обратная связь вида  $u = kx$  обеспечивала бы асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Найти собственные числа замкнутой системы и построить графики решений.

### 2.4.1 Пример выполнения практической работы

**Задание 1.** Дана каноническая модель системы в пространстве состояний с нулевыми начальными данными:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{22}$$

где  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1].$$

Необходимо перейти к функциональной форме «вход-выход» и построить передаточную функцию системы (22).

**Решение.** Для начала определим характеристический многочлен матрицы  $A$ :

$$a(\lambda) = \det\{\lambda I - A\} = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda - 2 & -3 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda - 6.$$

Основываясь на полученном многочлене  $a(\lambda)$  и системе многочленов (20), получим следующее:

$$\begin{aligned} a_{(1)}(A) &= A^2 - A - 6I, & a_{(1)}(A) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \end{bmatrix} \\ a_{(2)}(A) &= A - I, \\ a_{(3)}(A) &= I, \\ a_{(2)}(A) &= \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & a_{(3)}(A) &= I. \end{aligned}$$

Далее вспомним, что

$$a(d/dt)y = Ca_{(1)}(A)Bu + Ca_{(2)}(A)B\dot{u} + \dots + \\ + Ca_{(n)}(A)Bu^{(n-1)} = b(d/dt)u.$$

Таким образом, находя  $Ca_{(1)}(A)B = -10$ ,  $Ca_{(2)}(A)B = 1$  и  $Ca_{(3)}(A)B = 1$ , получаем уравнение в функциональной форме «вход-выход»

$$\ddot{y} - \dot{y} - 6\dot{y} - 6y = \ddot{u} + \dot{u} - 10u.$$

Теперь найдем передаточную функцию исследуемой системы, основываясь на модели «вход-выход»:

$$W(\lambda) = \frac{\lambda^2 + \lambda - 10}{\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda - 6}.$$

Аналогично можно найти передаточную функцию исходной системы в пространстве состояний:

$$W(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B = \\ = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda - 2 & -3 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\lambda^2 + \lambda - 10}{\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda - 6},$$

и на ее основе выписать уравнение системы в форме «вход-выход».

**Задание 2.** Дана функциональная модель линейной системы в форме «вход-выход»:

$$\ddot{y} + \dot{y} + 3\dot{y} - 3y = \ddot{u} + \dot{u} - u, \quad y(t), u(t) \in \mathbb{R}. \quad (23)$$

Необходимо перейти к канонической модели в форме пространства состояний.

**Решение.** Для представления системы «вход-выход» (23) в канонической форме пространства состояний достаточно использовать формулы (17):

$$\dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \\ \text{где } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0].$$

**Задание 3.** Дана система в пространстве состояний:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $B$  – единичная матрица размера  $3 \times 3$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Необходимо промоделировать систему с ненулевыми начальными данными и найти такое  $k^*$ , что при любых  $k < k^*$  обратная связь вида  $u = kx$  обеспечивала бы асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Найти собственные числа замкнутой системы и построить графики.

**Решение.** Собственные числа матрицы  $A$  равны

$$\lambda_1 = 2.2478, \quad \lambda_2 = 3.8761 + 2.1332i, \quad \lambda_3 = 3.8761 - 2.1332i.$$

Отсюда  $k^* = -\max\{2.2478, 3.8761, 3.8761\} = -3.8761$ .

Тогда собственные числа замкнутой системы при  $k = k^* - 1 < k^*$  будут равны

$$\tilde{\lambda}_1 = -2.6283, \quad \tilde{\lambda}_2 = -1 + 2.1332i, \quad \tilde{\lambda}_3 = -1 - 2.1332i.$$

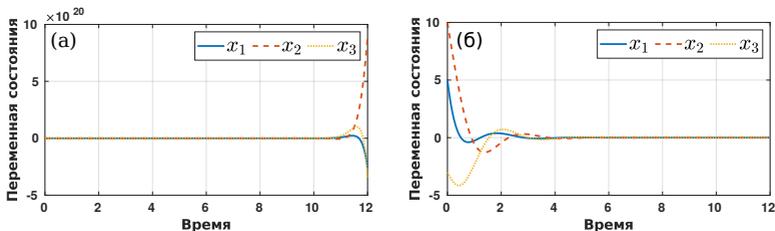


Рис. 2.7: Динамика исследуемой системы: (а) без управления; (б) с управлением.

Графики исходной и замкнутой обратной связью систем изображены на рис. 2.7.

## 2.5 Вопросы для самоконтроля

- Что такое положение равновесия системы?
- Что такое устойчивость?
- Чем отличается асимптотическая устойчивость от устойчивости по Ляпунову?
- Что такое неустойчивость?
- Сколько положений равновесия есть у линейной системы?
- Для чего нужна формула Коши?
- Что такое матричная экспонента?
- При каких значениях параметра  $a$  система  $\dot{x} = ax$  устойчива?
- Когда устойчива система  $\dot{x} = Ax$ ?
- Когда оператор обработки сигналов является линейным?
- Какой оператор является стационарным?
- Приведите пример, для чего используется преобразование Лапласа.
- Что такое  $\delta$ -функция?
- Что такое импульсная характеристика?
- Что такое передаточная функция?
- Как связаны импульсная характеристика и передаточная функция?

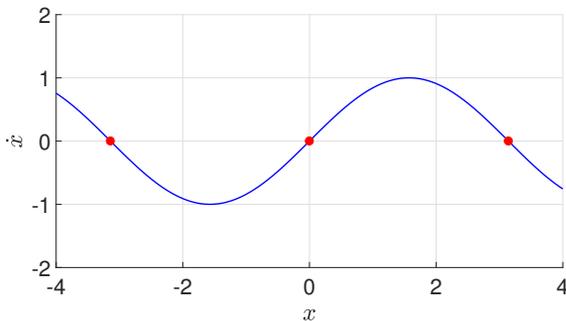
# Глава 3

## Нелинейные системы управления

### 3.1 Понятия устойчивости нелинейной системы

Нелинейные системы в отличие от линейных позволяют более точно описывать процессы, происходящие в действительности. Однако наличие нелинейностей приводит к бóльшим трудностям при их исследовании, нежели при исследовании линейных систем. Кроме того, некоторые явления могут возникать только в нелинейных системах:

- *Конечное время ухода решения на бесконечность.* В случае линейной системы решение записывается в явном виде:  $x(t) = x(0)e^{\lambda t}$ . При  $\lambda > 0$  решение с начальными данными  $x(0)$  уходит на бесконечность при  $t \rightarrow \infty$ . Однако в нелинейных системах решение может уходить на бесконечность и за конечное время.
- *Множественность состояний равновесия.* Нелинейная система описывается уравнением  $\dot{x} = f(t, x)$ , где  $f(t, x)$  – нелинейная функция. Эта функция в отличие от  $ax$  может пересекать ось абсцисс в нескольких точках (в случае линейной функции  $ax$  точка всего одна  $x = 0$ ). На рис. 3.1 приведен пример нелинейной функции  $\sin x$ . В данном случае у нелинейной системы  $\dot{x} = \sin x$  бесконечное число положений равновесия.
- *Автоколебания.* Для колебаний линейной инвариантной по времени системы необходимо, чтобы она имела пару собственных значений на мнимой оси. Это условие не является робастным и почти всегда не может быть выполнено при наличии

Рис. 3.1: Пример нелинейной функции  $\sin x$ .

возмущений. Даже в случае его выполнения амплитуда колебаний будет зависеть от начальных условий. В реальных условиях устойчивое колебание может быть продемонстрировано только нелинейной системой. Существуют нелинейные системы, которые могут колебаться с фиксированной амплитудой и частотой вне зависимости от начальных условий этих систем. Этот тип колебаний известен как *автоколебания*. На фазовой плоскости траектории решений таких систем стремятся к так называемым *предельным циклам*.

- *Хаос*. Хаотическая динамика – тоже существенно нелинейное явление. Описанию этого явления посвящен раздел 3.9.
- *Бифуркации*. Поведение нелинейной системы может претерпевать существенные изменения при малом изменении ее параметров. Это явление носит название *бифуркация* и описывается в разделе 3.7.

Рассмотрим нелинейную систему:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (1)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ . Гладкая (непрерывно-дифференцируемая) функция  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющая уравнению (1) с начальными данными  $x(0) = x_0$  называется *решением* этого уравнения на отрезке

$[0, T]$ . В случае нелинейных систем для решения  $x(t)$  могут возникнуть следующие проблемы:

- *Проблема существования.* Решение нелинейной системы может существовать не на всем рассматриваемом промежутке времени.
- *Проблема единственности.* На рассматриваемом промежутке времени у нелинейной системы может быть несколько решений.

Рассмотрим проблему существования на следующем примере:

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0. \quad (2)$$

Проинтегрируем данную систему по частям:

$$\frac{-1}{x(t)} = t + C.$$

Решая задачу Коши, вычислим решение данной системы:

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t},$$

которое определено только на интервале  $0 \leq t \leq 1/x_0$ . На рис. 3.2, а приведены графики решения системы (2) при различных начальных данных. Очевидно, что решение существует не на всем промежутке  $(0; \infty)$  и уходит на бесконечность за конечное время.

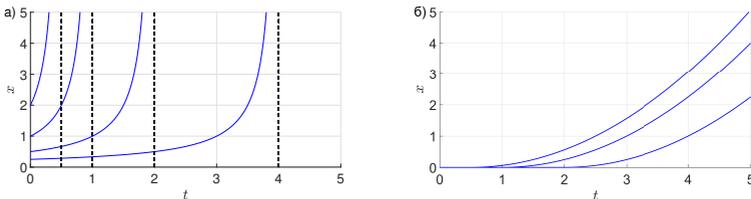


Рис. 3.2: Проблемы существования и единственности решений нелинейных систем.

Для анализа проблемы единственности решения рассмотрим следующий пример:

$$\dot{x} = \sqrt{x}, \quad x(0) = 0. \quad (3)$$

Аналогичным образом проинтегрируем данную систему по частям:

$$2\sqrt{x} = t + C,$$

откуда

$$x(t) = \begin{cases} \frac{(t - C)^2}{4}, & \text{при } t > C, \\ 0, & \text{при } t \leq C. \end{cases}$$

Графики решения системы (3) приведены на рис. 3.2, б: при нулевых начальных данных система имеет бесконечно много решений.

Для того чтобы избежать приведенных проблем, будем рассматривать липшицевы функции.

Функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется *липшицевой* в некотором шаре, если существуют  $L, R > 0$  такие, что для всех  $x, y \in B_R(a)$ , где  $R$  – радиус шара, а  $a$  – его центр, выполнено неравенство:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Для липшицевых функций имеет место следующая теорема. Если  $f$  – липшицева, то существует  $T > 0$  такое, что уравнение

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

имеет единственное решение в  $B_R(x_0)$  на отрезке  $[0; T]$ .

Покажем, что функция  $\sqrt{x}$  не удовлетворяет условию Липшица. Для  $x \geq 0, y \geq 0$  и некоторой константы  $K$  должно быть выполнено неравенство:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq K|x - y|.$$

Используя формулу квадрата разности  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$ , получим

$$K \geq \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Положим  $x = 0$ , тогда полученное неравенство не будет выполнено ни для какой константы  $K$ . Таким образом, можно заключить, что функция  $\sqrt{x}$  не является липшицевой.

Теперь рассмотрим различные модели нелинейных систем в пространстве состояний. Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояний,  $u \in \mathbb{R}^m$  – вектор входов,  $y \in \mathbb{R}^l$  – вектор выходов.

- Общая модель:

$$f(x, u, y, \dot{x}, \dot{u}, \dot{y}, \dots) = 0;$$

- Точная модель:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x);\end{aligned}$$

- Аффинная по  $u$  модель:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\ y &= h(x);\end{aligned}$$

- Линейная модель:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx.\end{aligned}$$

Теперь введем определения положения равновесия. Точка  $(x^*, u^*, y^*)$  называется *положением равновесия*, если решение, начинающееся в этой точке, остается в ней же (траектория состоит из одной точки). Для поиска положений равновесия нужно приравнять производные к нулю.

- Общая модель:

$$f(x^*, u^*, y^*, 0, 0, 0, \dots) = 0;$$

- Точная модель:

$$\begin{aligned}0 &= f(x^*, u^*), \\ y^* &= h(x^*);\end{aligned}$$

- Аффинная по  $u$  модель:

$$\begin{aligned}0 &= f(x^*) + g(x^*)u^*, \\ y^* &= h(x^*);\end{aligned}$$

- Линейная модель:

$$\begin{aligned} 0 &= Ax^* + Bu^*, \\ y^* &= Cx^*. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующую нелинейную систему:

$$\dot{x} = f(x),$$

где  $f(0) = 0$ . Таким образом,  $x^* = 0$  является положением равновесия данной системы.

Положение равновесия  $x^* = 0$  называется *локально устойчивым*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что, если  $\|x(0)\| < \delta$ , то  $\|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$ .

Положение равновесия  $x^* = 0$  называется *локально асимптотически устойчивым*, если существует  $\delta > 0$  такое, что, если  $\|x(0)\| < \delta$ , то  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

Положение равновесия  $x^* = 0$  называется *глобально асимптотически устойчивым*, если для любых начальных данных  $x(0)$  выполнено  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

У нелинейной системы может быть несколько положений равновесия, поэтому каждое из них можно исследовать на локальную устойчивость. В случае, если нелинейная система имеет единственное положение равновесия, то оно может быть глобально асимптотически устойчиво. Теперь поговорим о методах исследования устойчивости нелинейных систем.

## 3.2 Анализ локальной устойчивости

Рассмотрим нелинейную систему:

$$\dot{x} = f(x), \tag{4}$$

где  $f(x)$  – гладкая функция,  $x \in \mathbb{R}$ . Любая аналитическая функция может быть разложена в ряд Тейлора в некоторой точке, т.е. по степеням многочленов:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}.$$

В малой окрестности рассматриваемой точки  $a$  функция хорошо приближается линейными членами, т.е. членами нулевого и первого порядков  $f(x) \sim f(a) + f'(a)(x - a)$ . При достаточно большом отклонении от рассматриваемой точки  $a$  большее влияние на значение функции начинают оказывать члены более высоких порядков. В качестве примера рассмотрим параболическую функцию, изображенную на рис. 3.3 черным цветом, и ее линейную составляющую в точке  $(3.5; 3)$ , изображенную синим цветом. Очевидно, что в малой окрестности возле рассматриваемой точки парабола хорошо приближается ее линейной составляющей, хотя при  $x = 2.8$  отклонение в значениях функций уже существенное.

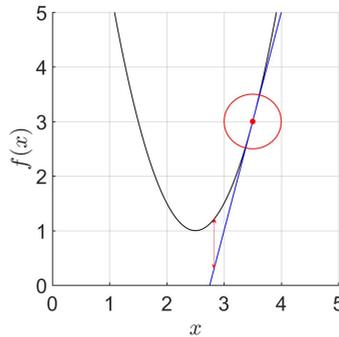


Рис. 3.3: Линейная составляющая функции.

*Линеаризацией* называется метод приближённого представления нелинейных систем, при котором исследование нелинейной системы заменяется анализом линейной системы, в некотором смысле эквивалентной исходной. Путем замены координат  $\Delta = x - a$  можно получить линейный аналог исходной нелинейной системы:

$$\dot{\Delta} = f'(a)\Delta.$$

В качестве точки  $a$  будем выбирать положения равновесия нелинейной системы и каждую полученную линейную систему будем исследовать на устойчивость.

Если мы рассматриваем векторный случай, где  $f(x)$  – вектор-функция, а  $x \in \mathbb{R}^n$ , то вместо производной функции возникнет яко-

биан, т.е. матрица из частных производных. В этом случае матрицей линейной системы будет значение якобиана в точке линеаризации  $a$ :

$$\begin{aligned} \dot{\Delta} &= A\Delta, \quad \Delta = x - a, \\ A &= \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{array} \right] \Bigg|_{x=a}. \end{aligned} \quad (5)$$

Имеет место следующая теорема. Пусть  $a$  – положение равновесия нелинейной системы (4), а (5) – линеаризованная возле этого положения равновесия система. Обозначим  $\alpha(A) = \max \operatorname{Re}(\lambda(A))$ . Тогда

- Если  $\alpha(A) < 0$ , то  $a$  локально асимптотически устойчиво.
- Если  $\alpha(A) > 0$ , то  $a$  неустойчиво.

Таким образом, с помощью метода линеаризации мы можем исследовать положения равновесия нелинейной системы на локальную устойчивость.

### 3.2.1 Типы положений равновесия системы второго порядка

Интересным для исследования является частный случай – системы второго порядка. Рассмотрим линейную систему второго порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \\ x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

В зависимости от положений собственных значений матрицы  $A$  на комплексной плоскости фазовые портреты траекторий данной системы имеют характерные особенности. В таблице 3.1 приведена классификация невырожденных положений равновесия линейных двумерных автономных динамических систем в зависимости от характера собственных чисел матрицы  $A$  в системе уравнений (3.2.1).

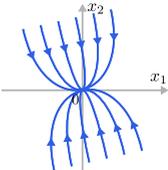
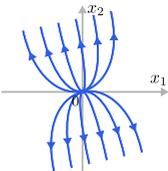
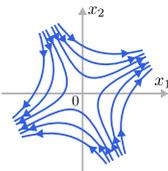
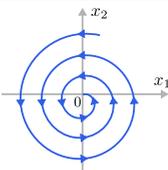
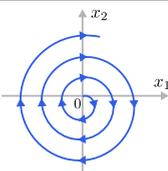
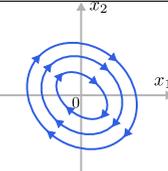
| Положение равновесия | Собственные значения   | Фазовый портрет   |
|----------------------|--|---|
| Устойчивый узел      | $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$<br>$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$                                    |    |
| Неустойчивый узел    | $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$<br>$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$                                    |    |
| Седло                | $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$<br>$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$                                   |    |
| Устойчивый фокус     | $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$<br>$\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) < 0$                 |    |
| Неустойчивый фокус   | $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$<br>$\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) > 0$                 |   |
| Центр                | $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$<br>$\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = 0$ |  |

Таблица 3.1: Типы положений равновесия.

Рассмотрим типы положений равновесия для двумерной нелинейной системы (4), где  $x \in \mathbb{R}^2$ . Вблизи точек равновесия «нелинейная система»  $\equiv$  «линейная система». Сформулируем следующую теорему.

Пусть

$$\dot{x} = f(x) = Ax + g(x),$$

где  $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \|g(x)\|/\|x\| = 0$  (т.е.  $g(x)$  содержит члены высоких порядков, больше 1). Если линеаризованная возле положения равновесия система  $\dot{\Delta} = A\Delta$  имеет фокус, узел или седло, то исходная система  $\dot{x} = f(x)$  имеет тот же тип точки равновесия.

Если линеаризованная система имеет центр, то нелинейная система имеет либо центр, либо фокус.

### 3.3 Линейные матричные неравенства

Для дальнейшего исследования систем управления нам понадобится аппарат линейных матричных неравенств (LMI – linear matrix inequalities). Рассмотрим квадратную матрицу  $P \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

Матрица  $P$  называется *неотрицательно определенной* (обозначается  $P \geq 0$  или  $P \succeq 0$ ), если соответствующая ей квадратичная форма  $x^T P x \geq 0$  для любого  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Матрица  $P$  называется *неположительно определенной* (обозначается  $P \leq 0$  или  $P \preceq 0$ ), если соответствующая ей квадратичная форма  $x^T P x \leq 0$  для любого  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Матрица  $P$  называется *положительно определенной* (обозначается  $P > 0$  или  $P \succ 0$ ), если соответствующая ей квадратичная форма  $x^T P x > 0$  для любого  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Матрица  $P$  называется *отрицательно определенной* (обозначается  $P < 0$  или  $P \prec 0$ ), если соответствующая ей квадратичная форма  $x^T P x < 0$  для любого  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Для матриц  $F_0, \dots, F_m$  рассмотрим отображение  $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ :

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_m F_m,$$

где  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  – скалярные переменные, а  $F_i$ ,  $i = 0, \dots, m$  – матричные коэффициенты.

Для такого отображения существуют стандартные формы LMI:

$$F(x) > 0, \quad F(x) < 0, \quad F(x) \geq 0, \quad F(x) \leq 0.$$

Задача состоит в нахождении набора значений скалярных переменных, чтобы матричные неравенства были выполнены. Неравенства являются линейными, так как обладают свойством линейности. Отображение  $F(x) = \sum_{i=1}^m m x_i F_i$  линейно по  $x$ , так как

$$F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим простейший пример использования линейных матричных неравенств, а именно линейную систему:

$$\dot{z}(t) = Az(t), \tag{7}$$

где  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $A$  – матрица размера  $n \times n$ . Для данной системы введем в рассмотрение функцию Ляпунова (см. раздел 3.4.1)  $V(z) = z^T P z$ , где  $P > 0$ , т.е. функция  $V(z) > 0 \quad \forall z \setminus \{0\}$  и  $V(0) = 0$ . Найдем ее производную в силу системы (7):

$$\dot{V}(z) = \dot{z}^T P z + z^T P \dot{z} = z^T A^T P z + z^T P A z = z^T [A^T P + P A] z < 0.$$

Для того чтобы производная функции Ляпунова была отрицательна, необходимо и достаточно, чтобы  $A^T P + P A < 0$ . Таким образом, получили систему линейных матричных неравенств:

$$\begin{cases} P > 0, \\ A^T P + P A < 0, \end{cases}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $P$  – матричная переменная, а  $x_1, x_2, x_3$  – скалярные переменные. Неравенство  $P > 0$  эквивалентно неравенству

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} > 0. \tag{8}$$

Рассмотрим первое слагаемое в неравенстве  $A^T P + PA < 0$ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 & a_{11}x_2 + a_{21}x_3 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 & a_{12}x_2 + a_{22}x_3 \end{bmatrix},$$

и второе слагаемое в этом неравенстве:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{11}x_2 + a_{21}x_3 & a_{12}x_2 + a_{22}x_3 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, неравенство  $A^T P + PA < 0$  эквивалентно следующему:

$$x_1 \begin{bmatrix} 2a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2a_{21} & a_{11} + a_{22} \\ a_{11} + a_{22} & 2a_{12} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & a_{21} \\ a_{21} & 2a_{22} \end{bmatrix} < 0. \quad (9)$$

Задача состоит в том, чтобы найти такой вектор  $x \in \mathbb{R}^m$ , чтобы система неравенств (8), (9) была разрешима. Данную задачу можно решать с помощью пакета линейных матричных неравенств Yalmip [68] для программной среды Matlab [78].

### 3.3.1 Критерий Сильвестра

Для проверки, является ли симметричная квадратная матрица положительно (отрицательно, неположительно, неотрицательно) определенной, используется *критерий Сильвестра*. Рассмотрим квадратную матрицу  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Введем в рассмотрение угловые миноры данной матрицы:

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \det A.$$

**Критерий Сильвестра:**

Для положительной определенности матрицы  $A$  необходимо и достаточно, чтобы все ее угловые миноры  $\Delta_i$  были положительны.

Для отрицательной определенности матрицы  $A$  необходимо и достаточно, чтобы ее угловые миноры четного порядка были положительны, а нечетного порядка – отрицательны.

Подробное описание критерия Сильвестра можно найти, например, в [6].

### 3.4 Анализ глобальной устойчивости

Если нелинейная система имеет единственное положение равновесия, то часто возникает задача проверить его на глобальную устойчивость. Для этого можно использовать различные методы, которые будут рассмотрены далее.

#### 3.4.1 Метод функций Ляпунова

Рассмотрим нелинейную динамическую систему:

$$\dot{x} = f(x), \quad (10)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(0) = 0$ . Следовательно,  $x \equiv 0$  является положением равновесия данной системы. Введем в рассмотрение неотрицательную функцию  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  такую, что

1.  $V(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ;
2.  $V(0) = 0$ .

Функция  $V(x)$ , удовлетворяющая приведенным условиям, называется *функцией Ляпунова*.

Функция  $V(x)$  напрямую не зависит от времени, зато от времени зависят компоненты вектора состояния  $x$ . Таким образом, если мы хотим вычислить производную функции  $V(x)$  по времени, то будем дифференцировать ее как сложную функцию. *Производной*

функции  $V(x)$  в силу системы (10) будем называть функцию  $\dot{V}(x)$  такую, что

$$\dot{V}(x) = \left( \text{grad } V(x), \frac{dx}{dt} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x), \quad (11)$$

где  $f(x) = \text{col}\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ . В данном случае  $(\text{grad } V(x), \dot{x}) = |\text{grad } V(x)| |\dot{x}| \cos \varphi$  – скалярное произведение двух векторов, где  $\varphi$  – угол между двумя этими векторами. Градиент  $\text{grad } V(x)$  – вектор, своим направлением указывающий направление наибольшего возрастания функции  $V(x)$ . Если скалярное произведение отрицательно, значит, угол между двумя векторами  $\varphi > \pi/2$ .

Рассмотрим скалярный случай  $x \in \mathbb{R}$  и выберем в качестве  $V(x) = x^2$ . Данная функция является функцией Ляпунова, график которой изображен на рис. 3.4. Предположим, что  $(\text{grad } V(x), \dot{x}) < 0$ . Для  $x > 0$ ,  $\text{grad } V(x) > 0$ , т.е. градиент функции Ляпунова направлен вправо. Следовательно, вектор  $\dot{x}$  направлен влево, т.е.  $\dot{x} < 0$ , а значит, функция  $x(t)$  убывает. Для  $x < 0$ ,  $\text{grad } V(x) < 0$ , т.е. градиент функции Ляпунова направлен влево. Следовательно, вектор  $\dot{x}$  направлен вправо, т.е.  $\dot{x} > 0$ , а значит, функция  $x(t)$  возрастает. Таким образом, требование  $(\text{grad } V(x), \dot{x}) < 0$  приводит к тому, что  $x$  со временем достигнет нуля, то есть положения равновесия системы (10). Если удастся найти такую функцию Ляпунова, что  $V(x) < 0$  для всех  $x$ , кроме нуля, это будет означать, что любое решение системы стремится к нулю, а значит,  $x \equiv 0$  глобально асимптотически устойчиво. По аналогии работает и общий случай  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Имеет место следующая теорема. Если существует функция Ляпунова  $V(x)$  такая, что  $\dot{V}(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , то положение равновесия  $x^* \equiv 0$  нелинейной системы (10) является глобально асимптотически устойчивым.

Если существует функция Ляпунова  $V(x)$  такая, что  $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ , то положение равновесия  $x^* \equiv 0$  нелинейной системы (10) является локально устойчивым в области  $\Omega$ .

Доказательства приведенных теорем можно найти в [25].

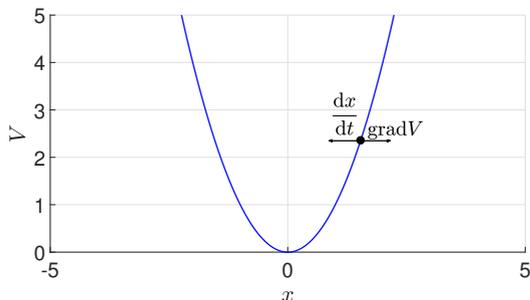


Рис. 3.4: Функция Ляпунова.

### 3.4.2 Исследование модели популяции

Рассмотрим следующую модель популяции:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(a + bx(t) + cy(t)), \\ \dot{y}(t) = y(t)(d + ex(t) + fy(t)), \end{cases}$$

где  $x(t)$ ,  $y(t)$  – компоненты состояния системы, а  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$  – некоторые константы. Положим  $a = e = 1$ ,  $b = f = 0$ ,  $c = d = -1$ , тогда рассматриваемая система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(1 - y(t)), \\ \dot{y}(t) = y(t)(-1 + x(t)). \end{cases} \quad (12)$$

Исследуем динамику полученной системы. Первым делом найдем положения равновесия данной системы и определим их тип. Для этого приравняем правые части системы (12) к нулю:

$$\begin{cases} 0 = x(t)(1 - y(t)), \\ 0 = y(t)(-1 + x(t)), \end{cases}$$

откуда имеем два положения равновесия  $(0, 0)$  и  $(1, 1)$ . Найдем якобиан системы (12):

$$J = \begin{bmatrix} 1 - y & -x \\ y & -1 + x \end{bmatrix}.$$

Подставим положения равновесия в якобиан, чтобы получить матрицы соответствующих линейных систем:

$$A_{(0;0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{(1;1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные числа полученных матриц и получим, что для линейной системы положение равновесия  $(0;0)$  является седлом, а положение равновесия  $(1;1)$  является центром. Следовательно, для нелинейной системы положение равновесия  $(0;0)$  также является седлом, а положение равновесия  $(1;1)$  требует дополнительного исследования. Докажем, что оно также является центром, т.е. докажем существование периодических орбит.

Рассмотрим  $x(t) > 0$ ,  $y(t) > 0$  и найдем первый интеграл системы. *Первым интегралом системы* называется такая функция  $V$ , которая постоянна на любом решении системы в некоторой области, т.е. производная этой функции в силу системы равна нулю. Покажем, что следующая функция является первым интегралом системы (12):

$$V(x, y) = \ln x - x + \ln y - y.$$

Действительно,

$$\dot{V}(x, y) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) \dot{x} + \left(\frac{1}{y} - 1\right) \dot{y} = (1-x)(1-y) + (1-y)(x-1) = 0.$$

Следовательно, функция  $W(x, y) = e^{V(x, y)} = w(x)w(y)$ , где  $w(x) = xe^{-x}$ , также является первым интегралом системы (12). Найдем точку максимума функции  $W(x, y)$ . Для этого вычислим первую производную функции  $w(x)$  и приравняем ее к нулю:

$$w'(x) = e^{-x}(1-x) = 0,$$

следовательно,  $x = 0$  – точка супремума. Найдем вторую производную функции  $w(x)$ :

$$w''(x) = -e^{-x}(2-x),$$

значит,  $w''(1) < 0$ , следовательно,  $x = 1$  – точка максимума функции  $w(x)$ , а точка  $(1;1)$  – точка максимума функции  $W(x, y)$ , т.е.

