

**Редакционно-издательский отдел** Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., д. 49



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ



ПОБЕДИТЕЛЬ КОНКУРСА ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВУЗОВ

В.М. Мусалимов, П.А. Сергушин

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Уравнения Лагранжа второго рода. Свободные колебания  
Учебное пособие



Санкт-Петербург  
2007

**УДК 531.011**

**Мусалимов В.М., Сергушин П.А.** Аналитическая механика. Уравнение Лагранжа второго рода. Свободные колебания. – С-Пб: СПбГУ ИТМО. 2007, с. 53

Изложена методика решения некоторых задач теоретической механики. Основное внимание уделено составлению уравнений Лагранжа второго рода и определению собственных частот колебаний систем

Пособие предназначено для студентов и преподавателей специальности 220401 «Мехатроника»

Ил. 44

Рекомендовано к печати Ученым советом факультета Точной механики и технологий.

Протокол № 4 от 18.12.2007 г.



В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

©Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, 2007

©В.М. Мусалимов, П.А. Сергушин, 2007

## Введение

Предлагаемое пособие посвящено такому разделу аналитической механики, как уравнение Лагранжа второго рода (УЛ-2).

УЛ-2 непосредственно вытекают из общего уравнения динамики (принципа Даламбера - Лагранжа), записанного в обобщенных координатах. На практике представляют собой эффективный инструмент для решения задач теоретической механики.

Пособие должно способствовать: рациональной организации самостоятельной работы студентов, овладению техникой составления УЛ-2 в различных ситуациях, раскрытию возможностей метода УЛ-2 на примерах, относящихся к расчету элементов конструкций (устойчивость стержня, колебания вант и др.), подготовке к выполнению работ с элементами самостоятельного исследования.

Пособие состоит из четырех параграфов и приложения. В главе 1 рассматриваются общие вопросы теории аналитической механике и упражнения подготовительного характера. В главе 2 приведен алгоритм составления УЛ-2, решены задачи на определения ускорений. В главе 3 демонстрируется применение УЛ-2 к решению задач на определение собственных частот колебания различных систем. В главе 4 рассмотрены методы решения задач с распределенной нагрузкой, а также, статически неопределимых систем. В приложении приведены формулы для вычисления потенциальной и кинетической энергии системы, дана справочная информация о моментах сечения типовых конструкционных элементов.

## **Список сокращений**

МС – механическая система;  
УЛ-2 – уравнение(я) Лагранжа второго рода;  
ЧСС – число степеней свободы;

# Глава 1. Основные определения аналитической механики. Решение частных задач

## Уравнения связей

МС называется *свободной*, если положения, скорости и ускорения ее точек никоим образом не ограничены.

Ограниченная МС является *несвободной*, а ограничения называются *связями*.

Связи, задаваемые неравенствами, называются *односторонними* или *неудерживающими*.

Связи, задаваемые равенствами, называются *двусторонними* или *удерживающими*.

*Двусторонние (удерживающие)* связи задаются уравнениями.

Удерживающая связь общего вида задается уравнением:  $f(q, \dot{q}, t) = 0$ , где  $q$  - обобщенная координата,  $\dot{q}$  - ее производная по времени (скорость),  $t$  - время.

Если функция  $f$  не зависит явно от времени, то связь называется *стационарной*, если в выражение функции явно входит время, то связь называется *нестационарной*.

Если в уравнение входят и координаты и скорости, то связь называется *кинематической*, в противном случае - *геометрической*.

Систему, на которую наложены кинематические связи, называют *голономной*. Если присутствует дифференциальная связь, то МС называется *неголономной*.

**Задача 1.1.** МС из двух масс  $m_1$  и  $m_2$  ( $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$  координаты их центров), соединенных между собой жестким стержнем длиной  $l$ , находится в декартовом пространстве (рис. 1.1). Записать уравнение связи для системы.

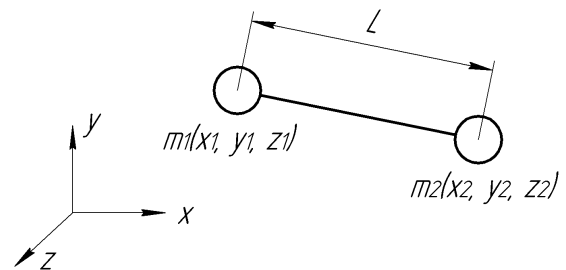


Рис. 1.1

**Ответ:**  $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0$ .

**Задача 1.2.** Составить уравнение связи для тела массой  $m$ , расположенного на стержне длиной  $R$ , шарнирно закрепленном на стойке (рис. 1.2).

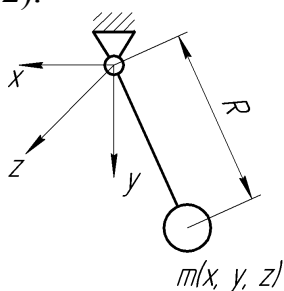


Рис. 1.2

Так как координаты одного из концов стержня не меняются, а систему координат мы можем выбирать произвольно, то можно представить уравнение связи в виде:  $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ .

**Ответ:**  $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ .

**Задача 1.3.** Составить уравнения связей для плоского кривошипно-ползунного механизма (рис. 1.3). Заданы следующие параметры механизма:  $AB = R$ ;  $BC = l$ .

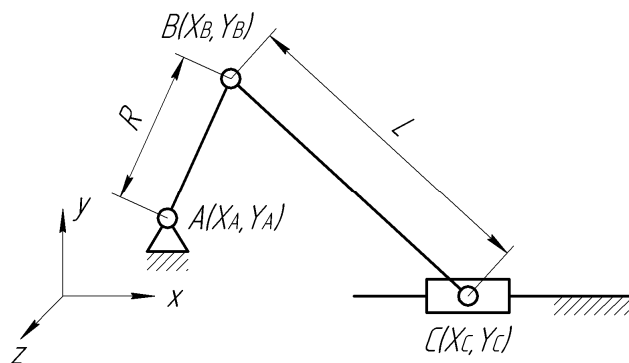


Рис. 1.3

**Ответ:**

Уравнения связей:

$$z_A = 0;$$

$$z_B = 0;$$

$$z_C = 0;$$

$$x_B^2 + y_B^2 - R^2 = 0;$$

$$(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 - l^2 = 0.$$

## Определение числа степеней свободы (ЧСС) механизма

Свободное тело в трехмерном пространстве имеет ЧСС=6.

При наложении ограничений на движение ЧСС уменьшается.

Разность между числом декартовых координат точек механической системы и числом уравнений связи называется *числом степеней свободы* системы:  $n = 3N - K - M$ , где  $n$  – ЧСС,  $N$  – общее количество точек в системе,  $K$  – количество голономных связей,  $M$  – количество неголономных связей.

ЧСС механизма соответствует количеству независимых *обобщенных координат* (количеству входных звеньев, однозначно определяющих положение механизма в пространстве)

**Задача 1.4.** Определить ЧСС плоского кривошипно-ползунного механизма, изображенного на рис. 1.4.

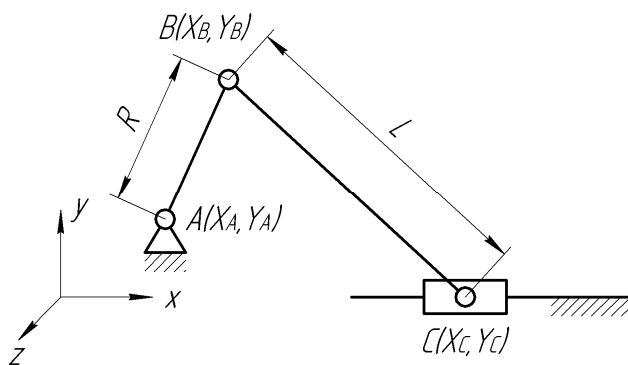


Рис. 1.4

Имеем три точки ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ) в системе, связанные пятью уравнениями – голономными связями (см. задачу 1.3).

Неголономные связи в данной системе отсутствуют.

Т.к.  $n = 3N - K - M$ , то при  $N = 3$   
 $n = 3 \cdot 3 - 5 - 0 = 1$ .

**Ответ:** ЧСС МС:  $n = 1$ .

## Возможные и виртуальные перемещения

Совокупность бесконечно малых перемещений, которые частица может совершить за время  $dt$ , двигаясь и удовлетворяя условиям связи, называют *возможными перемещениями*. Перемещение, которое частица совершает в действительности за время  $dt$ , находится среди возможных перемещений.

*Виртуальными перемещениями* называют разности между возможными перемещениями для одного и того же момента времени и одного и того же положения системы. Соответствующие им скорости называются *виртуальными скоростями*.

При стационарных связях виртуальные перемещения совпадают с возможными.

Наличие связей приводит к появлению дополнительных сил, которые называются *силами реакции*.

Связи называются *идеальными*, если сумма работ реакций этих связей на любых виртуальных перемещениях всегда равна нулю.



## Обобщенные силы и потенциальная энергия

Элементарная работа активных сил на виртуальных перемещениях:

$$\delta A = \sum_{k=1}^N F_k \delta r_k .$$

Величины  $Q_i = \frac{\delta A_i}{\delta q_i}$  называют *обобщенными силами*.

Введено понятие *потенциальной энергии (потенциала)*  $V(q_1, \dots, q_n, t)$ , так что  $\delta V = -\delta A$  и  $Q_i = -\frac{\delta V}{\delta q_i}$ .

**Задача 1.5.** Два стержня  $OA$  и  $AB$ , длиной  $l$  каждый, шарнирно соединены в точке  $A$  (рис. 1.5). В точке  $O$  стержень  $OA$  шарнирно оперт на неподвижное основание. На стержень  $AB$  действует следящая сила  $P$  (все время направленная вдоль стержня  $AB$ ). Оси цилиндрических шарниров  $O$  и  $A$  перпендикулярны к плоскости чертежа. Найти обобщенные силы.

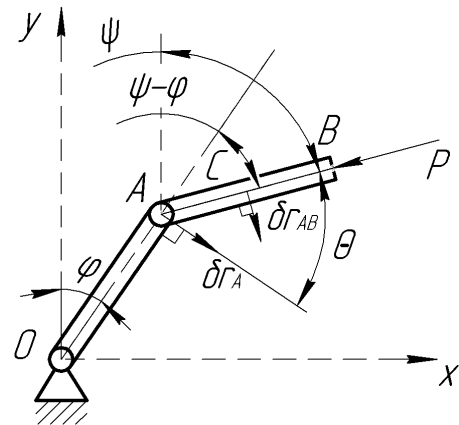


Рис. 1.5

МС имеет две степени свободы. Определим ее положение обобщенными координатами  $\varphi$  и  $\psi$  (рис. 1.5).

Способ 1. Имеем

$$X = -P \cdot \sin \psi, \quad Y = -P \cdot \cos \psi \quad (1.1)$$

$$x_A = l \sin \varphi, \quad y_A = l \cos \varphi;$$

$$x_B = l(\sin \varphi + \sin \psi), \quad y_B = l(\cos \varphi + \cos \psi) \quad (1.2)$$

Дифференцируя (1.2), получим

$$\frac{\partial x_B}{\partial \varphi} = l \cos \varphi; \quad \frac{\partial y_B}{\partial \varphi} = -l \sin \varphi; \quad \frac{\partial x_B}{\partial \psi} = l \cos \psi; \quad \frac{\partial y_B}{\partial \psi} = -l \sin \psi \quad (1.3)$$

Используя (1.1), (1.3) и аналитические представления обобщенных сил, получим:

$$Q_\varphi = X \frac{\partial x_B}{\partial \varphi} + Y \frac{\partial y_B}{\partial \varphi} = -Pl \sin(\psi - \varphi); \quad Q_\psi = X \frac{\partial x_B}{\partial \psi} + Y \frac{\partial y_B}{\partial \psi} = 0 \quad (1.4)$$

**Ответ:**  $Q_\varphi = -Pl \sin(\psi - \varphi)$ ,  $Q_\psi = 0$

Способ 2. Возможное перемещение точки  $B$  можно представить в виде

$$\delta \vec{r}_B = \delta \vec{r}_A + \delta \vec{r}_{AB},$$

где  $\delta \vec{r}_A$  - возможное перемещение точки  $A$ ;  $\delta \vec{r}_{AB}$  - возможное перемещение точки  $B$  при вращательном движении стержня  $AB$  около точки  $A$ . Возможная работа силы  $P$ :

$$\delta A = \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_B = \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_{AB}.$$

Векторы  $\vec{P}$  и  $\delta \vec{r}_{AB}$  взаимно перпендикулярны. Следовательно  $\vec{P} \cdot \delta \vec{r}_{AB} = 0$ .

Поэтому  $\delta A = \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_A = -|\vec{P}| \cdot |\delta \vec{r}_A| \cdot \cos \Theta$ .

Так как  $|\delta \vec{r}_A| = l \cdot \delta \varphi$ ;  $\Theta = \frac{\pi}{2} - (\psi - \varphi)$ , то  $\delta A = -Pl \sin(\psi - \varphi) \delta \varphi$ .

**Ответ:**  $Q_\varphi = -Pl \sin(\psi - \varphi)$ ,  $Q_\psi = 0$ .

Способ 3. Фиксируем координату  $\psi$ , полагая  $\psi = const$ . Тогда стержень  $AB$  движется поступательно. Силу  $P$  можно перенести вдоль  $AB$  в точку  $A$ . Элементарная работа силы  $P$

$$\delta A_1 = -|m_0(p)| \delta \varphi = -Pl \sin(\psi - \varphi) \delta \varphi$$

Отсюда

$$Q_\varphi = -Pl \sin(\psi - \varphi)$$

Фиксируем затем угол  $\varphi$ , а угол  $\psi$  оставим произвольным. Тогда возможное перемещение стержня  $AB$  представляет собой поворот на угол  $\delta \psi$  ( $\delta \psi \neq 0$ ). Так как сила  $P$  перпендикулярна к вектору возможного перемещения точки  $B$ , то

$$\delta A_2 = Q_\psi \cdot \delta \psi = 0.$$

Следовательно ( $\delta \psi \neq 0$ ).  $Q_\psi = 0$ .

Примечание. В случае потенциальных сил достаточно записать потенциальную энергию системы в обобщенных координатах и воспользоваться формулой

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad (j=1,2,\dots,s).$$

**Ответ:**  $Q_\varphi = -Pl \sin(\psi - \varphi)$ ,  $Q_\psi = 0$ .

**Задача 1.6.** Два стержня  $OA$  и  $AB$ , длиной  $l$  каждый, шарнирно соединены в точке  $A$  (рис. 1.6). В точке  $O$  стержень  $OA$  шарнирно опирается на неподвижное основание. На стержень  $AB$  действует следящая сила  $P$  (все время направленная вдоль стержня  $AB$ ). Оси цилиндрических шарниров  $O$  и  $A$  перпендикулярны к плоскости чертежа. Докажите, что сила  $P$  не является потенциальной.

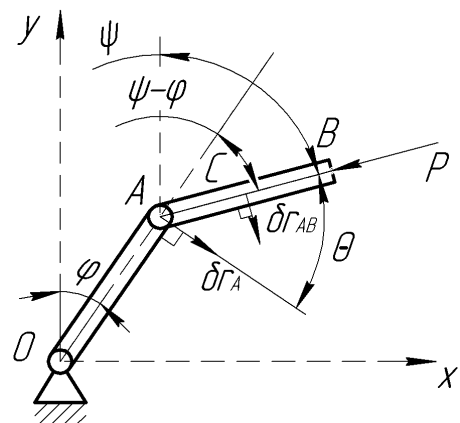


Рис. 1.6

Рассмотрим выражение элементарной работы силы  $P$ ,

$$\delta A = Q_\varphi \delta\varphi + Q_\psi \delta\psi.$$

Для потенциальности силы  $P$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие

$$\frac{\partial Q_\varphi}{\partial \psi} = \frac{\partial Q_\psi}{\partial \varphi} \quad (1.5)$$

Подставляя (1.4) в (1.5), получим  $\cos(\psi - \varphi) = 0$ .

