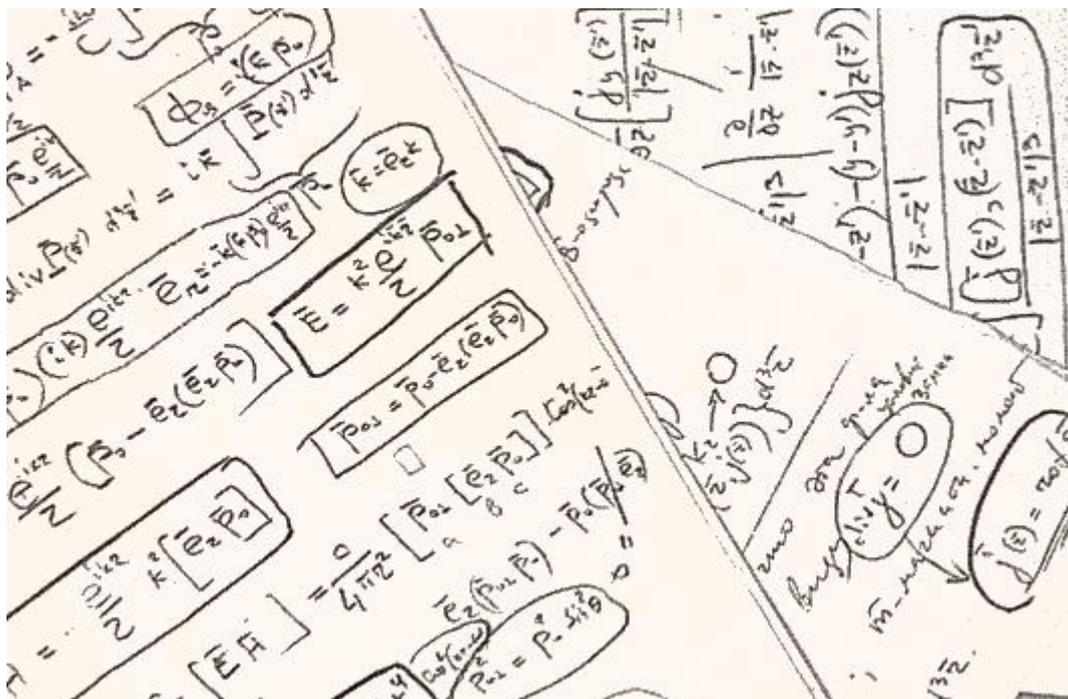


**О.В. Константинов,
В.Е. Бугров, А.Л. Колесникова**
**ЛЕКЦИИ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ**



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**О.В. Константинов,
В.Е. Бугров, А.Л. Колесникова**

**ЛЕКЦИИ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ**

Учебное пособие

 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2021

Константинов О.В., Бугров В.Е., Колесникова А.Л., Лекции по классической электродинамике. Учебное пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2021. – 140 с.

Рецензент:

Максим Анатольевич Одноблюдов, к.ф.-м.н., вед. инженер факультета ЛФО, Университет ИТМО.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающимся по направлению подготовки 16.04.01 «Техническая физика», для закрепления и применения знаний, полученных на лекциях, практических занятиях и во время самостоятельной работы. Также данное учебное пособие адресовано студентам старших курсов и аспирантам, специализирующимся в физико-технических науках. В учебном пособии даются основы классической электродинамики и включена глава, посвященная прохождению световых лучей через анизотропные среды - кристаллооптике.



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2021

© Константинов О.В., Бугров В.Е., Колесникова А.Л., 2021

Содержание

Предисловие	6
Введение	7
Глава 1. Электростатика и магнитостатика	9
1.1. Закон Кулона для взаимодействия электрических зарядов. Выбор единицы заряда в гауссовой системе	10
1.2. Напряженность электрического поля. Электрическое поле точечного заряда и системы зарядов. Потенциальность поля. Уравнения Пуассона и Лапласа. Граничные условия	12
1.3. Интеграл Пуассона, как решение уравнения Пуассона	18
1.4. Момент силы, действующей на систему электрических зарядов. Дипольный момент. Дипольный момент пары электрических разноименных зарядов. Дипольный момент системы электрических зарядов. Точечный электрический диполь	19
1.5. Асимптотика электростатического поля	21
1.6. Энергия электрических зарядов. Энергия электростатического поля	22
1.7. Закон Кулона для магнитных полюсов. Единицы измерения магнитного заряда и магнитного поля в гауссовой системе	25
1.8. Опыт Эрстеда с электрическим током и магнитными стрелками. Замкнутость магнитных силовых линий. Дифференциальные уравнения магнитного поля. Электродинамическая постоянная – $едп$	26
1.9. Введение векторного потенциала магнитостатического поля. Условие калибровки. Уравнение Пуассона для векторного потенциала и его решение в форме интеграла Пуассона. Интеграл Пуассона для магнитного поля и формула закона Био-Савара-Лапласа	27
1.10. Сила, действующая со стороны замкнутого электрического тока на магнитный полюс	30
1.11. Сила Ампера, действующая со стороны магнитной массы на систему замкнутых токов. Различные формы закона Ампера: плотность силы Ампера, сила, действующая на отрезок проводника с током, и сила Лоренца	30
1.12. Момент магнитной силы, действующей на систему токов. Магнитный дипольный момент системы токов. Точечный магнитный диполь	32
1.13. Асимптотика магнитостатического поля	35
1.14. Энергия стационарных токов. Энергия магнитостатического поля	40
1.15. Определение единиц заряда и электрического тока в СИ. Единицы электростатического потенциала и электрического поля в СИ. Уравнение Пуассона в СИ. Введение электрической постоянной. Закон Ампера и единица магнитной индукции в СИ. Магнитная постоянная. Закон Био-Савара-Лапласа в СИ	43
1.16. Уравнения Максвелла для стационарных полей	46
<i>Контрольные вопросы к Главе 1</i>	47

Глава 2. Нестационарные электрические и магнитные поля . . .	49
2.1. Закон сохранения заряда и уравнение непрерывности. Нарушение закона Био-Савара-Лапласа в случае переменного электрического тока. Введение максвелловского тока смещения. Уравнение Максвелла для переменного электрического поля	49
2.2. Вихревое электрическое поле. Нарушение потенциальности электрического поля в переменном во времени магнитном поле. Сила Лоренца как причина возникновения вихревого электрического поля. Уравнение Максвелла для переменного магнитного поля	50
2.3. Уравнения Максвелла в гауссовой системе и в СИ	52
2.4. Усреднение микроскопических уравнений Максвелла в материальной среде	53
2.5. Вектор поляризации в материальной среде. Ток поляризации. Вектор индукции электрического поля	55
2.6. Вектор намагничивания. Плотность тока намагничивания. Физический смысл вектора намагничивания	57
2.7. Уравнения Максвелла в материальной среде	59
2.8. Электросопротивление и удельное сопротивление в гауссовой системе и в СИ. Примеры изоляторов. Максвелловское время и его физический смысл	61
2.9. Определение емкости через решение уравнения Лапласа. Примеры вычисления емкости в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Связь единиц емкости в гауссовой системе и в СИ. Энергия зарядки емкости и работа, затрачиваемая батареей на зарядку	63
2.10. Закон Ампера для магнитного поля в тороидальной круглой катушке различного сечения. Индуктивности катушек	67
2.11. Закон Ома для переменного тока для R-L-C цепи в гауссовой системе и в СИ. Резонансная частота контура (формула Томпсона). Определение $\varepsilon_{\text{дп}}$ электрическим методом	68
2.12. Скорость изменения плотности электрической и магнитной энергии. Плотность энергии в изотропных линейных диэлектрике и магнетике. Поток энергии в электромагнитном поле, теорема Пойнтинга	70
<i>Контрольные вопросы к Главе 2</i>	<i>72</i>
Глава 3. Электромагнитные волны	74
3.1. Плоские волны в однородном изотропном диэлектрике как решение уравнений Максвелла. Правая винтовая тройка, соотношение между электрическим и магнитным полем, дисперсионное уравнение	74
3.2. Перенос энергии плоской электромагнитной волной. Поглощение электромагнитной волны в проводящей среде	79
3.3. Плоская зеркальная граница диэлектрика. Закон сохранения касательной составляющей волнового вектора света на зеркальной границе. Законы отражения и преломления, явление полного внутреннего отражения - ПВО. Волны типа ТЕ и ТМ. Явление Брюстера в ТМ поляризации	81

3.4.	Коэффициент отражения света от диэлектрика в вакуум в ТЕ и ТМ поляризациях. Зависимость коэффициента отражения от угла падения. Угол Брюстера	87
3.5.	Коэффициент отражения света от границы раздела «диэлектрик-вакуум» при падении из диэлектрика. Формулы Френеля для коэффициентов отражения для случаев ТЕ и ТМ поляризаций. Принцип взаимности	91
3.6.	Материальные и вакуумные уравнения Максвелла, введение векторного и скалярного потенциалов. Условие калибровки Лоренца, уравнение Гельмгольца	92
3.7.	Запаздывающие потенциалы. Представление потенциалов в виде рядов Фурье. Функция Грина для потенциалов	94
3.8.	Закон сохранения заряда как следствие материальных уравнений Максвелла	95
3.9.	Асимптотика функции Грина на больших расстояниях от источника переменного поля. Асимптотика электрического и магнитного поля точечного электрического диполя. Поток энергии на больших расстояниях	97
	<i>Контрольные вопросы к Главе 3</i>	103
Глава 4.	Основы кристаллооптики	104
4.1.	Решение уравнений Максвелла при наличии связи $D_i = \varepsilon_{ik} E_k$, где ε_{ik} - тензор диэлектрической проницаемости кристалла. Дисперсионное уравнение. Двойное лучепреломление	104
4.2.	Уравнения Френеля для векторного показателя преломления, фазовой и лучевой скоростей	111
4.3.	Поляризация волн	115
4.4.	Построение направлений о- и ео-волн при переходе через границу одноосного кристалла	117
4.5.	Вектор Пойнтинга световой волны в кристалле	118
4.6.	Оптическая индикатриса и построение Френеля	119
4.7.	Математическое описание опыта Бартолина	122
4.8.	Искусственная анизотропия	124
	<i>Контрольные вопросы к Главе 4</i>	126
Приложение 1.	Единицы измерения физических величин в гауссовой системе и в СИ	128
Приложение 2.	Математический аппарат классической электродинамики	129
П.2.1.	Биномиальные разложения и ряды	129
П.2.2.	Элементы векторной алгебры и анализа	130
П.2.3.	Системы координат	134
П.2.4.	Обобщенные функции	136
П.2.5.	Преобразование Фурье и ряды Фурье	137
Библиография		139

Предисловие

Профессор Олег Владиславович Константинов читал лекции по электродинамике для студентов кафедры «Оптоэлектроника» ЛЭТИ и для аспирантов ФТИ им. А.Ф. Иоффе в Ленинграде – С.-Петербурге с 1974 г. по 2012 г. За эти годы курс электродинамики приобрел выверенную логическую конструкцию, ясную математическую аранжировку и легкость восприятия – черты, которые так ценились его слушателями. Мы тоже были в числе этих слушателей. Возникла идея издать книгу, основываясь на рукописи О.В. Константинова, сохранив их конспективный лаконичный стиль изложения. Этот проект начался при жизни О.В. Константинова.

С 2013 года в университете ИТМО студентам предлагается для изучения дисциплина «Электродинамика и кристаллооптика», во многом построенная на курсе лекций О.В. Константинова.

Все отступления от оригинала курса или дополнения к нему, неизбежные при написании книги, были согласованы между авторами.

Сентябрь 2012 г. – январь 2019 г.

В.Е. Бугров
А.Л. Колесникова

Введение

Предлагаемый читателям курс лекций состоит из четырех глав, в которых конспективно, но не в ущерб логике, изложены основы классической электродинамики и кристаллооптики.

В Главе 1 показано, как, опираясь на эксперименты Кулона и Эрстеда, можно вывести уравнения Максвелла для электро- и магнитостатических полей и уравнение Пуассона для скалярного и векторного потенциалов этих полей. При этом дифференциальные операторы (оператор Гамильтона набла, дивергенция, ротор и оператор Лапласа) играют роль естественных математических инструментов для построения начал классической теории поля. Определена эдп в уравнениях Максвелла. Представлены также математические приемы, широко используемые в математической физике (разложение в ряд, интегральное преобразование Фурье, введение дельта-функции Дирака) и векторном анализе (теоремы Остроградского-Гаусса и Стокса, соотношения между диф. операторами, скалярное умножение на константный вектор, группировки и т.п.). Продемонстрирован вывод граничных условий для потенциальных и вихревых полей. Даны понятия дипольных моментов источников полей.

Глава 2, где рассмотрены нестационарные электрические и магнитные поля, начинается с вывода уравнения непрерывности на основании экспериментального закона сохранения заряда. Обнаруженное противоречие между уравнением непрерывности и законом Био-Савара-Лапласа, вытекающим из уравнений Максвелла для магнитного поля и полученным экспериментально, снимается введением тока смещения в роторное уравнение для магнитного поля. Явление электромагнитной индукции, открытое Фарадеем, корректирует в свою очередь роторное уравнение Максвелла для электрического поля. Даны определения вектора поляризации, вектора намагничивания и векторов электрической и магнитной индукции. Сделан ряд прикладных расчетов, например емкостей конденсаторов различной формы на основании решения уравнения Лапласа. Определен вектор Умова - Пойнтинга и сформулирована теорема Пойнтинга.

В Главе 3 показано, как при отсутствии свободных зарядов в диэлектрике уравнения Максвелла преобразуются в волновые уравнения, частным решением которых являются плоские волны. Введен волновой вектор и доказано, что волновой вектор и вектора электрического и магнитного полей образуют правую тройку. Продемонстрировано, что в проводнике уравнения Максвелла приобретают вид диффузионных уравнений, и объяснен скин-эффект. Представлены законы отражения и преломления света на плоской зеркальной границе диэлектрика, определен векторный показатель преломления, выведены формулы Френеля для коэффициентов отражения поляризованного света. Показано, что с

помощью калибровки Лоренца из уравнений Максвелла получаются два сепаратных уравнения Гельмгольца для скалярного и векторного потенциалов. Дана схема решения уравнения Гельмгольца методом запаздывающих потенциалов, найдена функция Грина и обобщено понятие этой функции. Завершают главу расчеты асимптотик функции Грина на больших расстояниях от источника нестационарного поля и электрического и магнитного поля точечного электрического диполя с переменным во времени дипольным моментом

В Главе 4 даны основы кристаллооптики – науки о прохождении света через кристалл. Из уравнения Максвелла выведено дисперсионное уравнение, дано определение тензора диэлектрической проницаемости и главных его значений. Описаны опыты Бартолина и Малюса по наблюдению эффекта двойного лучепреломления в кристаллах, даны понятия об оптической оси кристалла, главной плоскости, обыкновенном и необыкновенном лучах. Приведены примеры использования эффекта двойного лучепреломления в поляризаторах: призме Николя, полуволновой и четвертьволновой пластинках. Из дисперсионного уравнения получены уравнения Френеля для векторного показателя преломления, фазовой и лучевой скоростей. Рассмотрены поляризации обыкновенной и необыкновенной волн в кристалле. Доказано, что вектор Пойнтинга световой волны совпадает с направлением нормали к поверхности волновых векторов. В последнем разделе главы кратко описаны проявления искусственной анизотропии – линейный электрооптический эффект Поккельса, квадратичный электрооптический эффект Керра, фотоупругость и линейный магнитооптический эффект Фарадея.

В заключение отметим, что студентам 3-4-х курсов физико-технических специальностей университета, кому в первую очередь и предназначается это учебное пособие, обладающим достаточным запасом математических знаний, изучение классической электродинамики не покажется слишком утомительным.

Глава 1. Электростатика и магнитостатика

Классическая электродинамика зародилась в XVIII в. и практически полностью сформировалась к концу XIX в. Эта наука представляет собой идеальный образец полевой теории, основанной на нескольких ключевых экспериментальных законах и построенной с помощью специально разработанного для нее математического аппарата.

Однако первой полевой теорией следует считать теорию всемирного тяготения (гравитации) *Исаака Ньютона*. Именно поэтому традиционным началом настоящего лекционного курса на протяжении последних лет было краткое изложение научных достижений в планетарной механике со времен древней Греции до конца XVI в. - начала XVII в., когда *Иоганн Кеплер* открыл законы движения небесных тел. Законы Кеплера нашли свое подтверждение в ньютоновской теории гравитации, опубликованной в 1684-86 гг. Так получилось, что гравитационное поле, математически аналогичное электростатическому полю, но намного более слабое, см. Таблицу, было открыто первым. Это объясняется тем, что в природе заряды, обуславливающие электромагнитное взаимодействие, сбалансированы и проявляются в специальных случаях.

