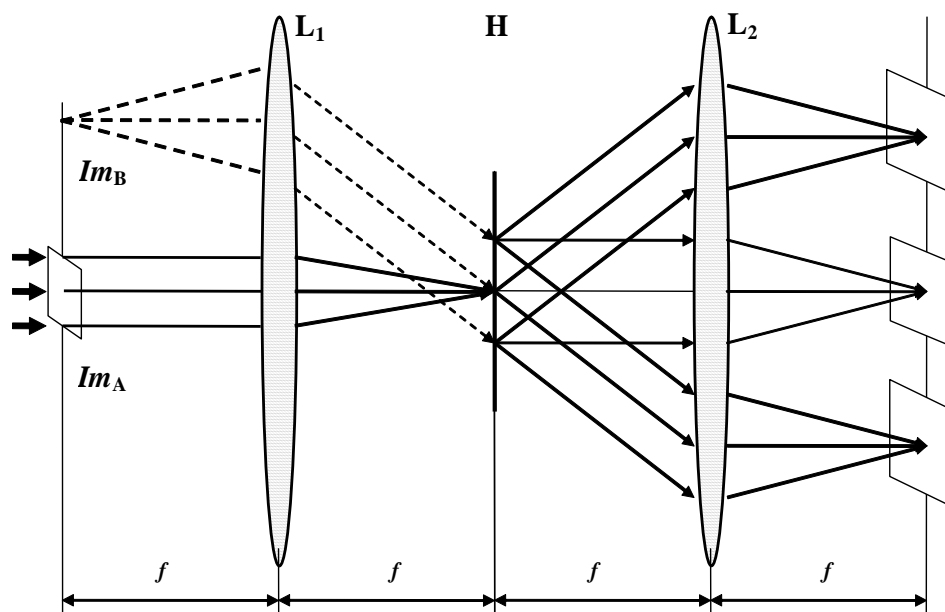


А.В. Павлов

КВАНТОВЫЕ И ОПТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ И ВЫЧИСЛЕНИЙ

Т.1. Основы оптических информационных технологий, использующих преобразование Фурье и метод голографии



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.В. Павлов

**Квантовые и оптические методы обработки
информации и вычислений**

Том 1

**Основы оптических информационных технологий, использующих
преобразование Фурье и метод голографии**

Учебное пособие

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 12.04.03 Фотоника и оптоинформатика
в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных
образовательных программ высшего образования магистратуры

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

Санкт-Петербург

2021

А.В. Павлов, Квантовые и оптические методы обработки информации и вычислений. Т.1. Основы оптических информационных технологий, использующих преобразование Фурье и метод голографии. – СПб: Университет ИТМО, 2021. – 90 с.

Рецензент: Стариков Р.С., д.ф-м.н., профессор Отделения лазерных и плазменных технологий, зав. Лаборатории фотоники и оптической обработки информации Национального исследовательского ядерного университета МИФИ.

В пособии представлены методические материалы по курсу «Методы обработки информации в фотонике». Кратко изложены базовые сведения из области Фурье-оптики, голографии Фурье, вейвлет-анализа и методах обработки информации, основанных на использовании преобразования Фурье, корреляционных методах, включая Ghost Imaging, и техники голографии, в том числе, с использованием хаоса в детерминированных системах.

Для магистров, обучающихся по направлению подготовки 12.04.03 «Фотоника и оптоинформатика» по образовательной программе: «Квантовые коммуникации и фемтотехнологии».



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2021

©Павлов А.В., 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

Т.1. Основы оптических информационных технологий, использующих преобразование Фурье и метод голографии

	Стр.
Список обозначений и сокращений	4
Введение.	5
1. Тема 1. Преобразование Фурье в оптике и его применение в оптической обработке информации.	
1.1.1. Базовые математические операции и их реализация оптическими методами	8
1.1.2. Преобразование Фурье	9
1.1.3. Примеры преобразования Фурье	10
1.1.4. Физический смысл преобразования, реализуемого тонкой положительной линзой	12
1.1.5. Свойства преобразования Фурье	13
1.2. Интегральные операции, реализуемые посредством преобразования Фурье	14
1.2.3. Свойства операций свертки и корреляции	16
1.3. Уравнение $4f$-схемы голографии Фурье	18
1.4. Голографическая ассоциативная память	21
1.5. «Квантово-подобное» описание голографической ассоциативной памяти	23
2. Тема 2. Погрешности оптической реализации преобразования Фурье.	25
3. Тема 3. Преобразования, реализуемые в оптике на основе преобразования Фурье	42
3.1. Дифференцирование функций	42
3.2. Оператор Лапласа	44
3.3. Интегрирование функций	44
3.4. Вычисление моментов	44
3.5. Преобразование Френеля	45
3.6. Преобразование Меллина	45
3.7. Преобразование Радона	46
3.8. Вычитание изображений	47
4. Тема 4. Отношение сигнал/помеха при корреляционном сравнении изображений	50
5. Тема 5. Основы вейвлет-анализа	68
6. Тема 6. Корреляционный метод передачи изображений: Ghost Imaging или «фантомное изображение»	84

Список обозначений и сокращений

АКФ	Авто-корреляционная функция
ВКФ	Взаимно-корреляционная функция
ГМ АКФ	Глобальный максимум авто-корреляционной функции
ГРС	Голографическая регистрирующая среда
ККФ	Кросс-корреляционная функция
BD	Bucket detector
IS	Imaging sensor
RM	Rotating mirror
j	Мнимая единица
F	Символ преобразования Фурье, фурье-образ (спектр) функции
\mathcal{H}	Гильбертово пространство
\mathcal{F}, \mathcal{T}	Подпространства, хранящие образы F и T
k	Волновое число
λ	Длина волны
τ	Пропускание
ζ, η	Координаты в частотной плоскости
ν_x, ν_y	Пространственные частоты
ω_x, ω_y	Круговые пространственные частоты
*	Символ операции свертки
\otimes	Символ операции корреляции

Введение

В настоящее время актуальна задача разработки и реализации моделей и методов обработки информации, относящихся к категории вычислительно затратных. В этой связи практический интерес представляют методы и технологии, свободные от проблемы комбинаторного взрыва. В первую очередь это методы, основанные на физических явлениях и механизмах, характеризующихся естественным параллелизмом представления и преобразования (обработки) информации. К их числу относятся, среди прочих, оптические и квантовые методы.

В рамках нашего курса они объединены в силу ряда глубоких аналогий на уровне фундаментальных физических явлений и/или математических моделей. Детально мы рассмотрим их в ходе изучения курса, сейчас же кратко упомянем лишь основные. Для оптики характерны:

1. естественный параллелизм представления и обработки информации, работа не с единственным значением, элементом, частицей, а с ансамблем;
2. аналитическое описание преобразований (эволюции состояния системы) операторами типа свертки и их реализация «в железе»;
3. внутренняя коррелированность как важнейший атрибут информации, отличающий её от дельта-коррелированного шума.

В таблице ниже дан ряд аналогий на уровне математического описания между классической голографией Фурье и квантовой механикой [1–3].

Голография Фурье	Квантовая механика
Поле в плоскости P_2 (Интеграл суперпозиции) $E_2(\xi, \eta, z) =$ $= \frac{-j}{\lambda} \iint E_1(x, y) \frac{\exp jkr}{r} \cos \theta dx dy$	Волновая функция – состояние квантовой системы [2, 3] $\Psi(\vec{r}_2, t_2 = t_1 + \delta t) = \iint G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \Psi(\vec{r}_1, t_1) d\vec{r}_1$
Мультиплексная голограмма Фурье $H_{AB} = \sum_{i=1}^N F^*(A_i(x, y)) F(B_i(x, y))$	Функция Грина – квантовая память $G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{i=1}^N \Psi_i^*(\vec{r}_1) \Psi_i(\vec{r}_2)$
Отклик голограммы Фурье $Out_H = F \{ F(A'(x, y)) H_{AB} \} =$ $= A'(x, y) \otimes A_1(x, y) * B_1(x, y) +$ $\dots + A'(x, y) \otimes A_i(x, y) * B_i(x, y)$	Воспоминание в квантовой памяти $\Psi(\vec{r}_2, t_2) = \int \Psi'(\vec{r}_1, t_1) G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) d\vec{r}_1 =$ $\int \Psi'(\vec{r}_1, t_1) \left[\sum_{i=1}^N \Psi_i^*(\vec{r}_1) \Psi_i(\vec{r}_2) \right] d\vec{r}_1 =$ $= \left[\int \Psi'(\vec{r}_1, t_1) \Psi_1^*(\vec{r}_1) d\vec{r}_1 \right] * \Psi_1(\vec{r}_2) +$ $\dots + \left[\int \Psi'(\vec{r}_1, t_1) \Psi_N^*(\vec{r}_1) d\vec{r}_1 \right] * \Psi_N(\vec{r}_2)$

Здесь важно подчеркнуть, что голография – единственная на сегодня сугубо физическая, т.е. свободная от аналитических или численных этапов, технология регистрации и восстановления комплексных волновых полей. Как следствие, голография позволяет регистрировать и восстанавливать сами амплитуды (комплекснозначимые), а не интенсивности (мощности). Квантовые вычисления также предполагают работу не с интенсивностями, а с комплекснозначимыми амплитудами волновых функций.

В практическом плане эти аналогии определяют возможность создания оптических (голографических) симуляторов квантовых вычислений – устройств, использующих явления и механизмы классической физики для реализации моделей, изначально разработанных в физике квантовой – например, квантовой логики, квантовой вероятности. Важное достоинство таких симуляторов – отсутствие ряда технических проблем, связанных с реализацией квантовых вычислителей, например, необходимости изоляции от внешней среды для решения проблемы декогеренции. Плата за это – ограниченность круга решаемых задач, т.е. симуляторы относятся к категории не универсальных, а специализированных процессоров.

Необходимо также отметить, что квантовая механика может работать как с одиночным квантовым объектом, так и с ансамблем, а классическая голография работает именно с ансамблем дифракционно-ограниченных точечных источников, составляющих поле (изображение, образ), которым представляется текущее состояние системы. Квантовую голографию, основанную на явлении интерференции одиночного фотона [4, 5], оставим за рамками курса.

Следует различать также квантовую коррелированность и когерентность в оптике, а также внутреннюю коррелированность как атрибут информации, отличающий её от белого (серого) шума.

В квантовой механике объекты описываются линейными операторами в гильбертовом пространстве, обобщающим евклидово пространство на бесконечномерный случай. Это формализм может быть применен и к описанию голографической схемы – поля, как обрабатываемые, так и записанные на голограмме, описываются вектором, на который действует оператор системы, но размерность пространства будет конечной, определяемой числом элементов разрешения поля (голографической системы) и количеством наложенных голограмм.

Для голографической ассоциативной памяти собственные функции её оператора – эталонные образы, записанные на голограмме. Собственные значения оператора голографической ассоциативной памяти определяются дифракционными эффективностями наложенных голограмм. При этом собственные функции голографической ассоциативной памяти свойством ортогональности, характерным для собственных функций операторов квантовых систем, в общем случае не обладают. Если свойство ортогональности важно в модели, то оно должно быть обеспечено

специальными методами ортогонализации записываемых изображений, например, кодированием ортогональными фазовыми масками [6].

С учетом этих аналогий наш курс по преимуществу сфокусирован на моделях и методах, ориентированных на решение тех задач, в которых именно параллелизм и внутренняя коррелированность обрабатываемых массивов информации или данных суть важны. Методы и технологии реализации классического фон-Неймановского компьютера мы оставим за рамками курса. Также за рамками курса останутся те вопросы квантовых вычислений, которые детально изучаются в других курсах.

Литература к Введению

1. *M.Peruš* Neural Networks as a basis for quantum associative networks // Neural network world, 2000. V.10. pp. 1001-1013.
2. *Feinman R.* The theory of positrons // Physical Rev. 1949, v.76, p. 749.
3. *Р.Фейнман, А.Хиббс* Интегралы по траекториям // М., Мир.: 1968. 382с.
4. *О.Н. Крохин* Интерференция одиночных фотонов // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2014, №4. С. 44-45.
5. *А.В. Белинский, В.Б. Лапшин* Особенности интерференции фотонов и других квантовых частиц // Вестник МГУ. Сер.3. Физика. Астрономия. 2016, №3. С. 39-47.
6. *Денисюк Ю.Н., Давыдова И.Н.* // Оптика и спектроскопия. 1986, т.60, №2. С.365-371.

Тема 1. Преобразование Фурье в оптике и его применение в оптической обработке информации

1.1. Базовые математические операции и их реализация оптическими методами [1-4]

1.1.1. Комплексное представление гармонического сигнала

Известно, что гармонический сигнал может быть представлен в комплексной форме, что удобно для формального описания. Это представление базируется на следующих соотношениях (формула Эйлера):

$$\begin{cases} \cos \varphi = 0.5(\exp j\varphi + \exp -j\varphi) \\ j \sin \varphi = 0.5(\exp j\varphi - \exp -j\varphi) \end{cases} .$$

Отсюда несложно получить представление гармонической функции, например, функции \cos как действительной части экспоненты:

$$\exp j\varphi = \cos \varphi + j \sin \varphi \Rightarrow A \cos \varphi = A \operatorname{Re}(\exp j\varphi) .$$

Поскольку с экспонентой математически работать удобнее, чем с тригонометрическими функциями, то используется экспоненциальная форма представления гармонической функции $A \cos \varphi = A \operatorname{Re}(\exp j\varphi)$, при этом символ действительной части Re в нотациях опускается. Напомним в этой связи, что *комплексная форма записи волновых полей физического смысла не имеет!* Это просто удобный формальный прием. [1]

Плоская монохроматическая волна в точке (x, y, z) в момент времени t может быть представлена в виде произведения двух функций

$$s(x, y, z, t) = v(x, y, z)u(t) ,$$

где

$$v(x, y, z) = E \exp(j\mathbf{k}\mathbf{r}) \exp(-j\varphi) = E \exp\left[j(k_x x + k_y y + k_z z)\right] \exp(-j\varphi);$$

$$u(t) = \exp(-j\omega t) .$$

Здесь E – амплитуда колебаний электрического поля; \mathbf{k} – волновой вектор, его модуль (волновое число) $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega n}{c}$; λ – длина волны; $\omega = 2\pi\nu$ – круговая частота; ν – частота; n – показатель преломления среды; φ – начальная фаза волны, т.е. в момент времени $t=0$. При описании взаимодействия (интерференции) когерентных волн зависимость от времени не важна, поскольку соотношение их параметров стабильно во времени – они изменяются синхронно, и для описания поля достаточно члена, зависящего только от пространственных координат:

$$E \exp\left[j(k_x x + k_y y + k_z z)\right] .$$

1.1.2. Преобразование Фурье, которое мы будем обозначать символом F , функции $f(x)$, удовлетворяющей следующим условиям:

1. функция $f(x)$ абсолютно интегрируема;
 2. функция $f(x)$ непрерывна или имеет конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов в любых конечных пределах;
 3. функция $f(x)$ не имеет разрывов второго рода;
- определяется посредством следующего преобразования:

$$F(f(x)) = F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j2\pi vx) dx . \quad (1.1)$$

Результат преобразования (1.1) называется фурье-образом или спектром функции $f(x)$, его мы будем обозначать $F(v)$, где v – частота, т.е. координата в пространстве Фурье – частотном пространстве. В общем случае фурье-образ – функция комплексная. [1]

Обратное преобразование Фурье связывает фурье-образ $F(v)$ с его прообразом (самой функцией, функцией-оригиналом):

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(v) \exp(j2\pi vx) dv . \quad (1.2)$$

В силу гипотезы сохранения $F(v)dv = F(\omega)d\omega$, поэтому

$$F(v) = F(\omega) \frac{d\omega}{dv} = F(\omega) \frac{2\pi dv}{dv} = 2\pi F(\omega),$$

откуда получим выражение фурье-образа как функции круговой частоты:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j\omega x) dx . \quad (1.3)$$

Обратим внимание, что формально прямое преобразование Фурье отличается от обратного только знаком под экспонентой. Выбор этого знака в математике не принципиален и является предметом договоренности. Мы выбрали для прямого преобразования Фурье знак « \leftarrow ».

В оптике преобразование Фурье реализуется тонкой положительной линзой – при помещении в ее переднюю фокальную плоскость транспаранта с изображением, освещаемого плоским волновым фронтом, в задней фокальной плоскости формируется фурье-образ (пространственно-частотный спектр) этого изображения, которое физически есть и математически описывается как поле комплексных амплитуд сразу за транспарантом. [1]

Прежде чем перейти к обсуждению физического смысла и погрешностей преобразования Фурье, выполняемого линзой, рассмотрим ряд примеров.

Фурье-преобразование функции двух независимых переменных

Выше мы определили Фурье-преобразование для одномерной функции, в то время как в оптике волновые поля (поля комплексных амплитуд), описываются функциями двух пространственных переменных. Фурье-

образ функции двух независимых переменных, удовлетворяющей вышеприведенным условиям, определяется аналогично (1.1), т.е. как функция двух независимых переменных v_x и v_y – пространственных частот:

$$F(v_x, v_y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-j2\pi(v_x x + v_y y)) dx dy . \quad (1.4)$$

Обратное преобразование определяется образом, аналогичным (1.2).

Нетрудно видеть, что свойства фурье-преобразования, определенные для функции одной переменной, справедливы и для функции двух (и более) переменных. Но важно то, что в общем случае функция $F(v_x, v_y)$ не сводима к ее сечениям по отдельным координатам, т.е. замена исследования функции двух переменных отдельным исследованием двух функций, каждая из которых – функция одной переменной, неправомерна. Однако существуют частные случаи, когда упрощение аналитических выражений возможно – это функции с разделяющимися переменными.

Функцией с разделяющимися переменными (в определенной системе координат) называется такая функция двух (или более) независимых переменных, которая может быть представлена в виде произведения двух (или более) функций, каждая из которых зависит только от одной независимой переменной. Например, в декартовой системе координат для функции с разделяющимися переменными $f(x, y) = f(x)f(y)$ её фурье-образ также есть функция с разделяющимися переменными $F(v_x, v_y) = F(v_x)F(v_y)$.

Функцией с осевой симметрией в цилиндрической системе координат называется такая функция с разделяющимися переменными $f(\rho, \varphi) = f(\rho)f(\varphi)$, значения которой определяются только радиус-вектором ρ .

1.1.3. Примеры фурье-преобразований в предположении, что переменные в функции разделяются. [1]

Прямоугольный импульс – здесь следует рассмотреть два случая:

А. Применительно к оптике прямоугольная функция от двух координат описывает прямоугольную апертуру. Таким образом, в данном случае преобразование Фурье описывает дифракцию Фраунгофера на прямоугольной апертуре. Прямоугольная апертура есть функция с разделяющимися в декартовых координатах переменными:

$$A(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq L_x, |y| \leq L_y \\ 0 & \text{при } |x| > L_x, |y| > L_y \end{cases} = A(x) \cdot A(y).$$

Её фурье-образ:

$$F(A(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x) \exp(-j\omega_x x) dx = \int_{-L}^L A(x) \exp(-j\omega_x x) dx = \frac{1}{-j\omega_x} \exp(-j\omega_x x) \Big|_{-L}^{L} = \frac{\exp(j\omega_x L) - \exp(-j\omega_x L)}{j\omega_x} = \frac{2 \sin(\omega_x L)}{\omega_x} = 2L_x \text{Sinc}(\omega_x L_x)$$

Аналогично получается и фурье-образ $F(A(y))$, т.е. картина дифракции Фраунгофера на прямоугольной апертуре описывается выражением

$$F(A(x, y)) = 2L_x \text{Sinc}(\omega_x L_x) 2L_y \text{Sinc}(\omega_y L_y) . \quad (1.5)$$

Б. Дифракция Фраунгофера на круглой апертуре. Круглая апертура – это функция, обладающей осевой симметрией. Т.е. в цилиндрической системе координат можно представить круглую апертуру так: $A(\rho, \varphi) = A(\rho)$. Тогда:

$$\begin{aligned} F(A(\rho, \varphi)) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} A(\rho, \varphi) \exp(-j2\pi k \rho \cos(\varphi - \theta)) \rho d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} A(\rho) \rho d\rho \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-j2\pi k \rho \cos(\varphi - \theta)) d\varphi. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл в полученном выражении есть функция Бесселя нулевого порядка

$$J_0(2\pi k \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-j2\pi k \rho \cos(\varphi - \theta)) d\varphi,$$

следовательно, искомый фурье-образ не зависит от фазового угла θ , но лишь от пространственной частоты k , т.е.

$$F(k) = 2\pi \int_0^{\infty} A(\rho) J_0(2\pi k \rho) \rho d\rho . \quad (1.6)$$

Этот вид двумерного преобразования Фурье для осесимметричных функций известен также как преобразование Фурье-Бесселя или преобразование Ганкеля нулевого порядка. Если

$$A(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{if } \rho \leq \rho_0 \\ 0 & \text{if } \rho > \rho_0 \end{cases},$$

то

$$F(k) = 2\pi \int_0^{\rho_0} J_0(2\pi k \rho) \rho d\rho = \pi \rho_0^2 \frac{2J_1(2\pi k \rho_0)}{2\pi k \rho_0}.$$

Функция Бесселя, деленная на свой аргумент $\frac{J_1(2\pi k \rho_0)}{2\pi k \rho_0}$, иногда на научном жаргоне по аналогии с функцией Sinc называется «бесинк». Необходимо отметить, что, несмотря на внешнюю схожесть функций (1.5) и (2.6), замена одной функции другой, что, к сожалению, иногда встречается, ведет к существенным ошибкам в результатах, так как радиус первого нуля в картине дифракции Фраунгофера на прямоугольной апертуре $r_0 = \lambda f / D$, а на круглой – $r_0 = 1.22 \lambda f / D$.

Гармоническое колебание, промодулированное прямоугольным импульсом – дифракционная решетка с синусоидальным профилем штриха в прямоугольной апертуре. Здесь мы воспользуемся свойством

разделимости переменных и для упрощения выкладок рассмотрим одномерный случай:

$$\cos(\omega_0 x) = \frac{1}{2}(\exp j\omega_0 x + \exp -j\omega_0 x)$$

$$F(A(x)\cos(\omega_0 x)) = \frac{1}{2}F(A(x)\exp j\omega_0 x) + \frac{1}{2}F(A(x)\exp -j\omega_0 x) = . \quad (1.7)$$

$$= LSinc(L(\omega + \omega_0)) + LSinc(L(\omega - \omega_0))$$

Выражение (1.7) полезно с точки зрения перехода к следующему этапу.

1.1.4. Физический смысл преобразования Фурье, осуществляемого тонкой положительной линзой (Рис.1.1). Напомним, что изначально сам Фурье рассматривал предложенный им метод как сугубо абстрактный аппарат, не имеющий никакого физического смысла. Однако преобразование Фурье в оптике имеет очень простой и наглядный физический смысл.

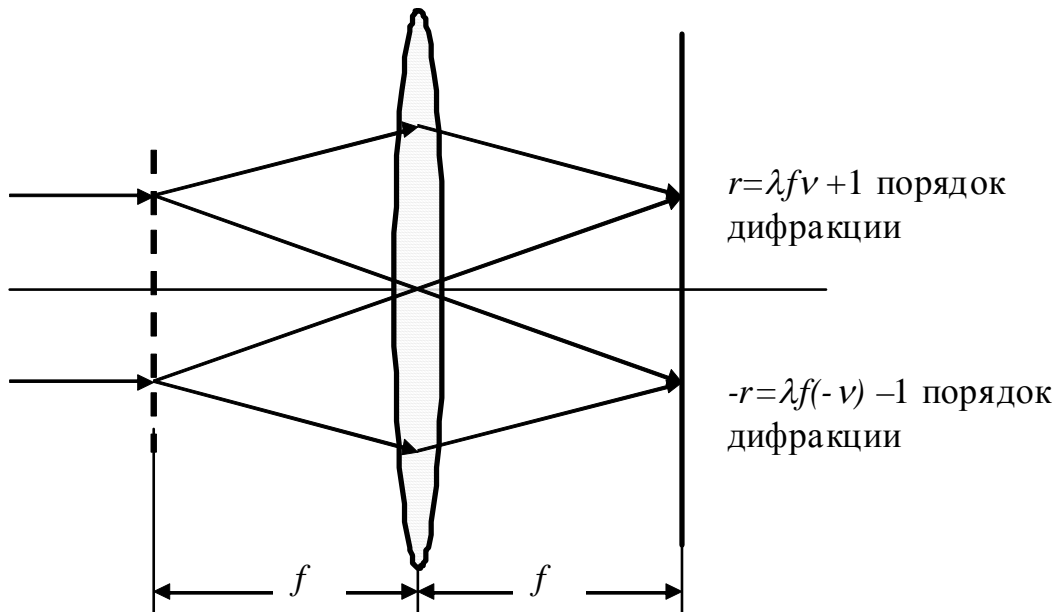


Рис.1.1. Дифракция света на одной решетке – механизм, лежащий в основе формирования Фурье-спектра изображения как суммы решеток

Смысл разложения по Фурье (или гармонического анализа, разложения по гармоникам) заключается в представлении любой непрерывной на заданном интервале функции, удовлетворяющей условиям Дирихле, в виде суммы гармонических колебаний различных частот. Применительно к оптической обработке информации это означает, что любое изображение, которое может быть аналитически представлено в виде функции пропускания (для транспаранта) или яркости (для объекта) от пространственных координат, может быть представлено в виде суммы дифракционных решеток с синусоидальным профилем штриха различных периодов и дифракционной эффективности. Поскольку угол дифракции на решетке зависит от ее периода (частоты решетки), то волна,

дифрагировавшая на каждой такой решетке, в соответствии с (1.7) фокусируется в задней фокальной плоскости линзы в точках, отстоящих от главной оптической оси линзы на расстояние $r = \lambda f v$, где f – фокусное расстояние линзы, v – пространственная частота решетки, измеряемая, как правило, в обратных линейных единицах, например, обратных миллиметрах (мм^{-1}) или линиях (штрихах) на миллиметр. Сумма этих дифракционных максимумов, образованных дифрагировавшими на каждой элементарной решетке плоскими волнами и описываемых (1.7), и образует спектр или фурье-образ изображения.

1.1.5. Свойства преобразования Фурье

А. Свойство симметрии фурье-образа:

$$F(f^*(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \exp(-j\omega x) dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j(-\omega)) x dx \right)^* = F^*(-v).$$

Б. Изменение масштаба аргумента функции (Рис.1.2.):

$$F(f(ax)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) \exp(-j\omega x) dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp(-j \frac{\xi \omega}{a}) d\xi = \frac{1}{a} F\left(\frac{v}{a}\right). \quad (1.8)$$

Этот случай может быть проиллюстрирован дифракцией плоского волнового фронта на решетках с разными пространственными частотами – чем выше частота решетки, тем больше угол дифракции и, соответственно, тем дальше от оптической оси расположен соответствующий спектральный максимум.

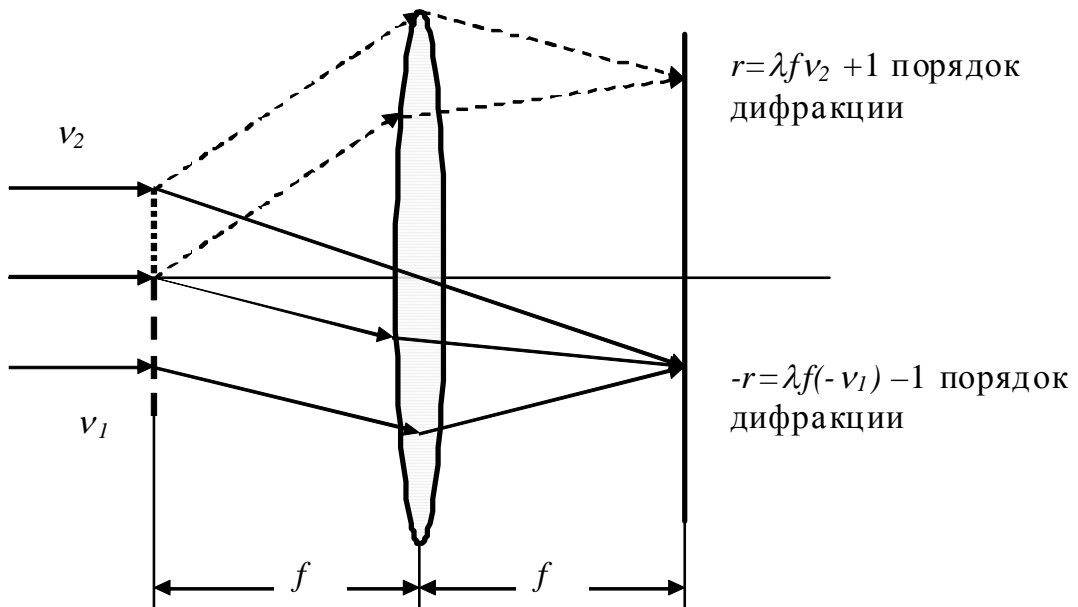


Рис.1.2. Изменение масштаба аргумента функции

В. Сдвиг аргумента функции (Рис.1.3.)

$$\begin{aligned}
 F(f(x-x_0)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0) \exp(-j\omega x) dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) \exp(-j\omega(x_1+x_0)) dx_1 = (f(x_1)) \exp(-j\omega x_0) = F(v) \exp(-j\omega x_0)
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

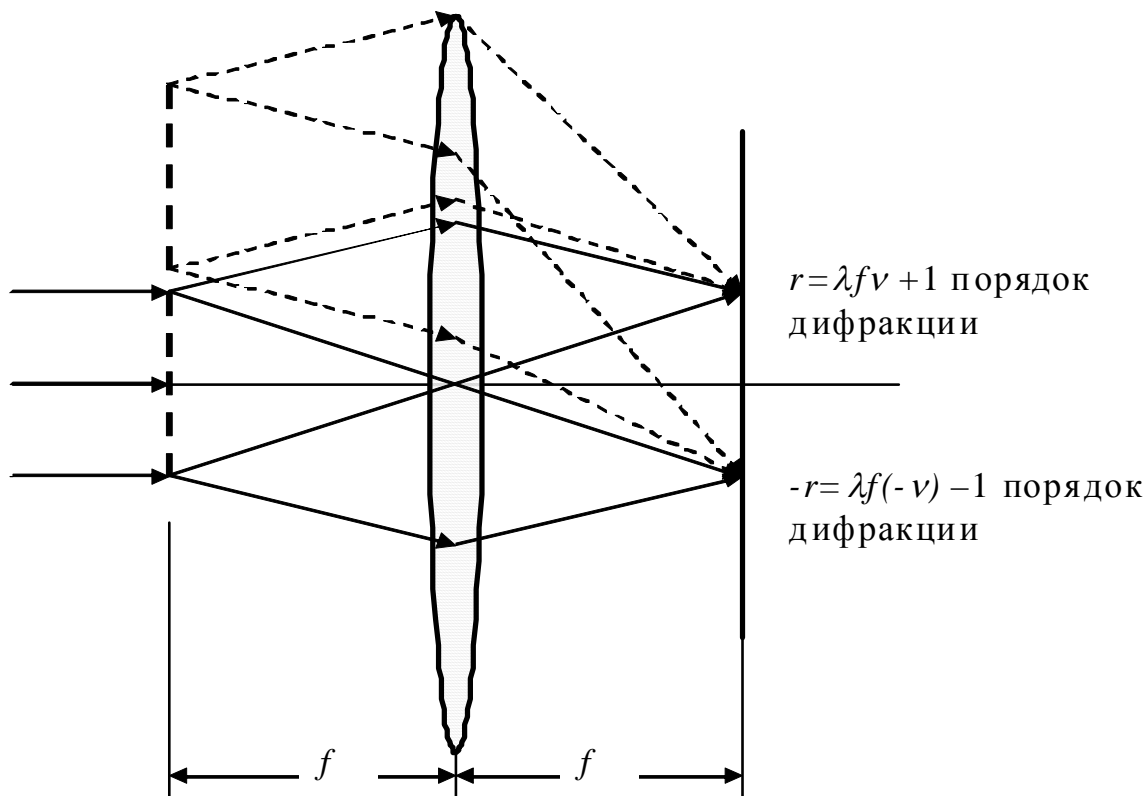


Рис.1.3. Сдвиг аргумента функции

Смещение фурье-образа по шкале частот:

$$\begin{aligned}
 F^{-1}(F(v+v_0)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(v+v_0) \exp(j(\omega)x) d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(v_1) \exp(j(\omega_1 - \omega_0)x) d\omega_1 = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(v_1) \exp(j\omega_1 x) \exp(-j\omega_0 x) d\omega_1 = f(x) \exp(-j\omega_0 x)
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

1.2. Интегральные операции, реализуемые через преобразование Фурье

1.2.1. Операция свертки определяется следующим образом:

$$S(\Delta) = f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(\Delta - x) dx .
 \tag{1.11}$$

1.2.2. Операция корреляции изначально получила развитие в теории случайных процессов. Ковариация двух случайных процессов (или

случайных функций) $X(t)$ и $Y(t)$ – это второй центральный момент, определяемый для комплексных функций следующим образом [5]:

$$R_{XY}(t + \Delta, t) = \left\langle \left(X(t + \Delta) - \langle X \rangle \right) \left(Y(t) - \langle Y \rangle \right)^* \right\rangle,$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю (набору реализаций). Термин "центральный" означает нормировку на первый момент – математическое ожидание процесса. Из этого определения видно, что ковариация – функция от сдвига Δ $X(t)$ относительно $Y(t)$.