$W(x, y) \leq W(1, 1)$ . Контурные линии функции  $W(x; y)$  являются замкнутыми кривыми, окружающими точку  $(1; 1)$ . Таким образом, траектории системы лежат на замкнутых контурных линиях, а точка  $(1; 1)$  является положением равновесия. Траектория, начинающаяся в точке  $(x; y)$ ,  $(x > 0; y > 0)$ ,  $(x; y) \neq (1; 1)$ , является замкнутой и ограниченной и представляет из себя инвариантное множество. Следовательно, траектория является периодической орбитой, а точка  $(1; 1)$  является центром. Фазовый портрет нелинейной системы (10) приведен на рис. 3.5. Каждый может увидеть, что точка  $(0; 0)$  является седлом, а точка  $(1; 1)$  является центром.

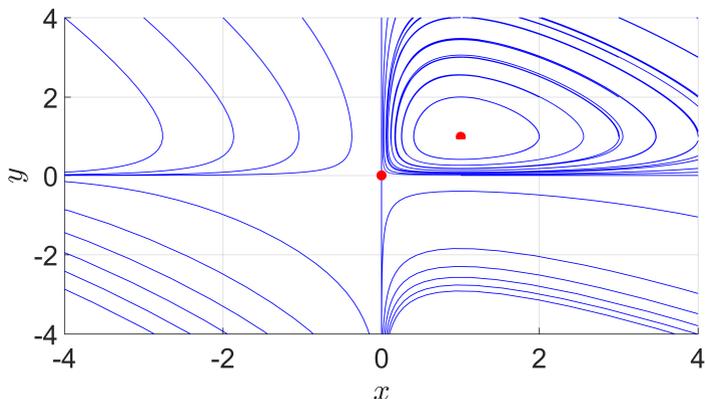


Рис. 3.5: Фазовый портрет системы (10).

### 3.4.3 Абсолютная устойчивость

Помимо метода функций Ляпунова, существуют также другие методы исследования глобальной устойчивости нелинейных систем. В этом разделе мы дадим их краткое описание.

Термин «абсолютная устойчивость» обычно употребляется в контексте задач устойчивости *систем типа Лурье*. Система типа

Лурье имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \\ \sigma &= c^T x, \end{aligned} \tag{13}$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\xi(t) \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma(t) \in \mathbb{R}$ ;  $A$  – матрица размера  $n \times n$ ;  $B$ ,  $c$  –  $n$ -мерные векторы-столбцы;  $\xi = \varphi(\sigma)$  – нелинейность, зависящая от выхода  $\sigma$ . Для определения устойчивости нулевого решения в системах данного типа часто используют два критерия: *круговой критерий* и *критерий Попова*. Причем первый критерий (круговой критерий) устанавливает так называемую экспоненциальную устойчивость нулевого решения. Определение экспоненциальной устойчивости следующее.

Если  $\exists c > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  такие, что  $\forall x(t)$  системы (13) и  $\forall t \geq t_0$  выполнено  $\|x(t)\| \leq c\|x(t_0)\|e^{-\varepsilon(t-t_0)}$ , то нулевое решение системы (13) является *экспоненциально устойчивым*.

Это определение означает, что любое решение системы стремится к нулю с экспоненциальной скоростью.

Далее дадим формулировки кругового критерия и критерия Попова.

### **Круговой критерий**

Пусть выполнены условия:

- нелинейность  $\varphi(\sigma)$  в системе (13) удовлетворяет при  $\sigma \neq 0$  следующим неравенствам:

$$\mu_1 \leq \varphi(\sigma)/\sigma \leq \mu_2, \quad \forall t \in (0, \infty),$$

т.е. является секторной;

- матрица  $A$  в (13) не имеет чисто мнимых собственных значений;
- для некоторого  $\mu_0 \in [\mu_1, \mu_2]$  линейная система (13),  $\xi = \mu_0\sigma$  асимптотически устойчива;
- выполнено «частотное условие»

$$\operatorname{Re} \{ [1 + \mu_1 W(i\omega)] [1 + \mu_2 W(i\omega)]^* \} > 0, \quad \omega \in [-\infty, +\infty],$$

где  $*$  – знак комплексного сопряжения, а функция  $W(i\omega)$  определена формулой

$$W(i\omega) = c^T(A - i\omega I)^{-1}B.$$

Тогда система (13) глобально экспоненциально устойчива.

### Критерий Попова

Пусть выполнены условия:

- нелинейность  $\varphi(\sigma)$  в системе (13) удовлетворяет при  $\sigma \neq 0$  следующим неравенствам:

$$0 \leq \varphi(\sigma)/\sigma \leq \mu_0 < \infty, \quad \forall t \in (0, \infty);$$

- матрица  $A$  в (13) является устойчивой;
- для некоторого  $\nu$  и  $\forall \omega \in [0, +\infty]$  выполнено «частотное условие»

$$\mu_0^{-1} + \operatorname{Re} \{ (1 + i\omega\nu)W(i\omega) \} > 0,$$

где функция  $W(i\omega)$  определена формулой

$$W(i\omega) = c^T(A - i\omega I)^{-1}b.$$

Тогда система (13) глобально асимптотически устойчива.

Подробное описание данных критериев можно найти, например, в [52].

## 3.5 Практическая работа №2

**Задание 1.** Дана нелинейная система

1. Вариант.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - x^3 - 2y, \\ \dot{y} = x - y; \end{cases}$$

2. Вариант.

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y, \\ \dot{y} = -x - 2y - \frac{y}{|y| + 1}; \end{cases}$$

3. Вариант.

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y, \\ \dot{y} = x - 4y - \operatorname{arctg} 2y; \end{cases}$$

4. Вариант.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 3y, \\ \dot{y} = -x - 4y - \operatorname{sat} 2y, \end{cases} \quad \text{где } \operatorname{sat} 2y = \begin{cases} 2y, & \text{при } |y| < 1 \\ 2 \operatorname{sign} y, & \text{при } |y| \geq 1; \end{cases}$$

5. Вариант.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - 2y - \frac{y}{|y| + 3}; \end{cases}$$

6. Вариант.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - x^5 + y, \\ \dot{y} = -x - y; \end{cases}$$

7. Вариант.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y - \frac{2x}{|x| + 4}, \\ \dot{y} = -x - 4y; \end{cases}$$

8. Вариант.

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x + 2y - \operatorname{arctg} x, \\ \dot{y} = -2x - 2y; \end{cases}$$

9. Вариант.

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y - \operatorname{sat} x, \\ \dot{y} = -x - 2y, \end{cases} \quad \text{где } \operatorname{sat} x = \begin{cases} x, & \text{при } |x| < 1 \\ \operatorname{sign} x, & \text{при } |x| \geq 1; \end{cases}$$

10. Вариант.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - \frac{x}{|x| + 2}, \\ \dot{y} = -2x - 2y; \end{cases}$$

- найти ее положения равновесия;
- линеаризовать систему около одного из положений равновесия, исследовать полученную систему на устойчивость;
- доказать устойчивость исходной системы с помощью метода функций Ляпунова;
- построить графики исходной и линеаризованной систем.

**Задание 2.** Дана нелинейная система

$$\dot{x} = Ax + b\xi, \quad \sigma = c^*x, \quad (14)$$

$$\xi = \varphi(\sigma, t), \quad (15)$$

где

1. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \sin \sigma;$$

2. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = -\frac{1}{1 + e^{-\sigma}} + \frac{1}{2};$$

3. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \frac{e^{\sigma} - e^{-\sigma}}{e^{\sigma} + e^{-\sigma}};$$

4. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \frac{\sigma}{|\sigma| + 2};$$

5. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi = \operatorname{arctg} \sigma;$$

6. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi = \sin 0.5\sigma;$$

7. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \frac{1}{1 + e^{-\sigma}} - \frac{1}{2};$$

8. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \frac{e^{0.5\sigma} - e^{-0.5\sigma}}{e^{0.5\sigma} + e^{-0.5\sigma}};$$

9. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi = \frac{\sigma}{|\sigma| + 3};$$

10. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi = \arctg 2\sigma;$$

С помощью кругового критерия доказать экспоненциальную устойчивость системы (14), (15).

**Задание 3.** Дана нелинейная система

$$\dot{x} = Ax + b\xi, \quad \sigma = c^*x, \quad (16)$$

$$\xi = \varphi(\sigma), \quad (17)$$

где

1. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi = \arctg 2\sigma;$$

2. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \frac{\sigma^3}{3};$$

3. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\xi = \begin{cases} 2\sigma, & \text{при } |\sigma| < 1; \\ 2 \operatorname{sign} \sigma, & \text{при } |\sigma| \geq 1; \end{cases}$$

4. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi = \frac{\sigma}{|\sigma| + 3};$$

5. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \frac{e^{0.5\sigma} - e^{-0.5\sigma}}{e^{0.5\sigma} + e^{-0.5\sigma}};$$

6. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi = \operatorname{arctg} \sigma;$$

7. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \frac{\sigma^5}{5};$$

8. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\xi = \begin{cases} \sigma, & \text{при } |\sigma| < 1; \\ \operatorname{sign} \sigma, & \text{при } |\sigma| \geq 1; \end{cases}$$

9. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \frac{\sigma}{|\sigma| + 2};$$

10. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \frac{e^\sigma - e^{-\sigma}}{e^\sigma + e^{-\sigma}};$$

С помощью критерия Попова доказать асимптотическую устойчивость системы (16), (17).

### 3.5.1 Пример выполнения практической работы

**Задание 1.** Дана нелинейная система

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases} \quad (18)$$

- найти ее положения равновесия (все имеющиеся);
- линеаризовать систему около одного из положений равновесия, исследовать полученную систему на устойчивость;
- доказать устойчивость исходной системы с помощью метода функций Ляпунова;
- построить графики исходной и линеаризованной систем.

**Решение.** Найдем положения равновесия системы (18) из условия  $f(x^*) = 0$ :

$$\begin{cases} -x^3 - 2y = 0, \\ 2x - y = 0. \end{cases} \Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underbrace{x^* = \pm 2 \begin{bmatrix} i \\ 2i \end{bmatrix}}_{\text{Не существует}}.$$

Линеаризуем исследуемую систему в окрестности положения равновесия  $(0, 0)$ :

$$J(x) = \begin{bmatrix} -3x^2 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = J|_{x=x^*} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}_{=A} x.$$

Определим тип положения равновесия  $(0, 0)$ . Для этого найдем собственные числа матрицы  $A$  и исследуем их:

$$\det\{\lambda I - A\} = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 4 = 0.$$

Из последнего получаем, что  $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm 0.5\sqrt{5}i$ . Следовательно, положение равновесия – устойчивый фокус.

Введем функцию Ляпунова  $V(x) = x^2 + y^2$  для исследования глобальной устойчивости системы (22). Покажем, что при данной функции Ляпунова выполняется теорема об асимптотической устойчивости:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x(-x^3 - 2y) + 2y(2x - y) = \\ &= -2x^4 - 4xy + 4xy - 2y^2 = -2x^4 - 2y^2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Из последнего следует, что для введенной функции  $V(x)$  и исследуемой системы (22) выполняются условия теоремы об асимптотической устойчивости, а значит, нулевое решение системы глобально асимптотически устойчиво.

Графики исходной и линеаризованной систем изображены на рис. 3.6.

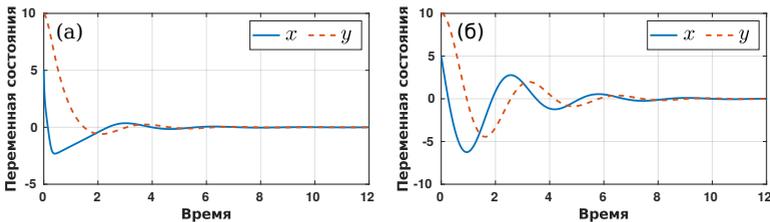


Рис. 3.6: Динамика исследуемой динамической системы: (а) линеаризованная система; (б) исходная система.

**Задание 2.** Дана нелинейная система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\xi, & \sigma &= c^T x, \\ \xi &= \varphi(\sigma), \end{aligned} \quad (19)$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \arctg(\sigma).$$

С помощью кругового критерия доказать экспоненциальную устойчивость системы.

**Решение.** Проверим выполнение всех пунктов критерия.

1) Выполнение «секторного условия»:

$$\mu_1 \leq \varphi(\sigma)/\sigma \leq \mu_2, \quad \sigma \neq 0, \quad \forall t \in (0, \infty).$$

Имеем  $\mu_1 \sigma \leq \arctg(\sigma) \leq \mu_2 \sigma$ . Возьмем производную по  $\sigma$ :

$$\mu_1 \leq \frac{1}{1 + \sigma^2} \leq \mu_2.$$

Откуда получаем, что  $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$  (рис. 3.7).

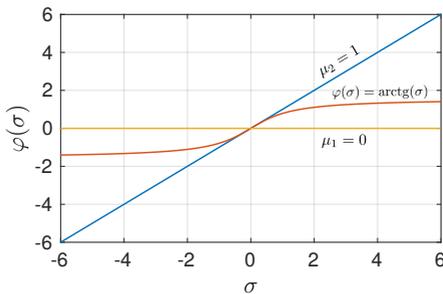


Рис. 3.7: Круговой критерий: выполнение секторного условия для системы (19).

Из рис. 3.7 следует, что «секторное условие» выполнено.

2) Наличие у матрицы  $A$  чисто мнимых собственных значений:

$$\det\{\lambda I - A\} = \lambda^2 + 6\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -3 \pm i\sqrt{3}.$$

Матрица  $A$  не имеет чисто мнимых собственных значений  $\Rightarrow$  условие выполнено.

3) Асимптотическая устойчивость системы (19) при  $\xi = \mu_0 \sigma$ . Поскольку значение  $\mu_0$  выбирается из интервала  $[\mu_1, \mu_2]$ , то можно выбрать  $\mu_0 = \mu_1 = 0$ . Тогда исследуемая система будет иметь вид  $\dot{x} = Ax$ . Поскольку собственные числа матрицы  $A$  уже известны и  $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ , то матрица  $A$  устойчива  $\Rightarrow$  линейная система асимптотически устойчива, а значит, условие выполнено.

4) Выполнение «частотного условия». Для начала найдем передаточную функцию  $W(\lambda)$ . По определению имеем

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= c^T (A - \lambda I)^{-1} b \Rightarrow \\ \Rightarrow (A - \lambda I)^{-1} &= \frac{1}{\lambda^2 + 6\lambda + 12} \begin{bmatrix} -\lambda - 2 & -2 \\ 2 & -\lambda - 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow W(\lambda) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=c^T} \frac{1}{\lambda^2 + 6\lambda + 12} \begin{bmatrix} -\lambda - 2 & -2 \\ 2 & -\lambda - 4 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=b} = \\ &= \frac{-\lambda - 2}{\lambda^2 + 6\lambda + 12}. \end{aligned}$$

Теперь возьмем  $\lambda = i\omega$  и проверим выполнение неравенства

$$\operatorname{Re} \{ [1 + \mu_1 W(i\omega)] [1 + \mu_2 W(i\omega)]^* \} > 0, \quad \omega \in [-\infty, +\infty].$$

Поскольку  $\mu_1 = 0$  и  $\mu_2 = 1$ , получаем, что должно быть выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{ [1 + W(i\omega)]^* \} &> 0, \quad \omega \in [-\infty, +\infty] \Rightarrow \\ \operatorname{Re} \{ [1 + W(i\omega)]^* \} &= \operatorname{Re} \left\{ \left[ 1 + \frac{-2 - i\omega}{-\omega^2 + 6i\omega + 12} \right]^* \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \left[ \frac{-\omega^2 + 5i\omega + 10}{-\omega^2 + 6i\omega + 12} \right]^* \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \left[ \frac{(-\omega^2 + 5i\omega + 10)(12 - \omega^2 - 6i\omega)}{(12 - \omega^2)^2 + 36\omega^2} \right]^* \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \left[ \frac{\omega^4 + 8\omega^2 + 120 + i\omega^3}{(12 - \omega^2)^2 + 36\omega^2} \right]^* \right\} = \frac{\omega^4 + 8\omega^2 + 120}{(12 - \omega^2)^2 + 36\omega^2} > 0. \end{aligned}$$

Числитель и знаменатель полученной дроби положительны при  $\forall \omega$ . Все условия теоремы выполнены, следовательно, система (19) экспоненциально устойчива.

**Задание 3.** Дана нелинейная система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\xi, \quad \sigma = c^T x, \\ \xi &= \varphi(\sigma), \end{aligned} \quad (20)$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi = \sqrt{|\sigma|} \operatorname{sign}(\sigma).$$

С помощью критерия Попова доказать асимптотическую устойчивость системы.

**Решение.** Проверим выполнение всех пунктов критерия.

1) Выполнение «секторного условия»:

$$0 \leq \varphi(\sigma)/\sigma \leq \mu_0 \leq +\infty, \quad \sigma \neq 0, \quad \forall t \in (0, \infty).$$

Имеем  $0 \leq \sqrt{|\sigma|} \operatorname{sign}(\sigma) \leq \mu_0 \sigma \leq \infty$ . Производной в точке  $\sigma = 0$  не существует, потому рассмотрим предел в нуле справа

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} (\sqrt{|\sigma|} \operatorname{sign}(\sigma))'_\sigma = \lim_{\sigma \rightarrow +0} \sqrt{\sigma}' = \lim_{\sigma \rightarrow +0} \frac{1}{2\sqrt{\sigma}} = \infty \Rightarrow \mu_0 = \infty.$$

Из рис. 3.8 следует, что «секторное условие» выполнено: сектор бесконечный.

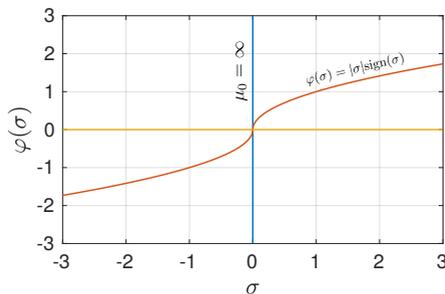


Рис. 3.8: Критерий Попова: выполнение секторного условия для системы (20).

2) Устойчивость матрицы  $A$ .

$$\det\{\lambda I - A\} = \lambda^2 + 6\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -3 \pm i\sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) < 0.$$

Из последнего следует, что матрица  $A$  устойчива.

3) Выполнение «частотного условия». Для начала найдем передаточную функцию  $W(\lambda)$ . По определению имеем

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= c^T(A - \lambda I)^{-1}b \Rightarrow \\ &\Rightarrow (A - \lambda I)^{-1} = \frac{1}{\lambda^2 + 5\lambda + 7} \begin{bmatrix} -\lambda - 2 & -1 \\ 1 & -\lambda - 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow W(\lambda) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=c^T} \frac{1}{\lambda^2 + 5\lambda + 7} \begin{bmatrix} -\lambda - 2 & -1 \\ 1 & -\lambda - 3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{=b} = \\ &= \frac{\lambda + 3}{\lambda^2 + 5\lambda + 7}. \end{aligned}$$

Теперь возьмем  $\lambda = i\omega$  и проверим выполнение неравенства

$$\mu_0^{-1} + \operatorname{Re}[(1 + i\omega\nu)W(i\omega)] > 0, \quad \forall \omega \in [0, +\infty).$$

Учитывая, что  $\mu_0^{-1}|_{\mu_0=\infty} = 0$ , получаем, что должно быть выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[(1 + i\omega\nu)W(i\omega)] &> 0, \quad \omega \in [0, +\infty) \Rightarrow \\ \operatorname{Re}[(1 + i\omega\nu)W(i\omega)] &= \operatorname{Re}\left[(1 + i\omega\nu)\frac{i\omega + 3}{-\omega^2 + 5i\omega + 7}\right] = \\ &= \operatorname{Re}\left[\frac{-\nu\omega^2 + (1 + 3\nu)i\omega + 3}{-\omega^2 + 5i\omega + 7}\right] = \\ &= \operatorname{Re}\left[\frac{\nu\omega^4 + (2 + 8\nu)\omega^2 + 21 - (1 - 2\nu)i\omega^3 - (8 - 21\nu)i\omega}{(7 - \omega^2)^2 + 25\omega^2}\right] = \\ &= \frac{\nu\omega^4 + (2 + 8\nu)\omega^2 + 21}{(\omega^2 - 7)^2 + 25\omega^2} > 0. \end{aligned}$$

При  $\nu \geq 0$  числитель и знаменатель полученной дроби положительны при  $\forall \omega$ . Все условия теоремы выполнены, следовательно, система (20) асимптотически устойчива.

## 3.6 Колебательные системы

Колебательные процессы часто встречаются в природе и технике, поэтому формы их описания непрерывно развиваются и совершенствуются. В течение многих лет, до начала XX в., основным видом математических моделей колебаний в механических, электрических и других системах считались линейные дифференциальные уравнения, например

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (21)$$

Решениями (21) являются гармонические колебания

$$y(t) = A_0 \sin \omega t + A_1 \cos \omega t \quad (22)$$

с круговой частотой  $\omega$  и периодом  $T = 2\pi/\omega$ , амплитуда которых  $A = \sqrt{A_0^2 + A_1^2}$  зависит от начальных условий:  $A_1 = y(0)$ ,  $A_0 = \dot{y}(0)/\omega$  (рис. 3.9, а). Очевидно, решение (22) непрерывно зависит от начальных условий, т.е. малое изменение величин  $y(0)$ ,  $\dot{y}(0)$  приводит к равномерно малому изменению решения  $y(t)$  на всей временной полуоси  $0 \leq t < \infty$ . Частотный спектр функции (22) дискретен и состоит из одной точки  $f = \omega/2\pi$  (рис. 3.9, б).

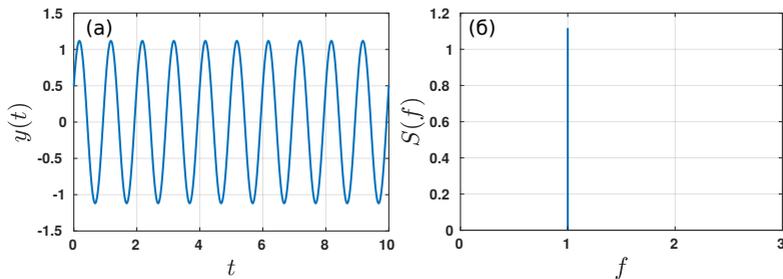


Рис. 3.9: Гармонические колебания ( $f = 1$ ).

Для описания колебаний более сложной формы можно соединять модели вида (21) с различными частотами колебаний  $\omega_1, \dots, \omega_r$ . Например, последовательное соединение двух моделей вида (21) опи-

сывается соотношениями

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1(t) + \omega_1^2 y_1(t) &= 0, \\ \ddot{y}_2(t) + \omega_2^2 y_2(t) &= y_1(t)\end{aligned}$$

и имеет частные решения вида  $y_2(t) = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$ , где коэффициенты  $A_1, A_2$  зависят от начальных условий. Если частоты  $\omega_1, \dots, \omega_r$  соизмеримы (являются целыми кратными некоторой частоты  $\omega_0$ ), то колебания будут периодическими с периодом  $2\pi/\omega_0$  (рис. 3.10).

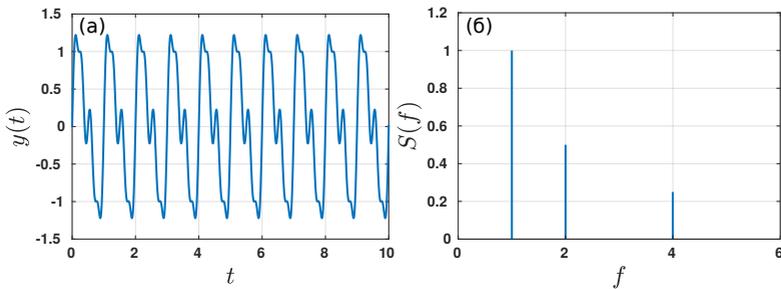


Рис. 3.10: Периодические колебания ( $f_i = 1, 2, 4$ ).

Если же частоты  $\omega_i$  несоизмеримы, то такие колебания не являются периодическими; они относятся к классу *квазипериодических* (рис. 3.11).

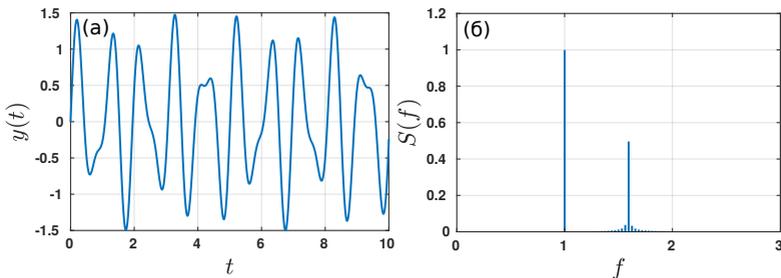


Рис. 3.11: Квазипериодические колебания ( $f_i = 1, 5/\pi$ ).

В обоих случаях решение непрерывно зависит от начальных условий, а его спектр является дискретным конечным множеством.

Заметим, что «на глаз» различить периодические и квазипериодические колебания может быть затруднительно, поскольку реальные измерения (в том числе измерение частоты колебаний) выполняются с конечной точностью, и отличить рациональное отношение частот от иррационального оказывается практически невозможным.

На рубеже XIX–XX веков выяснилось, что линейных моделей колебаний недостаточно для описания новых явлений и процессов в физике и технике. Основы соответствующего математического аппарата – теории нелинейных колебаний – были заложены в работах А. Пуанкаре, Б. Ван дер Поля, А.А. Андропова, Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова, [1, 3, 7, 14, 26, 31]. Важнейшим в теории нелинейных колебаний является понятие устойчивого *предельного цикла* – периодической траектории, к которой сходятся все другие траектории (по крайней мере, траектории с близкими начальными условиями), т.е. в системе имеют место *автоколебания* – собственные периодические колебания, происходящие при отсутствии внешнего периодического воздействия. Причем амплитуда и частота автоколебаний не зависят от начальных условий.

К числу классических примеров нелинейных дифференциальных моделей, обладающих предельным циклом, относятся *уравнение Ван дер Поля*

$$\ddot{y} + \varepsilon(y^2 - 1)\dot{y} + \omega^2 y = 0, \quad (23)$$

где  $\varepsilon > 0$ ; *уравнение Дуффинга*

$$\ddot{y} + p\dot{y} - qy + q_0 y^3 = 0, \quad (24)$$

где  $p > 0$ ,  $q > 0$ ,  $q_0 > 0$ ; система с *релейным элементом*

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy - \text{sign}(y) = 0. \quad (25)$$

Даже простые нелинейные модели позволяют описывать колебания сложной формы, например релаксационные (близкие к прямоугольным) колебания, учитывать изменение формы колебания в зависимости от начальных условий (системы с несколькими предельными циклами) и т.д. Теоремы о разложении периодической функции в ряд Фурье показывают, что спектр предельного цикла состоит из счетного набора частот, кратных некоторой основной частоте.

Рассмотрим уравнение Ван дер Поля (23) и покажем, что эта система является колебательной при  $\varepsilon > 0$ . Воспользуемся преобразованием Льенара  $x = y - y^3/3 - \dot{y}/\varepsilon$ , чтобы привести систему к форме в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\omega^2}{\varepsilon}y, \\ \dot{y} = \varepsilon \left( y - \frac{y^3}{3} - x \right). \end{cases} \quad (26)$$

Данная система имеет единственное положение равновесия:  $(x, y) = (0, 0)$ . Линеаризуя систему возле данного положения равновесия, получим:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\omega^2}{2\varepsilon}y, \\ \dot{y} = \varepsilon(y - x). \end{cases}$$

Положение равновесия  $(0, 0)$  является неустойчивым, так как собственные числа матрицы линейной системы имеют положительные вещественные части  $\lambda_{1,2} = (\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4\omega^2})/2$ .

Введем в рассмотрение следующую функцию Ляпунова:

$$V(x, y) = \frac{\varepsilon}{2\omega^2}x^2 + \frac{1}{\varepsilon}y^2,$$

тогда ее производная в силу системы (26) равна:

$$\dot{V}(x, y) = yx + y \left( y - \frac{y^3}{3} - x \right) = y^2 - \frac{y^4}{3} = -\frac{1}{3} \left( y^2 - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Таким образом, при достаточно больших  $y$  производная функции Ляпунова отрицательна, значит, решения  $y(t)$  ограничены, т.е. в системе имеют место колебания.

На рис. 3.12, а приведен график решения системы (23) при  $\varepsilon = 2.5$ ,  $\omega = 1$  и начальных условиях  $y(0) = 0.5$ ,  $\dot{y} = 0$ . Соответствующий спектр изображен на рис. 3.12, б.

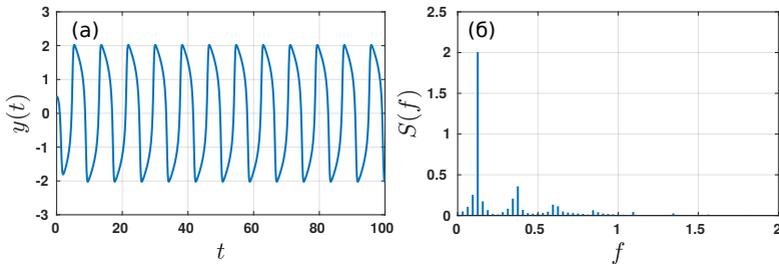


Рис. 3.12: Предельный цикл и его спектр.

## 3.7 Бифуркации

### 3.7.1 Понятие бифуркации в динамических системах

В различных объектах (системах) живой и неживой природы часто бывает так, что изменение одной или нескольких характеристик (параметров) данных объектов приводит к качественному изменению их поведения в будущем относительно прошлого. Такое явление называется бифуркацией, а параметры, отвечающие за возникновение данного поведения в системе, называются *бифуркационными параметрами*. Таким образом, явлению бифуркации можно дать следующее определение.

*Бифуркация* – это явление, при котором малое изменение параметра (или параметров) динамической системы приводит к изменению характера её решений.

Физическими примерами данного явления являются фазовые переходы, механические неустойчивости, лазерные пороги, пороги заселенности.

### 3.7.2 Седлоузловая бифуркация

Сначала будем исследовать возможные бифуркации на прямой. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x) = r + x^2, \quad (27)$$

где  $r$  – бифуркационный параметр,  $x(t) \in \mathbb{R}$ . Положения равновесия для системы (27) находятся из уравнения  $r + x^2 = 0$ . Получаем, что  $x_{1,2}^* = \pm\sqrt{-r}$ . Таким образом, можно заключить, что положения равновесия существуют только для  $r \leq 0$ .