Таблица. Фундаментальные взаимодействия в природе

Тип взаимодействия	Источник	Относительная интенсивность	Распространение
Гравитационное	Масса	$\sim 10^{-38}$	Дальнодействующее
Слабое	Все элементарные частицы	$\sim 10^{-15}$	Короткодействующее ($\sim 10^{-15}$ м)
Электромагнитное	Электрические заряды	$\sim 10^{-2}$	Дальнодействующее
Ядерное (сильное)	Адроны (протоны, нейтроны, мезоны)	1	Короткодействующее ($\sim 10^{-15}$ м)

Закон Ньютона взаимодействия масс и закон Кулона взаимодействия зарядов идентичны при условии, что массы, в отличие от зарядов, всегда положительны, и массы всегда притягиваются, тогда как одноименные заряды, напротив, отталкиваются. Можно записать закон всемирного тяготения, дать определение напряженности и потенциала гравитационного поля, и вывести пару дифференциальных уравнений первого порядка для напряженности или одно уравнение Пуассона для потенциала. Схожесть законов взаимодействия масс и зарядов позволяет записать полевые уравнения электростатики на основании выведенных уравнений гравитации автоматически.

Авторы этой книги решили не углубляться в тему, напрямую не относящуюся к предмету электродинамики, и ограничиться лишь вводными словами о гравитации и упоминанием о типах взаимодействия в природе.

1.1. Закон Кулона для взаимодействия электрических зарядов. Выбор единицы заряда в гауссовой системе

Закон взаимодействия двух точечных зарядов был установлен с помощью крутильных весов высокой чувствительности *Шарлем де Кулоном* в 1785 г. К этому времени уже состоялось открытие двух типов статического электричества – положительного и отрицательного (*Шарль дю Фэй*, 1733 г.). Кроме того, было известно, что изменение заряда достигается благодаря его растеканию. Например, при соприкосновении заряженного и незаряженного одинаковых шариков заряд уменьшается вдвое.

В качественной форме закон Кулона для заряженных объектов, размеры которых много меньше расстояния между ними, имеет следующий вид:

$$F \sim \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1.1.1)$$

где q_1 и q_2 - величины зарядов со своими знаками, r - расстояние между зарядами. При этом разноименные заряды притягиваются, а одноименные отталкиваются.

Заряды, локализованные в пренебрежимо малых по сравнению с расстоянием между ними областях, называются точечными.

Закон Кулона (1.1.1) для точечных зарядов может быть записан в более корректной векторной форме:

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = k \frac{q_1 q_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}, \quad (1.1.2)$$

где $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ – сила, действующая со стороны 1-го заряда на 2-й; \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 – радиус-векторы точек, где расположены заряды; k – коэффициент пропорциональности, который используется для выбора единицы измерения заряда. На рисунке 1.1 показана система двух одноименных точечных зарядов и силы, действующие на заряды.

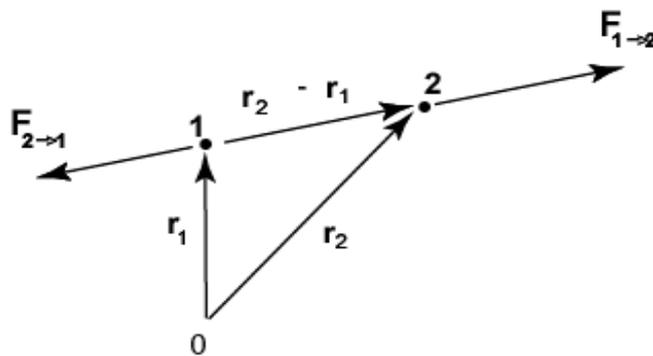


Рис. 1.1. Система двух одноименных точечных зарядов.

Мы будем говорить о двух системах единиц измерения, одинаково широко используемых в электродинамике. Это - абсолютная гауссова система единиц и международная система единиц МКС или СИ (MKS, SI от фр. Le Système International d'Unités). Гауссова система единиц основана на системе единиц измерений механических величин СГС (CGS) и системах СГСЕ и СГСМ единиц измерений электрических и магнитных величины. Аббревиатуры СГС (CGS) и МКС (MKS) составлены из первых букв названий основных механических единиц измерений. Это - сантиметр, грамм и секунда в системе СГС и метр, килограмм и секунда в системе МКС (СИ). В Приложении 1 представлены единицы измерения физических величин, используемые гауссовой системой и СИ.

С помощью основных единиц вводятся производные единицы – единицы силы, работы и мощности.

В обозначениях единиц принято использовать заглавные буквы, если единица названа в честь ученого или изобретателя, в остальных случаях используются строчные буквы. Например, единица измерения силы в СИ имеет наименование *ньютон* и обозначается N , единица измерения работы в СИ называется *джоуль* и обозначается J .

Перевод физических величин из одной системы в другую легко делать с помощью переводных коэффициентов u . Для основных единиц переводные коэффициенты известны. Поскольку $1 м = 10^2 см$ и $1 кг = 10^3 г$, следовательно, переводные коэффициенты длины и массы составляют, соответственно, $u_x = 10^2 см м^{-1}$ и $u_m = 10^3 г кг^{-1}$. В частности, если взять некоторую длину и измерить ее в системе СГС и в СИ, то связь между этими измерениями будет следующая: $x_{СГС} = u_x x_{СИ}$. В дальнейшем мы будем оставлять в коэффициентах u только численные значения, например, $u_x = 10^2$ и $u_m = 10^3$. Соотношение единиц силы находится из второго закона Ньютона $F = m \ddot{x}$: $F_{СГС} = m_{СГС} x_{СГС} t^{-2}$ и $F_{СИ} = m_{СИ} x_{СИ} t^{-2} \Rightarrow u_F F_{СИ} = u_m m_{СИ} u_x x_{СИ} t^{-2} \Rightarrow u_F = u_m u_x = 10^5 \Rightarrow 1 Н = 10^5 дин$. Аналогичными рассуждениями определяем, что единицы работы $A = F x$ в системе СГС и в СИ связаны коэффициентом u_A : $u_A A_{СИ} = u_F F_{СИ} u_x x_{СИ} \Rightarrow u_A = u_m u_x = 10^7 \Rightarrow 1 Дж = 10^7 эрг$.

В гауссовой системе коэффициент k в законе Кулона (1.1.2) полагается равным единице: $k = 1$. В связи с этим единица заряда выбирается так, чтобы два единичных заряда, находящиеся на расстоянии $1 см$ друг от друга, взаимодействовали с силой $1 дина$. Следовательно, в гауссовой системе единица заряда выражается через механические единицы, и размерность заряда есть:

$$q_{ГС} = \sqrt{F x^2} = m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} t^{-1}. \quad (1.1.3)$$

Единица заряда в гауссовой системе имеет специальные наименования *статкулон (statC)* или *франклин (Фр)*, практически не используемые в теоретической физике. В старых изданиях встречается обозначение - СГСед. заряда.

В настоящем курсе по умолчанию используется гауссова система единиц. В специальных разделах показаны формулы и единицы измерения электромагнитных величин в СИ.

Прежде чем перейти от взаимодействия двух точечных зарядов к взаимодействию ансамбля электрических зарядов, введем определение *поля*, вытекающее из концепции *близкодействия*. Согласно этой концепции, любое воздействие может передаваться за бесконечно-малый промежуток времени лишь в соседнюю бесконечно-близкую точку пространства. Процесс передачи взаимодействия, начавшись в одной точке, где находится, например, заряд **1**, в течение какого-то времени оказывается вообще оторванным от зарядов и никак не проявляется. Для описания этой стадии развития процесса используется понятие *поля*.

Поле – это носитель или транслятор взаимодействия между материальными телами. Оно способно заполнять пространство и может существовать само по себе в отсутствие вещественной среды и без источника, в том случае, если источник к моменту передачи взаимодействия исчез.

В физике термин *поле* употребляется гораздо шире. Некоторые поля требуют и присутствия вещественной среды, и источника, например, упругие поля, тепловые поля.

Физическое поле представляется некоторой динамической физической величиной или физической переменной, роль которой для фундаментальных полей играет потенциал или величина, называемая напряжённостью поля.

1.2. Напряженность электрического поля. Электрическое поле точечного заряда и системы зарядов. Потенциальность поля. Уравнения Пуассона и Лапласа. Граничные условия

Рассмотрим закон Кулона (1.1.2). Если разделить обе его части на величину заряда **2** – q_2 , то получится вектор, который является количественной характеристикой электрического поля, создаваемого зарядом **1**, в точке локализации заряда **2**:

$$\mathbf{E} = \frac{q_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (1.2.1)$$

Вектор \mathbf{E} называется вектором напряженности электрического поля. Напряженность поля можно определить из эксперимента, измеряя силу, которая действует на пробный заряд q , помещенный в точку \mathbf{r} :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) / q. \quad (1.2.2)$$

Пусть теперь система зарядов q_1, q_2, \dots, q_n , расположена в точках $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$. Заряды создают вокруг себя электрическое поле, которое действует на пробный заряд q . Определить напряженность поля системы зарядов позволяет *принцип суперпозиции*, который является экспериментальным фактом: *электрическое поле \mathbf{E} , создаваемое в точке \mathbf{r} системой точечных зарядов, есть векторная сумма полей, создаваемых в этой точке каждым из зарядов.*

В рамках принципа суперпозиции поле системы зарядов q_1, q_2, \dots, q_n можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^n \frac{q_s (\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3}. \quad (1.2.3)$$

Опыт показывает, что в природе существует минимальный по величине возможный заряд, который называется элементарным зарядом. Зачастую, рассматриваемые макроскопические тела содержат огромное число элементарных зарядов. В таком случае распределение заряда целесообразно характеризовать объемной плотностью:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\Delta q}{\Delta V}, \quad (1.2.4)$$

где Δq - заряд, который находится в макроскопически малом объеме ΔV . Этот объем можно считать бесконечно малым, поскольку, несмотря на то, что он содержит большое число элементарных зарядов, его линейные размеры малы по сравнению с пространственными параметрами задачи, такими как, размер тела, расстояние до точки наблюдения и т.п.

С помощью объемной плотности (1.2.4) запишем приращение заряда в дифференциальной форме $dq = \rho(\mathbf{r})dV$ и представим поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ (1.2.3) в интегральном виде:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}', \quad (1.2.5)$$

где $d^3\mathbf{r}'$ - элемент объема. В теоретической физике элемент объема принято обозначать как $d^3\mathbf{r}$, d^3x или dV , иногда, $d\mathbf{R}$.

Обратив формулу (1.2.2), можно найти силу, действующую на заряд q в электрическом поле \mathbf{E} :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (1.2.6)$$

Подчеркнем, что в выражении (1.2.6) полагается, что заряд находится в точке \mathbf{r} . При этом собственное поле точечного заряда не воздействует на заряд, другими словами, в формуле (1.2.6) \mathbf{E} – это внешнее поле.

Сила, действующая на распределенную систему зарядов в электрическом поле, находится из соотношения:

$$\mathbf{F} = \int \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}, \quad (1.2.7)$$

Введем некоторую функцию $\varphi(\mathbf{r})$ в форме интеграла Пуассона:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'. \quad (1.2.8)$$

Тогда напряженность электростатического поля \mathbf{E} (1.2.5) можно выразить через градиент функции $\varphi(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}), \quad (1.2.9)$$

где ∇ - оператор Гамильтона набла, $\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$. Градиент

функции $f(\mathbf{r})$ определяется следующим выражением: $\text{grad } f \equiv \nabla f = \mathbf{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}$. В Приложении 2 более детально представлены

элементы математической теории поля, которые используются в основном содержании настоящих лекций. Формула (1.2.9) справедлива, поскольку,

$\nabla \left| \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right| = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$, где модуль разности $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (|\mathbf{r}|^2 - 2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + |\mathbf{r}'|^2)^{1/2} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ и $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$, а дифференциальная операция проводится по нештрихованным переменным x, y, z .

Функция $\varphi(\mathbf{r})$ называется потенциалом поля. Из соотношения (1.2.9) видно, что потенциал поля можно определить с точностью до константы.

Теория электростатического потенциала была предложена *Симеоном Денни Пуассоном* в 1811 г. по аналогии с теорией потенциала, выдвинутой *Леонардом Эйлером* в «Теории движения твердых тел» в 1765 г. Термин *потенциал* применительно к функции $\varphi(\mathbf{r})$ ввел *Джордж Грин* в 1828 г., который повторил и продолжил работы Пуассона.

Если определить дифференциальную операцию ротора (rot) с помощью дифференциального оператора Гамильтона ∇ , как $\nabla \times$ или $[\nabla, \]$, то из соотношения (1.2.9) в силу справедливости формулы $\text{rot } \nabla f = 0$ немедленно следует, что

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.2.10)$$

Это уравнение указывает на безвихревой, *потенциальный* характер электростатического поля.

Отметим, что вычислять ротор произвольного вектора $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ легко с помощью определителя матрицы так, как это делается для обычного векторного произведения двух векторов:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z.$$

Помимо уравнения (1.2.10) можно записать еще одно дифференциальное уравнение поля \mathbf{E} :

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}), \quad (1.2.11)$$

где операция дивергенции (div) в терминах оператора набла ∇ есть $\nabla \cdot$ или $(\nabla, \)$. Дивергенция вектора $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ определяется, как скалярное произведение оператора ∇ на вектор $\mathbf{a}(\mathbf{r})$: $\operatorname{div} \mathbf{a} \equiv \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$.

Доказательство уравнения (1.2.11) будет представлено ниже.

Уравнения (1.2.10) и (1.2.11) – это уравнения Максвелла для электростатического поля в вакууме.

В 1860—1865 г. *Джеймс Клерк Максвелл* создал теорию электромагнитного поля, которую сформулировал в виде системы уравнений, описывающих основные закономерности электромагнитных явлений.

Два дифференциальных уравнения первого порядка (1.2.10) и (1.2.11) с учетом соотношения (1.2.9) можно заменить одним дифференциальным уравнением второго порядка, называемым уравнением Пуассона:

$$\operatorname{div} \nabla \varphi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \Rightarrow \Delta \varphi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}). \quad (1.2.12)$$

Напомним, что оператор $\operatorname{div} \nabla$ в формуле (1.2.12) – это оператор Лапласа (или лапласиан) Δ . Другое обозначение оператора Лапласа – ∇^2 . Оператор Лапласа действует на функцию $f(\mathbf{r})$ следующим образом:

$$\operatorname{div} \nabla f \equiv \nabla \cdot \nabla f \equiv \Delta f \equiv \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

В том случае, если $\rho(\mathbf{r}) = 0$, уравнение (1.2.12) приобретает вид

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.2.13)$$

Это уравнение Лапласа, которое описывает потенциал в области пространства, не включающей заряды.

Пьер-Симон Лаплас получил уравнение (1.2.13) для потенциала в механике в 1796 г. Однако стоит отметить, что Л. Эйлер сделал это раньше, а именно, в 1767 г.

Поле, создаваемое точечными зарядами, также описывается уравнениями (1.2.10)-(1.2.12). При этом плотность точечного заряда q , находящегося в точке \mathbf{r}_0 , определяется с помощью дельта-функции Дирака δ : $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, где многомерная дельта-функция $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ связана с одномерными дельта-функциями $\delta(x - x_0)$, $\delta(y - y_0)$ и $\delta(z - z_0)$ соотношением $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$, см. Приложение 2.

Рассмотрим поверхность раздела двух сред, на которой плотность заряда имеет особенность в виде скачка или сингулярности. На такой границе дифференциальные уравнения (1.2.10)-(1.2.12) неприменимы. Необходимо определить, каким граничным условиям должны удовлетворять поле \mathbf{E} и потенциал φ . С этой целью запишем уравнения Максвелла в интегральной форме, проинтегрировав обе части уравнения (1.2.10) по произвольной площадке S и обе части уравнения (1.2.11) - по произвольно взятому объему Ω , захватывающим границу раздела:

$$\int_S \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\ell} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (1.2.14a)$$

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q. \quad (1.2.14b)$$

В правой части формулы (1.2.14b) общий заряд, которым обладает объем Ω , представлен выражением:

$$q = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (1.2.15)$$

Переходы к интегралу по замкнутому контуру, окружающему произвольно взятую поверхность, в формуле (2.14a) и к интегралу по поверхности, окружающей произвольный объем, в формуле (1.2.14b) осуществлены согласно теоремам Стокса и Остроградского-Гаусса соответственно.