Корреляция определяется как второй начальный момент

$$K_{XY}(t + \Delta, t) = \left\langle \left(X(t + \Delta) \right) \left(Y(t) \right)^* \right\rangle.$$

Для центрированных процессов, т.е. процессов с нулевым математическим ожиданием, ковариация и корреляция совпадают. Если процессы не центрированы, то имеем связь

$$R(t + \Delta, t) = K(t + \Delta, t) - \langle X \rangle \langle Y \rangle.$$

Если случайные процессы стационарны в широком смысле, т.е. в смысле независимости двух первых моментов от начала отсчета, то ковариационная и корреляционная функции реализаций этих процессов зависят только от сдвига одной реализации относительно другой Δ .

Если $X(t) = Y(t)$, то имеем автоковариационную функцию процесса (АКФ). Тогда при $\Delta = 0$ для ковариации получаем дисперсию процесса

$$R_{XX}(t + \Delta, t) \Big|_{\Delta = 0} = \left\langle \left(X(t) - \langle X(t) \rangle \right) \left(X(t) - \langle X(t) \rangle \right) \right\rangle = \sigma_X^2,$$

а для корреляции – энергию реализации длиной L_x :

$$K(0) = \sigma^2 L_x.$$

Отметим, что в литературе встречаются и другие определения функции корреляции, когда сдвиг придается аргументу второго процесса, либо меняется его знак, либо комплексно сопряженным берется первый член. Эти варианты обусловлены теми или иными соображениями при выборе направления осей в пространствах функций и корреляций. Мы будем использовать приведенное выше определение, поскольку, как увидим ниже, оно адекватно той физической реальности, что является предметом нашего рассмотрения в этом курсе.

Коэффициент корреляции определяется как корреляционная функция, нормированная на максимальное значение, т.е. значение в точке $\Delta = 0$:

$$\rho(\Delta) = \frac{K(\Delta)}{K(0)}.$$

Корреляционная функция показывает статистическую связь значений процесса, отстоящих друг от друга на расстояние Δ . Вводится понятие радиуса (или длины) корреляции r_α , который определяется как значение Δ , на котором коэффициент корреляции убывает до заданного значения

$$r_\alpha : \rho(r_\alpha) = \alpha; \alpha \in [0, 1].$$

Понятие корреляции нашло применение и при обработке сигналов и изображений, являющихся детерминированными функциями. Строго говоря, применение аппарата корреляционного анализа к детерминированным функциям должно быть основано на трактовке детерминированных функций как реализаций стационарного случайного процесса в предположении выполнения условия эргодичности (идентичности усреднения по ансамблю усреднению по реализации). Для этого достаточно выполнения условия Слуцкого, которое правомочно при удовлетворении справедливого для реальных сигналов и полей условия

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} K(\Delta) = 0.$$

Отметим, что даже в случае детерминированных функций, которые не могут трактоваться как реализации случайных процессов, понятие корреляции правомочно и практически значимо в силу того, что:

- показывает внутреннюю связность их элементов (внутреннюю коррелированность функций), являющуюся атрибутом, отличающим информацию от дельта-коррелированного шума (для последнего $r_\alpha = 0; \alpha \in [0,1)$, т.е. даже ближайшие значения полностью независимы);

- служит мерой сходства функций, поскольку при $\Delta = 0$ корреляционная функция дает скалярное произведение $K_{XY}(0) = \langle (X(t))(Y^*(t)) \rangle$.

В рамках курса нас будет интересовать именно последний аспект. Мы будем использовать следующее определение функции взаимной корреляции двух функций:

$$K_{f_1 f_2}(\Delta) = f_1(x) \otimes f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x + \Delta) f_2^*(x) dx. \quad (1.12)$$

Обратим внимание, что поскольку операндами в (1.11) и (1.12), а также их результатом являются функции, то свертка и корреляция – операторы.

1.2.3. Свойства операций свертки и корреляции

А. Коммутативность свертки:

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(\Delta - x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\Delta - x) f_2(x) dx = f_2(x) * f_1(x).$$

Б. Некоммутативность корреляции:

$$K_{f_1 f_2}(\Delta) = f_1(x) \otimes f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x + \Delta) f_2^*(x) dx \Big|_{x + \Delta = z} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z) f_2^*(z - \Delta) dz = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(z - \Delta) f_1^*(z) dz \right)^* = K_{f_2 f_1}^*(-\Delta). \quad (1.13)$$

Если $f_1(x) = f_2(x)$, то для действительных функций функция автокорреляции (АКФ) обладает свойством четности $K_{f_1 f_1}(-\Delta) = K_{f_1 f_1}(\Delta)$.

Заметим, что если согласно (2.12) корреляция вычисляется перемножением значений функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ при сдвиге первой на величину Δ , то из (2.13) следует правомочность сдвига второй функции $f_1(x)$ относительно второй, но в противоположном направлении. Свойство некоммутативности корреляции понадобится нам в дальнейшем, при переходе к рассмотрению голографических методов вычисления корреляции – голографических корреляторов.

В. Прямая теорема свертки (теорема Бореля о свертке) – фурье-образ свертки двух функций равен произведению их фурье-образов:

$$\begin{aligned} F(f_1(x) * f_2(x)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(\Delta - x) dx \exp(-j\omega\Delta) d\Delta \Big|_{\Delta - x = z} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(z) dx \exp(-j\omega x) \exp(-j\omega z) dz = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \exp(-j\omega x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(z) \exp(-j\omega z) dz = F_1(v) F_2(v) \end{aligned}$$

Г. Прямая теорема корреляции – фурье-образ функции корреляции двух функций равен произведению фурье-образа одной функции на комплексно сопряженный фурье-образ другой функции:

$$\begin{aligned} F(f_1(x) \otimes f_2(x)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x + \Delta) f_2^*(x) dx \exp(-j\omega\Delta) d\Delta \Big|_{x + \Delta = z} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z) f_2^*(x) dx \exp(-j\omega(z - x)) dz = \quad . \quad (1.14) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z) \exp(-j\omega z) dz \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) \exp(-j\omega x) dx \right)^* = F_1(v) F_2^*(v) \end{aligned}$$

Заметим, что в литературе по голографии часто встречается другое определение операции корреляции, которое может быть приведено к (1.13) заменой переменной:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2^*(x - \Delta) dx \Big|_{z = x - \Delta} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z + \Delta) f_2^*(z) dz .$$

Именно прямые теоремы свертки и корреляции, представляющие собой с точки зрения логики частный случай закона де Моргана, лежат в основе реализации этих операций голографическими методами. Устройства, реализующие операцию корреляции, называются корреляторами, а реализующие операцию свертки – конволверами. Рассмотрим эти методы, начав с аналитического описания 4f-схемы фурье-голографии (Рис.1.4).

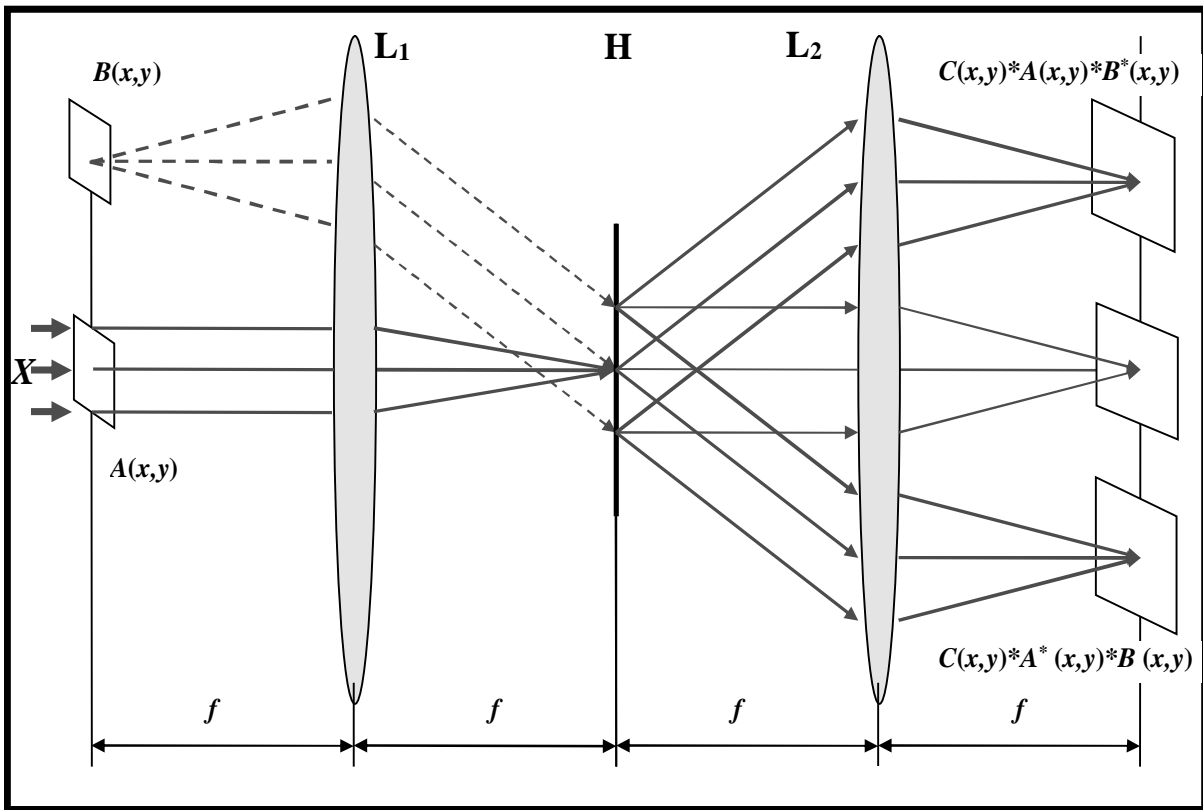


Рис.1.4. 4f-схема голографии Фурье

1.3. Уравнение 4f-схемы голографии Фурье

Пусть во входной плоскости **In** рассматриваемой схемы рис.1.4 помещены два транспаранта, функции амплитудного пропускания которых описываются посредством $A(x,y)$ и $B(x,y)$. Будем считать изображение $A(x,y)$ эталонным, а $B(x,y)$ – опорным. **Обратим внимание, что терминология отличается от принятой в других областях голографии.** В частности, то, что в других областях голографии называется объектным изображением, в корреляционной обработке принято называть эталонным, а объектным – изображение распознаваемое, т.е. то, которое предъясвляется голограмме. Плоскость **In** – передняя фокальная плоскость первой фурье-преобразующей линзы **L1**. Транспаранты освещаются плоским волновым фронтом X . Для простоты выражений примем, что амплитуда X равна 1. Тогда в задней фокальной плоскости линзы **L1** формируется поле

$$F(A(x,y)) + F(B(x,y)).$$

При помещении в эту плоскость регистрирующей среды **H** на ней, после экспозиции и соответствующей обработки (проявлении), будет записано распределение

$$\eta \left(\left(F(A(x,y)) + F(B(x,y)) \right) \left(F(A(x,y)) + F(B(x,y)) \right)^* \right),$$

где η – оператор регистрирующей среды, а астериск обозначает комплексное сопряжение. При помещении проявленной голограммы в положение, соответствующее положению среды при записи, и помещении

в плоскость **In** вместо изображения $A(x,y)$ (эталонного) изображения $C(x,y)$ (объектное изображение), за голограммой получим

$$F(C(x,y))\eta\left(\left(F(A(x,y))+F(B(x,y))\right)\left(F(A(x,y))+F^*(B(x,y))\right)\right)=$$

$$F(C(x,y))\eta\left(F(A(x,y))F^*(A(x,y))\right)+F(C(x,y))\eta\left(F(A(x,y))F^*(B(x,y))\right)+$$

$$+F(C(x,y))\eta\left(F(B(x,y))F^*(A(x,y))\right)+F(C(x,y))\eta\left(F(B(x,y))F^*(B(x,y))\right)$$

Входящие в это выражение слагаемые описывают компоненты дифрагировавшей на голограмме волны, распространяющиеся в разных направлениях, а именно: компоненты, описываемые членами

$$F(C(x,y))\eta\left(F(A(x,y))F(A(x,y))^*\right) \text{ и}$$

$$F(C(x,y))\eta\left(F(B(x,y))F(B(x,y))^*\right)$$

распространяются в направлении распространения $F(C(x,y))$ и формируют нулевой порядок дифракции; дифрагировавшая волна

$$F(C(x,y))\eta\left(F(A(x,y))^*F(B(x,y))\right)$$

распространяется в направлении $F(B(x,y))$ – это +1 порядок дифракции;

$$F(C(x,y))\eta\left(F(A(x,y))F(B(x,y))^*\right)$$

распространяется в направлении, зеркальном относительно главной оптической оси, направлению распространения при записи голограммы опорного пучка $F(B(x,y))$, и формирует –1 порядок дифракции.

Соответственно, в фокальной плоскости второй фурье-преобразующей линзы L_2 формируются три области – три порядка дифракции:

$$F\left(F(C(x,y))\eta\left(F(A(x,y))F(A(x,y))^*\right)\right) \text{ и}$$

$$F\left(F(C(x,y))\eta\left(F(B(x,y))F(B(x,y))^*\right)\right)$$

описывают поле в нулевом порядке дифракции, который в рамках нашего рассмотрения нас не интересует;

в +1 порядке дифракции формируется распределение амплитуд

$$F\left(F(C(x,y))\eta\left(F(A(x,y))^*F(B(x,y))\right)\right), \quad (1.15)$$

а в –1 порядке дифракции формируется распределение амплитуд

$$F\left(F(C(x,y))\eta\left(F(A(x,y))F(B(x,y))^*\right)\right). \quad (1.16)$$

Если оператор голографической регистрирующей среды η линеен, а $B(x,y)=\delta(x,y)$, т.е. точечный источник (напомним, что фурье-образ точечного источника – плоская волна), то к выражениям (1.15) и (1.16) можно применить теоремы корреляции и свертки, соответственно, что даст

$$F\left(F(C(x,y))\eta\left(F(A(x,y))^*F(\delta(x,y))\right)\right) = C(x,y) \otimes A(x,y), \quad (1.17)$$

$$F\left(F(C(x,y))\eta\left(F(A(x,y))F(\delta(x,y))^*\right)\right) = C(x,y) * A(x,y), \quad (1.18)$$

где символы \otimes и $*$ обозначают операции корреляции и свертки, соответственно. Такую схему фурье-голографии, в которой используется только +1 порядок дифракции, называют **коррелятором Ван дер Люгта**, а голограмму – голографическим согласованным фильтром, поскольку её передаточная характеристика согласована со спектром эталона $A(x,y)$.

Коррелятор совместного преобразования. Другой метод вычисления функции взаимной корреляции двух функций посредством $4f$ -схемы голографии Фурье может быть реализован, если в (1.15) и (1.16) принять за δ -функцию не опорное изображение $B(x,y)$, а объектное $C(x,y)$. Тогда:

$$F\left(F(\delta(x,y))\eta\left(F(A(x,y))^*F(B(x,y))\right)\right) = B(x,y) \otimes A(x,y), \quad (1.19)$$

$$F\left(F(\delta(x,y))\eta\left(F(A(x,y))F^*(B(x,y))\right)\right) = A(x,y) \otimes B(x,y), \quad (1.20)$$

т.е. и в +1, и в -1 порядках дифракции формируются функции взаимной корреляции изображений, использованных при записи голограммы. Понятия опорного и сигнального пучков в этом случае смысла не имеют. Поскольку на голограмме записывается картина интерференции спектров тех двух изображений, функция корреляции которых вычисляется, то такая схема, данная на рис.1.5, называется коррелятором совместного преобразования (Joint Transform Correlator – JTC).

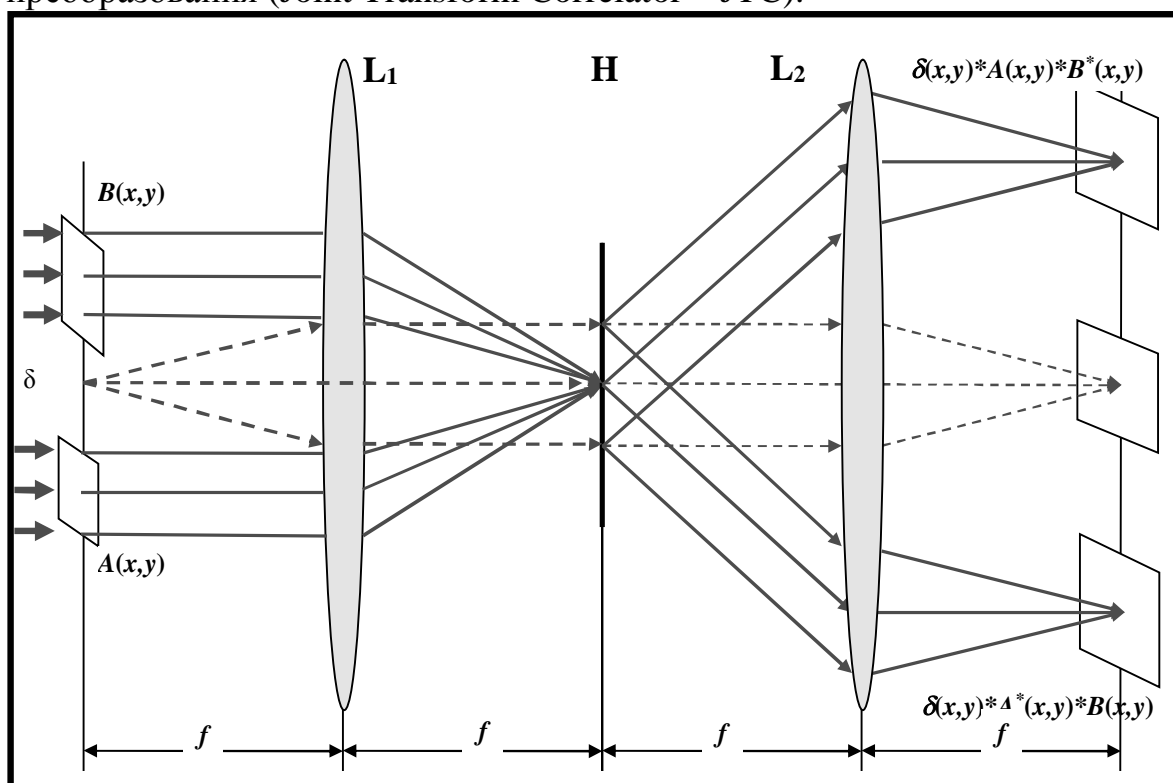


Рис.1.5. Схема голографического коррелятора совместного преобразования: освещающий голограмму пучок дан штрихами

1.4. Голографическая ассоциативная память

Рассмотрим реализацию авто-ассоциативной памяти $4f$ схемой голографии Фурье, приведенной на рис.1.6. Пусть в памяти хранятся два запомненных образа $A(x)$ и $B(x)$. Их может быть и больше, чтобы не загромождать выражения, мы ограничимся двумя.

Для хранения в голографической памяти нескольких независимых образов используется метод наложенных голограмм – независимо (последовательно) записанных на одном участке голографической регистрирующей среды (ГРС) голограмм; итоговая голограмма называется мультиплексной голограммой. На рис.1.6 дана схема с угловым мультиплицированием опорного пучка (пространственным разнесением точечных опорных источников) – каждая наложенная голограмма записывается со своим внеосевым точечным опорным источником δ_A и δ_B .

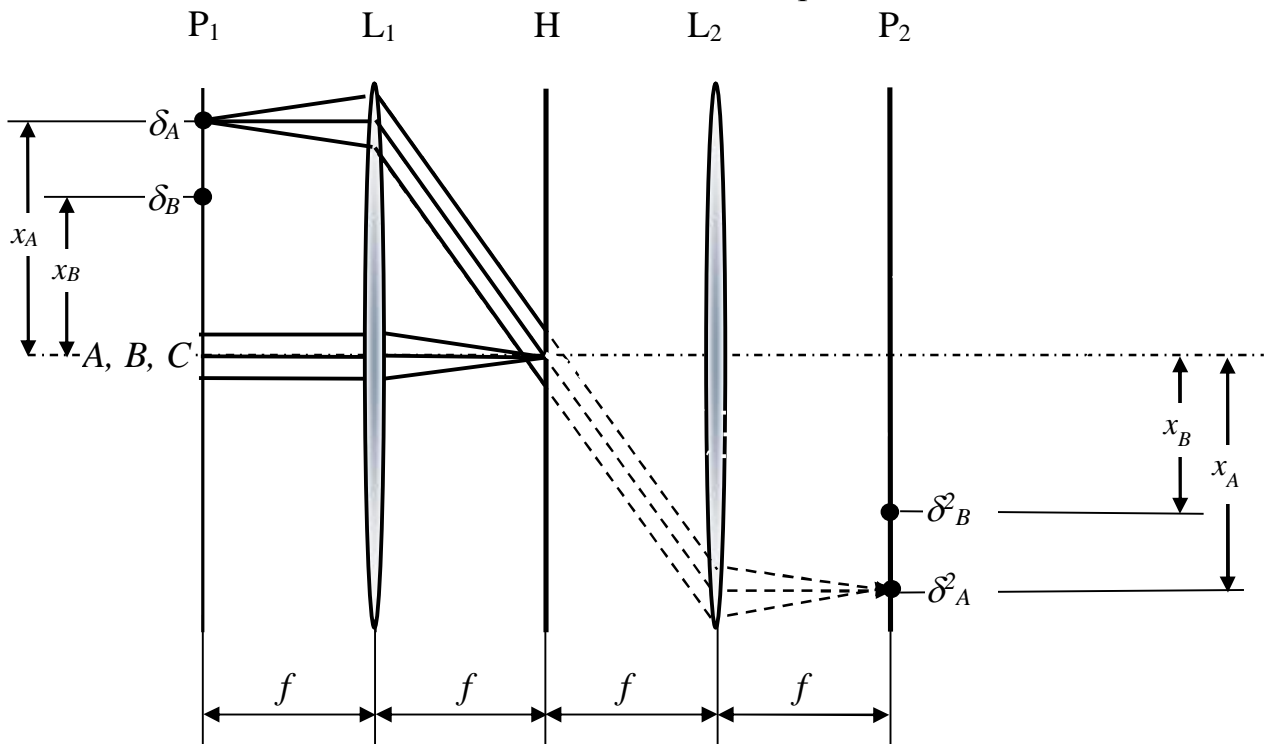


Рис.1.6. $4f$ схема голографии Фурье для двух наложенных голограмм: A, B – эталонные образы, C – образ, предъявляемый записанной мультиплексной голограмме, P_1 – плоскость образов, L_1, L_2 – первая и вторая фурье-преобразующие линзы с фокусными расстояниями f , H – плоскость голограммы, P_2 – задняя фокальная плоскость линзы L_2 – плоскость откликов голограммы. Штрихами линиями показан ход лучей, дифрагировавших на наложенной голограмме H_A и восстанавливающих в плоскости G_2 изображение точечного опорного источника δ_A^{R2}

При записи наложенных голограмм в фурье-плоскости H – задней фокальной плоскости первой фурье-преобразующей линзы L_1 формируются подлежащие записи на ГРС распределения интенсивностей:

$$I_A(v) \propto \left[R_A \cdot \exp(j\omega x_A) + F(A(x)) \right] \cdot \left[R_A \cdot \exp(j\omega x_A) + F(A(x)) \right]^*, \quad (1.21)$$

$$I_B(v) \propto \left[R_B \cdot \exp(j\omega x_B) + F(B(x)) \right] \cdot \left[R_B \cdot \exp(j\omega x_B) + F(B(x)) \right]^*, \quad (1.22)$$

где $v = \frac{\zeta}{\lambda f}$ – пространственная частота, ζ – пространственная координата в

Фурье-плоскости H , $\omega = 2\pi v$ – круговая пространственная частота, j – мнимая единица, R_A и R_B – амплитуды плоских волновых фронтов, пропорциональные амплитудам точечных опорных источников, описываемых дельта-функциями $\delta_A(x)$ и $\delta_B(x)$, x_A и x_B – их координаты, соответственно. Если голограммы записаны линейно, то голограммы в части, описывающей дифракцию в +1 порядок:

$$H_A^{+1}(v) = R_A F^*(A(x)) \cdot \exp(j\omega x_A), \quad (1.23)$$

$$H_B^{+1}(v) = R_B F^*(B(x)) \cdot \exp(j\omega x_B). \quad (1.24)$$

При предъявлении во входной плоскости P_1 объектного образа $C(x)$, отклики этих наложенных голограмм в +1 порядок дифракции:

$$Corr_{CA}(\Delta) = (C(x) \otimes A(x)), \quad (1.25)$$

$$Corr_{CB}(\Delta) = (C(x) \otimes B(x)), \quad (1.26)$$

где $Corr$ означает «корреляция», Δ – координата в корреляционной плоскости P_2 , \otimes – символ операции корреляции. Выражения (1.25) и (1.26) описывают восстановленное изображение точечных опорных источников с учетом дифракции на голограмме.

Здесь $4f$ схема голографии Фурье рис.1.6 работает как голографический коррелятор Ван дер Люгта, а максимальные значения функций взаимной корреляции (1.25) и (1.26) дают значения скалярного произведения как квадратичной меры сходства входного образа $C(x)$ с эталонами $A(x)$ и $B(x)$:

$$\delta_{CA} = \max [C(x) \otimes B(x)] = \langle C(x), B(x) \rangle, \quad (1.27)$$

$$\delta_{CB} = \max [C(x) \otimes B(x)] = \langle C(x), B(x) \rangle, \quad (1.28)$$

где $\langle \rangle$ – символ скалярного произведения. Введем коэффициент, описывающий отношение амплитуд ГМ АКФ (1.27) и (1.28):

$$k = \frac{\langle C(x), A(x) \rangle}{\langle C(x), B(x) \rangle}. \quad (1.29)$$

Для того, чтобы схема работала не как коррелятор, а как память, т.е. сформировала на выходе эталонное изображение, на которое наиболее похоже, «по её мнению», входное $C(x)$, в корреляционную плоскость P_2 помещается обращаемое волновой фронт зеркало – ОВФ или фазосопрягающее зеркало, английский термин – Phase Conjugate Mirror (PCM). Термин ОВФ акцентирует внимание на феномене, т.е. внешнем проявлении работы устройства, а термин «фаза-сопрягающее» – на математическом описании механизма его работы.

Очевидно, что для того, чтобы голограмма восстановила записанное на ней поле, её надо осветить пучком, идентичным использованному при записи опорному. Поскольку голограммы Фурье (1.23) и (1.24) записаны с опорными пучками с плоскими волновыми фронтами $R_A \cdot \exp(j\omega x_A)$ и $R_B \cdot \exp(j\omega x_B)$, то нужны освещающие пучки $\exp(-j\omega x_A)$ и $\exp(-j\omega x_B)$, соответственно. Для того, чтобы получить освещающие пучки с плоскими волновыми фронтами, из корреляционных полей (1.25) и (1.26) надо выделить только глобальные максимумы автокорреляционных функций (ГМ АКФ) (1.27) и (1.28) – дифракционно-ограниченные точечные источники $\delta_{CA} \delta_{CB}$. Для этого используется нелинейность либо самого ОВФ зеркала, либо дополнительного устройства, помещаемого в плоскость P_2 , пропускающая ГМ АКФ и режектирующая боковые максимумы КФ.

Тогда в обратном ходе лучей от плоскости P_2 к плоскости P_1 схема рис.2 восстановит в плоскости P_1 поле, описываемое распределением амплитуд

$$\begin{aligned} Out(x) &= Out_A(x) + Out_B(x) = \\ &= R_A \cdot A(x) \cdot \langle C(x), A(x) \rangle + R_B \cdot B(x) \cdot \langle C(x), B(x) \rangle \end{aligned} \quad (1.30)$$

Отношение интенсивностей эталонных образов $A(x)$ и $B(x)$ в восстановленном образе

$$V = \left(\frac{\langle C(x), A(x) \rangle}{\langle C(x), B(x) \rangle} \right)^2 = k^2, \quad (1.31)$$

Для того, чтобы в восстановленном поле (1.30) был только один эталонный образ – наиболее близкий к входному по корреляционной мере, нелинейность в плоскости P_2 должна подавлять не только боковые максимумы корреляционных функций, но и все ГМ АКФ, кроме максимального. Для этого используется сигмоидальная нелинейная функция и итерационный режим схождения к решению, реализуемый помещением ОВФ зеркала также и плоскость P_1 .

1.5. «Квантово-подобное» описание голографической памяти

Рассмотренная выше голографическая ассоциативная память (ГАП) формально может быть описана посредством операторов: согласно (1.30), оператор ГАП может быть представлен как сумма операторов наложенных голограмм, в нашем примере:

$$\hat{H} = \hat{A} + \hat{B}, \quad (1.32)$$

где собственные функции и собственные значения (собственные числа) λ операторов \hat{A} и \hat{B} – эталонные образы $A(x)$ и $B(x)$, и дифракционные эффективности $\lambda_A = \eta_A$ и $\lambda_B = \eta_B$ наложенных голограмм, соответственно. Каждый эталонный образ (наложенная голограмма) описан в соответствующем подпространстве \mathcal{A} и \mathcal{B} , их сумма формирует

пространство ГАП \mathcal{H}_{AB} принципиально конечной размерности со скалярным произведением как квадратичной мерой.

Отметим, что разложение как пространства ГАП \mathcal{H}_{AB} , так и подпространств \mathcal{A} и \mathcal{B} по базису, заданному пикселями соответствующих изображений, не отвечает в общем случае критерию ортогональности базиса, так как если эталонные образы $A(x)$ и $B(x)$ – не белый (серый) шум, а представляют информацию, то соседние пиксели в них коррелированы, зависимость коэффициента корреляции пикселей от расстояния между ними в среднем по изображению представлена его корреляционной функцией, в практических целях – глобальным максимумом автокорреляционной функции (ГМ АКФ). Поэтому ортогональный базис позволяет получить разложение не на пиксели, а на элементы разрешения, размер которых определяется радиусом корреляции описываемого изображения.

На практике радиус корреляции измеряется по некоторому уровню от максимального значения ГМ АКФ, всегда отличному от нуля, т.е. сохраняется некоторая остаточная неортогональность базиса разложения. Более того, для реальной информации характерен монотонный спад АКФ с достижением нуля на бесконечности (для теоретических АКФ – АКФ процессов и полей, имеющих бесконечные области определения), а на практике – на границе области определения изображения или сигнала [5].

Литература к теме 1

1. *А.В. Павлов* Методы обработки информации в фотонике. Т.1. Основы оптических информационных технологий, использующих преобразование Фурье и метод голографии Изд.3-е, дополненное. – СПб: Университет ИТМО, 2017. – 84 с.
2. *Кольер Р., Беркхарт Л., Лин Л.* Оптическая голография. – М.: Мир, 1973. – 686 с.
3. *Василенко Г.И., Цибулькин Л.М.* Голографические распознающие устройства. – М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.
4. *Мирошников М.М.* Теоретические основы оптико-электронных приборов. – Л.: Машиностроение, 1977. – 600 с.
5. *Яглом А.М.* Корреляционная теория стационарных случайных функций. – Л.: Гидрометеиздат, 1981. – 280 С.

Тема 2. Погрешности оптической реализации преобразования Фурье [1-6]

В первой лекции мы ознакомились с реализацией преобразования Фурье в оптике и узнали, что положительная линза в своей задней фокальной плоскости строит поле комплексных амплитуд, соответствующее Фурье-образу распределения амплитуд в передней фокальной плоскости линзы. Однако это утверждение нуждается в ряде уточнений, которым и посвящена данная лекция.

Рассмотрим оптическую систему, приведенную на рис.2.1. Имеется тонкая сферическая (положительная) линза L. Плоскости P_1 и P_2 расположены перед линзой и за ней на расстояниях d и f , соответственно, где f – фокусное расстояние линзы (т.е. P_2 – задняя фокальная плоскость линзы). Ось z совпадает с главной оптической осью линзы, в плоскости P_1 координаты x, y , в плоскости P_2 – v_x, v_y .