Отсюда:

$$\psi - \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6) связывает две координаты  $\psi$  и  $\varphi$ , которые должны быть независимыми (эта МС имеет две степени свободы). Это противоречие показывает, что условие (1.5) не выполняется и, следовательно, что сила  $P$  не является потенциальной.

**Ответ:** условие (1.5) не выполняется, следовательно, сила  $P$  не является потенциальной.

**Задача 1.7.** Два одинаковых однородных стержня  $OA$  и  $AB$  длиной  $l$  и массой  $m$  каждый, шарнирно соединены в точке  $A$ . В точке  $O$  стержень  $OA$  шарнирно прикреплен к опоре. Найти потенциальную энергию системы в положении, указанном на рис. 1.7.

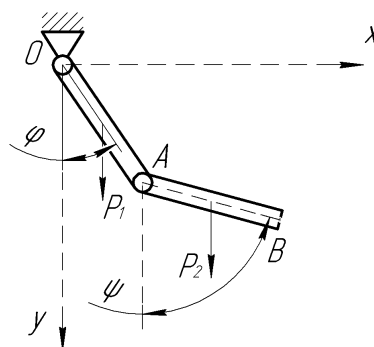


Рис. 1.7

На систему действуют силы тяжести  $P_1$  и  $P_2$ . Потенциальная энергия системы:

$$V = -P_1 y_1 - P_2 y_2, \quad (1.7)$$

где  $y_1$  и  $y_2$  - координаты центров тяжести стержней. Так как (рис. 1.7)

$$y_1 = \frac{l}{2} \cos \varphi; \quad y_2 = l \cos \varphi + \frac{l}{2} \cos \psi,$$

то (1.7) можно записать в виде

$$V = -\left(\frac{1}{2} P_1 + P_2\right) l \cos \varphi - P_2 \frac{l}{2} \cos \psi = -\frac{Pl}{2} (3 \cos \varphi + \cos \psi). \quad (1.8)$$

Потенциальная энергия в (1.7) и (1.8) отсчитывается от уровня  $y = 0$  (оси  $O_x$ ). Отсчитывая энергию каждого стержня от линии уровня, проходящей через его центр тяжести в положении устойчивого равновесия системы, получим:

$$V = P_1 \frac{l}{2}(1 - \cos \varphi) + P_2 \left[ l(1 - \cos \varphi) + \frac{l}{2}(1 - \cos \psi) \right] = 2Pl - \frac{Pl}{2}(3 \cos \varphi + \cos \psi). \quad (1.9)$$

Из (1.8) и (1.9) видно, что соответствующие выражения потенциальной энергии отличаются на постоянную величину.

При малых углах  $\varphi$  и  $\psi$ :  $1 - \cos \varphi \cong \frac{\varphi^2}{2}$ ,  $1 - \cos \psi \cong \frac{\psi^2}{2}$

$$V \cong \frac{Pl}{4}(3\varphi^2 + \psi^2)$$

**Ответ:**  $V = \frac{Pl}{4}(3\varphi^2 + \psi^2)$ .

**Задача 1.8.** Шарнирный четырехугольник (рис. 1.8), расположенный в вертикальной плоскости, состоит из одинаковых однородных стержней, длиной  $l$  и весом  $P$  каждый. Опоры  $A$  и  $B$  находятся на одном уровне. Найти потенциальную энергию четырехугольника в положении  $II$ , указанном на рис. 1.8 пунктиром.

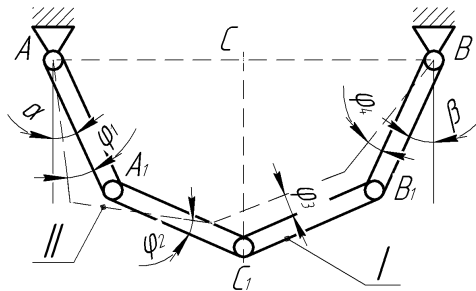


Рис. 1.8

В положении равновесия  $I$  стержневой многоугольник симметричен относительно вертикальной оси  $CC_1$ . Поэтому положение равновесия определяется углами  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 1.8).

Рассмотрим положение  $II$  четырехугольника, определяемое углами  $\varphi_k$  ( $\varphi_k$  – угол образованный стержнем с его равновесным положением). Будем отсчитывать потенциальную энергию от положения равновесия  $I$ .

Имеем

$$V = \frac{3}{2} Pl [\sin \alpha - \sin(\alpha + \varphi_1)] + \frac{3}{2} Pl [\sin \alpha - \sin(\alpha + \varphi_4)] + \frac{1}{2} Pl [\sin \beta - \sin(\beta + \varphi_2)] + \frac{1}{2} Pl [\sin \beta - \sin(\beta + \varphi_3)]. \quad (1.10)$$

При малых  $\varphi_k$  ( $k=1..4$ )

$$\sin(\alpha + \varphi_k) = \sin \alpha \cdot \cos \varphi_k + \cos \alpha \cdot \sin \varphi_k \cong \left(1 - \frac{\varphi_k^2}{2}\right) \sin \alpha + \varphi_k \cos \alpha;$$

$$\sin(\beta + \varphi_k) \cong \left(1 - \frac{\varphi_k^2}{2}\right) \sin \beta + \varphi_k \cos \beta.$$

Поэтому формула (1.10) принимает вид

$$V = \frac{3}{2} Pl \left[ \frac{\varphi_1^2 + \varphi_4^2}{2} \cdot \sin \alpha - (\varphi_1 + \varphi_4) \cos \alpha \right] + \frac{1}{2} Pl \left[ \frac{\varphi_2^2 + \varphi_3^2}{2} \cdot \sin \beta - (\varphi_2 + \varphi_3) \cos \beta \right].$$

**Ответ:**  $V = \frac{3}{2} Pl \left[ \frac{\varphi_1^2 + \varphi_4^2}{2} \cdot \sin \alpha - (\varphi_1 + \varphi_4) \cos \alpha \right] + \frac{1}{2} Pl \left[ \frac{\varphi_2^2 + \varphi_3^2}{2} \cdot \sin \beta - (\varphi_2 + \varphi_3) \cos \beta \right].$

## Кинетическая энергия

Кинетическая энергия системы частиц:  $T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2$ .

Для системы тел  $T = \sum_{i=1}^N T_i$ .

При плоском движении  $T_i = \frac{m_i v_i^2}{2}$ , где  $m_i$  - масса тела,  $v_i$  - линейная скорость.

При вращательном движении  $T_i = \frac{J_i \omega_i^2}{2}$ , где  $J_i$  - момент инерции тела относительно оси вращения,  $\omega_i$  - угловая скорость.

При плоском движении  $T_i = \frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{J_i \omega_i^2}{2}$ .

**Задача 1.9.** Определить кинетическую энергию системы, изображенной на рис. 1.9.

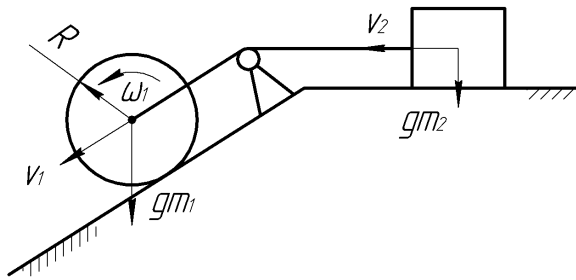


Рис. 1.9

$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{J_1 \omega_1^2}{2}$  — кинетическая энергия диска.

$$v_1 = \frac{\omega_1 R}{2}; J_1 = \frac{m_1 R^2}{2},$$

Кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2.$$

$$T_1 = \frac{m_1 v^2}{2} + \frac{2m_1 v^2}{2} = \frac{3m_1 v^2}{2}$$

$$T_2 = \frac{m_2 v^2}{2} \text{ — кинетическая энергия груза.}$$

Учитывая  $v_1 = v_2 = v$ , получим:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{3m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} = \frac{1}{2} v^2 (3m_1 + m_2)$$

**Ответ:**  $T = \frac{1}{2} v^2 (3m_1 + m_2)$ .

**Задача 1.10.** Определите кинетическую энергию системы, изображенной на рис. 1.10, если вес каждого из стержней равен  $Q$ .

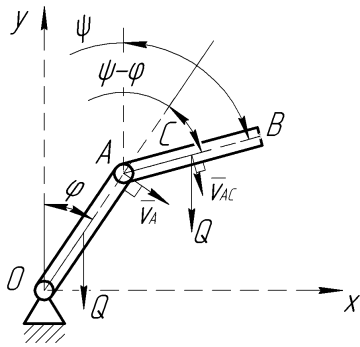


Рис. 1.10

Кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2 ,$$

где  $T_1$  и  $T_2$  - кинетические энергии стержней  $OA$  и  $AB$  соответственно.

Стержень  $OA$  вращается около неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$ . Кинетическая энергия стержня  $OA$  (см. приложение):

$$T_1 = \frac{J_0 \dot{\phi}^2}{2} ; J_0 = \frac{Ql^2}{3g} . \quad (1.11)$$

Стержень  $AB$  совершает плоское движение. Его кинетическая энергия (см. приложение):

$$T_2 = \frac{Qv_c^2}{2g} + \frac{J_c \dot{\psi}^2}{2} ; J_c = \frac{Ql^2}{12g} \quad (1.12)$$

где  $C$  – центр тяжести стержня  $AB$ .

Из кинематики известно, что  $\vec{v}_c = \vec{v}_A + \vec{v}_{AC}$ ,

где  $\vec{v}_{AC}$  - скорость точки  $C$  во вращательном (относительном) движении стержня  $AB$  около оси, проходящей через точку  $A$  и перпендикулярной к плоскости чертежа (рис. 1.10).

Применяя теорему косинусов к треугольнику  $CDE$  (рис. 1.11), получим,

$$v_c^2 = v_{AC}^2 + v_A^2 + 2v_A v_c \cos(\psi - \phi) .$$

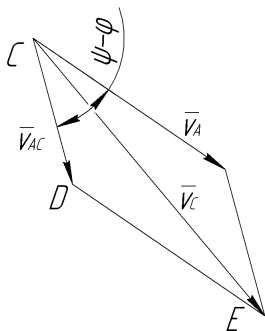


Рис. 1.11

Так как

$$v_A = l\dot{\phi} ; v_{AC} = \frac{l}{2}\dot{\psi} ,$$

то

$$J_c = \frac{Ql^2}{12g}$$

$$v_c^2 = l^2 \left[ \dot{\phi}^2 + \frac{1}{4}\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}\dot{\psi} \cos(\psi - \phi) \right] . \quad (1.13)$$

Подставляя (1.13) в (1.12), получим

$$T_2 = \frac{Ql^2}{2g} \left[ \dot{\phi}^2 + \frac{\dot{\psi}^2}{4} + \dot{\phi}\dot{\psi} \cos(\psi - \phi) \right] . \quad (1.14)$$

Если  $\varphi, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$  – малые величины одинакового порядка, то удерживая в (1.14) малые слагаемые до второго порядка включительно и замечая, что

$$\cos(\psi - \varphi) \cong 1 - \frac{(\psi - \varphi)^2}{2},$$

а также, с помощью (1.11) и (1.14) окончательно находим

$$T = T_1 + T_2 = \frac{Ql^2}{2g} \left[ \frac{4}{3} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3} \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi} \dot{\psi} \right]. \quad (1.15)$$

**Ответ:**  $T = \frac{Ql^2}{2g} \left( \frac{4}{3} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3} \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi} \dot{\psi} \right).$

**Задача 1.11.** Найдите кинетическую энергию шарнирного стержневого четырехугольника (рис. 1.12).

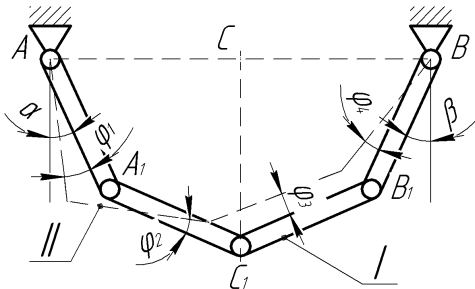


Рис. 1.12

Рассмотрим шарнирный многоугольник как систему двух двойных маятников  $AA_1C_1$  и  $BB_1C_1$ . Для вычисления кинетической энергии маятника  $AA_1C_1$  воспользуемся формулой (1.15), положив в ней:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \varphi_1); \quad \psi = \frac{\pi}{2} - (\beta + \varphi_2). \quad (1.16)$$

Из (1.16) следует

$$\psi - \varphi = \alpha - \beta - (\varphi_2 - \varphi_1); \quad \dot{\varphi} = -\dot{\varphi}_1, \quad \dot{\psi} = -\dot{\varphi}_2 \quad (1.17)$$

Используя (1.15) и принимая во внимание (1.17), получим выражение кинетической энергии маятника  $AA_1C_1$ :

$$T_1 = \frac{Pl^2}{2g} \left\{ \frac{4}{3} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{3} \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos[\alpha - \beta - (\varphi_2 - \varphi_1)] \right\}.$$

Аналогично выражается кинетическая энергия маятника  $BB_1C_1$ :

$$T_2 = \frac{Pl^2}{2g} \left\{ \frac{4}{3} \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{3} \dot{\varphi}_4^2 + \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_4 \cos[\alpha - \beta - (\varphi_3 - \varphi_4)] \right\}.$$

Кинетическая энергия шарнирного многоугольника:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{Pl^2}{2g} \left\{ \frac{4}{3} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_4^2) + \frac{1}{3} (\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2) + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos[\alpha - \beta - (\varphi_1 - \varphi_2)] + \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_4 \cos[\alpha - \beta - (\varphi_3 - \varphi_4)] \right\}.$$

Кинетическая энергия системы при малых отклонениях многоугольника от положения устойчивого равновесия:

$$T = \frac{Pl^2}{2g} \left\{ \frac{4}{3} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_4^2) + \frac{1}{3} (\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2) + (\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_4) \cos[\alpha - \beta] \right\}.$$

**Ответ:**  $T = \frac{Pl^2}{2g} \left\{ \frac{4}{3} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_4^2) + \frac{1}{3} (\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2) + (\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_4) \cos[\alpha - \beta] \right\}.$

## Глава 2. Определение параметров движения МС методом УЛ-2

УЛ-2 в обобщенных координатах:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (2.1)$$

В случае потенциальных сил уравнение (1.1) имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (2.2)$$

Здесь  $q_j$  и  $\dot{q}_j$  - обобщенная координата и обобщенная скорость соответственно;

$L$  - Функция Лагранжа  $L = T - V$ ;  $T$  - кинетическая энергия;

$V$  - потенциальная энергия;

Существенным достоинством метода УЛ-2 является стандартность действий, необходимых для решения задач.

### Алгоритм решения задач с помощью УЛ-2

1. Определить ЧСС МС и выбрать обобщенные координаты.
2. Изобразить МС в произвольном положении. Указать все действующие активные силы и выяснить, являются ли они потенциальными.
3. Определить кинетическую энергию МС в обобщенных координатах и скоростях.

#### В случае потенциальных сил:

4а. Определить потенциальную энергию МС в обобщенных координатах.

5а. Составить функцию  $L = T - V$  и найти ее производные  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  и  $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ .

6а. Подставить полученные выражения в УЛ-2  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ .

#### В случае непотенциальных сил:

4б. Найти обобщенные силы  $Q_i$ .

5б. Найти производные  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$  и  $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ .

6б. Подставить полученные выражения в УЛ-2  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$ .

7. Решить уравнения относительно искомых параметров.



**Задача 2.1.** Призма  $B$  весом  $Q$  скользит по гладкой боковой грани призмы  $A$  весом  $P$ , образующей угол  $\alpha$  с горизонтом (рис. 2.1). Определить ускорения призм, пренебрегая трением между призмой  $A$  и горизонтальной плоскостью.