Отметим, что приводимые ниже способы нахождения граничных условий универсальны, т.е. применимы не только для электростатического поля.

Рассмотрим граничное условие, вытекающее из уравнения (1.2.14a). Строим контур в виде малого прямоугольника со сторонами a и h , охватывающего поверхность раздела так, как это показано на рисунке 1.2а. Циркуляция вектора \mathbf{E} вдоль контура в ф. (1.2.14a) запишется в виде:

$$\oint_{\ell} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \approx (E_{2\tau} - E_{1\tau})a + \delta C = 0, \quad (1.2.16)$$

где $E_{1\tau}$ и $E_{2\tau}$ - проекции поля \mathbf{E} на поверхность раздела в некоторой точке, называемые тангенциальными составляющими поля; δC - интеграл по боковым сторонам прямоугольника. В случае ограниченности поля на поверхности раздела справедливо утверждение $\lim_{h \rightarrow 0} \delta C = 0$. Из соотношения (1.2.16) следует равенство:

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}. \quad (1.2.17)$$

Для того, чтобы получить граничное условие, вытекающее из уравнения (1.2.14b), построим вспомогательный объем в виде малого цилиндра с основанием ΔS и высотой h (рис. 1.2b). Находим поток вектора \mathbf{E} через поверхность, ограничивающую выделенный цилиндр:

$$\oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \approx (E_{2n} - E_{1n})\Delta S + \delta\Phi = 4\pi\rho\Delta S h, \quad (1.2.18)$$

где $\delta\Phi$ - поток через боковую поверхность цилиндра. Принято считать, что вектор нормали к замкнутой поверхности, ограничивающей объем, положителен, если он направлен из объема. Поэтому проекция вектора \mathbf{E} на нормаль торца цилиндра в среде 1 (рис. 1.2b) отрицательна.

В общем случае объемная плотность заряда в рассматриваемом пространстве, захватывающем границу раздела, состоит из собственно плотности в объеме $\tilde{\rho}(\mathbf{r})$ и дельтаобразной особенности на поверхности $\zeta(u, v)\delta(z)$: $\rho(\mathbf{r}) = \tilde{\rho}(\mathbf{r}) + \zeta(u, v)\delta(z)$, $(u, v, 0)$ - координаты точки на границе раздела. Координата z отсчитывается вдоль нормали к границе раздела, Функция $\zeta(u, v)$ называется поверхностной плотностью заряда, Устремляя высоту выделенного цилиндра к нулю и его торцевые поверхности к границе раздела, получаем $\lim_{h \rightarrow 0} \delta\Phi = 0$ и $\lim_{h \rightarrow 0} 4\pi\rho\Delta S h = 4\pi\zeta\Delta S$.

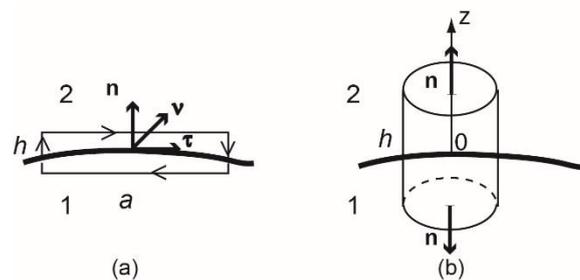


Рис. 1.2. Дополнительные построения для определения условий, налагаемых на поле \mathbf{E} на границе раздела сред 1 и 2.

В результате граничное условие для нормальных составляющих поля к поверхности раздела имеет вид:

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\zeta. \quad (1.2.19)$$

Граничные условия для потенциала определяются из соотношения (1.2.9) и условий (1.2.17) и (1.2.19):

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 4\pi\zeta. \quad (1.2.20 \text{ a,b})$$

1.3. Интеграл Пуассона, как решение уравнения Пуассона

Докажем, что решением уравнения Пуассона $\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r})$ является интеграл Пуассона $\varphi(\mathbf{r})$ (1.2.8). Одновременно это будет доказательством уравнения Максвелла (1.2.11). Существуют разные способы доказательства. Простейший из них – это проверка того, что фурье-образы функций $\Phi(\mathbf{r})$ и $\varphi(\mathbf{r})$ одинаковы: $\hat{\Phi}(\mathbf{k}) = \hat{\varphi}(\mathbf{k})$.

(I) Находим $\hat{\Phi}(\mathbf{k})$.

Применим преобразование Фурье к обеим частям уравнения $\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Delta\Phi(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} &= \frac{-4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \Rightarrow \\ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \right) dx dy dz &= -4\pi \hat{\rho}(\mathbf{k}) \Rightarrow \\ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left(ik_x \frac{\partial\Phi}{\partial x} + ik_y \frac{\partial\Phi}{\partial y} + ik_z \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) dx dy dz &= -4\pi \hat{\rho}(\mathbf{k}) \Rightarrow \\ \frac{-1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \right) \Phi dx dy dz &= -4\pi \hat{\rho}(\mathbf{k}) \Rightarrow \\ (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \hat{\Phi}(\mathbf{k}) &= 4\pi \hat{\rho}(\mathbf{k}) \Rightarrow \\ \hat{\Phi}(\mathbf{k}) &= \frac{4\pi}{k^2} \hat{\rho}(\mathbf{k}), \quad \text{где } k^2 = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

(II) Находим $\hat{\varphi}(\mathbf{k})$.

Применим преобразование Фурье к интегралу Пуассона $\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\mathbf{k}) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \\ &= \hat{\rho}(\mathbf{k}) \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-i\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{r}}} \frac{1}{\tilde{r}} \tilde{r}^2 \sin\theta d\tilde{r} d\theta d\phi = \hat{\rho}(\mathbf{k}) \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-ik\tilde{r}\cos\theta} \tilde{r} \sin\theta d\tilde{r} d\theta d\phi = \\ &= 2\pi \hat{\rho}(\mathbf{k}) \int_0^\infty \tilde{r} d\tilde{r} \int_0^\pi e^{-ik\tilde{r}\cos\theta} \sin\theta d\theta = 2\pi \hat{\rho}(\mathbf{k}) \int_0^\infty \tilde{r} d\tilde{r} \int_{-1}^1 e^{-ik\tilde{r}\mu} d\mu = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi\hat{\rho}(\mathbf{k}) \int_0^{\infty} \frac{\tilde{r}}{ik\tilde{r}} (e^{ik\tilde{r}} - e^{-ik\tilde{r}}) d\tilde{r} = 2\pi\hat{\rho}(\mathbf{k}) \frac{1}{ik} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tilde{r}} (e^{ik\tilde{r}} - e^{-ik\tilde{r}}) d\tilde{r} = \\
&= 2\pi\hat{\rho}(\mathbf{k}) \frac{1}{ik} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\alpha - ik} - \frac{1}{\alpha + ik} \right] = 4\pi\hat{\rho}(\mathbf{k}) \frac{1}{k^2} \Rightarrow \hat{\Phi}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi}{k^2} \hat{\rho}(\mathbf{k}). \quad (1.3.2)
\end{aligned}$$

В цепочке преобразований (1.3.2) использована сферическая система координат (r, θ, ϕ) , ϕ не путать с потенциалом φ .

Сравнивая формулы (1.3.1) и (1.3.2), приходим к выводу, что $\hat{\Phi}(\mathbf{k}) = \hat{\varphi}(\mathbf{k})$. А это значит, что $\Phi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r})$. Таким образом, доказано, что интеграл Пуассона (1.2.8) есть решение уравнения Пуассона (1.2.12). Отсюда следует, что $\Delta\Phi(\mathbf{r}) = \text{div}\nabla\varphi(\mathbf{r}) = -\text{div}\mathbf{E}(\mathbf{r})$, поскольку $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r})$. Приравнявая правые части этого уравнения и уравнения Пуассона $\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r})$, получаем $\text{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r})$. Уравнение Максвелла (1.2.11) доказано.

1.4. Момент силы, действующей на систему электрических зарядов. Дипольный момент.

Дипольный момент пары электрических разноименных зарядов.

Дипольный момент системы электрических зарядов.

Точечный электрический диполь

Известно, что момент силы, приложенной к некоторому объему Ω , в классической механике определяется соотношением:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} [\mathbf{r}, \mathbf{f}(\mathbf{r})] d^3\mathbf{r}, \quad (1.4.1)$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ - плотность силы.

Плотность силы, действующей на заряд во внешнем поле \mathbf{E}^* , можно определить из формулы (1.2.7):

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}^*(\mathbf{r}). \quad (1.4.2)$$

Подставляя плотность силы (1.4.2) в формулу (1.4.1), получаем выражение:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} [\mathbf{r}, \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}^*(\mathbf{r})] d^3\mathbf{r} = \int_{\Omega} [\rho(\mathbf{r})\mathbf{r}, \mathbf{E}^*(\mathbf{r})] d^3\mathbf{r}. \quad (1.4.3)$$

Для однородного в области распределенного заряда внешнего поля \mathbf{E}^* формула (1.4.3) преобразуется к виду:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} [\rho(\mathbf{r})\mathbf{r}, \mathbf{E}^*(\mathbf{r})] d^3\mathbf{r} = [\mathbf{p}, \mathbf{E}^*]. \quad (1.4.4)$$

Здесь введено новое понятие - дипольный момент системы зарядов, сосредоточенных внутри ограниченного объема Ω :

$$\mathbf{p} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3\mathbf{r}. \quad (1.4.5)$$

Возьмем два разноименных точечных заряда, расположенных в точках \mathbf{r}_A и \mathbf{r}_B , и определим их дипольный момент:

$$\mathbf{p} = \int_{\Omega} (+q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_A) - q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_B)) \mathbf{r} d^3\mathbf{r} = q(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B). \quad (1.4.6)$$

Видно, что для этой системы зарядов, называемой электрическим диполем, дипольный момент пропорционален величине одного заряда и расстоянию между зарядами, называемому плечом диполя.

Для n точечных зарядов дипольный момент определяется из формулы (1.4.5):

$$\mathbf{p} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3\mathbf{r} = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) \mathbf{r} d^3\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}_i. \quad (1.4.7)$$

Отметим, что для системы с нулевым суммарным зарядом $q = 0$ дипольный момент, определяемый по формулам (1.4.5) - (1.4.7), является инвариантом системы. Он не меняется при перемещении системы зарядов без изменения их взаимного расположения. Это свойство дипольного момента проверяется простой подстановкой $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$ в (1.4.5) - (1.4.7).

Важно также заметить, что электрически нейтральная система зарядов обладает в общем случае ненулевым дипольным моментом.

Существует понятие точечного диполя, когда считается, что дипольный момент системы зарядов сосредоточен в точке. Для точечного диполя, расположенного в начале координат, плотность заряда можно записать через дипольный момент:

$$\rho(\mathbf{r}) = -(\mathbf{p}, \nabla \delta(\mathbf{r})). \quad (1.4.8)$$

Проверим, верно ли это. Найдем дипольный момент системы зарядов, определяемых плотностью (1.4.8), при этом выбираем систему координат (x, y, z) так, чтобы $\mathbf{p} = p_x \mathbf{e}_x$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3\mathbf{r} &= \int_{\Omega} -(\mathbf{p}, \nabla \delta(\mathbf{r})) \mathbf{r} d^3\mathbf{r} = -\int_{\Omega} p_x \frac{\partial \delta(\mathbf{r})}{\partial x} \mathbf{r} d^3\mathbf{r} = \\ &= -\int_{\Omega} (p_x x \frac{\partial \delta(\mathbf{r})}{\partial x} \mathbf{e}_x + p_x y \frac{\partial \delta(\mathbf{r})}{\partial x} \mathbf{e}_y + p_x z \frac{\partial \delta(\mathbf{r})}{\partial x} \mathbf{e}_z) d^3\mathbf{r} = \\ &= -\int_{\Omega} (p_x x \delta(y) \delta(z) \frac{d\delta(x)}{dx} \mathbf{e}_x + p_x y \delta(y) \delta(z) \frac{d\delta(x)}{dx} \mathbf{e}_y + p_x z \delta(y) \delta(z) \frac{d\delta(x)}{dx} \mathbf{e}_z) d^3\mathbf{r} = \\ &= \int_{\Omega} p_x \delta(y) \delta(z) \delta(x) \mathbf{e}_x d^3\mathbf{r} = p_x \mathbf{e}_x = \mathbf{p}, \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

что и требовалось доказать. Здесь мы использовали следующее свойство дельта-функции: $\int f \delta'(x) dx = -\int f' \delta(x) dx$, см. Приложение 2.

Можно убедиться, что заряд точечного диполя, равен нулю:

$$q = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = -\int_{\Omega} (\mathbf{p}, \nabla \delta(\mathbf{r})) d^3\mathbf{r} = -\int_{\Omega} p_x \frac{\partial \delta(\mathbf{r})}{\partial x} d^3\mathbf{r} = \int_{\Omega} p'_x \delta(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 0. \quad (1.4.10)$$

Введем в рассмотрение вектор плотности дипольного момента \mathbf{P} , связанной с дипольным моментом соотношением:

$$\mathbf{p} = \int_{\Omega} \mathbf{P} d^3\mathbf{r}. \quad (1.4.11)$$

Вектор \mathbf{P} носит название вектора поляризации (см. подробнее в Главе 2). Очевидно, что для точечного дипольного момента, сосредоточенного в начале координат, вектор поляризации выражается соотношением:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} \delta(\mathbf{r}). \quad (1.4.12)$$

Эта формула используется при рассмотрении дипольного осциллятора в Главе 3.

1.5. Асимптотика электростатического поля

В предыдущей главе мы нашли, как внешнее поле действует на заряды, обладающие дипольным моментом. Сейчас нас интересует вопрос о том, какое поле создают сами распределенные заряды, и как собственное поле зарядов связано с их дипольным моментом.

Итак, заряд распределен в ограниченной области с максимальным линейным размером R . Пусть начало координат лежит внутри области сосредоточения заряда, а точка наблюдения \mathbf{r} расположена далеко от этой области: $|\mathbf{r}| \gg R$. Поле, создаваемое таким зарядом в точке \mathbf{r} , известно:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}'. \quad (1.5.1)$$

По условию задачи $|\mathbf{r}| \gg R$ и $|\mathbf{r}'| \leq R$, тогда дробь в формуле (1.5.1) можно разложить в ряд Тейлора по степеням $\mathbf{r}'/|\mathbf{r}|$:

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} &= \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|^3} \left(1 - 2 \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|^2} + \frac{|\mathbf{r}'|^2}{|\mathbf{r}|^2} \right)^{-3/2} \approx \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|^3} \left(1 + \frac{3(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|^2} \right) \approx \\ &\approx \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \left(\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|^5} - \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|^3} \right) \dots \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Подставив (1.5.2) в (1.5.10) и учитывая, что $q = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$ и $\mathbf{p} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d^3\mathbf{r}'$, получаем:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - |\mathbf{r}|^2 \mathbf{p}}{|\mathbf{r}|^5} + \dots \quad (1.5.3)$$

Первое слагаемое в разложении (1.5.3) – это кулоновское поле точечного заряда, расположенного в начале координат. Не трудно показать, что второе слагаемое – это поле точечного диполя, расположенного в начале координат.

Потенциал $\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$ (1.2.8) в точке, далекой от области распределения заряда, также можно представить в виде разложения по мультипольным моментам, заменив предварительно функцию $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ рядом по степеням $\mathbf{r}'/|\mathbf{r}|$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r}|} + \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{|\mathbf{r}|^3} + \dots \quad (1.5.4)$$

Для точечного заряда, помещенного в начало координат, потенциал в точке \mathbf{r} представляет собой первый член разложения (1.5.4). В этом можно убедиться подстановкой точечного заряда $\rho = q\delta(\mathbf{r}')$ в формулу $\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$ (1.2.8). Важно отметить, что электрически нейтральная система зарядов создает электрическое поле, обусловленное ненулевым дипольным моментом. Если же дипольный момент системы равен нулю, то поле вычисляется с помощью членов ряда более высокого порядка. Тогда же имеет смысл ввести понятие тензора квадрупольного момента.