Пусть в плоскости P_1 находится транспарант, амплитудное пропускание которого $\tau(x, y)$ описывается выражением

$$\tau(x, y) = A(x, y) \exp j\varphi(x, y), \quad (2.1)$$

где j – мнимая единица.

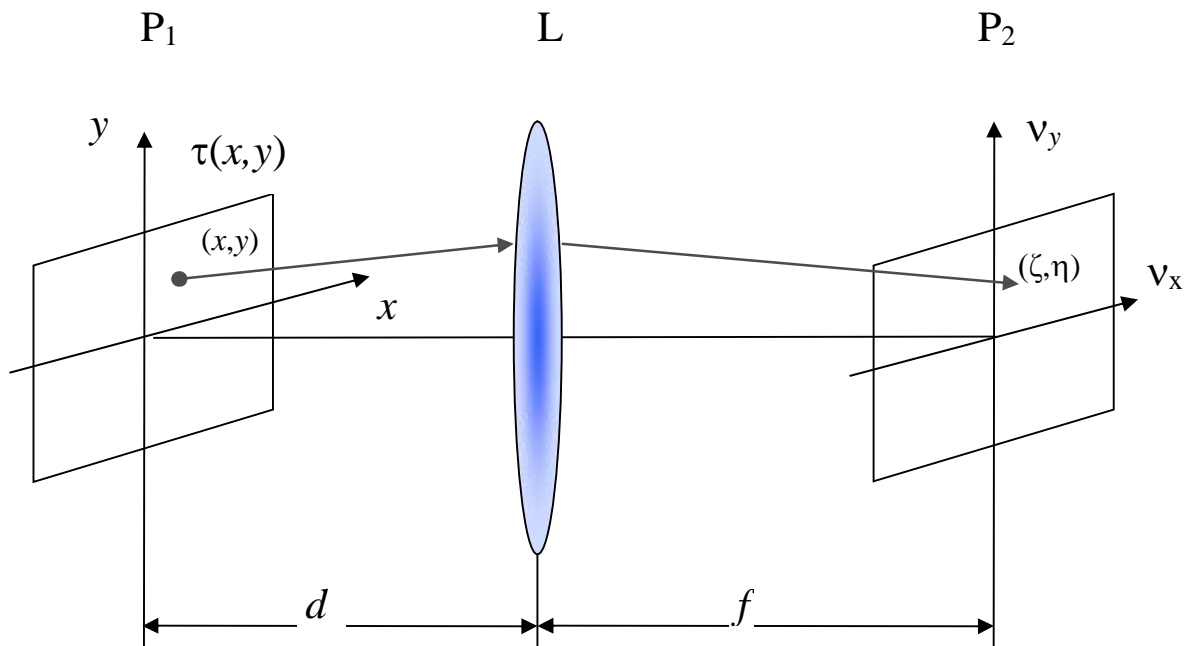


Рис.2.1. Схема, реализующая двумерное преобразование Фурье

Пусть $E(x, y)$ – распределение комплексных амплитуд света в плоскости P_1 , а $E(\zeta, \eta, z)$ – распределение амплитуд в плоскости P_2 , отстоящей от P_1 на расстояние z . Выражение для связи комплексной амплитуды в плоскости P_2 с амплитудой в плоскости P_1 дается хорошо известным из курса оптики [1] дифракционным интегралом Френеля-Кирхгофа

$$E(\zeta, \eta, z) = \frac{-j}{\lambda} \iint E(x, y) \frac{\exp jkr}{r} \cos \theta dx dy, \quad (2.2)$$

где выбор знака перед интегралом – предмет договоренности, j – мнимая единица, r – расстояние от точки ζ, η плоскости P_2 до точек плоскости P_1 , дающих свой вклад в амплитуду в этой точке, $k=2\pi/\lambda$ – волновое число, θ – угол между рассматриваемым лучом и нормалью к плоскости P_1 в точке x, y , $\cos \theta$ – коэффициент наклона, учитывающий различия в количестве света, излучаемого из плоскости P_1 в разных направлениях. Можно видеть, что если в схеме присутствует тонкая безабберационная положительная линза с бесконечной апертурой, как на рис.2.1, то этот коэффициент не зависит от координат x, y в плоскости P_1 и может быть представлен в виде

$$\cos \theta = \frac{f}{\sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}}. \quad (2.3)$$

Тогда, с учетом (2.3), выражение (2.2) можно переписать в виде

$$E(\zeta, \eta, z) = \frac{-jf}{\lambda \sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}} \iint E(x, y) \frac{\exp jkr}{r} dx dy. \quad (2.4)$$

Таким образом, для определения амплитуды в точке (ζ, η) необходимо найти выражение для длины оптического пути r к этой точке от всех точек x, y . Обычно при выводе выражения, показывающего, что положительная линза реализует двумерное преобразование Фурье, используется параксиальное приближение:

$$r = (f + d) - \frac{\zeta}{f} x - \frac{\eta}{f} y. \quad (2.5)$$

Подстановка (2.5) в (2.4) и дает выражение, соответствующее определению преобразования Фурье.

Однако точное выражение для r имеет следующий вид:

$$r = R(\zeta, \eta) - \alpha x - \beta y, \quad (2.6)$$

где R и коэффициенты α и β определяются следующим образом:

$$R(\zeta, \eta) = \frac{f^2 + \zeta^2 + \eta^2 + df}{\sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}}$$

$$\alpha = \frac{\zeta}{\sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}} \quad . \quad (2.7)$$

$$\beta = \frac{\eta}{\sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}}$$

Эти выражения легко получить самостоятельно, если рассмотреть схему обратного распространения излучения из точки (ζ, η) в точку (x, y) ,

приведенную на рис.2.2, и решить треугольники, образованные исходя из соображений равенства длин оптических путей.

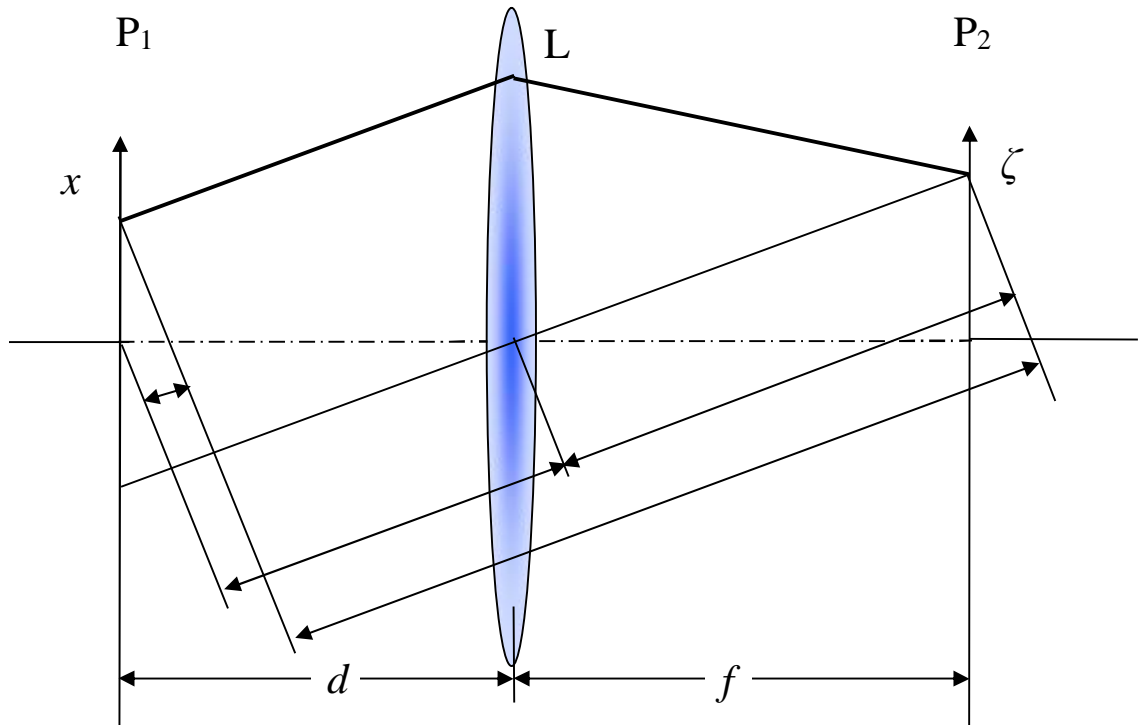


Рис.2.2. Схема для определения оптической длины пути между точками (x) и (ζ) для одномерного случая

Подстановка (2.6) и (2.7) в (2.4) дает:

$$E(\zeta, \eta, z) = \frac{-jf}{\lambda} \exp jkR(\zeta, \eta) \iint \frac{E(x, y) \exp[-jk(\alpha x + \beta y)]}{f^2 + \zeta^2 + \eta^2 + df - x\zeta - y\eta} dx dy. \quad (2.8)$$

Введем новые переменные, имеющие смысл пространственных частот:

$$\begin{aligned} \mu_x &= \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{\zeta}{\lambda \sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}} \\ \mu_y &= \frac{\beta}{\lambda} = \frac{\eta}{\lambda \sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Почему мы использовали здесь для обозначения пространственных частот букву μ , а не привычную ν , станет ясно из дальнейшего рассмотрения.

Подставив (2.9) в (2.8), вынесем $\frac{1}{f^2 + df}$ из-под знака интеграла и, проведя ряд элементарных преобразований, получим выражение, описывающее распределение комплексных амплитуд в плоскости P_2 :

$$\begin{aligned}
E(\zeta, \eta) &= \frac{-j}{\lambda(f+d)} \exp jkR(\zeta, \eta) \times \\
&\times \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(\mu_x x + \mu_y y)] dx dy - \frac{-j}{\lambda(f+d)} \exp jkR(\zeta, \eta) \times \quad (2.10) \\
&\times \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(\mu_x x + \mu_y y)] \left\{ \frac{1}{1 + \frac{f(f+d)}{\zeta(\zeta-x) + \eta(\eta-y)}} \right\} dx dy.
\end{aligned}$$

Можно видеть, что первый интеграл в полученном выражении с точностью до фазового множителя равен фурье-образу распределения $E(x, y)$. Второй же член выражения может рассматриваться как погрешность оптического преобразования Фурье, выполняемого идеальной положительной линзой. Если знаменатель подынтегрального выражения второго слагаемого существенно больше числителя, то и само второе слагаемое становится пренебрежимо малым. Для этого, как видно из (2.10), необходимо соответствующим образом подобрать соотношение максимальных значений x, y и ζ, η , т.е. апертуры в соответствующих плоскостях, и фокусное расстояние линзы.

Для того, чтобы получить количественную оценку погрешности оптического преобразования Фурье в зависимости от параметров оптической схемы, перепишем выражение (2.10) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
E(\zeta, \eta) &= \frac{-j}{\lambda(f+d)} \exp jkR(\zeta, \eta) \times \\
&\times \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(\mu_x x + \mu_y y)] \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \frac{f(f+d)}{\zeta(\zeta-x) + \eta(\eta-y)}} \right\} dx dy \quad . \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Сравним полученное выражение со строгим определением преобразования Фурье, введенном нами в первой лекции:

$$F(v_x, v_y) = \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)] dx dy. \quad (2.12)$$

Проанализируем влияние отдельных членов, входящих в выражение для поля в плоскости P_2 (2.11) и отсутствующих в определении (2.12).

Частотная погрешность.

В (2.9) мы ввели новые переменные, имеющие смысл пространственных частот. Нетрудно видеть, что идеальная положительная линза формирует

фурье-образ не в своей фокальной плоскости, а на сфере радиуса f . Эта сфера касается фокальной плоскости только в точке ее пересечения главной оптической осью, а в фокальной плоскости формируется проекция фурье-образа (сформированного на сфере). Соответственно, при измерениях в плоскости возникают систематические ошибки. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Подставим (2.9) в строгое определение преобразования Фурье (2.12):

$$E\left(\frac{\zeta}{\lambda\sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}}, \frac{\eta}{\lambda\sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}}\right) = \iint E(x, y) \exp\left[-j2\pi\left(\frac{\zeta}{\lambda\sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}}x + \frac{\eta}{\lambda\sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}}y\right)\right] dx dy. \quad (2.13)$$

Отличия полученного выражения от точного в том, что введенная нами пространственная частота μ_x зависит не только от координаты ζ , но также и от координаты η . Последней зависимости в строгом определении преобразования Фурье быть не должно, аналогично и для частоты μ_y . Эта зависимость от «чужой» координаты и определяет частотную погрешность.

Преобразуем выражения (2.9) к виду

$$\mu_x = \frac{\zeta}{\lambda f} \left[\sqrt{1 + \frac{(\zeta^2 + \eta^2)}{f^2}} \right]^{-1} \quad (2.14)$$

$$\mu_y = \frac{\eta}{\lambda f} \left[\sqrt{1 + \frac{(\zeta^2 + \eta^2)}{f^2}} \right]^{-1}.$$

Разложим выражение в квадратных скобках в ряд

$$\mu_x = \frac{\zeta}{\lambda f} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta^2 + \eta^2}{f^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{\zeta^2 + \eta^2}{f^2} \right)^2 - \dots \right] \quad (2.15)$$

$$\mu_y = \frac{\eta}{\lambda f} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta^2 + \eta^2}{f^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{\zeta^2 + \eta^2}{f^2} \right)^2 - \dots \right].$$

Если ограничиться парааксиальным приближением, т.е. принять $\frac{(\zeta^2 + \eta^2)}{f^2} \ll 1$, то можно пренебречь всеми членами ряда (2.15), начиная со второго. Тогда получим линейное приближение:

$$\begin{aligned}\mu_x &= \frac{\zeta}{\lambda f} \\ \mu_y &= \frac{\eta}{\lambda f}.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Подстановка (2.16) в (2.13) и ведет к точному выражению для преобразования Фурье:

$$E\left(\frac{\zeta}{\lambda f}, \frac{\eta}{\lambda f}\right) = \iint E(x, y) \exp\left[-j2\pi\left(\frac{\zeta}{\lambda f}x + \frac{\eta}{\lambda f}y\right)\right] dx dy.\tag{2.17}$$

Таким образом, линейная зависимость между пространственными координатами ζ , η и пространственными частотами μ_x , μ_y имеет место только в параксиальной области. Вне параксиальной области масштаб оси частот с ростом частоты уменьшается.

Введем относительную частотную погрешность оптического преобразования Фурье при линейной аппроксимации оси частот следующим образом:

$$\Delta_f = \frac{\frac{\zeta}{\lambda f}}{\frac{\zeta}{\lambda \sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{\zeta^2 + \eta^2}{f^2}} - 1.\tag{2.18}$$

Определим рабочую апертуру в задней фокальной плоскости

$$\rho = \sqrt{\zeta^2 + \eta^2},$$

в пределах которой проводятся измерения. Введем отношение

$$a = \frac{\rho}{f}.$$

Тогда относительная частотная погрешность может быть переписана:

$$\Delta_f = \sqrt{1 + a^2} - 1.\tag{2.19}$$

В результате, зная допустимую относительную частотную погрешность, при заданном фокусном расстоянии можно определить радиус рабочей апертуры, в пределах которой заданная точность измерений будет гарантирована. Соответственно, можно определить и максимальную пространственную частоту, для которой погрешность еще не превышает заданную:

$$v_{\max} = \frac{\rho_{\max}}{\lambda f} = \frac{a}{\lambda}.\tag{2.20}$$

Пользуясь формулами (2.19) и (2.20), нетрудно количественно оценить параметры оптической схемы, обеспечивающие проведение измерений с заданной погрешностью.

Амплитудная погрешность

Амплитудная погрешность возникает в силу неточного учета длины оптического пути между точками x, y плоскости P_1 и точками ξ, η плоскости P_2 , а также коэффициента наклона для этих точек.

Вернемся к выражению (2.11):

$$E(\zeta, \eta) = \frac{-j}{\lambda(f+d)} \exp jkR(\zeta, \eta) \times \\ \times \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(\mu_x x + \mu_y y)] \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \frac{f(f+d)}{\zeta(\zeta-x) + \eta(\eta-y)}} \right\} dx dy.$$

Сравним его с выражением для точного преобразования Фурье:

$$E(v_x, v_y) = \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)] dx dy.$$

Из сравнения этих выражений видно, что распределение комплексных амплитуд, описываемое выражением (2.11), отличается от точного преобразования Фурье вторым членом в фигурных скобках. Именно этот член и описывает влияние изменения оптического пути между точками плоскостей P_1 и P_2 и коэффициента наклона.

Определим относительную амплитудную погрешность через отношение второго члена в фигурных скобках к значению выражения в фигурных скобках:

$$\Delta_a = \frac{\left(\frac{\zeta^2 + \eta^2 - x\zeta - y\eta}{f^2 + df + \zeta^2 + \eta^2 - x\zeta - y\eta} \right)}{\left(\frac{f^2 + df}{f^2 + df + \zeta^2 + \eta^2 - x\zeta - y\eta} \right)} = \frac{(\zeta^2 + \eta^2 - x\zeta - y\eta)}{f(f+d)}. \quad (2.21)$$

Введем в плоскостях P_1 и P_2 полярные координаты r, ψ и ρ, φ , соответственно. Тогда в полярных координатах

$$\Delta_a = \frac{[\rho^2 - \rho r \cos(\varphi - \psi)]}{f(f+d)}. \quad (2.22)$$

Очевидно, что амплитудная погрешность максимальна, если $\cos(\varphi - \psi) = -1$. Для этого крайнего случая получим выражение для максимальной амплитудной погрешности:

$$\Delta_{aMax} = \frac{(\rho^2 + \rho r)}{f(f+d)}. \quad (2.23)$$

Отсюда следует, что амплитудная погрешность зависит от апертур как во входной плоскости P_1 , так и в плоскости Фурье P_2 . При этом она более чувствительна к ρ - радиусу апертуры в частотной плоскости.

Введем относительные апертуры как отношения $\frac{\rho}{f}$ и $\frac{r}{f}$. Тогда максимальная амплитудная погрешность может быть представлена в виде

$$\Delta_{aMax} = \frac{\left[\left(\frac{\rho}{f} \right)^2 + \frac{\rho}{f} \frac{r}{f} \right]}{\left[1 + \frac{d}{f} \right]}. \quad (2.24)$$

Отсюда можно получить выражение для максимального значения относительной апертуры в частотной плоскости при заданном значении апертуры во входной плоскости и допустимой величине амплитудной погрешности:

$$\frac{\rho_{Max}}{f} = \frac{1}{2} \frac{r_{Max}}{f} \left[\sqrt{1 + 4\Delta_{aMax} \frac{1 + \frac{d}{f}}{\left(\frac{r_{Max}}{f} \right)^2}} - 1 \right]. \quad (2.25)$$

Для того, чтобы определить связь радиусов r и ρ с радиусом апертуры линзы R_L , рассмотрим схему, данную на рис.2.3.

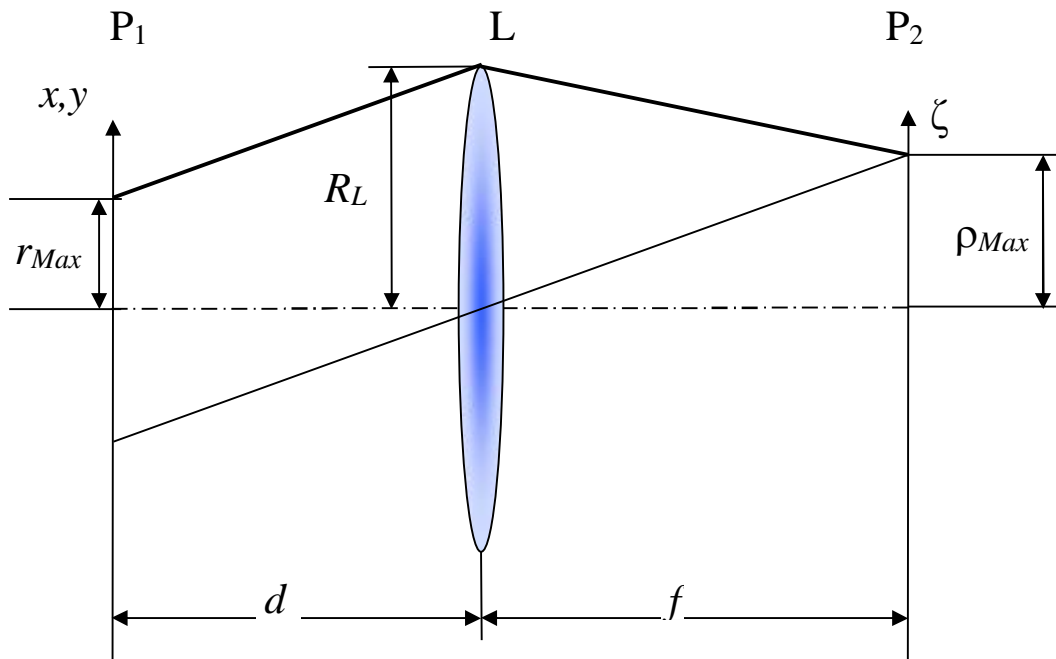


Рис.2.3. Схема, иллюстрирующая взаимную связь апертур во входной и выходной плоскостях с апертурой линзы при двумерном преобразовании Фурье

Из простейшего геометрического построения, приведенного на рис.2.3., очевидно следует соотношение

$$r_{Max} = R_L - d \frac{\rho_{Max}}{f}. \quad (2.26)$$

Введем понятие относительного отверстия линзы $O = \frac{2R_L}{f}$ и перепишем (1.26) в виде

$$\frac{r_{Max}}{f} = \frac{R_L}{f} - \frac{d}{f} \frac{\rho_{Max}}{f} = \frac{O}{2} - \frac{d}{f} \frac{\rho_{Max}}{f}. \quad (2.27)$$

И, аналогично, получим для апертуры в плоскости P_2 :

$$\frac{\rho_{Max}}{f} = \frac{\left[\frac{R_L}{f} - \frac{r_{Max}}{f} \right]}{\frac{d}{f}} = \frac{\left[\frac{O}{2} - \frac{r_{Max}}{f} \right]}{\frac{d}{f}}. \quad (2.28)$$

Формулы (2.25), (2.27) и (2.28) позволяют рассчитать параметры оптического анализатора Фурье, т.е. при заданном фокусном расстоянии определить размеры апертур, обеспечивающие выполнение преобразования Фурье над изображением заданного размера с заданной погрешностью.

Фазовая погрешность

Примем, что размеры апертур в плоскостях P_1 и P_2 схемы Рис.2.1. выбраны исходя из обеспечения требуемых частотной и амплитудной погрешностей. Тогда распределение комплексных амплитуд в задней фокальной плоскости линзы может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} E(\zeta, \eta) &= \frac{-j}{\lambda(f+d)} \exp jkR(\zeta, \eta) \iint E(x, y) \exp \left[-j2\pi(\mu_x x + \mu_y y) \right] dx dy = \\ &= \frac{-j \exp jkR(\zeta, \eta)}{\lambda(f+d)} F(E(x, y)), \end{aligned} \quad (2.29)$$

где F – символ преобразования Фурье.

Фазовая погрешность при выполнении преобразования Фурье обусловлена экспоненциальным членом $\exp jkR(\zeta, \eta)$ перед интегралом в выражении (2.29).

Поскольку все приемники являются так называемыми «квадратичными», то есть регистрируют не комплексную амплитуду, а интенсивность, то при непосредственных измерениях в частотной плоскости этот член на результат не влияет, так как обращается в единицу при умножении на комплексно сопряженный множитель

$$E(\zeta, \eta)E^*(\zeta, \eta) = \frac{-j \exp jkR(\zeta, \eta)}{\lambda(f+d)} \left(\frac{-j \exp jkR(\zeta, \eta)}{\lambda(f+d)} \right)^* (F(E(x, y)))^2 = (F(E(x, y)))^2.$$

Но при записи голограммы Фурье этот экспоненциальный множитель регистрируется на голограмме и, тем самым, в зависимости от схемы, может оказывать влияние на результаты обработки и измерений. Рассмотрим схему записи голограммы Фурье с внеосевым точечным опорным источником (внеосевым плоским опорным пучком) (Рис.2.4).

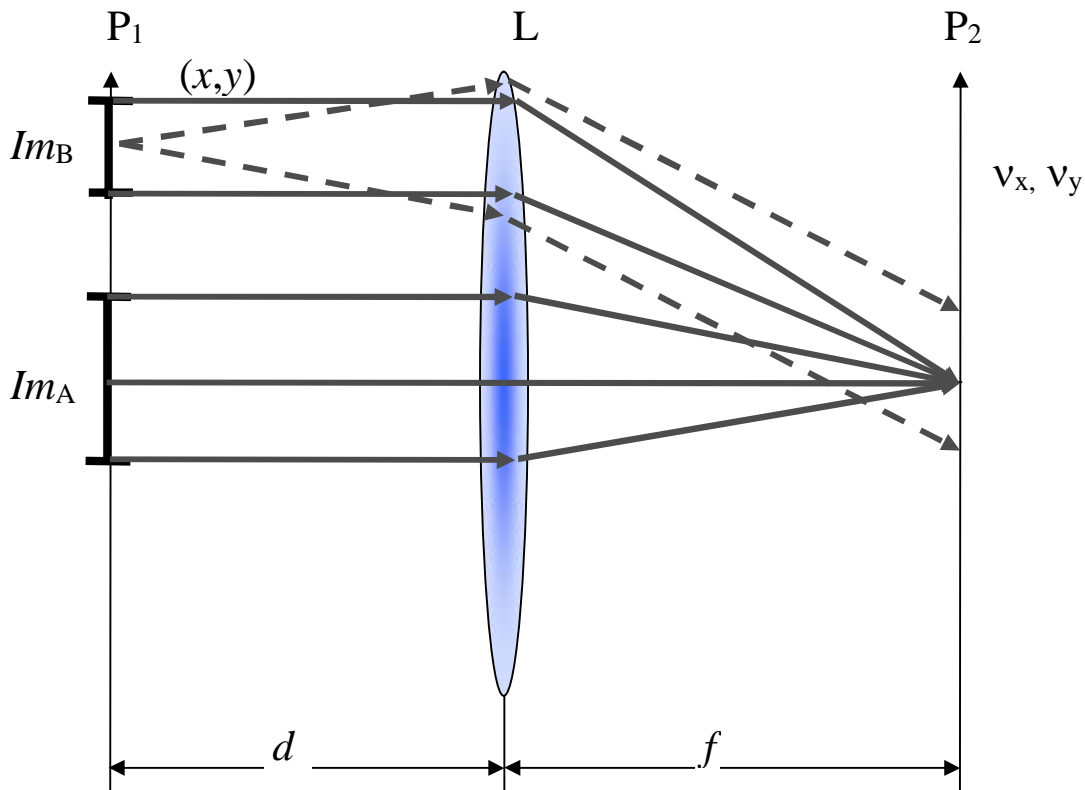


Рис.2.4. Схема записи голограммы Фурье

При записи голограммы Фурье эталонного изображения Im_A с опорным изображением Im_B , на голограмме, в предположении линейной записи, будет записано распределение

$$H(v_x, v_y) = \left(\frac{j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(Im_A) + \frac{j \exp jkR(\zeta_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(Im_B) \right) \times \left(\frac{j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(Im_A) + \frac{j \exp jkR(\zeta_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(Im_B) \right)^*$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_A) \frac{-j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_A)^* \right) + \\
&+ \left(\frac{j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_A) \frac{-j \exp jkR(\zeta_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_B)^* \right) + \\
&+ \left(\frac{j \exp jkR(\zeta_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_B) \frac{-j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_A)^* \right) + \\
&+ \left(\frac{j \exp jkR(\zeta_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_B) \frac{-j \exp jkR(\zeta_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_B)^* \right) = \\
&= \left(F(\text{Im}_A) F(\text{Im}_A)^* \right) + \left(F(\text{Im}_B) F(\text{Im}_B)^* \right) + \\
&+ \left(\frac{j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_A) \frac{-j \exp jkR(\zeta_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_B)^* \right) + \\
&+ \left(\frac{j \exp jkR(\zeta_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_B) \frac{-j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_A)^* \right) . \tag{2.30}
\end{aligned}$$

Соответственно, при освещении обработанной соответствующим образом (проявленной и зафиксированной) голограммы объектным изображением Im_C поле сразу за голограммой описывается выражением

$$\begin{aligned}
&\frac{-j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_C) H(v_x, v_y) = \\
&= \frac{-j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_C) \left(F(\text{Im}_A) F(\text{Im}_A)^* \right) + \\
&+ \frac{-j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_C) \times \\
&\times \left(\frac{-j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_A) \frac{j \exp jkR(\zeta_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_B)^* \right) + \\
&+ \frac{-j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_C) \times \\
&\times \left(\frac{-j \exp jkR(\zeta_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_B) \frac{j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_A)^* \right) + \\
&+ \frac{-j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_C) \left(F(\text{Im}_B) F(\text{Im}_B)^* \right) . \tag{2.31}
\end{aligned}$$

Если в качестве опорного источника Im_B используется дифракционно-ограниченный точечный источник (т.е. голограмма записывается по схеме с внеосевым плоским опорным пучком, показанным пунктиром на Рис.2.4), то выражение (2.31) можно упростить:

$$\begin{aligned}
& \frac{j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f + d_C)} F(\text{Im}_C) H(v_x, v_y) = \\
& = \frac{j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f + d_C)} F(\text{Im}_C) (F(\text{Im}_A) F(\text{Im}_A)^*) + \\
& + \frac{j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f + d_C)} F(\text{Im}_C) \frac{j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f + d_A)} F(\text{Im}_A) + \\
& + \frac{j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f + d_C)} F(\text{Im}_C) \frac{-j \exp jkR(\zeta_A, \eta_A)}{\lambda(f + d_A)} F(\text{Im}_A)^* + \\
& + \frac{j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f + d_C)} F(\text{Im}_C).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Здесь, для упрощения выкладок, мы опустили постоянные коэффициенты. Если объектное изображение помещено в то же положение, что и эталонное при записи голограммы, то возможно дальнейшее упрощение этого выражения:

$$\begin{aligned}
& \frac{j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f + d)} F(\text{Im}_C) H(v_x, v_y) = \\
& = \frac{j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f + d)} F(\text{Im}_C) (F(\text{Im}_A) F(\text{Im}_A)^*) + \\
& + \frac{j \exp jk(R(\zeta_C, \eta_C) + R(\zeta_A, \eta_A))}{\lambda(f + d)} F(\text{Im}_C) F(\text{Im}_A) + \\
& + \frac{j \exp jk(R(\zeta_C, \eta_C) - R(\zeta_A, \eta_A))}{\lambda(f + d)} F(\text{Im}_C) F(\text{Im}_A)^* + \\
& + \frac{j \exp jkR(\zeta_C, \eta_C)}{\lambda(f + d)} F(\text{Im}_C).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Из (2.33) видно, что, строго говоря, фазовая погрешность несущественна при голографическом методе обработки информации только при работе в +1 порядке дифракции (третье слагаемое в (2.33)) $4f$ схемы голографии Фурье в случае, если объектное изображение находится в том же положении, что и эталонное при записи голограммы, т.е.

$$d_c = d_A.$$

Условие

$$(\zeta_c, \eta_c) \leq (\zeta_A, \eta_A)$$

выполняется автоматически, поскольку физический размер голограммы не превосходит (ζ_A, η_A) (с учетом ограничений, обусловленных ограниченностью динамического диапазона регистрирующей среды).

Обратим внимание, что при выводе (2.33) мы рассмотрели только запись голограммы. Но $4f$ схема голографии Фурье предполагает также и второе преобразование Фурье, выполняемое над дифрагировавшим на голограмме пучком. Это преобразование мы здесь еще не рассмотрели. Если схема используется как коррелятор или конволвер, то в задней фокальной плоскости второй фурье-преобразующей линзы регистрируется интенсивность, т.е. возникающая при втором преобразовании фазовая погрешность не существенна. Если же голографическая схема входит в состав более сложной схемы, то эта погрешность, в зависимости от схемы, может оказаться существенной.

Оговоренные выше условия имеют силу для коррелятора Ван дер Люгта, поскольку функция взаимной корреляции формируется в +1 порядке дифракции. При работе в -1 порядке дифракции (второе слагаемое) в (2.33) фазовые погрешности складываются.