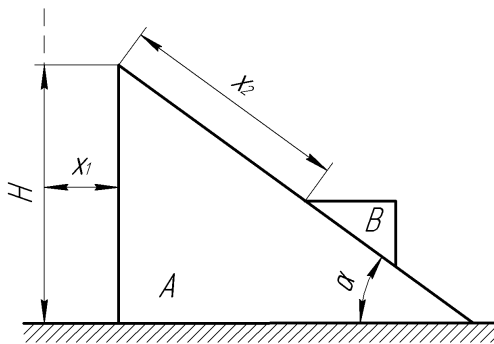


Рис. 2.1

За обобщенные координаты примем декартовы координаты  $x_1$  и  $x_2$  (рис. 2.1). МС имеет две степени свободы.

Единственными активными силами, действующими на систему, являются силы тяжести. Так как эти силы – потенциальные, то при составлении УЛ-2 используем вариант  $A$  общего плана.

Потенциальная энергия системы, отсчитывается от уровня  $H$  (рис. 2.1),

$$V = -P \cdot x_2 \sin \alpha + const . \quad (2.1)$$

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии призм  $A$  и  $B$ , движущихся поступательно,

$$T = \frac{Qv_B^2}{2g} + \frac{Pv_A^2}{2g} .$$

Призма  $A$  совершает сложное движение: она движется вместе с призмой  $B$  (переносное движение) и, кроме того, скользит вдоль грани призмы  $B$  (относительное движение). В силу теоремы о сложении скоростей

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{BA} ,$$

где  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_B$  – абсолютные скорости призм  $A$  и  $B$ ,  $\vec{v}_{BA}$  – скорость призмы  $A$  относительно призмы  $B$ .

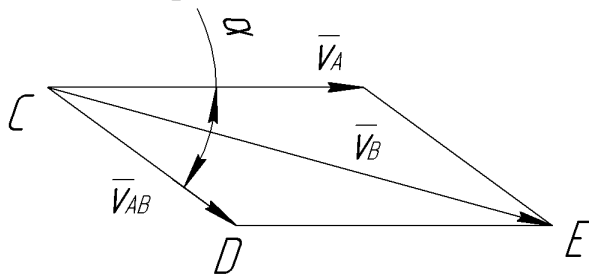


Рис. 2.2

Из треугольника  $CDE$  (рис. 2.2) с помощью теоремы косинусов получим

$$v_A^2 = v_B^2 + v_{AB}^2 + 2v_B v_{BA} \cos \alpha .$$

Так как  $v_B = \dot{x}_1$ ;  $v_{BA} = \dot{x}_2$ , то

$$v_A^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 \cos \alpha .$$

Таким образом,

$$T = \frac{Q}{2g} \dot{x}_1^2 + \frac{P}{2g} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 \cos \alpha) = \frac{Q+P}{2g} \dot{x}_1^2 + \frac{P}{2g} (\dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 \cos \alpha) . \quad (2.2)$$

Составим функцию Лагранжа, используя (2.1) и (2.2)

$$L = T - V = \frac{Q+P}{2g} \dot{x}_1^2 + \frac{P}{2g} (\dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 \cos \alpha) + P x_2 \sin \alpha + const .$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{Q+P}{g} \dot{x}_1 + \frac{P}{g} \dot{x}_2 \cos \alpha; \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = P \sin \alpha; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{P}{g} (\dot{x}_2 + \dot{x}_1 \cos \alpha) .$$

УЛ-2:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} &\equiv \frac{Q+P}{g} \dot{x}_1 + \frac{P}{g} \dot{x}_2 \cos \alpha = 0; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} &\equiv \frac{P}{g} (\dot{x}_2 + \dot{x}_1 \cos \alpha) - P \sin \alpha = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из (2.3)<sub>2</sub> следует

$$\dot{x}_2 = g \sin \alpha - \dot{x}_1 \cos \alpha. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.3)<sub>1</sub>, получим:

$$(Q+P)\dot{x}_1 + P(g \sin \alpha - \dot{x}_1 \cos \alpha) \cos \alpha = 0$$

Отсюда

$$\dot{x}_1 = -\frac{P \sin 2\alpha}{2(Q+P \sin^2 \alpha)} g. \quad (2.5)$$

Из (2.4) с помощью (2.5) находим

$$\dot{x}_2 = \frac{(P+Q) \sin \alpha}{Q+P \sin^2 \alpha} g. \quad (2.6)$$

Формула (2.5) доставляет абсолютное ускорение призмы  $A$ , а формула (2.6) – относительное ускорение призмы  $B$  (относительно призмы  $A$ ). Абсолютное ускорение призмы  $B$  можно найти с помощью теоремы о сложении ускорений

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}.$$

Здесь  $\vec{a}_B$  - абсолютное ускорение призмы  $B$ ;  $\vec{a}_A$  - абсолютное ускорение призмы  $A$  (относительно призмы  $A$ ).

С помощью теоремы косинусов получим (рис. 2.3)

$$|\vec{a}_B| = \sqrt{|\vec{a}_A|^2 + |\vec{a}_{AB}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}_A| \cdot |\vec{a}_{AB}| \cos \alpha} = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 2 \cdot |\dot{x}_1| \cdot |\dot{x}_2| \cos \alpha}. \quad (2.7)$$

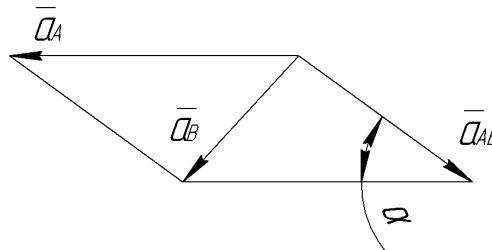


Рис. 2.3

Подставляя  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$  из (2.5) и (2.6) в (2.7), найдем искомое абсолютное ускорение призмы  $B$ .

**Задача 2.2.** Связанные маятники.

Два однородных стержня длиной  $l$  и весом  $P$  каждый соединены на уровне  $h$  (рис. 2.4) пружиной жесткости  $c$ , прикрепленной концами к стержням. Найти малые колебания маятников в плоскости их равновесного положения.

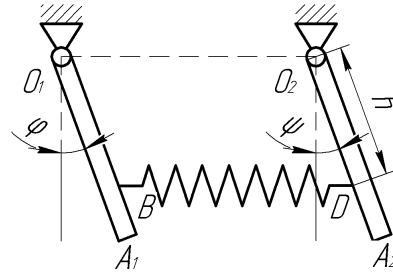


Рис. 2.4

В начальный момент

$$\varphi|_{t=0} = \alpha; \psi|_{t=0} = 0; \dot{\varphi}|_{t=0} = \dot{\psi}|_{t=0} = 0. \quad (2.8)$$

Выберем в качестве обобщенных координат углы  $\varphi$  и  $\psi$  отклонения стержней от вертикала (рис. 2.4). МС имеет две степени свободы.

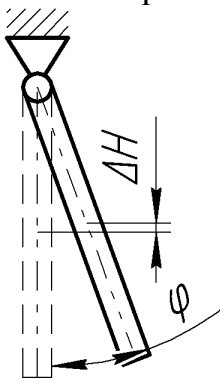


Рис. 2.5

Будем пренебрегать силами трения в шарнирах. Так как силы тяжести и сила упругости пружины являются потенциальными, то применяем вариант Б общего плана решения задач методом УЛ-2.

Потенциальная энергия системы:

$$V = V_1 + V_2 + V_3,$$

где  $V_1$  и  $V_2$  - потенциальная энергия сил тяжести первого и второго стержня;  $V_3$  - потенциальная энергия пружины.

Имеем

$$V_1 = P \cdot \delta H = P \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi) \cong \frac{Pl}{4} \varphi^2.$$

Аналогично находим

$$V_2 = P \frac{l}{2} (1 - \cos \psi) \cong \frac{Pl}{4} \psi^2.$$

Потенциальная энергия растянутой пружины при малых ее деформациях (см. приложение).

$$V_3 = c \frac{(\delta l)^2}{2},$$

где  $\delta l$  - деформация пружины. При малых углах отклонения стержней можно пренебречь вертикальными составляющими перемещений концов пружины, учитывая только горизонтальные составляющие и отождествляя их с длинами дуг, описываемых точками  $B$  и  $D$ , в которых пружина прикреплена к стержням. Отсюда следует, что

$$\delta l \cong h\psi - h\varphi.$$

Поэтому

$$V_3 = c \frac{h^2}{2} (\psi - \varphi)^2.$$

Таким образом,

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{Pl}{4}(\varphi^2 + \psi^2) + c \frac{h^2}{2}(\psi - \varphi)^2. \quad (2.9)$$

Найдем теперь кинетическую энергию системы. Так как каждый из стержней вращается около неподвижной оси, то

$$T = T_1 + T_2 = \frac{J_{01}\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{J_{02}\dot{\psi}^2}{2},$$

где  $J_{01} = J_{02} = \frac{Pl^3}{3g}$ .

Следовательно,

$$T = \frac{Pl^3}{3g}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2). \quad (2.9)$$

Образую функцию Лагранжа, используя (2.9) и (2.10)

$$L = T - V = \frac{Pl^3}{3g}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) - \frac{Pl}{4}(\varphi^2 + \psi^2) - c \frac{h^2}{2}(\psi - \varphi)^2.$$

Найдем частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{2}Pl\varphi + ch^2(\psi - \varphi) = -\left(\frac{1}{2}Pl + ch^2\right)\varphi + ch^2\psi; \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} &= -\frac{1}{2}Pl\psi - ch^2(\psi - \varphi) = ch^2\varphi - \left(\frac{1}{2}Pl + ch^2\right)\psi. \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{Pl^3}{g} \dot{\varphi}; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{Pl^3}{g} \dot{\psi}$$

Составим УЛ-2. Используя (2.2) и (2.11), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &\equiv \frac{2}{3} \frac{Pl^3}{g} \ddot{\varphi} + \left( ch^2 + \frac{1}{2}Pl \right) \varphi - ch^2\psi = 0; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} &\equiv \frac{2}{3} \frac{Pl^3}{g} \ddot{\psi} + \left( ch^2 + \frac{1}{2}Pl \right) \psi - ch^2\varphi = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Вводя для краткости обозначения

$$\frac{ch^2}{ml^2} = x^2; \quad \frac{g}{l} = \omega^2,$$

запишем (2.12) в виде

$$\begin{aligned} \varphi + \frac{3}{2} \left( x^2 + \frac{\omega^2}{2} \right) \varphi - \frac{3}{2} x^2 \psi &= 0; \\ \ddot{\psi} - \frac{3}{2} x^2 \varphi + \frac{3}{2} \left( x^2 + \frac{\omega^2}{2} \right) \psi &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Для интегрирования системы (2.13) применим следующий прием.

Положим

$$\varphi + \psi = \Theta; \quad \varphi - \psi = \Omega. \quad (2.14)$$

Складывая и вычитая уравнения (2.13), получим

$$\ddot{\Theta} + k_1^2 \Theta = 0; \quad k_1^2 = \frac{3}{4} \omega^2. \quad (2.15)$$

$$\ddot{\Omega} + k_2^2 \Omega = 0; \quad k_2^2 = 3 \left( x^2 + \frac{\omega^2}{4} \right). \quad (2.16)$$

Уравнения (2.15) и (2.16) описывают свободные гармонические колебания с частотами

$$k_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \omega; \quad k_2 = \sqrt{3 \left( x^2 + \frac{\omega^2}{4} \right)}.$$

Общие решения уравнений (2.15) и (2.16) имеют вид

$$\Theta = A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1); \quad \Omega = A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2). \quad (2.17)$$

Из (2.14) с помощью (2.17) получаем

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2}(\Theta + \Omega) = \frac{1}{2}[A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2)]; \\ \psi &= \frac{1}{2}(\Theta - \Omega) = \frac{1}{2}[A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) - A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2)]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Постоянные  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  определяем из начальных условий (2.8).

Из (2.18) следует

$$A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2 = 2\alpha; \quad A_1 \sin \alpha_1 - A_2 \sin \alpha_2 = 0. \quad (2.19)$$

Дифференцируя (2.17) и используя начальные условия для  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{\psi}$ , получим

$$A_1 k_1 \cos \alpha_1 + A_2 k_2 \cos \alpha_2 = 0; \quad A_1 k_1 \cos \alpha_1 - A_2 k_2 \cos \alpha_2 = 0. \quad (2.20)$$

Складывая и вычитая уравнения (2.20), получим  $\cos \alpha_1 = 0$ ;  $\cos \alpha_2 = 0$ .

Отсюда  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ . Из (2.19) следует  $A_1 = A_2 = \alpha$ .

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2}(\Theta + \Omega) = \frac{\alpha}{2}(\cos k_1 t + \cos k_2 t); \\ \psi &= \frac{1}{2}(\Theta - \Omega) = \frac{\alpha}{2}(\cos k_1 t - \cos k_2 t). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Положим

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{2} \cos k_1 t; \quad \psi_1 = \frac{\alpha}{2} \cos k_1 t; \quad (2.22)$$

$$\varphi_2 = \frac{\alpha}{2} \cos k_2 t; \quad \psi_2 = -\frac{\alpha}{2} \cos k_2 t. \quad (2.23)$$

Тогда из (2.21) следует

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2; \quad \psi = \psi_1 + \psi_2. \quad (2.24)$$

Колебания, представленные уравнениями (2.22) и (2.23) называются главными. Уравнения (2.22) представляют первое, а уравнения (2.23) второе главные колебания.

Каждому главному колебанию отвечает определенная частота и форма колебаний.

На рис. 2.6 изображена форма колебаний, соответствующая главному колебанию (2.22). Здесь маятники колеблются в одинаковой фазе с одной и той же частотой  $k_1$  и амплитудой  $\frac{\alpha}{2}$ . Пружина не деформирована.

На рис. 2.7 показана форма колебаний, отвечающая главному колебанию (2.23). Маятники колеблются с одной и той же частотой  $k_2$  и амплитудой  $\frac{\alpha}{2}$ . Пружина деформирована.

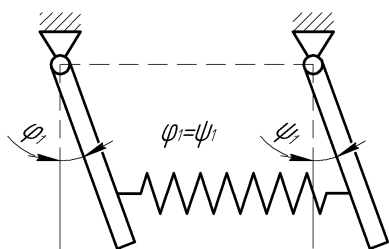


Рис. 2.6

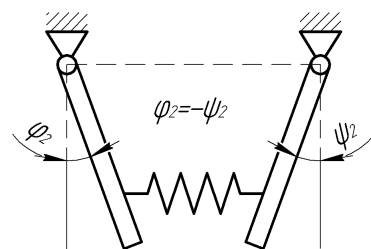


Рис. 2.7

Из (2.24) следует, что колебания каждого из маятников  $O_1A_1$  и  $O_2A_2$  являются результатом наложения главных колебаний с частотами  $k_1$  и  $k_2$ .

Примечание. После введения нормальных координат  $\Theta$  и  $\Omega$  система уравнений (2.13) распалась на два независимых уравнения свободных гармонических колебаний (2.15) и (2.16). Успех этого приема связан с тем, что в нормальных координатах потенциальная и кинетическая энергии приводятся к сумма квадратов.

Описанный прием можно, обобщить на малые колебания любой механической системы и выделить главные колебания. При этом общее решение задачи о малых свободных колебаниях системы является результатом наложения главных (гармонических) колебаний.

**Ответ:**  $\varphi = \frac{\alpha}{2}(\cos k_1 t + \cos k_2 t)$ ;  $\psi = \frac{\alpha}{2}(\cos k_1 t - \cos k_2 t)$ ,

где  $k_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega$  ;  $k_2 = \sqrt{3\left(x^2 + \frac{\omega^2}{4}\right)}$  ;  $\frac{ch^2}{ml^2} = x^2$  ;  $\frac{g}{l} = \omega^2$  .