1.6. Энергия электрических зарядов. Энергия электростатического поля

Найдем энергию взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2 , расположенных в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 соответственно. Для этого определим алгебраическую сумму элементарных работ сил Кулона $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ и $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ (1.1.2) по перемещению зарядов на расстояния $d\mathbf{r}_1$ и $d\mathbf{r}_2$:

$$\delta A = \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot d\mathbf{r}_2. \quad (1.6.1)$$

Учитывая, что по третьему закону Ньютона $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = -\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$, перепишем формулу (1.6.1) в виде:

$$\delta A = \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot (d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2). \quad (1.6.2)$$

Величина в скобках – это перемещение заряда 1 относительно заряда 2. Можно, считать, что заряд 2 в результате взаимодействия остается неподвижным, а заряд 1 перемещается на величину $d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2$. Это перемещение направлено вдоль силы $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$. Обозначим его, как $d\mathbf{r}'$, и формулу (1.6.2) перепишем в виде:

$$\delta A = \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot d\mathbf{r}'. \quad (1.6.3)$$

С другой стороны, работа по перемещению заряда есть уменьшение потенциальной энергии заряда 1 в поле заряда 2, то есть уменьшение потенциальной энергии взаимодействия зарядов:

$$\delta A = -dW. \quad (1.6.4)$$

Обозначим $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \mathbf{r}_{12}$ и $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = \mathbf{r}'$. Проинтегрируем соотношение (1.6.4) с учетом выражения для силы Кулона (1.1.2). При этом считаем, что величина полной энергии взаимодействия двух зарядов – это работа по перемещению заряда 1 из бесконечности в точку \mathbf{r}_1 . В системе координат, связанной с зарядом 2, 1-й заряд имеет координату \mathbf{r}_{12} :

$$W = -A = -\int_{\infty}^{r_{12}} \frac{q_1 q_2}{r'^2} dr' = \frac{q_1 q_2}{r'} \Big|_{\infty}^{r_{12}} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}} = \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (1.6.5)$$

Используя выражение для потенциала точечного заряда $\varphi(\mathbf{r}) = q/|\mathbf{r}|$, можно записать:

$$W = q_1 \varphi_{12} = q_2 \varphi_{21} = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_{12} + q_2 \varphi_{21}). \quad (1.6.6)$$

Здесь $\varphi_{12} = \frac{q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$ и $\varphi_{21} = \frac{q_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$.

Обобщая формулу (1.6.6) на систему N точечных зарядов, получаем их энергию взаимодействия:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi(\mathbf{r}_i), \quad (1.6.7)$$

где $\varphi(\mathbf{r}_i)$ - потенциал, который создают в точке расположения i -го заряда *все остальные* заряды.

Попробуем переписать формулу (1.6.7) для системы распределенных в объеме зарядов $dq = \rho(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}$:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}. \quad (1.6.8)$$

Равенство (1.6.8) не эквивалентно выражению (1.6.7). Покажем это. Подставим в формулу (1.5.8) плотность точечных зарядов

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i):$$

$$W = \frac{1}{2} \int \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \varphi(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi(\mathbf{r}_i), \quad (1.6.9)$$

где $\varphi(\mathbf{r}_i)$ - потенциал, который создают в точке расположения i -го заряда *все* заряды, в том числе и сам i -й заряд. Таким образом, в формулы (1.6.8) и (1.6.9) входят не только энергии взаимодействия зарядов, но и собственные энергии зарядов. Формально это можно записать так:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i|}. \quad (1.6.10)$$

Здесь собственные энергии зарядов заключены во вторую сумму.

Собственную энергию i -го заряда можно трактовать, как работу со знаком минус по перемещению заряда собственным полем из бесконечности в точку локализации заряда \mathbf{r}_i .

Из-за сингулярности потенциала точечного заряда, его собственную энергию в рамках классической электродинамики рассчитать нельзя. Необходимо подключать экспериментальные данные по измерению энергии, или вводить, например, радиус обрезания собственного потенциала в точке заряда. Для системы же распределенных зарядов формула (1.6.8) «работает» хорошо.

Рассмотрим систему двух зарядов, распределенных с плотностями $\rho_1(\mathbf{r})$ и $\rho_2(\mathbf{r})$, и обладающих потенциалами $\varphi_1(\mathbf{r})$ и $\varphi_2(\mathbf{r})$. Найдем энергию системы по формуле (1.5.8):

$$W = \frac{1}{2} \int (\rho_1 + \rho_2)(\varphi_1 + \varphi_2) d^3 \mathbf{r} = \frac{1}{2} \int \rho_1 \varphi_1 d^3 \mathbf{r} + \frac{1}{2} \int \rho_2 \varphi_2 d^3 \mathbf{r} + \frac{1}{2} \int (\rho_1 \varphi_2 + \rho_2 \varphi_1) d^3 \mathbf{r}. \quad (1.6.11)$$

Отдельные составляющие энергии системы - это собственные энергии зарядов

$$W_s = \frac{1}{2} \int \rho_i \varphi_i d^3 \mathbf{r} = \frac{1}{2} \int \frac{\rho_i(\mathbf{r}) \rho_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}', \quad i = 1, 2, \quad (1.6.12a)$$

и энергия взаимодействия зарядов

$$W_{int} = \frac{1}{2} \int (\rho_i \varphi_k + \rho_k \varphi_i) d^3 \mathbf{r} = \int \rho_i \varphi_k d^3 \mathbf{r} = \int \rho_k \varphi_i d^3 \mathbf{r} = \int \frac{\rho_i(\mathbf{r}) \rho_k(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}', \quad (i \neq k; i, k=1, 2) \quad (1.6.12b)$$

В формулах (1.6.12) использовано выражение для потенциала распределенного заряда (1.2.8): $\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$.

Перепишем подынтегральное выражение энергии (1.6.8), т.е. плотность энергии, используя уравнение Максвелла $\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r})$ (1.2.11) и связь между напряженностью и потенциалом $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ (1.2.9):

$$\rho\varphi = \frac{1}{4\pi} \varphi \operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} (\operatorname{div}(\varphi\mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \nabla\varphi) = \frac{1}{4\pi} (\operatorname{div}(\varphi\mathbf{E}) + E^2). \quad (1.6.13)$$

Проинтегрируем выражение (1.6.13), применив теорему Остроградского-Гаусса:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (\operatorname{div}(\varphi\mathbf{E}) + E^2) d^3\mathbf{r} = \frac{1}{8\pi} \oint \varphi\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{8\pi} \int E^2 d^3\mathbf{r} = \frac{1}{8\pi} \int E^2 d^3\mathbf{r}. \quad (1.6.14)$$

Интеграл по поверхности равен нулю, поскольку, во-первых, поверхность, охватывающая заряд, взята бесконечно удаленной от него, а, во-вторых, учтено, что напряженность на бесконечности стремится к нулю.

Мы получили энергию электростатического поля (1.6.14) и можем записать плотность энергии:

$$w = \frac{E^2}{8\pi}. \quad (1.6.15)$$

Отметим, особенности выражений для энергии (1.6.8) и (1.6.14). Формула (1.6.8) дает энергию распределенных зарядов, формула (1.6.14) дает энергию электрического поля. Если плотность распределенного заряда в (1.6.8) равна нулю, то и плотность энергии заряда, и энергия заряда равны нулю. С другой стороны, если в пространстве нет заряда, но есть поле, то электрическая энергия не равна нулю, см. (1.6.14) и (1.6.15).

1.7. Закон Кулона для магнитных полюсов.

Единицы измерения магнитного заряда и магнитного поля в гауссовой системе

Магнитные явления впервые были обнаружены при изучении постоянных магнитов. Поначалу представление о магнитных зарядах или магнитных массах было подобно представлению об электрических зарядах. Однако опыт показал, что в отличие от электрических зарядов магнитные заряды противоположных знаков не могут быть отделены друг от друга (Ш. Кулон, 1789 г.). Закон Кулона для полюсов постоянных магнитов может быть записан в виде, аналогичном закону для электрических зарядов (1.1.2):

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_{M1}q_{M2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (1.7.1)$$

Здесь q_{M1}, q_{M2} - величины магнитных зарядов со своими знаками. Для того, чтобы найти зависимость (1.7.1), необходимо было уметь уменьшать или увеличивать заряды в целое число раз. Для этих целей постоянные магниты (магнитные спицы) переламывались пополам и обломки связывались. Таким образом, магнитный заряд удваивался, учетверялся и т.п.

Напряженность магнитного поля полюса постоянного магнита можно определить как силу, действующую на единичный магнитный заряд q_M :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q_M}. \quad (1.7.2)$$

Далее, в соответствие с цепочкой построения уравнений для электростатического поля, можно, например, записать:

$$\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.7.3a)$$

$$\text{div } \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 4\pi \rho_M(\mathbf{r}), \quad (1.7.3b)$$

где ρ_M - плотность магнитных масс.

Для решения задач удобно ввести псевдоскалярный потенциал ψ и два уравнения (1.7.3) заменить одним уравнением Пуассона (1.2.12).

Однако дальнейшее исследование электромагнетизма показало, что уравнения (1.7.3) пригодны только для описания полей полюсов постоянных магнитов. Магнитостатическое поле по своей сути не является потенциальным и не характеризуется скалярным потенциалом.

В гауссовой системе единица магнитной массы выбирается так, что две единичные массы, находящиеся на расстоянии 1 см друг от друга, взаимодействовали бы с силой 1 дина. Таким образом, размерность магнитной массы такая же, как и у электрического заряда (1.1.3). Отсюда единицей магнитного поля является поле, создаваемой единичной магнитной массой на расстоянии 1 см. На основании выражения (1.7.2) с учетом (1.7.1) можно записать размерность магнитного поля в гауссовой системе:

$$[H]_{\text{ГС}} = [q_M]_{\text{ГС}} x^{-2} = \sqrt{F} x^2 x^{-2} = m^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} t^{-1} \quad (1.7.4)$$

Единица магнитного поля имеет специальное название – *эрстед* (\mathcal{E} , Oe).

1.8. Опыт Эрстеда с электрическим током и магнитными стрелками.

Замкнутость магнитных силовых линий. Дифференциальные уравнения магнитного поля. Электродинамическая постоянная - *эди*

Во времена Кулона уже было ясно, что магнитные заряды постоянных магнитов в отличие от электрических зарядов неразделимы. Исходя из этого, можно представить в качестве источников магнитного поля магнитные диполи. Истинная же природа магнетизма еще долгое время

оставалась непонятной. В 1800 году впервые *Алессандро Вольт* изобрел многоэлементную электрическую батарею - источник электрического тока. Батарея работала в течение нескольких часов и давала ток ~ 1 А. Стали возможны опыты с токами. *Ханс Христиан Эрстед* исследовал воздействие тока на магнитную стрелку и обнаружил, что вблизи проводника с током магнитная стрелка поворачивается. Он написал брошюру «Опыты, относящиеся к действию электрического конфликта на магнитную стрелку» (конфликт - это ток). В брошюре Эрстед констатировал, что, во-первых, стационарный ток создает вблизи себя магнитное поле, которое и взаимодействует с постоянными магнитами, и, во-вторых, это магнитостатическое поле – вихревое. Согласно этим наблюдениям и учитывая факт отсутствия свободных магнитных зарядов, формально для напряженности магнитостатического поля \mathbf{H} можно записать:

$$\text{rot } \mathbf{H} = k_M \mathbf{j}, \quad (1.8.1)$$

где \mathbf{j} - плотность электрического тока, создающего магнитное поле \mathbf{H} , а k_M - коэффициент пропорциональности, и

$$\text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (1.8.2)$$

Уравнение (1.8.1) отражает *вихревой* характер магнитостатического поля. Правая часть этого уравнения будет обоснована ниже. Уравнение (1.8.2) иллюстрирует отсутствие свободных магнитных зарядов.

В гауссовой системе единиц коэффициент k_M выбирается, как $4\pi / c$. Размерность постоянной c определяется подстановкой размерности магнитного поля (1.7.4) в левую часть уравнения (1.8.1) и подстановкой размерности плотности тока через заряд (1.1.3) в правую часть уравнения (1.8.1):

$$\underbrace{m^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} t^{-1}}_H x^{-1} = c^{-1} \underbrace{m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} t^{-1}}_q t^{-1} x^{-2} \Rightarrow c = x t^{-1}. \quad (1.8.3)$$

Итак, постоянная c имеет размерность скорости и носит название электродинамической постоянной - *эдп*. Опыт показал, что $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/сек. Физический смысл этой постоянной как скорости света в вакууме был выяснен, когда с достаточной степенью точности была измерена скорость света.

1.9. Введение векторного потенциала магнитостатического поля. Условие калибровки. Уравнение Пуассона для векторного потенциала и его решение в форме интеграла Пуассона. Интеграл Пуассона для магнитного поля и формула закона Био-Савара-Лапласа

Рассмотрим уравнение (1.8.2). Из него следует, что поле \mathbf{H} можно представить в виде:

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (1.9.1)$$

поскольку для любого векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ выполняется тождество $\text{div rot } \mathbf{a}(\mathbf{r}) = 0$ (полагается, что поле $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ достаточно гладкое и не имеет особенностей в виде скачков или сингулярностей в области дифференцирования).

Вектор \mathbf{A} называется векторным потенциалом магнитного поля. Применим операцию $\text{rot} \equiv \nabla \times$ к обеим частям равенства (1.9.1):

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} = \text{rot rot } \mathbf{A} &\Rightarrow \text{rot } \mathbf{H} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow \text{rot } \mathbf{H} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \Rightarrow \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \nabla(\text{div } \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (1.9.2)$$

В формуле (1.9.2) показано, как получается формула для двойного вихря с помощью оператора набла и формулы векторной алгебры «бац минус цаб». Напомним эту формулу для векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ или в скобочной записи $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Введем условие для векторного потенциала:

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (1.9.3)$$

Уравнение (1.9.3) называется калибровкой Кулона. Подставим его в формулу (1.9.2) и перепишем уравнение (1.8.1) с учетом калибровки (1.9.3):

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (1.9.4)$$

Уравнение (1.9.4) – это уравнение Пуассона для векторного потенциала \mathbf{A} . Для каждой компоненты вектора \mathbf{A} уравнение (1.9.4) аналогично уравнению для потенциала электростатического поля (1.2.12), решением которого, как было доказано, является интеграл Пуассона (1.2.8). Следовательно, для каждой компоненты векторного потенциала можно записать решение в виде интеграла Пуассона.

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{j_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}', \quad i = x, y, z \quad (1.9.5)$$

Окончательно, векторный потенциал, удовлетворяющий уравнению (1.9.4), представим в виде:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}'. \quad (1.9.6)$$

На основании векторного потенциала (1.9.6) найдем магнитное поле из соотношения (1.9.1):

$$H_x = \text{rot}_x \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{j_z(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{j_y(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right\} d^3 \mathbf{r}' =$$

$$= \frac{1}{c} \int \left\{ -\frac{j_z(\mathbf{r}')(y-y')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \frac{j_y(\mathbf{r}')(z-z')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right\} d^3\mathbf{r}' = \frac{1}{c} \int \frac{j_y(\mathbf{r}')(z-z') - j_z(\mathbf{r}')(y-y')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}'$$

$$H_y = \text{rot}_y \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{j_z(\mathbf{r}')(x-x') - j_x(\mathbf{r}')(z-z')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' ,$$

$$H_z = \text{rot}_z \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{j_x(\mathbf{r}')(y-y') - j_y(\mathbf{r}')(x-x')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' , \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), (\mathbf{r}-\mathbf{r}')] }{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' . \quad (1.9.7)$$

Это выражение для магнитного поля, создаваемого током \mathbf{j} , носит название закона Био-Савара-Лапласа по именам *Жана Био* и *Феликса Савара*, открывших его в 1820 г., и П.-С. Лапласа, облекшего закон в математическую форму. Зависимость (1.9.7) была получена экспериментально. Таким образом, наши предположения об уравнениях поля \mathbf{H} (1.8.1) и (1.8.2) оказались верными. Уравнения (1.8.1) и (1.8.2) – это пара дифференциальных уравнений Максвелла для магнитостатического поля.