Оценим величину фазовой погрешности. Величина множителя $\frac{j \exp jkR(\zeta, \eta)}{\lambda(f+d)}$ зависит от величины $R(\zeta, \eta)$, которая, в свою очередь, в соответствии с (2.7) зависит от (ζ, η) , т.е. от ρ - радиуса апертуры в частотной плоскости P_2 . Обычно полагают, что в пределах ρ_{Max} изменения ξ и η достаточно малы для того, чтобы экспоненциальный множитель $\exp jkR(\zeta, \eta)$ в выражении (2.29) можно было считать постоянным. Вернемся к точному выражению для $R(\zeta, \eta)$ (2.7) и преобразуем его:

$$\begin{aligned} R(\zeta, \eta) &= \frac{f^2 + \zeta^2 + \eta^2 + df}{\sqrt{f^2 + \zeta^2 + \eta^2}} = \frac{f^2 + \rho^2 + df}{\sqrt{f^2 + \rho^2}} = \\ &= (f+d) - (f-d) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{f^2 + \frac{\rho^2}{f^2}}} \right) + 2f \left(\frac{\left(1 - \frac{\rho^2}{2f^2} \right)}{\sqrt{f^2 + \frac{\rho^2}{f^2}}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Если разложить второе и третье слагаемые в степенной ряд, ограничившись первым приближением, то (2.34) после несложных преобразований примет вид

$$R(\zeta, \eta) = (f + d) + \frac{1}{2}(f - d)\frac{\rho^2}{f^2} + \frac{1}{2}f\left(\frac{\rho^2}{f^2}\right)^2. \quad (2.35)$$

Подставив (2.35) в выражение для экспоненциального множителя, определяющего фазовую погрешность, получим

$$\begin{aligned} \frac{j \exp jkR(\zeta, \eta)}{\lambda(f + d)} &= \\ &= \frac{j}{\lambda(f + d)} \exp jk(f + d) \exp\left(\frac{1}{2}jk(f - d)\frac{\rho^2}{f^2}\right) \exp\left(\frac{1}{2}jkf\left(\frac{\rho^2}{f^2}\right)^2\right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Принятая при разложении (2.34) в степенной ряд аппроксимация только первыми членами допустима в определенных пределах. Например, если выполняется условие $\rho \leq 0.14f$, то погрешности, определенные согласно (2.36) и (2.34), различаются не более, чем на 2%.

Из (2.36) наглядно видно, почему при реализации преобразования Фурье линзой транспарант с преобразуемым изображением обычно помещается в переднюю фокальную плоскость, т.е. выполняется условие

$$d = f. \quad (2.37)$$

Действительно, в этом случае второй сомножитель в (2.36) становится равным единице и фазовая погрешность минимизируется:

$$\frac{j \exp jkR(\zeta, \eta)}{\lambda(f + d)} = \frac{j}{2\lambda f} \exp jk2f \exp\left(\frac{1}{2}jkf\left(\frac{\rho^2}{f^2}\right)^2\right) \quad (2.38)$$

Влияние фазовой погрешности на результат обработки изображения оптической схемой

Выше мы упомянули, что при измерениях в спектральной плоскости, выполняемых квадратичным приемником, фазовый член, определяющий фазовую погрешность, исчезает (поскольку квадратичный приемник измеряет не комплексную амплитуду, а интенсивность). Однако в более сложных системах эта погрешность может вносить существенный вклад в результат обработки. Рассмотрим простейшую систему, состоящую из двух положительных линз, задняя и передняя фокальные плоскости которых совпадают (Рис.2.5)

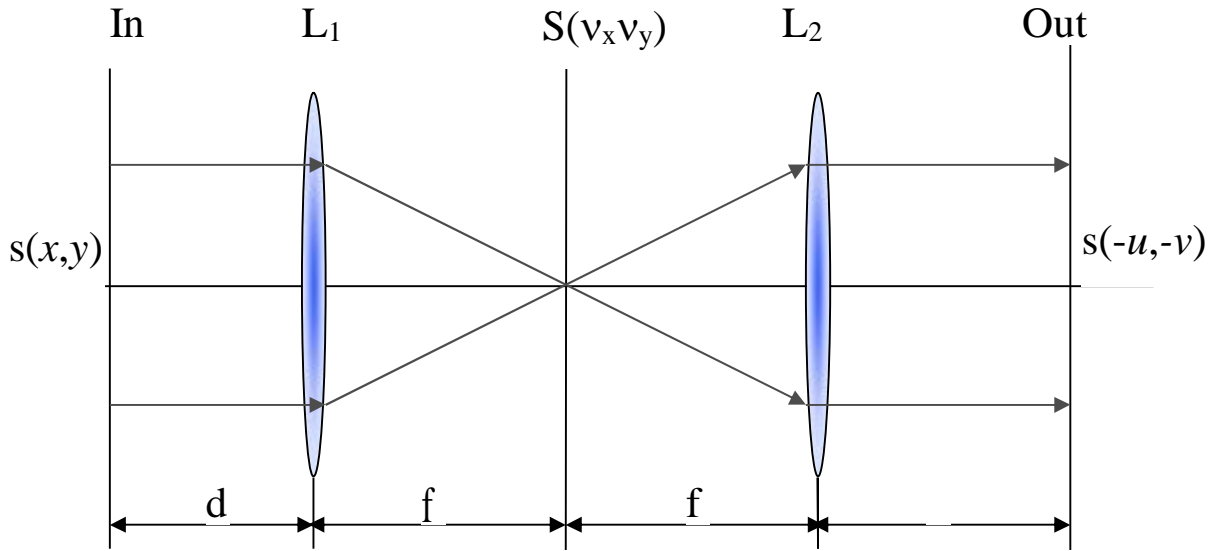


Рис.2.5. Схема двойного оптического преобразования Фурье

Поскольку в схеме выполняются последовательно два преобразования (2.29), то, в предположении, что входная плоскость совпадает с передней фокальной плоскостью первой линзы ($d=f$), в задней фокальной плоскости первой линзы L_1 распределение амплитуд $S(\zeta, \eta)$ в выходной плоскости Out распределение амплитуд описывается выражением

$$\begin{aligned}
 S(\zeta, \eta) &= \frac{j}{2\lambda f_1} \exp jk2f_1 \exp \left(\frac{1}{2} jkf_1 \left(\frac{\rho_1^2}{f_1^2} \right)^2 \right) \times \\
 &\times \iint E(x, y) \exp \left[-j2\pi(v_x x + v_y y) \right] dx dy = \\
 &= \frac{j}{2\lambda f_1} \exp jk2f_1 \exp \left(\frac{1}{2} jkf_1 \left(\frac{\rho_1^2}{f_1^2} \right)^2 \right) S(v_x, v_y),
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

где $S(v_x, v_y)$ – фурье-образ распределения амплитуд во входной плоскости. Вторая линза L_2 выполняет второе преобразование над этим распределением:

$$\begin{aligned}
 Out(u, v) &= \frac{j}{2\lambda f_2} \exp jk2f_2 \exp \left(\frac{1}{2} jkf_2 \left(\frac{\rho_2^2}{f_2^2} \right)^2 \right) \times \\
 &\times \iint S(\zeta, \eta) \exp \left[-j2\pi(v_x u + v_y v) \right] dv_x dv_y = \\
 &= \frac{j}{2\lambda f_2} \exp jk2f_2 \exp \left(\frac{1}{2} jkf_2 \left(\frac{\rho_2^2}{f_2^2} \right)^2 \right) \frac{j}{2\lambda f_1} \exp jk2f_1 \times \\
 &\times \iint \exp \left(\frac{1}{2} jkf_1 \left(\frac{\rho_1^2}{f_1^2} \right)^2 \right) S(v_x, v_y) \exp \left[-j2\pi(v_x u + v_y v) \right] dv_x dv_y.
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Для оценки влияния экспоненциального фазового множителя (2.36) на результат преобразования, выполняемого системой рис.2.5, рассмотрим прохождение через неё гармонического сигнала, представленного в передней фокальной плоскости линзы L_1 :

$$s(x) = A_0 + B \cos 2\pi v_0 x. \quad (2.41)$$

Примем для упрощения выражений $d=f_1=f_2=f$ и обозначим множители, стоящие перед интегралом, C_1 и C_2 , соответственно. Тогда в спектральной плоскости для гармонического сигнала (2.41) получим распределение

$$S(v_x, v_y) = C_1 \left[A_0 \delta(v_x) + \frac{B}{2} (\delta(v_x - v_0) + \delta(v_x + v_0)) \right], \quad (2.42)$$

где для упрощения выражений символом $\delta(\dots)$ мы обозначили распределение амплитуд в дифракционном максимуме. Отсюда, распределение комплексных амплитуд в выходной плоскости

$$Out(u, v) = C_3 \left[A_0 + B \exp \left(\frac{jkf (\lambda v_0)^4}{2} \right) \cos 2\pi v_0 u \right], \quad (2.43)$$

где множитель C_3 определяется из (2.39) и (2.40).

Для преобразования без фазовой погрешности распределение амплитуд в выходной плоскости должно описываться выражением

$$Out_{ideal}(u, v) = C_3 (A_0 + B \cos 2\pi v_0 u). \quad (2.44)$$

Из сравнения (2.43) и (2.44) видно, что фазовая погрешность оптического преобразования Фурье для рассматриваемой схемы рис.2.5 выражается экспоненциальным множителем перед сигнальным членом $B \cos 2\pi v_0 u$.

Перейдем от амплитуд в выходной плоскости к интенсивности, тогда выражения (2.43) и (2.44) примут вид, соответственно:

$$\begin{aligned} \langle Out(u, v) \rangle^2 &= \\ &= |C_3|^2 \left[A_0^2 + 2A_0 B \cos \left(\frac{kf (\lambda v_0)^4}{2} \right) \cos 2\pi v_0 u + B^2 \cos^2 2\pi v_0 u \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

и

$$\langle Out_{ideal}(u, v) \rangle^2 = |C_3|^2 (A_0^2 + 2A_0 B \cos 2\pi v_0 u + B^2 \cos^2 2\pi v_0 u). \quad (2.46)$$

Из сравнения этих выражений видно, что интенсивность гармоники v_0 (сигнала) ослаблена, это ослабление представлено коэффициентом

$$M = \cos\left(\frac{kf(\lambda v_0)^4}{2}\right). \quad (2.47)$$

Соответственно, для сложного изображения этот коэффициент является функцией частоты:

$$M(v) = \cos\left(\frac{kf(\lambda v)^4}{2}\right). \quad (2.48)$$

Таким образом, в области низких пространственных частот влияние фазовой погрешности минимально, так как при малых v , как следует из (2.48), $M(v) \approx 1$. С ростом частоты величина $M(v)$ уменьшается. Напомним, что пространственная частота связана с пространственной координатой в частотной плоскости соотношением $v_x = \frac{\zeta}{\lambda f}$. [6]

Литература к теме 2

1. Борн М., Вольф. Э. «Основы оптики», изд. 2-е. Пер. с англ. М., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1973. – 814 с.
2. Кольер Р., Беркхарт Л., Лин Л. «Оптическая голография», М.: Мир, 1973. – 686с.
3. Василенко Г.И., Цибулькин Л.М. «Голографические распознающие устройства», М.: Радио и связь, 1985. – 312с.
4. А.В. Павлов Методы обработки информации в фотонике. Т.1. Основы оптических информационных технологий, использующих преобразование Фурье и метод голографии Изд.3-е, дополненное. – СПб.: Университет ИТМО, 2017. – 84 с.
5. Мирошников М.М. «Теоретические основы оптико-электронных приборов». Л., Машиностроение, 1977. – 600с.
6. С.Б. Гуревич В.Б. Константинов, В.К. Соколов, Д.Ф. Черных Передача и обработка информации голографическими методами. М.: Сов. Радио, 1978. – 304с.
7. Дж. Гудмен Введение в Фурье-оптику. М.: «Мир», 1970. – 364 с.
8. К. Престон Когерентные оптические вычислительные машины. М.: Мир, 1974. – 382 с.
9. А. Папулис Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971. – 495 с.
10. Б. Салех, М. Тейх Оптика и фотоника Принципы и применения. Учебное пособие. В 2-х томах. Долгопрудный: Издательский дом Интеллект, 2012. – 1540 с.

Тема 3. Преобразования, реализуемые в оптике на основе преобразования Фурье [1-3]

В первой лекции мы ознакомились с интегральными преобразованиями типа свертки – операторами свертки двух функций и корреляции двух функций. Эти интегральные преобразования реализуются оптическими методами с использованием двух последовательных преобразований Фурье. Поскольку фурье-образ любой функции (кроме функции Гаусса) – комплексная функция, то для реализации этих преобразований необходима голографическая технология – единственная технология, обеспечивающая запись и восстановление комплексных функций.

В этом разделе мы ознакомимся с рядом других преобразований, применяемых при обработке информации и реализуемых оптическими методами. [1-3]

3.1. Дифференцирование функций

Операция дифференцирования может быть реализована в оптике двумя методами. [1,2] Первый из них основан на следующем равенстве:

$$F[E^{(n)}(x)] = (j\omega)^n F[E(x)], \quad (3.1)$$

где $E^{(n)}(x)$ – n -ая производная функции $E(x)$. Отсюда следует формула для оптической реализации n -ой производной от функции $E(x)$:

$$\frac{d^n E(x)}{dx^n} = F^{-1}[(j\omega)^n F(E(x))]. \quad (3.2)$$

Таким образом, для того, чтобы реализовать операцию дифференцирования, необходимо в спектральной плоскости ввести амплитудный фильтр, функция амплитудного пропускания которого описывается выражением

$$H(\omega) = \omega^n. \quad (3.3)$$

Напомним, что в силу нереализуемости в оптике обратного преобразования Фурье, вместо обратного используется повторное прямое преобразование, что ведет к инверсии координат в выходной плоскости.

Такой способ оптического дифференцирования изображений применяется в задаче распознавания образов в том случае, если образ, подлежащий распознаванию (эталон), и образ–помеха имеют отчасти сходную форму. Классический пример, используемый для иллюстрации эффекта оптического дифференцирования – корреляционное распознавание печатного текста. Рассмотрим две буквы I и E. Эти буквы отчасти сходны между собой. Аналогичная ситуация имеет место при распознавании фигур одинаковой формы, но разного размера. Пример

приведен на рис.3.1 – сечения двух подобных фигур отличаются только размером.

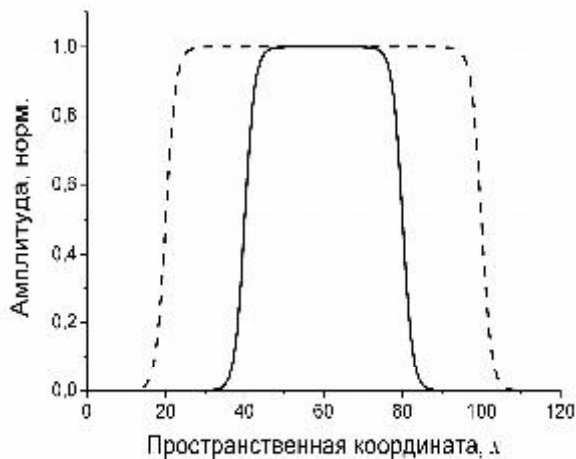


Рис.3.1. Пример одинаковых фигур, отличающихся только размером [2]

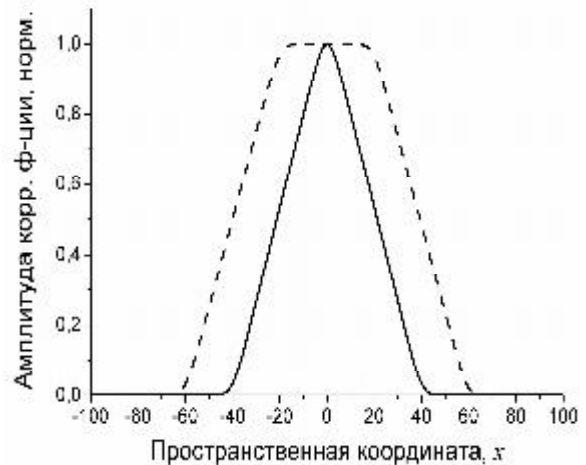


Рис.3.2. Функции автокорреляции I (сплошная линия) и кросскорреляции I и E(штрих) [2]

Этот пример можно рассматривать как сечения букв I (сплошная линия) и E (штриховая линия) по оси x .

Если поставлена задача распознать букву I, то буква E будет помехой. На рис.3.2 приведены сечения по оси x функций автокорреляции буквы I и кросс-корреляции букв I и E, т.е. сигнала и помехи. Энергия кросс-корреляционного отклика (площадь под кривой) больше для помехи, соответственно, будет принято неправильное решение – буква E будет распознана как буква I.

Используем операцию дифференцирования для исходных функций – в нашем примере букв E и I. Производные сечения по оси x будут иметь вид, показанный на рис. 3.3, а авто- и кросс-корреляционные функции – на рис.3.4.

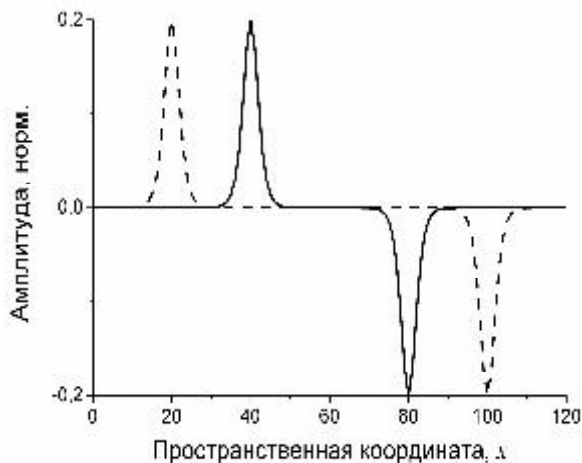


Рис.3.3. Производные функций, представленных на Рис.3.1 [2]

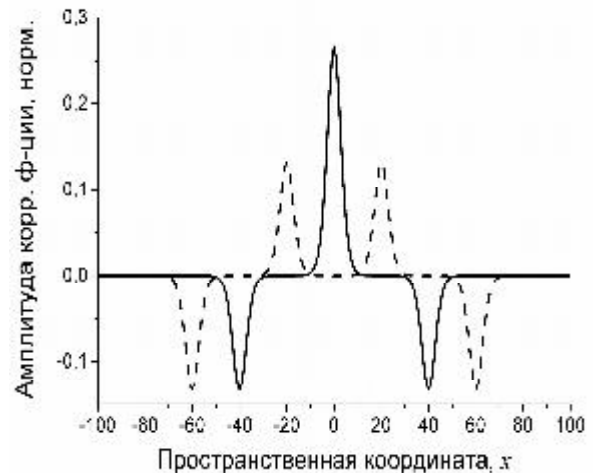


Рис.3.4. Функции автокорреляции (сплошная) и кросс-корреляции дифференцированных изображений [2]

Как видно из рис.3.4, при работе не с самими изображениями, а с их производными распознавание произойдет правильно, так как глобальный максимум автокорреляционной функции по амплитуде в два раза превосходит боковые максимумы функции кросс-корреляции (пунктирная кривая). При измерениях квадратичным приемником отношение сигнал-помеха составит уже 4:1, как это показано на рис.3.5.

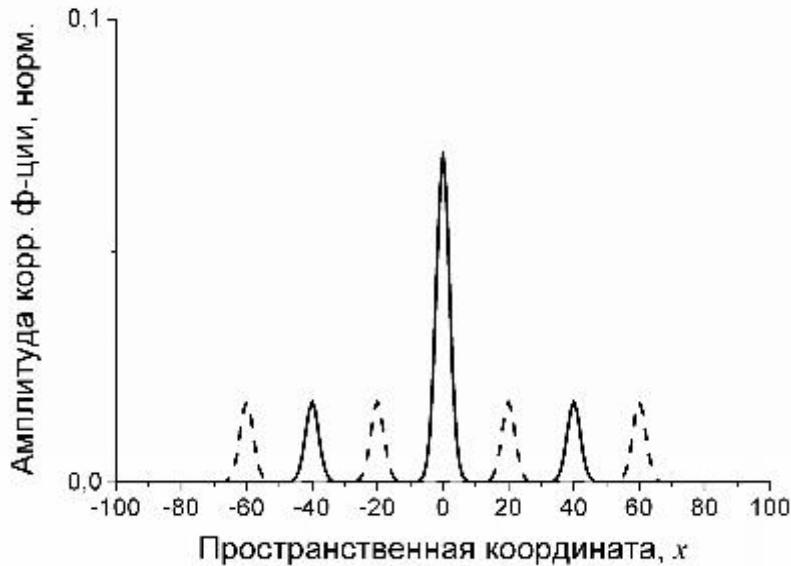


Рис.3.5. Функции автокорреляции (сплошная линия) и взаимной корреляции (штриховая) при измерении квадратичным приемником [2]

Заметим, что дифференцирование изображений реализуется методом пространственной фильтрации в частотной плоскости.

Второй способ оптического дифференцирования функций основан на использовании фильтрующего свойства δ -функции и её производных, а именно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) \delta^{(n)}(x - \xi) d\xi = (-1)^n E^{(n)}(x), \quad (3.4)$$

где $\delta^{(n)}(x - \xi)$ — n -ая производная δ -функции. Отсюда получим окончательное выражение:

$$\frac{d^n E(x)}{dx^n} = (-1)^n E(x) * \delta^{(n)}(x). \quad (3.5)$$

Нетрудно видеть, что полученные выражения применимы и к функциям двух переменных. В частности, частная производная порядка $n+t$ будет описываться выражением:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\partial^m}{\partial y^m} E(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} E(x, y) (-1)^{n+m} \delta^{(n)}(x - \xi) \delta^{(m)}(y - \eta) d\xi d\eta. \quad (3.6)$$

Следовательно, для реализации оператора дифференцирования первого порядка по одной координате $\frac{\partial}{\partial x}E(x, y)$ необходима весовая функция $-\delta'(x)\delta(y)$, а по двум координатам $\frac{\partial}{\partial x\partial y}E(x, y)$ – весовая функция $\delta'(x)\delta'(y)$.

3.2. Оператор Лапласа

Оператора Лапласа (лапласиан) определяется следующим образом [1,2]:

$$\Delta E(x, y) = \nabla^2 E(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E(x, y)$$

Из выражения (3.5) следует, что для его реализации необходима весовая функция, имеющая вид

$$\delta''(x)\delta(y) + \delta(x)\delta''(y). \quad (3.7)$$

Возможна также и реализация оператора Лапласа методом преобразования Фурье – из (3.2) следует, что для этого необходимо фурье-образ функции $E(x)$ умножить на функцию

$$-(\omega_x^2 + \omega_y^2), \quad (3.8)$$

которая может быть реализована в оптике как амплитудный фильтр.

3.3. Интегрирование функций

Интегрирование функции может рассматриваться как вычисление её фурье-образа в точке $\nu = 0$. [1,2]

Другой подход к интегрированию функций возможен через её свертку с функцией, тождественно равной единице [1,2]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(x) dx = E(x) * 1(x). \quad (3.9)$$

3.4. Вычисление моментов [1,2]

Напомним, что моменты функций определяются следующим образом:

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n E(x) dx. \quad (3.10)$$

Их вычисление реализуется через операции преобразования Фурье и дифференцирование. Разложим экспоненциальное ядро в выражении для преобразования Фурье в степенной ряд:

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \left[1 - j\omega x + \frac{(-j\omega x)^2}{2!} + \frac{(-j\omega x)^3}{3!} + \dots \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} (-j\omega)^n. \quad (3.11)$$

Отсюда получим выражение для вычисления моментов:

$$m_n = (-j)^{\frac{1}{n}} \frac{dn}{d\omega^n} F(0). \quad (3.12)$$

Таким образом, n -кратное дифференцирование фурье-образа анализируемой функции в точке $\nu = 0$ позволяет вычислить соответствующие моменты.

3.5. Преобразование Френеля [1,2]

Преобразование Френеля определяется следующим образом:

$$\Phi(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \exp(-j(2\pi\nu + x)^2) dx. \quad (3.13)$$

Введем новую переменную $\mu = 2\nu$, тогда имеем:

$$\begin{aligned} \Phi(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \exp(-j2\pi\mu x) \exp(-j2\pi\nu^2) \exp(-jx^2) dx = \\ &= \exp\left(-j\left(\frac{2\pi\mu}{2}\right)^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} [E(x) \exp(-jx^2)] \exp(-j2\pi\mu x) dx \end{aligned} \quad (3.14)$$

Таким образом, для того, чтобы выполнить преобразование Френеля функции $E(x)$, её необходимо умножить на $\exp(-jx^2)$, выполнить преобразование Фурье и полученный фурье-образ $F(\mu)$ умножить на

$$\exp\left(-j\left(\frac{2\pi\mu}{2}\right)^2\right).$$

Другой метод реализации преобразования Френеля основан на использовании теоремы Бореля о свертке и табличном значении:

$$F\left(\exp(-jx^2)\right) = j\sqrt{\pi} \exp\left(\frac{j\pi}{4}\right) \exp\left(\frac{j(2\pi\nu)^2}{4}\right). \quad (3.15)$$

Отсюда получим выражение для преобразования Френеля через свертку фурье-образа с экспоненциальной функцией:

$$\Phi(\nu) = j\sqrt{\pi} \exp\left[j\left((2\pi\nu)^2 + \frac{\pi}{4}\right)\right] F(2\nu) * \exp(j\nu^2). \quad (3.16)$$

3.6. Преобразование Меллина [1,2]

Двумерное преобразование Меллина функции $E(x, y)$ по определению:

$$M(p, s) = \int_0^{\infty} E(x, y) x^{p-1} y^{s-1} dx dy; \quad p = \sigma_p + j\mu, \quad s = \sigma_s + j\nu.$$

В оптической обработке информации используется его частный случай:

$$M(j\mu, j\nu) = \int_0^{\infty} E(x, y) x^{-j\mu-1} y^{-j\nu-1} dx dy. \quad (3.17)$$

Преобразование Меллина представляет интерес в силу того, что его модуль, в отличие от преобразования Фурье, инвариантен к изменению масштаба. Действительно, если имеются две функции, одна из которых представляет собой масштабированную версию другой: $E(x, y)$ и $E(ax, by)$, то из определения (3.17) следует, что

$$\begin{aligned} M(E(ax, by)) &= \int_0^{\infty} E(ax, by) x^{-j\mu-1} y^{-j\nu-1} dx dy \Bigg|_{\substack{\zeta=ax \\ \eta=by}} = \\ &= \int_0^{\infty} E(\zeta, \eta) \frac{\zeta^{-j\mu-1} \eta^{-j\nu-1}}{a^{-j\mu-1} b^{-j\nu-1}} d\frac{\zeta}{a} d\frac{\eta}{b} = \\ &= a^{j\mu} b^{j\nu} \int_0^{\infty} E(\zeta, \eta) \zeta^{-j\mu-1} \eta^{-j\nu-1} d\zeta d\eta = a^{j\mu} b^{j\nu} M(E(\zeta, \eta)) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Из (3.17) видно, что преобразование Меллина функции $E(x, y)$ может быть представлено как преобразование Фурье функции $E(\exp(\zeta), \exp(\eta))$:

$$M(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(\exp(\zeta), \exp(\eta)) \exp(-j2\pi(\zeta\mu + \eta\nu)) d\zeta d\eta. \quad (3.19)$$

Таким образом, для того, чтобы выполнить преобразование Меллина функции $E(x, y)$, необходимо выполнить логарифмическое преобразование её координат $\zeta = \ln x$, $\eta = \ln y$, а затем преобразование Фурье. Логарифмическое преобразование координат легко выполнить в телевизионном (тепловизионном) тракте ввода, поскольку в элементы изображения вводятся последовательно (развертка изображения).

3.7. Преобразование Радона [1, 2]

Преобразование Радона используется в томографии для получения информации о строении трехмерного объекта по совокупности его проекций. Преобразование Радона ставит в соответствие функции $E(r, \varphi)$, заданной в полярных координатах, функцию $\mathfrak{R}_E(l, \Theta)$, при этом значение $\mathfrak{R}_E(l, \Theta)$ в точке (l, Θ) обозначается $[\mathfrak{R}_E](l, \Theta)$. Радоновский образ функции $E(r, \varphi)$ определяется следующим образом:

$$[\mathfrak{R}_E](l, \Theta) = \int_{-\infty}^{\infty} E\left[\sqrt{l^2 + z^2}, \Theta + \arctg\left(\frac{z}{l}\right)\right] dz. \quad (3.20)$$

При $l = 0$ радоновский образ имеет вид

$$[\mathfrak{R}_E](0, \Theta) = \int_{-\infty}^{\infty} E \left[z, \Theta + \frac{\pi}{2} \right] dz. \quad (3.21)$$

Радоновский образ представляет собой интеграл от функции $E(r, \varphi)$ вдоль некоторой прямой L , расположенной на расстоянии l от начала координат и образующей угол Θ с положительным направлением оси u .

Для того, чтобы установить связь между преобразованием Радона и преобразованием Фурье, используется теорема о проекциях, непосредственно следующая из определения этих преобразований. Введем двумерное преобразование Фурье в полярных координатах:

$$[F_{EP}](R, \Phi) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\pi} |r| E(r, \varphi) \exp[-2\pi jrR \cos(\Phi - \varphi)] dr d\varphi. \quad (3.22)$$

Введем одномерное преобразование Фурье функции двух переменных вдоль линии L , которое обозначим F_{EL} , тогда можно видеть, что имеет силу следующее соотношение:

$$F_p = F_L \mathfrak{R}. \quad (3.23)$$

Отсюда следует, что для того, чтобы выполнить преобразование Радона, достаточно выполнить двумерное и одномерное преобразования Фурье.

3.8. Вычитание изображений [1, 2]

Как мы уже изучали ранее, при записи голограммы Фурье изображения $E_1(x)$ с плоской внеосевой опорной волной, формируемой точечным источником, находящимся в передней фокальной плоскости фурье-преобразующей линзы в точке x_0 , в предположении линейного оператора голографической регистрирующей среды, голограмма описывается выражением

$$\begin{aligned} H_1(v) &= \left[\exp(j2\pi vx_0) + F_1(v) \right] \left[\exp(j2\pi vx_0) + F_1(v) \right]^* = \\ &= 1 + F_1(v)F_1^*(v) + F_1(v)\exp(-j2\pi vx_0) + F_1^*(v)\exp(j2\pi vx_0) \end{aligned}, \quad (3.24)$$

где астериск обозначает комплексное сопряжение, а $F_1(v)$ – фурье-образ. Запишем вторую голограмму Фурье $H_2(v)$ с опорной волной, имеющей сдвиг фазы $i\pi$ по сравнению с опорной волной, использованной при записи первой голограммы:

$$\begin{aligned} H_2(v) &= \left[\exp(j2\pi vx_0 + i\pi) + F_2(v) \right] \left[\exp(j2\pi vx_0 + i\pi) + F_2(v) \right]^* = \\ &= 1 + F_2(v)F_2^*(v) + \\ &+ F_2(v)\exp(-j(2\pi vx_0 - i\pi)) + F_2^*(v)\exp(j(2\pi vx_0 + i\pi)) = \\ &= 1 + F_2(v)F_2^*(v) - F_2(v)\exp(-j2\pi vx_0) - F_2^*(v)\exp(j2\pi vx_0) \end{aligned}. \quad (3.25)$$

Сложим эти голограммы, например, методом наложенных, т.е. записанных на одном участке регистрирующей среды, голограмм:

$$H_1(v) + H_2(v) = 2 + |F_1(v)|^2 + |F_2(v)|^2 + (F_1(v) - F_2(v)) \exp(-j2\pi vx_0) + (F_1^*(v) - F_2^*(v)) \exp(j2\pi vx_0). \quad (3.26)$$

Осветим голограмму (3.26) плоской волной, затем выполним преобразование Фурье дифрагировавших волн. В результате получим:

$$F(H_1(v) + H_2(v)) = 2\delta(x) + F(F_1(v)F_1^*(v)) + F(F_2(v)F_2^*(v)) + (E_1(x) - E_2(x)) * \delta(x - x_0) + (E_1^*(x) - E_2^*(x)) * \delta(x + x_0), \quad (3.27)$$

где символ * обозначает операцию свертки. Первое слагаемое в полученном выражении представляет собой дифракционно-ограниченное изображение точечного источника, расположенное в точке $x=0$ (в предположении, что восстанавливающий голограмму пучок формируется точечным источником, расположенным на главной оптической оси). Второй и третий члены – автокорреляционные функции изображений $E_1(x)$ и $E_2(x)$, симметричные относительно главной оптической оси, а четвертое и пятое слагаемые – результаты вычитания функций $E_1(x)$ и $E_2(x)$, расположенные симметрично относительно главной оптической оси на расстояниях x_0 от неё.