### Глава 3. Определение собственных частот колебаний МС методом УЛ-2

**Задача 3.1.** Для системы, изображенной на рис. 3.1 определить частоту собственных колебаний  $p$ , если  $m$  – масса груза, а  $c$  – жесткость пружины.

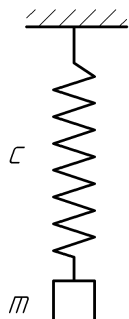


Рис. 3.1

В положении равновесия сила тяжести, действующая на груз, уравнивается силой упругости пружины:  $mg = cy_{cm}$ .

При отклонении груза от положения равновесия на величину  $y$  на него действует восстанавливающая сила  $F = -c(y_{cm} + y)$ .

Уравнение Ньютона для отклоненного состояния  $my = mg - c(y_{cm} + y)$ , т.к.  $mg = cy_{cm}$ , то дифференциальное уравнение свободных колебаний груза имеет вид  $my + cy = 0$  или  $y + p^2y = 0$ , где  $p = \sqrt{\frac{c}{m}}$  – частота собственных колебаний груза.

**Ответ:** частота собственных колебаний системы:  $p = \sqrt{\frac{c}{m}}$ .

**Задача 3.2.** Для системы, изображенной на рис. 3.2 определить частоту собственных колебаний  $p$ , если  $m$  – масса груза,  $c_1$  и  $c_2$  – жесткости пружин.

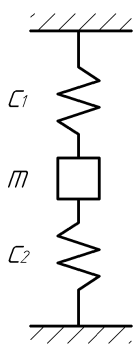


Рис. 3.2

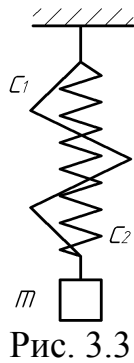
Для покоящегося тела имеем  $mg = (c_1 + c_2)y_{cm}$ . При отклонении груза от положения равновесия на величину  $y$  на него действует восстанавливающая сила  $F = F_1 + F_2 = -c_1(y_{cm} + y) - c_2(y_{cm} + y) = -(c_1 + c_2)(y_{cm} + y)$ .

Уравнение Ньютона для отклоненного состояния  $my = mg - (c_1 + c_2)(y_{cm} + y)$ , или, учитывая равенство  $mg = (c_1 + c_2)y_{cm}$ , получим  $my = mg - (c_1 + c_2)y$ , что эквивалентно  $y + p^2y = 0$ , при  $p = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}$ .

Таким образом, МС с двумя пружинами, изображенная на рис. 3.2, приводится к системе с одной пружиной (рис. 3.1), коэффициент жесткости которой  $c = c_1 + c_2$

**Ответ:** частота собственных колебаний системы:  $p = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}$ .

**Задача 3.3.** Для системы, изображенной на рис. 3.3 определить частоту собственных колебаний  $p$ , если  $m$  – масса груза,  $c_1$  и  $c_2$  – жесткости пружин.

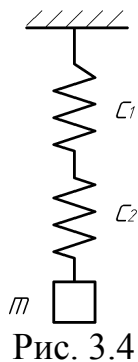


МС, изображенная на рис. 3.3, приводится к системе с одной пружиной (рис. 3.1) с обобщенным коэффициентом жесткости  $c = c_1 + c_2$ .

Дифференциальное уравнение свободных колебаний груза  $y + p^2 y = 0$ , и частота собственных колебаний  $p = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}$ .

**Ответ:** частота собственных колебаний системы:  $p = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}$ .

**Задача 3.4.** Для системы, изображенной на рис. 3.4 определить частоту собственных колебаний  $p$ , если  $m$  – масса груза,  $c_1$  и  $c_2$  – жесткости пружин.



В положении равновесия сила тяжести уравновешивается силой  $F = -c_1 y_{1cm} = -c_2 y_{2cm} = -c y_{cm}$ , где  $c$  – обобщенный коэффициент жесткости,  $y_{cm} = y_{1cm} + y_{2cm}$  – статическое смещение груза под действием силы тяжести.

$$\frac{F}{c} = \frac{F}{c_1} + \frac{F}{c_2}, \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2},$$

$$\text{откуда } c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}.$$

Т.о. данная МС приводится к системе с одной пружиной, коэффициент жесткости которой  $c$  (рис. 3.1).

Дифференциальное уравнение свободных колебаний груза  $y + p^2 y = 0$ , частота собственных колебаний  $p = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{m(c_1 + c_2)}}$ .

**Ответ:** частота собственных колебаний системы:  $p = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{m(c_1 + c_2)}}$ .



**Задача 3.5.** Массивный диск радиуса  $R$  вращается равномерно с угловой скоростью  $\omega$ . На ободе диска шарнирно закреплен стержень, имеющий длину  $l$  и массу  $m$  на свободном конце (см. рис. 3.5). Определить частоту собственных колебаний груза в поле центробежных сил. Стержень считать невесомым.

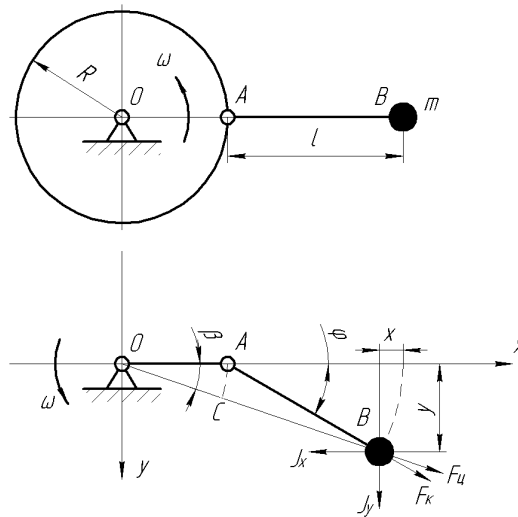


Рис. 3.5

Рассмотрим систему во время движения. В ней действуют следующие силы:

$$F_u = m\omega^2(R+l) \text{ - центробежная сила;}$$

$$F_k \text{ - кориолисова сила;}$$

$$\bar{J} = m \cdot \bar{a} \text{ - сила инерции, которая раскладывается на составляющие } J_x = m \cdot \ddot{x}, J_y = m \cdot \ddot{y}.$$

Запишем выражения для  $x$  и  $y$ :

$$y = l\varphi; \quad x = y^2 = l^2\varphi^2$$

$x$  - величина более высокого порядка малости, чем  $y$ , поэтому ей можно пренебречь. Согласно принципу Даламбера, далее рассматриваем груз, как тело, находящееся в равновесии.

$$\sum M_A = -J_y \cdot l \cdot \cos\varphi + F_u \cdot A \cdot l = 0, \quad \cos\varphi = 1.$$

$$AC = R \cdot \sin\varphi = R \cdot \beta = l(\varphi - \beta).$$

$$\text{Из равенства } R \cdot \beta = l(\varphi - \beta) \text{ найдем угол } \beta: \beta = \frac{l \cdot \varphi}{R+l}.$$

Т.о., учтя, что  $J_y = -m \cdot l \cdot \ddot{\varphi}$ , получим

$$m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi} + m\omega^2(R+l) \cdot \frac{R \cdot l \cdot \varphi}{R+l} = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{\omega^2 R}{l} \varphi = 0 \text{ - дифференциальное уравнение свободных колебаний}$$

системы, где

$$p = \sqrt{\frac{\omega^2 R}{l}} = \omega \sqrt{\frac{R}{l}}.$$

**Ответ:**

дифференциальное уравнения малых колебаний системы:  $\ddot{\varphi} + p\varphi = 0$ ;

частота собственных колебаний системы:  $p = \omega \sqrt{\frac{R}{l}}.$

**Задача 3.6.** Груз массой  $m$  закреплен на абсолютно жестком коротком стержне длиной  $3l$  (закрепленном вертикально на неподвижном шарнире), подкрепленном двумя одинаковыми пружинами жесткостью  $c$  каждая (см. рис. 3.6). Определить частоту малых собственных колебаний системы.

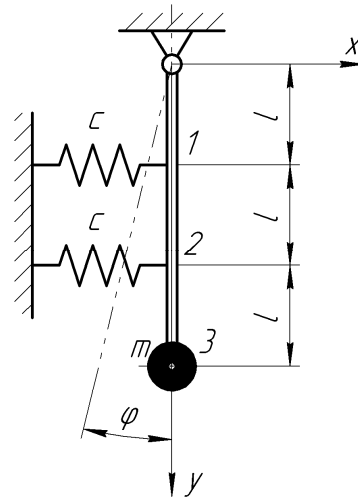


Рис. 3.6

Рассматриваемая МС имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем угол  $\varphi (q = \varphi)$ . Выразим координаты груза  $m(x_3, y_3)$  через  $\varphi$ :  $x_3 = 3l \cdot \sin \varphi$ ,  $y_3 = 3l \cdot \cos \varphi$ .

Скорости  $\dot{x}_3, \dot{y}_3$ :  $\dot{x}_3 = 3l\dot{\varphi} \cdot \cos \varphi$ ,  $\dot{y}_3 = -3l\dot{\varphi} \cdot \sin \varphi$

Деформация пружин в зависимости от угла  $\varphi (\Delta x_1, \Delta x_2)$ :  $\Delta x_1 = l \cdot \sin \varphi$ ,  $\Delta x_2 = 2l \cdot \sin \varphi$ .

Т.к. имеем дело с малыми колебаниями, то  $\sin \varphi = \varphi$ .

$$\text{УЛ-2: } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1),$$

где  $L = T - V$  - функция Лагранжа ( $T$  - кинетическая энергия,  $V$  - потенциальная энергия).

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) = \frac{9}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2.$$

$V = V_{mg} + V_{c1} + V_{c2}$ , где  $V_{mg}$  - энергия сил тяжести;  $V_{c1}$  и  $V_{c2}$  - потенциальная энергия соответственно 1-ой и 2-ой пружины.

$$V_{mg} = mg3l(1 - \cos \varphi);$$

$$V_{c1} = \frac{1}{2} c (\Delta x_1)^2 = \frac{1}{2} c (l\varphi)^2;$$

$$V_{c2} = \frac{1}{2} c (\Delta x_2)^2 = \frac{1}{2} c (2l\varphi)^2;$$

$$\text{Т.о., } V = mg3l(1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2} cl^2 \varphi^2 + 2cl^2 \varphi^2 = mg3l(1 - \cos \varphi) + \frac{5}{2} cl^2 \varphi^2.$$

$$L = T - V = \frac{9ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} - mg3l(1 - \cos \varphi) - \frac{5}{2} cl^2 \varphi^2.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 9ml^2 \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 9ml^2 \ddot{\varphi}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -3mgl \sin \varphi - 5cl^2 \varphi.$$

Учитывая, что  $\sin \varphi \approx \varphi$ , запишем дифференциальное уравнение свободных колебаний:

$$9ml^2 \ddot{\varphi} + (3mgl + 5cl^2)\varphi = 0.$$

или:

$$\ddot{\varphi} + \left( \frac{3mgl + 5cl^2}{9ml^2} \right) \varphi = 0.$$

Т.о., частота собственных колебаний системы:  $p = \sqrt{\frac{3mgl + 5cl^2}{9ml^2}} = \sqrt{\frac{5c}{9m} + \frac{g}{3l}}$ .

**Ответ:** частота собственных колебаний системы:  $p = \sqrt{\frac{5c}{9m} + \frac{g}{3l}}$ .

**Задача 3.7.** Груз массой  $m$  закреплен на абсолютно жестком коротком стержне длиной  $3l$  (закрепленном горизонтально на неподвижном шарнире), подкреплённом двумя одинаковыми пружинами жесткостью  $c$  каждая (см. рис. 3.7). Определить частоту малых собственных колебаний системы.

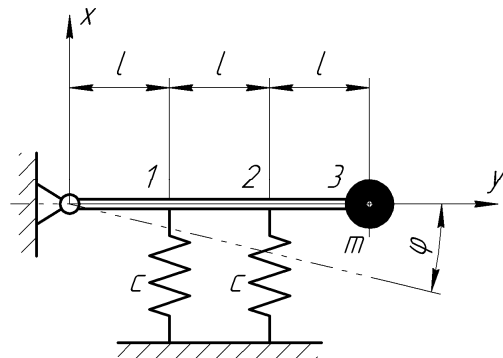


Рис. 3.7

Направим ось  $y$  вдоль геометрической оси стержня и выберем за обобщенную координату угол  $\varphi$ . Выражение для координат груза, его скоростей и деформаций пружин через угол  $\varphi$  соответственно:

$$x_3 = 3l \cdot \sin \varphi, \quad y_3 = 3l \cdot \cos \varphi$$

$$\dot{x}_3 = 3l \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi, \quad \dot{y}_3 = -3l \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi$$

$$\Delta x_1 = l \cdot \sin \varphi, \quad \Delta x_2 = 2l \cdot \sin \varphi.$$

$$\text{УЛ-2: } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad L = T - V.$$

$$\text{Кинетическая энергия: } T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) = \frac{9ml^2 \dot{\varphi}^2}{2}.$$

Потенциальная энергия:  $V = V_{mg} + V_{c1} + V_{c2}$ , где

$$V_{mg} = mg3l\varphi; \quad - \text{энергия сил тяжести (при малых перемещениях } \sin \varphi \approx \varphi);$$

$$V_{c1} = \frac{1}{2} c (f_{cm1} + \Delta x_1)^2 \quad - \text{потенциальная энергия 1-ой пружины;}$$

$$V_{c2} = \frac{1}{2} c (f_{cm2} + \Delta x_2)^2 \quad - \text{потенциальная энергия 2-ой пружины;}$$

Т.о.,

$$V = \frac{1}{2} c (f_{cm1} + \Delta x_1)^2 + \frac{1}{2} c (f_{cm2} + \Delta x_2)^2 - mg3l\varphi = \dots =$$

$$= \frac{1}{2} c (f_{cm1}^2 + f_{cm2}^2) + \frac{5cl\varphi}{2} f_{cm2} + \frac{5cl^2\varphi^2}{2} - mg3l\varphi$$

Рассматривая систему в положении равновесия, определим *статические* деформации пружин:  $2f_{cm1} = f_{cm2} = \frac{6mg}{5c}$ .

$$\text{Т.о.: } V = \frac{1}{2}c(f_{cm1}^2 + f_{cm2}^2) + \frac{5cl^2\varphi^2}{2}$$

$$L = T - V = \frac{9ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{1}{2}c(f_{cm1}^2 + f_{cm2}^2) - \frac{5cl^2\varphi^2}{2}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 9ml^2\dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 9ml^2\ddot{\varphi}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -5cl^2\varphi.$$

Дифференциальное уравнение свободных колебаний:  $9ml^2\ddot{\varphi} + 5cl^2\varphi = 0$ .

$$\text{или: } \ddot{\varphi} + \frac{5c}{9m}\varphi = 0.$$

Т.о., частота собственных колебаний системы:  $p = \sqrt{\frac{5c}{9m}}$ .

**Ответ:** частота собственных колебаний системы:  $p = \sqrt{\frac{5c}{9m}}$ .

**Задача 3.8** На конце вертикально установленного на неподвижном шарнире стержня длиной  $2l$  расположен груз массой  $m$ . С двух сторон стержень подперт одинаковыми пружинами жесткостью  $c$  каждая. Определить собственную частоту системы.