Граничные условия для магнитостатического поля можно найти с помощью интегральных уравнений Максвелла, которые получаются аналогично интегральным уравнениям электростатического поля (1.2.14a,b):

$$\int_S \text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} J , \quad (1.9.8a)$$

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{H}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \oint_S \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0 . \quad (1.9.8b)$$

Здесь J - скалярная величина, обозначающая силу тока:

$$J = \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} . \quad (1.9.9)$$

На границах, где плотность тока имеет особенность в виде скачка или сингулярности, дифференциальные уравнения Максвелла (1.8.1) и (1.8.2) неприменимы. Плотность тока с особенностью в тонком приграничном слое представим как $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) + \mathbf{i}\delta(z)$, где $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r})$ - плотность тока в объеме и \mathbf{i} - поверхностная плотность тока, ось z направлена вдоль нормали к границе \mathbf{n} (рис. 1.2a). Граничные условия, которые накладываются на поле \mathbf{H} , определяются из интегральных формул (1.9.8a,b) и дополнительных построений, изображенных на рис. 1.2. Отдельно необходимо подчеркнуть,

что $\int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$ - это поток вектора $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ через поверхность S с нормалью \mathbf{v} , которую ограничивает контур ℓ (рис. 1.2а). Повторяя рассуждения, которые мы проводили при выводе граничных условий для электростатического поля, получаем

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_v, \quad H_{1n} = H_{2n}, \quad (1.9.10a,b)$$

где i_v - проекция плотности поверхностного тока на направление \mathbf{v} . Направления ортов $\mathbf{n}, \mathbf{\tau}, \mathbf{v}$ указаны на рис. 1.2а.

1.10. Сила, действующая со стороны замкнутого электрического тока на магнитный полюс

Определим силу, действующую со стороны замкнутого тока на магнитную массу. Согласно уравнению (1.7.2) на точечную магнитную массу q_M , находящуюся в точке \mathbf{r} , действует со стороны поля \mathbf{H} , которое в рассматриваемом случае создано током J , следующая сила:

$$\mathbf{F}_{J \rightarrow q_M}(\mathbf{r}) = q_M \mathbf{H}(\mathbf{r}). \quad (1.10.1)$$

Подставив в это соотношение закон Био-Савара-Лапласа (1.9.7), получаем следующее выражение:

$$\mathbf{F}_{J \rightarrow q_M}(\mathbf{r}) = \frac{q_M}{c} \int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}'. \quad (1.10.2)$$

Из закона Кулона для магнитных масс (1.7.1) можно записать, поле точечной массы, расположенной в точке \mathbf{r}' :

$$\mathbf{H}_M(\mathbf{r}') = -\frac{q_M(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (1.10.3)$$

Здесь \mathbf{r}' - точка наблюдения.

Запишем искомую силу, действующую со стороны тока на магнитный полюс, в окончательном виде:

$$\mathbf{F}_{J \rightarrow q_M}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c} \int [\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{H}_M(\mathbf{r}')] d^3\mathbf{r}'. \quad (1.10.4)$$

1.11. Сила Ампера, действующая со стороны магнитной массы на систему замкнутых токов. Различные формы закона Ампера: плотность силы Ампера, сила, действующая на отрезок проводника с током, и сила Лоренца

В настоящем разделе мы найдем силы, действующие в системах с постоянными токами в присутствии магнитного поля.

Определим силу $\mathbf{F}_{q_M \rightarrow J}(\mathbf{r})$, которая действует со стороны магнитной массы q_M на ток J . Воспользуемся при этом выражением для силы, действующей со стороны тока на магнитную массу $\mathbf{F}_{J \rightarrow q_M}(\mathbf{r})$ (1.10.4). Согласно 3-му закону Ньютона, получим:

$$\mathbf{F}_{q_M \rightarrow J}(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}_{J \rightarrow q_M}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int [\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{H}_M(\mathbf{r}')] d^3 \mathbf{r}'. \quad (1.11.1)$$

В том случае, если у нас имеется поле, созданное системой магнитных масс, в силу принципа суперпозиции, можно записать поле общего вида:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = \sum_M \mathbf{H}_M(\mathbf{r}'). \quad (1.11.2)$$

Тогда формула для силы, действующей со стороны поля на ток, приобретает вид:

$$\mathbf{F}_A(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int [\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{H}(\mathbf{r}')] d^3 \mathbf{r}'. \quad (1.11.3)$$

Эта сила называется силой Ампера.

Андре-Мари Ампер провел множество опытов по исследованию взаимодействия между магнитом и электрическим током, создав для этих целей ряд приборов. В 1820 году он открыл взаимодействие между электрическими токами и сформулировал закон этого явления (закон Ампера).

Силу Ампера, как и любую другую силу, можно представить с помощью плотности силы:

$$\mathbf{F}_A(\mathbf{r}) = \int \mathbf{f}_A(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'. \quad (1.11.4)$$

В результате для плотности силы Ампера из формулы (1.11.3) получаем выражение:

$$\mathbf{f}_A(\mathbf{r}') = \frac{1}{c} [\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{H}(\mathbf{r}')]. \quad (1.11.5)$$

Пусть плотность тока в проводнике – это не зависящий от координаты вектор \mathbf{j} , т.е. так называемый константный вектор. В таком случае, зная поперечное сечение проводника s и силу тока J , можно найти плотность тока $\mathbf{j} = \frac{J}{s} \boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ - направляющий орт. В однородном магнитном поле ($\mathbf{H} = \text{const}$) на отрезок ℓ проводника с током действует следующая сила:

$$\mathbf{F}_A = \frac{1}{c} \int [\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{H}(\mathbf{r}')] d^3 \mathbf{r}' = \frac{1}{c} \left[\int \frac{J}{s} \boldsymbol{\tau} d^3 \mathbf{r}', \mathbf{H} \right] = \frac{1}{c} \left[\frac{J s \ell}{s} \boldsymbol{\tau}, \mathbf{H} \right] = \frac{J}{c} [\boldsymbol{l}, \mathbf{H}], \quad (1.11.6)$$

где введено обозначение $\boldsymbol{l} = \ell \boldsymbol{\tau}$.

Пользуясь законом (1.11.3), можно найти силу, действующую на точечный заряд q , движущийся со скоростью \mathbf{v} , в поле \mathbf{H} . Для этого представим плотность тока в следующем виде:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}')\mathbf{v} = q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\mathbf{v}. \quad (1.11.7)$$

Подставив выражение (1.11.7) в (1.11.3), получаем искомую силу, которая носит название силы Лоренца:

$$\mathbf{F}_L(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int [q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\mathbf{v}, \mathbf{H}(\mathbf{r}')] d^3\mathbf{r}' = \frac{q}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}]. \quad (1.11.8)$$

Хендрик Лоренц вывел эту формулу в 1892 году. По некоторым источникам за три года до Лоренца правильное выражение для силы, действующей на движущийся в магнитном поле заряд, было найдено *Оливером Хевисайдом*.

1.12. Момент магнитной силы, действующей на систему токов.

Магнитный дипольный момент системы токов.

Точечный магнитный диполь.

Рассмотрим некоторую распределенную систему токов $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, находящуюся в ограниченной области Ω . Вне области и на ее границе, токи равны нулю. На систему токов, помещенных во внешнее магнитное поле \mathbf{H}^* , действует сила Ампера, плотность которой определена соотношением (1.11.5). Найдем момент этой силы:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} [\mathbf{r}, \mathbf{f}_A(\mathbf{r})] d^3\mathbf{r} = \frac{1}{c} \int_{\Omega} [\mathbf{r}, [\mathbf{j}(\mathbf{r}), \mathbf{H}^*(\mathbf{r})]] d^3\mathbf{r}. \quad (1.12.1)$$

Представим двойное векторное произведение в этом выражении двумя слагаемыми по правилу «бац минус цаб»:

$$\mathbf{K} = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \{ \mathbf{j}(\mathbf{r})(\mathbf{r}, \mathbf{H}^*(\mathbf{r})) - \mathbf{H}^*(\mathbf{r})(\mathbf{r}, \mathbf{j}(\mathbf{r})) \} d^3\mathbf{r}. \quad (1.12.2)$$

Проанализируем отдельно каждое слагаемое в формуле (1.12.2), приняв обозначения:

$$\mathbf{K}_1 = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \mathbf{j}(\mathbf{r})(\mathbf{r}, \mathbf{H}^*(\mathbf{r})) d^3\mathbf{r}, \quad (1.12.3a)$$

$$\mathbf{K}_2 = -\frac{1}{c} \int_{\Omega} \mathbf{H}^*(\mathbf{r})(\mathbf{r}, \mathbf{j}(\mathbf{r})) d^3\mathbf{r}. \quad (1.12.3b)$$

Покажем, что $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1$, т.е. $\mathbf{K}_2 = 0$. Из уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ следует:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (1.12.4)$$

так как для любой достаточно гладкой векторной функции $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ выполняется тождество $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = 0$. Представим радиус-вектор как градиент функции: $\mathbf{r} = \nabla(\frac{1}{2}r^2)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. В декартовой системе координат это представление справедливо, в криволинейных же координатах - нет, поскольку радиус-вектор - это контравариантный вектор, а градиент функции - ковариантный вектор. Подставим $\mathbf{r} = \nabla \varphi$ в выражение для \mathbf{K}_2 (1.12.3b) и применим тождество $\operatorname{div}(\varphi \mathbf{b}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{b} + (\mathbf{b}, \nabla \varphi)$. С учетом однородности магнитного поля $\mathbf{H}^*(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^*$ в области распределения токов получаем:

$$\mathbf{K}_2 = -\frac{1}{c} \int_{\Omega} \mathbf{H}^*(\nabla \varphi, \mathbf{j}) d^3 \mathbf{r} = \frac{1}{c} \mathbf{H}^* \int_{\Omega} \{\varphi \operatorname{div} \mathbf{j} - \operatorname{div}(\varphi \mathbf{j})\} d^3 \mathbf{r}. \quad (1.12.5)$$

Перепишем выражение (1.12.5) с использованием теоремы Остроградского-Гаусса:

$$\mathbf{K}_2 = \frac{1}{c} \mathbf{H}^* \int_{\Omega} \{\varphi \operatorname{div} \mathbf{j} - \operatorname{div}(\varphi \mathbf{j})\} d^3 \mathbf{r} = \frac{1}{c} \mathbf{H}^* \left\{ \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} \mathbf{j} d^3 \mathbf{r} - \oint_S \varphi \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \right\}. \quad (1.12.6)$$

Отметим, что первый итоговый интеграл в ф. (1.12.6) равен нулю, так как $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ (1.12.4). Второй интеграл также нулевой, поскольку в дополнение к $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ вне области распределения токов Ω $\mathbf{j} = 0$, значит, на границе этой области $j_n|_S = 0$. Итак, мы выяснили, что

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1. \quad (1.12.7)$$

Найдем интеграл \mathbf{K}_1 . Для этого представим его в виде суммы интегралов \mathbf{K}_a и \mathbf{K}_s :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \frac{1}{c} \int_{\Omega} \mathbf{j}(\mathbf{r})(\mathbf{r}, \mathbf{H}^*(\mathbf{r})) d^3 \mathbf{r} = \mathbf{K}_a + \mathbf{K}_s = \\ &= \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \{\mathbf{j}(\mathbf{H}^*, \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{H}^*, \mathbf{j})\} d^3 \mathbf{r} + \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \{\mathbf{j}(\mathbf{H}^*, \mathbf{r}) + \mathbf{r}(\mathbf{H}^*, \mathbf{j})\} d^3 \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (1.12.8)$$

Покажем, что $\mathbf{K}_s = 0$. Воспользуемся стандартным приемом в системе доказательств теории поля. Для этого скалярно умножим вектор \mathbf{K}_s на некоторый постоянный вектор \mathbf{b} :

$$(\mathbf{K}_s, \mathbf{b}) = \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \{(\mathbf{b}, \mathbf{j}(\mathbf{H}^*, \mathbf{r})) + (\mathbf{b}, \mathbf{r}(\mathbf{H}^*, \mathbf{j}))\} d^3 \mathbf{r} \Rightarrow$$

$$(\mathbf{K}_s, \mathbf{b}) = \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \{(\mathbf{b}, \mathbf{j})(\mathbf{H}^*, \mathbf{r}) + (\mathbf{b}, \mathbf{r})(\mathbf{H}^*, \mathbf{j})\} d^3 \mathbf{r}. \quad (1.12.9)$$

Введем обозначения $(\mathbf{H}^*, \mathbf{r}) = \varphi$ и $(\mathbf{b}, \mathbf{r}) = \psi$. Заметим, что, поскольку \mathbf{H}^* и \mathbf{b} - это константные вектора, то $\mathbf{H}^* = \nabla \varphi$ и $\mathbf{b} = \nabla \psi$. Перепишем формулу (1.12.9) с учетом новых обозначений и тождества $\varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi = \nabla(\varphi \psi)$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_s, \mathbf{b}) &= \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \{(\nabla \psi, \mathbf{j})\varphi + (\nabla \varphi, \mathbf{j})\psi\} d^3 \mathbf{r} = \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \{(\mathbf{j}, \nabla(\varphi \psi))\} d^3 \mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \{(\mathbf{j}, \nabla(\varphi \psi))\} d^3 \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (1.12.10)$$

Обозначим $g = \varphi \psi$ и используем формулу $\operatorname{div}(g \mathbf{a}) = g \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \nabla g)$ в следующих расчетах:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_s, \mathbf{b}) &= \frac{1}{2c} \int_{\Omega} (\mathbf{j}, \nabla g) d^3 \mathbf{r} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(g \mathbf{j}) d^3 \mathbf{r} - \int_{\Omega} g \operatorname{div} \mathbf{j} d^3 \mathbf{r} = \\ &= \oint_S g \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} - \int_{\Omega} g \operatorname{div} \mathbf{j} d^3 \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (1.12.11)$$

По условию задачи $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ и $j_n|_S = 0$, следовательно, оба получившихся интеграла в (1.12.11) равны нулю, поэтому:

$$(\mathbf{K}_s, \mathbf{b}) = 0. \quad (1.12.12)$$

В силу произвольности вектора \mathbf{b} из формулы (1.12.12) следует, что $\mathbf{K}_s = 0$. Попутно запомним, что $\int_{\Omega} (\mathbf{j}, \nabla g) d^3 \mathbf{r} = 0$, если $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ и $j_n|_S = 0$.

Подытоживая наши рассуждения (1.12.2)-(1.12.12), представим момент силы Ампера, действующей со стороны однородного магнитного поля на систему токов, в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = \mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_a &= \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \{\mathbf{j}(\mathbf{H}^*, \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{H}^*, \mathbf{j})\} d^3 \mathbf{r} = \frac{1}{2c} \int_{\Omega} [\mathbf{H}^*, [\mathbf{j}, \mathbf{r}]] d^3 \mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{2c} \int_{\Omega} [[\mathbf{r}, \mathbf{j}], \mathbf{H}^*] d^3 \mathbf{r} = \left[\frac{1}{2c} \int_{\Omega} [\mathbf{r}, \mathbf{j}] d^3 \mathbf{r}, \mathbf{H}^* \right] = [\mathbf{m}, \mathbf{H}^*]. \end{aligned} \quad (1.12.13)$$

В формуле (1.12.13) интеграл в векторном произведении обозначен буквой \mathbf{m} . Это магнитный дипольный момент системы токов \mathbf{j} :

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int_{\Omega} [\mathbf{r}, \mathbf{j}(\mathbf{r})] d^3 \mathbf{r}. \quad (1.12.14)$$

Здесь уместно обратить внимание на схожесть в написании формул для моментов электрической и магнитной силы, действующих на систему зарядов и токов в однородном электростатическом (1.4.4) и однородном магнитном поле (1.12.13), соответственно.

Подобно дипольному моменту \mathbf{p} системы зарядов с нулевым суммарным зарядом, магнитный момент \mathbf{m} инвариантен относительно перемещений $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$, не меняющих конфигурацию токов.

1.13. Асимптотика магнитоэлектростатического поля

Теперь определим поле $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, создаваемое системой токов на большом расстоянии от них. Для этого сначала найдем асимптотику векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. В формуле векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$ координатную часть $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ разложим в ряд при условии $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$.

$$\text{Получим } \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\mathbf{r}|} \left(1 - \frac{2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|^2} + \frac{|\mathbf{r}'|^2}{|\mathbf{r}|^2} \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{|\mathbf{r}|} \left(1 + \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|^2} \right).$$

Представим векторный потенциал в виде двух слагаемых:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}' + \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|^3} d^3\mathbf{r}'. \quad (1.13.1)$$

Рассмотрим первое слагаемое $\mathbf{A}_1(\mathbf{r})$. Умножим его скалярно на константный вектор \mathbf{a} и совершим ряд преобразований:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_1, \mathbf{a}) &= \frac{1}{c} \int \frac{(\mathbf{j}, \mathbf{a})}{|\mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}' = \frac{1}{c|\mathbf{r}|} \int (\mathbf{j}, \nabla \varphi) d^3\mathbf{r}' = \frac{1}{c|\mathbf{r}|} \int [\text{div}(\varphi \mathbf{j}) - \varphi \text{div} \mathbf{j}] d^3\mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{c|\mathbf{r}|} \int \text{div}(\varphi \mathbf{j}) d^3\mathbf{r}' = \frac{1}{c|\mathbf{r}|} \oint_S \varphi \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0. \end{aligned} \quad (1.13.2)$$

Здесь мы последовательно использовали представление константного вектора через градиент функции $\mathbf{a} = \nabla \varphi$, формулу $\text{div}(\varphi \mathbf{j}) = \varphi \text{div} \mathbf{j} + (\mathbf{j}, \nabla \varphi)$, равенство $\text{div} \mathbf{j} = 0$, теорему Остроградского-Гаусса при переходе от интегрирования по объёму к интегрированию по замкнутой площадке и условие $j_n|_S = 0$.