Практическое значение вычитания изображений можно понять на примере разведки замаскированных объектов. При грамотной маскировке объектов на местности активные методы поиска и разведки, например, активная радиолокация, очень часто оказываются неэффективными. Сравнение же двух одновременных изображений одного и того же участка местности с использованием метода вычитания изображений позволяет сразу же обнаружить произошедшие изменения и, соответственно, принять меры к более детальному исследованию области изменений.

Литература к теме 3

1. *Г.И.Василенко, Л.М.Цибулькин*, Голографические распознающие устройства, М.: Радио и связь, 1985. – 312с.
2. *А.В. Павлов* Методы обработки информации в фотонике. Т.1. Основы оптических информационных технологий, использующих преобразование Фурье и метод голографии Изд.3-е, дополненное. – СПб: Университет ИТМО, 2017. – 84 с.
3. *Кольер Р., Беркхарт Л., Лин Л.* «Оптическая голография», М.: Мир, 1973. – 686с.

Тема 4. Отношение сигнал/помеха при корреляционном сравнении изображений

В предыдущих лекциях, а также в курсе «Оптические технологии искусственного интеллекта», говоря о применении корреляционного алгоритма в задаче распознавания образов и, в частности, о голографических корреляторах, мы упоминали такое понятие, как отношение сигнал/помеха в корреляционной плоскости, но не определяли его строго и не исследовали факторы, влияющие на величину этого отношения. В данной теме мы рассмотрим этот вопрос детально [1-3].

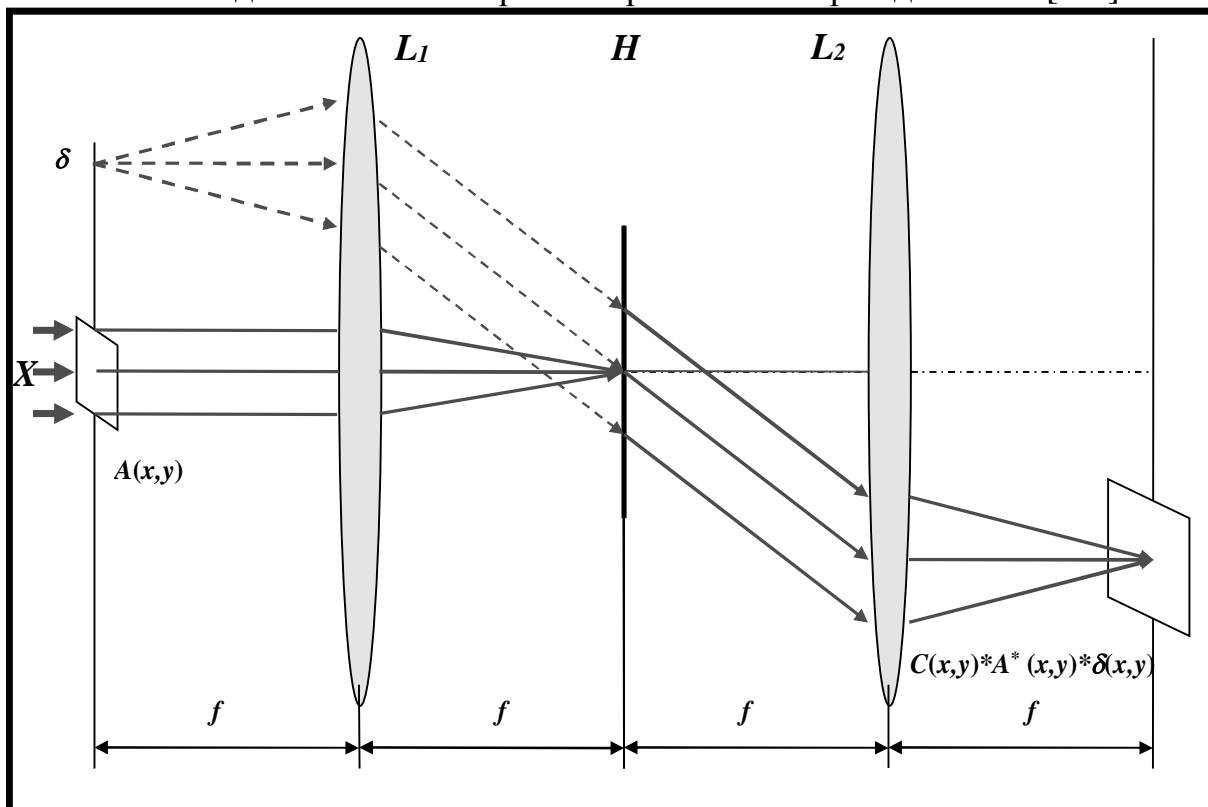


Рис.4.1. Схема голографического коррелятора Ван дер Люгта

Говоря о корреляционном алгоритме распознавания образов в курсе «Оптические технологии искусственного интеллекта», мы выяснили, что решение о распознавании принимается на основании вычисления функции взаимной корреляции (ВКФ) объектного (предъявляемого) и эталонного изображений. Если эти изображения идентичны, то имеем автокорреляционную функцию (АКФ), в общем случае для сложных изображений она имеет вид, представленный на рис.4.2 сплошной кривой. Центральный пик на этом рисунке называется глобальным максимумом автокорреляционной функции (ГМ АКФ), и именно он служит сигналом распознавания. На научном жаргоне он часто называется корреляционным пиком. Для сравнения на рис.4.2 пунктиром показана АКФ функции $\text{Rect}(x)$ (прямоугольного импульса), в оптике эта функция используется для аналитического описания зрачка или апертуры.

Если КФ строится голографическим коррелятором, схема которого дана на рис.4.1, то ГМ АКФ может рассматриваться как восстановленное голограммой изображение точечного опорного источника δ , использованного при записи голограммы Фурье эталонного изображения.

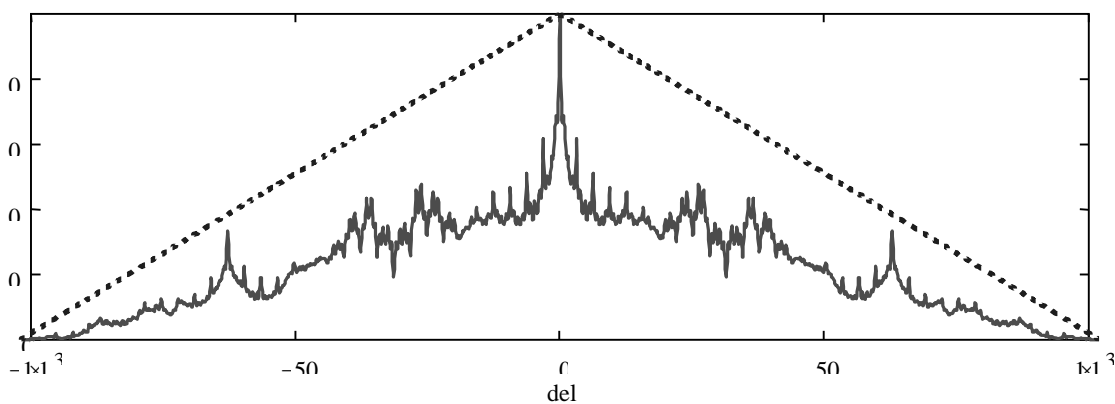


Рис.4.2. Автокорреляционные функции ограниченного сигнала со сложным спектральным составом (сплошная кривая) и прямоугольного импульса (штриховая линия)

Из рисунка 4.2 видно, что, кроме ГМ АКФ, присутствуют также и другие пики, меньшей амплитуды – боковые максимумы АКФ, возникающие вследствие ограниченности реализации [1]. Если сравниваются не полностью идентичные изображения, а лишь отчасти похожие, то их корреляционная функция состоит, условно говоря, из двух – АКФ идентичных частей и ВКФ различных. ВКФ различных изображений иногда называют кросс-корреляционной функцией, которая, в отличие от АКФ, в общем случае не имеет ГМ – на рис.4.3 ВКФ показана пунктиром.

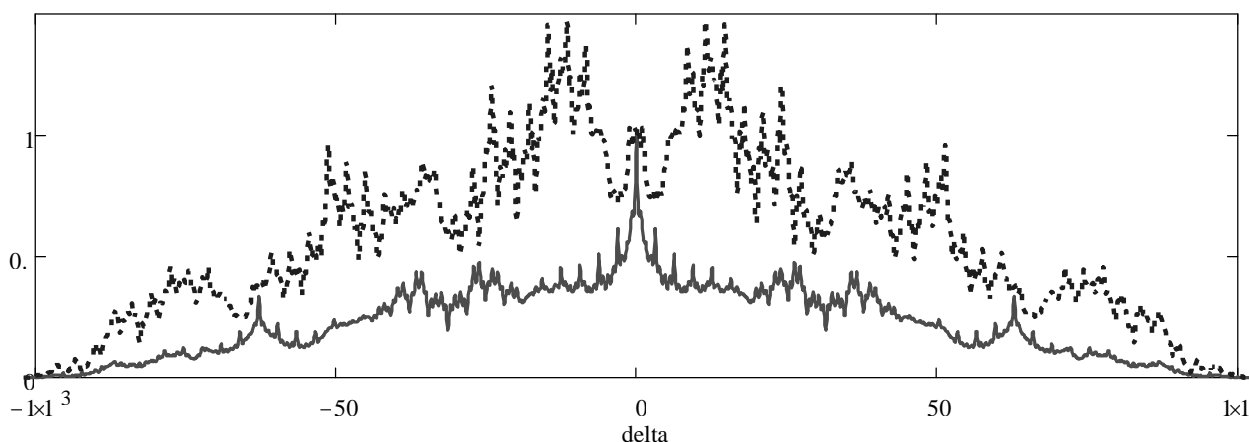


Рис.4.3. АКФ (сплошная линия) и ВКФ (пунктир)

Если амплитуды боковых максимумов АКФ и/или ВКФ сравнимы с амплитудой ГМ АКФ или превосходят ее, то эти боковые максимумы в задаче распознавания являются помехой. Для примера на рис.4.3 приведены АКФ (сплошная кривая) и ВКФ (пунктир) двух различных функций. Видно, что у ВКФ глобальный максимум отсутствует. Чем больше отличие объектного изображения от эталонного, тем больше амплитуды боковых максимумов и ниже амплитуда ГМ АКФ. Поэтому необходимо оценить отношение интенсивностей этих максимумов.

Важное замечание. Иногда в литературе боковые максимумы АКФ и ВКФ трактуются как шум и, соответственно, используется термин «отношение сигнал/шум». Такая трактовка некорректна, так как боковые максимумы АКФ и ВКФ несут в себе информацию о сравниваемых изображениях (функциях). В курсе ОТИИ, в теме «Линейный предсказатель случайных процессов» мы увидели, что именно боковые максимумы АКФ и ВКФ используются для реализации модели линейного предсказателя. В то же время эти боковые максимумы являются помехой в рамках задачи распознавания, решаемой детектированием ГМ АКФ.

Пусть распределение амплитуд во входной плоскости коррелятора (изображение) $E(x, y)$ описывается моделью двумерного изотропного случайного поля с функцией ковариации (авто-ковариации)

$$R(\Delta_x, \Delta_y) = \sigma^2 \rho(r), \quad (4.1)$$

где σ^2 – дисперсия поля, $\rho(r) = \frac{R(\Delta_x, \Delta_y)}{\sigma^2}$ – нормированная функция ковариации поля, r – радиус ковариации. Поле $E(x, y)$ примем статистически однородным так, чтобы можно было осуществить нормировку первого и второго моментов. Напомним, что ковариация – второй центральный момент случайного процесса, в теории случайных процессов функция ковариации двух процессов определяется как

$$R_{1,2}(\Delta_x) = \langle (E_1(x + \Delta_x) - \langle E_1 \rangle)(E_2(x) - \langle E_2 \rangle) \rangle, \quad (4.1.a)$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций. Корреляция – второй начальный момент, в теории случайных процессов функция корреляции двух процессов определяется следующим образом:

$$K_{1,2}(\Delta_x) = \langle E_1(x + \Delta_x) E_2(x) \rangle = R_{1,2}(\Delta_x) + \langle E_1 \rangle \langle E_2 \rangle. \quad (4.1.b)$$

Для центрированных случайных процессов (полей) функции (и моменты) корреляции и ковариации совпадают.

Коэффициент корреляции $\rho_{1,2} = \frac{K_{1,2}(\Delta_x, \Delta_y)}{K_{1,2}(0, 0)}$. Можно видеть, что

$\rho_{1,2} = \rho_{1,2}(0, 0)$, а для автокорреляционной функции $\rho=1$.

NB! Обратим внимание, что определения 4.1, взятые из теории случайных процессов, предполагают усреднение по ансамблю реализаций.

Введем функцию апертуры (кадрового окна), $c(x,y)$ вырезающую из поля $E(x,y)$ обрабатываемую коррелятором часть $c(x,y)E(x,y)$. Голограмма записана с эталонного фрагмента поля $c(x,y)E_R(x,y)$.

Опознавание осуществляется на основании вычисления функции взаимной корреляции:

$$C(\Delta_x, \Delta_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, y) E(x + \Delta_x, y + \Delta_y) E_R^*(x, y) dx dy. \quad (4.2)$$

NB! Обратим внимание, что в определении (4.2), в отличие от (4.1), отсутствует усреднение.

Поскольку измерения проводятся квадратичным приемником, то нас интересует средняя величина отношения сигнал/помеха по энергии

$$V_0 = \frac{\langle C(0,0) \rangle^2}{\mu^2}, \quad (4.3)$$

где $\langle C(0,0) \rangle^2$ – среднее по ансамблю значение сигнальной функции, в качестве которой выступает ГМ АКФ, а μ^2 – средний квадрат помехи. Под помехой мы будем понимать взаимную корреляцию (или кросс-корреляцию) опознаваемого и всех остальных участков поля.

Математическое ожидание функции взаимной корреляции (4.2) по множеству реализаций (по ансамблю) случайного поля принимает вид

$$\begin{aligned} \langle C(\Delta_x, \Delta_y) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, y) \langle E(x + \Delta_x, y + \Delta_y) E_R(x, y) \rangle dx dy = \\ &= K(\Delta_x, \Delta_y) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, y) dx dy = S_R K(\Delta_x, \Delta_y) \end{aligned}, \quad (4.4)$$

где S_R – площадь опознаваемого изображения в предположении, что функция апертуры равномерна, т.е. $c(x, y) = Const$ в пределах кадрового окна и $c(x, y) = 0$ вне его. Здесь мы воспользовались оговоренной ранее нормировкой на первый момент и определением (4.1.a). Из выражения (4.4) ясно видно, что форма сигнальной функции на выходе коррелятора в среднем повторяет авто-корреляционную функцию поля $K(\Delta_x, \Delta_y)$, а её максимальное значение в среднем описывается следующим образом:

$$\langle C(0,0) \rangle = K(0,0) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, y) dx dy = (\sigma^2 + \langle E_R \rangle \langle E \rangle) S_R = W, \quad (4.5)$$

где W – энергия опознаваемого изображения. Здесь мы специально подчеркнули, что эти выводы имеют силу именно в среднем, так влияние ограниченности апертуры на корреляционную функцию проявляется

отличием так называемой «измеренной корреляционной функции» (ИКФ), т.е. КФ реализации, от «теоретической корреляционной функции» (ТКФ) – корреляционной функции бесконечного процесса или поля. В то время, как для процесса или поля со сложным спектральным составом ТКФ монотонно спадает с ростом своего аргумента Δ , ИКФ характеризуется появлением локальным максимумов и минимумов, а также зависимостью радиуса корреляции от конкретной реализации [1].

Средний по ансамблю квадрат помехи определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x_1, y_1) c(x_2, y_2) \overline{E_R(x_1 + \Delta_x, y_1 + \Delta_y)} E_R(x_1, y_1) \times \right. \\ &\quad \left. \overline{E_R(x_2 + \Delta_x, y_2 + \Delta_y)} E_R(x_2, y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \right\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x_1, y_1) c(x_2, y_2) K^2(x_2 - x_1, y_2 - y_1) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\Delta_x, \Delta_y) K_c(\Delta_x, \Delta_y) d\Delta_x d\Delta_y, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $\overline{E_R(x, y)}$ – часть поля, играющая роль помехи, т.е. часть поля, не записанная на голограмме Фурье, а $K_C(\Delta_x, \Delta_y)$ – функция автокорреляции кадрового окна. Здесь мы использовали свойство взаимно независимых случайных функций:

$$\begin{aligned} &\langle E_1(x + \Delta_x) E_2(x + \Delta_x) E_1(x) E_2(x) \rangle = \\ &= \langle E_1(x + \Delta_x) E_1(x) \rangle \langle E_2(x + \Delta_x) E_2(x) \rangle = K_1(\Delta_x) K_2(\Delta_x), \end{aligned}$$

приняв $E_1(x) = E_R(x)$; $E_2(x) = \overline{E_R(x)}$; $x_2 = x_1 + \Delta_x$, и свойство стационарных случайных функций:

$$\langle E(x_1) E(x_2) \rangle = K(x_1 - x_2).$$

Нетрудно видеть, что если радиус корреляции поля r много меньше размера опознаваемого изображения, то функция автокорреляции кадрового окна $K_C(\Delta_x, \Delta_y)$ мало меняется по сравнению с функцией автокорреляции поля $K_R(\Delta_x, \Delta_y)$. Это положение иллюстрирует рис.4.2 – приведенная пунктиром АКФ окна $K_C(\Delta_x, \Delta_y)$ имеет треугольную форму, а АКФ поля $K_R(\Delta_x, \Delta_y)$ меняется экспоненциально быстро. Тогда выражение (4.6) можно упростить и представить в виде:

$$\begin{aligned} \mu^2 &\approx K_c(0,0) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_R^2(\Delta_x, \Delta_y) d\Delta_x d\Delta_y = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c^2(x, y) dx dy \int_0^{\infty} r K^2(r) dr = \\ &= 2\pi S_R \sigma^4 \int_0^{\infty} r \rho^2(r) dr = 2\pi k S_R \sigma^4 r^2 = 2kW^2 \frac{S_k}{S_R}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где S_R – площадь эталона, $S_k = \pi r^2$ – площадь корреляции, а k – коэффициент, зависящий от функции корреляции поля.

Из (4.7) ясно видно, что среднее квадратичное значение помехи прямо пропорционально энергии опознаваемого изображения и обратно пропорционально отношению линейного размера изображения к радиусу корреляции поля.

Используя выражения (4.5) и (4.7), получим итоговую оценку отношения сигнал/помеха:

$$V_0 \approx \frac{1}{2k} \frac{S_R}{S_k}. \quad (4.8)$$

Таким образом, отношение сигнал/помеха при корреляционном сравнении изображений прямо пропорционально числу зон корреляции поля в площади опознаваемого изображения (эталона). Отсюда следует практический вывод, о котором мы «на пальцах» говорили в курсе ОТИИ – для повышения величины отношения сигнал/помеха есть два пути: увеличение размера эталона и уменьшение радиуса корреляции поля. Последнее может быть достигнуто фильтрацией в частотной плоскости, ослабляющей низкочастотные компоненты в спектре изображения.

Рассмотрим более подробно ряд практически важных случаев.

1. Строчный коррелятор.

Под строчным коррелятором мы будем понимать коррелятор, производящий вычисление ВКФ только по одной координате. В этом случае функция кадрового окна описывается функцией:

$$c(x) = \text{Rect}\left(\frac{x}{2L}\right), \quad (4.9)$$

где L – длина опознаваемой строки. Функция автокорреляции кадрового окна имеет вид, представленный на рис.4.1 пунктиром и описывается следующим образом:

$$R_c(\Delta_x) = 2L\Lambda\left(\frac{\Delta_x}{2L}\right), \quad (4.10)$$

где Λ – треугольная функция.

Максимальное значение сигнальной функции (ГМ АКФ)

$$\langle K(0) \rangle = 2L\sigma^2 = W. \quad (4.11)$$

Средний квадрат помехи

$$\mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R^2(\Delta_x) R_c(\Delta_x) d\Delta_x = 4L \int_0^{\infty} R^2(\Delta_x) \left(1 - \frac{\Delta_x}{2L}\right) d\Delta_x. \quad (4.12)$$

При экспоненциальной корреляционной функции поля, описываемой выражением

$$R(\Delta_x) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\Delta_x}{r}\right), \quad (4.13)$$

выражение для среднего квадрата помехи примет вид

$$\mu^2 = 2L\sigma^4 r \left(1 - \frac{r}{4L}\right) = \frac{W^2 r}{2L} \left(1 - \frac{r}{4L}\right). \quad (4.14)$$

Тогда отношение сигнал/помеха может быть представлено выражением

$$V_0 = 2\frac{L}{r} \left(1 - \frac{r}{4L}\right)^{-1}. \quad (4.15)$$

Таким образом, при достаточно большой величине отношения $\frac{L}{r}$ отношение сигнал/помеха будет пропорционально числу радиусов корреляции поля в длине эталона.

2. Площадной коррелятор, прямоугольная апертура размером $2L_x \times 2L_y$.

Прямоугольное кадровое окно на практике используется чаще всего. Оно может быть описано следующей функцией:

$$c(x, y) = \text{Rect}\left(\frac{x}{2L_x}\right) \text{Rect}\left(\frac{y}{2L_y}\right). \quad (4.16)$$

Максимальное значение сигнальной функции:

$$\langle K(0,0) \rangle = 4L_x L_y \sigma^2 = W, \quad (4.17)$$

а средний квадрат помехи:

$$\mu^2 = 16L_x L_y \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R^2(\Delta_x, \Delta_y) \left(1 - \frac{\Delta_x}{2L_x}\right) \left(1 - \frac{\Delta_y}{2L_y}\right) d\Delta_x d\Delta_y. \quad (4.18)$$

При экспоненциальной функции автоковариации, описываемой выражением

$$R(\Delta_x, \Delta_y) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}}{r}\right),$$

выражение для среднего квадрата помехи примет вид (мы воспользуемся табличными значениями, приведенными в [2]):

$$\begin{aligned} \mu^2 &= 16L_x L_y \sigma^4 \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\Delta_x}{2L_x}\right) \left[\int_{\Delta_x}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{y^2 - \Delta_x}} \exp\left(-\frac{2y}{r}\right) dy - \int_{\frac{2\Delta_x}{r}}^{\infty} y \exp(-y) dy \right] d\Delta_x = \\ &= 16L_x L_y \sigma^4 \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\Delta_x}{2L_x}\right) \left[\Delta_x K_1\left(\frac{2\Delta_x}{r}\right) - \frac{r^2}{8L_x} \exp\left(-\frac{2\Delta_x}{r}\right) - \frac{r\Delta_x}{4L_x} \exp\left(-\frac{2\Delta_x}{r}\right) \right] d\Delta_x = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 16L_x L_y \sigma^4 \left[\frac{r}{4} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{r^3}{8L_y} \Gamma(2) \Gamma(1) - \frac{r^2}{8L_x} + \frac{3r^4}{64L_x L_y} \right] = \\
&= 2\pi L_x L_y \sigma^4 r^2 \left[1 - \frac{r}{\pi L_x} - \frac{r}{\pi L_y} + \frac{3r^2}{8L_x L_y} \right] = W^2 \frac{S_K}{S_R} \left[1 - \frac{r}{\pi L_x} - \frac{r}{\pi L_y} + \frac{3r^2}{8L_x L_y} \right],
\end{aligned}$$

где $K_1(x)$ – цилиндрическая функция мнимого аргумента, $\Gamma(x)$ – гамма-функция. Отсюда, величина сигнал/помеха описывается выражением

$$V_0 = 2 \frac{S_R}{S_K} \left[1 - \frac{r}{\pi L_x} - \frac{r}{\pi L_y} + \frac{3r^2}{8L_x L_y} \right]^{-1}. \quad (4.19)$$

Здесь мы снова видим, что величина отношения сигнал/помеха пропорциональна числу зон корреляции, укладываемых в эталонном изображении, т.е. величине отношения $\frac{S_R}{S_c}$ или, что эквивалентно (с учетом формы кадрового окна), отношению размера изображения к радиусу корреляции $\frac{L}{r}$. Аналогичные результаты были получены и для других форм кадрового окна (круглого) и других функций автокорреляции поля – величины отношения сигнал/помеха во всех случаях пропорциональны числу зон корреляции в эталонном изображении, различия лишь в коэффициентах. Для иллюстрации, на рис.4.4 приведены в логарифмических координатах зависимости величин отношения сигнал/помеха от отношения размера изображения к радиусу корреляции для строчного (1) и площадного (2) корреляторов. Пунктиром показаны прямо пропорциональные зависимости, к которым стремится отношение при увеличении числа радиусов корреляции в размере изображения.

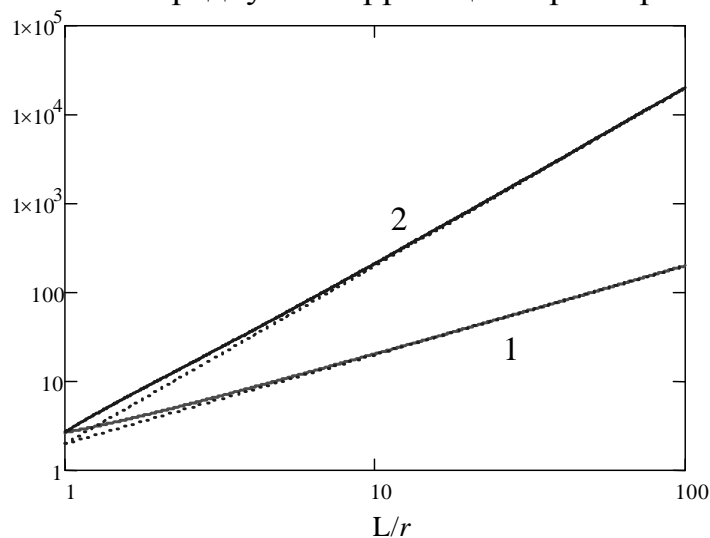


Рис.4.4. Зависимости величины сигнал/помеха от отношения размера изображения к радиусу корреляции для строчного (1) и площадного (2) корреляторов

Отсюда следует важный практический вывод – для увеличения отношения сигнал/помеха при корреляционном сравнении изображений можно использовать два способа:

1. Увеличить размер обрабатываемых изображений;
2. Уменьшить радиус корреляции эталонного изображения.

Поскольку АКФ связана со спектром Винера обрабатываемого изображения преобразованием Фурье, то изменение радиуса корреляции возможно методом пространственной фильтрации в спектральной плоскости – ослаблением, вплоть до полного подавления низких пространственных частот в спектре. При этом, как следует из формулы (4.20), по мере ослабления низких частот величина отношения сигнал/помеха в корреляционной плоскости должна возрастать. На этом основано применение так называемых инверсных голографических фильтров, т.е. голограмм, передаточная функция которых, в отличие от голографического согласованного фильтра, описывается не $H(v) = S^*(v)$,

где $S(v)$ – спектр эталона, а выражением $H(v) = \frac{1}{S(v)}$.

Казалось бы, логика, основанная на зависимости (4.20), может быть продолжена до бесконечности – чем меньше радиус корреляции, тем выше отношение сигнал/помеха. Однако рост отношения сигнал/помеха происходит только до определенного предела, а затем происходит его резкое снижение. Для объяснения этого феномена вспомним, что информация отличается от шума наличием внутренней связности, т.е. внутренней коррелированностью. В отличие от информации, белый (или серый) шум дельта-коррелирован, т.е. составляющие этого процесса (пиксели или отсчеты) никак не связаны друг с другом. Соответственно, по мере уменьшения радиуса корреляции, ГМ АКФ все более и более приближается к δ -функции, что означает разрушение внутренней связности процесса (изображения) и превращение информации в шум.

В связи с тем, что радиус корреляции может быть изменен посредством пространственной фильтрации в спектральной плоскости, вспомним, что в схеме голографии Фурье голограмма – это зарегистрированная картина интерференции плоского опорного пучка с фурье-образом (спектром) эталонного изображения. Рассмотрим процесс записи голограммы Фурье с плоским опорным пучком подробнее.

На рис.4.5 изображены сечения распределения амплитуд по одной из координат сигнального (спектра Фурье $S_R(v)$, аппроксимированного функцией Гаусса) и опорного $R(v) = \text{Const}$ пучков.

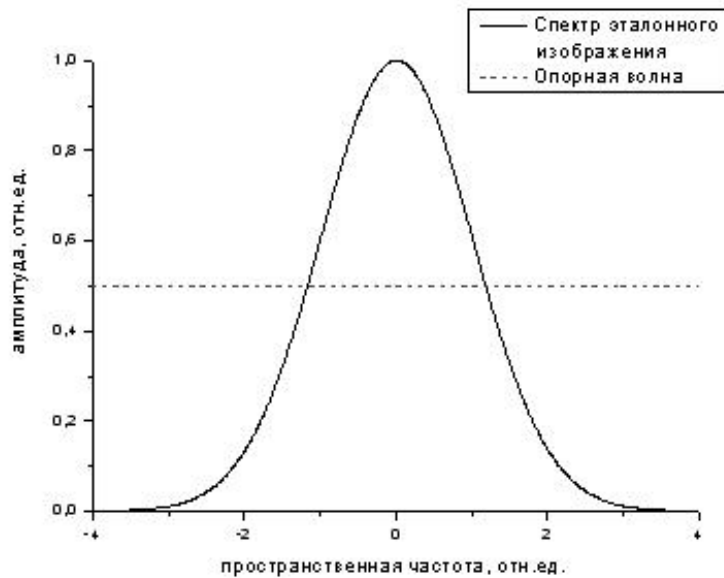


Рис.4.5. Отношение амплитуд сигнального (сплошная линия) и опорного (штрих) пучков при записи голограммы

На рис.4.6 дано распределение амплитуд в картине интерференции этих пучков, а также видность интерференционной картины.

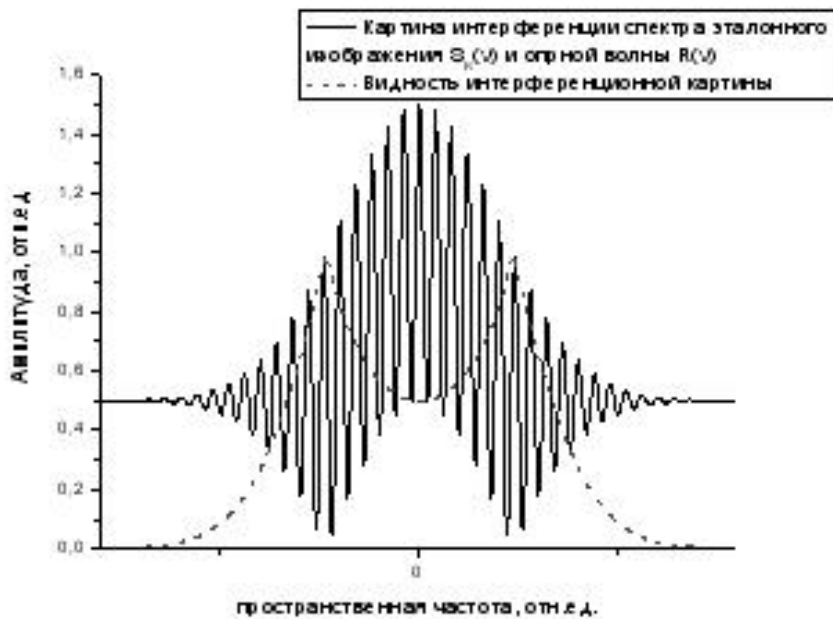


Рис.4.6. Картина интерференции сигнального и опорного пучков. Штриховая линия показывает распределение видности интерференционной картины по пространственным частотам

Эта интерференционная картина, видность которой равна 1 только на частоте равенства локальных амплитуд сигнального и опорного пучков, записывается на регистрирующей среде. Примем для простоты, что

регистрирующая среда амплитудная, т.е. модулируемым параметром является пропускание (амплитудное). Для большинства регистрирующих сред, относящихся к классу негативных, характерна зависимость пропускания от экспозиции, приведенная на рис.4.7. Традиционно выделяют три участка экспозиционной характеристики рис.4.7: а) – недоэкспозиции, б) – рабочий, который часто для простоты считают квазилинейным, а иногда называют просто линейным, и в) – участок переэкспозиции.

Разделение на эти участки производится по критерию чувствительности среды – первой производной зависимости пропускания от экспозиции. В рабочем диапазоне б) чувствительность выше некоторого выбранного порогового значения. А на участках недоэкспозиции и переэкспозиции – ниже.