Проверим положения равновесия на устойчивость. Для этого линеаризуем систему (27) в окрестностях точек  $x_{1,2}^*$ . Линеаризованные системы будут иметь вид:

$$\dot{x} = A_{1,2}x, \text{ где}$$

$$A_1 = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_1^*} = 2\sqrt{-r} \text{ и } A_2 = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_2^*} = -2\sqrt{-r}.$$

Таким образом, получаем:

$$\dot{x} = A_1x = 2\sqrt{-r}x \Rightarrow x_1^* \text{ неустойчивая точка равновесия } \forall r \leq 0;$$

$$\dot{x} = A_2x = -2\sqrt{-r}x \Rightarrow x_2^* \text{ устойчивая точка равновесия } \forall r \leq 0.$$

Добавим к системе (27) второе уравнение  $\dot{y} = -y$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = r + x^2, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Данные уравнения независимы. Второе уравнение имеет единственное положение равновесия 0, которое является устойчивым (ему соответствует отрицательное собственное число  $-1$ ). Для  $r > 0$  данная двумерная система не имеет положений равновесия, тогда как при прохождении  $r$  через 0 возникают два положения равновесия:  $(\sqrt{-r}; 0)$  и  $(-\sqrt{-r}; 0)$ , одно из которых является устойчивым узлом, а второе – седлом. Таким образом, при прохождении бифуркационного параметра  $r$  через 0 два положения равновесия то появляются, то исчезают. Поэтому данная бифуркация носит название *седлоузловая*.

Построим бифуркационную диаграмму для рассматриваемой системы. В качестве оси для бифуркационного параметра выберем ось абсцисс, а за значения положений равновесия  $x^*$  будет отвечать ось ординат. Устойчивое положение равновесия будем изображать сплошной линией, а неустойчивое – пунктирной. Получим бифуркационную диаграмму, которая представлена на рис. 3.13.

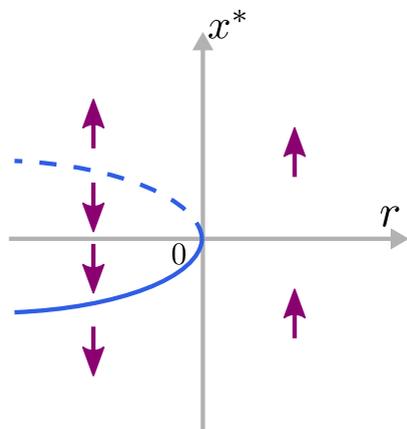


Рис. 3.13: Бифуркационная диаграмма седлоузловой бифуркации в системе (27).

На рис. 3.14 изображен фазовый портрет системы (27) при различных значениях бифуркационного параметра  $r$ . В зависимости от значений параметра  $r$  имеется одно, два или ни одного положения равновесия.

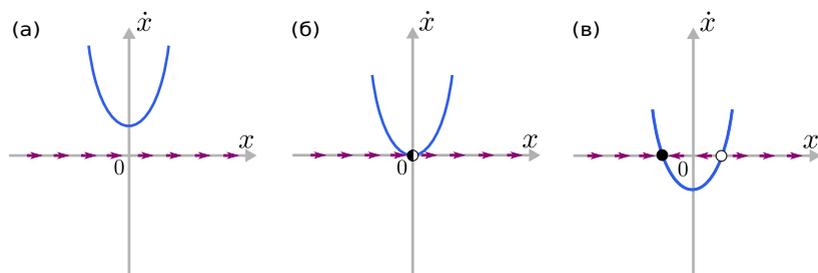


Рис. 3.14: Фазовый портрет системы (27) при седлоузловой бифуркации: (а)  $r > 0$ ; (б)  $r = 0$ ; (в)  $r < 0$ .

### 3.7.3 Транскритическая бифуркация

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\dot{x} = f(x) = rx - x^2, \quad (28)$$

где  $r$  – бифуркационный параметр,  $x(t) \in \mathbb{R}$ . Приравняем правую часть системы (28) к нулю, получим уравнение  $rx - x^2 = 0$ , откуда найдем положения равновесия:  $x_1^* = 0$  и  $x_2^* = r$ . У данной системы при любых значениях параметра  $r$  существует ровно два положения равновесия.

Проверим положения равновесия на устойчивость. Для этого линеаризуем систему (28) в окрестностях точек  $x_{1,2}^*$ . Линеаризованная система будет иметь вид

$$\dot{x} = A_{1,2}x, \text{ где}$$

$$A_1 = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_1^*} = r \text{ и } A_2 = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_2^*} = -r.$$

Таким образом, получаем:

$$\dot{x} = A_1x = rx \Rightarrow x_1^* \text{ устойчиво } \forall r < 0 \text{ и неустойчиво } \forall r > 0.$$

$$\dot{x} = A_2x = -rx \Rightarrow x_2^* \text{ устойчиво } \forall r > 0 \text{ и неустойчиво } \forall r < 0.$$

Добавим к системе (28) второе уравнение  $\dot{y} = -y$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = rx - x^2, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Для любого  $r$  данная двумерная система имеет два положения равновесия:  $(0; 0)$  и  $(r; 0)$ . При  $r < 0$ ,  $(0; 0)$  является устойчивым узлом, а  $(r; 0)$  – седлом. Если значение параметра  $r$  становится положительным, то тип положений равновесия меняется: при  $r > 0$ ,  $(0; 0)$  – седло, а  $(r; 0)$  – устойчивый узел. Таким образом, при прохождении бифуркационного параметра  $r$  через 0 седло приобретает устойчивость (становится устойчивым узлом), а узел ее теряет (становится седлом). Это можно увидеть на бифуркационной диаграмме 3.15. Данная бифуркация носит название *транскритическая*.

На рис. 3.16 изображен фазовый портрет системы (28) при различных значениях бифуркационного параметра  $r$ .

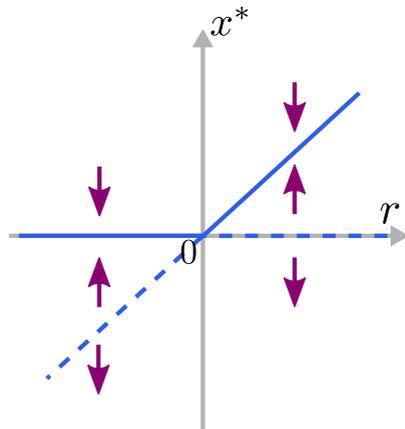


Рис. 3.15: Бифуркационная диаграмма транскритической бифуркации в системе (28).

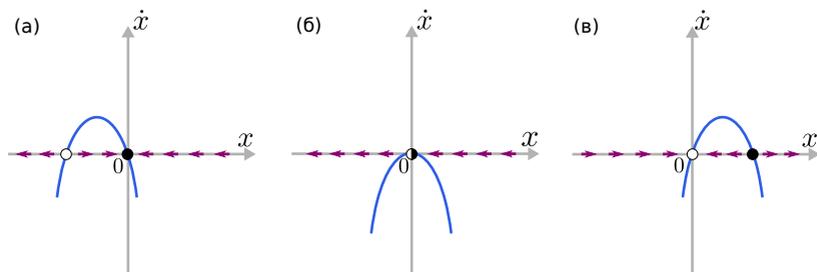


Рис. 3.16: Фазовый портрет системы (28) при транскритической бифуркации: (а)  $r < 0$ ; (б)  $r = 0$ ; (в)  $r > 0$ .

### 3.7.4 Вилообразная бифуркация

*Вилообразная бифуркация* бывает двух видов: *суперкритическая* и *субкритическая*. Сначала будем исследовать *суперкритическую вилообразную бифуркацию*. Для этого рассмотрим уравнение:

$$\dot{x} = f(x) = rx - x^3, \quad (29)$$

где  $r$  — бифуркационный параметр,  $x(t) \in \mathbb{R}$ . Найдем положения

равновесия системы (29):  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = \sqrt{r}$  и  $x_3^* = -\sqrt{r}$ . Таким образом, при  $r > 0$  система (29) имеет три положения равновесия, тогда как при  $r < 0$  – только одно  $x_1^* = 0$ .

Проверим положения равновесия на устойчивость. Для этого линеаризуем систему (29) в окрестностях точек  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  и  $x_3^*$ . Линеаризованная система будет иметь вид

$$\dot{x} = A_{1,2,3}x, \text{ где}$$

$$A_1 = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_1^*} = r, \quad A_2 = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_2^*} = -2r,$$

$$A_3 = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_3^*} = -2r.$$

Откуда получаем, что

$$x_1^* = 0 \Rightarrow \dot{x} = rx \Rightarrow \text{устойчиво } \forall r < 0 \text{ и } \forall r > 0 \text{ неустойчиво};$$

$$x_2^* = \sqrt{r} \Rightarrow \dot{x} = -2rx \Rightarrow \text{существует и устойчиво } \forall r > 0;$$

$$x_3^* = -\sqrt{r} \Rightarrow \dot{x} = -2rx \Rightarrow \text{существует и устойчиво } \forall r > 0.$$

Аналогичным образом добавим к системе (29) второе уравнение  $\dot{y} = -y$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = rx - x^3, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

При  $r < 0$  данная система имеет единственное положение равновесия  $(0; 0)$ , которое является устойчивым узлом. Если значение параметра  $r$  становится положительным, то нулевое положение равновесия теряет устойчивость и становится седлом. При этом возникают два новых устойчивых узла, а именно  $(\sqrt{r}; 0)$  и  $(-\sqrt{r}; 0)$ . Бифуркационная диаграмма данной бифуркации представлена на рис. 3.17. Из-за ее внешнего вида и возникло название *виллообразная*.

На рис. 3.18 изображен фазовый портрет системы (29) при различных значениях бифуркационного параметра  $r$ .

Теперь рассмотрим *субкритическую виллообразную* бифуркацию. Для этого рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = f(x) = rx + x^3, \quad (30)$$

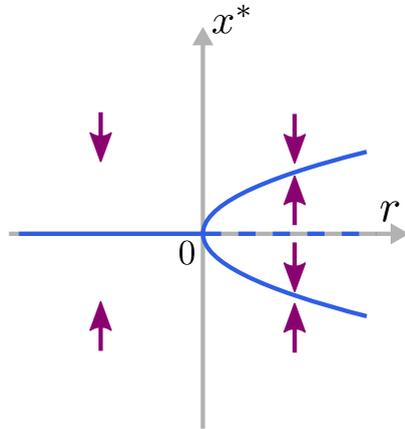


Рис. 3.17: Бифуркационная диаграмма суперкритической вилообразной бифуркации в системе (29).

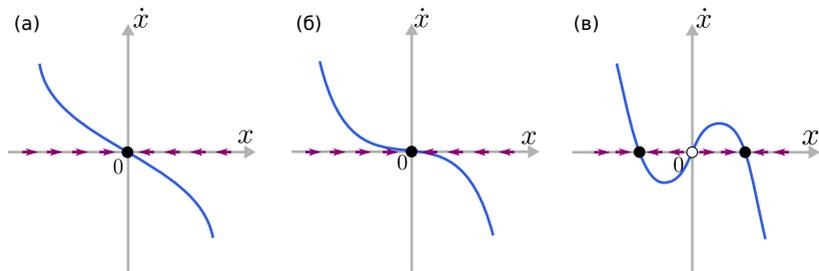


Рис. 3.18: Фазовый портрет системы (29) при суперкритической вилообразной бифуркации: (а)  $r < 0$ ; (б)  $r = 0$ ; (в)  $r > 0$ .

где  $r$  – бифуркационный параметр,  $x(t) \in \mathbb{R}$ . Положениями равновесия системы (30) являются  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = \sqrt{-r}$  и  $x_3^* = -\sqrt{-r}$ . При  $r < 0$  система (29) имеет три положения равновесия, тогда как при  $r > 0$  – только одно  $x_1^* = 0$ .

Исследуем устойчивость положений равновесия. Линеаризуем

систему (30) в окрестности точек равновесия  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  и  $x_3^*$ :

$$\dot{x} = A_{1,2,3}x, \text{ где}$$

$$A_1 = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_1^*} = r, \quad A_2 = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_2^*} = -2r,$$

$$A_3 = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_3^*} = -2r.$$

Откуда получаем, что

$$x_1^* = 0 \Rightarrow \dot{x} = rx \Rightarrow \text{устойчиво } \forall r < 0 \text{ и } \forall r > 0 \text{ неустойчиво};$$

$$x_2^* = \sqrt{-r} \Rightarrow \dot{x} = -2rx \Rightarrow \text{существует и устойчиво } \forall r < 0;$$

$$x_3^* = -\sqrt{-r} \Rightarrow \dot{x} = -2rx \Rightarrow \text{существует и устойчиво } \forall r < 0.$$

Добавим к системе (29) второе уравнение  $\dot{y} = -y$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = rx + x^3, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

При  $r > 0$  данная система имеет единственное положение равновесия  $(0; 0)$ , которое является седлом. Если значение параметра  $r$  становится отрицательным, то нулевое положение равновесия приобретает устойчивость и становится устойчивым узлом. При этом возникают два новых неустойчивых положения равновесия (два седла), а именно  $(\sqrt{-r}; 0)$  и  $(-\sqrt{-r}; 0)$ . Бифуркационная диаграмма данной бифуркации представлена на рис. 3.17.

На рис. 3.19 изображен фазовый портрет системы (30) при различных значениях бифуркационного параметра  $r$ . Бифуркационная диаграмма субкритической вилообразной бифуркации представлена на рис. 3.20.

### 3.7.5 Бифуркация Андронова-Хопфа

Теперь исследуем одну из самых известных бифуркаций на плоскости. Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y + cx(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \mu y + cy(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (31)$$

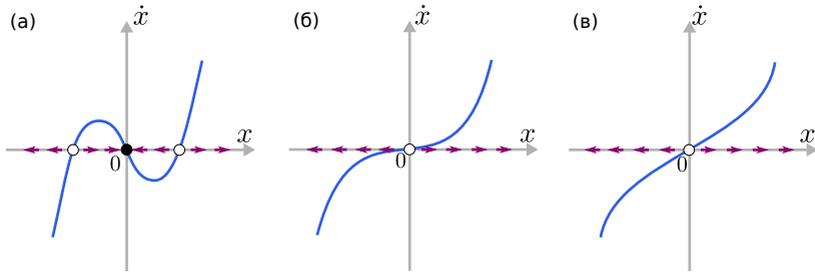


Рис. 3.19: Фазовый портрет системы (30) субкритической вилообразной бифуркации: (а)  $r < 0$ ; (б)  $r = 0$ ; (в)  $r > 0$ .

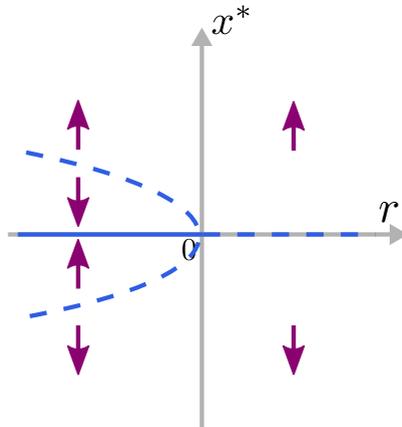


Рис. 3.20: Бифуркационная диаграмма субкритической вилообразной бифуркации в системе (30).

Сначала сфокусируемся на случае при  $c = 0$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y, \\ \dot{y} = x + \mu y. \end{cases} \quad (32)$$

Система (32) имеет единственное положение равновесия  $(0, 0)$ . Исследуем данное положение равновесия на устойчивость. Для этого

запишем систему (32) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az, \\ z &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (33)$$

Найдем собственные числа матрицы  $A$ :

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - \mu & 1 \\ -1 & \lambda - \mu \end{vmatrix} = (\lambda - \mu)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \mu \pm i.$$

Следовательно, при  $\mu = 0$  положение равновесия является центром, при  $\mu < 0$  – устойчивым фокусом, а при  $\mu > 0$  – неустойчивым фокусом.

Теперь рассмотрим случай, когда  $c \neq 0$ , и перепишем систему (31) в полярных координатах, сделав замену  $x = \rho \cos(\varphi)$  и  $y = \rho \sin(\varphi)$ :

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\mu + c\rho^2), & \rho \geq 0, \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases} \quad (34)$$

Получили два независимых уравнения. Первое уравнение в системе  $\rho = \rho(\mu + c\rho^2)$  имеет два положения равновесия:  $\rho_1^* = 0$  и  $\rho_2^* = \sqrt{-\mu/c}$ . Точка  $\rho_1^*$  соответствует началу координат, а точка  $\rho_2^*$  соответствует радиусу предельного цикла.

Рассмотрим систему при  $c < 0$ . С одной стороны, при  $\mu < 0$  положение равновесия  $(0; 0)$  является устойчивым фокусом, предельного цикла не существует. С другой стороны, если  $\mu$  становится положительным, начало координат теряет устойчивость и становится неустойчивым фокусом. При этом рождается устойчивый предельный цикл с радиусом  $\rho_2^*$ . Как видно из рис. 3.21 положение равновесия  $(0; 0)$  потеряло устойчивость при  $\mu > 0$ , при этом траектории системы (31) остаются ограниченными из-за появления устойчивого предельного цикла с центром в начале координат. Данный тип бифуркации носит название *суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа*.

Теперь рассмотрим положительные значения параметра  $c > 0$ . С одной стороны, при  $\mu < 0$  положение равновесия  $(0; 0)$  является

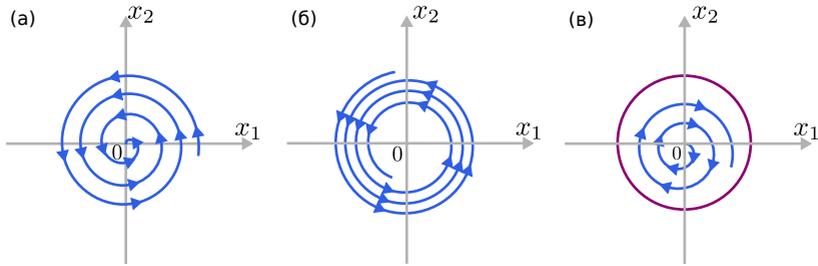


Рис. 3.21: Фазовый портрет системы (31) при суперкритической бифуркации: (а)  $\mu < 0$ ; (б)  $\mu = 0$ ; (в)  $\mu > 0$ .

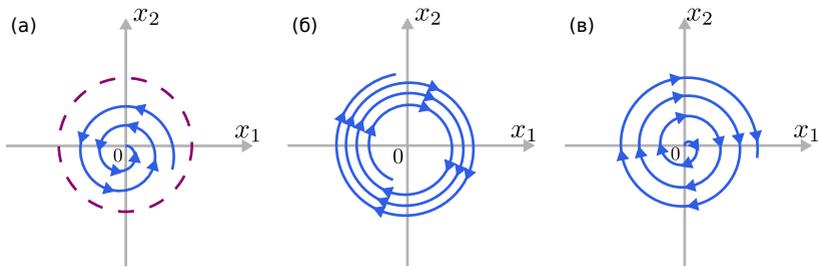


Рис. 3.22: Фазовый портрет системы (31) при субкритической бифуркации: (а)  $\mu < 0$ ; (б)  $\mu = 0$ ; (в)  $\mu > 0$ .

устойчивым фокусом (локально), и существует неустойчивый предельный цикл с радиусом  $\rho_2^*$ . С другой стороны, если  $\mu$  становится положительным, предельный цикл исчезает, и начало координат становится глобально неустойчивым фокусом. Последнее свидетельствует о том, что траектории системы (31) неограниченны при  $c > 0$  и  $\mu > 0$ . Данный тип бифуркации носит название *субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа*. (рис. 3.22).

Подробнее о теории бифуркаций можно почитать в работах [4, 24, 48, 49].

### 3.8 Практическая работа №3

**Задание.** Дана нелинейная система:

1. Вариант.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= rx_2 + x_1 - x_1^2 + x_1x_2;\end{aligned}$$

2. Вариант.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1, \\ \dot{x}_2 &= rx_2 + x_2^3 - x_2^5;\end{aligned}$$

3. Вариант.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1, \\ \dot{x}_2 &= rx_2 - x_2^3 + x_2^5;\end{aligned}$$

4. Вариант.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - (x_1^2 - r)x_2;\end{aligned}$$

5. Вариант.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - (x_2^2 - r)x_2;\end{aligned}$$

6. Вариант.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_1^3 - x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + r;\end{aligned}$$

7. Вариант.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -rx_1 + x_1^2x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2x_2;\end{aligned}$$

8. Вариант.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + (r + \cos x_1)x_2;\end{aligned}$$

9. Вариант.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + (r + \cos x_2)x_2;\end{aligned}$$

10. Вариант.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2^3 + x_1x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + r;\end{aligned}$$

Найти возможные бифуркации в системе. Построить фазовые портреты при различных бифуркационных параметрах.

### 3.8.1 Пример выполнения практической работы

**Задание.** Дана нелинейная система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = rx_1 - x_1x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1x_2 - x_2. \end{cases} \quad (35)$$

- Найти возможные бифуркации в системе. Определить тип положений равновесия для всех значений бифуркационного параметра  $r$ .
- Построить фазовые портреты систем при различных бифуркационных параметрах.

Рассмотрим первый пункт. Для начала найдем положения равновесия системы (35):

$$\begin{cases} rx_1 - x_1x_2 = 0, \\ x_1x_2 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{положения равновесия: } \begin{cases} x_1^* = 0, \\ x_2^* = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^* = 1, \\ x_2^* = r. \end{cases}$$

Данные положение равновесия существуют при любых значениях параметра  $r$ .

Линеаризуем систему (35) вблизи точек равновесия и найдем возможные бифуркации:

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \left[ \begin{array}{cc} r - x_2 & -x_1 \\ x_2 & x_1 - 1 \end{array} \right] \Big|_{x=x^*},$$

где  $x = \text{col}\{x_1, x_2\}$ . Рассмотрим точку  $(0, 0)$ :

$$A = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - r & 0 \\ 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = r, \\ \lambda_2 = -1. \end{cases}$$

Из последнего получаем, что при  $r \in (-\infty, 0)$  исследуемое положение равновесия  $(0, 0)$  является устойчивым узлом, а при  $r \in (0, +\infty)$  – седлом.

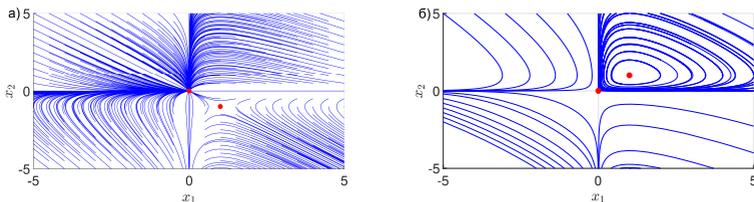


Рис. 3.23: Фазовый портрет системы (35): а) при  $r < 0$ ; б) при  $r > 0$ .

Рассмотрим точку  $(1, r)$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ r & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -r & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \sqrt{-r}, \\ \lambda_2 = -\sqrt{-r}. \end{cases}$$

Получаем, что при  $r \in (-\infty, 0)$  исследуемое положение равновесия  $(1, r)$  является седлом, а при  $r \in (0, +\infty)$  – центром. То есть при положительных значениях параметра  $r$  система требует дополнительного исследования, так как мы не можем заключить, какого типа будет положение равновесия  $(1, r)$  у нелинейной системы. Проведем это исследование численно.

Результаты моделирования представлены на рис. 3.23. Таким образом, при отрицательных значениях параметра  $r$  нелинейная система имеет устойчивый узел и седло на фазовой плоскости (см. рис. 3.23, а), а при положительных значениях параметра  $r$  – центр и седло (см. рис. 3.23, б)

## 3.9 Хаотические системы

### 3.9.1 От колебаний – к хаосу

В 70-х годах XX века в науку о математических моделях вошло новое понятие, перевернувшее многие привычные представления, –

понятие *хаоса* (точнее, детерминированного хаоса). Хаотические системы предоставили исследователям новый класс моделей неопределенности, отличающихся по своим свойствам от стохастических моделей. Если в детерминированной модели будущую траекторию можно предсказать на сколь угодно большое время вперед, зная текущее состояние системы, а в стохастической модели точный прогноз, вообще говоря, невозможен даже на сколь угодно малое время, то в хаотической модели ошибка прогноза растет экспоненциально и, следовательно, возможен прогноз на ограниченное время вперед, определяемое допустимой ошибкой прогноза. Процессы в хаотических моделях имеют вид нерегулярных колебаний, в которых меняется, «плавает» как частота, так и амплитуда.

В течение нескольких десятилетий линейные модели колебаний и нелинейные модели с предельными циклами удовлетворяли потребности инженеров. Считалось, что они описывают все возможные типы колебаний детерминированных систем. Это убеждение поддерживалось и математическими результатами: например, известная теорема Пуанкаре–Бендиксона [1, 3, 7, 14, 26] утверждает, что единственно возможные виды ограниченных установившихся движений в непрерывных системах второго порядка – это либо состояние равновесия, либо предельный цикл.

Однако в середине XX века сами математики обнаружили, что уже для систем третьего порядка это не так: в системе становятся возможными весьма сложные движения – ограниченные непериодические колебания. Настоящий переворот начался с работы физика Е. Лоренца [70], опубликованной в 1963 г., где было показано, что качественный характер явлений атмосферной турбулентности, описываемых сложными уравнениями в частных производных Навье–Стокса, может быть передан простой нелинейной моделью третьего порядка (*уравнение Лоренца*):

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy. \end{cases} \quad (36)$$

Решения системы (36) при некоторых значениях параметров (например, при  $\sigma = 10$ ,  $r = 97$ ,  $b = 8/3$ ) выглядят как нерегулярные колебания (рис. 3.24, а, где изображен график  $x(t)$ ). Траектории в пространстве состояний (фазовом пространстве) могут

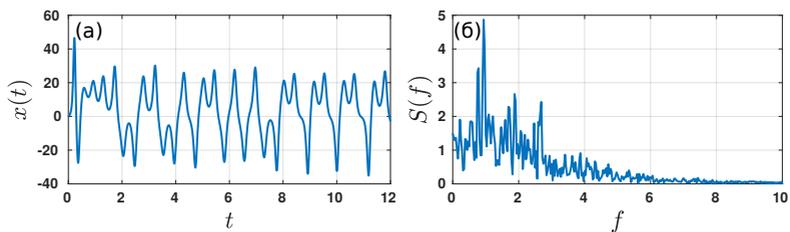


Рис. 3.24: Хаотический процесс  $x(t)$  в системе Лоренца и его спектр.

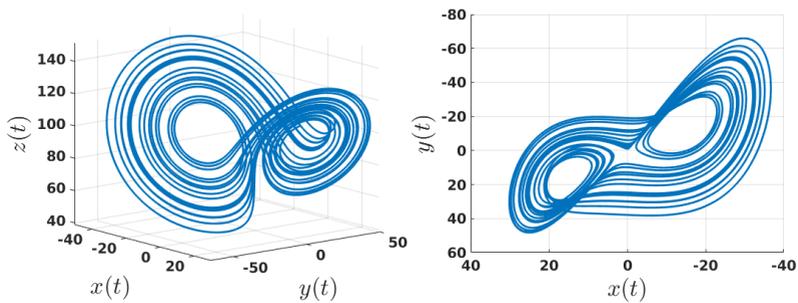


Рис. 3.25: Хаотический аттрактор системы Лоренца.

приближаться к предельному множеству (*аттрактору*), имеющему весьма причудливое строение (рис. 3.25). Внимание многих физиков и математиков, а затем и инженеров к подобным моделям было привлечено после работы Д. Рюэля и Ф. Такенса [76], опубликованной в 1971 г., которые назвали такие аттракторы «странными», а также работы Т. Ли и Дж. Йорке [69] (1975), которые ввели термин «хаос» для обозначения подобных нерегулярных явлений в детерминированных системах. Заметим, что основным результатом работы [69] является частным случаем теоремы киевского математика А.Н. Шарковского [57], опубликованной в 1964 г. Серьезные исследования хаотических явлений были выполнены также в 60–70-х годах в России А.Н. Колмогоровым, В.И. Арнольдом, Я.Г. Синаем, Ю.И. Неймарком, Л.П. Шильниковым и их учениками. В дальнейшем хаотическое поведение было обнаружено в огромном количестве систем в механике, лазерной физике и радиофизике, химии, биологии и медицине, в электронных цепях и т.д. [13, 29, 32, 34, 39, 43, 54, 58, 60, 61, 62, 71, 73, 74, 77]. Разработанные новые методы аналитического и численного исследования систем показали, что хаос – это отнюдь не исключительный вид поведения нелинейной системы. Грубо говоря, хаотические движения возникают, когда траектории системы глобально ограничены и локально неустойчивы. В хаотической системе сколь угодно малое начальное расхождение траекторий не остается малым, а в течение некоторого времени растет экспоненциально. Частотный спектр хаотической траектории является непрерывным (рис. 3.24, б). Во многих случаях подобные нерегулярные, непериодические колебания лучше отражают свойства процессов, протекающих в реальных системах. Опять-таки следует отметить, что «на глаз» отличить хаотический процесс от квазипериодического может быть не менее трудно, чем отличить квазипериодический процесс от периодического.

### 3.9.2 Определение хаотической системы

Терминология в области хаотических моделей еще не устоялась, и существует несколько различных определений хаотических систем. Приведем одно из простейших.

Рассмотрим динамическую систему в непрерывном времени

$$\dot{x} = F(x), \quad (37)$$

где  $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния системы,  $0 \leq t < \infty$ .

Замкнутое множество  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  называется *аттрактором* системы (37), если: а) существует открытое множество  $\Omega_0 \supset \Omega$ , такое что все траектории  $x(t)$  системы (41), начинающиеся в  $\Omega_0$ , определены при всех  $t \geq 0$  и стремятся к  $\Omega$  при  $t \rightarrow \infty$  (т.е.  $\text{dist}(x(t), \Omega) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , если  $x(0) \in \Omega_0$ , где  $\text{dist}(x, \Omega) = \inf_{y \in \Omega} \|x - y\|$  – расстояние от точки  $x$  до множества  $\Omega$ ); б) никакое собственное подмножество  $\Omega$  этим свойством не обладает.

Аттрактор называется *странным*, если он ограничен и любая траектория, начинающаяся на нем, неустойчива по Ляпунову.

Система называется *хаотической*, если у нее существует хотя бы один странный аттрактор.

Аналогичные определения даются для систем, дискретных по времени.

Неустойчивость по Ляпунову характеризует основное свойство хаотических колебаний, называемое «сверхчувствительностью», или «чувствительной зависимостью» от начальных условий: любые две сколь угодно близкие траектории обязательно удаляются друг от друга на конечное расстояние.