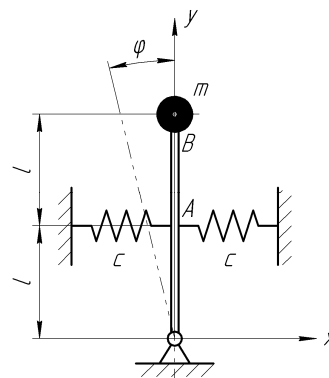


Рис. 3.8

Рассматриваемая МС имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем угол  $\varphi$ .

$$\text{Координаты груза: } x = 2l \cdot \sin \varphi, \quad y = 2l \cdot \cos \varphi;$$

$$\text{Скорости груза: } \dot{x} = 2l\dot{\varphi} \cdot \cos \varphi, \quad \dot{y} = -2l\dot{\varphi} \cdot \sin \varphi;$$

$$\text{Деформация пружин: } \Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = l \cdot \sin \varphi \approx l\varphi.$$

$$\text{УЛ-2: } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad L = T - V.$$

$$\text{Кинетическая энергия: } T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(2l\dot{\varphi})^2 = 2ml^2\dot{\varphi}^2.$$

$$\text{Потенциальная энергия: } \Pi = \frac{c}{2}(\Delta x)^2 - mg2l(1 - \cos \varphi) = cl^2\varphi^2 - 2mgl(1 - \cos \varphi).$$

$$\text{Т.о., } L = T - V = 2ml^2\dot{\varphi}^2 - cl^2\varphi^2 + 2mgl(1 - \cos \varphi).$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 4ml^2 \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 4ml^2 \ddot{\varphi}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -2cl^2 \varphi + 2mgl \varphi. \quad (\text{т.к. } \sin \varphi \approx \varphi)$$

Дифференциальное уравнение свободных колебаний:

$$4ml^2 \ddot{\varphi} + (2cl^2 + 2mgl)\varphi = 0.$$

$$\text{или: } \ddot{\varphi} + \left( \frac{cl^2 + mgl}{2ml^2} \right) \varphi = 0.$$

$$\text{Т.о., частота собственных колебаний системы: } p = \sqrt{\frac{cl^2 + mgl}{2ml^2}} = \sqrt{\frac{c}{2m} + \frac{g}{2l}}.$$

$$\text{Ответ: частота собственных колебаний системы: } p = \sqrt{\frac{c}{2m} + \frac{g}{2l}}.$$

**Задача 3.9.** Двойной физической маятник состоит из двух однородных стержней длиной  $l$  весом  $P$  каждый (рис. 3.9). Найдите малые колебания маятника.

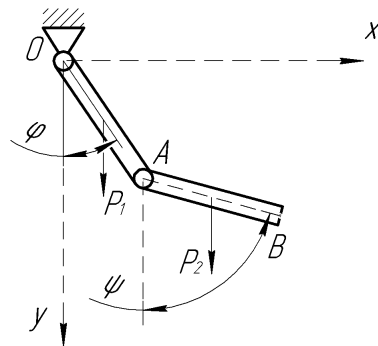


Рис. 3.9

За обобщенные координаты примем углы  $\varphi$  и  $\psi$  (рис. 3.9).

Воспользуемся выражениями потенциальной энергии (1.9) и кинетической энергии (1.15) двойного маятника, полученными при решении задач первой главы.

Функция Лагранжа

$$L = T - V = \frac{Pl}{2g} \left( \frac{4}{3} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3} \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi} \dot{\psi} \right) - \frac{Pl}{4} (3\varphi^2 + \psi^2) \quad (3.1)$$

Дифференцируя (3.1), находим

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{3}{2} Pl \varphi; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{4P}{3g} l^2 \dot{\varphi} + \frac{Pl^2}{2g} \dot{\psi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = -\frac{1}{2} Pl \psi; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{Pl^2}{3g} \dot{\psi} + \frac{Pl^2}{2g} \dot{\varphi}.$$

УЛ-2 имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{Pl^2}{g} \left( \frac{4}{3} \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \ddot{\psi} \right) + \frac{3}{2} Pl \varphi = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{Pl}{g} \left( \frac{1}{3} \ddot{\psi} + \frac{1}{2} \ddot{\varphi} \right) + \frac{1}{2} Pl \psi = 0.$$

или

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\phi + \frac{3g}{2l}\phi + \frac{1}{2}\psi &= 0; \\ \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{3}\psi + \frac{g}{2l}\psi &= 0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Ищем решение системы (3.2) в виде

$$\phi = A \sin(kt + \alpha); \quad \psi = B \sin(kt + \alpha).\tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (3.2), получим

$$\begin{aligned}\left(\frac{3g}{2l} - k^2\right)A - \frac{1}{2}k^2B &= 0; \\ -\frac{1}{2}k^2A + \left(\frac{3g}{2l} - \frac{1}{3}k^2\right)B &= 0.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Так как по физическому смыслу задачи  $A$  и  $B$  не равны одновременно нулю, то система (3.4) должна допускать нетривиальное решение. Это возможно тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \frac{3g}{2l} - \frac{4}{3}k^2 & -\frac{1}{2}k^2 \\ -\frac{1}{2}k^2 & \frac{g}{2l} - \frac{1}{3}k^2 \end{vmatrix} = 0\tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) называют уравнением частот (вековым уравнением). В развернутом виде оно имеет вид

$$\left(\frac{3g}{2l} - \frac{4}{3}k^2\right) \cdot \left(\frac{g}{2l} - \frac{1}{3}k^2\right) - \frac{1}{4}k^4 = 0,$$

или

$$7k^4 - 42\frac{g}{l}k^2 + 27 = 0.\tag{3.5}$$

Из (3.5) находим

$$k^2 = \left(3 \pm \frac{6}{7}\sqrt{7}\right)\frac{g}{l}.$$

Отсюда

$$k_1 = 0.856\sqrt{\frac{g}{l}}; \quad k_2 = 2.295\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Общее решение системы (2.25) имеет вид

$$\begin{aligned}\phi &= A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2); \\ \psi &= B_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + B_2 \sin(k_2 t + \alpha_2).\end{aligned}\tag{3.6}$$

Из (3.4) следует

$$\frac{B_j}{A_j} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{g}{l} - \frac{4}{3}k_j^2}{\frac{1}{2}k_j^2} = \mu_j \quad (j=1,2).$$

Заменяя  $k_j$  их числовыми значениями, получим

$$\mu_1 \cong 1.43; \quad \mu_2 = -2.09.$$

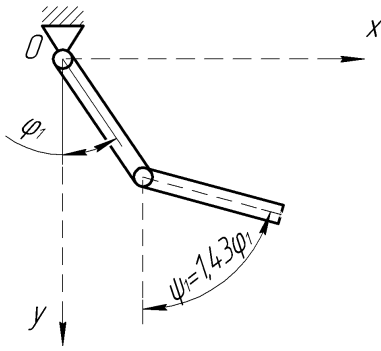


Рис. 3.10

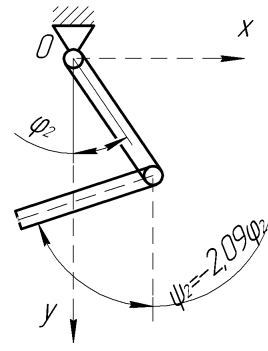


Рис. 3.11

Уравнения (3.6) принимают вид

$$\begin{aligned} \varphi &= A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) ; \\ \psi &= \mu_1 A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + \mu_2 A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

В (3.7) слагаемые в рамках соответствуют первому и второму главным колебаниям. Первое главное колебание происходит с частотой  $k_1$ . Его форма показана на рис. 3.10. Второе главное колебание совершается с частотой  $k_2$ . Его форма показана на рис. 3.11.

**Ответ:**  $\varphi = A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) ;$   
 $\psi = \mu_1 A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + \mu_2 A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) .$

## Глава 4. Применение метода УЛ-2 при решении задач с распределенными параметрами

### §1. Метод дискретизации

#### О дискретных моделях

Теоретическая механика изучает механические системы с конечным ЧСС. Между тем при расчете инженерных конструкций чаще всего рассматриваются механические системы с распределенными параметрами (нити, стержни, пластины, оболочки), обладающие бесконечным ЧСС.

Границы применения методов теоретической механики значительно расширяются при использовании метода дискретизации (метод конечных разностей, метод конечного элемента), позволяющего сводить решение задач о МС с распределенными параметрами к решению задачи о системе с конечным ЧСС.

Поясним сущность метода дискретизации на примерах упругого стержня постоянного сечения и гибкой нити.

Простейшей дискретной моделью упругого стержня постоянного сечения (модель 1) является шарнирный многоугольник (рис. 4.1.1), сторонами которого служат жесткие безинерционные стержни; в шарнирах сосредоточены массы  $m = \frac{m_0}{n-2}$ , где  $m_0$  - масса моделируемого стержня;  $n$  - число сторон шарнирного многоугольника (одно звено многоугольника неподвижно). Шарниры считаются упругими: если одна из сторон многоугольника поворачивается относительно смежной стороны на угол  $\varphi$  (рис. 4.1.1), то в соединяющем их шарнире возникает пара сил с моментом

$$M = \frac{EJ}{l} \varphi, \quad (4.1.1)$$

где  $EJ$  - изгибная жесткость моделируемого стержня;  $l$  - длина сторон шарнирного многоугольника. Модель элемента стержня показана на рис. 4.1.2а.

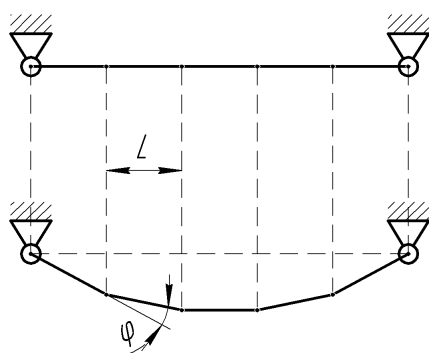


Рис. 4.1.1

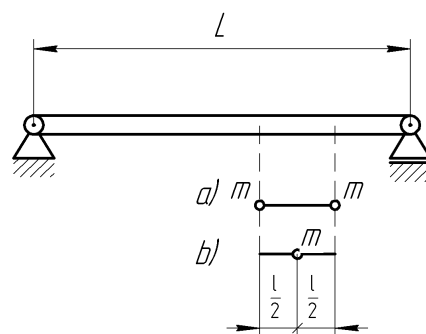


Рис. 4.1.2

Модель 1 допускает различные модификации, связанные со способами размещения сосредоточенных масс. Можно, например, помещать сосредоточенную массу  $m = \frac{m_0}{n-1}$  в середине каждой стороны шарнирного мно-



гоугольника (Модель 2), (рис. 4.1.2б). Величину сосредоточенных масс можно выбирать как угодно, лишь бы их сумма была равна, массе моделируемого стержня.

Более совершенной моделью упругого стержня является шарнирный многоугольник, образованный жесткими инерционными стержнями, соединенными упругими шарнирами (Модель 3). Пусть  $l$  - длина моделируемого стержня;  $m_0$  - масса его;  $\mu = \frac{m_0}{l}$  - погонная масса стержня. Тогда массу каждого звена шарнирного многоугольника можно принять равной  $m = \mu l$ .

Стержень с исчезающе малой изгибной жесткостью называется гибкой нитью. Рассмотренные выше модели могут служить дискретными моделями гибкой нерастяжимой нити, если соединительные шарниры не наделять упругими свойствами (Модель 1<sup>а</sup> – 3<sup>а</sup>).

При расчете гибкой нити с учетом упругих свойств материала дискретную модель необходимо видоизменить. Предположим, что каждое звено шарнирного многоугольника может растягиваться, причем деформация звена подчиняется закону Гука

$$\varepsilon = \frac{N}{E \cdot F} \quad (4.1.2)$$

Здесь  $N$  – растягивающее усилие;  $EF$  – жесткость звена на растяжение;  $\varepsilon$  – относительное удлинение звена. Если  $l_0$  – первоначальная длина звена, то под нагрузкой

$$l = l_0(1 + \varepsilon). \quad (4.1.3)$$

Шарнирный многоугольник с линейно деформируемыми растяжимыми звеньями и пренебрежимо малой жесткостью упругих шарниров является подходящей дискретной моделью гибкой растяжимой нити (Модель 4).

Можно показать, что, при достаточно большом числе элементов, различные дискретные модели дают близкие между собой результаты и сколь угодно точно описывают поведение моделируемых объектов (стержни, нити). Несмотря на близость результатов, полученных при использовании различных моделей, применение нескольких моделей полезно. Так, например, при определении частот собственных колебаний балки модель 1 дает, как правило, заниженные, а модель 2 – завышенные результаты. Для искомых частот получается двухсторонняя оценка, позволяющая судить о точности расчетов.

**Задача 4.1.1.** Шарнирный пятиугольник совершает малые колебания около положения устойчивого равновесия. Расстояние между опорами  $AB = 2a$ . Составить уравнения малых колебаний стержневого пятиугольника, используя метод УЛ-2.

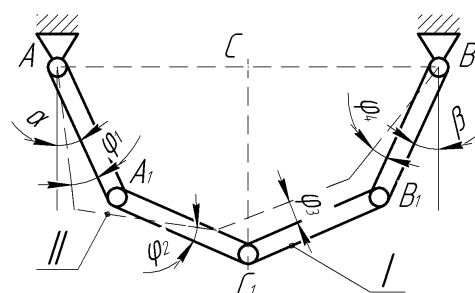


Рис. 4.1.3

В качестве обобщенных координат выберем углы  $\varphi_k$  ( $k = 1..4$ ) (рис. 4.1.3). МС имеет две степени свободы. Поэтому из четырех координат  $\varphi_k$  только две являются независимыми, например,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Положение устойчивого равновесия стержневого пятиугольника определяется углами  $\alpha$  и  $\beta$ , которые находятся из системы уравнений

$$\cos \alpha + \cos \beta = \frac{a}{l}; 3 \operatorname{ctg} \alpha. \quad (4.1.4)$$

Координаты  $\varphi_k$  ( $k = 1..4$ ) связаны двумя уравнениями

$$l \cos(\alpha + \varphi_1) + l \cos(\beta + \varphi_2) + l \cos(\beta + \varphi_3) + l \cos(\alpha + \varphi_4) = 2l(\cos \alpha + \cos \beta) = 2a, \quad (4.1.5)$$

$$\sin(\alpha + \varphi_1) + \sin(\beta + \varphi_2) + \sin(\beta + \varphi_3) + \sin(\alpha + \varphi_4) = 0. \quad (4.1.6)$$

Уравнения (4.1.5) и (4.1.6) получены в результате проектирования пятиугольника на горизонтальную и вертикальную оси соответственно.