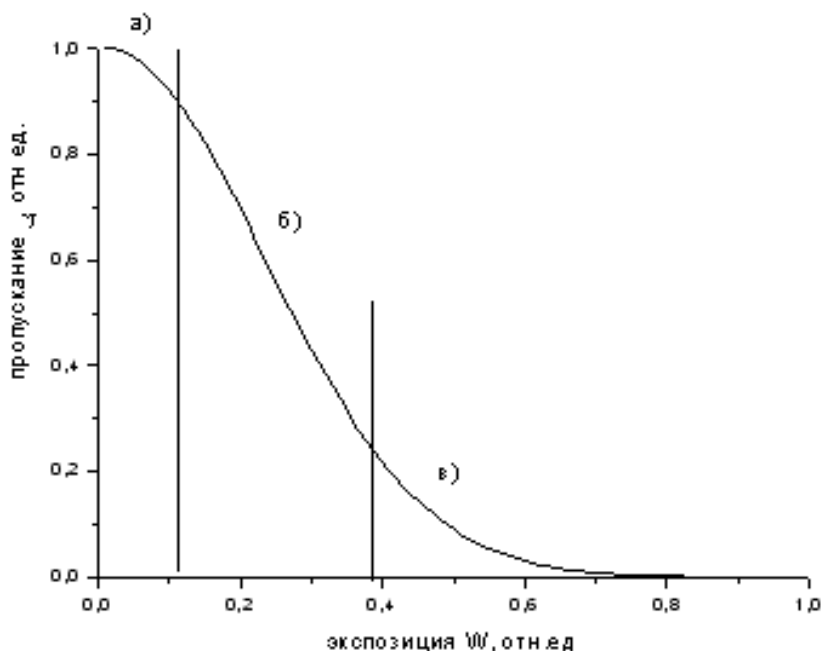


Рис.4.7. Типичная для негативных регистрирующих сред зависимость пропускания от экспозиции

Голограмма, представляющая собой дифракционную решетку, формируется в результате записи интерференционной картины рис.4.6 на регистрирующей среде с экспозиционной характеристикой рис.4.7 – схематически это изображено на рис.4.8. Квазилинейный участок экспозиционной характеристики для наглядности выделен жирной линией.

Фрагменты интерференционных полос, не попавшие в квазилинейный диапазон, запишутся на регистрирующей среде нелинейно. На рис.4.9 приведена зависимость пропускания записанной голограммы от частоты. Серая область в нижней части – поглощение, обусловленное засветкой от части опорного пучка, немодулированной интерференционной картиной.

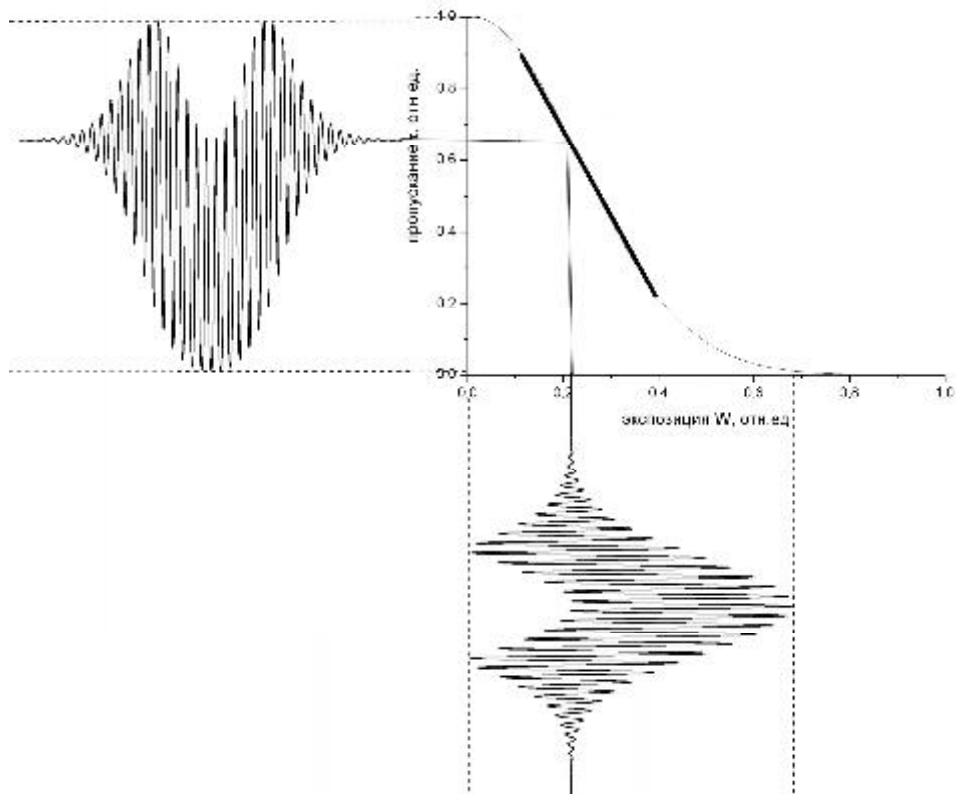


Рис.4.8. Формирование голограммы как дифракционной решетки в результате записи интерференционной картины рис.4.6 на регистрирующей среде с экспозиционной характеристикой рис.4.7

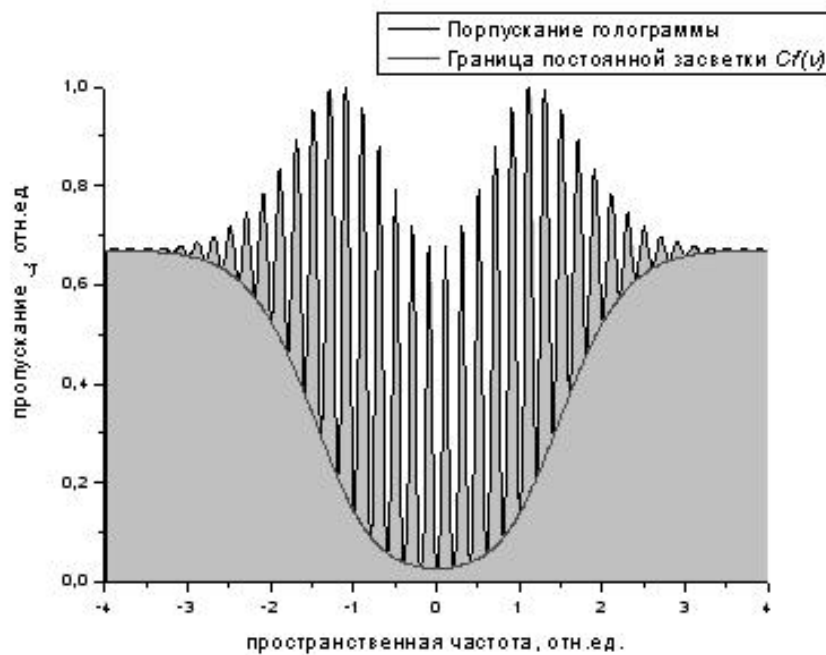


Рис.4.9. Зависимость пропускания от частоты при записи голограммы Фурье

Рассмотрим, что произойдет при восстановлении такой голограммы плоским опорным пучком постоянной по сечению амплитуды $P(v) = Const$. Для удобства учета поглощения в серой области рис.4.9 изменим условия задачи и представим, что голограмма не имеет этой области поглощения, а освещается (восстанавливается) пучком с профилем амплитуды $P'(v) = P(v) - Cf(v)$, где $Cf(v)$ описывает эту область поглощения – иллюстрация дана на рис.4.10.

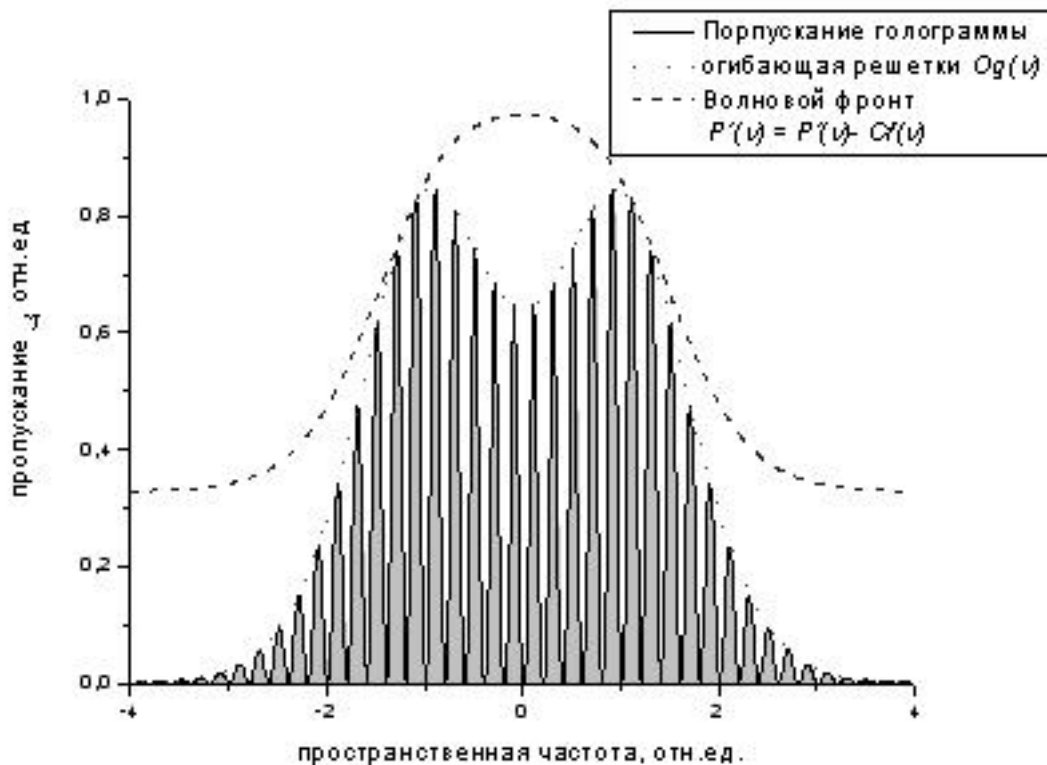


Рис.4.10. Схема восстановления голограммы плоским пучком с распределением амплитуд $P'(v) = P(v) - Cf(v)$

Воспользуемся методом гармонической линеаризации и примем, что решетка имеет синусоидальный профиль пропускания $\tau(v) = t_0 - m \cos(\omega v)$, где $\omega = 2\pi v$, v – частота решетки, $m \leq 1$, т.е.

$$\tau'(v) = Og(v)\tau(v) = Og(v)t_0 + Og(v)m \cos(\omega v),$$

где $Og(v)$ – огибающая решетки.

Решение задачи дифракции волны $P'(v)$ на решетке $\tau'(v)$ хорошо известно [2] и может быть представлено выражением

$$\begin{aligned} H(v) &= P'(v)\tau'(v) = \\ &= P'(v)Og(v)t_0 + P'(v)Og(v)\frac{m}{2}\exp(i\omega v) + P'(v)Og(v)\frac{m}{2}\exp(-i\omega v) \end{aligned}$$

где $P'(v)Og(v)t_0$ – 0-й порядок дифракции, $P'(P'(v)Og(v)\frac{m}{2}\exp(i\omega v))$ – -1-й порядок, $(P'(v)Og(v)\frac{m}{2}\exp(-i\omega v))$ – +1-й порядок.

Интересующая нас зависимость дифракционной эффективности от пространственной частоты для +1 порядка дифракции дана на рис.4.11.

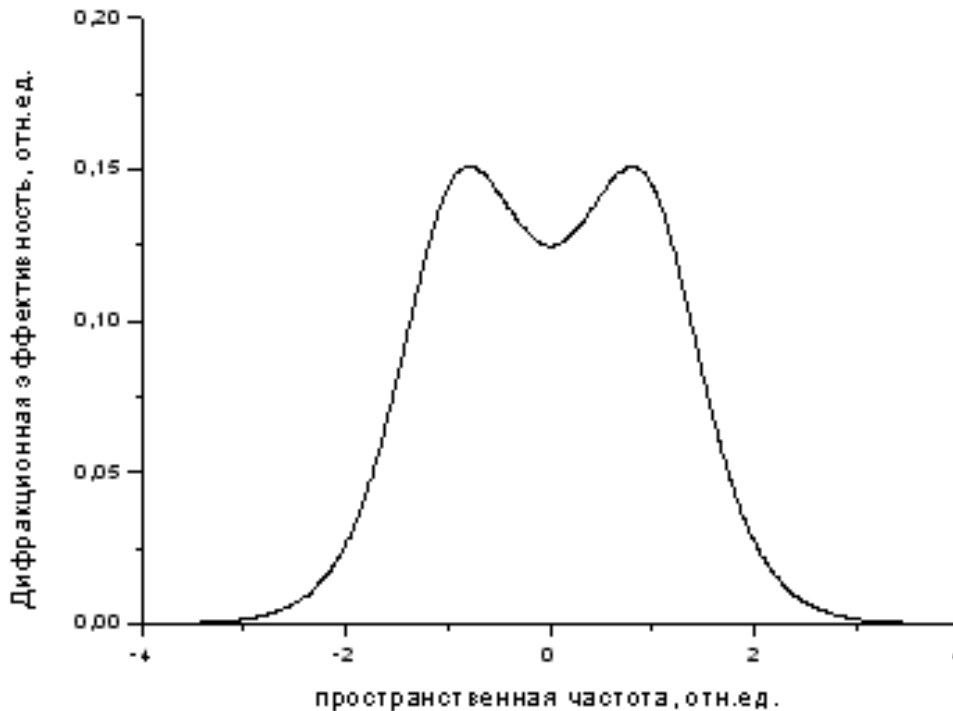


Рис.4.11. Зависимость локальной дифракционной эффективности от частоты в +1 порядке дифракции для решетки с пропусканием $\tau'(v)$

Чтобы найти аналогичную зависимость для исследуемой голограммы как дифракционной решетки, необходимо помножить дифракционную эффективность решетки с синусоидальным профилем штриха на коэффициент K , равный отношению на общей частоте v' Фурье-спектров функций пропускания исследуемой решетки $g_{Enorm}(v)$ и решетки с синусоидальным профилем штриха $\tau_{Enorm}'(v)$, нормированных по энергии:

$$K = \frac{F\{g_{Enorm}(v)\}}{F\{\tau_{Enorm}'(v)\}}.$$

Отсюда получим локальную зависимость дифракционной эффективности голограммы от частоты, приведенную на рис.4.12. Несколько большая по сравнению с рис.4.11 величина дифракционной

эффективности обусловлена увеличением дифракционной эффективности при нелинейной записи.

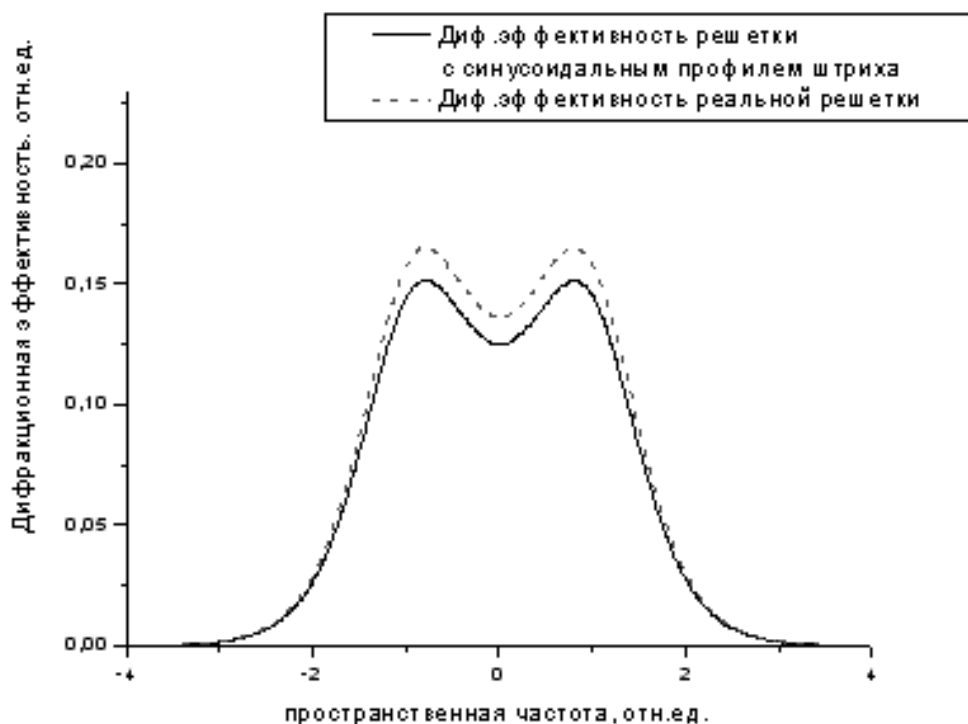


Рис.4.12. Зависимости локальной дифракционной эффективности голограммы, записанной при отношениях амплитуд пучков, приведенных на рис.4.5, от частоты для дифракционной решетки с синусоидальным профилем штриха (сплошная кривая) и реальной с учетом нелинейности записи голограммы (пунктир)

Поскольку мы использовали классическую экспозиционную характеристику регистрирующих сред – зависимость пропускания от экспозиции, данную на рис.4.7, а физическим механизмом работы голограммы является дифракция, то представляет интерес зависимость дифракционной эффективности, т.е. отношения амплитуды (или интенсивности) волны, дифрагировавшей в интересующий нас порядок дифракции, к амплитуде (или, соответственно, интенсивности) восстанавливающей голограмму волны от условий записи. Соответствующие кривые приведены на рисунках 4.13 и 4.14.

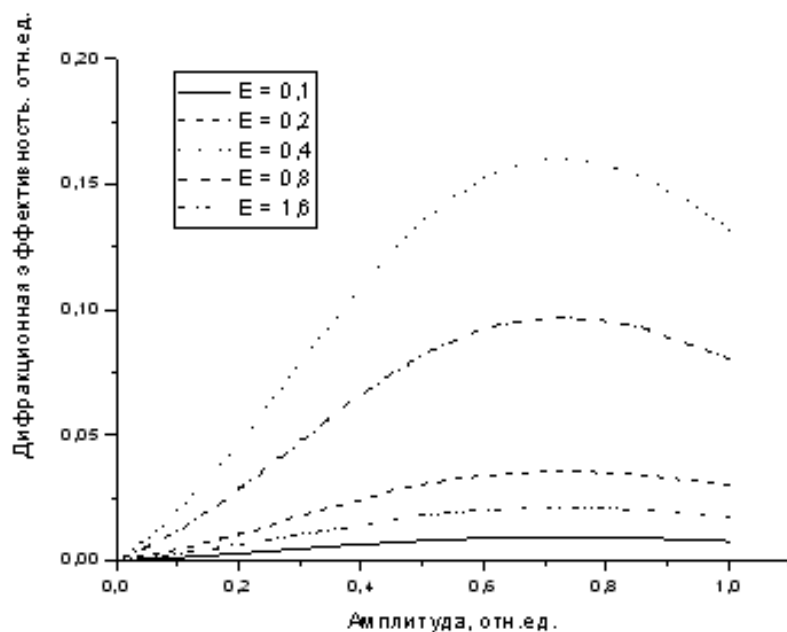


Рис.4.13. Зависимость дифракционной эффективности голограммы от спектра эталонного изображения при различных экспозициях

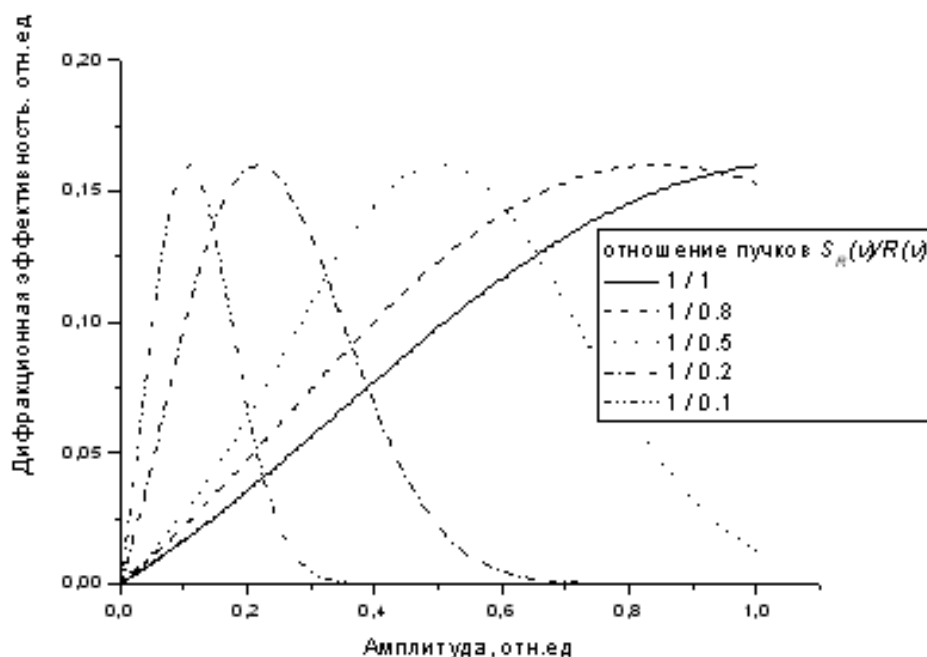


Рис.4.14. Зависимость дифракционной эффективности голограммы от амплитуды спектра эталона при различных отношениях $\frac{S_R(v)}{R(v)}$

Обратим внимание, что приведенная на рис.4.12 зависимость локальной дифракционной эффективности голограммы от частоты является передаточной характеристикой схемы голографии Фурье для +1

порядка дифракции. Напомним, что модель коррелятора Ван дер Люгта предполагает, что голограмма Фурье описывается выражением

$$H(v_x, v_y) \propto S_R^*(v_x, v_y),$$

т.е. её зависимость локальной дифракционной эффективности от частоты теоретически пропорциональна спектру Фурье эталонного изображения.

Как видно из рис.4.12, это имеет место только для ограниченного диапазона пространственных частот, выше частоты равенства амплитуд опорного и сигнального пучков при записи голограммы. В области частот ниже частоты равенства амплитуд зависимость видности интерференционной картины от частоты не пропорциональна спектру эталона. Если диапазон частот, в котором видность интерференционной картины пропорциональна спектру (согласована со спектром) попадает в квазилинейный участок зависимости пропускания от экспозиции на рис.4.7., то он записывается квазилинейно. В области частот ниже частоты равенства имеет место переэкспозиция и, как следствие, сначала насыщение (кривая на рис.4.12 становится более полой), а потом и «провал» дифракционной эффективности в области низких частот.

Зависимость, приведенная на рис.4.12, характерна для голограмм Фурье, условно называемых высокочастотными (рис.4.15), поскольку в диапазоне низких пространственных частот такая голограмма, во-первых, не согласована, а во-вторых – частоты не записаны. При записи «высокочастотной» голограммы Фурье необходимо выбирать условия записи таким образом, чтобы правой границе рабочего участка на рис. 4.7 соответствовала точка равенства амплитуд сигнального и опорного пучков.

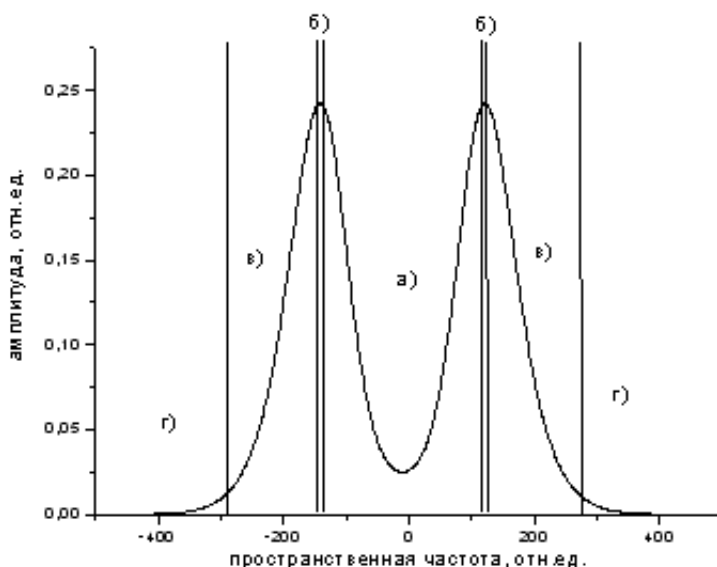


Рис. 4.15. Зависимость дифракционной эффективности от пространственной частоты, «высокочастотная» голограмма, субдиапазоны: а) переэкспозиции и инверсный; б) насыщения; в) согласованный; г) недоэкспозиции

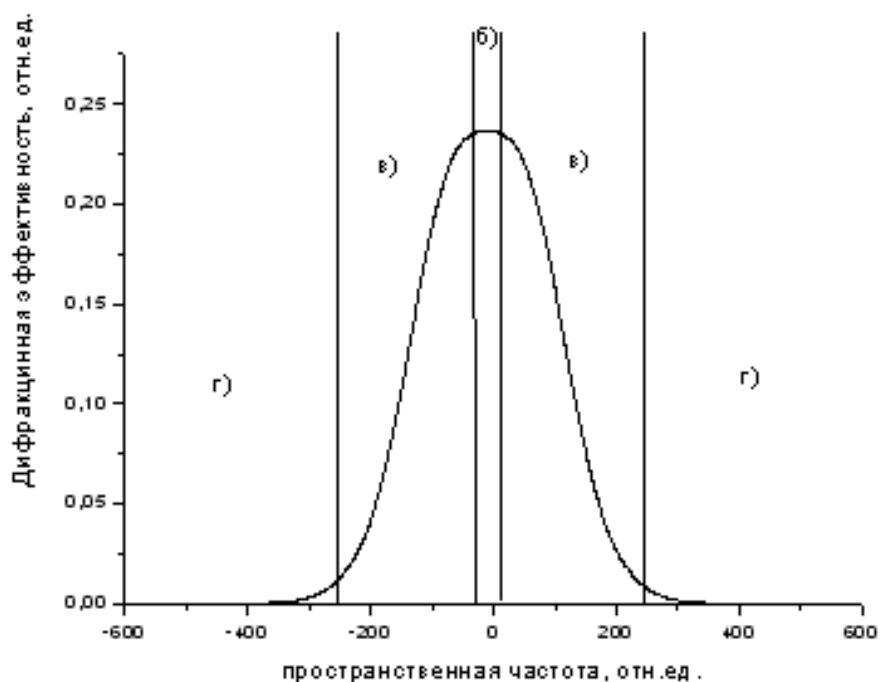


Рис. 4.16. Зависимость дифракционной эффективности от пространственной частоты, «низкочастотная» голограмма, субдиапазоны: б) насыщения; в) согласованный; г) недоэкспозиции

Таким образом, в силу свойства ограниченности динамического диапазона регистрирующих сред, в том числе голографических, при записи реальной голограммы Фурье неизбежно возникает дополнительная полосовая фильтрация. В результате голограмма оказывается согласованной со спектром эталонного изображения только в ограниченном частотном диапазоне. Этот механизм и может быть использован для оптимизации величины отношения сигнал-помеха в корреляционной плоскости.

Литература к Теме 4.

1. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 280 С.
2. Шубников Е.И., Отношение сигнал/помеха при корреляционном сравнении изображений. Оптика и спектроскопия, 1987, т.62., вып.2., стр.450 – 456.
3. А.В. Павлов Методы обработки информации в фотонике. Т.1. Основы оптических информационных технологий, использующих преобразование Фурье и метод голографии Изд.3-е, дополненное. – СПб: Университет ИТМО, 2017. – 84 с.

Тема 5. Основы вейвлет-анализа [1-5]

Методы обработки информации, рассмотренные в предыдущих разделах, основаны на преобразовании Фурье. Преобразование Фурье дает мощный математический аппарат, позволяющий эффективно решить ряд практически важных задач. И, самое главное, преобразование Фурье относится к категории физически обоснованных математических моделей, так как оно физически реализуется различными устройствами. В частности, в оптике, как мы видели, преобразование Фурье реализуется положительной линзой.

Суть преобразования Фурье заключается в представлении любой квадратично интегрируемой функции с конечной энергией (нормой) в виде бесконечной суммы гармонических составляющих. Под гармоникой, напомним, понимается бесконечная синусоида. Традиционный спектральный анализ, основанный на измерении спектра мощности, дает информацию о частоте, но не о локализации. Поэтому традиционный фурье-анализ хорош для анализа стационарных процессов.

При спектральном анализе существенно нестационарного в локальной области процесса, т.е. процесса с какой-либо локальной особенностью, затруднено получение информации о локализации изучаемой особенности. Действительно, гармоники – бесконечные функции. В точке локализации особенности их сумма должна дать эту особенность, а в стороне от неё гармоники при сложении должны взаимно уничтожить друг друга. Для этого гармоники должны быть смещены друг относительно друга определенным образом, это смещение представлено спектром фаз. Но при измерении спектра мощности информация о спектре фаз теряется.

Рассмотрим «рафинированный» случай особенности – дельта-функцию. Её спектр постоянен, поэтому для того, чтобы представить дельта-функцию в спектральной области, необходимы все компоненты спектра – от нулевой частоты до бесконечной. Потеря каких-либо спектральных компонент сразу ведет к изменению восстановленной функции. В частности, потеря высокочастотных компонент спектра ведет к преобразованию дельта-функции, не имеющей по определению ширины, в функцию с некоторой шириной. В оптике этот процесс хорошо известен под названием дифракционного ограничения разрешения.

Процессов с локальными особенностями в реальности встречается достаточно много – это и геофизическая информация, и процессы обтекания препятствий воздушными и жидкостными потоками, процессы горения, распространения и взаимодействия ультракоротких импульсов, сжатия изображений и многие другие. Причем именно процессы с локальными особенностями представляют в последнее время наибольший интерес с точки зрения развития высоких технологий.

В качестве примера на рис.5.1 приведены два процесса – гармоническое колебание и оно же, но со сбоем по фазе в точке 400. Это и есть

особенность. На рис.5.2 даны спектры мощности этих процессов – из их сравнения видно, что второй процесс не является «чистым» гармоническим колебанием, но локализовать сбой по спектру мощности невозможно – информация о локализации содержится в спектре фаз.

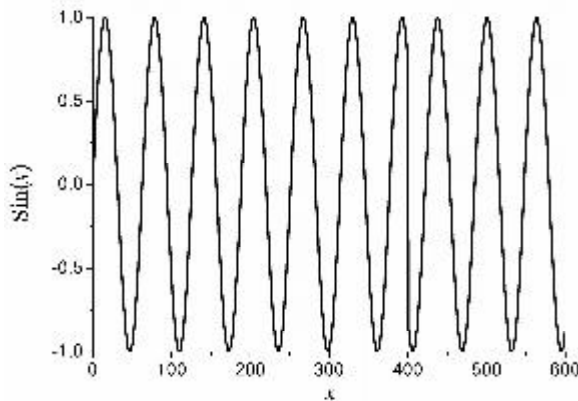


Рис.5.1. Пример процесса с особенностью – синусоида со сбоем фазы в точке $x = 400$ [4]

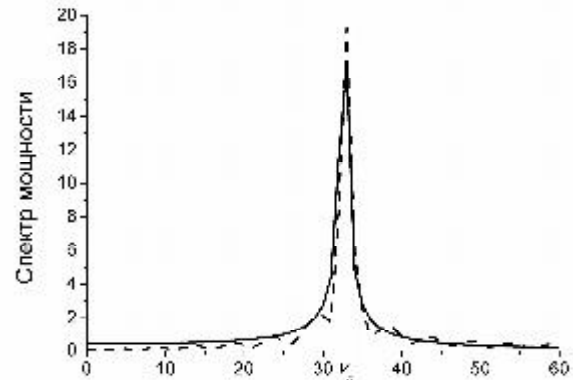


Рис.5.2. Спектры мощности гармоника (сплошная) и штрих – гармоника со сбоем фазы [4]

Проблема анализа процессов с локальными особенностями частично снимается применением так называемого «оконного преобразования Фурье», но только частично. Наиболее мощный инструмент дает вейвлет-анализ, обеспечивающий получение одновременно как частотной, так и пространственной информации об исследуемом объекте.

На рис.5.3 приведен WAVE-вейвлет (что означает этот термин, мы рассмотрим ниже), а на рис.5.4 и 5.5 – результаты поиска особенности процесса по этому вейвлету для двух масштабов. На рис.5.4.а дан WAVE-вейвлет, не очень похожий на искомую особенность – в результате на рис.5.4.б особенность процесса видна ничуть не лучше, чем на исходном рис.5.1. На рис.5.5.а WAVE-вейвлет масштабирован так, что он похож на искомую особенность – результат на рис.5.5.б в комментариях не нуждается.