Имеются и другие определения странных аттракторов и хаоса. Например, часто в определение странного аттрактора включают дополнительные требования: существование траекторий (или семейства периодических траекторий), всюду плотных в  $\Omega$ , топологическую транзитивность и т.д., подчеркивающие наличие свойства «перемешивания» траекторий. Результаты Г.А. Леонова [26] показывают, что вместо отсутствия устойчивости по Ляпунову при определении странного аттрактора целесообразно требовать отсутствия так называемой *устойчивости по Жуковскому*, допускающей разную скорость течения времени на разных траекториях системы. Однако строго доказать хаотичность системы непросто, даже пользуясь простейшим определением. Для некоторых общепризнанных хаотических систем (например, для системы Лоренца (36)) доказательства хаотичности весьма громоздки, хотя численных и экспериментальных подтверждений накоплено предостаточно. Поэтому основным

методом изучения хаотических систем остается численное исследование – имитационное моделирование и оценка различных характеристик (см. п. 3.9.3). Приведем несколько примеров хаотических систем.

**Пример 1. Система (цепь) Чуа.** В 1983 году специалисты по электронным цепям Л. Чуа и Т. Мацумото предложили простую электронную цепь с одним нелинейным элементом, способную генерировать весьма разнообразные, в том числе хаотические, колебания.

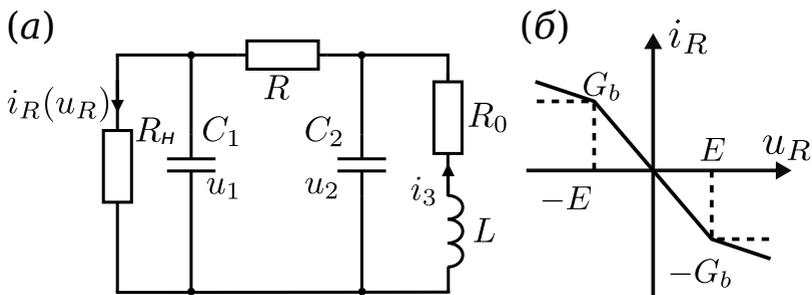


Рис. 3.26: Электрическая схема цепи Чуа (а) и вольт-амперная характеристика нелинейного резистора (б).

Электрическая схема цепи Чуа представлена на рис. 3.26, а. Эта цепь содержит нелинейный резистор  $R_n$  (*диод Чуа*), вольт-амперная характеристика которого отражена на рис. 3.26, б. Нетрудно убедиться, что уравнения Кирхгофа для этой цепи имеют вид

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = \frac{1}{C_1} \left( \frac{u_2 - u_1}{R} - i_R(u_1) \right), \\ \frac{du_2}{dt} = \frac{1}{C_2} \left( \frac{u_1 - u_2}{R} + i_3 \right), \\ \frac{di_3}{dt} = -\frac{1}{L} (u_2 + R_0 i_3). \end{cases}$$

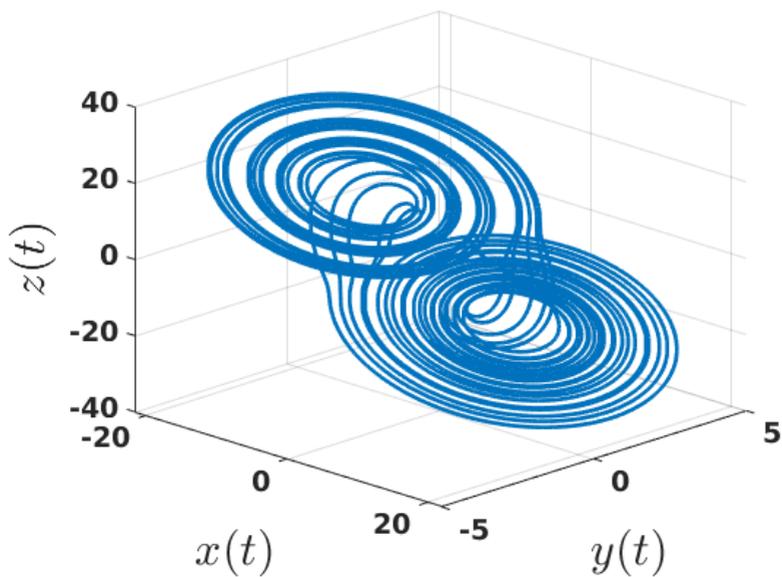


Рис. 3.27: Аттрактор системы Чуа (38).

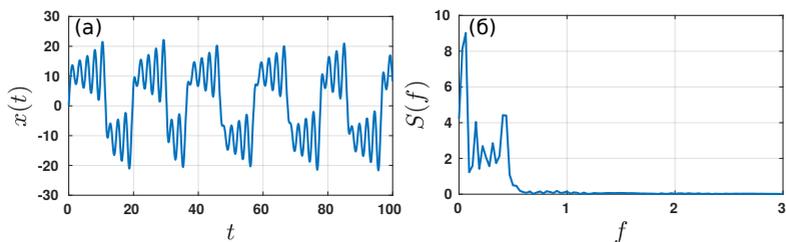


Рис. 3.28: Хаотический процесс  $x(t)$  в системе Чуа и его спектр.

Пренебрегая активным сопротивлением катушки индуктивности и переходя к безразмерным величинам, получим математическую модель цепи Чуа в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = p(y - x - f(x)), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -qy, \end{cases} \quad (38)$$

где  $x, y, z$  – безразмерные переменные, пропорциональные напряжениям на емкостях и току через индуктивность;  $f(x) = M_1x + 0.5(M_1 - M_0)(|x + 1| - |x - 1|)$ . При  $p = 9$ ,  $q = 14.3$ ,  $M_1 = -6/7$ ,  $M_0 = 5/7$ , траектории системы (38) демонстрируют хаотическое поведение (рис. 3.27, 3.28).

**Пример 2.** Разнообразные хаотические колебания можно генерировать, подавая гармонический сигнал на вход нелинейных осцилляторов, например, заменяя ноль в правых частях уравнений (23)–(25) синусоидальной функцией:

$$z(t) = A \sin(\omega_0 t). \quad (39)$$

При некоторых значениях частоты и амплитуды возбуждения происходит «размазывание» предельного цикла, и колебания в нелинейной системе становятся хаотическими.

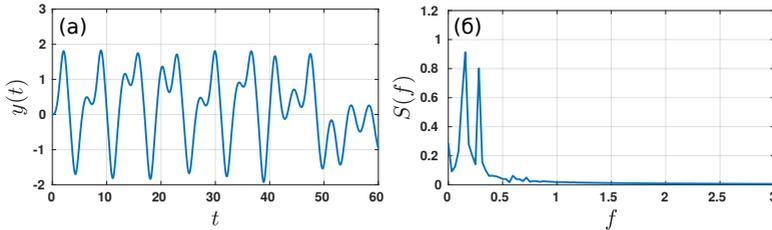


Рис. 3.29: Решение уравнения Дуффинга при гармоническом воздействии и его спектр.

На рис. 3.29, 3.30 представлены колебания, возникающие при подаче на систему Дуффинга (24) воздействия (39) с параметрами:  $p = 0.4$ ,  $q = 1.1$ ,  $q_0 = 1$ ,  $A = 1.8$ ,  $\omega_0 = 1.8$  (на рис. 3.29, а изображен график процесса  $y(t)$ , на рис. 3.29, б – спектр  $y(t)$ , на

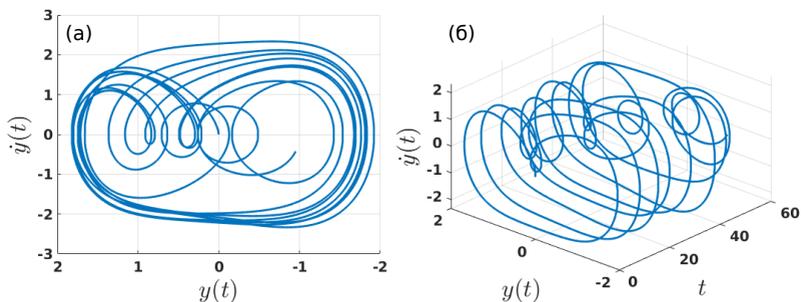


Рис. 3.30: Фазовый портрет и интегральная кривая решения уравнения Дуффинга при гармоническом воздействии.

рис. 3.30, а – фазовый портрет на плоскости  $(y, \dot{y})$ , на рис. 3.30, б – соответствующая *интегральная кривая*). Для дискретного времени примеры хаотических систем существуют для любой размерности состояния системы, даже при  $n = 1$ .

**Пример 3.** Дискретная система с квадратичной правой частью

$$x_{k+1} = \lambda x_k(1 - x_k), \quad x_k \in \mathbb{R}, \quad (40)$$

построенная с помощью так называемого логистического отображения  $F(x) = \lambda x(1 - x)$ , является хаотической [29, 32, 58] при  $3.57 < \lambda < 4$ . Ее аттрактором является отрезок  $[0, 1]$ .

**Пример 4.** Система

$$x_{k+1} = \{Mx_k\}, \quad (41)$$

где через  $\{A\}$  обозначается дробная часть вещественного числа  $A$ , является хаотической при любом  $M > 1$ . Система (41) часто используется для генерации псевдослучайных чисел, возможно, первого практического применения хаоса. Это применение основано на том, что при любом начальном условии  $x_0$ , несоизмеримом с  $M$ , доля точек последовательности (41), попавших в некоторый интервал, лежащий в отрезке  $[0, 1]$ , пропорциональна длине этого интервала [45]. Таким образом, если частоту попадания точек в интервал считать оценкой некоторой вероятности, то совокупность таких вероятностей будет задавать равномерное распределение на  $[0, 1]$ .

### 3.9.3 Критерии хаотичности

Как уже было сказано, основным критерием хаотичности является локальная неустойчивость, т.е. разбегание близких вначале траекторий. Соответственно, основной характеристикой хаотичности является скорость разбегания, определяемая так называемым *старшим показателем Ляпунова*. Показатели Ляпунова определяются для заданной «опорной» траектории  $\bar{x}(t)$  системы (37) с начальным условием  $\bar{x}(0) = x_0$ . Для этого составляется уравнение в вариациях (система, линеаризованная вблизи  $\bar{x}(t)$ ):

$$\frac{d}{dt} \delta x = W(t) \delta x, \quad (42)$$

где  $\delta x = x - \bar{x}(t)$ ;  $W(t) = \partial F(x(t))/\partial x$  – матрица Якоби системы (37) (матрица частных производных от правых частей), вычисленная вдоль решения  $\bar{x}(t)$ . Предполагается, что частные производные от  $F(x)$  существуют, т.е. правые части (37) – гладкие функции. Задав начальное отклонение  $z = \delta x(0)$ , можно вычислить величину

$$\alpha(x_0, z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta x(t)\|}{\|z\|}, \quad (43)$$

характеризующую скорость экспоненциального роста решений (42) в направлении  $z$  и называемую *характеристическим показателем (ляпуновской экспонентой) в направлении  $z$*  [15, 29, 32, 58].

Еще А.М. Ляпунов показал, что при небольших дополнительных предположениях предел в (43) существует, конечен для любого  $z \in \mathbb{R}^n$  и не зависит от начального выбора точки  $x_0$  на траектории  $x(t)$ . Более того, число различных характеристических показателей конечно, их можно пронумеровать в порядке убывания  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ , и существует базис  $z_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, n$ , для которого  $\alpha(x_0, z_i) = \alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Наиболее важен старший ляпуновский показатель  $\alpha_1$ . Если  $\alpha_1 > 0$  вдоль ограниченного решения  $\bar{x}(t)$ , плотного в аттракторе  $\Omega$ , то это решение неустойчиво по Ляпунову, а аттрактор является странным. При этом величина  $\alpha_1$  характеризует степень неустойчивости, или, другими словами, показатель экспоненциальной чувствительности к начальным данным. Для линейной системы с постоянной матрицей  $\dot{x} = Ax$  и нулевого опорного решения  $\bar{x}(t) = 0$ ,

очевидно,  $\alpha_1 = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A)$ , т.е.  $|\alpha_1|$  совпадает с обычной степенью устойчивости (или неустойчивости) системы.

Старший показатель  $\alpha_1$  может быть приближенно вычислен и без построения фундаментальных решений уравнений в вариациях:

$$\alpha_1 = \frac{1}{t} \ln \frac{\|x(t) - \bar{x}(t)\|}{\varepsilon}, \quad (44)$$

где  $x(t)$  – решение (37) с начальным условием  $x(0)$ ;  $\|x(0) - \bar{x}(0)\| = \varepsilon$ , причем  $t$  – достаточно велико, а  $\varepsilon > 0$  – достаточно мало. Для повышения точности расчета можно вычислять среднее правых частей (44) при разных начальных условиях  $x_0$ , взятых на траектории  $\bar{x}(t)$ . Тогда  $t$  необязательно брать очень большим [32].

Показатели Ляпунова характеризуют прогнозируемость траекторий системы. Действительно, траектория  $\bar{x}(t)$  аппроксимируется через время  $T$  другой траекторией с погрешностью  $\Delta$ , если

$$T \leq \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{\Delta}{\varepsilon}, \quad (45)$$

где  $\varepsilon$  – начальная погрешность. Следовательно, хаотическую траекторию можно спрогнозировать с заданной точностью на некоторое время вперед. Это принципиально отличает хаотические системы как модели неопределенности от стохастических систем, в которых ошибка прогноза может, вообще говоря, принимать сколь угодно большие значения, даже при сколь угодно малом *горизонте* (время прогноза).

Другой важной характеристикой хаотической системы является фрактальная размерность аттрактора, характеризующая его «густоту», или «пористость». Для ее подсчета аттрактор  $\Omega$  покрывается кубиками размера  $\varepsilon$ . Пусть  $N(\varepsilon)$  – количество кубиков в покрытии. Вычислим величину

$$\mu(\Omega, d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \varepsilon^d. \quad (46)$$

(Если предел не существует, то в (46) берется нижний предел – наименьший из частных пределов по подпоследовательностям.) Можно показать, что существует число  $d_f > 0$ , такое что  $\mu(\Omega, d) = +\infty$ , при  $d < d_f$ ,  $\mu(\Omega, d) = 0$  при  $d > d_f$ . Это число называется *фрактальной размерностью*, или *емкостью*, множества  $\Omega$ . Идея фрактальной размерности лежит в нетрадиционном представлении масштаба

и размерности. Например, если рассмотреть линию и поделить ее на три равные части, то каждая часть будет длиной в 3 раза меньше, чем длины изначальной линии. Также это имеет место в плоскости. Если вычислить площадь квадрата, а затем измерить площадь квадрата со стороной длиной в три раза меньшей длины стороны изначального квадрата, то она окажется в 9 раз меньше площади изначального квадрата. Из определения следует, что  $N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-d_f}$ , где символ  $\propto$  означает пропорциональность. Это правило масштаба подтверждает традиционные правила геометрии масштаба, поскольку для линии —  $N = 3$ , когда  $\varepsilon = 1/3$ , то  $d_f = 1$ , и для квадратов, потому что  $N = 9$ , когда  $\varepsilon = 1/3$ ,  $d_f = 2$ .

Таким образом, емкость можно определить из соотношения

$$d_f = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log_{\varepsilon} N(\varepsilon) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}.$$

Существуют множества, у которых  $d_f$  — дробная величина. Такие множества были названы Б. Мандельбротом *фрактальными*, или *фракталами*. Примерами фракталов являются странные аттракторы: для системы Лоренца  $d_f \approx 2.07$ , а для цепи Чуа  $d_f \approx 2.81$ . Известны математические результаты, утверждающие, что множество с фрактальной размерностью  $d_f$  может быть размещено без самопересечений в евклидовом пространстве, имеющем размерность не выше, чем  $2d_f + 1$ . Если же разрешить самопересечения, то размерность объемлющего пространства может быть снижена до  $d_f + 1$ . Эти результаты важны при построении модели системы по экспериментальным данным; они означают, что поведение траекторий на аттракторе, имеющем фрактальную размерность  $d_f$ , может быть описано моделью в пространстве состояний с размерностью, не превышающей  $2d_f + 1$ . Более подробно о различных видах фрактальной размерности и о способах ее вычисления можно прочесть в [29, 32, 58].

### 3.9.4 Зачем нужны хаотические модели?

Из предыдущего изложения ясно, что хаотические модели следует использовать для описания непериодических колебательных процессов с непостоянными, меняющимися характеристиками (например, частотой и фазой). Существующие методы позволяют оценивать эти

характеристики по результатам измерений. При этом такая величина, как частота колебания, становится «нечеткой» и уступает место спектру, который является непрерывным. Вводятся новые важные величины: *старший ляпуновский показатель* (степень неустойчивости), характеризующий скорость разбегания траекторий и, следовательно, время прогнозируемости процесса; *фрактальная размерность*, характеризующая «пористость» клубка траекторий. Важно, что известные хаотические модели имеют небольшое число параметров, а процессы в них обладают малой (несколько единиц) фрактальной размерностью. Это повышает надежность и прогнозирующую силу моделей. Перечислим некоторые из уже известных применений хаотических моделей.

**Описание нерегулярного поведения реальных систем.** На сегодняшний день известен целый ряд реальных физических устройств и процессов, проявляющих при некоторых условиях хаотическое поведение. Приведем несколько примеров:

- газовые или полупроводниковые лазеры в так называемых многомодовых режимах [39];
- механические системы, состоящие из нескольких связанных осцилляторов (например, маятников), а также системы с ударами и люфтами [29, 32];
- электронные схемы с активными элементами, например, полупроводниковыми приборами с отрицательным дифференциальным сопротивлением (такими как туннельные диоды, диоды Ганна и т.п.) [32, 39, 61];
- химические и физико-химические реакции с нелинейной кинетикой, например, так называемая *реакция Белоусова–Жаботинского* [34, 62];
- временные ряды в экономике и финансах (например, бизнес-циклы, цены на акции, обменные курсы валют [43, 60, 71, 73, 74]). Заметим, что в экономических и финансовых приложениях хаотические модели в последнее время несколько потеснили традиционные для этих областей стохастические модели.

**Генерация нерегулярных сигналов.** Во многих технических системах возникает необходимость использования псевдослучайных чисел и сигналов [45]. В качестве генераторов псевдослучайных чисел можно использовать хаотические системы.

Простейший подход к построению хаотических генераторов состоит в том, что берется динамическая система, описываемая одной из типовых хаотических моделей (см. п. 3.9.1), и по внешнему виду траекторий выбирается та, в которой качественный характер колебаний наиболее близок к желаемому. После этого путем подбора параметров моделей устанавливаются желаемые качественные характеристики колебаний (амплитуда, спектр и т.д.). Использование характеристик хаотической динамики (показатели Ляпунова, фрактальные размерности и т.п.) позволяет задавать дополнительные свойства шумов и помех при их генерации. Заметим, что «на глаз» квазипериодические колебания с большим числом составляющих гармоник и хаотические колебания бывает трудно различить. В то же время, как и при моделировании нерегулярных процессов, малая размерность и малое число параметров хаотических моделей дают им дополнительные преимущества перед линейными моделями с большим числом гармоник.

### 3.10 Вопросы для самоконтроля

- Сколько положений равновесия может быть у нелинейной системы?
- Приведите примеры типичных нелинейных явлений.
- Какие проблемы могут возникать при решении нелинейной системы?
- Какие функции следует использовать для описания нелинейных систем с целью избежания проблем существования и единственности решения?
- Чем отличается локальная устойчивость от глобальной?
- Что такое линеаризация?

- Как исследовать положение равновесия на локальную устойчивость?
- Какие методы исследования глобальной устойчивости Вы знаете?
- Приведите примеры типов положений равновесия системы второго порядка.
- Зачем нужны линейные матричные неравенства?
- Каким образом можно проверить, является ли матрица положительно (отрицательно) определенной?
- Докажите глобальную устойчивость системы  $\dot{x} = -x - x^3$ .
- Опишите методику исследования динамики системы на примере модели популяции.
- Что такое автоколебания?
- Чем отличаются нелинейные колебательные системы от линейных?
- Когда линейная система является колебательной?
- Что такое бифуркация?
- В чем особенности бифуркации Андронова-Хопфа?
- Приведите примеры хаотических систем.
- Что такое аттрактор?
- Какая система является хаотической?
- Какие критерии хаотичности Вы знаете?

# Глава 4

## Дискретные системы управления

### 4.1 Дискретные модели

Система может быть дискретной или непрерывной по входам, выходам и по времени в зависимости от того, дискретными или непрерывными являются множества  $U, Y, T$  соответственно. Под дискретным понимается конечное или счетное<sup>1</sup> множество, тогда как под *непрерывным* мы понимаем множество объектов, для которого адекватной моделью является отрезок, луч или прямая линия, т.е. связанное числовое множество. Если система имеет несколько входов и выходов, то это значит, что соответствующие множества  $U, Y$  лежат в многомерных пространствах, т.е. непрерывность и дискретность понимаются покомпонентно.

На рис. 4.1, а черным цветом изображена непрерывная функция (множества  $U, T$  – непрерывные), а красным цветом изображена дискретная по времени функция (в данном случае множество  $U$  – непрерывное, а множество  $T$  – дискретное). Также дискретным может быть и множество значений функции (см. рис. 4.1, б). В данном случае множество  $T$  является непрерывным, а множество  $U$  – дискретным. В дискретном случае функция является кусочно-постоянной, т.е. значения функции на определенных промежутках времени не меняются. Поэтому в случае дискретных систем вместо функций имеет смысл работать с последовательностями.

---

<sup>1</sup> Строго говоря, счетное множество представляет собой некоторую идеализацию, которую невозможно реализовать практически из-за конечности размеров технических систем и пределов человеческого восприятия. Такие идеализированные модели (например, множество натуральных чисел  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ) имеет смысл вводить для множеств с конечным, но заранее не ограниченным (или неизвестным) числом элементов.

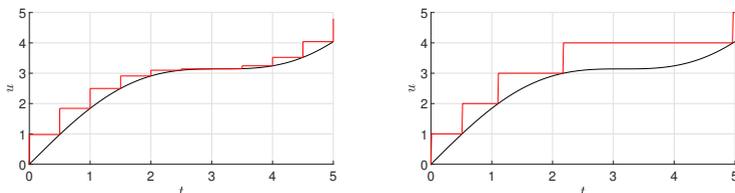


Рис. 4.1: Примеры непрерывной и дискретной по времени (или по значению) функций.

Удобство числового множества как модели реальных совокупностей объектов состоит в том, что на нем естественным образом определяются несколько отношений, формализующих реально встречающиеся отношения между реальными объектами. Например, отношения близости, сходимости формализуют понятия похожести, сходства объектов и могут быть заданы посредством функции расстояния (метрики)  $\rho(x, y)$  (например,  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ ). Числовые множества являются упорядоченными: отношение порядка следования ( $x \leq y$ ) формализует предпочтение одного объекта другому. Наконец, над элементами числовых множеств определены естественные операции<sup>1</sup>, например, линейные:  $x + y$ ,  $x \cdot y$ . Если для реальных объектов на входе и выходе также имеют смысл аналогичные операции, то естественным образом возникают требования к моделям быть согласованными с этими операциями и сохранять их результаты. Так мы приходим, например, к линейным моделям:  $y = au + b$ ,  $\dot{y} = ay + bu$ ,  $y_{k+1} = ay_k + bu_k$  и т.д., являющимся простейшими моделями многих процессов.

Рассмотрим простейшие примеры построения дискретных моделей.

**Пример 1.** Рассмотрим работу турникета на входе в метро. В первом, грубом, приближении множество значений входа этой системы имеет два элемента: человек с жетоном  $u_1$  и человек без жетона  $u_2$ , т.е.  $U = \{u_1, u_2\}$ . После небольшого размышления становится

<sup>1</sup> Формально понятие операции является частным случаем понятия отношения между элементами множеств. Например, операция сложения двух чисел задает трехместное (тернарное) отношение  $R$ : тройка чисел  $(x, y, z)$  принадлежит отношению  $R$  (пишем  $(x, y, z) \in R$ ), если  $z = x + y$ .

ся ясно, что следует включить еще отсутствие пассажира  $u_0$ , т.е.  $U = \{u_0, u_1, u_2\}$ . Множество значений выхода содержит элементы «открыто»  $y_0$  и «закрыто»  $y_1$ . Таким образом,  $Y = \{y_0, y_1\}$ , и система является дискретной. В простейшем случае можно пренебречь памятью системы и описывать ее статической моделью, имеющей вид таблицы или графа:

| $u(t)$ | $y(t)$ |
|--------|--------|
| $u_0$  | $y_0$  |
| $u_1$  | $y_0$  |
| $u_2$  | $y_1$  |

$u_0$  →  $y_0$

$u_1$  →  $y_0$

$u_2$  →  $y_1$

При необходимости хранить математическую модель системы в памяти компьютера ее можно представить (закодировать) в виде матрицы

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

или более экономно, в виде списка  $(0, 0, 1)$ , в котором на  $i$ -м месте стоит  $j$ , если значению входа  $u_{i-1}$  соответствует значение выхода  $y_j$ .

**Пример 2.** Если нас интересует более детально устройство самого турникета (т.е. системой является турникет), то придется учесть, что входными воздействиями (сигналами) для него являются опускание жетона и прохождение человека. Таким образом, система имеет два входа, каждый из которых может принимать два значения («есть» или «нет»). Пренебрегая возможностью одновременного опускания жетона и прохождения, вводим три значения входа:  $u_0$  – «нет воздействия»,  $u_1$  – «опускание жетона»,  $u_2$  – «прохождение». Множество  $Y$  можно задать так же, как и в примере 1. Однако теперь значение выхода  $y(t)$  не определяется только значением входа  $u(t)$ , а зависит еще и от того, был ли опущен жетон раньше, т.е. от значений  $u(s)$  при  $s < t$ . Система имеет «память». Простейший тип для описания дискретных систем с памятью – это конечный автомат [44]. Для его построения вводится конечное множество внутренних состояний системы  $X$ , определяющее «память». В данном случае в  $X$  достаточно включить два элемента:  $x_0$  – «жетон не был брошен»,  $x_1$  – «жетон был брошен». Значения состояния системы в

следующий момент времени и выхода в текущий момент зависят от текущих значений состояния и входа, т.е.

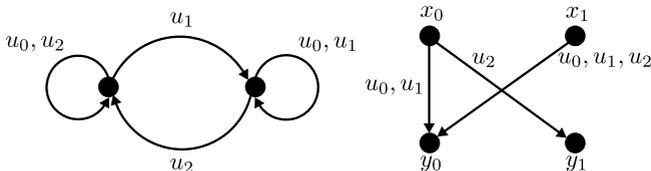
$$x(k+1) = F(x(k), u(k)), \quad y(k) = G(x(k), u(k)),$$

где  $k$  – номер момента времени такта. Отметим, что, выделив «текущий» и «следующий» моменты времени, мы незаметно ввели предположение о дискретности времени, которое при более детальном исследовании может оказаться неправомерным. Функцию переходов  $F(x, u)$  и функцию выходов  $G(x, u)$  можно задать таблично:

|             |   |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $F(x, u) :$ | <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td></td> <td><math>u_0</math></td> <td><math>u_1</math></td> <td><math>u_2</math></td> </tr> <tr> <td><math>x_0</math></td> <td><math>x_0</math></td> <td><math>x_1</math></td> <td><math>x_0</math></td> </tr> <tr> <td><math>x_1</math></td> <td><math>x_1</math></td> <td><math>x_1</math></td> <td><math>x_0</math></td> </tr> </table> |       | $u_0$ | $u_1$ | $u_2$ | $x_0$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_1$ | $x_1$ | $x_0$ |
|             | $u_0$   | $u_1$ | $u_2$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| $x_0$       | $x_0$   | $x_1$ | $x_0$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| $x_1$       | $x_1$   | $x_1$ | $x_0$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |

|             |   |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $G(x, u) :$ | <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td></td> <td><math>u_0</math></td> <td><math>u_1</math></td> <td><math>u_2</math></td> </tr> <tr> <td><math>x_0</math></td> <td><math>y_0</math></td> <td><math>y_0</math></td> <td><math>y_1</math></td> </tr> <tr> <td><math>x_1</math></td> <td><math>y_0</math></td> <td><math>y_0</math></td> <td><math>y_0</math></td> </tr> </table> |       | $u_0$ | $u_1$ | $u_2$ | $x_0$ | $y_0$ | $y_0$ | $y_1$ | $x_1$ | $y_0$ | $y_0$ | $y_0$ |
|             | $u_0$   | $u_1$ | $u_2$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| $x_0$       | $y_0$   | $y_0$ | $y_1$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| $x_1$       | $y_0$   | $y_0$ | $y_0$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |

Можно также построить графы переходов и выходов.



## 4.2 Устойчивость дискретных систем

Как уже было сказано выше, в случае дискретных систем вместо функций проще работать с последовательностями. Аргумент последовательности при этом можно писать в скобках, как в случае функции  $x(k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , так и в виде индекса  $x_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Рассмотрим простейшую дискретную систему с начальными данными  $x_0$ :

$$x_{k+1} = ax_k,$$

где  $x_k \in \mathbb{R}$ ,  $a$  – некоторый постоянный параметр. Найдем условия, при которых данная система будет устойчива. Для этого найдем

решение данной системы:

$$\begin{aligned}x_1 &= ax_0, \\x_2 &= ax_1 = a^2x_0, \\x_3 &= ax_2 = a^3x_0, \\&\dots \\x_k &= a^kx_0.\end{aligned}$$

Следовательно,  $x_k = a^kx_0$  – решение рассматриваемой системы. Здесь мы имеем дело с геометрической прогрессией. Соответственно для того, чтобы  $x_k \rightarrow 0$ , необходимо и достаточно, чтобы  $|a| < 1$ . Таким образом, мы получили условие асимптотической устойчивости для скалярной линейной дискретной системы. Как видно, оно отличается от условия устойчивости линейной непрерывной системы.

Теперь рассмотрим скалярную линейную дискретную систему с управлением:

$$x_{k+1} = ax_k + bu_k,$$

где  $u_k \in \mathbb{R}$  – управление, а  $b$  – некоторый постоянный параметр. Найдем решение данной системы:

$$\begin{aligned}x_1 &= ax_0 + bu_0, \\x_2 &= ax_1 + bu_1 = a^2x_0 + abu_0 + bu_1, \\x_3 &= ax_2 + bu_2 = a^3x_0 + a^2bu_0 + abu_1 + bu_2, \\&\dots \\x_k &= a^kx_0 + \sum_{i=1}^k a^{k-i}bu_{i-1}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$x_k = a^kx_0 + \sum_{i=1}^k a^{k-i}bu_{i-1}$$

является решением скалярной дискретной системы с управлением. Эта формула также называется *формулой Коши*.