При достаточно малых углах  $\varphi_k$  в (4.1.5) и (4.1.6) можно ограничиться членами первого порядка относительно  $\varphi_k$ , полагая

$$\sin \varphi_k \approx \varphi_k; \quad \cos \varphi_k = 1.$$

В этом случае уравнения (4.1.5) и (4.1.6) принимают вид

$$\begin{aligned} \varphi_3 \sin \beta + \varphi_4 \sin \alpha &= -\varphi_1 \sin \alpha - \varphi_2 \sin \beta; \\ \varphi_3 \cos \beta + \varphi_4 \cos \alpha &= \varphi_1 \cos \alpha + \varphi_2 \cos \beta. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Разрешая (3.7) относительно  $\varphi_3$  и  $\varphi_4$ , получим

$$\varphi_3 = \alpha_{31} \varphi_1 + \alpha_{32} \varphi_2; \quad \varphi_4 = \alpha_{41} \varphi_1 + \alpha_{42} \varphi_2. \quad (4.1.8)$$

Здесь, с учетом (4.1.4)

$$\alpha_{31} = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}; \quad \alpha_{32} = 2; \quad \alpha_{41} = -2; \quad \alpha_{42} = -\frac{\cos \beta}{\sin \alpha}. \quad (4.1.9)$$

Потенциальная энергия пятиугольника представлена формулой (1.15). В силу (4.1.8) и (4.1.9) она принимает вид

$$V = \frac{Pl}{4} [3(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \sin \alpha + (\varphi_2^2 + \varphi_3^2) \sin \beta].$$

Кинетическая энергия системы представлена формулой:

$$T = \frac{Pl^2}{2g} \left\{ \frac{4}{3}(\varphi_1^2 + \varphi_4^2) + \frac{1}{3}(\varphi_2^2 + \varphi_3^2) + (\varphi_1\varphi_2 + \varphi_3\varphi_4) \cos[\alpha - \beta] \right\}.$$

Функция Лагранжа

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{Pl^2}{2g} \left\{ \frac{4}{3}(\varphi_1^2 + \varphi_4^2) + \frac{1}{3}(\varphi_2^2 + \varphi_3^2) + (\varphi_1\varphi_2 + \varphi_3\varphi_4) \cos[\alpha - \beta] \right\} - \\ &\quad - \frac{Pl}{4} [3(\varphi_1^2 + \varphi_4^2) \sin \alpha + (\varphi_2^2 + \varphi_3^2) \sin \beta]. \end{aligned}$$

Выражая  $L$  через независимые координаты  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , получим

$$L = \frac{Pl^2}{4} (a_{11}\varphi_1^2 + 2a_{12}\varphi_1\varphi_2 + a_{22}\varphi_2^2) + \frac{Pl}{4} (b_{11}\varphi_1^2 + 2b_{12}\varphi_1\varphi_2 + b_{22}\varphi_2^2), \quad (4.1.10)$$

где, с учетом (4.1.9),

$$a_{11} = \frac{4}{3}(1 - \alpha_{41}^2) + \frac{1}{3}\alpha_{31}^2 + \alpha_{31}\alpha_{41}\cos(\alpha - \beta) = \frac{20}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2 - 2\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos(\alpha - \beta) ;$$

$$a_{22} = \frac{4}{3}\alpha_{42}^2 + \frac{1}{3}(1 + \alpha_{32}^2) + \alpha_{32}\alpha_{42}\cos(\alpha - \beta) = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}(1 + \alpha_{32}^2) + \alpha_{32}\alpha_{42}\cos(\alpha - \beta) ;$$

$$a_{12} = \frac{4}{3}\alpha_{42}\alpha_{41} + \frac{1}{3}\alpha_{32}\alpha_{31} + \frac{1}{2}(\alpha_{31}\alpha_{42} + \alpha_{32}\alpha_{41})\cos(\alpha - \beta) = \frac{8\cos\beta}{3\cos\alpha} + \frac{2\sin\alpha}{3\sin\beta} + 3\cos(\alpha - \beta) ;$$

$$b_{11} = 3(1 + \alpha_{41}^2)\sin\alpha + \alpha_{31}^2\sin\beta = \sin\left(15 + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right) ;$$

$$b_{22} = 3\alpha_{42}^2\sin\alpha + (1 + \alpha_{32}^2)\sin\beta = 3\sin\alpha\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2 + 5\sin\beta ;$$

$$b_{12} = 3\alpha_{42}\alpha_{41}\sin\alpha + \alpha_{32}\alpha_{31}\sin\beta = 2\sin\alpha\left(1 + 3\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right) .$$

УЛ- 2 имеют следующий вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} \equiv \frac{Pl^2}{2g}(a_{11}\dot{\varphi}_1 + a_{12}\dot{\varphi}_2) + \frac{1}{2}Pl(b_{11}\varphi_1 + b_{12}\varphi_2) = 0 ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} \equiv \frac{Pl^2}{2g}(a_{22}\dot{\varphi}_2 + a_{12}\dot{\varphi}_1) + \frac{1}{2}Pl(b_{22}\varphi_2 + b_{12}\varphi_1) = 0 .$$

или

$$\begin{aligned} a_{11}\dot{\varphi}_1 + a_{12}\dot{\varphi}_2 + \frac{g}{l}(b_{11}\varphi_1 + b_{12}\varphi_2) &= 0, \\ a_{12}\dot{\varphi}_1 + a_{22}\dot{\varphi}_2 + \frac{g}{l}(b_{12}\varphi_1 + b_{22}\varphi_2) &= 0. \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

Уравнения (4.1.12) - искомого уравнения малых колебаний шарнирного пятиугольника.

Примечание. Шарнирный пятиугольник является дискретной моделью гибкой нерастяжимой нити (модель 3<sup>а</sup>).

Поэтому полное решение задачи о малых колебаниях шарнирного многоугольника доставляет приближенное решение задачи о малых колебаниях гибкой нерастяжимой нити около положения устойчивого равновесия.

**Задача 4.1.2** Двойной опрокинутый маятник состоит из двух однородных стержней длиной  $l$  и массой  $m$  каждый (рис. 4.1.4). Крепления в точках  $O$  и  $A$  шарнирные. Стержни соединены пружиной жесткости  $c$ . Такая же пружина связывает стержень  $OA$  с опорой. На стержень  $AB$  действует "следящая" сила  $P$  постоянно направленная вдоль стержня. Исследовать малые движения маятника в окрестности вертикального начального положения.

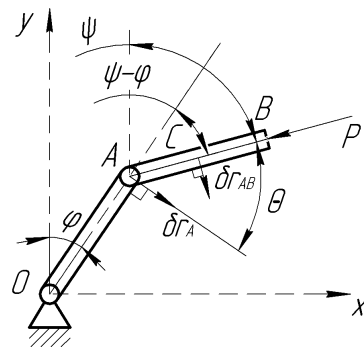


Рис. 4.1.4

В качестве обобщенных координат выберем углы  $\varphi$  и  $\psi$  отклонения от вертикали стержней  $OA$  и  $AB$  соответственно. Так как следящая сила  $P$  является непотенциальной, то целесообразно воспользоваться УЛ-2 в форме:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_*}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L_*}{\partial \varphi} = Q_\varphi; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_*}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L_*}{\partial \psi} = Q_\psi. \quad (4.1.13)$$

где  $L_* = T - V_*$ ,  $Q_\varphi$  и  $Q_\psi$  - обобщенные непотенциальные силы.

Находим потенциальную энергию  $V_*$ :

$$V_* = \frac{c\varphi}{2} + \frac{c}{2}(\psi - \varphi)^2.$$

Кинетическая энергия системы  $T$ :

$$T = \frac{ml^2}{2} \left( \frac{4}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3}\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}\dot{\psi} \right).$$

Обобщенные силы  $Q_\varphi$  и  $Q_\psi$  представлены равенствами

$$Q_\varphi = -Pl \sin(\psi - \varphi); \quad Q_\psi = 0.$$

В случае малых движений

$$Q_\varphi \cong -Pl(\psi - \varphi); \quad Q_\psi = 0. \quad (4.1.14)$$

Найдем частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_*}{\partial \dot{\varphi}} &= -c\varphi + c(\psi - \varphi); \quad \frac{\partial L_*}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{ml}{2} \left( \frac{8}{3}\dot{\varphi} + \dot{\psi} \right); \\ \frac{\partial L_*}{\partial \dot{\psi}} &= -c(\psi - \varphi); \quad \frac{\partial L_*}{\partial \dot{\psi}} = \frac{ml}{2} \left( \frac{2}{3}\dot{\varphi} + \dot{\psi} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Подставляя (4.1.14) и (4.1.15) в (4.1.13), получим

$$\begin{aligned} \frac{ml^2}{2} \left( \frac{8}{3}\dot{\varphi} + \dot{\psi} \right) + 2c\varphi - c\psi &= -Pl(\psi - \varphi); \\ \frac{ml^2}{2} \left( \frac{2}{3}\dot{\varphi} + \dot{\psi} \right) + c(\psi - \varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Выведем для краткости обозначения

$$\frac{c}{ml^2} = n; \quad \frac{P}{ml} = k^2.$$

Системе (4.1.16) можно придать вид

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}\dot{\psi} + (2n^2 - k^2)\varphi + (k^2 - n^2)\psi &= 0; \\ \frac{1}{2}\dot{\varphi} + \frac{1}{3}\dot{\psi} - n^2\varphi + n^2\psi &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Ищем решение системы уравнений (4.1.17) в форме

$$\varphi = A e^{rt}; \quad \psi = B e^{rt} \quad (4.1.18)$$

Подставляя (4.1.18) в (4.1.17), получим

$$\begin{aligned} \left( 2n^2 - k^2 + \frac{4}{3}r^2 \right) A + \left( k^2 - n^2 + \frac{1}{2}r^2 \right) B &= 0; \\ \left( -n^2 + \frac{1}{2}r^2 \right) A + \left( n^2 + \frac{1}{3}r^2 \right) B &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

Из (4.1.19) следует

$$\left(2n^2 - k^2 + \frac{4}{3}r^2\right)\left(n^2 + \frac{1}{3}r^2\right) - \left(\frac{1}{2}r^2 - n^2\right)\left(k^2 - n^2 + \frac{1}{2}r^2\right) = 0.$$

Или

$$7r^4 - 30(k^2 - 3,6n^2)r^2 + 36n^4 = 0 \quad (4.1.20)$$

Отсюда

$$r^2 = \frac{15(k^2 - 3,6n^2) \pm \sqrt{D}}{7}, \quad (4.1.21)$$

где

$$D = 225(k^2 - 3,6n^2)^2 - 252n^4 = 9\Delta; \\ \Delta = 25k^4 - 180k^2n^2 + 296n^4.$$

Исследуем поведение корней уравнения (4.1.20). Введем обозначение  $\lambda = \frac{k^2}{n^2}$ . Тогда уравнение (4.1.20) и  $\Delta$  представимы в виде

$$r^4 - 30(\lambda - 3,6)n^2r^2 + 36n^4 = 0; \quad \Delta = (25\lambda^2 - 180\lambda + 296)n^4. \quad (4.1.21)$$

Разлагая квадратный трехчлен  $\Delta$  на множители, получим

$$\Delta = 25(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)n^4 \quad (4.1.22)$$

где  $\lambda_{1,2} = 0,4(9 \pm \sqrt{7})$ .

На рис. 4.1.5 показано поведение  $\Delta$  при изменении  $\lambda$  в  $(0, \infty)$ .

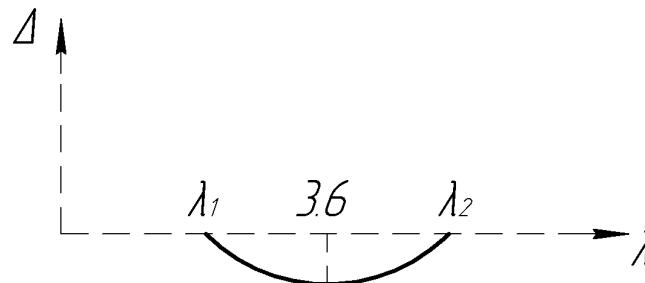


Рис. 4.1.5

Могут представиться следующие случаи.

а) При  $\lambda < \lambda_1$  имеем  $\Delta > 0$  и, в силу (3.21),  $r_{1,2}^2$  — действительные числа. Так как при  $\lambda < \lambda_1$  имеем  $\lambda - 3,6 < 0$ , а свободный член (4.1.22) положителен, то из теоремы Виета о корнях квадратного уравнения следует, что  $r_{1,2}^2 < 0$  и уравнение (4.1.20) имеет чисто мнимые корни. В этом случае решение (4.1.18) принимает вид

$$\varphi = A \sin(\omega t + \alpha); \quad \psi = B \sin(\omega t + \alpha)$$

Опрокинутый двойной маятник совершает малые колебания около исходного положения равновесия.

б) При  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$  имеем  $\Delta < 0$  уравнение (4.1.22) имеет комплексные корни. Покажем, что если

$$r = \alpha + i\beta \quad (4.1.23)$$

является корнем уравнения (4.1.23), то  $\pm\alpha \pm i\beta$  также являются корнями этого уравнения. Подставляя (4.1.23) в (4.1.21), получим

$$7(\alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta) = 15(\lambda - 3,6)n^2 \pm 3i\sqrt{-\Delta}.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= \frac{15}{7}(\lambda - 3,6)n^2; \\ \pm\alpha\beta &= \frac{3}{14}\sqrt{-\Delta}. \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

Из (3.24) следует

$$\beta = \pm \frac{3\sqrt{-\Delta}}{14\alpha}. \quad (4.1.25)$$

Подставляя (4.1.25) в (4.1.24), приходим к следующему уравнению относительно  $\alpha$

$$\alpha^4 - 2b\alpha^2 + c = 0, \quad (4.1.26)$$

где

$$b = \frac{15}{4}(\lambda - 3,6)n^2; \quad c = \frac{9}{196}\Delta < 0.$$

Из (4.1.26) находим

$$\alpha^2 = b \pm \sqrt{b^2 - c}; \quad b^2 - c > 0 \quad (4.1.27)$$

Так как  $\alpha$  - действительное число, то  $\alpha^2 > 0$ . Этому условию удовлетворяет только одно из решений (4.1.27)

$$\alpha^2 = b + \sqrt{b^2 - c}.$$

Отсюда

$$\alpha = \sqrt{b + \sqrt{b^2 - c}} \quad (4.1.28)$$

Из (4.1.25) и (4.1.28) следует, что уравнение (4.1.22) имеет корни вида  $\pm\alpha_0 \pm i\beta_0$ , где  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  - положительные числа.

Среди корней уравнения (4.1.22) имеются корни с положительной вещественной частью. Им отвечают решения системы (4.1.27), имеющие вид

$$\varphi = A e^{\alpha_0 t} \sin(\beta_0 t + \gamma); \quad \psi = B \sin(\beta_0 t + \gamma). \quad (4.1.29)$$

Уравнения (3.29) представляют колебания с возрастающей с течением времени амплитудой (автоколебания). В этом случае движение маятника является неустойчивым.

в) При  $\lambda > \lambda_2$  имеем  $\Delta > 0$ ,  $15(\lambda - 3,6)n^2 > \sqrt{D}$ . Из (4.1.21) следует, что уравнение (4.1.22) имеет только действительные корни  $\pm r_k$  ( $k=1,2$ ) Решение системы (4.1.17) складывается из частных решений вида

$$\varphi_k = A_k sh(r_k t + \gamma_k); \psi_k = B_k sh(r_k t + \gamma_k), \quad (k=1,2) \quad (4.1.30)$$

Уравнения (4.1.30) представляют аperiodическое движение. Углы  $\varphi$  и  $\psi$  неограниченно возрастают с течением времени. Движение маятника в этом случае является неустойчивым.

Проведенный анализ показывает, что  $\lambda = \lambda_1$  является критическим значением параметра  $\lambda$ ; при  $\lambda < \lambda_1$  двойной маятник совершает устойчивые малые колебания около положения равновесия; при  $\lambda > \lambda_1$  движение маятника становится неустойчивым.

Так как

$$\lambda = \frac{k^2}{x^2} = \frac{Pl}{c},$$

то критическому значению  $\lambda = \lambda_1$  отвечает критическая сила

$$P_{кр} = \frac{c\lambda_1}{l} = 0,4(9 - \sqrt{7})\frac{c}{l} \cong 2,44\frac{c}{l}.$$

При  $P < P_{кр}$  движение маятника устойчиво, а при  $P > P_{кр}$  - неустойчиво.

Замечая, что

$$c = \frac{EJ}{l}; \quad L = 2l,$$

получаем

$$P_{кр} \cong 9,76 \frac{EJ}{L^2}.$$

Этот результат довольно сильно отличается от действительного значения критической нагрузки:  $P_{кр}^* \cong 20,05 \frac{EJ}{L^2}$ . Значительное расхождение между приближенным и точным значением критической силы связано с малым количеством элементов, на которые был разбит консольный стержень (два элемента). С увеличением числа элементов приближенное значение критической силы приближается к точному.

## §2. Метод сил

**Задача 4.2.1** Для системы (рис. 4.2.1) с постоянной изгибной жесткостью  $EJ_x$ , используя метод сил, составить дифференциальное уравнения малых колебаний и определить частоту собственных колебаний. Стержень считать невесомым, а массу точечной.