Поскольку константный вектор \mathbf{a} произвольный, то равенство нулю скалярного произведения (1.13.2) означает, что

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.13.3)$$

Представим второе слагаемое $\mathbf{A}_2(\mathbf{r})$ в виде симметричной $\mathbf{A}_s(\mathbf{r})$ и антисимметричной $\mathbf{A}_a(\mathbf{r})$ частей:

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_s(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_a(\mathbf{r}) =$$

$$\frac{1}{2c|\mathbf{r}|^3} \int [\mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \mathbf{r}'(\mathbf{j}, \mathbf{r})] d^3\mathbf{r}' + \frac{1}{2c|\mathbf{r}|^3} \int [\mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\mathbf{j}, \mathbf{r})] d^3\mathbf{r}' . \quad (1.13.4)$$

Умножим вектор $\mathbf{A}_s(\mathbf{r})$ на константный вектор \mathbf{a} и преобразуем это скалярное произведение:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_s, \mathbf{a}) &= \frac{1}{2c|\mathbf{r}|^3} \int [(\mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \mathbf{a}) - (\mathbf{r}'(\mathbf{j}, \mathbf{r}), \mathbf{a})] d^3\mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{2c|\mathbf{r}|^3} \int [(\mathbf{j}, \mathbf{a})(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - (\mathbf{r}', \mathbf{a})(\mathbf{j}, \mathbf{r})] d^3\mathbf{r}' = \frac{1}{2c|\mathbf{r}|^3} \int [(\mathbf{j}, \nabla\varphi)(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \varphi(\mathbf{j}, \mathbf{r})] d^3\mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{2c|\mathbf{r}|^3} \int [(\mathbf{j}, \nabla\varphi)\psi - \varphi(\mathbf{j}, \nabla\psi)] d^3\mathbf{r}' = \frac{1}{2c|\mathbf{r}|^3} \int (\mathbf{j}, (\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi)) d^3\mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{2c|\mathbf{r}|^3} \int (\mathbf{j}, \nabla(\psi\varphi)) d^3\mathbf{r}' = \frac{1}{2c|\mathbf{r}|^3} \int [\operatorname{div}(g\mathbf{j}) - g \operatorname{div}\mathbf{j}] d^3\mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{c|\mathbf{r}|^3} \int \operatorname{div}(g\mathbf{j}) d^3\mathbf{r}' = \frac{1}{c|\mathbf{r}|^3} \oint_S g\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0. \end{aligned} \quad (1.13.5)$$

При выводе формулы (1.13.5) были проделаны последовательно нижеперечисленные операции: 1). Вынесение внутренних скалярных произведений $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и (\mathbf{j}, \mathbf{r}) за скобки внешних скалярных произведений $(\mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \mathbf{a})$ и $(\mathbf{r}'(\mathbf{j}, \mathbf{r}), \mathbf{a})$. 2). Замена константного вектора \mathbf{a} градиентом функции $\mathbf{a} = \nabla\varphi$ (дифференцирование ведется по штрихованным переменным), при этом скалярное произведение $(\mathbf{r}', \mathbf{a})$ примет вид функции φ . 3). Замена произведения $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ на функцию ψ , тогда полярный вектор \mathbf{r} примет вид градиента этой функции $\mathbf{r} = \nabla\psi$. 4). Внесение функций φ и ψ в соответствующие скалярные произведения, группировка двух скалярных произведений в одно и использование соотношения $\nabla(\psi\varphi) = \psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi$. 5). Введение обозначения $g = \psi\varphi$ и замена $(\mathbf{j}, \nabla g)$ на $\operatorname{div}(g\mathbf{j}) - g \operatorname{div}\mathbf{j}$. 6). Переход к интегралу $\frac{1}{c|\mathbf{r}|^3} \int \operatorname{div}(g\mathbf{j}) d^3\mathbf{r}'$ с учетом того, что $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, и преобразование этого интеграла по объему к поверхностному интегралу по теореме Остроградского-Гаусса, который в силу условия $j_n|_S = 0$ оказывается равным 0.

Из формулы $(\mathbf{A}_s, \mathbf{a}) = 0$ в силу произвольности вектора \mathbf{a} следует:

$$\mathbf{A}_s = 0. \quad (1.13.6)$$

Преобразуем оставшуюся часть векторного потенциала \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}_a(\mathbf{r}) = \frac{1}{2c|\mathbf{r}|^3} \int \{\mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\mathbf{j}, \mathbf{r})\} d^3\mathbf{r}' = \frac{1}{2c|\mathbf{r}|^3} \int [\mathbf{r}, [\mathbf{j}, \mathbf{r}']] d^3\mathbf{r}' =$$

$$= \frac{\overbrace{[\frac{1}{2c} \int [\mathbf{r}', \mathbf{j}] d^3 \mathbf{r}', \mathbf{r}]}^{\mathbf{m}}}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{[\mathbf{m}, \mathbf{r}]}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (1.13.7)$$

При выводе формулы (1.13.7) использована формула представления двойного векторного произведения, вынесение независимых переменных за знак интеграла и учет определения магнитного дипольного момента системы токов \mathbf{m} .

В итоге асимптотика векторного потенциала примет вид:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{[\mathbf{m}, \mathbf{r}]}{|\mathbf{r}|^3} \dots \quad (1.13.8)$$

Напомним, что потенциал электрически нейтральной системы зарядов имеет вид:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^3} + \dots \quad (1.13.9)$$

С помощью асимптотики векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ дифференцированием можно найти асимптотику магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, так как $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r})$.

В своих лекциях мы стараемся охватить наиболее широкий спектр математических приемов, используемых в теории поля. Ниже представлен вывод асимптотики поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ из книги Р.А. Шарипова «Классическая электродинамика и теория относительности» [6].

Подставим разложение функции $\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \left(\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|^5} - \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|^3} \right) \dots$ (1.5.2) в закон Био-Савара-Лапласа (1.9.7):

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int_{\Omega} \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 \mathbf{r}' = \frac{1}{c} \int_{\Omega} [\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}] d^3 \mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{c} \int_{\Omega} [\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|^5} - \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|^3}] d^3 \mathbf{r}' + \dots \Rightarrow \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int_{\Omega} \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}]}{|\mathbf{r}|^3} d^3 \mathbf{r}' + \frac{1}{c} \int_{\Omega} \frac{3(\mathbf{r}, \mathbf{r}')[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}] - |\mathbf{r}|^2 [\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}']}{|\mathbf{r}|^5} d^3 \mathbf{r}' \dots \quad (1.13.10) \end{aligned}$$

Докажем, что первый интеграл в формуле (1.13.10) равен нулю тождественно. Обозначим его, как $\mathbf{H}_1(\mathbf{r})$. Умножим скалярно правую и левую часть равенства $\mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}]}{|\mathbf{r}|^3} d^3 \mathbf{r}'$ на произвольный

константный вектор \mathbf{a} и воспользуемся свойством смешанного произведения векторов:

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_1, \mathbf{a}) &= \\ &= \frac{1}{c} \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{a}, [\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}])}{|\mathbf{r}'|^3} d^3 \mathbf{r}' = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{j}(\mathbf{r}'), [\mathbf{r}, \mathbf{a}])}{|\mathbf{r}'|^3} d^3 \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (1.13.11)$$

Рассмотрим вектор $\tilde{\mathbf{a}} = \frac{[\mathbf{r}, \mathbf{a}]}{c|\mathbf{r}'|^3}$ и функцию $g(\mathbf{r}') = (\tilde{\mathbf{a}}, \mathbf{r}')$. Вектор $\tilde{\mathbf{a}}$ не зависит от координатного вектора \mathbf{r}' , следовательно, это константный вектор. Кроме того, верно соотношение $\tilde{\mathbf{a}} = \nabla g$ (дифференцирование ведется по штрихованным переменным). Подставим $\tilde{\mathbf{a}}$ в интеграл (1.13.11). С учетом условий $\text{div } \mathbf{j} = 0$ и $j_n|_S = 0$, и наших прежних рассуждений по поводу аналогичного интеграла (1.12.11)-(1.12.12) получаем

$$(\mathbf{H}_1, \mathbf{a}) = \int_{\Omega} (\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \nabla g) d^3 \mathbf{r}' = 0. \quad (1.13.12)$$

В силу произвольности вектора \mathbf{a} из формулы (1.13.12) следует, что $\mathbf{H}_1 = 0$.

Теперь преобразуем второй интеграл в (1.13.10), обозначив его как $\mathbf{H}_2(\mathbf{r})$. Умножим $\mathbf{H}_2(\mathbf{r})$ скалярно на произвольный константный вектор \mathbf{a} :

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_2, \mathbf{a}) &= \frac{1}{c|\mathbf{r}'|^5} \int_{\Omega} (3(\mathbf{r}, \mathbf{r}')[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}] - |\mathbf{r}'|^2 [\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}'], \mathbf{a}) d^3 \mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{c|\mathbf{r}'|^5} \int_{\Omega} \{ (3(\mathbf{r}, \mathbf{r}')[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}], \mathbf{a}) - (|\mathbf{r}'|^2 [\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}'], \mathbf{a}) \} d^3 \mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{c|\mathbf{r}'|^5} \int_{\Omega} \{ (\mathbf{j}(\mathbf{r}'), 3(\mathbf{r}, \mathbf{r}')[\mathbf{r}, \mathbf{a}]) - (\mathbf{j}(\mathbf{r}'), |\mathbf{r}'|^2 [\mathbf{r}', \mathbf{a}]) \} d^3 \mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{c|\mathbf{r}'|^5} \int_{\Omega} (\mathbf{j}(\mathbf{r}'), 3(\mathbf{r}, \mathbf{r}')[\mathbf{r}, \mathbf{a}] - |\mathbf{r}'|^2 [\mathbf{r}', \mathbf{a}]) d^3 \mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{c|\mathbf{r}'|^5} \int_{\Omega} (\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{b}(\mathbf{r}')) d^3 \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (1.13.13)$$

В преобразованиях (1.13.13) мы использовали свойство смешанного произведения векторов и на последнем этапе ввели обозначение $\mathbf{b}(\mathbf{r}') = 3(\mathbf{r}, \mathbf{r}')[\mathbf{r}, \mathbf{a}] - |\mathbf{r}'|^2 [\mathbf{r}', \mathbf{a}]$. Добавление к вектору $\mathbf{b}(\mathbf{r}')$ градиента произвольной функции не меняет значение интеграла (1.13.13). Это видно из формулы (1.13.12). Выберем конкретную функцию, определив ее как:

$$g(\mathbf{r}') = -\frac{3}{2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')(\mathbf{r}', [\mathbf{r}, \mathbf{a}]). \quad (1.13.14)$$

Найдем, градиент выбранной функции:

$$\nabla g(\mathbf{r}') = -\frac{3}{2}(\mathbf{r}', [\mathbf{r}, \mathbf{a}])\mathbf{r} - \frac{3}{2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = -3(\mathbf{r}, \mathbf{r}')[\mathbf{r}, \mathbf{a}] - \frac{3}{2}\{\mathbf{r}(\mathbf{r}', [\mathbf{r}, \mathbf{a}]) - [\mathbf{r}, \mathbf{a}](\mathbf{r}, \mathbf{r}')\}. \quad (1.13.15)$$

Используем известную формулу для двойного векторного произведения применительно к векторам \mathbf{r}' , \mathbf{r} , $[\mathbf{r}, \mathbf{a}]$ и свернем член $\{\mathbf{r}(\mathbf{r}', [\mathbf{r}, \mathbf{a}]) - [\mathbf{r}, \mathbf{a}](\mathbf{r}, \mathbf{r}')\}$ в выражении для градиента функции $g(\mathbf{r}')$:

$$\nabla g(\mathbf{r}') = -3(\mathbf{r}, \mathbf{r}')[\mathbf{r}, \mathbf{a}] - \frac{3}{2}[\mathbf{r}', [\mathbf{r}, [\mathbf{r}, \mathbf{a}]]]. \quad (1.13.16)$$

Тройное векторное произведение в формуле (1.13.16) разложим с помощью формулы для двойного векторного произведения применительно к векторам \mathbf{r} , \mathbf{r}' и \mathbf{a} :

$$\nabla g(\mathbf{r}') = -3(\mathbf{r}, \mathbf{r}')[\mathbf{r}, \mathbf{a}] - \frac{3}{2}(\mathbf{r}, \mathbf{a})[\mathbf{r}', \mathbf{r}] + \frac{3}{2}|\mathbf{r}|^2[\mathbf{r}', \mathbf{a}]. \quad (1.13.17)$$

Добавим полученное выражение (1.13.17) к вектору $\mathbf{b}(\mathbf{r}')$:

$$\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{r}') = \mathbf{b}(\mathbf{r}') + \nabla g(\mathbf{r}') = -\frac{3}{2}(\mathbf{r}, \mathbf{a})[\mathbf{r}', \mathbf{r}] + \frac{1}{2}|\mathbf{r}|^2[\mathbf{r}', \mathbf{a}]. \quad (1.13.18)$$

Подставим вектор $\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{r}')$ вместо вектора $\mathbf{b}(\mathbf{r}')$ в формулу (1.13.13):

$$(\mathbf{H}_2, \mathbf{a}) = \int_{\Omega} \frac{-3(\mathbf{r}, \mathbf{a})(\mathbf{r}, [\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}']) + |\mathbf{r}|^2(\mathbf{a}, [\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}'])}{2c|\mathbf{r}|^5} d^3\mathbf{r}'. \quad (1.13.19)$$

Подставим в это выражение формулу для магнитного момента $\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int_{\Omega} [\mathbf{r}', \mathbf{j}(\mathbf{r}')] d^3\mathbf{r}'$:

$$(\mathbf{H}_2, \mathbf{a}) = \frac{3(\mathbf{r}, \mathbf{a})(\mathbf{r}, \mathbf{m}) - |\mathbf{r}|^2(\mathbf{a}, \mathbf{m})}{|\mathbf{r}|^5}. \quad (1.13.20)$$

Отсюда, учитывая произвольность вектора \mathbf{a} , получаем главный член асимптотики поля системы токов на больших расстояниях:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{m}) - |\mathbf{r}|^2 \mathbf{m}}{|\mathbf{r}|^5} \dots \quad (1.13.21)$$

Обратим внимание на схожесть формул разложения магнитного поля системы токов и поля электрически нейтральной системы зарядов:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - |\mathbf{r}|^2 \mathbf{p}}{|\mathbf{r}|^5} + \dots \quad (1.13.22)$$

При выводе асимптотики магнитного поля системы токов были продемонстрированы разнообразные математические приемы. Помимо скалярного умножения на константный вектор, были использованы подстановки и группировки векторов.

Отметим тот факт, что первые члены разложения магнитного поля и его потенциала, представленные соответственно в формулах (1.13.21), (1.13.8), - это поле и потенциал точечного магнитного диполя. Легко показать, что локализованная система токов с обобщенной плотностью

$$\mathbf{j} = -c[\mathbf{m}, \nabla \delta(\mathbf{r})]. \quad (1.13.23)$$

и есть точечный магнитный момент, сосредоточенный в начале координат. Можно убедиться, что для системы токов (1.13.23) выполняется условие $\text{div } \mathbf{j} = 0$ и справедлива формула $\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int_{\Omega} [\mathbf{r}, \mathbf{j}(\mathbf{r})] d^3 \mathbf{r}$.