Аналогичным образом получается формула Коши для векторного случая. Решением системы

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k,$$

где  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_k \in \mathbb{R}^m$ ,  $A, B$  – матрицы размера  $n \times n$  и  $n \times m$ , соответственно, является последовательность

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=1}^k A^{k-i} B u_{i-1}.$$

Условием устойчивости линейной векторной дискретной системы

$$x_{k+1} = Ax_k$$

является  $|\lambda_i(A)| < 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , т.е. все собственные числа матрицы  $A$  должны лежать внутри единичного круга на комплексной плоскости.

### 4.3 Формы записи дискретных систем

Для линейных дискретных систем существуют аналогичные линейным непрерывным системам формы записи:

**Линейная дискретная система в функциональной форме «вход-выход»**

$$y_{k+r} + a_1 y_{k+r-1} + \dots + a_r y_k = b_0 u_{k+q} + b_1 u_{k+q-1} + \dots + b_q u_k,$$

где  $u_k \in \mathbb{R}^m$  – вектор входов,  $y_k \in \mathbb{R}^l$  – вектор выходов,  $k = 0, 1, \dots$  – дискретное время. Для этой модели существует более краткая, эквивалентная запись:

$$a(\nabla)y_k = b(\nabla)u_k.$$

В данном случае  $\nabla$  является оператором сдвига по времени, а не оператором дифференцирования (как это было в случае непрерывных систем), т.е.  $\nabla x_k = x_{k+1}$ . Здесь  $a(\lambda) = \lambda^r + a_1 \lambda^{r-1} + \dots + a_r$ ,  $b(\lambda) = b_0 \lambda^q + b_1 \lambda^{q-1} + \dots + b_q$ ,  $a_i \in \mathbb{R}^{l \times l}$ ,  $b_i \in \mathbb{R}^{l \times m}$ .

**Линейная дискретная система в канонической форме пространства состояний:**

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\y_k &= Cx_k.\end{aligned}$$

Здесь  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_k \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_k \in \mathbb{R}^l$ . Матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  заданы и имеют соответствующие размерности.

Как и в случае непрерывных систем, можно осуществлять переходы между двумя этими формами записи. Все будет работать точно так же с точностью до оператора сдвига по времени.

### 4.3.1 Переход от системы в форме «вход-выход» к форме пространства состояний

Рассмотрим дискретную линейную систему в функциональной форме «вход-выход», которая имеет следующий вид:

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \dots + a_n y_k = b_1 u_{n-1+k} + b_2 u_{k+n-2} + \dots + b_n u_k. \quad (1)$$

Для простоты будем считать, что сигналы входа и выхода скалярны, т.е.  $y_k, u_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = 0, 1, \dots$

Для перехода от функциональной формы «вход-выход» к канонической форме пространства состояний достаточно просто представить систему в следующем виде:

$$\begin{cases}x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \\y_k = Cx_k,\end{cases}$$

где

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\text{матрица Фробениуса}}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}, \quad C = \underbrace{[1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]}_n.$$

Алгоритм получения матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$  аналогичен разделу 2.3.3.

### 4.3.2 Переход от системы в форме пространства состояний к форме «вход-выход»

Рассмотрим дискретную линейную систему в форме пространства состояний, которая имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \\ y_k = Cx_k. \end{cases} \quad (2)$$

Вспомним систему многочленов, рекуррентно выводимых из многочлена  $a(\lambda) = \det\{\lambda I - A\}$  (см. раздел 2.3.4):

$$\begin{aligned} a_{(1)}(\lambda) &= (a(\lambda) - a(0))\lambda^{-1} = \lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}, \\ a_{(k)}(\lambda) &= (a_{(k-1)}(\lambda) - a_{(k-1)}(0))\lambda^{-1}, \quad k = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

Применим  $n$  раз оператор сдвига вправо к переменной состояния  $x_k$  в уравнении (2) и умножим каждую из полученных производных на соответствующий коэффициент многочлена  $a(\lambda)$ . Получившийся результат может быть представлен в виде следующей таблицы:

|                  |  |
|------------------|--|
| $a_n \times$     | $x_k = Ix_k,$  |
| $a_{n-1} \times$ | $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k,$   |
| $a_{n-2} \times$ | $x_{k+2} = A^2x_k + ABu_k + Bu_{k+1},$   |
| $a_{n-3} \times$ | $x_{k+3} = A^3x_k + A^2Bu_k + ABu_{k+1} + Bu_{k+2},$   |
| $\dots$          | $\dots$  |
| $1 \times$       | $x_{k+n} = A^n x_k + A^{n-1}Bu_k + \dots + Bu_{k+n-1}.$  |
|                  |  |
| $\sum C \times$  | $a(\nabla)y_k = \underbrace{Ca(A)x_k}_{=0 \text{ по тождеству Кэли}} +$ $+ \underbrace{Ca_{(1)}(A)Bu_k + \dots + Ca_{(n)}(A)Bu_{k+n-1}}_{=b(\nabla)u_k}$ |

Нижняя часть данной таблицы представляет собой сумму строк верхней части, умноженную на матрицу  $C$  из системы уравнений (2). Легко видеть, что данная сумма есть ничто иное, как запись динамической системы в форме «вход-выход».

### 4.3.3 $\mathcal{Z}$ -преобразование

В случае линейных непрерывных систем для работы с ними удобно было использовать передаточную функцию. Передаточную функцию мы искали путем отношения изображения выхода системы к изображению входа (для нахождения изображений входа и выхода применяется преобразование Лапласа). Соответственно, интересно получить передаточную функцию и для линейных дискретных систем. Для этого необходимо получить аналог преобразования Лапласа для последовательностей.

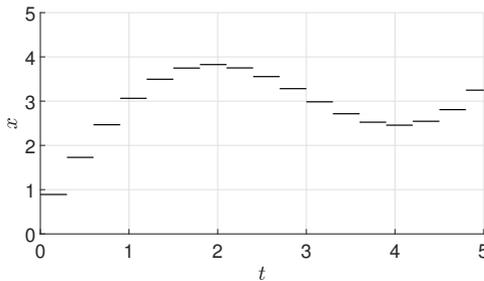


Рис. 4.2: Пример кусочно-постоянной функции.

Рассмотрим кусочно-постоянную функцию  $x(t)$ . Ее график изображен на рис. 4.2. Функция постоянна на промежутках времени длины  $\tau$ . Применим к этой функции преобразование Лапласа и распишем интеграл по определению:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\lambda) = \mathcal{L}\{x(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} x(t) dt \sim \\ &\sim \sum_{k=0}^{\infty} x(k\tau) e^{-\lambda k\tau} \tau = \tau \sum_{k=0}^{\infty} x(k\tau) (e^{\lambda\tau})^{-k}. \end{aligned}$$

Здесь мы заменили интеграл на сумму, а время  $t = k\tau$ . Введем обозначение  $z = e^{\lambda\tau}$ , тогда

$$\frac{1}{\tau} \mathcal{L}\{x(t)\} \sim \sum_{k=0}^{\infty} x(k\tau) z^{-k}.$$

Теперь, если вместо функции  $x(k\tau)$  рассмотреть последовательность  $x_k$ , то получим так называемое  $\mathcal{Z}$ -преобразование – аналог преобразования Лапласа для дискретных систем:

$$\tilde{x}(z) = \mathcal{Z}\{x_k\} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} x_k. \quad (4)$$

Очевидно, что  $\mathcal{Z}$ -преобразование существует не всегда. Для этого ряд в определении должен быть сходящимся, а точнее, должно  $\exists \rho : \rho \in \mathbb{R}$ ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k} |x_k| < \infty.$$

$z$  в (4) должно быть из области сходимости:  $z \in H_\rho = \{z : |z| > \rho\}$ .

Для  $\mathcal{Z}$ -преобразования вводятся аналогичные преобразованию Лапласа обозначения:  $\tilde{x}(\cdot) = \mathcal{Z}\{x_k\} \Leftrightarrow \{x_k\} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{x}(\cdot) \Leftrightarrow \tilde{z}(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \{x_k\}$ .

Кроме того, существует также обратное  $\mathcal{Z}$ -преобразование:

$$x_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \tilde{x}(z) z^{k-1} dz,$$

где  $C$  – замкнутый контур вокруг начала координат, лежащий внутри области сходимости функции  $\tilde{x}(z)$  и охватывающий все полюса данной функции.  $\mathcal{Z}$ -преобразование обладает рядом свойств, часть из которых мы перечислим ниже:

#### Свойства $\mathcal{Z}$ -преобразования:

- Линейность:  $\mathcal{Z}\{\alpha x_k + \beta y_k\} = \alpha \mathcal{L}\{x_k\} + \beta \mathcal{L}\{y_k\}$ ,  
где  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .
- Сдвиг вправо по времени:  $\mathcal{Z}\{x_{k+1}\} = z [\mathcal{Z}\{x_k\} - x_0]$ .
- Сдвиг влево по времени:  $\mathcal{Z}\{x_{k-1}\} = z^{-1} \mathcal{Z}\{x_k\}$  при нулевых начальных данных.
- Произведение:  $\{\rho^k x_k\} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{x}(z/\rho)$ .
- Свертка:  $[\{x_i\} * \{y_i\}]_k \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{x}(z)\tilde{y}(z)$ ,  
где  $[\{x_i\} * \{y_i\}]_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^k x_j y_{k-j}$  – это свертка последовательностей  $\{x_i\}$  и  $\{y_i\}$ .

### 4.3.4 Передаточная функция

Теперь мы готовы ввести передаточную функцию для дискретных систем. Для этого будем использовать  $\mathcal{Z}$ -преобразование. Рассмотрим скалярную функциональную модель дискретной системы в форме «вход-выход»:

$$a(\nabla)y_k = b(\nabla)u_k$$

Применим к обоим частям данной системы  $\mathcal{Z}$ -преобразование и получим *передаточную функцию дискретной системы*:

$$W(\lambda) = \frac{\tilde{y}(\lambda)}{\tilde{u}(\lambda)} = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}.$$

Теперь рассмотрим каноническую модель дискретной системы в пространстве состояний:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \\ y_k = Cx_k, \end{cases}$$

и применим к ней  $\mathcal{Z}$ -преобразование:

$$\begin{cases} \lambda \tilde{x}(\lambda) = A\tilde{x}(\lambda) + B\tilde{u}(\lambda), \\ \tilde{y}(\lambda) = C\tilde{x}(\lambda). \end{cases}$$

откуда получим передаточную функцию дискретной системы в форме пространства состояний:

$$W(\lambda) = \frac{\tilde{y}(\lambda)}{\tilde{u}(\lambda)} = C(\lambda I - A)^{-1}B.$$

Заметим, что мы использовали обозначение  $\lambda$  вместо  $z$  при применении  $\mathcal{Z}$ -преобразования.

Передаточные функции равны  $\mathcal{Z}$ -преобразованию от импульсной реакции системы, т.е. реакции на вход  $\{1, 0, 0, \dots\}$  (аналог импульсной характеристики и  $\delta$ -функции для дискретных систем).

## 4.4 Дискретизация

Теперь нас интересует задача установки связи между непрерывным и дискретными системами.

*Дискретизацией* называется сопоставление непрерывной динамической системе некоторой дискретной динамической системы.

При этом необходимо установить связь между множествами времени двух систем: непрерывным и дискретным. Для этого необходимо задать *шаг дискретизации*  $h_k$  – интервал времени между моментом  $t_k$  и  $t_{k+1}$ , т.е.  $h_k = t_{k+1} - t_k$ . Если шаг дискретизации постоянный, то  $h_k = h$ .

Рассмотрим линейную непрерывную систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (5)$$

где  $x_k \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  – вектор входа,  $y_k \in \mathbb{R}^l$  – вектор выхода  $A, B, C$  – матрицы размера  $n \times n$ ,  $n \times m$  и  $l \times n$ , соответственно. Сформулируем для системы (5) задачу Коши в начальный момент времени  $t_0$ :  $x(t_0) = x_0$ .

Выберем некоторый постоянный шаг дискретизации  $h > 0$  и рассмотрим моменты времени  $t_k = kh$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Выберем управление постоянным на промежутках времени  $[t_k; t_{k+1})$ :

$$u[h(k + \varepsilon)] = u_k, \quad \varepsilon \in [0; 1), \quad k = 0, 1, \dots \quad (6)$$

В качестве начального момента времени  $t_0$  выберем  $t_0 = kh$  и запишем формулу Коши для решения системы (5) в момент времени  $t = kh + h$ :

$$x(kh + h) = e^{(kh+h-kh)A}x(kh) + \int_{kh}^{kh+h} e^{A(kh+h-s)}Bu(s)ds.$$

Введем новую переменную  $\tau = kh + h - s$ , т.е.  $s = kh + h - \tau$ , тогда

$$x(kh + h) = e^{hA}x(kh) - \int_h^0 e^{A\tau}Bu[kh + h - \tau]d\tau.$$

Поменяем местами пределы интегрирования, вынесем управление из-под знака интеграла, так как оно постоянно на промежутке инте-

гирования (6), и найдем значение интеграла:

$$\begin{aligned} x(kh + h) &= e^{hA}x(kh) + \int_0^h e^{A\tau} d\tau Bu_k = \\ &= e^{hA}x(kh) + A^{-1}(e^{hA} - I)Bu_k. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим последовательность  $x_k$  вместо функции  $x(kh)$  и получим уравнение дискретной системы:

$$x_{k+1} = Px_k + Qu_k, \quad (7)$$

где матрицы  $P$  и  $Q$  определяются формулами:

$$P = e^{hA}, \quad Q = A^{-1}(e^{hA} - I)B. \quad (8)$$

Здесь  $e^{hA}$  – матричная экспонента, определяемая формулой

$$e^{Ah} = I + Ah + \frac{1}{2}A^2h^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!}. \quad (9)$$

Вычислить матричную экспоненту точно не всегда представляется возможным. Это возможно, например, в случае диагональной матрицы  $A$ .

При достаточно малых  $h$  для вычисления  $e^{Ah}$  можно удерживать лишь первые несколько членов ряда (9) или аппроксимировать сумму (9) каким-либо способом.

Например, при переходе от (5) к (7) можно пользоваться формулой  $e^{Ah} \approx I + Ah$ , соответствующей численному интегрированию (5) *методом Эйлера*. При такой аппроксимации передаточные функции дискретной и непрерывной систем будут связаны соотношением

$$W_D(\lambda) = W_N\left(\frac{\lambda-1}{h}\right), \quad (10)$$

т.е. при переходе к дискретному времени в передаточной функции  $W(\lambda)$  системы (5) нужно заменить  $\lambda$  на  $(\lambda - 1)/h$ . Если матрица  $A$  устойчива, т.е.  $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0$ , то метод Эйлера дает устойчивую аппроксимацию лишь при

$$h < \min_i \frac{|2 \operatorname{Re} \lambda_i(A)|}{|\lambda_i(A)|^2}, \quad (11)$$

где  $\lambda_i(A)$  – собственные числа матрицы  $A$  (корни полинома  $A(\lambda)$ ). Целый ряд способов перехода от (5) к (7) основан на аппроксимации матрицы  $e^{Ah}$  *матричными дробями Паде* (дробями, «числителем» и «знаменателем» которых являются матричные многочлены). Частными случаями этих способов является *метод Тастина* (формула Паде порядка (1,1)):

$$e^{Ah} \approx \left( I + \frac{Ah}{2} \right) \left( I - \frac{Ah}{2} \right)^{-1}, \quad (12)$$

приводящий к соотношению между передаточными функциями

$$W_{\text{д}}(\lambda) = W_{\text{н}} \left( \frac{2}{h} \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right), \quad (13)$$

а также *метод Дэвисона* (формула Паде порядка (2,2)):

$$e^{Ah} \approx \left( I + \frac{Ah}{2} + \frac{A^2 h^2}{12} \right) \left( I - \frac{Ah}{2} + \frac{A^2 h^2}{12} \right)^{-1}. \quad (14)$$

Отметим, что формулы (12) и (14) дают устойчивые аппроксимации при  $h > 0$  (разумеется, если  $A$  – устойчивая).

Заметим, что формула (8) для вычисления матрицы  $Q$  применима, если  $\det A \neq 0$ . Трудностей, связанных с вычислением  $Q$  при вырожденной матрице  $A$ , можно избежать, если при формальной подстановке выражения для  $P = e^{Ah}$ , полученного из аппроксимаций Тейлора или Паде в (8), произвести «сокращение» матрицы  $A$ . Тогда в выражение для  $Q$  матрица  $A^{-1}$  входить не будет. Например, аппроксимация по методу Эйлера  $P = I + Ah$  приводит к формуле  $Q = h \cdot B$ .

Другой способ состоит в расширении уравнений состояния исходной системы (5) [1, 16]. Входной процесс  $u(t)$  при  $t_k \leq t < t_{k+1}$  рассматривается как решение некоторого однородного дифференциального уравнения. Тогда расширенная система тоже является однородной, и в вычислении по (8) нет необходимости. Искомые матрицы  $P$  и  $Q$  получаются в качестве подматриц «расширенной» матричной экспоненты. Продемонстрируем этот подход для входного процесса  $u(t) \equiv u_k$  при  $t_k \leq t < t_{k+1}$ . Для указанного промежутка времени уравнение (5) запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(t_k) &= x_k, & t_k &\leq t < t_{k+1}, \\ \dot{u}(t) &= 0, & u(t_k) &= u_k. \end{aligned} \quad (15)$$

Введем расширенный  $(n + m)$ -мерный вектор состояния  $\bar{x} = \text{col}(x, u)$  и  $(n + m) \times (n + m)$ -матрицу

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Уравнение (15) представим в виде

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t), \quad \bar{x}(t_k) = \text{col}(x_k, u_k). \quad (16)$$

Соответствующая дискретная модель (аналогично (7)) принимает вид

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{P}\bar{x}_k, \quad (17)$$

где  $\bar{P} = e^{\bar{A}h}$ . Учитывая блочную структуру матрицы  $\bar{A}$  и формулу (9) для  $\bar{P}$ , непосредственно убеждаемся, что матрица  $P$  имеет следующую блочную структуру:

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P' & Q' \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

С учетом этого из (17) находим, что

$$x_{k+1} = P'x_k + Q'u_k. \quad (18)$$

Сравнивая (18) с (7), видим, что матрицы  $P, Q$  в (7) совпадают с  $P', Q'$ . Поэтому они могут быть получены в качестве соответствующих подматриц матрицы  $\bar{P} = e^{\bar{A}h}$ .

Если непрерывная система нелинейна, то для перехода к ее дискретному описанию также можно использовать методы численного интегрирования. Например, метод Эйлера дает для системы  $\dot{x} = F(x, u, t), y = G(x, u, t)$  дискретное описание:

$$x_{k+1} = x_k + hF(x_k, u_k, t_k), \quad y_k = G(x_k, u_k, t_k). \quad (19)$$

*Континуализация* – это переход от дискретной математической модели системы к непрерывной. Если дискретная модель системы имеет вид (7), то перейти к непрерывной модели (5) можно по формулам

$$A = \frac{1}{h} \ln P, \quad B = \frac{1}{h} \ln P(P - I)^{-1}Q,$$

вытекающим из (8), где  $\ln P$  – логарифм матрицы, функция, обратная к экспоненциальной и также определяемая через ряд

$$\ln(I + X) = X + \frac{X^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} X^n,$$

сходящийся при  $\|X\| < 1$  (здесь  $X = P - I$ ). С точностью до величин порядка  $h^2$  можно ограничиться формулами

$$A = \frac{1}{h}(P - I), \quad b = \frac{1}{h}Q,$$

соответствующими методу Эйлера. Однако удобнее всего переходить от дискретной передаточной функции к непрерывной по формулам (10) и (13).

## 4.5 Практическая работа №4

**Задание 1.** Дана каноническая модель дискретной системы в пространстве состояний:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + bu_k, \\ y_k = Cx_k, \end{cases}$$

где  $x_k \in \mathbb{R}^3$ ,  $u_k \in \mathbb{R}$ ,  $y_k \in \mathbb{R}$ . Начальные данные – нулевые.

Перейти к функциональной модели «вход-выход» и построить передаточную функцию системы.

1. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1].$$

2. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.2 & 0.1 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1].$$

3. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.4 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1].$$

4. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.7 & -0.1 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -0.3 \\ -0.4 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1].$$

5. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.4 & 0.1 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.5 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1].$$

6. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.3 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.1 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1].$$

7. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.6 & -0.6 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1].$$

8. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.5 \\ 0.6 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1].$$

9. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.8 & -0.4 & -0.7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.1 \\ -0.2 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1].$$

10. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & -0.3 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1].$$

**Задание 2.** Дана функциональная модель дискретной системы в форме «вход-выход», где  $y_k \in \mathbb{R}$ ,  $u_k \in \mathbb{R}$ . Начальные данные – нулевые.

Перейти к канонической модели в пространстве состояний.

1. Вариант.

$$y_{k+3} + 0.1y_{k+2} - 0.3y_{k+1} - 0.1y_k = -0.6u_{k+2} + 0.09u_{k+1} + 0.01u_k.$$

2. Вариант.

$$y_{k+3} + 0.4y_{k+2} + 0.2y_{k+1} - 0.2y_k = -0.2u_{k+2} + 0.06u_{k+1} + 0.08u_k.$$

3. Вариант.

$$y_{k+3} + 0.1y_{k+2} - 0.2y_{k+1} - 0.3y_k = 0.3u_{k+2} + 0.01u_{k+1} + 0.06u_k.$$

4. Вариант.

$$y_{k+3} - 0.8y_{k+2} + 0.3y_{k+1} - 0.1y_k = 0.1u_{k+2} - 0.2u_{k+1} - 0.05u_k.$$

5. Вариант.

$$y_{k+3} + 0.7y_{k+2} + 0.4y_{k+1} - 0.8y_k = -0.2u_{k+2} + 0.28u_{k+1} + 0.08u_k.$$

6. Вариант.

$$y_{k+3} + 0.5y_{k+2} - 0.3y_{k+1} + 0.2y_k = 0.6u_{k+2} + 0.01u_{k+1} - 0.2u_k.$$

7. Вариант.

$$y_{k+3} + 0.8y_{k+2} - 0.2y_{k+1} + 0.4y_k = -0.5u_{k+2} - 0.18u_{k+1} - 0.12u_k.$$

8. Вариант.

$$y_{k+3} - 0.1y_{k+2} + 0.6y_{k+1} + 0.6y_k = 0.2u_{k+2} + 0.12u_{k+1} - 0.18u_k.$$

9. Вариант.

$$y_{k+3} + 0.3y_{k+2} - 0.1y_{k+1} - 0.4y_k = -0.6u_{k+2} + 0.21u_{k+1} + 0.2u_k.$$

10. Вариант.

$$y_{k+3} + 0.3y_{k+2} + 0.1y_{k+1} + 0.7y_k = 0.8u_{k+2} + 0.25u_{k+1} + 0.28u_k.$$

**Задание 3.** Дана передаточная функция устойчивой непрерывной системы:

1. Вариант.

$$W(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 1}.$$

2. Вариант.

$$W(s) = \frac{2s - 1}{s^2 + 3s + 2}.$$

3. Вариант.

$$W(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 4s + 5}.$$

4. Вариант.

$$W(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 1}.$$

5. Вариант.

$$W(s) = \frac{2s - 3}{s^2 + 4s + 8}.$$

6. Вариант.

$$W(s) = \frac{5s + 3}{s^2 + 5s + 8}.$$

7. Вариант.

$$W(s) = \frac{s - 4}{s^2 + 2s + 9}.$$

8. Вариант.

$$W(s) = \frac{4s - 3}{s^2 + 6s + 3}.$$

9. Вариант.

$$W(s) = \frac{s + 6}{s^2 + 2s + 8}.$$

10. Вариант.

$$W(s) = \frac{2s + 5}{s^2 + 6s + 6}.$$

- Построить переходную функцию данной системы.
- Найти передаточную функцию дискретной системы, соответствующей исходной, по методу Эйлера (10).
- Получить оценку на шаг дискретизации, при котором дискретная система будет устойчивой (11).
- Построить переходную функцию полученной дискретной системы для двух разных шагов дискретизации: в первом случае дискретная система должна быть устойчива, а во втором – неустойчива. Сравнить результаты с поведением исходной системы.
- Найти передаточную функцию дискретной системы, соответствующей исходной, по методу Тастина (13).
- Построить переходную функцию полученной дискретной системы. Сравнить результаты с поведением исходной системы.

### 4.5.1 Пример выполнения практической работы

**Задание 1.** Дана каноническая модель дискретной системы в пространстве состояний с нулевыми начальными данными:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\y_k &= Cx_k,\end{aligned}\tag{20}$$

где  $x_k \in \mathbb{R}^3$ ,  $u_k \in \mathbb{R}$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.4 & 0.2 & -0.8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.3 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1].$$

Необходимо перейти к функциональной форме «вход-выход» и построить передаточную функцию системы (20).

Для начала определим характеристический многочлен матрицы  $A$ .

$$a(\lambda) = \det\{\lambda I - A\} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0.4 & -0.2 & \lambda + 0.8 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 0.8\lambda^2 - 0.2\lambda + 0.4.$$

Основываясь на полученном характеристическом многочлене  $a(\lambda)$  и рекуррентных выражениях (3), определим следующие многочлены:

$$\begin{aligned} a_{(1)}(A) &= A^2 + 0.8A = 0.2A & a_{(1)}(A) &= \begin{bmatrix} -0.2 & 0.8 & 1 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0 \end{bmatrix} \\ a_{(2)}(A) &= A + 0.8I \\ a_{(3)}(A) &= I \\ a_{(2)}(A) &= \begin{bmatrix} 0.8 & 1 & 0 \\ 0 & 0.8 & 1 \\ -0.4 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} & a_{(3)}(A) &= I. \end{aligned}$$

Вспомним, что

$$a(\nabla)y_k = Ca_{(1)}(A)Bu_k + Ca_{(2)}(A)Bu_{k+1} + \dots + Ca_{(n)}(A)Bu_{k+n-1} = b(\nabla)u_k.$$

где  $\nabla$  – оператор сдвига вправо по времени.

Таким образом, находя  $Ca_{(1)}(A)B = -0.12$ ,  $Ca_{(2)}(A)B = -0.18$  и  $Ca_{(3)}(A)B = -0.5$ , получаем уравнение в функциональной форме «вход-выход»

$$y_{k+3} + 0.8y_{k+2} - 0.2y_{k+1} + 0.4y_k = -0.5u_{k+2} - 0.18u_{k+1} - 0.12u_k.$$

Теперь найдем передаточную функцию исследуемой системы, основываясь на модели «вход-выход»:

$$W(\lambda) = \frac{-0.5\lambda^2 - 0.18\lambda - 0.12}{\lambda^3 + 0.8\lambda^2 - 0.2\lambda + 0.4} = \frac{-25\lambda^2 - 9\lambda - 6}{50\lambda^3 + 40\lambda^2 - 10\lambda + 20}.$$

Аналогично можно найти передаточную функцию исходной системы в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= C(\lambda I - A)^{-1}B = \\ &= [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0.4 & -0.2 & \lambda + 0.8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.3 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{-25\lambda^2 - 9\lambda - 6}{50\lambda^3 + 40\lambda^2 - 10\lambda + 20}. \end{aligned}$$

**Задание 2.** Дана функциональная модель дискретной линейной системы в форме «вход-выход»:

$$y_{k+3} - 0.7y_{k+2} - 0.2y_{k+1} - 0.4y_k = 0.6u_{k+2} + 0.02u_{k+1} + 0.2u_k, \quad (21)$$

где  $y_k, u_k \in \mathbb{R}$ . Необходимо перейти к канонической модели в форме пространства состояний.

Для представления системы «вход-выход» в канонической форме пространства состояний ситему (21) достаточно записать в виде

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\ y_k &= Cx_k, \end{aligned}$$

где  $A = \begin{bmatrix} 0.7 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1 \\ 0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.02 \\ 0.2 \end{bmatrix}$ ,  $C = [1 \ 0 \ 0]$ .

**Задание 3.** Дана передаточная функция устойчивой линейной системы:

$$W(\lambda) = \frac{4\lambda - 1}{\lambda^2 + 7\lambda + 2}.$$

- Построить переходную функцию данной системы в среде.
- Найти передаточную функцию дискретной системы по методу Эйлера.
- Получить оценку на шаг дискретизации, при котором дискретная система будет устойчивой.

- Построить переходную функцию полученной дискретной системы для двух разных шагов дискретизации: в первом случае дискретная система устойчива, а во втором – неустойчива. Сравнить результаты исходной системы.
- Найти передаточную функцию дискретной системы, соответствующей исходной по методу Тастина.
- Построить переходную функцию полученной дискретной системы. Сравнить с поведением исходной системы.

Строим график переходной функции с помощью функции *stepplot* в среде MATLAB [78] (нужен *Control System Toolbox* или *System Identification Toolbox*). График переходной функции изображен на рис. 4.3.

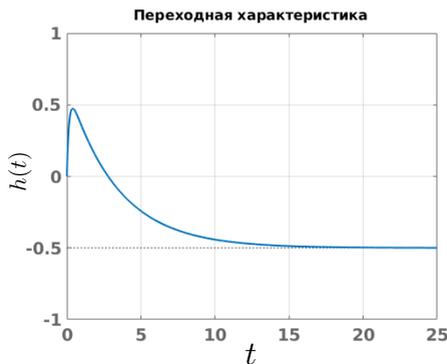


Рис. 4.3: Переходная функция непрерывной системы.