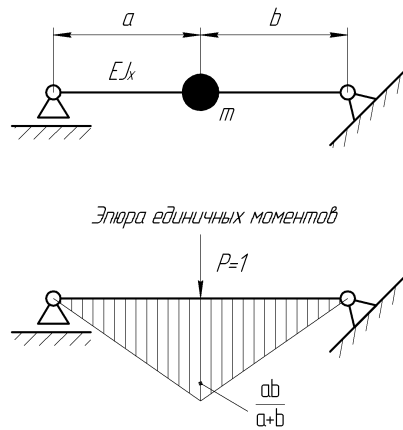


Рис. 4.2.1

Для составления дифференциального уравнения свободных колебаний воспользуемся коэффициентами влияния. Коэффициент влияния (единичное перемещение) упругой системы  $\delta_{ik}$  — это перемещение в направлении  $i$ , вызываемое статической силой  $P=1$ , действующей по направлению  $k$ . Для его определения воспользуемся формулой Мора (правилом Верещагина):

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} \left[ \frac{1}{2} \frac{(ab)^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{2}{3} a + \frac{1}{2} \frac{(ab)^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{2}{3} b \right] = \frac{(ab)^2}{3EJ_x(a+b)}$$

Пользуясь коэффициентом влияния, можно записать  $y_1 = -\delta_{11} m \ddot{y}_1$  или дифференциальное уравнение свободных колебаний  $\ddot{y} + p^2 y = 0$ , где частота собственных колебаний  $p = \sqrt{\frac{3EJ_x(a+b)}{m(ab)^2}}$ .

**Ответ:**

дифференциальное уравнения малых колебаний системы:  $\ddot{y} + p^2 y = 0$ ;

частота собственных колебаний системы:  $p = \sqrt{\frac{3EJ_x(a+b)}{m(ab)^2}}$ .



**Задача 4.2.2.** Для системы (Рис. 4.2.2) с постоянной изгибной жесткостью  $EJ_x$ , используя метод сил, составить дифференциальные уравнения малых колебаний и определить частоту собственных колебаний. Стержень считать невесомым, а массу точечной.

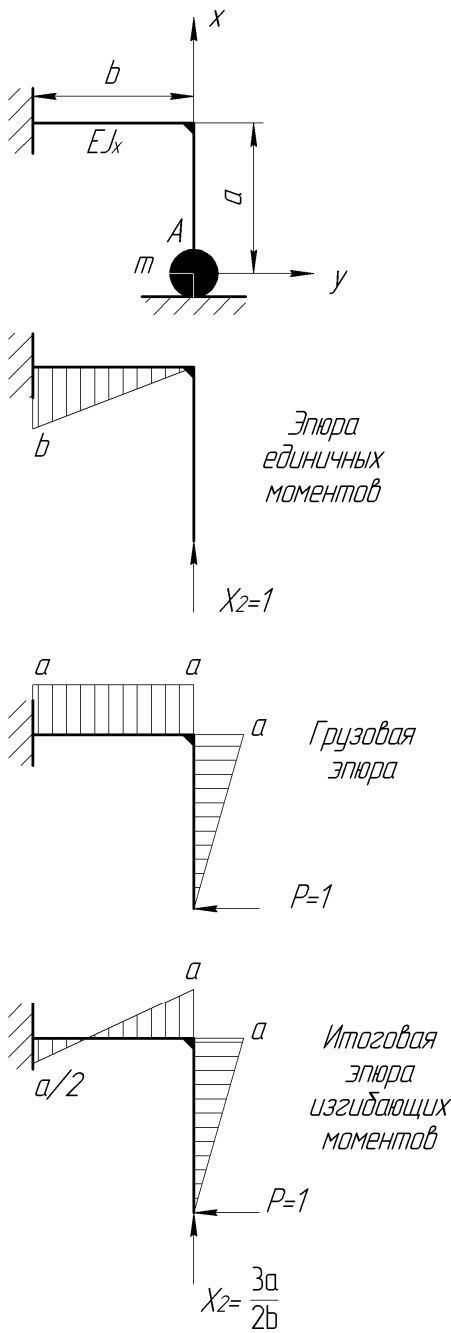


Рис. 4.2.2

Дифференциальное уравнение малых свободных колебаний и выражение для частоты собственных колебаний груза (соответственно):

$$y + p^2 y = 0, \quad p = \sqrt{\frac{1}{m \delta_{11}}}$$

Для определения  $\delta_{11}$  надо предварительно найти опорную реакцию в точке A при  $P=1$ .

Воспользуемся методом сил  $\delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0$ , где  $\delta_{22}$  – перемещение в направлении 2 (вдоль оси x) от силы  $X_2 = 1$  (единичное перемещение);  $\Delta_{2P}$  – перемещение вдоль оси x, вызванное силой P.

Вообще, это уравнение показывает, что в направлении x перемещение точки A остается равным нулю.

Определяем  $\delta_{22}$  и  $\Delta_{2P}$  по правилу Верещагина

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_x} \left[ \frac{1}{2} b^2 \cdot \frac{2}{3} b \right] = \frac{b^3}{3EJ_x},$$

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{EJ_x} \left[ \frac{1}{2} b^2 a \cdot (-1) \right] = -\frac{b^2 a}{2EJ_x},$$

таким образом,

$$\frac{b^3}{3EJ_x} X_2 - \frac{b^2 a}{2EJ_x} = 0,$$

отсюда:

$$X_2 = \frac{3a}{2b}.$$

Определяем  $\delta_{22}$  и  $\Delta_{2P}$  по правилу Верещагина

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_x} \left[ \frac{1}{2} b^2 \cdot \frac{2}{3} b \right] = \frac{b^3}{3EJ_x}, \quad \Delta_{2P} = \frac{1}{EJ_x} \left[ \frac{1}{2} b^2 a \cdot (-1) \right] = -\frac{b^2 a}{2EJ_x},$$

таким образом,

$$\frac{b^3}{3EJ_x} X_2 - \frac{b^2 a}{2EJ_x} = 0,$$

отсюда:

$$X_2 = \frac{3a}{2b}.$$

При  $P=1$  реакция опоры в точке  $A$ ,  $X_2 = \frac{3a}{2b}$

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ_x} dx = \frac{1}{EJ_x} \left[ \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{2}{3} a + \frac{1}{2} a \cdot \frac{2}{3} b \cdot \frac{2}{3} a + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{3} b \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{2} a \right] = \frac{a^2(4a+3b)}{12EJ_x}.$$

Т.о., частота собственных колебаний массы  $m$ :  $p = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{12EJ_x}{ma^2(4a+3b)}}$ .

**Ответ:**

дифференциальное уравнения малых колебаний системы:  $\ddot{y} + p^2 y = 0$ ;

частота собственных колебаний системы:  $p = \sqrt{\frac{12EJ_x}{ma^2(4a+3b)}}$ .

**Задача 4.2.3.** Для системы (Рис. 4.2.3) с постоянной изгибной жесткостью  $EJ_x$ , используя метод сил, составить дифференциальные уравнения малых колебаний и определить частоту собственных колебаний. Стержень считать невесомым, а массу точечной.

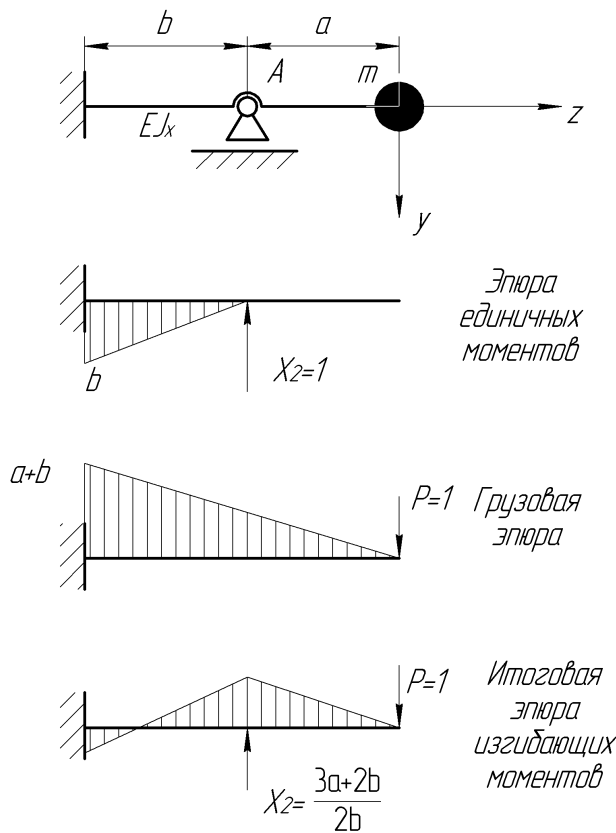


Рис. 4.2.3

Дифференциальное уравнение свободных колебаний  $y + p^2 y = 0$ ,  $p = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}$ .

Прежде, чем определить коэффициент влияния  $\delta_{11}$ , найдем реакцию в точке A при  $P=1$ , для чего воспользуемся методом сил:  $\delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0$ .

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_x} \left[ \frac{1}{2} b^2 \cdot \frac{2}{3} b \right] = \frac{b^3}{3EJ_x},$$

$$\Delta_{2P} = -\frac{1}{EJ_x} \left[ \frac{1}{2} b^2 \cdot \frac{(a + 2/3)b}{a + b} (a + b) \right] = -\frac{b^2(3a + 2b)}{6EJ_x}$$

Т.о.,  $\frac{b^3}{3EJ_x} X_2 - \frac{b^2(3a + 2b)}{6EJ_x} = 0$ .

Решив уравнение относительно  $X_2$ , получим  $X_2 = \frac{3a + 2b}{2b}$ .

Теперь, зная  $X_2$ , определим  $\delta_{11}$ :

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ_x} dx = \frac{1}{EJ_x} \left[ \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{2}{3} a + \frac{1}{2} a \cdot \frac{2}{3} b \cdot \frac{2}{3} a + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{3} b \cdot \frac{2}{3} a \right] = \frac{a^2(4a + 3b)}{12EJ_x}.$$

Частота собственных колебаний:

$$p = \sqrt{\frac{12EJ_x}{ma^2(4a + 3b)}}.$$

**Ответ:**

дифференциальное уравнения малых колебаний системы:  $y + p^2 y = 0$ ;

частота собственных колебаний системы:  $p = \sqrt{\frac{12EJ_x}{ma^2(4a + 3b)}}.$

**Задача 4.2.4.** Для системы (рис. 4.2.4) с постоянной изгибной жесткостью  $EJ_x$ , используя метод сил, составить дифференциальное уравнения малых колебаний и определить частоту собственных колебаний. Стержень считать невесомым, а массу точечной.

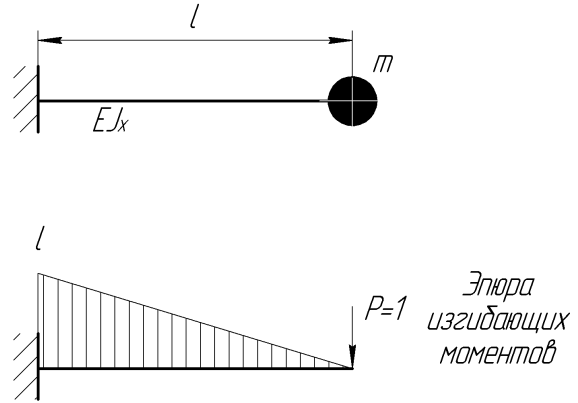


Рис. 4.2.4

Дифференциальное уравнение малых свободных колебаний и выражение для частоты собственных колебаний груза:

$$y + p^2 y = 0 \text{ и } p = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} \text{ соответственно.}$$

По правилу Верещагина определяем коэффициент влияния

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} \left[ \frac{1}{3} l^3 \right] = \frac{l^3}{3EJ_x}$$

Частота собственных колебаний:

$$p = \sqrt{\frac{3EJ_x}{ml^3}}.$$

**Ответ:**

дифференциальное уравнения малых колебаний системы:  $y + p^2 y = 0$  ;

частота собственных колебаний системы:  $p = \sqrt{\frac{3EJ_x}{ml^3}}.$

**Задача 4.2.5.** Для системы (рис. 4.2.5) с постоянной изгибной жесткостью  $EJ_x$ , используя метод сил, составить дифференциальное уравнения малых колебаний и определить частоту собственных колебаний. Стержень считать невесомым, а массу точечной.

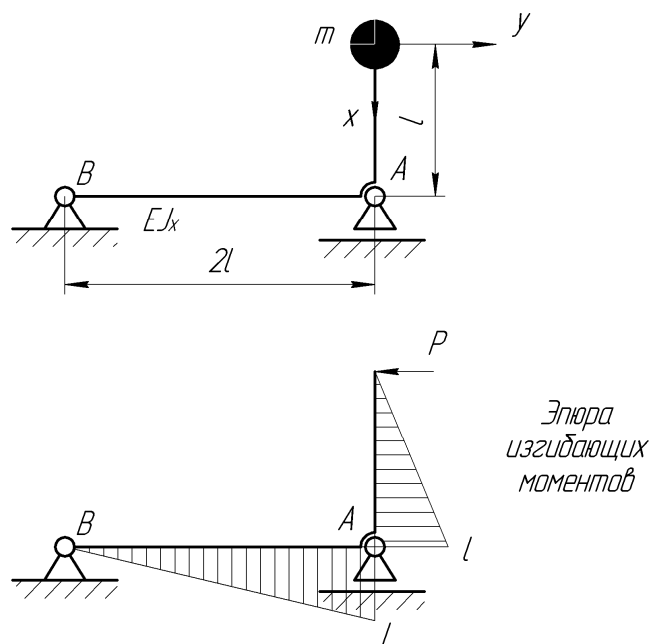


Рис. 4.2.5

Дифференциальное уравнение малых свободных колебаний и собственная частота системы:  $y + p^2 y = 0$ ,  $p = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}$ .

Коэффициент влияния (единичное перемещение):

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ_x} dx = \frac{1}{EJ_x} \left[ \frac{1}{3} l^3 + \frac{1}{2} l \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} l \right] = \frac{l^3}{EJ_x}$$

Т.о., частота собственных колебаний массы  $m$ :

$$p = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{EJ_x}{ml^3}}$$

**Ответ:**

дифференциальное уравнения малых колебаний системы:  $y + p^2 y = 0$ ;

частота собственных колебаний системы:  $p = \sqrt{\frac{EJ_x}{ml^3}}$ .

**Задача 4.2.6.** Для системы (рис. 4.2.6) с постоянной изгибной жесткостью  $EJ_x$ , используя метод сил, составить дифференциальное уравнения малых колебаний и определить частоту собственных колебаний. Стержень считать невесомым, а массу точечной.

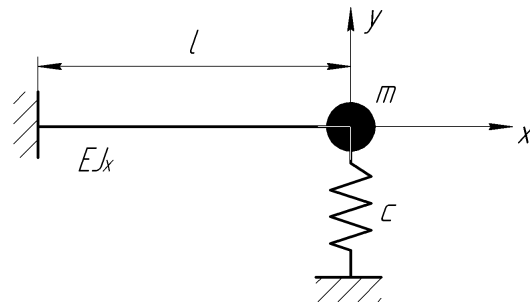


Рис. 4.2.6

Эта МС сводится к эквивалентной системе с двумя параллельными пружинами (рис. 1б), которая, в свою очередь, сводится к системе с одной пружиной (рис. 1а), коэффициент жесткости которой  $c_{\text{э}} = c + c_B$ , где  $c_B$  - коэффициент жесткости балки (величина, обратная коэффициенту влияния).

$$c_B = \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{3EJ_x}{l^3}$$

Обобщенный коэффициент жесткости:

$$c_{\text{э}} = c + \frac{3EJ_x}{l^3} = \frac{3EJ_x + cl^3}{l^3}$$

Дифференциальное уравнение малых свободных колебаний  $y + p^2 y = 0$ ,

где  $p = \sqrt{\frac{c_{\text{э}}}{m}}$ ,

Т.о., частота собственных колебаний груза массой  $m$ :

$$p = \sqrt{\frac{3EJ_x + cl^3}{ml^3}}$$

**Ответ:**

дифференциальное уравнения малых колебаний системы:  $y + p^2 y = 0$ ;

частота собственных колебаний системы:  $p = \sqrt{\frac{3EJ_x + cl^3}{ml^3}}$ .