1.14. Энергия стационарных токов. Энергия магнитостатического поля

Вычислим работу по перемещению контура с током J во внешнем магнитном поле \mathbf{H} . Пусть каждый элемент контура $d\mathbf{l}$ сместится на малый вектор $\delta \mathbf{s}$. На элемент тока $d\mathbf{l}$ действует сила Ампера $\mathbf{F}_A(\mathbf{r}) = \frac{J}{c} [d\mathbf{l}, \mathbf{H}]$ (1.11.6), поэтому работа δA по перемещению всего контура запишется в виде:

$$\delta A = \mathbf{F}_A(\mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{s} = \frac{J}{c} \oint_{\ell} [d\mathbf{l}, \mathbf{H}] \cdot \delta \mathbf{s} = \frac{J}{c} \oint_{\ell} [\delta \mathbf{s}, d\mathbf{l}] \cdot \mathbf{H} = \frac{J}{c} \int_{\delta S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \frac{J}{c} \delta \Phi. \quad (1.14.1)$$

где $d\mathbf{S} = [\delta \mathbf{s}, d\mathbf{l}]$, δS - полная поверхность, которую опишет весь контур с током при его малом смещении $\delta \mathbf{s}$. В формуле (1.14.1) использовано свойство смешанного произведения векторов $(\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = (\mathbf{c} \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{b}])$. Поверхностный интеграл в формуле (1.14.1) представляет собой приращение магнитного потока $\delta \Phi$, т.е. равен потоку через дополнительную поверхность, прочерченную контуром с током.

Можно преобразовать выражение для потока в формуле (1.14.1), приняв во внимание связь магнитного поля с векторным потенциалом $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ и теорему Стокса:

$$\Phi = \int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\ell} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.14.2)$$

где интеграл берется по контуру, опоясывающему площадь S .

Вычисленная работа представляет собой, очевидно, приращение энергии контура с током во внешнем поле (1.14.1):

$$\delta A = \delta W . \quad (1.14.3)$$

Рассмотрим некоторую потенциальную функцию контура с током во внешнем поле:

$$U = -\frac{J}{c}\Phi , \quad (1.14.4)$$

тогда работа магнитных сил совершается за счет убыли потенциальной функции:

$$\delta A = -\delta U = \frac{J}{c}\delta\Phi . \quad (1.14.5)$$

Рассмотрим взаимодействие двух контуров с током, когда магнитное поле одного тока действует на другой ток. Определим потенциальную функцию взаимодействия тока a и тока b :

$$U_{ab} = U_{ba} = -\frac{J_a}{c}\Phi_{ab} = -\frac{J_b}{c}\Phi_{ba} = -\frac{J_a}{c}\oint_{\ell_a} \mathbf{A}_b d\mathbf{l}_a = -\frac{J_b}{c}\oint_{\ell_b} \mathbf{A}_a d\mathbf{l}_b . \quad (1.14.6)$$

Зная, как определяется векторный потенциал токов a и b (1.9.6), можно записать

$$\mathbf{A}_a(\mathbf{r}_b) = \frac{1}{c} \int_{\Omega_a} \frac{\mathbf{j}_a(\mathbf{r}_a)}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a|} d^3\mathbf{r}_a , \quad \mathbf{A}_b(\mathbf{r}_a) = \frac{1}{c} \int_{\Omega_b} \frac{\mathbf{j}_b(\mathbf{r}_b)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} d^3\mathbf{r}_b . \quad (1.14.7a,b)$$

В том случае, если проводник с током имеет толщину, пренебрежимо малую по сравнению с длиной, то есть $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = J\delta(\mathbf{l})$, где дельта-функция $\delta(\mathbf{l}) = \delta(x_1 - x_{1a,b})\delta(x_2 - x_{2a,b})\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau}$ - направляющий орт тока \mathbf{j} , $x_{1,2}$ - текущие декартовы координаты и $x_{1a}, x_{2a}, x_{1b}, x_{2b}$ - декартовы координаты точки проводника, можно записать:

$$\mathbf{A}_a(\mathbf{r}_b) = \frac{J_a}{c} \oint_{\ell_a} \frac{d\mathbf{l}_a}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a|} , \quad \mathbf{A}_b(\mathbf{r}_a) = \frac{J_b}{c} \oint_{\ell_b} \frac{d\mathbf{l}_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} . \quad (1.14.8a,b)$$

Тогда

$$U_{ab} = U_{ba} = -\frac{J_a}{c}\Phi_{ab} = -\frac{J_b}{c}\Phi_{ba} = -\frac{J_a J_b}{c^2} \oint_{\ell_a} \oint_{\ell_b} \frac{d\mathbf{l}_a d\mathbf{l}_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} = -\frac{J_a J_b}{c^2} L_{ab} , \quad (1.14.9)$$

где

$$L_{ab} = L_{ba} = \oint_{\ell_a} \oint_{\ell_b} \frac{d\mathbf{l}_a d\mathbf{l}_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} . \quad (1.14.10)$$

L_{ab} называется коэффициентом взаимной индукции. Очевидно, что L_{ab} зависит только от геометрии проводников, их взаимного расположения и направления токов.

Удобно ввести потенциальную функцию взаимодействия в симметричной записи:

$$U_{\text{int}} = \frac{1}{2}(U_{ab} + U_{ba}) = -\frac{1}{2c^2} \sum_{a \neq b} J_a J_b L_{ab}. \quad (1.14.11)$$

Полезно также определить поток Φ_{ab} через коэффициент индукции L_{ab} :

$$\Phi_{ab} = \frac{1}{c} L_{ab} J_b. \quad (1.14.12)$$

В том случае, если толщиной проводников пренебрегать нельзя, потенциальная функция взаимодействия двух токов запишется в виде:

$$U_{\text{int}} = -\frac{1}{2c^2} \sum_{a \neq b} \int_{\Omega_a} \int_{\Omega_b} \frac{\mathbf{j}_a(\mathbf{r}_a) \mathbf{j}_b(\mathbf{r}_b)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} d^3 \mathbf{r}_a d^3 \mathbf{r}_b = -\frac{1}{2c^2} \sum_{a \neq b} \int_{\Omega_a} \int_{\Omega_b} L_{ab} J_a J_b, \quad (1.14.13)$$

а коэффициент взаимной индукции примет интегральную форму:

$$L_{ab} = L_{ba} = \frac{1}{J_a J_b} \int_{\Omega_a} \int_{\Omega_b} \frac{\mathbf{j}_a(\mathbf{r}_a) \mathbf{j}_b(\mathbf{r}_b)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} d^3 \mathbf{r}_a d^3 \mathbf{r}_b. \quad (1.14.14)$$

Потенциальная функция взаимодействия элементов одного тока друг с другом строится с помощью соотношения (1.14.13):

$$U = -\frac{1}{2c} \int_{\Omega} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = -\frac{1}{2c^2} \iint_{\Omega \Omega} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}' = -\frac{1}{2c^2} L J^2. \quad (1.14.15)$$

Величина

$$L = -\frac{1}{J^2} \iint_{\Omega \Omega} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}' \quad (1.14.16)$$

называется коэффициентом самоиндукции.

Полную энергию W постоянных токов можно записать в виде:

$$W = -U = \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \frac{1}{2c^2} \iint_{\Omega \Omega} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}'. \quad (1.14.17)$$

На основании формулы (1.14.17) можно найти энергию магнитостатического поля:

$$W = \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} \{ \operatorname{div}[\mathbf{H}(\mathbf{r}), \mathbf{A}(\mathbf{r})] + \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \} d^3\mathbf{r} = \\
&= \frac{1}{8\pi} \oint_S [\mathbf{H}(\mathbf{r}), \mathbf{A}(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} H^2(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \Rightarrow \\
&W = \int_{\Omega} w d^3\mathbf{r}, \tag{1.14.18}
\end{aligned}$$

где w - плотность магнитной энергии:

$$w = \frac{H^2(\mathbf{r})}{8\pi}. \tag{1.14.19}$$

В ряде формул (1.14.18) поверхностный интеграл равен нулю: $\frac{1}{8\pi} \oint_S [\mathbf{H}(\mathbf{r}), \mathbf{A}(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{S} = 0$, поскольку поверхность, охватывающая область интегрирования, может быть взята на бесконечности, где поля становятся нулевыми.

В заключение Главы 1 представим основные электрические и магнитные величины, а также законы, рассмотренные выше, в международной системе измерения СИ, которая была сформирована для облегчения различных инженерных расчетов в электротехнике.

1.15. Определение единиц заряда и электрического тока в СИ.

Единицы электростатического потенциала и электрического поля в СИ. Уравнение Пуассона в СИ. Введение электрической постоянной.

Закон Ампера и единица магнитной индукции в СИ.

Магнитная постоянная. Закон Био-Савара-Лапласа в СИ

В гауссовой системе единица измерения тока оказалось очень мелкой, поэтому в 1855 г. было решено, что для технических целей ток надо измерять в определенных единицах, названных *амперами* (русское обозначение - A , иностранное обозначение - A). В системе СИ ампер – одна из основных единиц. Ампер - это сила постоянного тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины. При этом ток величиной в 1 *ампер* оказывается лежащим в диапазоне тех значений токов, которые реально возникают в бытовых и промышленных электроприборах. Единица измерения тока в СИ используется для определения единицы измерения заряда в 1 *кулон* ($Kл, C$): $1 Kл = 1 A \text{ сек}$.

Из эксперимента выяснено соотношение между ампером и единицей заряда в гауссовой системе:

$$1A = \frac{c}{10} \text{ ГС}_J \text{ (единица тока в гауссовой системе)} \quad (1.15.1)$$

Таким образом, переводной коэффициент, аналогичный тем, которые были рассмотрены в разделе 1.1, определен как $u_J = u_q = c/10$ или $u_J = u_q \approx 3 \cdot 10^9$ с учетом значения электродинамической постоянной $c \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ см сек}^{-1}$.

Найдем соотношения между единицами измерения разности потенциалов V и электрического поля E в гауссовой системе и системе СИ. Для этого воспользуемся формулой для работы электрического поля, совершаемой над зарядом, $A = qV$:

$$q_{\text{ГС}} V_{\text{ГС}} = A_{\text{ГС}}, \quad q_{\text{СИ}} V_{\text{СИ}} = A_{\text{СИ}} \quad \Rightarrow \quad u_q q_{\text{СИ}} u_V V_{\text{СИ}} = u_A A_{\text{СИ}} \quad \Rightarrow$$

$$u_V = \frac{u_A}{u_q} = \frac{10^8}{c} \approx \frac{10^8}{3 \cdot 10^{10}} = \frac{1}{300} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ вольт (В, V)} = \frac{10^8}{c} \text{ ГС}_V \approx \frac{1}{300} \text{ ГС}_V.$$

Напряженность электрического поля найдем из соотношения $E = \frac{V}{x}$:

$$u_E = \frac{u_V}{u_x} = \frac{10^8}{c \cdot 10^2} = \frac{10^6}{c} \approx \frac{1}{3 \cdot 10^4} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ В м}^{-1} = \frac{10^6}{c} \text{ ГС}_E \approx \frac{1}{3 \cdot 10^4} \text{ ГС}_E.$$

Запишем уравнения Максвелла (1.2.11) и Пуассона (1.2.12) для электрического поля и электростатического потенциала в СИ.

$$\text{div}_{\text{ГС}} \mathbf{E}_{\text{ГС}} = 4\pi \rho_{\text{ГС}} \quad \Rightarrow \quad \frac{u_E}{u_x} \text{div}_{\text{СИ}} \mathbf{E}_{\text{СИ}} = 4\pi \frac{u_q}{u_x} \rho_{\text{СИ}} \quad \Rightarrow \quad \frac{u_E u_x^2}{4\pi u_q} \text{div}_{\text{СИ}} \mathbf{E}_{\text{СИ}} = \rho_{\text{СИ}} \quad \Rightarrow$$

$$\varepsilon_0$$

$\varepsilon_0 \text{div}_{\text{СИ}} \mathbf{E}_{\text{СИ}} = \rho_{\text{СИ}}$ - уравнение Максвелла в СИ, и

$$\Delta_{\text{ГС}} \varphi_{\text{ГС}} = -4\pi \rho_{\text{ГС}} \quad \Rightarrow \quad \frac{u_V}{u_x^2} \Delta_{\text{СИ}} \varphi_{\text{СИ}} = -4\pi \frac{u_q}{u_x^3} \rho_{\text{СИ}} \quad \Rightarrow \quad \frac{u_V u_x^3}{4\pi u_q u_x^2} \Delta_{\text{СИ}} \varphi_{\text{СИ}} = -\rho_{\text{СИ}} \quad \Rightarrow$$

$\varepsilon_0 \Delta_{\text{СИ}} \varphi_{\text{СИ}} = -\rho_{\text{СИ}}$ - уравнение Пуассона.

Коэффициент ε_0 носит название электрической постоянной или диэлектрической проницаемости вакуума, но, несмотря на такое многозначительное название, коэффициент ε_0 всего лишь коэффициент, получающийся при переходе из одной системы единиц измерения в другую. Определим численное значение ε_0 :

$$\varepsilon_0 = \frac{u_E u_x^2}{4\pi u_q} = \frac{10^{11}}{4\pi c^2} \approx \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \Phi \text{ м}^{-1}. \quad (1.15.2)$$

Здесь введена новая единица *фарада*, $\Phi = \text{Кл В}^{-1}$, а размерность константы ε_0 проистекает из преобразованного выше уравнения Пуассона: $\varepsilon_0 \Delta \varphi = -\rho$.

С учетом постоянной ε_0 уравнение Максвелла (1.2.11) преобразуется к виду

$$\varepsilon_0 \text{div} \mathbf{E} = \rho \text{ или } \text{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (1.15.3)$$

где поле $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ носит название поля смещения.

Уравнение Пуассона для скалярного потенциала в СИ с учетом постоянной ε_0 примет вид:

$$\Delta \varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (1.15.4)$$

Представим теперь закон Ампера, записанный в форме силы Лоренца (1.11.8), в гауссовой системе и СИ.

Перепишем силу Лоренца

$$\mathbf{F}_{Гс} = \frac{q_{Гс}}{c} [\mathbf{v}_{Гс}, \mathbf{H}_{Гс}] \text{ в виде } \mathbf{F}_{Гс} = \frac{q_{Гс}}{c} [\mathbf{v}_{Гс}, \mathbf{B}_{Гс}],$$

где \mathbf{B} , вектор магнитной индукции, пока введен формально и имеет размерность такую же, как напряженность магнитного поля, но с другим названием - *гаусс* (Gc, Gs): $1 \text{ Э} = 1 Gc$.

Сила Лоренца в СИ имеет вид: $\mathbf{F}_{СИ} = q_{СИ} [\mathbf{v}_{СИ}, \mathbf{B}_{СИ}]$. Найдем с помощью переводных коэффициентов связь между *гауссом* и единицей магнитной индукции в СИ, названной *теслой*:

$$u_F \mathbf{F}_{СИ} = \frac{u_q}{c} u_x u_B q_{СИ} [\mathbf{v}_{СИ}, \mathbf{B}_{СИ}] \Rightarrow u_B = \frac{u_F c}{u_q u_x} = \frac{u_F}{u_x} \frac{c}{10^{-1} c} = \frac{10 u_F}{u_x} = 10^4 \Rightarrow$$

$1 \text{ тесла (Тл, T)} = 10^4 Gc$.

Запишем в СИ уравнение Максвелла (1.8.1), которое является дифференциальной формой записи уравнения Био-Савара-Лапласа (1.9.7), сделав следующую цепочку преобразований:

$$\text{rot } \mathbf{H}_{Гс} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{Гс} \Rightarrow \text{rot } \mathbf{B}_{Гс} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{Гс} \Rightarrow \underbrace{\frac{u_B}{u_x} \frac{c}{4\pi} \frac{u_x^2}{u_q}}_{\mu_0^{-1}} \text{rot } \mathbf{B}_{СИ} = \mathbf{j}_{СИ}.$$

Здесь переводные коэффициенты сгруппированы в новую постоянную величину, называемую магнитной постоянной или магнитной проницаемостью вакуума:

$$\mu_0 = \frac{4\pi}{10^7} \frac{Tл}{м \cdot А \cdot м^{-2}} = \frac{4\pi}{10^7} \frac{Tл \cdot м^2}{м \cdot А} = \frac{4\pi}{10^7} \frac{Гн}{м}, \quad (1.15.5)$$

где введена новая единица - *генри* ($Гн$), $Гн = \frac{Tл \cdot м^2}{А}$.

Пусть векторное поле \mathbf{B} связано с полем \mathbf{H} в СИ соотношением: $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Окончательно, получаем следующее уравнение Максвелла в СИ:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (1.15.6)$$

Как видно из наших построений, постоянные ε_0 и μ_0 получаются при формировании СИ и самостоятельного физического смысла не имеют. Лишь их комбинация $(\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2} \approx 3 \cdot 10^8$ м/сек представляет собой скорость света в вакууме.

В Таблице 3 Приложения 1 представлены единицы измерения электрических и магнитных величин в гауссовой системе и в СИ.