Находим передаточную функцию по методу Эйлера:

$$\begin{aligned}
 W_d(\lambda) &= W_n \left( \frac{\lambda - 1}{h} \right) = \frac{4\lambda - 1}{\lambda^2 + 7\lambda + 2} \Bigg|_{\lambda = \left( \frac{\lambda - 1}{h} \right)} = \\
 &= \frac{4h\lambda - h^2 - 4h}{\lambda^2 + (7h - 2)\lambda + 2h^2 - 7h + 1}.
 \end{aligned}$$

Оценка на шаг дискретизации, при котором метод Эйлера дает устойчивую аппроксимацию:

$$h < \min_i \frac{2|\operatorname{Re}(\lambda_i)|}{|\lambda_i|^2} \approx 0.2984.$$

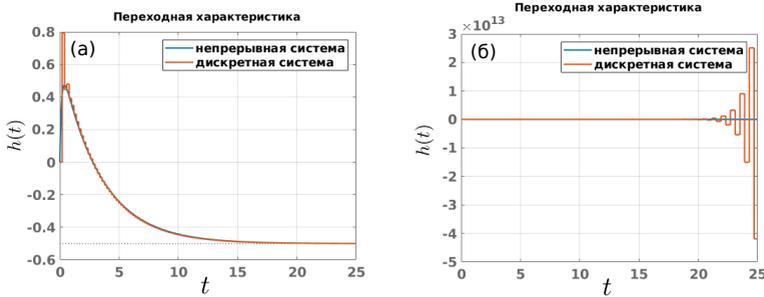


Рис. 4.4: Переходные функции дискретной системы, полученной по методу Эйлера: (а)  $h = 0.1984$ ; (б)  $h = 0.3984$ .

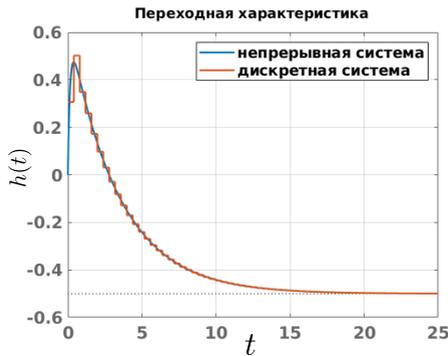


Рис. 4.5: Переходная функция дискретной системы по методу Тастина  $h = 0.3984$

Переходные функции дискретной системы, полученные по методу

Эйлера, изображены на рис. 4.4: (а) – устойчивый случай, тогда как (б) – неустойчивый случай.

Теперь найдем передаточную функцию дискретной системы по методу Тастина:

$$W_{\text{д}}(\lambda) = W_{\text{н}} \left( \frac{2}{h} \left[ \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right] \right) = \frac{4\lambda - 1}{\lambda^2 + 7\lambda + 2} \Big|_{\lambda = \left( \frac{2}{h} \left[ \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right] \right)} =$$

$$= \frac{(8h - h^2)\lambda^2 - 2h^2\lambda - (8h + h^2)}{(4 + 14h + 2h^2)\lambda^2 + (4h^2 - 8)\lambda + (4 - 14h + 2h^2)}.$$

Переходная функция дискретной системы, полученной по методу Тастина, изображена на рис. 4.5. Как видно, при шаге дискретизации  $h = 0.3984$  метод Эйлера дает неустойчивую аппроксимацию, тогда как метод Тастина дает устойчивую.

## 4.6 Вопросы для самоконтроля

- Чем отличается дискретная система от непрерывной?
- Приведите пример дискретной системы.
- Как найти решение системы  $x_{k+1} = ax_k$ ?
- При каких значениях параметра  $a$  система  $x_{k+1} = ax_k$  устойчива?
- Когда устойчива система  $x_{k+1} = Ax_k$ ?
- Напишите формулу Коши для дискретной системы.
- Приведите пример, для чего используется  $\mathcal{Z}$ -преобразование?
- Как найти передаточную функцию дискретной системы?
- Зачем нужна дискретизация?
- В чем преимущество метода Тастина над методом Эйлера?
- Что такое континуализация?

# Глава 5

## Системы с задержками

Системы с временной задержкой (или запаздыванием) также называются системами с последствием, уравнениями с отклоняющимся аргументом или дифференциально-разностными уравнениями. Они принадлежат к классу функционально-дифференциальных уравнений, которые являются бесконечномерными, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Самый простой пример такой системы:

$$\dot{x}(t) = -x(t - h), \quad (1)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}$ ,  $h > 0$  – задержка (или запаздывание). Временная задержка часто появляется во многих системах управления (например, в самолетах, системах управления химическими или технологическими процессами, а также в системах связи).

Системы управления часто работают при наличии задержек, возникающих, в первую очередь, из-за времени, которое требуется для получения информации, при синтезе управления, а также в исполнительных элементах. Приводы и датчики, участвующие в контурах обратной связи, обычно вызывают задержки. Таким образом, важно изучать системы управления, которые включают звенья с задержками. Подробную информацию о системах с задержками можно найти, например, в [63, 64].

Опишем простейший пример системы с задержкой. Представим человека, принимающего душ, который хочет получить желаемое значение температуры воды  $T_d$ , вращая ручку смесителя. Обозначим за  $T(t)$  температуру воды на выходе смесителя. Пусть  $h$  – время, необходимое для того, чтобы вода от смесителя дошла до тела человека. Будем предполагать, что температура на выходе смесителя

пропорциональна углу поворота ручки смесителя  $\varphi(t)$ , а скорость изменения угла поворота  $\dot{\varphi}(t)$  пропорциональна величине  $T(t) - T_d$ . В момент времени  $t$  человек чувствует на своем теле температуру, которая была на выходе смесителя в момент времени  $t - h$ . Таким образом мы получаем следующее дифференциальное уравнение с запаздыванием:

$$\dot{T}(t) = -k [T(t - h) - T_d], \quad k \in \mathbb{R}.$$

## 5.1 Идея решения и метод шагов

Рассмотрим уравнение с задержкой (1). Для его решения необходимо определить  $x(t - h)$  для всех  $t \in [0, h]$ . Это можно сделать, если задать начальную функцию (вместо начального значения  $x(0)$ ), как это было в случае с ОДУ):

$$x(s) = \varphi(s), \quad s \in [-h, 0].$$

Таким образом, нам необходимо знание всех значений начальной функции на всем промежутке  $[-h; 0]$ , количество которых бесконечно, т.е. данная система с задержкой относится к классу бесконечномерных систем.

Для поиска решения системы (1) можно использовать *метод шагов*, предложенный Р. Беллманом [59]. Его идея заключается в следующем. Вначале ищется решение для промежутка  $t \in [0, h]$ , т.е. решается следующая задача Коши:

$$\dot{x}(t) = -\varphi(t - h), \quad x(0) = \varphi(0).$$

Затем процедура повторяется для интервалов времени  $[h, 2h]$ ,  $[2h, 3h]$  и т.д. Если  $\varphi(t) \equiv \text{const}$ , то решения уравнения (1) являются многочленами, явно зависящими от переменной  $t$ . На рис. 5.1 изображены решения уравнения (1). Различные решения уравнения с задержкой могут принимать одинаковые значения  $x(t^*)$  в некоторые моменты времени  $t^*$ . В случае ОДУ такой ситуации быть не может: через каждую точку может проходить только одно решение ОДУ (пример  $\dot{x}(t) = -x(t)$ ). Таким образом, в системах с задержкой подходящим состоянием системы является функция  $x_t : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \theta \in [-h, 0], \quad (2)$$

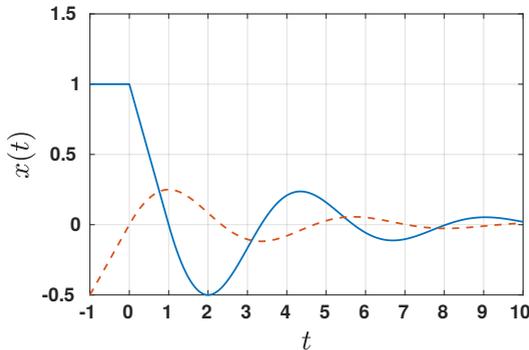


Рис. 5.1: Решения уравнения (1) при  $h = 1$  и начальной функции  $\varphi(t) \equiv 1$  (сплошная синяя линия); или начальной функции  $\varphi(t) = 0.5t$  (пунктирная красная линия).

которая соответствует прошедшему интервалу времени  $[t - h, t]$ .

## 5.2 Устойчивость линейных систем с задержкой

Рассмотрим линейную динамическую систему с переменной задержкой:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t - \tau(t)), \quad t \geq t_0, \quad (3)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tau(t) \in [0, h]$ ,  $A$ ,  $A_1$  — матрицы размера  $n \times n$ . Поговорим об устойчивости данной системы. Известно, что при отсутствии члена с запаздыванием для анализа устойчивости системы  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  достаточно составить ее характеристический многочлен  $\det\{A - \lambda I\}$ , приравнять его к нулю, тем самым найти собственные числа матрицы  $A$ . Если все  $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0$ , то матрица  $A$  является устойчивой, а значит, устойчивой является и система  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ .

Рассмотрим теперь звено с запаздыванием  $x(t - \tau)$ , предположим, что оно является аналитической функцией, и разложим его в ряд Тейлора в точке  $t$  (в данном случае аргументом функции является

$t - \tau$ ):

$$x(t - \tau) = x(t) + \frac{\dot{x}(t)}{1!}(-\tau) + \frac{\ddot{x}(t)}{2!}(-\tau)^2 + \dots + \frac{x^{(k)}(t)}{k!}(-\tau)^k + \dots$$

Теперь применим преобразование Лапласа к полученному выражению:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}\{x(t - \tau)\} &= \left[ 1 + \frac{(-\tau\lambda)}{1!} + \frac{(-\tau\lambda)^2}{2!} + \dots + \frac{(-\tau\lambda)^k}{k!} + \dots \right] \tilde{x}(\lambda) = \\ &= \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\tau\lambda)^k}{k!} \right] \tilde{x}(\lambda) = e^{-\tau\lambda} \tilde{x}(\lambda). \end{aligned}$$

Таким образом, мы вычислили передаточную функцию звена с запаздыванием. Для этого нам не обязательно предполагать аналитичность функции  $x(t - \tau)$ . Теперь для системы (3) можно выписать ее характеристическое уравнение:

$$\det\{\lambda I - A - A_1 e^{-\tau\lambda}\} = 0.$$

Если все корни данного характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, т.е.  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ , то данная система с задержкой (3) является асимптотически устойчивой.

Исследуем данную систему на устойчивость с помощью метода функций Ляпунова (см. раздел 3.4.1). Для этого введем следующую функцию Ляпунова:

$$V(x) = x^T(t)Px(t), \quad P > 0. \quad (4)$$

Найдем производную функции Ляпунова в силу системы (3):

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) = \\ &= x^T(t)[A^T P + PA]x(t) + x^T(t)PA_1x(t - \tau) + x^T(t - \tau)A_1^T Px(t). \end{aligned}$$

Введем вектор  $z = \operatorname{col}\{x(t); x(t - \tau)\}$ , тогда

$$\dot{V} = z^T W_0 z,$$

где

$$W_0 = \begin{bmatrix} A^T P + PA & PA_1 \\ A_1^T P & 0 \end{bmatrix}.$$

По критерию Сильвестра (см. п. 3.3.1) получаем, что минор в нижней правой части матрицы  $W_0$  равен нулю, а значит, данная матрица не может быть отрицательно определенной. Для решения этой проблемы существуют два известных метода.

### 5.2.1 Метод функционалов Ляпунова-Красовского

Н.Н. Красовский в своей работе [23] предложил решать возникшую проблему следующим образом. Вместо функции Ляпунова (4) рассмотрим следующий функционал:

$$V(t, x_t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s)Qx(s)ds, \quad (5)$$

где  $Q = Q^T > 0$  – положительно-определенная матрица размера  $n \times n$ . Очевидно, что функционал (5) удовлетворяет условию  $\beta|x(t)|^2 \leq V(t, x_t)$  для некоторого  $\beta > 0$ . Этот функционал называется *функционалом Ляпунова-Красовского*. Продифференцируем этот функционал (5) вдоль решений системы (3), получим

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x_t) &= z^T W_0 z + x^T(t)Qx(t) - (1 - \dot{\tau})(x^T(t - \tau)Qx(t - \tau)) = \\ &= z^T W z, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$W = \begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PA_1 \\ A_1^T P & -(1 - \dot{\tau}(t))Q \end{bmatrix}$$

Из-за добавления в функцию Ляпунова (4) интегральной составляющей в производной соответствующего функционала возникает член с квадратом запаздывания. Таким образом, мы избегаемся от нулевого минора в матрице  $W_0$ . Далее, будем предполагать, что  $\dot{\tau} \leq d < 1$  (случай медленно меняющейся задержки). Это предположение необходимо для обеспечения отрицательной определенности нижнего правого минора матрицы  $W$ . Если  $W < 0$ , тогда исходная линейная система с задержкой (3) будет устойчива. Таким образом, мы свели задачу к проверке разрешимости системы линейных матричных неравенств:

$$P > 0, \quad Q > 0, \quad W < 0. \quad (7)$$

Разрешимость системы линейных матричных неравенств (LMI) (7) не зависит от задержки  $\tau(t)$ , но зависит от  $\dot{\tau}(t)$  (т.е. от величины  $d$ ). Разрешимость системы LMI (7) эквивалентна выполнению следующих двух условий:

- $A$  и  $A \pm A_1$  – устойчивые матрицы;
- все собственные числа матрицы  $A^{-1}A/\sqrt{1-d}$  лежат внутри единичного круга.

### 5.2.2 Метод Разумихина

Другой способ решения проблемы наличия нулевого минора в матрице  $W_0$  предложил Б.С. Разумихин в работе [40]. Рассмотрим функцию Ляпунова (4). Если решение начинается внутри эллипсоида  $V(x(t_0 + \theta)) = x^T(t_0 + \theta)Px(t_0 + \theta) \leq \delta$ ,  $\forall \theta \in [-h, 0]$  и готовится покинуть этот эллипсоид в некоторый момент времени  $t \geq t_0$ , тогда

$$x^T(t + \theta)Px(t + \theta) \leq x^T(t)Px(t) \quad \forall \theta \in [-h, 0]. \quad (8)$$

Таким образом, решение не покинет эллипсоид  $x^T(t)Px(t) \leq \delta$ , если  $\dot{V}(x(t)) \leq 0$  вдоль траекторий системы (3) для всех  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ ,  $\theta \in [-h, 0]$ , удовлетворяющих условию Разумихна (8)

$$V(x(t + \theta)) \leq V(x(t)), \quad \theta \in [-h, 0]$$

(и не для любой  $x(t + \theta)$ ). Это гарантирует устойчивость системы.

Добавим неравенство (8) в производную функции Ляпунова (6) с некоторым множителем  $q > 0$ :

$$\dot{V}(x(t)) \leq z^T W_0 z + q[x^T(t)Px(t) - x^T(t - \tau(t))Px(t - \tau(t))] \leq 0. \quad (9)$$

Неравенство (9) выполнено, если соответствующая матрица отрицательно определена:

$$W = \begin{bmatrix} A^T P + PA + qP & PA_1 \\ A_1^T P & -qP \end{bmatrix} < 0. \quad (10)$$

Матричное неравенство (10) не зависит от  $\tau(t)$ . Более того, оно не зависит и от производной  $\dot{\tau}(t)$ . Данное матричное неравенство не

является линейным, так как оно содержит член  $qP$ , где  $q$  и  $P$  – неизвестные. Однако оно легко сводится к линейному путем выбора конкретного значения  $q > 0$ . Таким образом, мы получили достаточные условия устойчивости тривиального решения  $x(t) \equiv 0$  для систем с произвольной задержкой (без ограничений). Задача свелась к проверке разрешимости системы матричных неравенств  $P > 0$  и (10). Осуществлять такую проверку можно в системе Matlab [78] с использованием пакета Yalmip [68].

## 5.3 Практическая работа №5

**Задание 1.** Дана следующая система с задержкой:

$$\dot{x}(t) = -\text{sign } x(t-h), \quad t \geq 0, h > 0, \quad (11)$$

где

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$h = 2$  – постоянная задержка,  $x(t) = \varphi(t)$  при  $t \in [-h, 0]$ .

Используя метод шагов, построить график решения системы (11) при

1. Вариант.

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t+2)^2, & t \in [-2, -1), \\ -t, & t \in [-1, 0]. \end{cases}$$

2. Вариант.

$$\varphi(t) = \begin{cases} -t-1, & t \in [-2, -1), \\ -(t+1)^2, & t \in [-1, 0]. \end{cases}$$

3. Вариант.

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0.5, & t \in [-2, -1), \\ -t-0.5, & t \in [-1, 0]. \end{cases}$$

4. Вариант.

$$\varphi(t) = \begin{cases} -0.5, & t \in [-2, -1.5), \\ t + 1, & t \in [-1.5, 0]. \end{cases}$$

5. Вариант.

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t + 2)^2 - 1, & t \in [-2, -1), \\ 0.5(t + 1), & t \in [-1, 0]. \end{cases}$$

6. Вариант.

$$\varphi(t) = \begin{cases} t + 1.5, & t \in [-2, -1), \\ -t - 0.5, & t \in [-1, 0]. \end{cases}$$

7. Вариант.

$$\varphi(t) = (t + 1)^2 - 1.$$

8. Вариант.

$$\varphi(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-2, -1), \\ 2t + 1, & t \in [-1, 0]. \end{cases}$$

9. Вариант.

$$\varphi(t) = -(t + 1)^2 + 1.$$

10. Вариант.

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t + 2)^2 - 1, & t \in [-2, -1), \\ -t^2 + 1, & t \in [-1, 0]. \end{cases}$$

**Задание 2.** Дана система с некоторой произвольной задержкой  $\tau(t)$ :

1. Вариант.

$$\dot{x}(t) = -3x(t) - 0.3x(t - \tau(t)).$$

2. Вариант.

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 0.1x(t - \tau(t)).$$

3. Вариант.

$$\dot{x}(t) = -2x(t) - 0.1x(t - \tau(t)).$$

4. Вариант.

$$\dot{x}(t) = -3x(t) - 0.2x(t - \tau(t)).$$

5. Вариант.

$$\dot{x}(t) = -x(t) - 0.2x(t - \tau(t)).$$

6. Вариант.

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + 0.1x(t - \tau(t)).$$

7. Вариант.

$$\dot{x}(t) = -3x(t) + 0.3x(t - \tau(t)).$$

8. Вариант.

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + 0.2x(t - \tau(t)).$$

9. Вариант.

$$\dot{x}(t) = -x(t) - 0.1x(t - \tau(t)).$$

10. Вариант.

$$\dot{x}(t) = -3x(t) - 0.1x(t - \tau(t)).$$

Построить функцию Ляпунова. С помощью метода Разумихина доказать устойчивость данной системы. Для решения матричных неравенств использовать критерий Сильвестра.

**Задание 3.** Дана система с постоянной задержкой  $h$ :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t - h),$$

где  $x \in \mathbb{R}^2$ ,

1. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad h = 3.$$

2. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad h = 2.$$

3. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad h = 3.$$

4. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad h = 1.$$

5. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad h = 2.$$

6. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad h = 2.$$

7. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad h = 3.$$

8. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad h = 2.$$

9. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad h = 1.$$

10. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad h = 2.$$

- Промоделировать данную систему.
- С помощью функционала Ляпунова-Красовского доказать устойчивость данной системы.

### 5.3.1 Пример выполнения практической работы

**Задание 1.** Дана следующая система с задержкой:

$$\dot{x}(t) = -\text{sign}(x(t-h)), \quad t \geq 0, \quad h > 0, \quad (12)$$

где  $h = 2$  – постоянная задержка;  $x(t) = \varphi(t)$  при  $t \in [-h, 0]$ ,

$$\varphi(t) = \begin{cases} -t - 1.5, & t \in [-2, -1), \\ t + 0.5, & t \in [-1, 0]. \end{cases}$$

**Решение.** Ограничимся решением системы (12) на интервале  $[-2, 2]$ .

*Шаг 1.*

$$\begin{aligned} t \in [0, 2], \quad x(0) = \varphi(0) = 0.5, \quad \dot{x}(t) = -\text{sign}(\varphi(t-2)) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = -1, & \varphi(t-2) > 0, \\ \dot{x}(t) = 1, & \varphi(t-2) < 0, \\ x(t) = C, & \varphi(t-2) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = -1, & t \in (0, 0.5] \cup (1.5, 2], \\ \dot{x}(t) = 1, & t \in (0.5, 1.5]. \end{cases} \end{aligned}$$

Шаг 1.1.

$$\dot{x}(t) = -1, \quad t \in (0, 0.5],$$

$$\int_{x(0)}^{x(t)} dx = - \int_0^t ds \Rightarrow x(t) = -t + 0.5 \Rightarrow x(0.5) = 0.$$

Шаг 1.2.

$$\dot{x}(t) = 1, \quad t \in (0.5, 1.5],$$

$$\int_{x(0.5)}^{x(t)} dx = \int_{0.5}^t ds \Rightarrow x(t) = t - 0.5 \Rightarrow x(1.5) = 1.$$

Шаг 1.3.

$$\dot{x}(t) = -1, \quad t \in (1.5, 2],$$

$$\int_{x(1.5)}^{x(t)} dx = - \int_{1.5}^t ds \Rightarrow x(t) = -t + 2.5 \Rightarrow x(2) = 0.5.$$

Шаг 2.

$$t \in (2, 4], \quad x(2) = 0.5, \quad \dot{x}(t) = -\text{sign}(x(t-2)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = -1, & x(t-2) > 0, \\ \dot{x}(t) = 1, & x(t-2) < 0, \\ x(t) = C, & x(t-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \dot{x}(t) = -1, \quad t \in (2, 4].$$

$$\dot{x}(t) = -1, \quad t \in (2, 4],$$

$$\int_{x(2)}^{x(t)} dx = - \int_2^t ds \Rightarrow x(t) = -t + 2.5.$$

На рис. 5.2 приведен график решения уравнения (12).

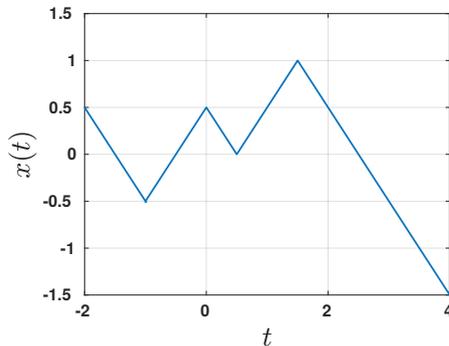


Рис. 5.2: Решение уравнения (12) при  $h = 2$  методом шагов.

**Задание 2.** Дана система с некоторой произвольной задержкой  $\tau(t)$ :

$$\dot{x}(t) = -3x(t) + 0.1x(t - \tau(t)). \quad (13)$$

Построить функцию Ляпунова. С помощью метода Разумихина доказать устойчивость данной системы. Для решения матричных неравенств использовать критерий Сильвестра.

**Решение.** Согласно методу Разумихина, система (13) является асимптотически устойчивой, когда разрешимо линейное матричное неравенство (LMI):

$$\Psi = \begin{bmatrix} A^T P + PA + qP & PA_1 \\ A_1^T P & -qP \end{bmatrix} < 0, \quad q > 0, P > 0.$$

Из уравнения (13) следует, что  $A = -3$ , а  $A_1 = 0.1$ . Тогда имеем:

$$\Psi = \begin{bmatrix} -6P + qP & 0.1P \\ 0.1P & -qP \end{bmatrix} < 0, \quad q > 0, P > 0. \quad (14)$$

Неравенство (14) выполнено тогда, когда (критерий Сильвестра):

$$\begin{cases} -P(6 - q) < 0, \\ qP^2(6 - q) - 0.01P^2 > 0, \\ q > 0, P > 0. \end{cases}$$

Из первого неравенства получаем  $0 < q < 6$ , а из второго неравенства получаем  $0.002 < q < 5.998$ . Таким образом, система LMI разрешима  $\forall q \in (0.002, 5.998) \Rightarrow$  система асимптотически устойчива.

**Задание 3.** Дана система с постоянной задержкой  $h$ :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h), \quad (15)$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad h = 1.$$

- Промоделировать систему.
- С помощью функционала Ляпунова-Красовского доказать устойчивость системы.

**Решение.** Моделирование рассматриваемой системы представлено на рис. 5.3.

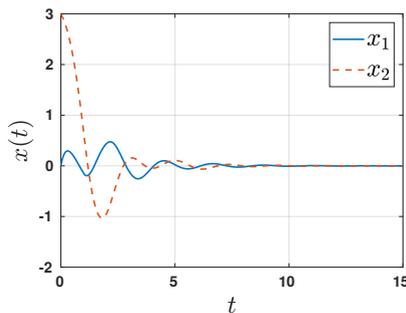


Рис. 5.3: Моделирование системы (15) с задержкой  $h = 1$ .

Рассмотрим второй пункт. Решается матричное неравенство вида

$$\Psi = \begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & A_1^T P \\ A_1^T P & -Q \end{bmatrix} < 0, \quad Q > 0, \quad P > 0,$$

так как задержка постоянная, то  $\dot{h} = 0$ . Решения данного LMI в MATLAB дает следующий результат:

$$P = \begin{bmatrix} 0.40661 & 0.13103 \\ 0.13103 & 0.57386 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1.6375 & 0.39624 \\ 0.39624 & 0.72089 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, данная система является устойчивой.

## 5.4 Дескрипторный метод

Ранее мы рассматривали методы, гарантирующие устойчивость системы с запаздыванием при любом запаздывании. Интересно было бы рассмотреть метод, гарантирующий устойчивость системы с запаздыванием при задержке, принадлежащей некоторому промежутку. Одним из таких методов является дескрипторный метод [63, 64].

Будем рассматривать линейную систему с запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t - \tau(t)), \quad t \geq t_0, \quad (16)$$

Член с запаздыванием можно представить в виде

$$x(t - \tau(t)) = x(t) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s)ds.$$

Введем новую компоненту состояния системы  $\dot{x} = y$ , тогда, используя выражение для члена с запаздыванием, систему (16) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t), \\ 0 &= -y(t) + (A + A_1)x(t) - A_1 \int_{t-\tau(t)}^t y(s)ds. \end{aligned}$$

Полученная дескрипторная система эквивалентна исходной (16) в смысле устойчивости. При дескрипторном подходе  $\dot{x}(t)$  не заменяется на правую часть дифференциального уравнения. Напротив, он рассматривается как дополнительная компонента состояния дескрипторной системы. Рассмотрим стандартную функцию Ляпунова:

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t), \quad P > 0.$$

Вычислим ее производную, используя второе уравнение дескрипторной системы:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2x^T(t)P\dot{x}(t) + 2[x^T(t)P_2^T + \dot{x}^T(t)P_3^T] \times \\ &\times \left[ -\dot{x}(t) + (A + A_1)x(t) - A_1 \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s)ds \right], \quad (17) \end{aligned}$$

где  $P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – произвольные матричные переменные. В полученной производной у нас нет квадрата интеграла, поэтому при составлении квадратичной формы мы снова получим нулевой минор у соответствующей матрицы. Для компенсации интеграла добавим в функцию Ляпунова следующий член:

$$V_R(\dot{x}_t) = \int_{t-h}^t (h+s-t) \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds, \quad R > 0.$$

где  $h$  – верхняя граница запаздывания  $\tau(t)$ . Дифференцируя  $V_R(\dot{x}_t)$ , получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}_R(\dot{x}_t) &= - \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds + h \dot{x}^T(t) R \dot{x}(t) = \\ &= - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds + h \dot{x}^T(t) R \dot{x}(t) - \\ &\quad - \underbrace{\int_{t-h}^{t-\tau(t)} \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds}_{\text{не будем учитывать}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Применяя неравенство Йенсена<sup>1</sup>, имеем

$$\begin{aligned} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds &\geq \\ &\geq \frac{1}{h} \left( \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s) ds \right) R \left( \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds \right). \end{aligned} \quad (19)$$

<sup>1</sup>Под неравенством Йенсена здесь понимается неравенство вида

$$\int_{-h}^0 \varphi^T(s) R \varphi(s) ds \geq \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \varphi^T(s) ds R \int_{-h}^0 \varphi(s) ds,$$

где  $R$  – положительно определенная матрица, а  $\varphi(s)$  – функция, квадрат которой интегрируем на интервале  $[-h, 0]$ .

Тогда для функционала Ляпунова

$$V(x(t), \dot{x}_t) = x^T(t)Px(t) + V_R(\dot{x}_t),$$

учитывая (17), (18) и (19), находим верхнюю оценку производной:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), \dot{x}_t) &\leq 2x^T(t)P\dot{x}(t) + h\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - \\ &- \frac{1}{h} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s)ds \cdot R \cdot \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s)ds + 2[x^T(t)P_2^T + \dot{x}^T(t)P_3^T] \times \\ &\times \left[ (A + A_1)x(t) - A_1 \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s)ds - \dot{x}(t) \right] \leq \eta^T(t)\Psi\eta(t), \quad (20) \end{aligned}$$

где  $\eta(t) = \text{col}\{x(t), \dot{x}(t), \frac{1}{h} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s)ds\}$ ,

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{bmatrix} \Phi & P - P_2^T + (A + A_1)^T P_3 & -hP_2^T A_1 \\ * & -P_3 - P_3^T + hR & -hP_3^T A_1 \\ * & * & -hR \end{bmatrix}, \quad (21) \\ \Phi &= P_2^T(A + A_1) + (A + A_1)^T P_2. \end{aligned}$$

Знак \* в записи (21) обозначает симметричный элемент матрицы.

Таким образом, разрешимость системы матричных неравенств

$$P > 0, \quad R > 0, \quad \Psi < 0 \quad (22)$$

означает асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (16) при верхней границе запаздывания равной  $h$ . Если предположить, что верхняя граница запаздывания  $h$  неизвестна, то матричное неравенство  $\Psi$  не является линейным. Если мы хотим найти верхнюю границу величины запаздывания, при которой тривиальное решение системы будет устойчивым, мы можем фиксировать и постепенно увеличивать  $h$  до тех пор, пока система линейных матричных неравенств (22) не перестанет быть разрешимой.

## 5.5 Практическая работа №6

**Задание.** Дана система с произвольной постоянной задержкой  $h$ :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h),$$

где  $x \in \mathbb{R}^2$ .

1. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

2. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

3. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

4. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

5. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

6. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

7. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

8. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

9. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

10. Вариант.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

- Промоделировать данную систему в при разных задержках  $h$ . Убедиться, что для некоторых задержек  $h$  система будет устойчивой, тогда как для других – неустойчивой.
- Используя дескрипторный метод, найти максимальную задержку, при которой данная система будет устойчивой.
- Построить регулятор  $u(t) = Kx(t)$  такой, чтобы замкнутая система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Iu(t) = (A + K)x(t) + A_1x(t-h)$$

была устойчивой при любых задержках  $h$ . Для проверки устойчивости замкнутой системы использовать метод функционалов Ляпунова-Красовского.