**Задача 4.2.7.** Для системы, изображенной на рис. 4.2.7, составить уравнение малых свободных колебаний маховика, имеющего момент инерции  $J$  и определить частоту собственных колебаний.

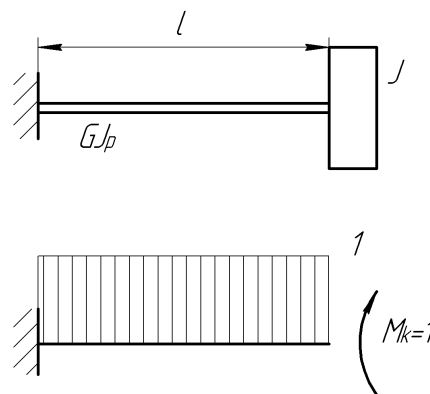


Рис. 4.2.7

Запишем выражение для угла поворота  $\phi$  маховика, пользуясь коэффициентом влияния:  $\phi = -\delta_{11} \cdot J\ddot{\phi}$  или  $\ddot{\phi} + p\phi = 0$ , где  $p = \sqrt{\frac{1}{J\delta_{11}}}$  – частота собственных крутильных колебаний маховика. Коэффициент влияния (угол поворота, вызванный крутящим моментом  $M_k = 1$ ) определим по формуле Мора:

$$\delta_{11} = \int \frac{\overline{M}_k \overline{M}_k}{GJ_p} dx = \frac{1}{GJ_p} [1 \cdot l \cdot 1] = \frac{l}{GJ_p}$$

Т.о., частота собственных колебаний маховика:  $p = \sqrt{\frac{1}{J\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{GJ_p}{J \cdot l}}$ .

**Ответ:**

дифференциальное уравнения малых колебаний системы:  $\ddot{\phi} + p\phi = 0$ ;

частота собственных колебаний системы:  $p = \sqrt{\frac{GJ_p}{J \cdot l}}$ .

**Задача 4.2.8.** Для системы, изображенной на рис. 4.2.8, составить уравнение малых свободных колебаний маховика, имеющего момент инерции  $J$  и определить частоту собственных колебаний.

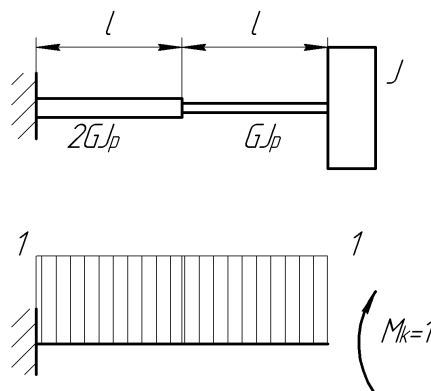


Рис. 4.2.8

Дифференциальное уравнение свободных крутильных колебаний и выражение для частоты собственных колебаний:  $\ddot{\phi} + p\phi = 0$ ,  $p = \sqrt{\frac{1}{J\delta_{11}}}$ .

Коэффициент влияния:  $\delta_{11} = \frac{1}{GJ_p}l + \frac{l}{2GJ_p} = \frac{3l}{2GJ_p}$ .

Т.о., частота собственных колебаний:  $p = \sqrt{\frac{1}{J\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{2GJ_p}{3J \cdot l}}$

**Ответ:**

дифференциальное уравнения малых колебаний системы:  $\ddot{\phi} + p\phi = 0$ ;

частота собственных колебаний системы:  $p = \sqrt{\frac{2GJ_p}{3J \cdot l}}$ .

**Задача 4.2.9.** Для системы, изображенной на рис. 4.2.9, составить уравнение малых свободных колебаний маховика, имеющего момент инерции  $J$  и определить частоту собственных колебаний.

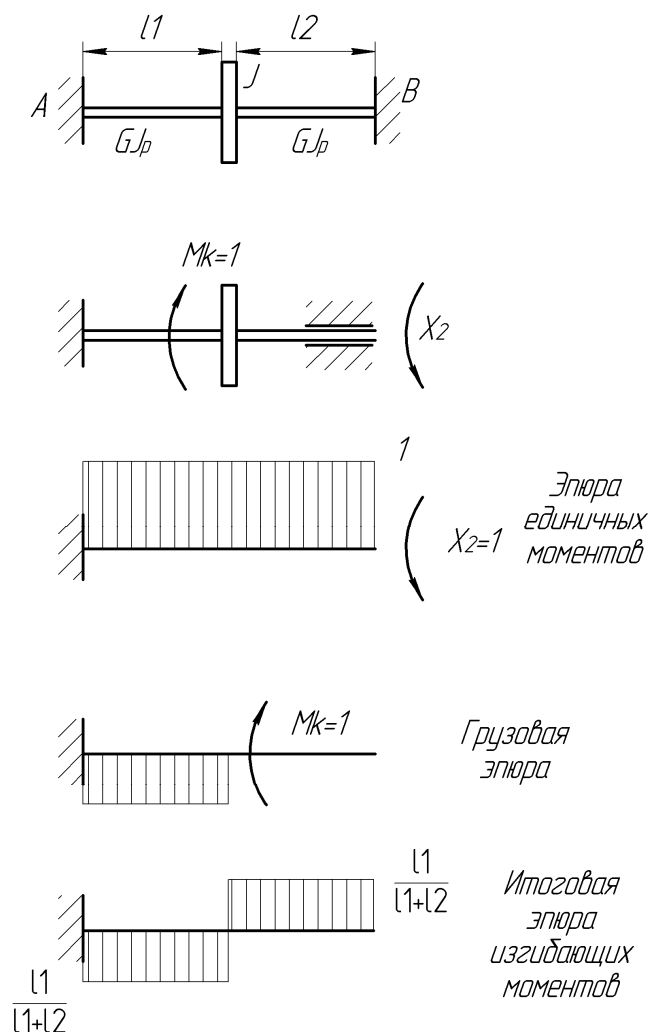


Рис. 4.2.9

Дифференциальное уравнение свободных крутильных колебаний,  $\ddot{\phi} + p\phi = 0$ , где  $p = \sqrt{\frac{1}{J\delta_{11}}}$ .

Данная МС является статически неопределимой. Момент в заделке определяется методом сил, для чего переходим к системе, показанной на рис. 4.2.9.

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2Mk} = 0.$$

Имеем:  $\delta_{22} = \frac{l_1 + l_2}{GJ_p}$ ,  $\Delta_{2Mk} = -\frac{l}{GJ_p}$ ,

Отсюда:  $\frac{l_1 + l_2}{GJ_p}X_2 - \frac{l}{GJ_p} = 0$ ,

$$X_2 = \frac{l_1}{l_1 + l_2}.$$

Коэффициент влияния:

$$\delta_{11} = \frac{1}{GJ_p} \left[ \frac{(l_1)^2}{(l_1 + l_2)^2} + \frac{(l_1)^2}{(l_1 + l_2)^2} l_1 \right] = \frac{l_1 l_2}{GJ_p (l_1 + l_2)}$$

Т.о., частота собственных колебаний:  $p = \sqrt{\frac{1}{J\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{GJ_p (l_1 + l_2)}{J \cdot l_1 l_2}}$ .

**Ответ:**

дифференциальное уравнения малых колебаний системы:  $\ddot{\phi} + p\phi = 0$ ;

частота собственных колебаний системы:  $p = \sqrt{\frac{GJ_p (l_1 + l_2)}{J \cdot l_1 l_2}}$ .

## Приложение

### Потенциальная энергия

Потенциальная энергия  $V$  системы материальных точек, движущейся в потенциальном силовом поле, определяется по формуле:

$$V = \int_{(MM_0)} \delta A ,$$

где  $\delta A$  - элементарная работа сил, действующих на точки системы;  $M_0$  – начальное, а  $M$  – конечное положение системы (в пространстве конфигураций).

В поле сил тяжести

$$V = P \cdot h, \quad (5.1)$$

где  $P = \sum P_k$  - общий вес системы;

$h = Z_c - Z_c^o$  разность уровней конечного и начального положений центра масс.

Потенциальная энергия растянутой пружины

$$V = c \frac{(\Delta l)^2}{2}, \quad (5.2)$$

где  $c$  - коэффициент жесткости;

$\Delta l$  - удлинение пружины.

Потенциальная энергия закрученной спиральной пружины

$$V = c^* \frac{(\Delta \Theta)^2}{2},$$

где  $c^*$  - коэффициент жесткости при кручении;

$\Delta \Theta$  - угловое приращение в результате деформации.

### Кинетическая энергия

Кинетическая энергия твердого тела

а) при поступательном движении

$$T = \frac{mV_c^2}{2}, \quad (5.3)$$

где  $m$  - масса тела;

$V_c$  – скорость центра масс;

б) при вращении около неподвижной оси

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2}, \quad (5.4)$$

где  $J_z$  – момент инерции тела относительно оси  $O_z$ ;

$\omega$  – угловая скорость тела.

в) при плоском движении относительно плоскости  $\Pi_0$

$$T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}, \quad (5.5)$$

где  $m$  - масса тела;

$V_c$  - скорость его центра масс;



$J_c$  - момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс и перпендикулярной к плоскости  $\Pi_0$ .

### Моменты инерции тел

**Таблица.** Моменты инерции однородных тел простейшей формы относительно некоторых осей

Тело	Положение оси $a$	Момент инерции $J_a$
Полый тонкостенный цилиндр (кольцо) радиуса $R$ и массы $m$	Ось цилиндра	$mR^2$
Сплошной цилиндр (диск) радиуса $R$ и массы $m$	Ось цилиндра	$\frac{1}{2}mR^2$
Шар радиуса $R$ и массы $m$	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{3}mR^2$
Тонкостенная сфера радиуса $R$ и массы $m$	Ось проходит через центр сферы	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длины $l$ и массы $m$	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}mL^2$
Прямой тонкий стержень длины $l$ и массы $m$	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}mL^2$

## Литература

1. Айзенберг Т.В., Воронков И.М., Осецкий В.М., Руководство к решению задач по теоретической механике. М.: Высшая школа, 1965.
2. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С., Теоретическая механика в примерах и задачах. ч.3, М.: Физматгиз, 1973.
3. Бутенин Н.В., Мерц Я.Л., Лункин Д.Р. Курс теоретической механики: Учебник. В 2-х томах. Т. II.: Динамика. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 544 с.
4. Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л., Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1974.
5. Кирсанов М.Н. Решебник. Теоретическая механика / Под ред. А.И. Кириллова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 384 с.
6. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики, ч.2, М.: ГИТТЛ, 1954.
7. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Государственная редакция физико-математической литературы. 1961 – 824 с..
8. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике., М.: Физматгиз , 1972.
9. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов. – 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа., 1986. – 416 с., ил.
10. Феодосьев В.И. Десять лекций по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1969.
11. Халфман Р.Л. Динамика. М.: Наука, 1972.
12. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971.
13. Яблонский А.А. Курс теоретической механики, ч.2 М.: Высшая школа, 1974.
14. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. М.: Высшая школа , 1961.

## Содержание

Введение .....	3
Список сокращений и обозначений .....	4
Глава 1. Основные определения аналитической механики. Решение частных задач .....	5
Глава 2. Определение параметров движения МС методом УЛ-2 .....	15
Глава 3. Определение собственных частот колебаний МС методом УЛ-2.....	22
Глава 4. Применение метода УЛ-2 при решении задач с распределенными параметрами .....	31
§1. Метод дискретизации .....	31
§2. Метод сил.....	39
Приложение .....	47
Список литературы .....	49



В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

---

## КАФЕДРА МЕХАТРОНИКИ

*Кафедра мехатроники – одна из старейших кафедр вуза, её история начинается с 30-х годов XX в. Изначально кафедра базировалась на механической направленности, но, следуя современным тенденциям развития науки и техники, с 1991г. расширила свою предметную область, лицензив специальность «Мехатроника».*

Прогнозируется, что в XXI в. именно мехатронные технологии, наряду с информационными и биотехнологиями, окажут революционное влияние на жизнь человека и общества в целом. Эта новая научная сфера быстро расширяется, охватывая разные отрасли промышленности и образование.

В современном понимании мехатроника – синергетическое объединение узлов точной механики с электронными, электротехническими и компьютерными компонентами, обеспечивающими проектирование и производство качественно новых модулей, систем, машин и систем с интеллектуальным управлением их функциональными движениями.

Суть синергетического подхода к созданию мехатронных изделий заключается в глубокой взаимопроникающей интеграции компонентов различной физической природы, начиная со стадии концептуального проектирования и заканчивая производством и эксплуатацией. При этом функциональная нагрузка переносится от механических компонентов к интеллектуальным (электронным, компьютерным и информационным), которые легко перепрограммируются под новую задачу и являются относительно дешёвыми.

Принципиальная задача мехатроники состоит не только в согласовании взаимодействия частей, которое зачастую при отдельном проектировании просто невозможно, но и в обязательном учёте меняющихся свойств объекта энергосилового воздействия и внешней среды, а также характеристик отдельных составляющих.

Кафедра мехатроники лицензировала специальность «Мехатроника» первой в России.

Область научной деятельности кафедры сосредоточена на проблемах механики, в частности, точностных и трибологических исследованиях, вопросах управления и технологий микроэлектромеханических систем, а также на оптимизации проектирования, технической диагностике и техническом зрении.

На базе кафедры регулярно проводятся конференции, семинары и олимпиады с участием не только преподавателей, но и студентов, аспирантов и представителей промышленности:

- всероссийская студенческая олимпиада по прикладной механике с международным участием;

- сессия международной научной школы «Фундаментальные и прикладные проблемы надежности и диагностики машин и механизмов», проводимая совместно с институтом проблем машиноведения РАН;

- сессия научной школы «Задачи механики и проблемы точности в приборостроении», проводимая в рамках межвузовской конференции молодых учёных;

- сессия подсекции «Прецизионные устройства мехатроники», проводимая в рамках научно-методической конференции университета;

- научная школа «Задачи механики и проблемы точности в приборостроении».

Студенты и аспиранты кафедры активно участвуют в научной работе по различным направлениям: разработка сверхчувствительных микроэлектромеханических систем, техническое зрение, моделирование динамики уха, оперативная оценка качества систем, чувствительные элементы современных приборов.

На базе кафедры создан современный компьютерный класс, использующий последние разработки в области программного и аппаратного обеспечения. Кафедра заключила ряд лицензионных соглашений с ведущими отечественными и зарубежными разработчиками программного обеспечения (Kompas, SolidWorks, PRO-Engineer, AutoCad) на использование их в учебном процессе.

Кафедра осуществляет тесное научное сотрудничество с такими вузами, как технический университет Ильменау, Германия; Таллиннский технический университет, Эстония; Исследовательский центр механизмов, США, г. Иллинойс, Институт Проблем Машиноведения РАН, Россия, инженерно-аграрная академия г. Быдгощь, Польша, Институт механики металлополимерных систем НАН, Беларусь, и другие.

Ведется научно-техническое сотрудничество с ОАО «ЛОМО», ЗАО «Завод прецизионных станков», ЗАО «Завод Измерон», ООО «Росспецприбор» (НПК «Оазис»), ЗАО «Скала», ЗАО «Подъемно-транспортного оборудования» и др.

Координаты для связи:

E-mail: [mechatronic@mail.ifmo.ru](mailto:mechatronic@mail.ifmo.ru)

Web-сайт: <http://mt.ifmo.ru/>

Виктор Михайлович Мусалимов  
Павел Анатольевич Сергушин

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА  
Уравнения Лагранжа второго рода. Свободные колебания  
Учебное пособие

В авторской редакции

Компьютерная верстка

Зав. редакционно-издательским отделом СПбГУ ИТМО

Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99

Подписано к печати 27.12.07

Отпечатано на ризографе. Тираж 100 экз. Заказ №1123

П.А. Сергушина

Н.Ф. Гусарова