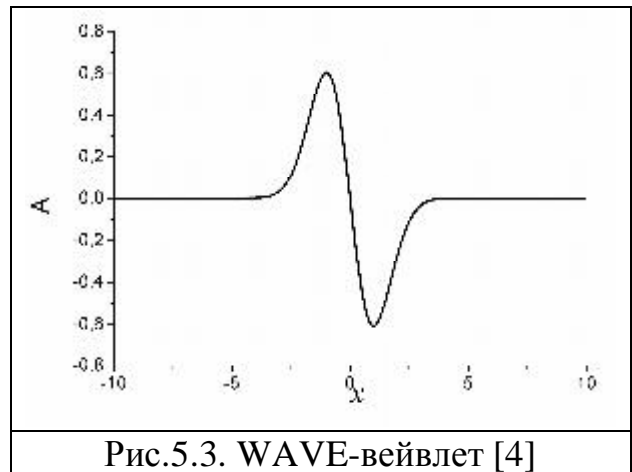


Рис.5.3. WAVE-вейвлет [4]

Если же мы попробуем использовать другие вейвлеты для поиска этой особенности процесса, то результат будет не столь нагляден. Например, на рис.5.6 и рис.5.7 приведены примеры, полученные при использовании вейвлетов Хаара и DOG, соответственно. Сбой по фазе на этих графиках виден, но ... картинка качественно от исходной не отличается. Для аппаратной реализации безусловно предпочтительней первый пример, поскольку задача детектирования локального максимума амплитуды с точки зрения технической не нова и методы её решения хорошо известны.

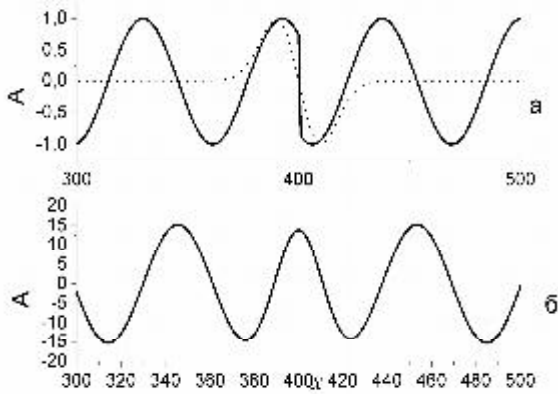


Рис.5.4. Неудачно подобранный по масштабу WAVE-вейвлет и результат его использования [4]

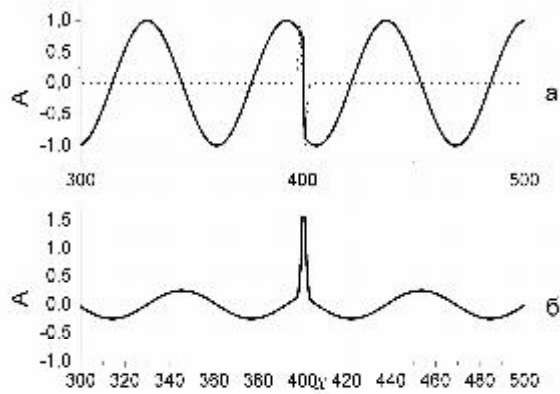


Рис.5.5. Удачно подобранный по масштабу WAVE-вейвлет и результат его использования [4]

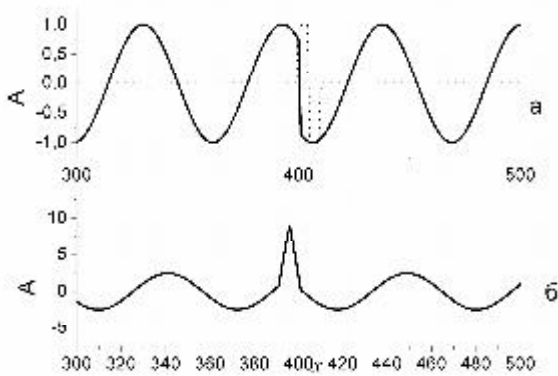


Рис.5.6. Вейвлет Хаара и результат его использования для поиска особенности [4]

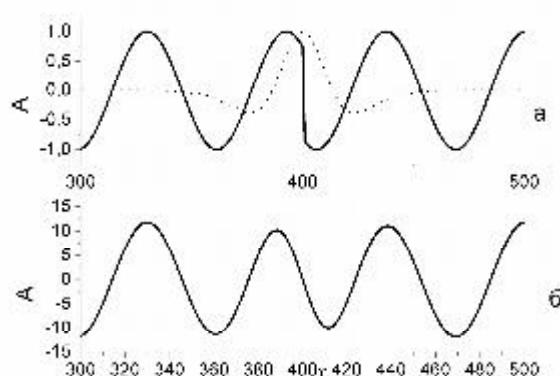


Рис.5.7. DOG-вейвлет и результат его использования для поиска особенности [4]

Термин «вейвлет» был введен в научный оборот в середине 80-х годов Гроссманом и Морле в связи с анализом акустических и сейсмических сигналов. [1] В русскоязычной литературе после нескольких попыток использовать тот или иной русский аналог или адекватный перевод (маленькая волна, волновой пакет, всплеск) стало общепринятым использование термина «вейвлет». [1-4] Основная идея вейвлет-анализа заключается в том, чтобы для поиска локальной особенности использовать разложение по функциям, похожим на искомую особенность, т.е. также хорошо локализованным. Такой подход предполагает представление функции одной координаты в виде функции двух координат – пространственной и масштабной.

Рассмотрение вейвлет-анализа проведем, опираясь на уже изученное нами преобразование Фурье.

Пусть $L^2(0, 2\pi)$ – пространство квадратично интегрируемых функций с конечной энергией (т.е. квадратичной мерой или мерой энергии):

$$\|E\|_2^2 = \langle E(x), E(x) \rangle = \int_0^{2\pi} E(x), E^*(x) dx < \infty, x \in (0, 2\pi). \quad (5.1)$$

Таким образом, мы определили $E(x)$ как кусочно-непрерывную функцию на $(0, 2\pi)$. Функция $E(x)$ может быть периодически расширена и определена на всей оси $R(-\infty, \infty)$ таким образом, что

$$E(x) = E(x - 2\pi), x \in R. \quad (5.2)$$

Здесь координата x может быть как временной, так и пространственной, равно как $E(x)$ может быть функцией не одной, а двух переменных. Таким образом, мы определили функцию (5.2) как 2π периодическую функцию. Как мы знаем из курса математики, любая квадратично интегрируемая 2π периодическая функция может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$E(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \exp(jnx) \quad (5.3)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(x) \exp(-jnx) dx$$

Как следует из (5.3), ортонормированный базис пространства $L^2(0, 2\pi)$ образуется масштабированием единственной функции $\exp(jx)$, т.е. базис образуют функции

$$\exp(jnx), n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

Теперь введем пространство $L^2(R)$ функций $E(x)$, определенных на всей действительной оси $R(-\infty, \infty)$ и обладающих конечной энергией (нормой):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |E(x)|^2 dx < \infty. \quad (5.5)$$

Рассмотрим функциональные пространства $L^2(0, 2\pi)$ и $L^2(R)$. Из (5.5) следует, что локальное среднее значение каждой функции, принадлежащей $L^2(R)$, должно стремиться к нулю на бесконечности. Этому требованию синусоида не удовлетворяет. Следовательно, семейство функций вида (5.4), т.е. синусоид, не может быть базисом пространства $L^2(R)$.

Введем некоторую функцию $\phi(x)$, удовлетворяющую условию (5.5). Более того, введем требование, чтобы функция $\phi(x)$ была хорошо локализованной, т.е. быстро стремилась к нулю. Для того, чтобы эта локализованная функция могла использоваться в качестве функции,

порождающей базис разложения, необходим механизм, позволяющий покрыть этими функциями всю ось $R(-\infty, \infty)$. Простейший вариант покрытия – сдвиг базисной функции вдоль оси, точнее, система сдвигов (или переносов) функции $\phi(x)$ вдоль оси $R(-\infty, \infty)$. Для простоты можно принять, что сдвиги будут целыми, тогда получим набор функций $\phi(x - \Delta)$, где $\Delta = \dots -1, 0, 1, \dots$. Таким образом, смещая функцию $\phi(x - \Delta)$ вдоль оси, т.е. придавая Δ различные значения, мы можем решить задачу определения пространственной локализации некоторой особенности исследуемого процесса, похожей на функцию $\phi(x)$. Обратим внимание на то, что искомая особенность процесса и функция $\phi(x)$ предполагаются похожими. Действительно, если мы знаем, что именно мы ищем, т.е. предполагаем форму особенности процесса, то проводим поиск, сравнивая исследуемую реализация процесса с той формой (сигналом), которую мы ищем. Соответственно, и в качестве функции, образующей базис разложения, целесообразно выбрать функцию, похожую на искомую особенность.

Далее, нам необходим механизм не только пространственного, но также и частотного анализа – искомые особенности процесса могут различаться масштабом. Для этого введем в дополнение к сдвигу также и масштабирование аргумента функции, которое, опять-таки для простоты, представим в виде целых степеней двойки, т.е. $\phi(2^i x - \Delta)$, где i и Δ - целые числа. В результате, имея единственную функцию $\phi(x)$ и применяя к ней дискретные масштабные преобразования $\frac{1}{2^i}$ и сдвиги $\frac{\Delta}{2^i}$, мы можем покрыть семейством полученных функций $\{\phi_{i\Delta}\}$ $\phi_{i\Delta}(x) = 2^{i/2} \phi(2^i x - \Delta)$ как всю частотную, так и всю пространственную оси.

Обратим внимание, что если $E(x)$ – функция одной переменной, то её представление в виде семейства функций $\{\phi_{i\Delta}\}$ будет определено уже на плоскости, образуемой осями i (масштаб) и Δ (сдвиг или пространственная локализация). Т.е., как мы и указали во введении к теме, речь идет о преобразовании функции одной переменной в функцию двух переменных.

Из определения квадратичной нормы, т.е.

$$\begin{aligned} \|\phi\|_2 &= \langle \phi, \phi \rangle^{1/2}, \\ \langle \phi, \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \phi^*(x) dx \end{aligned} \tag{5.6}$$

следует, что имеет место соотношение

$$\|\phi(2^i x - \Delta)\|_2 = 2^{-i/2} \|\phi(x)\|_2. \tag{5.7}$$

Иными словами, если функция $\phi(x) \in L^2(R)$ имеет единичную норму, то и все функции семейства $\{\phi_{i\Delta}\}$ также нормированы на единицу.

Если семейство функций $\{\phi_{i\Delta}\}$, определенное соотношением $\phi_{i\Delta}(x) = 2^{i/2} \phi(2^i x - \Delta)$, где i и Δ - целые числа, удовлетворяет условию

$$\langle \phi_{i\Delta}, \phi_{kE} \rangle = \delta_{i\Delta}, \delta_{kE}, \quad (5.8)$$

и каждая функция $\phi(x) \in L^2(R)$ может быть представлена в виде равномерно сходящегося в $L^2(R)$ ряда, т.е. представляет собой ортонормированный базис пространства $L^2(R)$, то функция $\phi(x) \in L^2(R)$ ортогональна.

Функций, удовлетворяющих вышеприведенным условиям и подпадающих под определение вейвлета как «маленькой волны», может быть много. Задача исследователя – выбрать функцию, наилучшим образом соответствующую исследуемому процессу, явлению. Таким образом, вейвлет-анализ дает, по сравнению с анализом Фурье, большую гибкость в выборе инструмента исследования или представления.

Понятие вейвлета позволяет выбрать либо придумать конкретный вид функции $\phi(x) \in L^2(R)$, наиболее подходящий для решения данной задачи.

Построим базис пространства $L^2(R)$ посредством непрерывных переносов и масштабирования вейвлета $\phi(x) \in L^2(R)$ с произвольными значениями коэффициента масштабирования i и параметра сдвига Δ :

$$\phi_{i\Delta}(x) = |i|^{-1/2} \phi\left(\frac{x-\Delta}{i}\right), \quad i, \Delta \in R, \quad \phi \in L^2(R). \quad (5.9)$$

Используя базис (5.9), введем, по аналогии с преобразованием Фурье, интегральное вейвлет-преобразование:

$$\begin{aligned} W_\phi(E(x)) &= W_\phi(i, \Delta) = |i|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \phi^*\left(\frac{x-\Delta}{i}\right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \phi_{i,\Delta}^*(x) dx \end{aligned} \quad (5.10)$$

Таким образом, мы представили функцию $E(x)$ в виде суммы вейвлетов $\phi_{i,\Delta}(x)$ разного масштаба i и сдвига Δ .

Определение вейвлета

Введем определение R-функции. Функция $\phi(x) \in L^2(R)$ называется R-функцией, если базис $\{\phi_{i\Delta}\}$, определенный выражением (5.9), является базисом Рисса в том смысле, что существуют две константы A и B :

$$0 < A \leq B < \infty,$$

для которых соотношение

$$A \left\| \{c_{i,\Delta}\} \right\|_2^2 \leq \left\| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{\Delta=-\infty}^{\infty} c_{i,\Delta} \phi_{i,\Delta} \right\|_2^2 \leq B \left\| \{c_{i,\Delta}\} \right\|_2^2 \quad (5.11)$$

имеет силу при любой ограниченной и дважды квадратично суммируемой последовательности $\{c_{i,\Delta}\}$:

$$\left\| \{c_{i,\Delta}\} \right\|_2^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{\Delta=-\infty}^{\infty} \{c_{i,\Delta}\} \{c_{i,\Delta}^*\} < \infty, \quad (5.12)$$

где $\{c_{i,\Delta}\}$ – коэффициенты разложения функции $E(x)$ в ряд по вейвлетам, определенным выражением (5.10):

$$c_{i,\Delta} = W_{\phi} \left(\frac{1}{2^i}, \frac{\Delta}{2^i} \right). \quad (5.13)$$

Тогда вейвлет можно определить как любую локализованную R -функцию $\phi(x) \in L^2(R)$, если для неё существует функция $\phi^*(x) \in L^2(R)$, которую будем называть парой или двойником, такая, что выполняется следующая пара условий:

$$\begin{aligned} \phi_{i\Delta}(x) &= 2^{i/2} \phi(2^i x - \Delta) \\ \phi^{i\Delta}(x) &= \phi_{i\Delta}^*(x) = 2^{i/2} \phi^*(2^i x - \Delta), \quad i, \Delta \in I \end{aligned} \quad (5.14)$$

Перечислим некоторые признаки вейвлета:

1. Локализация. В отличие от преобразования Фурье, вейвлет хорошо локализован не только в частотном пространстве, но и во временном (или пространственном).
2. Нулевое среднее:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 0. \quad (5.15)$$

3. Ограниченность:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx < \infty. \quad (5.16)$$

Свойства локализации и ограниченности могут быть совместно выражены следующим образом:

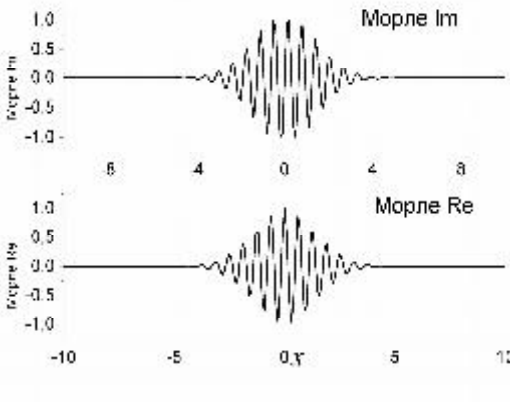
$$|\phi(x)| < (1 + |x|^n)^{-1}. \quad (5.17)$$

4. Автомодельность базиса или свойство самоподобия – поскольку все вейвлеты базиса получаются из порождающего их вейвлета посредством масштабирования и сдвига, то и являются его масштабированными и сдвинутыми копиями.

Некоторые, наиболее часто встречающиеся примеры вейвлетов приведены в табл.5.1 Понятие вейвлета позволяет либо выбрать из уже известных, либо придумать самому конкретный вид функции $\phi(x) \in L^2(R)$, наиболее подходящий для решения данной задачи.

Таблица.5.1. Примеры вейвлетов

Название	Формула	Графическое изображение
Вейвлет Хаара (Haar)	$\phi^H(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{if } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, & \text{if } x < 0, x \geq 1 \end{cases}$	
Французская шляпа (French hat)	$y(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \text{if } \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ 0 & \text{if } x > 1 \end{cases}$	
DOG-вейвлет (Difference of Gaussians)	$z(x) := \exp\left[-\frac{(x)^2}{2}\right] - 0.5 \exp\left[-\frac{(x)^2}{8}\right]$	
WAVE-вейвлет	$\underline{\underline{m}}(x) := \frac{d}{dx} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$	

Вейвлет Морле	$\psi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{a^2}\right) \cdot \left[\exp(iw_0 t) - \exp\left(-\frac{w_0^2 a^2}{4}\right) \right]$ <p>Его образ Фурье</p> $\Psi(w) = a\sqrt{\pi} \left[\exp\left(-\frac{a^2(w_0 - w)^2}{4}\right) - \exp\left(-\frac{a^2(w_0 + w)^2}{4}\right) \right]$	 <p>Мнимая и действительная части вейвлета Морле</p>
------------------	---	--

Ниже приведем более полную таблицу аналитических описаний, классифицировав основные вейвлеты по ряду признаков.

Таблица 5.2.

Вейвлеты	Аналитическая запись $\psi(t)$	Спектральная плотность $\Psi(w)$
Вещественные непрерывные базисы		
Гауссовы вейвлеты		
Вейвлет первого порядка – WAVE вейвлет	$t \cdot \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right]$	$(iw) \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \exp\left[-\frac{w^2}{2}\right]$
Вейвлет второго порядка – МНАТ – вейвлет	$(1 - t^2) \cdot \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right]$	$(iw)^2 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \exp\left[-\frac{w^2}{2}\right]$
Вейвлет n-го порядка	$(-1)^m \frac{d^n}{dt^n} \left[\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \right],$	$(-1)^n \cdot (iw)^m \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right)$
DOG – вейвлет	$\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$	$\sqrt{2\pi} \left[\exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) - \exp(-2w^2) \right]$
LP – Littlewood & Paley	$(\pi \cdot t)^{-1} (\sin 2\pi t - \sin \pi t)$	$\begin{cases} (2\pi)^{-1/2}, \pi \leq t \leq 2\pi \\ 0, \text{ в других случаях} \end{cases}$

Вещественные дискретные базисы			
НААР вейвлет	-	$\begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq t \leq 1 \\ 0, & t < 0, t > 1 \end{cases}$	$i \exp\left(\frac{iw}{2}\right) \frac{\sin^2\left(\frac{w}{4}\right)}{\frac{w}{4}}$
FNAT вейвлет	-	$\begin{cases} 1, & t \leq 1/3 \\ -1/2, & 1/3 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$	$\frac{4}{3} \frac{\sin^3\left(\frac{w}{3}\right)}{\frac{w}{3}}$
Комплексные базисы			
Вейвлет Морле		$\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \exp[iw_0 t]$	$a\sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{a^2(w_0 - w)^2}{4}\right)$
Вейвлет Пауля		$\Gamma(m+1) \frac{i^m}{(1-it)^{m+1}}$	$\Theta(w)(w)^m \exp(-w)$

Некоторые примеры применения вейвлет-анализа.

Поскольку вейвлет-анализ дает не только информацию о спектральном составе исследуемого процесса, как классический анализ Фурье (по спектру мощности), но также и информацию об изменении спектрального состава во времени или пространстве, то он нашел применение в первую очередь при анализе нестационарных процессов. Результат вейвлет-анализа часто называют вейвлет-спектром или масштабно-временным спектром. Поскольку вейвлет-спектр функции от одной координаты представляет собой функцию двух координат, то часто он изображается в виде проекции этой трехмерной поверхности на плоскость с изображением изолиний, как это представлено на рис.5.8. Картину, составленную из линий, изображающих экстремумы этих поверхностей, приведенную на рис.5.8.в, принято называть скелетом. На рис.5.8.б темные области соответствуют положительным, а светлые – отрицательным значениям.

Рассмотрим некоторые простые случаи для того, чтобы наглядно увидеть сильные стороны вейвлет-анализа. На рис.5.9 и 5.10 приведены разные случаи сигнала – суммы двух синусоид, различающихся по частоте.

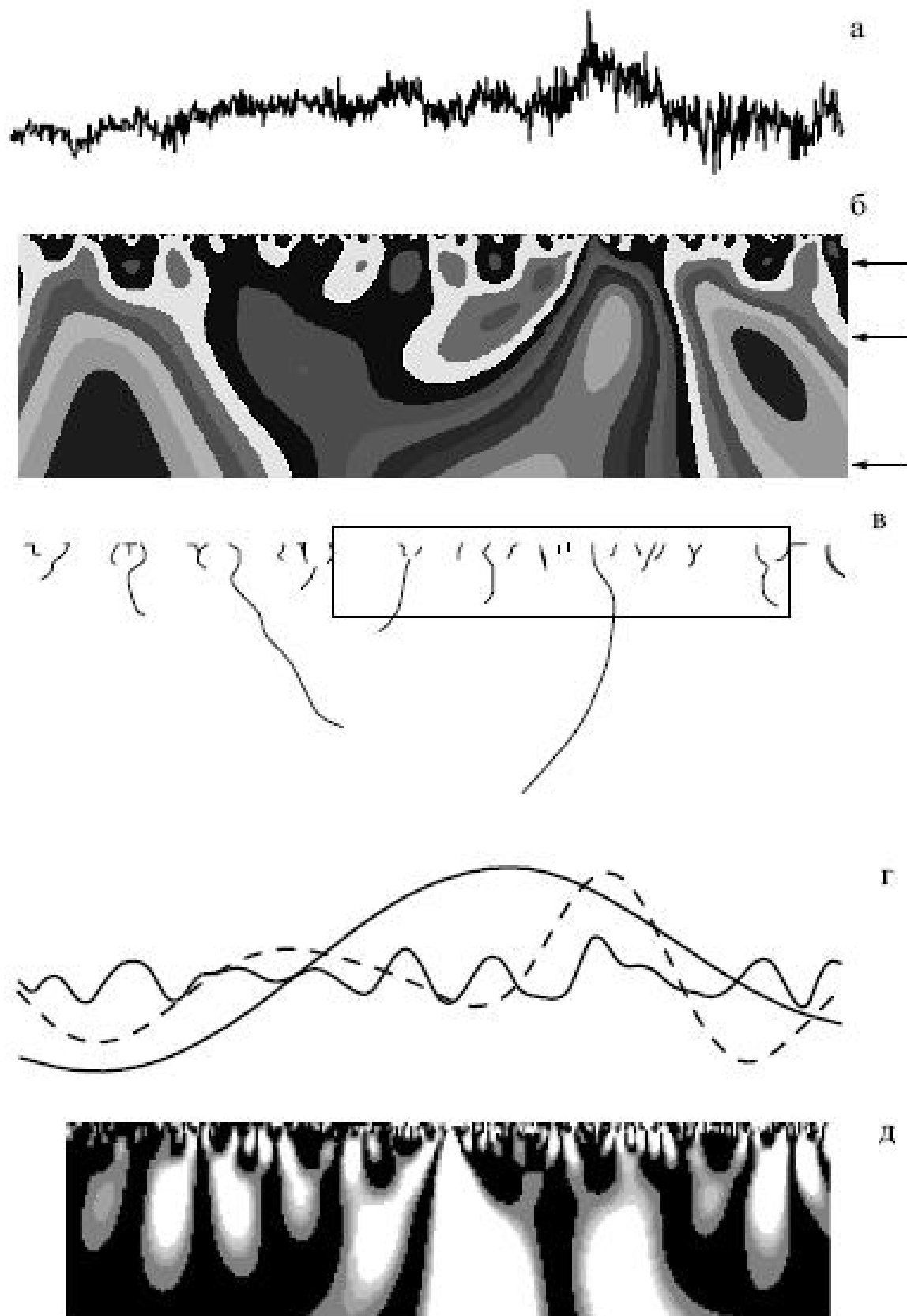


Рис.5.8. Временной ряд потоков ионов солнечного ветра (5.8.а), его вейвлет-спектр (5.8.б.) при разложении по МНАТ-вейвлету, его скелетон (5.8.в.), зависимость коэффициентов вейвлет-разложения от времени при значениях масштаба, отмеченных стрелками (5.8.г.) и распределение плотности энергии для фрагмента в рамке на 5.8.в. (5.6.е.), копия из [1]

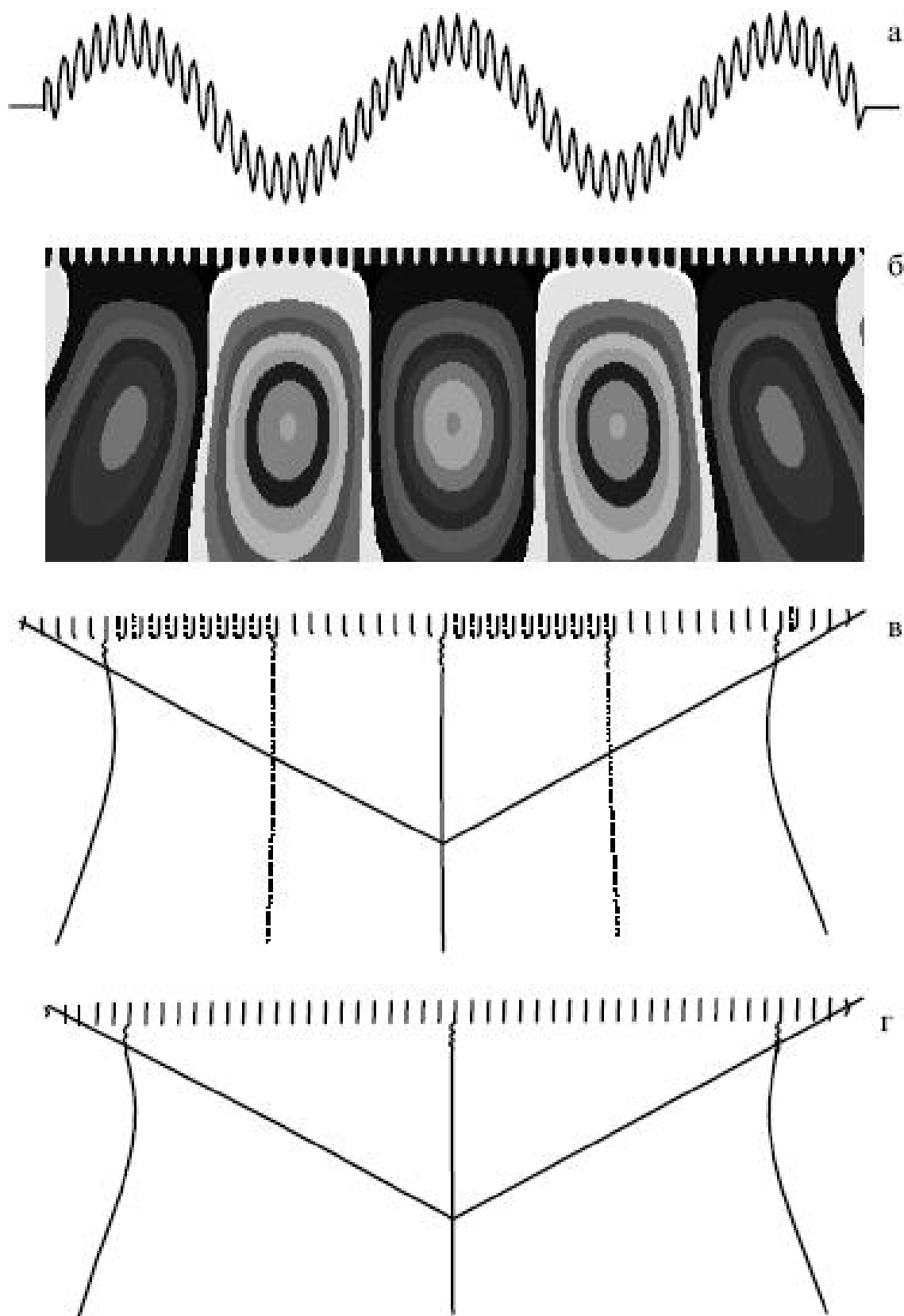


Рис.5.9.а. – сигнал, состоящий из суммы двух синусоид, его вейвлет-спектр (5.9.б), линии локальных экстремумов (5.9.в) и линии локальных минимумов (5.9.г.), копия из [1]

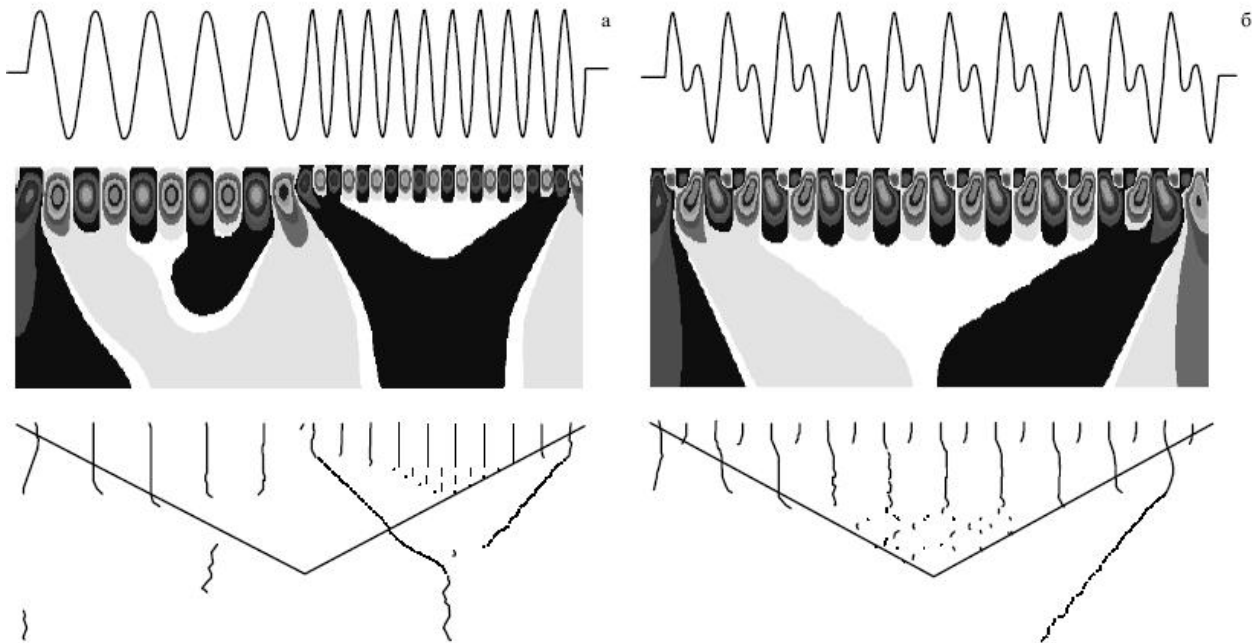


Рис.5.10. Два сигнала, представляющие собой сумму двух гармоник – на рис.5.10.а. гармоники разной частоты предъявляются последовательно, на рис.5.19.б. – параллельно. Классический анализ Фурье не позволяет отличить один случай от другого, вейвлет-анализ позволяет различить эти случаи без труда, копия из [1]

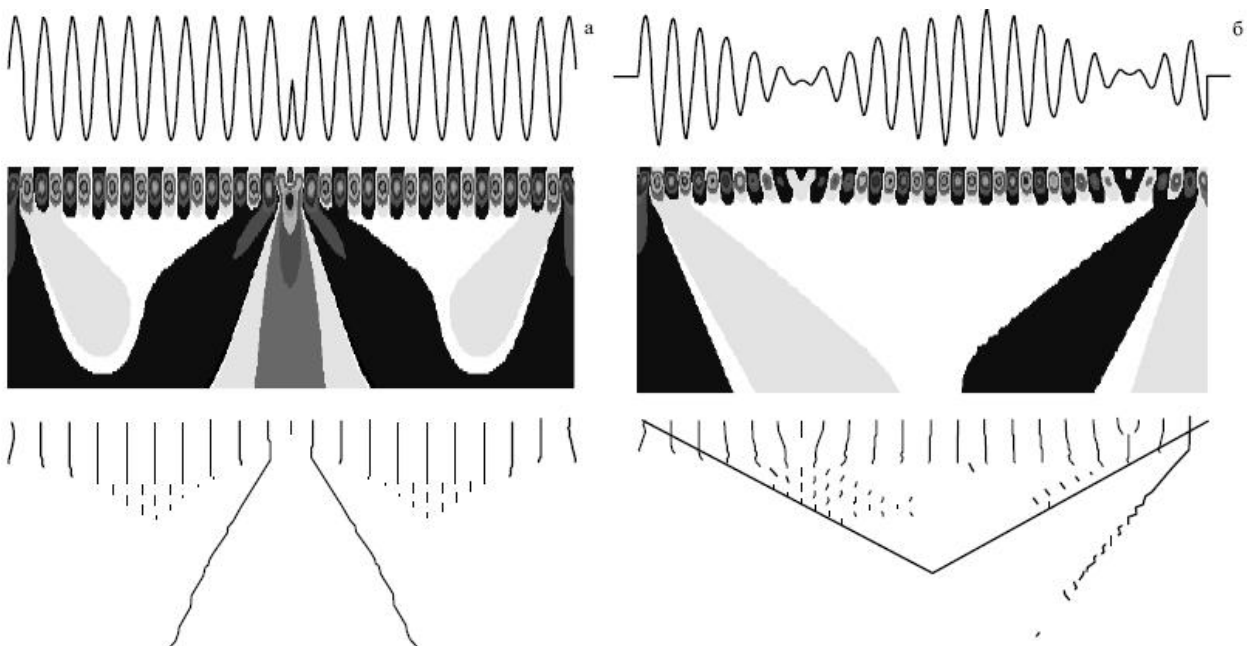


Рис.5.11. Сигналы со сбоем фазы и их вейвлет-спектры, копия из [1]