### 5.5.1 Пример выполнения практической работы

**Задание.** Дана система с произвольной постоянной задержкой  $h$ .

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (23)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

- Промоделировать систему при разных задержках  $h$ . Убедиться, что для некоторых задержек  $h$  система будет устойчивой, тогда как для других - неустойчивой.
- Используя дескрипторный метод, найти максимальную задержку, при которой данная система будет устойчивой.

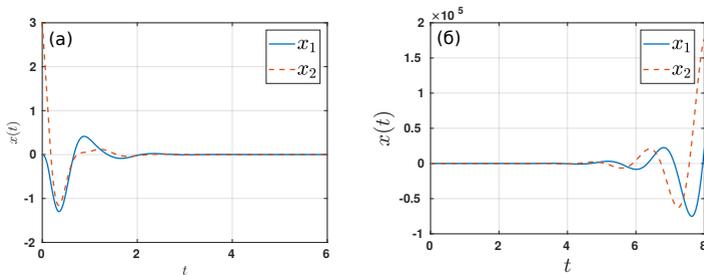


Рис. 5.4: Моделирование системы (23): (а) с задержкой  $h = 0.15$  (устойчивый случай); (б) с задержкой  $h = 0.5$  (неустойчивый случай).

- Построить регулятор  $u(t) = Kx(t)$  такой, что замкнутая система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Iu(t) = (A + K)x(t) + A_1x(t-h)$$

была устойчивой при любых задержках  $h$ . Для проверки устойчивости замкнутой системы использовать метод функционалов Ляпунова-Красовского.

**Решение.** Рассмотрим первый пункт. Результаты моделирования системы (23) для  $h = 0.15$  и  $h = 0.5$  приведены на рис. 5.4.

Рассмотрим второй пункт. Используя дескрипторный метод, найдем максимальную задержку  $h$ , при которой исследуемая система будет устойчивой. Для этого необходимо решить следующую систему линейных матричных неравенств:

$$\begin{bmatrix} \Phi & P - P_2^T(A + A_1)^T P_3 & -hP_2^T A_1 \\ * & -P_3 - P_3^T + hR & -hP_3^T A_1 \\ * & * & -hR \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

$$\Phi = P_2^T(A + A_1) + (A + A_1)^T P_2, \quad P > 0, \quad R > 0.$$

Здесь  $P_2$  и  $P_3$  – произвольные матрицы. В результате решения матричного неравенства (24) в MATLAB получена максимальная задержка  $h = 0.18$ , при которой система является устойчивой.

Рассмотрим последний пункт. Используя метод Ляпунова-Красовского, найдем такое  $K$  для регулятора  $u(t) = Kx(t)$ , чтобы

замкнутая система была устойчива. Для этого достаточно решить матричное неравенство:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^T P + P \tilde{A} + Q & P A_1 \\ A_1^T P & -Q \end{bmatrix} < 0, \quad (25)$$

где  $P = P^T > 0$ ,  $Q = Q^T > 0$ ,  $\tilde{A} = A + K$ . Из решения (25) находим матричный коэффициент  $K$ :

$$K = \begin{bmatrix} -41.2429 & -16.2312 \\ -14.2312 & -24.9259 \end{bmatrix}.$$

## 5.6 Вопросы для самоконтроля

- Какая размерность у системы с запаздыванием  $\dot{x}(t) = -x(t-h)$ ?
- Зачем нужен метод шагов?
- Чему равна передаточная функция звена с запаздыванием  $x(t-h)$ ?
- Для чего используются метод функционалов Ляпунова-Красовского и метод Разумихина?
- В каких случаях лучше использовать метод функционалов Ляпунова-Красовского, а в каких – метод Разумихина?
- Для чего нужен дескрипторный метод?
- В каких случаях Вы будете использовать дескрипторный метод, а в каких метод функционалов Ляпунова-Красовского или Разумихина?

# Глава 6

## Другие виды моделей

### 6.1 Нечеткие модели

#### 6.1.1 Нечеткие множества и лингвистические переменные

В 1965 г. американский математик иранского происхождения Л. Заде опубликовал статью под названием «*Fuzzy sets*», что можно перевести как «*Нечеткие множества*»<sup>1</sup>. В статье было дано новое определение понятия множества, предназначенное для описания и исследования сложных, «плохо определенных» систем. К ним, в частности, относятся гуманистические системы, на поведение которых существенное влияние оказывают знания, суждения и эмоции человека. В таких системах наряду со строгими, объективными, количественными данными и результатами присутствуют неоднозначные, субъективные, качественные данные и результаты, что требует новых подходов.

Поскольку понятие множества лежит в основе всех математических конструкций, статья Л. Заде породила новое научное направление, бурный поток публикаций, специальные конференции и т.д. Произошло «раздвоение» математики: появились нечеткие функции, нечеткие уравнения, нечеткая логика и т.д. [8, 18, 33]. Новый математический аппарат описывает свойства нечетких систем, соответствующих трудно формализуемым, плохо структурированным задачам. В последние годы эти методы стали широко применяться

---

<sup>1</sup>Слово «fuzzy» переводилось на русский язык как «размытые», «расплывчатые», «неопределенные», однако в последние годы чаще всего употребляется термин «нечеткие».

в экспертных программных системах. Ниже излагаются основные понятия теории нечетких систем.

Прежде чем говорить о нечетких системах, необходимо ввести понятие нечеткого множества.

*Нечетким подмножеством*  $A$  множества  $X$  назовем пару  $(X, \mu_A)$ , где  $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$  – функция, каждое значение которой  $\mu_A(x) \in [0, 1]$  интерпретируется как степень принадлежности точки  $x \in X$  множеству  $A$ . Функция  $\mu_A$  называется *функцией принадлежности* множества  $A$ .

Для обычного «четкого» множества  $B$  можно положить

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B, \end{cases}$$

т.е. классическое понятие множества является частным случаем введенного понятия (рис. 6.1, а). Задавать функцию принадлежности можно таблично или аналитически.

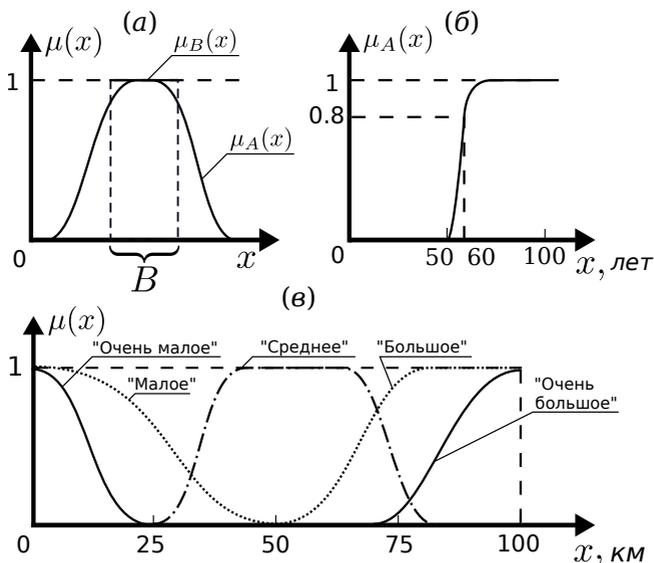


Рис. 6.1: Примеры функций принадлежности.

**Пример 1.** Пусть  $X = \{1, 2, \dots\}$  – множество натуральных чисел, а функция  $\mu_A(x)$  задана таблицей

|            |   |     |     |     |   |   |     |     |     |    |     |
|------------|---|-----|-----|-----|---|---|-----|-----|-----|----|-----|
| $x$        | 1 | 2   | 3   | 4   | 5 | 6 | 7   | 8   | 9   | 10 | ... |
| $\mu_A(x)$ | 0 | 0.1 | 0.6 | 0.8 | 1 | 1 | 0.9 | 0.7 | 0.2 | 0  | ... |

Определенное таким образом нечеткое множество можно принять в качестве формализации понятия «несколько», изначально ясного лишь на интуитивном уровне.

Аналогично можно ввести нечеткие множества, соответствующие понятиям: «много», «мало», «около 100», «почти 20» и т.д. Легко разрешается знаменитый парадокс древних греков: «Сколько зерен составляют кучу?». Ответ состоит в том, что «куча» – нечеткое множество зерен, функцию принадлежности которого можно получить, например, путем опроса.

**Пример 2.** Пусть  $X = [0, \infty]$  – множество положительных чисел, а функция  $\mu_A(x)$  задана формулой

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq x \leq 50, \\ \left(1 + \frac{25}{(x-50)^2}\right)^{-1}, & \text{при } x > 50, \end{cases} \quad (1)$$

график которой изображен на рис. 6.1, б. Если переменную  $x$  интерпретировать как возраст, то нечеткое множество  $A$  соответствует понятию «старый». Аналогично можно формализовать понятия «молодой», «средних лет» и т.д.

Переменные, значениями которых являются нечеткие множества, называются *лингвистическими*. Это основной тип переменных в естественном языке людей.

**Пример 3.** Переменная «расстояние» принимает обычно числовые значения. Однако в предложениях естественного языка она может фигурировать как лингвистическая со значениями «малое», «большое», «очень малое», «среднее», «около 5 км» и т.д. Каждое значение описывается нечетким множеством, которое в рамках данной предметной области может иметь конкретную числовую интерпретацию. Например, если речь идет о поездках на такси, то в качестве универсального множества  $X$  можно взять отрезок  $[0, 100]$  км

и задать функции принадлежности значений переменной «расстояние», как показано на рис. 6.1, в.

Таблица 6.1: **Операции с нечеткими множествами**

| Операция                      | Лингвистический смысл | Формула для $\mu_C(x)$       | График $\mu_C(x)$ |
|-------------------------------|-----------------------|------------------------------|-------------------|
| Пересечение<br>$C = A \cap B$ | И                     | $\min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ |                   |
| Объединение<br>$C = A \cup B$ | ИЛИ                   | $\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ |                   |
| Дополнение<br>$C = \bar{A}$   | НЕ                    | $1 - \mu_A(x)$               |                   |
| Концентрация                  | ОЧЕНЬ                 | $[\mu_A(x)]^2$               |                   |
| Размывание                    | НЕ ОЧЕНЬ              | $\sqrt{\mu_A(x)}$            |                   |

При первом знакомстве с нечеткими множествами обычно возникает недовольство произволом и субъективизмом в задании функций принадлежности: «почему так, а не иначе?». Однако в этом не слабость, а сила подхода! Ведь если само понятие субъективно, то тако-

ва и его формализация, выполняемая человеком. А получаемые результаты должны носить качественный характер и достаточно слабо зависеть от конкретного задания функций принадлежности. С другой стороны, если есть необходимость в более объективных выводах, можно получить оценки  $\mu_A(x)$  путем опроса экспертов.

Для нечетких множеств вводятся операции *пересечения, объединения, дополнения, концентрации, размывания* (табл. 6.1). Первые три являются обобщениями обычных операций; оставшиеся – специфичны для нечетких множеств. Операции позволяют конструировать сложные понятия из простых: «очень много», «не старый и не молодой» и т.п.

По аналогии с четким случаем определяется отношение включения множеств:  $A \subset B$ , если и только если  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$  для всех  $x \in X$ .

### 6.1.2 Нечеткие системы

Аналогично классическому случаю понятие нечеткой системы вводится через понятие нечеткого отношения (частными случаями которого являются понятия «нечеткое отображение», «нечеткая функция»).

*Нечеткое отношение*  $R$  на множествах  $X, Y$  задается функцией  $\mu_R : X \times Y \rightarrow [0, 1]$ , каждое значение которой  $\mu_R(x, y)$  интерпретируется как степень нахождения (совместимости, принадлежности) пары  $(x, y)$  в данном отношении.

Таким образом, нечеткое отношение – это нечеткое подмножество множества  $X \times Y$  всех пар  $(x, y)$ , где  $x \in X, y \in Y$ . Поэтому стандартным способом вводятся пересечение, объединение, дополнение и другие действия над отношениями. Включение отношений  $R \subset S$  ( $\mu_R(x, y) \leq \mu_S(x, y)$ ) интерпретируется как «из  $R$  следует  $S$ ».

Важную роль в теории нечетких систем играет отношение композиции  $S \circ R$ . Если даны отношение  $R$  на множествах  $X, Y$  и отношение  $S$  на множествах  $Y, Z$ , то функция принадлежности отношения  $S \circ R$  на множествах  $X, Z$  задается формулой

$$\mu_{S \circ R}(x, z) = \max_{y \in Y} \{ \min \{ \mu_R(x, y), \mu_S(y, z) \} \}. \quad (2)$$

Можно проверить, что (2) выполняется для обычных четких отношений.

В полной аналогии с обычными системами (см. п. 1.2) *нечеткая система* – это нечеткое отношение между множествами  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{Y}$ , где  $\mathbf{U}$  – множество входных функций времени  $\mathbf{U}(t) : T \rightarrow U$ , а  $\mathbf{Y}$  – множество выходных функций времени  $y(\cdot) : T \rightarrow Y$ . Операция композиции отношений соответствует последовательному соединению систем. Подчеркнем, что для нечетких систем понятие однозначности, детерминированности, теряет смысл: нечеткое отображение и нечеткое отношение неразличимы.

Если множества значений входов и выходов системы конечны, то, как указывалось в п. 1.5, математическую модель системы можно задать таблицами либо набором правил (продукций), например: «ЕСЛИ ( $u = u_i$ ) И ( $x = x_j$ ) ТО ( $y = y_k$ )», или в более компактном виде:

$$(u = u_i, x = x_j) \rightarrow y = y_k. \quad (3)$$

Форма (3) удобна для представления в компьютере и придает описанию системы вид набора причинно-следственных связей<sup>1</sup>. Аналогично обстоит дело и для нечетких систем, входные и выходные переменные которых могут принимать нечеткие значения, т.е. являются лингвистическими. Примеры нечетких правил:

$$\begin{aligned} (u = \text{«малое»}) &\rightarrow (y = \text{«большое»}), \\ (u(t) = \text{«около 0.5»}, x(t-1) = \text{«большое»}) &\rightarrow \\ &\rightarrow (x(t) = \text{«очень большое»}). \end{aligned}$$

**Пример 4.** Рассмотрим систему простейшего прогноза погоды в городе, основанную на том наблюдении, что погода чаще сохраняется, чем меняется: погода завтра будет скорей всего такая же, как сегодня. Для простоты пусть множество входов системы (возможных значений переменной «погода сегодня») состоит из трех элементов: «ясно» (Я), «пасмурно» (П), «дождь» (Д), т.е.  $U = \{\text{Я}, \text{П}, \text{Д}\}$ . Таким же пусть будет и множество выходов (прогнозы на завтра):  $Y = \{\text{Я}, \text{П}, \text{Д}\}$ . Если описать математическую модель простейшего прогноза как четкую, то ее можно представить таблицей:

<sup>1</sup> При этом фактическая причинно-следственная связь может отсутствовать (пример: ЕСЛИ «тебе за сорок» И «с утра у тебя ничего не болит», ТО «ты умер»).

| $U$ | $Y$ |   |   |
|-----|-----|---|---|
|     | Я   | П | Д |
| Я   | 1   | 0 | 0 |
| П   | 0   | 1 | 0 |
| Д   | 0   | 0 | 1 |

или, более экономно, набором правил:

$$(u = \text{Я}) \rightarrow (y = \text{Я}); (u = \text{П}) \rightarrow (y = \text{П}); (u = \text{Д}) \rightarrow (y = \text{Д}).$$

Однако прогноз погоды – дело ненадежное и субъективное, поэтому более адекватной является нечеткая математическая модель, в которой отношение между входами и выходами системы  $R_0$  задается таблицей значений функции принадлежности, имеющей, например, вид табл. 6.2.

Таблица 6.2: Таблица значений функции принадлежности отношения  $R_0$ .

| $U$ | $Y$ |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
|     | Я   | П   | Д   |
| Я   | 0.8 | 0.4 | 0.3 |
| П   | 0.4 | 0.8 | 0.4 |
| Д   | 0.3 | 0.4 | 0.8 |

Можно использовать и нечеткие правила (продукции), например:

$$(u = \text{Я}) \rightarrow (y = \text{Я}|0.8 \text{ или } \text{П}|0.4 \text{ или } \text{Д}|0.3).$$

Пусть теперь входная переменная  $\omega_0$  («погода сегодня») приняла некоторое значение. Оно, естественно, должно быть нечетким (ведь нет четкой границы между значениями «ясно» и «пасмурно», да и дождь может идти не по всему городу) и определяться, например, по сообщениям экспертов. Пусть в результате усреднения мнений группы экспертов  $\omega_0$  задается как

|                     |     |     |     |
|---------------------|-----|-----|-----|
| $x$                 | Я   | П   | Д   |
| $\mu_{\omega_0}(x)$ | 0.4 | 0.5 | 0.1 |

Как узнать прогноз на завтра? Вспомним, что множество – частный случай отношения, и представим его как отношение  $W_0$  с фиктивным одноэлементным множеством входов и нечетким множеством выходов. Теперь легко понять, что значение переменной «погода завтра» ( $\omega_1$ ) определится с помощью соответствующего отношения  $W_1$  по формуле композиции отношений (2)<sup>1</sup>.

Таким образом,  $W_1 = R_0 \circ W_0$  и, значит, например,

$$\begin{aligned} \mu_{\omega_1}(\text{Я}) &= \max\{\min\{0.1, 0.3\}, \min\{0.5, 0.4\}, \min\{0.4, 0.8\}\} = \\ &= \max\{0.1, 0.4, 0.4\} = 0.4. \end{aligned}$$

Итоговая таблица прогноза на завтра имеет вид

|                     |     |     |     |
|---------------------|-----|-----|-----|
| $y$                 | Я   | П   | Д   |
| $\mu_{\omega_1}(y)$ | 0.4 | 0.5 | 0.4 |

Полученный результат можно снова подать на вход системы прогноза и получить новый результат «прогноз на послезавтра»:

$$W_2 = R \circ W_1 = (R \circ R) \circ W_0.$$

Правило вывода, соответствующее композиции нечетких отношений, называется *композиционным правилом вывода* и составляет основу *нечеткой логики*. В нечеткой логике значения истинности предложений лежат от нуля до единицы; закон исключенного третьего не выполняется.

Приведенный пример обнаруживает глубокую аналогию между понятиями «система» и «логическое исчисление» (аксиоматической или дедуктивной системы [55]). Действительно, значение входа системы соответствует в исчислении аксиомам и фактам (утверждениям), а отношение «вход – выход» (ММ системы) – набору правил (продукций, импликаций) исчисления. Вычисление значения выхода

<sup>1</sup> Чтобы убедиться в этом, нужно рассмотреть все возможные случаи типа «завтра ясно» ЕСЛИ {«сегодня ясно» И («сегодня ясно» ВЛЕЧЕТ «завтра ясно»)} ИЛИ {«сегодня пасмурно» И («сегодня пасмурно» ВЛЕЧЕТ «завтра ясно»)} ИЛИ {«сегодня дождь» И («сегодня дождь» ВЛЕЧЕТ «завтра ясно»)}. При этом надо учесть, что связи И, ИЛИ формализуются по табл. 6.1, а отношение ВЛЕЧЕТ задано в табл. 6.2.

системы  $B$  по значению ее входа  $A$  соответствует шагу логического вывода по правилу

$$(A, A \rightarrow B) \Rightarrow B. \quad (4)$$

Единственное отличие системы от исчисления: на каждом шаге работы системы используется только текущее состояние, а исчисление обрабатывает все утверждения, выведенные ранее. Различие устраняется, если включить в состояние системы всю ее предысторию. Это показывает, что рассмотренные выше модели систем с конечной памятью пригодны для описания более узкого класса систем, чем логические исчисления. Однако это означает, что анализ моделей, заданных как исчисления, требует больше вычислений, т.е. недостаток обращается в достоинство.

### 6.1.3 Задачи группировки и упорядочения

Нечеткие отношения, как и обычные, могут обладать специальными свойствами. Для отношения  $R : X \times X \rightarrow [0, 1]$  рассмотрим свойства:

- рефлексивность  $R(x, x) = 1$  для всех  $x \in X$ ;
- симметричность  $R(x, y) = R(y, x)$  для всех  $x, y \in X$ ;
- антисимметричность  $\min\{R(x, y), R(y, x)\} = 0$  при  $x \neq y$ ;
- транзитивность  $R(x, z) \geq \min\{R(x, y), R(y, z)\}$  для всех  $x, y, z \in X$ .

Отношение называется отношением *сходства*, если оно рефлексивно и симметрично. Рефлексивность и антисимметричность характеризуют отношение *доминирования*. Если к перечисленным свойствам добавляется свойство транзитивности, то отношение соответственно называют *эквивалентностью* и *порядком*. На основе введенных определений строятся процедуры решения двух практически важных задач.

**Задача группировки** (*кластеризации, таксономии*). На конечном множестве объектов  $\{x_1, \dots, x_n\}$  задано отношение сходства (для любых двух объектов задана степень их близости, схожести). Требуется разбить все множество на группы объектов, близких между

собой. Эта задача встречается при классификации минералов, материалов по их свойствам, систематике биологических организмов (видов), определении психологической совместимости коллективов. Процедура группировки состоит в том, что сначала исходное отношение сходства  $R$  преобразуется в отношение эквивалентности  $\bar{R}$  путем транзитивного замыкания<sup>1</sup>, а затем производится разбиение на классы эквивалентности при различных величинах порога близости  $\alpha$ . К одному классу относятся объекты  $x, y$ , для которых  $\bar{R}(x, y) \geq \alpha$ .

**Задача упорядочения.** На конечном множестве объектов  $\{x_1, \dots, x_n\}$  задано отношение доминирования, т.е. указаны степени предпочтения для каждой пары объектов. Требуется линейно упорядочить объекты: указать наилучший, затем следующий за ним и т.д. Задача возникает, например, при выборе наиболее предпочтительного проектного варианта. Парные предпочтения вариантов задаются независимыми экспертами или критериями сравнения. Ясно, что получается нечеткое отношение доминирования, поскольку для каждой пары объектов  $(x_i, x_j)$  определяется  $R(x_i, x_j)$  – число экспертов<sup>2</sup> (критериев), которые предпочитают  $x_i$ , и число  $R(x_j, x_i)$  экспертов (критериев), предпочитающих  $x_j$ . Аналогичные задачи возникают при оценке результатов работы и распределении премий в трудовом коллективе и т.п. Один из существующих способов решения задачи состоит [8] в построении так называемой *функции полезности*  $\varphi(x_i)$ , характеризующей степень предпочтения данного объекта, т.е. сводящей оценки разных экспертов в одну. Можно использовать следующую формулу:

$$\varphi(x_i) = \min_{j (j \neq i)} \frac{R(x_i, x_j)}{R(x_j, x_i)}. \quad (5)$$

Например, для отношения  $R(x_i, x_j)$ , заданного таблицей

<sup>1</sup> Транзитивное замыкание – операция, которая строит по данному отношению  $R$  наименьшее транзитивное отношение, включающее  $R$ . Она выполняется по формуле

$$\bar{R}(x, y) = \max_{(n, y_1, \dots, y_n)} \min\{R(x, y_1), R(y_1, y_2), \dots, R(y_n, y)\}.$$

<sup>2</sup> Строго говоря, числа  $R(x_i, x_j)$  не удовлетворяют определению нечеткого отношения, так как могут не лежать в промежутке  $[0, 1]$ . Можно их пронормировать, разделив, например, на максимальное, однако на результате, как видно из (5), это не отразится.

| $x_i$ | $x_j$ |       |       |
|-------|-------|-------|-------|
|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
| $x_1$ | -     | 3     | 4     |
| $x_2$ | 1     | -     | 2     |
| $x_3$ | 5     | 8     | -     |

получаем:

$$\varphi(x_1) = \min \left\{ \frac{3}{1}, \frac{4}{5} \right\} = \frac{4}{5}; \quad \varphi(x_2) = \min \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{8} \right\} = \frac{1}{4};$$

$$\varphi(x_3) = \min \left\{ \frac{8}{2}, \frac{5}{4} \right\} = \frac{5}{4},$$

что приводит к упорядочению: 1)  $x_3$ , 2)  $x_1$ , 3)  $x_2$ .

Отметим, что если число объектов достаточно велико или бесконечно, следует применять более сложные методы, разработанные для распознавания образов и искусственного интеллекта [53].

#### 6.1.4 Нечеткие числа

Рассмотрим свойства и применения нечетких подмножеств числовой оси  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$  – так называемых *нечетких чисел*. Над нечеткими числами можно производить арифметические и иные действия, правила выполнения которых вытекают из правил действий с отношениями (см. п. 6.1.2) и из того, что любую бинарную операцию можно рассматривать как тернарное (3-местное) отношение. Например, функция принадлежности нечеткой суммы  $C = A \oplus B$  нечетких чисел  $A, B$  имеет вид

$$\mu_C(z) = \sup_{x+y=z} \min \{ \mu_A(x), \mu_B(y) \}. \quad (6)$$

Прикладной смысл нечеткого числа – это число, заданное с погрешностью. Для того чтобы работать с такими числами, нужно задавать функции принадлежности и погрешностей, а это невозможно сделать во всех  $x \in \mathbb{R}$  в силу бесконечности множества  $\mathbb{R}$ . Один из способов преодоления этой трудности – использование нечетких  $L-R$ -чисел ( $L-R$  – сокращение от «left – right»).

Чтобы определить нечеткие  $L-R$ -числа, на промежутке  $[0, \infty)$  задаются две невозрастающие неотрицательные функции  $L(x), R(x)$ , обладающие свойствами  $L(0) = R(0) = 1$ . После этого функцию принадлежности нечеткого числа  $A$  определяют в виде

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right) & \text{при } x \leq \alpha, \\ R\left(\frac{x-a}{\beta}\right) & \text{при } x > \beta, \end{cases} \quad (7)$$

где  $a$  – вещественное число, называемое *средним значением* (употребляют также термины «центр», «мода») нечеткого числа;  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  – *левый и правый коэффициенты нечеткости*. Если  $L(x) = R(x)$ ,  $\alpha = \beta$ , то нечеткое число называют *симметричным*.

Примеры задания  $L-R$ -чисел при  $L(x) = R(x)$  приведены в табл. 6.3, из которой видно, что  $L-R$ -нечеткость можно интерпретировать как способ взвешенного учета погрешностей. Первый пример соответствует обычному четкому числу без погрешности. Выбрав способ из второго примера, мы выражаем уверенность в том, что искаженное погрешностью число должно лежать в промежутке от  $a-$  до  $a+$  и не может оказаться где-то в другом месте. Это обычный способ учета погрешности путем указания ее границ. Остальные примеры соответствуют различным промежуточным случаям.

Поскольку функции  $L(x), R(x)$  задаются заранее и не меняются, для выполнения действий с  $L-R$ -числами достаточно помнить лишь тройку  $A = \{a, \alpha, \beta\}$ . Правила арифметики  $L-R$ -чисел вытекают из общих правил арифметики нечетких чисел (см. например, (6)) и напоминают правила распространения ошибок в приближенных вычислениях. Если  $A = \{a, \alpha, \beta\}$ ,  $B = \{b, \gamma, \delta\}$ , то

$$A \oplus B = \{a + b, \alpha + \gamma, \beta + \delta\},$$

$$A \ominus B = \{a - b, \alpha + \delta, \beta + \gamma\},$$

$$A \odot B = \{ab, a\gamma + b\alpha + \alpha\gamma, a\delta + b\beta + \beta\delta\}, \quad (\text{при } a, b > 0).$$

Если  $B$  – четкое число ( $\gamma = \delta = 0$ ), то  $A \odot B = \{ab, \alpha|b|, \beta|b|\}$ .

Другой способ работы с нечеткими числами состоит в том, что числовая ось (отрезок) дискретизируется, т.е. разбивается на несколько участков. После этого каждый участок «размывается», т.е. описывается некоторой функцией принадлежности, и числовые переменные превращаются в лингвистические. Этот способ эффективен при построении моделей сложных систем со значительной

Таблица 6.3: Примеры нечетких  $L$ - $R$ -чисел.

| Функция $L(x)$  | График функции $L(x)$ | График функции принадлежности $\mu_A(x, a, \alpha, \beta)$ |
|---|-----------------------|--|
| $L(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$             |                       |  |
| $L(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$   |                       |  |
| $L(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$ |                       |  |
| $L(x) = e^{-x}$   |                       |  |
| $L(x) = e^{-x^2}$   |                       |  |
| $L(x) = \frac{1}{1+x}$  |                       |  |
| $L(x) = \frac{1}{1+x^2}$  |                       |  |

неопределенностью исходных данных, а следовательно, и результатов. Число градаций (участков дискретизации) должно быть невелико. Психологи рекомендуют брать его в пределах  $5 \pm 2$  градаций.

### 6.1.5 Вероятность или нечеткость?

Продемонстрируем на простом примере разницу между стохастическим и нечетким подходами. Пусть сделано несколько измерений  $x_1, \dots, x_n$  некоторой неизвестной величины  $a$  с погрешностью, не превосходящей величины  $a$ . Требуется оценить значение  $a$  и определить погрешность оценки.

Предположим, что в качестве оценки выбрано среднее арифметическое

$$x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

При стохастическом подходе мы постулируем, что  $x_i$  случайны и независимы,  $Mx_i = a$ , и, поскольку погрешность может быть произвольным числом из  $[-\alpha, \alpha]$ , считаем, что  $x_i$  равномерно распределены на  $[a - \alpha, a + \alpha]$ . Отсюда  $Dx_i = (2\alpha)^2/12 = \alpha^2/3$ . В силу независимости  $Dx = (1/n)Dx_i = \alpha^2/3n$  и по формуле из центральной предельной теоремы получим, что

$$|\bar{x} - a| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{3n}} \quad (8)$$

с вероятностью 0.95. Аналогичный вывод справедлив и при известном  $\alpha$ . В этом случае нужно заменить в (8)  $\alpha$  на

$$\bar{\alpha} = \sqrt{\frac{3}{n-1} \sum_{n=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$

Примем теперь нечеткую модель измерений. Естественно представить измерение как нечеткое  $L-R$ -число  $X_i = \{a, \alpha, \alpha\}$  со следующей характеристикой:  $L(x) = R(x) = 1$  при  $0 \leq x \leq 1$ ,  $L(x) = R(x) = 0$  при  $x > 1$ , т.е. как во втором примере табл. 6.3. Тогда  $\sum X_i = \{na, n\alpha, n\alpha\}$ , откуда  $\bar{X} = \{a, \alpha, \alpha\}$ , т.е. погрешность оценки определится неравенством

$$|\bar{x} - a| \leq \alpha. \quad (9)$$

Сравнивая (8) и (9), мы видим, что интервал (8) меньше примерно в  $\sqrt{n}$  раз. Это получено за счет эффекта усреднения. Если же нет уверенности в том, что погрешности ведут себя нерегулярно и уничтожаются при усреднении, то доверять (8) нельзя, и мы возвращаемся к оценке (9). Однако за нечетким подходом остаются дополнительные возможности. Например, имея информацию о том, что малые значения погрешностей встречаются чаще, чем большие, мы можем взять функции  $L(x)$ ,  $R(x)$ , как в третьем примере из табл. 6.3. Соответственно, меняется функция принадлежности  $\bar{X}$  и (9) уточняется.

Кроме того, если  $n$  мало, например  $n = 10$ , то проверить правомерность усреднения практически невозможно. В результате оценка погрешности при  $n = 10$  по (8) получается всего в 2.7 раза меньше, чем по (9), причем она верна лишь в 95% случаев и при труднопроверяемых предположениях.

Отметим, что выбор  $\bar{x}$  в качестве оценки – не единственно возможный. В духе нечеткой теории можно взять «лингвистическую» оценку:  $\tilde{x} = x_1$ , и  $x_2$ , и ..., и  $x_n$ . Поскольку  $\mu_{\tilde{x}}(x) = \min_i \mu_{X_i}(x)$ , для симметричных  $L$ – $R$ -чисел при строго убывающей  $R(x) > 0$  получим  $\tilde{x} = (\max x_i + \min x_i)/2$ .

В заключение следует заметить также, что кроме описанных в (6) вариантов действий с нечеткими множествами имеется еще несколько, среди которых наиболее употребителен способ, заимствованный из теории вероятностей:

$$\begin{aligned}\mu_{A \cap B}(x) &= \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \\ \mu_{A \cup B}(x) &= \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x).\end{aligned}\tag{10}$$

Операции, определенные в (10), называют иногда *произведением* и *суммой нечетких множеств*.

## 6.2 Нейронные сети

В последнее время для решения различного рода задач стали активно использоваться искусственные нейронные сети. Они находят свое применение в задачах прогнозирования, распознавания образов, синтеза алгоритмов управления и др.

*Искусственная нейронная сеть* – математическая модель сетевой системы, включающая также ее программное воплощение, по-

строенная по принципу организации и функционирования биологических нейронных сетей.

Приведем краткую историю развития искусственных нейронных сетей. В 1943 г. У. МакКаллок и У. Питтс формализовали понятие нейронной сети [72]. Первое работающее правило обучения искусственных нейронных сетей было разработано Д. Хеббом [65] в 1949 г. В 1958 г. Ф. Розенблатт изобретает однослойный перцептрон и демонстрирует его способность решать задачи классификации [75]. В 1982 г. Дж. Хопфилд показал, что нейронная сеть с обратными связями может представлять собой систему, минимизирующую энергию (так называемая сеть Хопфилда) [67]. А Т. Кохоненом представлены модели сети, обучающейся без учителя [21]. Далее был некоторый застой в этой области. Однако развитие технологий привело к тому, что обучение нейронных сетей стало занимать намного меньше времени, чем ранее. В 2006 г. Д. Хинтон разработал быстрый алгоритм для глубокого обучения [66]. И, начиная с этого времени, нейронные сети стали справляться с некоторыми задачами распознавания образов лучше, чем обычные алгоритмы классификации.

## 6.2.1 Математическая модель нейрона

В основе нейронной сети лежит математическая модель нейрона. Нейрон – клетка, имеющая тело (мембрану), несколько коротких отростков, по которым к нему поступает информация от других нейронов (дендриты), и один длинный отросток, через который нейрон передает информацию другим нейронам (аксон). При достижении некоторого порогового значения разницы потенциалов снаружи и внутри мембраны нейрона он сокращается, т.е. испускает импульс, идущий по аксону к другим нейронам. Математическая модель нейрона изображена на рис. 6.2.

Информацию, которая приходит к рассматриваемому нейрону от  $i$ -го обозначим через  $x_i$ . Пропускную способность  $i$ -го входящего канала (дендрита), обозначим через  $w_i$ . Тогда общий вход рассматриваемого нейрона можно записать как

$$z = \sum_{i=1}^n w_i x_i.$$

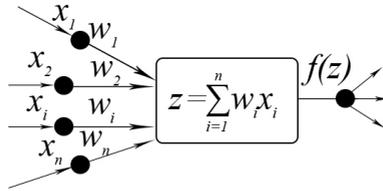


Рис. 6.2: Математическая модель нейрона.

Также требуется ввести некоторую функцию, которая будет отвечать за порог сокращения нейрона. В качестве такой функции выберем какую-нибудь непрерывную функцию  $f(z)$ , которая больше всего похожа на пороговую:  $\text{sign } z$ . В качестве  $f(z)$  можно выбрать, например,  $\arctg z$ ,  $\text{th } z$  – гиперболический тангенс. Мы же в качестве функции  $f(z)$  выберем сигмоиду:

$$f(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}} = (1 + e^{-z})^{-1}. \quad (11)$$

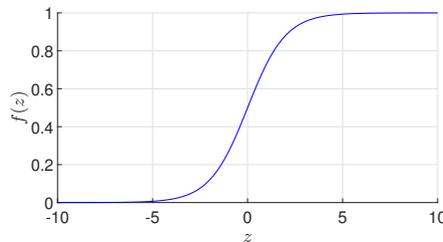


Рис. 6.3: График сигмоиды (11).

График сигмоиды изображен на рис. 6.3. Значение функции  $f(z)$  будет являться выходом рассматриваемого нейрона.

Вычислим производную сигмоиды (11):

$$f'(z) = (1 + e^{-z})^{-2} e^{-z} = f(z)(1 - f(z)).$$

Знание производной сигмоиды нам понадобится для дальнейшей работы.

Теперь мы готовы описать модель искусственной нейронной сети.

## 6.2.2 Прямое распространение

Рассмотрим простейшую искусственную нейронную сеть. Для ее описания удобно использовать графы. Модель нейронной сети приведена на рис. 6.4.

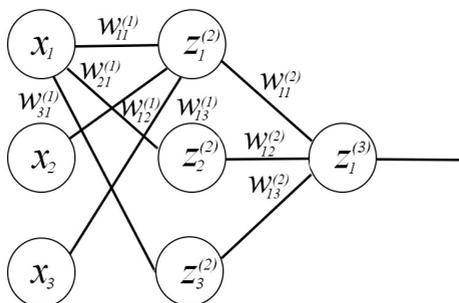


Рис. 6.4: Модель нейронной сети.

Нейронная сеть состоит из слоев нейронов. В каждом слое может быть несколько нейронов. На рис. 6.4 слой слева – *входящий слой* из нейронов  $x_1, x_2, x_3$ . Входом этого слоя является вход всей нейронной сети. Информацию, с которой будет работать нейронная сеть, подается именно на входящий слой. Слой справа на рис. 6.4 – *выходной слой*, состоящий из нейрона  $z_1^{(3)}$ . Он определяет выход всей сети. Слой нейронов посередине – *скрытый слой*. Количество слоев, количество нейронов в каждом слое определяют структуру всей нейронной сети. Если в нейронной сети есть хотя бы один скрытый слой, то она называется *глубокой*.

По сути, на выходе каждый нейрон принимает лишь два значения 0 и 1. Нейронная сеть, изображенная на рис. 6.4, имеет лишь один нейрон в выходном слое, т.е. множество выходов всей сети состоит из двух элементов  $\{0, 1\}$ . Мы можем использовать такую сеть для задач классификации – например, подавать на вход сети закодированные изображения. А на выходе сеть будет выдавать 1, если в изображении присутствует яблоко, и 0 – в противном случае.

Обозначим вектор входов  $x = \text{col}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , вектор скрыто-

го слоя  $z^{(k)} = \text{col}\{z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \dots, z_n^{(k)}\}$ . Верхний индекс  $(k)$  означает номер слоя в сети, тогда как нижний индекс  $i$  отвечает за номер нейрона в слое. Рассмотрим также веса каналов связи между нейронами  $w_{ij}^{(k)}$ . Верхний индекс  $(k)$  определяет веса между  $k-1$  и  $k$  слоями. Нижний индекс  $ij$  говорит о том, что информация поступает от нейрона  $z_j^{(k-1)}$  в  $(k-1)$  слое к нейрону  $z_i^{(k)}$  в  $k$  слое с пропускной способностью  $w_{ij}^{(k)}$ . Такой порядок индексов  $i, j$  обусловлен тем, чтобы при получении матриц весовых коэффициентов индексы были стандартно расположены ( $i$  – номер строки,  $j$  – номер столбца).

Рассмотрим сеть, представленную на рис. 6.4, и выпишем значение входа нейрона  $z_1^{(2)}$ :

$$z_1^{(2)} = w_{11}^{(1)} x_1 + w_{12}^{(1)} x_2 + w_{13}^{(1)} x_3 + b_1^{(1)}. \quad (12)$$

Мы получили линейную функцию. Для большей вариативности мы также добавили свободный член  $b_1^{(1)}$ . Аналогично можем выписать значения входов нейронов  $z_2^{(2)}$  и  $z_3^{(2)}$ :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_1^{(2)} \\ z_2^{(2)} \\ z_3^{(2)} \end{pmatrix}}_{z^{(2)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} w_{11}^{(1)} & w_{12}^{(1)} & w_{13}^{(1)} \\ w_{21}^{(1)} & w_{22}^{(1)} & w_{23}^{(1)} \\ w_{31}^{(1)} & w_{32}^{(1)} & w_{33}^{(1)} \end{pmatrix}}_{W^{(1)}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \end{pmatrix}}_{b^{(1)}},$$

или в матричном виде:

$$z^{(2)} = W^{(1)}x + b^{(1)}.$$

Обозначим за  $h^{(i)}$  – вектор выходов  $i$ -го слоя, тогда выход нейронов скрытого слоя определяется как

$$h^{(2)} = f(z^{(2)}).$$

Теперь обозначим  $h_{W,b}$  – выход всей нейронной сети, где  $W$  – матрица из всех весовых коэффициентов в нейронной сети, а  $b$  – вектор из всех свободных членов нейронной сети. Значит,

$$\begin{aligned} z^{(3)} &= W^{(2)}z^{(2)} + b^{(2)}, \\ h_{W,b} &= h^{(3)} = f(z^{(3)}). \end{aligned}$$

Или в общем виде:

$$\begin{aligned} z^{(k+1)} &= W^{(k)} z^{(k)} + b^{(k)}, \\ h^{(k+1)} &= f(z^{(k+1)}). \end{aligned}$$

Таким образом можно вычислить выход всей нейронной сети. Этот алгоритм называется *прямым распространением*.

### 6.2.3 Обратное распространение

Возникает вопрос: как выбрать весовые коэффициенты  $w_{ij}^{(k)}$  и  $b_i^{(k)}$ ? Настройка весовых коэффициентов называется *алгоритмом обучения* нейронной сети. Допустим, у нас имеется некоторый набор данных  $\{x^1, \dots, x^m\}$ , и для каждого из этих данных нам известно, какое значение должно быть на выходе у нейронной сети  $\{y^1, \dots, y^m\}$ . Таким образом, мы имеем набор упорядоченных пар  $(x^l, y^l)$ ,  $l = 1, \dots, m$ , где  $x^l$  – вектор входов, а  $y^l$  – известный вектор выходов. Для каждой пары  $(x^l, y^l)$  введем следующую функцию оценки:

$$J(W, b, x^l, y^l) = \frac{1}{2} \|y^l - h_{W,b}(x^l)\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i^l - h_{W,b}(x_i^l))^2. \quad (13)$$

Тогда для всего набора данных

$$J(W, b) = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m J(W, b, x^l, y^l). \quad (14)$$

Задача состоит в нахождении такой матрицы  $W$  и вектора  $b$ , чтобы минимизировать функцию ошибки (14). Эту задачу можно решить с помощью метода *градиентного спуска*.

**Градиентный спуск.** Рассмотрим некоторую неотрицательную функцию  $f(x)$ , которая имеет минимум в точке  $f(x^*) = y^*$ . Задача состоит в том, чтобы найти эту точку минимума. Начинать поиск мы будем с некоторой точки  $x_c$ . Найдем производную функции  $f(x)$  в этой точке  $f'(x_c)$ . Следующую точку будем выбирать в виде:

$$x_{\text{н}} = x_c - \gamma f'(x_c),$$

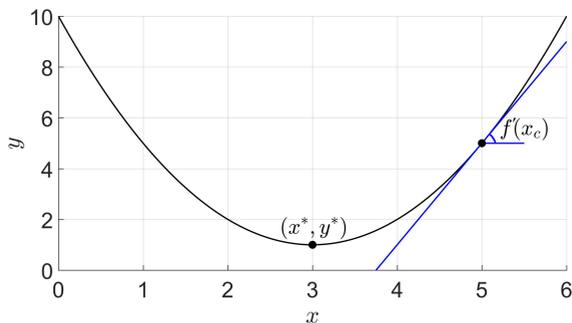


Рис. 6.5: Градиентный спуск.

где  $\gamma > 0$  – коэффициент усиления. Значение функции в новой точке  $f(x_n)$  будет меньше, чем значение функции в старой точке  $f(x_c)$ , тем самым мы приблизимся к искомой точке минимума. Рассмотрим рис. 6.5 и функцию, график которой изображен на нем. Действительно, если мы находимся справа от точки минимума, то  $f'(x_c) > 0$ , следовательно,  $x_n < x_c$ . Если же мы находимся слева от точки минимума, то  $f'(x_c) < 0$ , следовательно,  $x_n > x_c$ . В обоих случаях мы приближаемся к точке минимума. Таким образом можно запустить этот итеративный процесс, пока не достигнем точки минимума.

Проблема заключается в том, что при выборе достаточно большого коэффициента усиления  $\gamma$  мы можем перескочить точку минимума. А при выборе достаточно малого  $\gamma$  итеративный процесс может занять много времени.

Применим метод градиентного спуска для поиска минимума функции (14). Тогда весовые коэффициенты на каждом шаге нужно будет изменять следующим образом:

$$w_{ij}^{(k)} := w_{ij}^{(k)} - \gamma \frac{\partial J(W, b)}{\partial w_{ij}^{(k)}}, \quad b_i^{(k)} := b_i^{(k)} - \gamma \frac{\partial J(W, b)}{\partial b_i^{(k)}}.$$

Таким образом, нужно найти все частные производные по всем весам  $w_{ij}^{(k)}$  и свободным коэффициентам  $b_i^{(k)}$ .

Рассмотрим пример сети, изображенной на рис. 6.4. Предположим, что набор данных состоит всего из одной пары  $(x, y)$ . Для при-

мера найдем частную производную по весу  $w_{12}^{(2)}$ , который находится между выходным и скрытым слоями. Тогда, учитывая уравнения (13) и

$$h_{W,b} = h^{(3)} = f(z^{(3)}),$$

$$z_1^{(3)} = w_{11}^{(2)} h_1^{(2)} + w_{12}^{(2)} h_2^{(2)} + w_{13}^{(2)} h_3^{(2)} + b_1^{(2)},$$

получим

$$\frac{\partial J}{\partial w_{12}^{(2)}} = \frac{\partial J}{\partial h_1^{(3)}} \cdot \frac{\partial h_1^{(3)}}{\partial z_1^{(3)}} \cdot \frac{\partial z_1^{(3)}}{\partial w_{12}^{(2)}},$$

где

$$\frac{\partial J}{\partial h_1^{(3)}} = -(y - h_1^{(3)}), \quad \frac{\partial h_1^{(3)}}{\partial z_1^{(3)}} = f'(z_1^{(3)}) = f(z_1^{(3)})[1 - f(z_1^{(3)})],$$

$$\frac{\partial z_1^{(3)}}{\partial w_{12}^{(2)}} = h_2^{(2)}. \quad (15)$$

Введем следующее обозначение для выходного слоя:

$$\delta_i^{(N)} = -(y_i - h_i^{(N)})f'(z_i^{(N)}),$$

где  $N$  – количество слоев в сети. Тогда для рассматриваемого примера:

$$\frac{\partial J}{\partial w_{12}^{(2)}} = \delta_1^{(3)} h_2^{(2)}.$$

Теперь рассмотрим, чему равна частная производная по весам скрытых слоев. Найдем  $\partial J / \partial w_{11}^{(1)}$  как производную сложной функции:

$$\frac{\partial J}{\partial w_{11}^{(1)}} = \frac{\partial J}{\partial h_1^{(3)}} \cdot \frac{\partial h_1^{(3)}}{\partial z_1^{(3)}} \cdot \frac{\partial z_1^{(3)}}{\partial h_1^{(2)}} \cdot \frac{\partial h_1^{(2)}}{\partial z_1^{(2)}} \cdot \frac{\partial z_1^{(2)}}{\partial w_{11}^{(1)}},$$

где

$$\frac{\partial z_1^{(3)}}{\partial h_1^{(2)}} = w_{11}^{(2)}, \quad \frac{\partial h_1^{(2)}}{\partial z_1^{(2)}} = f'(z_1^{(2)}), \quad \frac{\partial z_1^{(2)}}{\partial w_{11}^{(1)}} = h_1^{(1)}.$$

Для вычисления частных производных мы использовали формулы (12) и  $h_1^{(2)} = f(z_1^{(2)})$ . Остальные частные производные определяются по формуле (15). Введем следующее обозначение для скрытых слоев:

$$\delta_j^{(k)} = \delta_1^{(k+1)} w_{1j}^{(k)} f'(z_j^{(k)}).$$

Если выходов несколько, то

$$\delta_j^{(k)} = \left[ \sum_{i=1}^{S_{k+1}} w_{ij}^{(k)} \delta_i^{(k+1)} \right] f'(z_j^{(k)}),$$

где  $S_{k+1}$  – количество узлов в слое  $(k+1)$ , тогда

$$\frac{\partial J}{\partial w_{11}^{(1)}} = \delta_1^{(2)} h_1^{(1)}.$$

Таким образом, имеем следующий алгоритм для вычисления частных производных:

$$\frac{\partial J(W, b)}{\partial w_{ij}^{(k)}} = h_j^{(k)} \delta_i^{(k+1)}, \quad \frac{\partial J(W, b)}{\partial b_i^{(k)}} = \delta_i^{(k+1)},$$

где

$$\delta_j^{(k)} = \left[ \sum_{i=1}^{S_{k+1}} w_{ij}^{(k)} \delta_i^{(k+1)} \right] f'(z_j^{(k)}) \quad - \text{ для скрытых слоев,} \quad (16)$$

$$\delta_i^{(N)} = -(y_i - h_i^{(N)}) f'(z_i^{(N)}) \quad - \text{ для выходного слоя.}$$

Запишем итерационный процесс в матричной форме:

$$W^{(k)} := W^{(k)} - \gamma \frac{\partial J(W, b)}{\partial W^{(k)}} = W^{(k)} - \frac{\gamma}{m} \sum_{l=1}^m \frac{\partial J(W, b, x^l, y^l)}{\partial W^{(k)}},$$

$$b^{(k)} := b^{(k)} - \frac{\partial J(W, b)}{\partial b^{(k)}} = b^{(k)} - \sum_{l=1}^m \frac{\partial J(W, b, x^l, y^l)}{\partial b^{(k)}}.$$

Вычисляем сумму поэлементно. То есть в начале положим  $\Delta W^{(k)} = 0$  и  $\Delta b^{(k)} = 0$ , тогда на  $l$  шаге получим:

$$\Delta W^{(k)} := \Delta W^{(k)} + \frac{\partial J(W, b, x^l, y^l)}{\partial W^{(k)}} = \Delta W^{(k)} + \delta^{(k+1)} \left( h^{(k)} \right)^T,$$

$$\Delta b^{(k)} := \Delta b^{(k)} + \frac{\partial J(W, b, x^l, y^l)}{\partial b^{(k)}} = \Delta b^{(k)} + \delta^{(k+1)}.$$

где  $\delta^{(k+1)}$  вычисляются по формулам (16). А затем меняем веса:

$$W^{(k)} := W^{(k)} - \frac{\gamma}{m} \Delta W^{(k)}, \quad b^{(k)} := b^{(k)} - \frac{\gamma}{m} \Delta b^{(k)}.$$

Данный алгоритм носит название *алгоритм обратного распространения ошибки* и применяется для корректировки весов в нейронных сетях с целью их обучения.

### 6.3 Вопросы для самоконтроля

- Чем отличается нечеткое множество от «четкого»?
- Для чего используются нечеткие множества?
- Что такое функция принадлежности?
- Приведите примеры операций с нечеткими множествами.
- Что такое нечеткая система?
- Какие задачи можно решать, используя нечеткие отношения?
- Какими свойствами могут обладать нечеткие отношения?
- Приведите примеры нечетких чисел.
- В чем преимущества нечеткого подхода над стохастическим?
- Для чего используются искусственные нейронные сети?
- Что такое прямое распространение?
- Для чего используется метод градиентного спуска?
- Зачем нужно обратное распространение?

# Литература

- [1] Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. — СПб. : Наука, 1999. — С. 467.
- [2] Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л. Элементы математического моделирования в програмных средах MATLAB 5 и Scilab. — СПб. : Наука, 2001. — С. 286.
- [3] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М. : Наука, 1981. — С. 918.
- [4] Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М. : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — С. 488.
- [5] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — С. 636.
- [6] Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — С. 304.
- [7] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М. : Наука, 1974. — С. 410.
- [8] Борисов А. Н., Алексеев А. В., Меркурьева Г. В. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений. — М. : Радио и связь, 1989. — С. 304.

- [9] Веников В. А. Теория подобия и моделирования. — М. : Высшая школа, 1976. — С. 479.
- [10] Вентцель Е. С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология. — М. : Наука, 1988. — С. 208.
- [11] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М. : Наука, 2004. — С. 650.
- [12] Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. — М. : Мир, 1985. — С. 509.
- [13] Гласс Л., Мэки Д. От часов к хаосу: Ритмы жизни. — М. : Мир, 1991. — С. 248.
- [14] Горяченко В. Д. Частотные методы в теории колебаний. — М. : Высшая школа, 2001. — С. 395.
- [15] Демидович Б. П. Численные методы Монте-Карло. — СПб. : Лань, 2008. — С. 480.
- [16] Егоренков Д. Л., Фрадков А. Л., Харламов В. Ю. Основы математического моделирования. — СПб. : БГТУ, 1996. — С. 192.
- [17] Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. Метод пространства состояний. — М. : Наука, 1970. — С. 704.
- [18] Каипов В. Х., Селютин А. А., Дубровский С. А. Методы обработки данных в системах с нечеткой информацией. — Фрунзе : Илим, 1988. — С. 188.
- [19] Касти Д. Большие системы: связность, сложность и катастрофы. — М. : Мир, 1982. — С. 216.
- [20] Кофман А., Анри-Лабордер А. Методы и модели исследования операций. Целочисленное программирование. — М. : Мир, 1977. — С. 432.
- [21] Кохонен Т. Ассоциативные запоминающие устройства. — М. : Мир, 1982. — С. 383.
- [22] Красовский А. А. Справочник по теории автоматического управления. — М. : Наука, 1987. — С. 712.

- [23] Красовский Н. Н. О применении второго метода ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикладная математика и механика. — 1956. — Т. 20, № 3. — С. 315–327.
- [24] Кузнецов А. П. Динамические системы и бифуркации. — Саратов : ООО Издательский центр «Наука», 2015. — С. 168.
- [25] Леонов Г. А. Теория управления. — СПб. : Издательство С.-Петербургского университета, 2006. — С. 204.
- [26] Леонов Г. А., Буркин И. М., Шепелявый А. И. Частотные методы в теории колебаний. — СПб. : Изд-во СПб. ун-та, 1992. — С. 366.
- [27] Месарович Д., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы. — М. : Мир, 1978. — С. 312.
- [28] Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа. — М. : Наука, 1981. — С. 488.
- [29] Мун Ф. Хаотические колебания. — М. : Мир, 1990. — С. 311.
- [30] Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей. — М. : КомКнига, 2007. — С. 192.
- [31] Неймарк Ю. И. Математические модели в естествознании и технике. — Н. Новгород : Изд-во Нижегородского гос. ун-та им. Н.И. Лобачевского, 2004. — С. 401.
- [32] Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. — М. : Наука, 1987. — С. 424.
- [33] Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / А. Н. Аверкин, И. З. Батыршин, А. Ф. Блишун и др. — М. : Наука, 1986. — С. 311.
- [34] Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. — М. : Мир, 1979. — С. 512.
- [35] Норенков И. Основы автоматизированного проектирования. — М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. — С. 336.

- [36] Первозванский А. А. Курс теории автоматического управления: учебное пособие. — СПб. : Лань, 2015. — С. 624.
- [37] Перегудов Ф. И., Тарасенко Ф. П. Введение в системный анализ. — М. : Высшая школа, 1989. — С. 367.
- [38] Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. — М. : Наука, 1983. — С. 384.
- [39] Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. — М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — С. 560.
- [40] Разумихин Б. С. Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. — 1956. — Т. 20, № 4. — С. 500–512.
- [41] Робертс Ф. С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. — М. : Наука, 1986. — С. 494.
- [42] Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — М. : Физматлит, 2001. — С. 320.
- [43] Свиричев Ю. М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. — М. : Наука, 1987. — С. 368.
- [44] Сигорский В. П. Математический аппарат инженера. — Киев : Техніка, 1977. — С. 764.
- [45] Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 1973. — С. 312.
- [46] Советов Б. Я., Яковлев С. А. Моделирование систем. Практикум: учебное пособие для бакалавров. — М. : Юрайт, 2016. — С. 295.
- [47] Тарасик В. П. Математическое моделирование технических систем: учебник. — Минск : Новое знание, 2013. — С. 584.

- [48] Теория бифуркаций / В. И. Арнольд, В. С. Афраймович, Ю. С. Ильашенко, Л. П. Шильников. — М. : Физматлит, 1980. — С. 214.
- [49] Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. М. Гордон, А. Г. Майер. — М. : Наука, 1967. — С. 487.
- [50] Теория выбора и принятия решений / М. М. Макаров, Т. М. Виноградская, А. А. Рубчинский, В. Б. Соколов. — М. : Наука, 1982. — С. 328.
- [51] Фрадков А. Л. Основы математического моделирования. — Л. : Ленингр. мех. ин-т., 1989. — С. 88.
- [52] Халил Х. К. Нелинейные системы. — М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. — С. 832.
- [53] Хант Э. Искусственный интеллект. — М. : Мир, 1978. — С. 558.
- [54] Хаотические системы. тематический выпуск // ТИИЭР. — 1987. — Т. 75, № 8.
- [55] Хоггер К. Введение в логическое программирование. — М. : Мир, 1988. — С. 348.
- [56] Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. — М. : Наука, 1990. — С. 384.
- [57] Шарковский А. Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Украинский математический журнал. — 1964. — Т. 16, № 1. — С. 61–71.
- [58] Шустер Г. Детерминированный хаос. — М. : Мир, 1988. — С. 240.
- [59] Bellman R., Cooke K. L. Differential difference equations. — New York : Academic press, 1963.
- [60] Creedy J., Martin V. Chaos and non-linear models in economics. Theory and applications. — Melbourne : Edward Elgar, 1994. — P. 228.

- [61] Dynamical control of a chaotic laser: Experimental stabilization of a globally coupled system / R. Roy, T. W. Murphy, T. D. Maier et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1992. — Vol. 68, no. 8. — P. 1259–1262.
- [62] Field R. J., L. G. Chaos in chemistry and biochemistry. — Singapore : World Scientific, 1993. — P. 304.
- [63] Fridman E. Introduction to Time-Delay Systems. — Basel : Birkhäuser, 2014. — P. 362.
- [64] Fridman E. Tutorial on lyapunov-based methods for time-delay systems // *Europ. J. Control.* — 2014. — Vol. 20. — P. 271–283.
- [65] Hebb D. O. Organization of Behavior: A Neuropsychological Theory. — New York : John Wiley & Sons, Inc., 1949.
- [66] Hinton G. E., Osindero S., Teh Y. W. A fast learning algorithm for deep belief nets // *Neural Computation.* — 2006. — Vol. 18, no. 7. — P. 1527–1554.
- [67] Hopfield J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities // *Proc. Nat. Acad. Sci.* — 1982. — Vol. 79, no. 8. — P. 2554–2558.
- [68] Johan Löfberg. Powered by Jekyll & Minimal Mistakes. Yalmip. — 2020. — Access mode: <https://yalmip.github.io/> (online; accessed: 2020-12-07).
- [69] Li T., Yorke J. A. Period three implies chaos // *Amer. Math. Monthly.* — 1975. — Vol. 82, no. 10. — P. 985–992.
- [70] Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // *J. Atmospheric Science.* — 1963. — Vol. 20, no. 2. — P. 130–141.
- [71] Lorenz H.-W. Nonlinear dynamical economics and chaotic motion. — Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1993. — P. 319.
- [72] McCulloch W. S., Pitts W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity // *Bull. Math. Biophys.* — 1943. — Vol. 5, no. 4. — P. 115–133.

- [73] Mosekilde E., Mosekilde L. Complexity, chaos, and biological evolution. — New York : Springer, 1991. — P. 431.
- [74] Peters E. E. Chaos and order in the capital markets. — New York : Wiley, 1991. — P. 240.
- [75] Rosenblatt F. The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain // Psychol. Rev. — 1958. — Vol. 65, no. 6. — P. 368–408.
- [76] Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence // Comm. Math. Physics. — 1971. — Vol. 20, no. 2. — P. 167–192.
- [77] Special issue on chaos in electronic circuits // IEEE Trans. Circuits Syst. — 1993. — Vol. 40, no. 10.
- [78] The MathWorks, Inc. Matlab - mathworks - matlab & simulink. — 2020. — Access mode: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html> (online; accessed: 2020-12-07).
- [79] Willems J. C., Polderman J. W. Introduction to mathematical systems theory: A behavioral approach. — New York : Springer-Verlag, 1998. — P. 424.

Плотников Сергей Александрович  
Семенов Данила Михайлович  
Фрадков Александр Львович

**Математическое моделирование систем управления**  
**Учебное пособие**

В авторской редакции  
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО  
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова  
Подписано к печати  
Заказ №  
Тираж  
Отпечатано на ризографе

**Редакционно-издательский отдел  
Университета ИТМО**

197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А