Рис.5.12 иллюстрирует возможность выявления с помощью вейвлет-анализа фрактальной структуры исследуемого процесса, копия из [1]

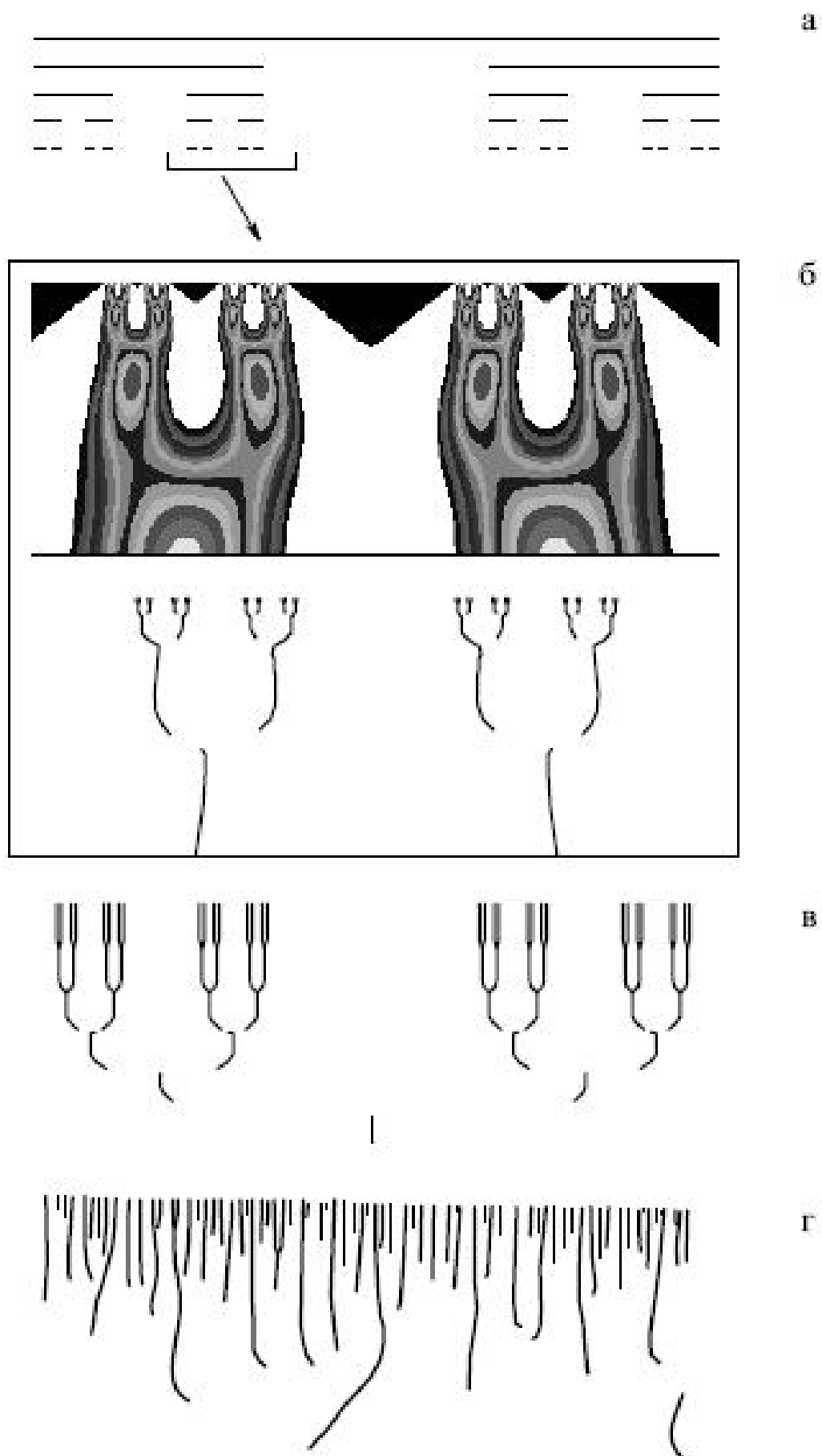


Рис.5.12. Фрактальное множество «Пыль Кантора» и его вейвлет-спектр; на рис.5.12.г. – скелетон случайного процесса, копия из [1]

Интересно применение вейвлет-анализа для анализа метеорологических явлений и выявления различных циклов. Например, на рис.5.13 приведен временной ряд метеорологического явления Эль-Ниньо и его вейвлет-спектр, позволяющий выявить периодические явления на отдельных временных промежутках и тем самым проследить глобальные закономерности.

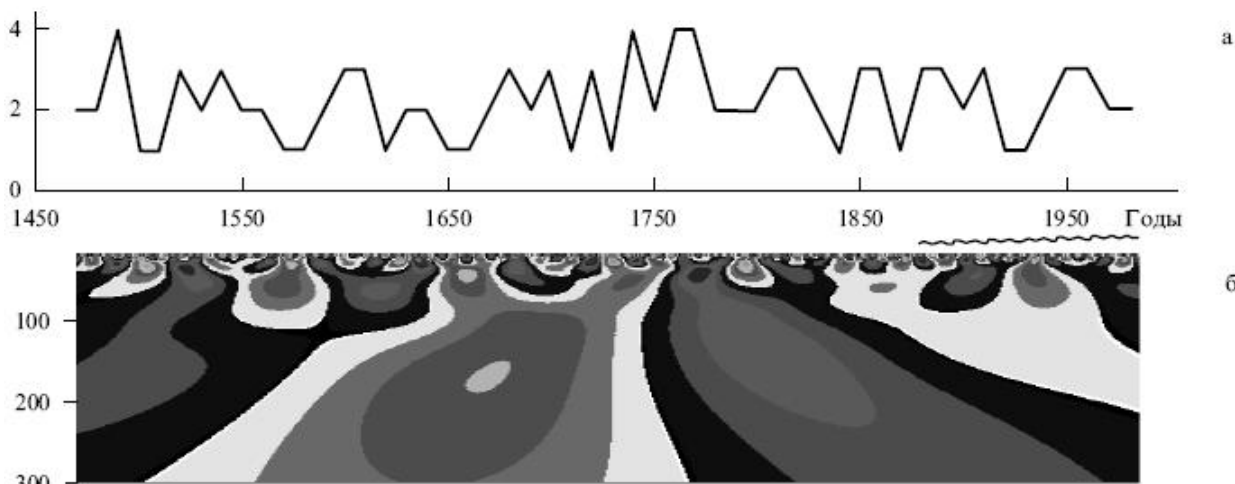


Рис.5.13. Временной ряд Эль-Ниньо и его вейвлет-спектр на протяжении 500 лет наблюдений, копия из [1]

Нетрудно видеть, что вейвлет-анализ представляет собой вычислительно затратную процедуру. Поэтому представляет интерес возможность реализации вейвлет-анализа оптическими методами. Подход к оптической реализации вейвлет-анализа основан на том, что выражение (5.10) представляет собой свертку анализируемой функции с некоторым ядром, определяемым выбранным вейвлетом. Следовательно, для выполнения вейвлет-анализа может быть применена схема оптического конволвера или коррелятора, т.е. схема 4-f голографии Фурье. Поскольку в (5.10) используется комплексное сопряжение, то естественно использовать схему, основанную на схеме голографического коррелятора.

Схема оптического устройства, реализующего вейвлет-преобразование, приведена на рис.5.14. [4, 5] Здесь 1 – лазер, 2 – оптическая система, формирующая параллельный пучок света (коллиматор), 3 – входная плоскость, в которую помещается транспарант с анализируемым сигналом, представленным как зависимость пропускания от координаты x . Цилиндрическая линза L_1 выполняет одномерное преобразование Фурье этого сигнала. На маске 4 записаны Фурье-образы базиса вейвлет-преобразования. Так как Фурье-образ любой функции (кроме функции Гаусса) – комплексная функция, то маска 4 изготавливается по голографической технологии, подобно тому, как записывается голографический согласованный фильтр в схеме коррелятора Ван дер Люгта. Таким образом, в плоскости 4 выполняется умножение Фурье-образа анализируемого сигнала на Фурье-образ базисного вейвлета.

Поскольку необходимо обеспечить перебор различных масштабов, то в плоскости 4 по вертикальной оси пространственно разнесены несколько Фурье-образов базисного вейвлета, каждый из которых отличается своим масштабом.

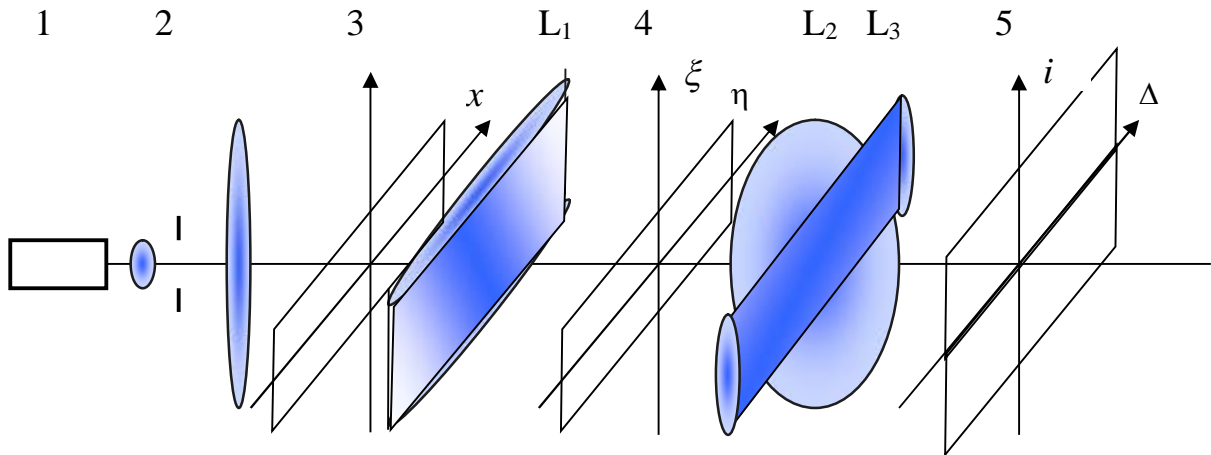


Рис.5.14. Схема оптического вейвлет-анализатора

Система из сферической линзы L_2 и цилиндрической L_3 выполняет преобразование Фурье по одной координате и проекцию изображения по другой – в плоскости 5 формируется картина (двумерная!) разложения анализируемого сигнала по заданному базису.

Литература к Теме 5

1. *Н.М. Астафьева* Вейвлет-анализ: основы теории и применения // Успехи физических наук. – 1996. – Т.166. – №11. – с.1145-1170.
2. *И.М.Дремин, О.В.Иванов, В.А.Нечитайло* Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук. – 2001. – Т.171. – №5. – с.467-500.
3. *А.П.Петухов* Введение в теорию базисов всплесков. СПб ГТУ, 1999.
4. *А.Н.Яковлев*. Введение в вейвлет-преобразования. Новосибирский ГТУ, 2003.
5. *А.В. Павлов* Методы обработки информации в фотонике. Т.1. Основы оптических информационных технологий, использующих преобразование Фурье и метод голографии Изд.3-е, дополненное. – СПб: Университет ИТМО, 2017. – 84 с.
6. *В.Ю.Петрунькин, Е.Т.Аксенов, Г.А.Стариков* Оптический вейвлет-процессор для обработки сложных сигналов // Письма в ЖТФ. – 2001. – Т.2. –, вып.22. – с.24-29.

Тема 6. Ghost Imaging (фантомные изображения) – корреляционный метод передачи информации [1-6]

Ghost imagine – это технология передачи информации, изначально инициированная изучением квантовомеханических эффектов и, в частности, феномена квантовой корреляции [1–3]. Но, как мы увидим ниже, эта технология может быть реализована с использованием не только источников запутанных, т.е. коррелированных, фотонов, но и источников некоррелированных, тепловых фотонов. [4-6] Для этого рассмотрим простую схему, последовательно её усложняя. [4]

Зададимся простым вопросом – можно ли получить изображение объекта с помощью сенсора, имеющего только один элемент разрешения? Например, с помощью интегрального приемника, регистрирующего все излучение, прошедшее через транспарант, как это изображено на рис.6.1? Вариант – свет, отраженный от объекта, принципиально это – то же самое.

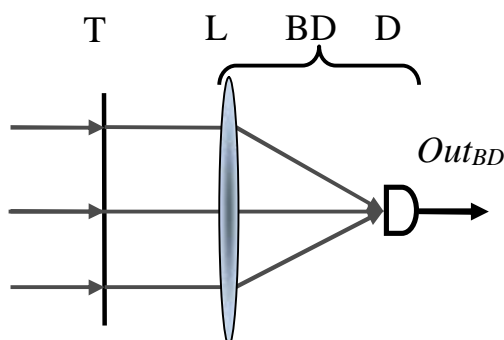


Рис.6.1. Оптическая схема освещения транспаранта широким пучком света: свет, прошедший через транспарант Т, собирается положительной линзой L, в фокусе которой установлен фотодетектор D, вместе линза и детектор образуют интегральный фотоприемник BD (bucket detector), регистрирующий интенсивность всего света, прошедшего через транспарант

Ответ на поставленный вопрос очевиден – нет, нельзя. Действительно, сигнал на выходе фотодетектора:

$$Out_{BD} = \int_{-x_T}^{x_T} \tau(x) dx ,$$

где $2x_T$ – апертура транспаранта, $\tau(x)$ – зависимость пропускания транспаранта от координаты; для простоты мы рассматриваем одномерный случай, т.е. работаем с функциями одной пространственной координаты.

Задачу можно решить, если усложнить схему – пусть транспарант освещается не широким пучком света, а сканируется узким, например, с помощью качающегося зеркала RM, как это изображено на рис.6.2.

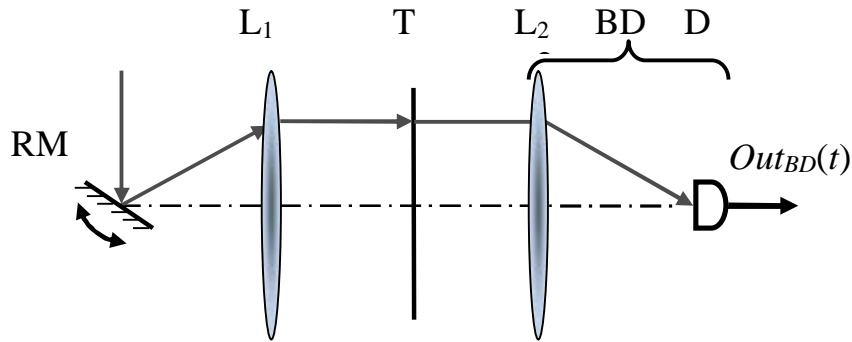


Рис.6.2. Оптическая схема сканирования транспаранта узким пучком: RM – качающееся зеркало, остальные обозначения соответствуют рис.6.1

Теперь выход интегрального фотодетектора является функцией времени

$$Out_{BD}(t) = \tau(x) \cdot x(t), \quad (6.1)$$

где $x(t)$ – закон сканирования или развертки изображения в видеосигнал, т.е. зависимость пространственной локализации x тонкого пучка в плоскости транспаранта T от времени t . Если мы знаем закон сканирования $x(t)$, то для восстановления информации из сигнала (6.1) необходимо применить к (6.1) обратное преобразование $x^{-1}(t) = t(x)$, называемое пространственной разверткой временного (видео) сигнала. В этом вся идея как телевидения, так передачи изображений по линиям связи вообще:

1. сканирование как преобразование пространственного сигнала $\tau(x)$ или поля $\tau(x, y)$ во временной $Out_{BD}(t)$ по закону $x(t)$;
2. передача временного сигнала $Out_{BD}(t)$ по линии связи;
3. обратное преобразование – развертка временного сигнала в пространственный $x^{-1}(t) = t(x)$.

Таким образом, для восстановления изображения нам нужно знать закон сканирования. В телевидении используется простой закон сканирования – линейная зависимость координаты от времени как по строке, так и по кадру. На жаргоне он называется «пилой». Для синхронизации приемника с передатчиком в телевизионный сигнал включаются специальные импульсы синхронизации, отмечающие начало кадра и строки, оба сигнала – и информационный $Out_{BD}(t)$, и развертки $x(t)$ передаются вместе.

Очевидно, что закон сканирования может быть произвольным, в том числе, $x(t)$ может быть реализацией случайного процесса. В этом варианте необходимо передать приемнику не только сигнал (6.1), но и реализацию $x(t)$ – необходим второй канал связи и, соответственно, второй датчик для текущего сканирования $x(t)$. Тогда усложняется несанкционированный доступ к передаваемой информации, так как для её восстановления необходимо знать реализацию сканирования, а она каждый раз разная.

Схема, реализующая эту идею, приведена на рис.6.3 – на схеме мы обозначили источник и приемник как Алису и Боба. Сравнительно со схемой рис.6.2, качающееся сканирующее зеркало установлено перед светоделителем, формирующим второй канал, в котором сканирующий пучок регистрируется изображающим сенсором IS – назовем этот канал сигнальным, а канал с интегрирующим сенсором – опорным.

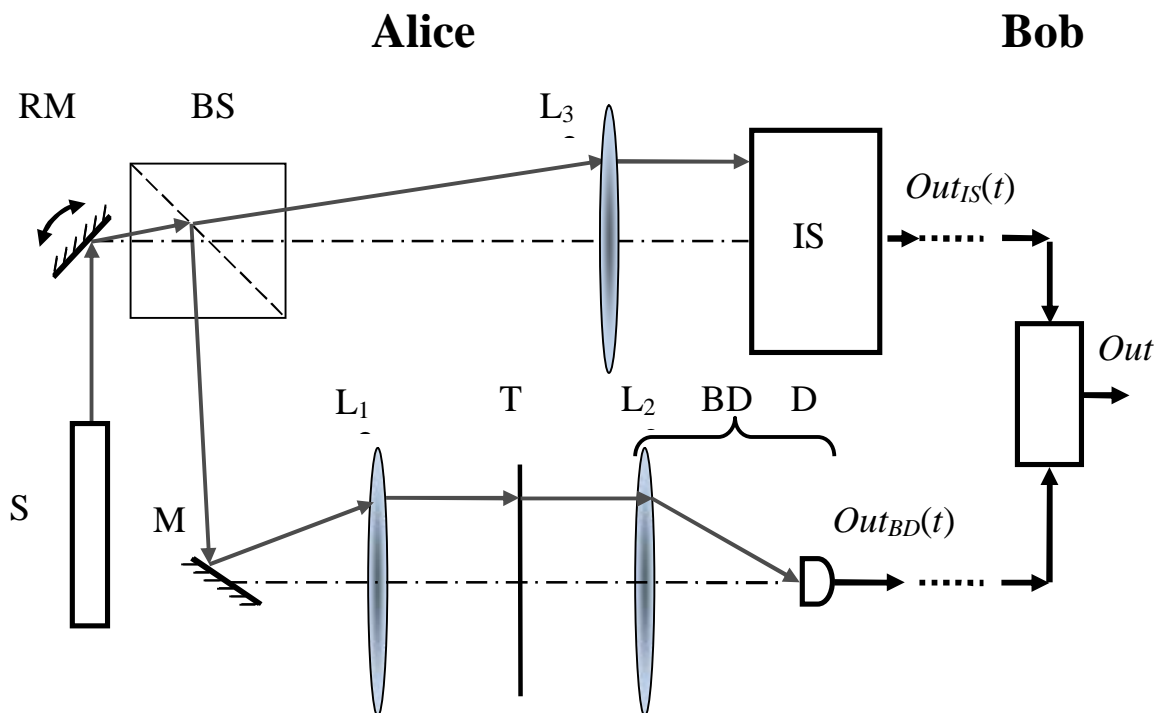


Рис.6.3. Оптическая схема сканирования прозрачного узким пучком света: S – источник узкого пучка света (не обязательно лазер, может быть любой), BS – светоделитель, IS – сенсор, формирующий изображение (камера), $Out_{IS}(t)$ – его выходной сигнал, M – зеркало, остальные обозначения соответствуют обозначениям на рис.6.1

Обозначим координату в плоскости сенсора IS через y . Сигнал $Out_{IS}(t)$ сенсора IS несет информацию о законе сканирования $y(t)$. Если он передается по отдельному каналу, то для восстановления изображения необходима информация из обоих каналов – временной сигнал детектора BD должен быть подвергнут обратному преобразованию:

$$\tau(x) = y^{-1}(Out_{BD}) = [\tau(x) \cdot x(t)] \cdot t(y). \quad (6.2)$$

Мы рассмотрели восстановление изображения $\tau(x)$ из временного сигнала интегрального приемника Out_{BD} с использованием сигнала изображающего сенсора IS. На задачу восстановления изображения можно посмотреть и с другой позиции – восстановить изображение из сигнала изображающего приемника IS. В этом случае сигнал интегрального детектора несет информацию о необходимой для

восстановления $\tau(x)$ из Out_{IS} зависимости от времени модуляции сигнала изображающего сенсора. Если $\tau \in \{0,1\}$, т.е. бинарный транспарант, если $\tau(x_i) = 0$, то и $Out_{BD}(t_i) = 0$, и наоборот. Отсюда $\tau(x) = Out_{IS}(t)Out_{BD}(t)$.

Теперь усложним схему еще раз – пусть источник S излучает не узкий пучок света, а некоторое поле интенсивностей, случайно изменяющееся во времени и пространстве: $S_T(x,t)$ в плоскости T и $S_S(y,t)$ в плоскости IS .

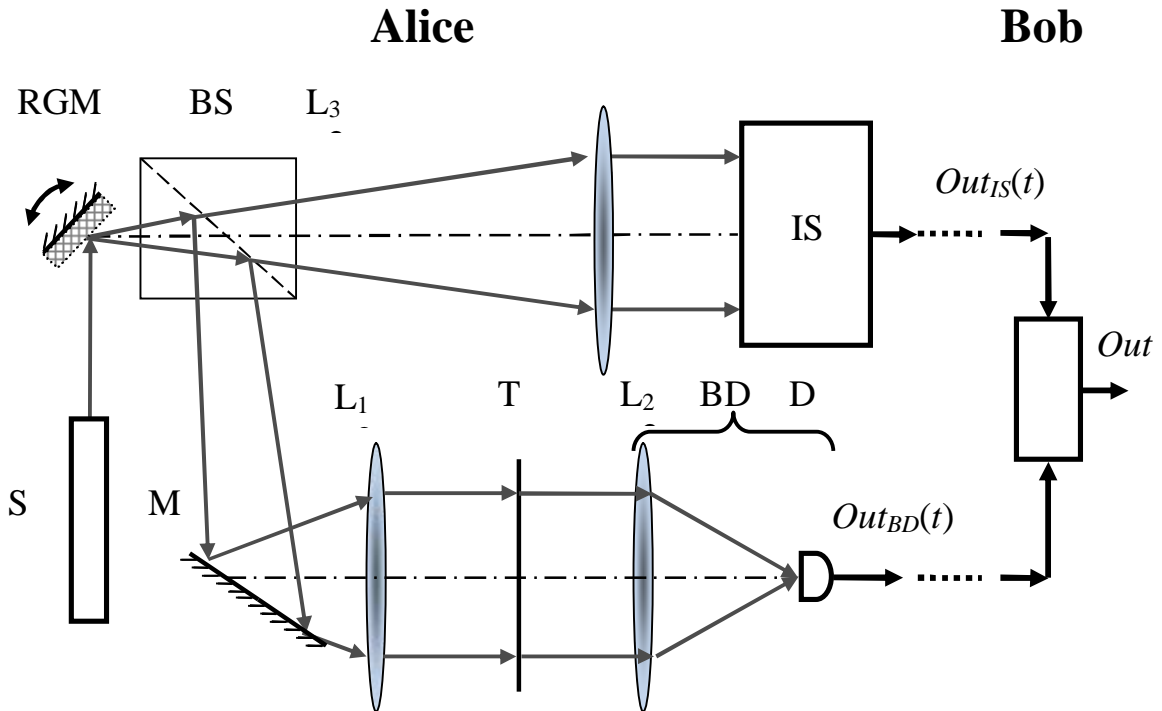


Рис.6.4. Оптическая схема сканирования транспаранта полем, имеющим спекл-структуру: RGM – качающийся диффузор (диффузное зеркало), остальные обозначения соответствуют обозначениям на рис.6.3

Изменение поля во времени может быть обусловлено как источником – в этом случае сканирование качающимся зеркалом не нужно – так и сканированием по случайному закону. Пространственная структура поля может задаваться, например, диффузором, введенным в пучок до светоделителя, как это изображено на рис.6.4. В последнем случае поле будет спекл-структурой, пример которой приведен на рис.6.5 [5].

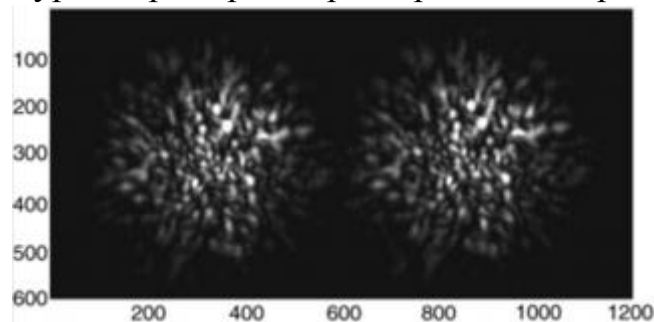


Рис.6.5. Пример полей в плоскостях IS и T , имеющих спекл-структуру, копия из [5]

Тогда сигнал интегрирующего фотодетектора ВД:

$$Out_{BD}(t) = \int_{-x_T}^{x_T} \tau(x) S_T(x, t) dx . \quad (6.3)$$

В рамках задачи восстановления $\tau(x)$ выражение (6.3) представляет зависимость от времени удельного веса передаваемого изображения $\tau(x)$ в каждой реализации – этот механизм поясняет рис.6.6 для $\tau \in \{0,1\}$.

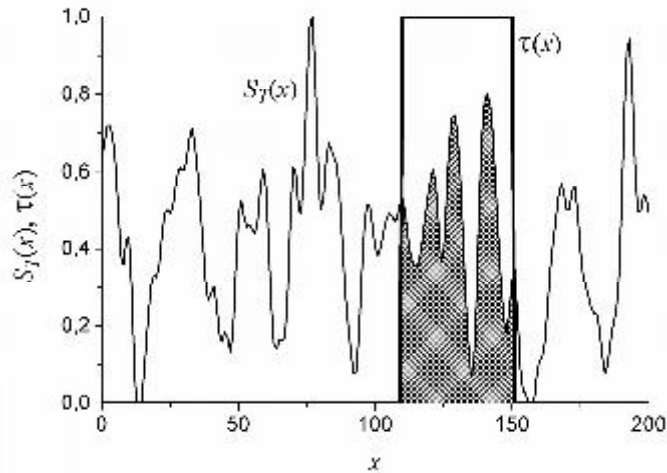


Рис.6.6. Поле $S_T(x)$, освещающее бинарный транспарант $\tau(x)$, заштрихована область, описываемая $\tau(x)S_T(x)$ [4]

Возьмем N изображений поля $S_S(y, t)$, формируемых изображающим сенсором IS за время $[t_{\min}, t_{\max}]$, т.е. за N кадров, где $N = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{t_f}$, t_f – длительность одного кадра, и усредним их с учетом статистического веса каждого кадра, которые выше определены посредством (6.3):

$$I(y) = \frac{1}{N} \sum_N S_S(y, t) Out_{BD}(t) . \quad (6.4)$$

Подставив (6.3) в (6.4), получим:

$$I(y) = \frac{1}{N} \sum_N S_S(y, t) \int_{-x_T}^{x_T} \tau(x) S_T(x, t) dx = \int_{-x_T}^{x_T} \tau(x) \langle S_T(x, t) S_S(y, t) \rangle dx , \quad (6.5)$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю из N изображений.

Вспомним определение ковариационной функции (тема 4):

$$R(y - x) = \langle S(x) - \langle S \rangle \rangle \langle S(y) - \langle S \rangle \rangle = S(x)S(y) - \langle S \rangle^2 . \quad (6.6)$$

Подставив определение (6.6) в (6.5), получим следующее выражение:

$$I(y) = \int_{-x_T}^{x_T} \tau(x) R(y - x) dx + \langle S \rangle^2 \int_{-x_T}^{x_T} \tau(x) dx . \quad (6.7)$$

Первое слагаемое в выражении (6.7) представляет собой свертку функции пропускания транспаранта с функцией автоковариации поля.

Второе слагаемое в выражении (6.7) играет роль помехи, в которой «тонет» полезный сигнал $\tau(x)$. Согласно [5], эту помеху можно убрать, введя в тракт сигнала фильтр, режектирующий нулевую частоту.

Таким образом, убрав второе слагаемое посредством фильтрации, мы можем восстановить изображение $\tau(x)$ из сигнала, формируемого изображающим сенсором IS, который не видит само это изображение. Для этого нам надо обработать сигнал изображающего сенсора согласно (6.4) – суммировать N кадров, каждый кадр со своим статистическим весом (6.3).

Поскольку информацию о статистическом весе каждого кадра несет сигнал интегрального фотодетектора BD (6.3), то для восстановления информации нужны сигналы обоих каналов – и сигнального, и опорного.

Поскольку подлежащая восстановлению информация $\tau(x)$ представлена в выражении (6.7) в виде свертки с функцией ковариации освещающих полей, то имеет место потеря разрешения, определяемая видом ковариационной функции. Если поля дельта-коррелированы и ковариационная функция имеет ярко выраженный глобальный максимум, то в силу фильтрующего свойства дельта-функции потери разрешения не происходит. В противном случае потеря разрешения неизбежна, но тут возможно применение метода восстановления качества изображения на основе десвертки, который мы рассмотрели ранее.

Строго говоря, следует учесть также и временную функцию ковариации, но если время отклика сенсоров много меньше времени корреляции полей $S_T(x, t)$ и $S_S(y, t)$, то ей можно пренебречь.

Литература к теме 6

1. *Клышко Д Н* Простой метод приготовления чистых состояний оптического поля, реализации эксперимента Эйнштейна, Подольского, Розена и демонстрации принципа дополнительности // УФН, 1988. Т. 154. №1. С.133–152. <http://ufn.ru/ru/articles/1988/1/e/>
2. *D. V. Strekalov, A. V. Sergienko, D. N. Klyshko, and Y. H. Shih* Observation of two-photon ‘ghost’ interference and diffraction // Phys. Rev. Lett., 1995. V.74. P. 3600–3603. .
3. *D. N. Klyshko* Photons and Nonlinear Optics / Gordon and Breach, N.Y., 1989.
4. *А.В. Павлов* Методы обработки информации в фотонике. Т.1. Основы оптических информационных технологий, использующих преобразование Фурье и метод голографии. Изд.3-е, дополненное. – СПб: Университет ИТМО, 2017. – 84 с.
5. *L. Basano, P. Ottonello* Ghost imaging: Open secrets and puzzles for undergraduates // Am.J.Phys. 2007. V. 75. #4. P. 343 – 351.
6. *G. Scarcelli, V. Berardi, and Y. Shih* Phase-conjugate mirror via two-photon thermal light imaging // Appl. Phys. Lett., 2006. V.88, 061106-1–3.

Павлов Александр Владимирович

Квантовые и оптические методы обработки информации и
вычислений

Т.1. Основы оптических информационных технологий, использующих
преобразование Фурье и метод голографии

Учебное пособие

В авторской редакции

Дизайн

Компьютерная верстка

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Подписано к печати

Заказ №

Тираж 40 экз.

Отпечатано на ризографе

А.В. Павлов

А.В. Павлов

Н.Ф. Гусарова

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А