1.16. Уравнения Максвелла для стационарных полей

В заключение запишем уравнения Максвелла электростатики и магнитостатики в вакууме, которые являются итогом экспериментальных фактов и математических построений, приведенных в Главе 1.

В гауссовой системе уравнения Максвелла имеют следующий вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (1.16.1a,b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (1.16.1c,d)$$

Заметим, что уравнения (1.16.1) включают две напряженности \mathbf{E} и \mathbf{H} .

В СИ уравнения Максвелла содержат уже четыре характеристики электрического и магнитного полей \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (1.16.2a,b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.16.2c,d)$$

Уравнения (1.16.1) или (1.16.2) необходимо дополнить условиями стационарности зарядов

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.16.3)$$

и токов

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0, \quad (1.16.4)$$

и граничными условиями:

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_v, \quad (\text{гауссова система}) \quad (1.16.5a,b)$$

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\zeta, \quad H_{1n} = H_{2n}, \quad (\text{гауссова система}) \quad (1.16.5c,d)$$

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_v, \quad (\text{СИ}) \quad (1.16.6a,b)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \zeta, \quad B_{1n} = B_{2n}, \quad (\text{СИ}) \quad (1.16.6c,d)$$

где ζ - поверхностная плотность заряда; i_ν - проекция поверхностной плотности тока \mathbf{i} на направление ν ; $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}, \nu$ - орты, связанные с границей раздела, причем, \mathbf{n} - нормаль к поверхности раздела.

Система уравнений (1.16.1) или (1.16.2) есть полная система дифференциальных уравнений для описания статических электромагнитных полей. При их решении функции ρ и \mathbf{j} считаются заданными или же к системе дописываются уравнения, связывающие ρ и \mathbf{j} с полями \mathbf{E} и \mathbf{H} . Например, уравнением связи для сплошной изотропной токопроводящей среды с электропроводностью σ является соотношение (закон Ома):

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.16.7)$$

В том случае, если уравнения связи не являются линейными уравнениями, уравнения Максвелла становятся нелинейными дифференциальными уравнениями, и принцип суперпозиции для электромагнитного поля нарушается.

Мы видим, что в зависимости от выбора системы единиц, в уравнениях Максвелла возникают различные коэффициенты.

Преимущества гауссовой системы в теоретической электродинамике состоят в том, что все поля в ней имеют одну размерность, а уравнения записываются проще и естественней. Поэтому гауссова система продолжает применяться в научных публикациях по электродинамике и теоретической физике. На практике же вводимые в гауссовой системе единицы измерений, многие из которых не именованы, часто неудобны. СИ стандартизована и лучше самосогласована, на ней построена вся современная метрология и инженерия.

Контрольные вопросы к Главе 1

1. Продемонстрируйте, как из закона Кулона для электрических зарядов вывести уравнения Максвелла для электростатического поля?
2. Докажите, что интеграл Пуассона есть решение уравнения Пуассона.
3. Какие граничные условия являются следствием div- и rot- уравнений (на примере уравнений Максвелла для электростатического поля)?
4. Дайте определение момента силы, действующей на систему электрических зарядов, дипольного момента системы зарядов и точечного дипольного момента.

5. Докажите, что асимптотику поля, в общем случае описываемого интегралом, можно представить в виде мультипольного ряда (на примере электростатического поля).
6. Покажите, как из опытов Эрстеда можно вывести уравнения Максвелла для магнитостатического поля.
7. Поясните, откуда появляется эдп в уравнениях Максвелла и каков ее физический смысл.
8. Что такое калибровка Кулона? Как из уравнений Максвелла вывести формулу Био-Савара-Лапласа?
9. Дайте определение силы Ампера и показать различные формы ее записи.
10. Дайте определение момента магнитной силы, действующей на систему токов, магнитного дипольного момента и точечного магнитного диполя.

Глава 2. Нестационарные электрические и магнитные поля

2.1. Закон сохранения заряда и уравнение непрерывности. Нарушение закона Био-Савара-Лапласа в случае переменного электрического тока.

Введение максвелловского тока смещения.

Уравнение Максвелла для переменного электрического поля

Фундаментальным свойством электрического заряда является его сохранение. Это свойство подтверждается опытным путем. Ток в свою очередь является порождением движущихся электрических зарядов. Поэтому есть смысл определить уравнение связи между током и плотностью заряда, которое вытекает из закона сохранения заряда.

Запишем закон сохранения заряда в произвольном выделенном объеме на основе следующего очевидного утверждения: изменение заряда, происшедшее в объеме за некоторое время, равно току, прошедшему через объем за это время:

$$\oint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}. \quad (2.1.1)$$

Здесь S - это поверхность, ограничивающая рассматриваемый объем.

С учетом определения заряда через его плотность (1.2.15) представим равенство (2.1.1) в следующем виде:

$$\oint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r}. \quad (2.1.2)$$

Окончательно, используя теорему Остроградского-Гаусса в левой части уравнения (2.1.2) и принимая во внимание произвольность выбранного объема, приходим к дифференциальному уравнению связи плотности заряда и плотности тока:

$$\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (2.1.3)$$

Это уравнение называется уравнением непрерывности. Оно универсальное, поскольку имеет свои аналоги в других разделах физики, например, в гидродинамике.

Рассмотрим уравнение Максвелла (1.16.1b): $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$. Как мы уже отмечали, его решением является закон Био-Савара-Лапласа. Из этого уравнения следует равенство $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, которое противоречит уравнению непрерывности (2.1.3) в случае непостоянства во времени плотности заряда:

$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \neq 0$. Получается, что закон Био-Савара-Лапласа нарушается для нестационарных процессов.

Обобщение уравнения (1.16.1b) на нестационарные процессы Д. Максвелл сделал в 1860-х годах. Он предложил наряду с плотностью тока проводимости \mathbf{j} , ввести в правую часть уравнения (1.16.1b) плотность *тока смещения* в виде $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. Откорректированное таким образом уравнение для ротора магнитного поля показывает, что нестационарное электрическое поле порождает магнитное поле даже в отсутствие токов проводимости:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.1.4)$$

Уравнение (2.1.4) – это уравнение Максвелла с учетом переменного во времени электрического поля.

Поддействуем оператором $\text{div} \equiv \nabla \cdot$ на обе части уравнения (2.1.4) и заменим появившуюся в уравнении дивергенцию $\text{div} \mathbf{E}$ уравнением (1.16.1c) $\text{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \rho(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \text{div rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \text{div } \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial(\text{div} \mathbf{E})}{\partial t} &\Rightarrow 0 = \frac{4\pi}{c} \text{div } \mathbf{j} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \\ \text{div } \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Итак, в результате несложных преобразований приходим к уравнению непрерывности, которое выполняется с введением в него плотности тока смещения $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$.

Теперь обратимся к уравнению $\text{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \rho(\mathbf{r}, t)$. Очевидно, что в этом уравнении в правой части стоит плотность полного заряда, часть из которого является причиной тока проводимости \mathbf{j} .

2.2. Вихревое электрическое поле. Нарушение потенциальности электрического поля в переменном во времени магнитном поле. Сила Лоренца как причина возникновения вихревого электрического поля. Уравнение Максвелла для переменного магнитного поля

В 1831 году состоялось одно из фундаментальных открытий в электродинамике – открытие явления электромагнитной индукции. Оно было сделано *Майклом Фарадеем*.

После эвристических экспериментов Эрстеда в 1820 г., выявивших магнитное действие электрического тока, Фарадей увлекся проблемой связи между электричеством и магнетизмом.

Суть явления электромагнитной индукции состоит в следующем: в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока, охватываемого этим контуром, возникает электрический ток. При этом не важно, каким образом достигается изменение магнитного потока. Можно, например, генерировать переменное магнитное поле или вращать проводящую рамку в постоянном магнитном поле.

На простой модели продемонстрируем закон электромагнитной индукции.

На рисунке 2.1 изображена рамка, по которой может идти ток. Она помещена в постоянное магнитное поле \mathbf{H} . В системе координат, связанной с неподвижным магнитом, рамка вращается с угловой скоростью ω вокруг своей оси симметрии. Радиус окружности, которую описывают при вращении стороны 1 и 2 равна $a/2$. Линейная скорость сторон 1 и 2 рамки направлена по касательной к окружности и имеет величину $v = \omega a/2$. Носители тока в материале рамки на сторонах 1 и 2 имеют такую же по величине скорость (рис. 2.1).

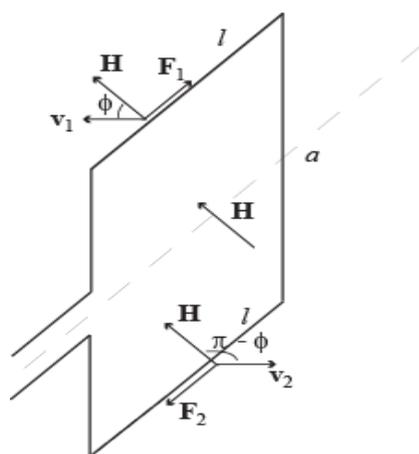


Рис. 2.1. Иллюстрация к закону электромагнитной индукции.

На движущиеся заряды со стороны постоянного магнитного поля действует сила Лоренца $\mathbf{F}_{1,2} = \frac{q}{c}[\mathbf{v}_{1,2}, \mathbf{H}]$, направленная вдоль проводника. Магнитная сила играет роль сторонней силы. Ей соответствует поле $\mathbf{E} = \mathbf{F} / q$. Следовательно, носители тока на сторонах рамки 1 и 2 находятся в стороннем электрическом поле $\mathbf{E}_{1,2} = \frac{1}{c}[\mathbf{v}_{1,2}, \mathbf{H}]$, соответственно. В рамке возникает эдс \mathcal{E} , которую можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_1 l + E_2 l = 2l \frac{v}{c} H \sin \phi. \quad (2.2.1)$$

Учитывая значение линейной скорости вращения рамки, получаем

$$\mathcal{E} = \ell a \frac{\omega}{c} H \sin \phi = S \frac{\omega}{c} H \sin \phi, \quad (2.2.2)$$

где S - площадь рамки.

С другой стороны, в системе координат, связанной с рамкой, магнитный поток, пронизывающий рамку, есть:

$$\Phi = HS \cos \phi. \quad (2.2.3)$$

Скорость изменения потока находим простым дифференцированием потока по времени:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -HS\dot{\phi} \sin \phi = -HS\omega \sin \phi. \quad (2.2.4)$$

Сравнивая формул (2.2.2) и (2.2.4), получаем следующее равенство:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.2.5)$$

Это и есть открытый Фарадеем закон электромагнитной индукции. Перепишем полученное уравнение через напряженность электрического поля:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.2.6)$$

Используя теорему Стокса и определение потока магнитного поля, получаем уравнение Максвелла, выражающее явление магнитной индукции:

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} &\Rightarrow \int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Это уравнение показывает, что электрическое поле, порожденное переменным во времени магнитным полем, не обладает свойством потенциальности. Переход от интегральной записи к дифференциальной в формуле (2.2.7) возможен из-за произвольности поверхности S .

2.3. Уравнения Максвелла в гауссовой системе и в СИ

Представим вновь полученные нестационарные уравнения Максвелла (2.1.4) и (2.2.7) в СИ.

Сначала перепишем уравнение (2.1.4), $\text{rot } \mathbf{H}_{\text{ГС}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ГС}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_{\text{ГС}}}{\partial t}$, в виде $\text{rot } \mathbf{B}_{\text{ГС}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ГС}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_{\text{ГС}}}{\partial t} \Rightarrow \frac{u_B}{u_x} \text{rot } \mathbf{B}_{\text{СИ}} = \frac{4\pi}{c} \frac{u_q}{u_x^2} \mathbf{j}_{\text{СИ}} + \frac{u_E}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_{\text{СИ}}}{\partial t}$. Учитывая соотношение (1.15.2), подставим вместо коэффициента u_E его выражение

через константу ε_0 : $u_E = \frac{4\pi u_q \varepsilon_0}{u_x^2}$, и продолжим цепочку преобразований:

$$\underbrace{\frac{u_B}{u_x} \frac{c}{4\pi} \frac{u_x^2}{u_q}}_{\mu_0^{-1}} \text{rot } \mathbf{B}_{\text{СИ}} = \mathbf{j}_{\text{СИ}} + \frac{u_x^2}{u_q} \frac{1}{4\pi} \frac{4\pi u_q \varepsilon_0}{u_x^2} \frac{\partial \mathbf{E}_{\text{СИ}}}{\partial t}.$$

Как и в разделе 1.15 Главы 1, введем обозначения $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Получаем уравнение (2.1.4) в системе СИ:

$$\text{rot } \mathbf{H}_{\text{СИ}} = \mathbf{j}_{\text{СИ}} + \frac{\partial \mathbf{D}_{\text{СИ}}}{\partial t}. \quad (2.3.1)$$

Преобразуем уравнение (2.2.7) к виду, адекватному СИ. Для этого перепишем уравнение формально в виде $\text{rot } \mathbf{E}_{\text{ГС}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ГС}}}{\partial t}$ и сделаем переводные преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{u_E}{u_x} \text{rot } \mathbf{E}_{\text{СИ}} = -\frac{1}{c} u_B \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{СИ}}}{\partial t} &\Rightarrow \frac{10^6}{c 10^2} \text{rot } \mathbf{E}_{\text{СИ}} = -\frac{1}{c} 10^4 \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{СИ}}}{\partial t} \Rightarrow \\ \text{rot } \mathbf{E}_{\text{СИ}} &= -\frac{\partial \mathbf{B}_{\text{СИ}}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Запишем уравнения Максвелла для нестационарного электромагнитного поля в вакууме в двух системах единиц измерения.

В гауссовой системе:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.3.4a,b)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (2.3.4c,d)$$

В СИ:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.3.5a,b)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (2.3.5c,d)$$

В системах уравнений (2.3.4) и (2.3.5) первое уравнение выражает электромагнитную индукцию Фарадея; второе - магнитоэлектрическую индукцию, открытую Максвеллом и основанную на представлениях о токах смещения; третье показывает, что источником электрического поля являются заряды; четвертое отражает вихревой характер магнитного поля.

2.4. Усреднение микроскопических уравнений Максвелла в материальной среде

До сих пор мы рассматривали электромагнитное поле и системы зарядов в вакууме и описывали их с помощью уравнений Максвелла. Теперь

рассмотрим, среды - диэлектрики, проводники, магнетики - и определим, какими уравнениями описываются электромагнитные свойства сред.

Итак, есть вещество, которое всегда состоит из зарядов, даже если в целом оно электрически нейтральное. Поместим вещество в электромагнитное поле. Результирующее поле в веществе создается как сторонними, т.е. внешними, зарядами и токами, так и частицами вещества. В понятие сторонние и внешние заряды и токи входят также свободные заряды и токи проводимости. Поле, созданное сторонними зарядами и токами, вызывает перераспределение зарядов и токов в веществе и приводит к появлению дополнительного поля. В итоге получается самосогласованное электромагнитное поле, создаваемое и сторонними зарядами, и зарядами вещества. Запишем микроскопические уравнения Максвелла с учетом сторонних и внутренних зарядов и токов:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \quad (2.4.1a)$$

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_{\text{int}} + \mathbf{j}_{\text{ext}}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.4.1b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi(\rho_{\text{int}} + \rho_{\text{ext}}), \quad (2.4.1c)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{H} = 0, \quad (2.4.1d)$$

где ρ_{ext} и \mathbf{j}_{ext} - плотности сторонних зарядов и токов, ρ_{int} и \mathbf{j}_{int} - плотности внутренних зарядов и токов в веществе. Последние могут быть сложными функционалами от векторных функций \mathbf{E} и \mathcal{H} .

Совместное решение уравнений Максвелла и уравнений движения зарядов позволяет определить поля \mathbf{E} и \mathcal{H} . Надо ли разъяснять сложность такого пути описания электромагнитного поля в веществе? К счастью в макроскопическом эксперименте мы имеем дело с величинами, усредненными по статистическому ансамблю состояний среды. Как показывает статистическая механика, это усреднение эквивалентно усреднению по интервалу времени. А приборы, которыми делаются измерения, усредняют величины по малым объемам, содержащим большое число зарядов. Таким образом, искомая величина $f(\mathbf{r}, t)$ в процессе измерения усредняется по переменным \mathbf{r} и t :

$$\bar{f}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int_{\Delta V} d^3 \mathbf{r}' \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} d\tau f(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t + \tau). \quad (2.4.2)$$

Исходя из (2.4.2), можно записать:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}, \quad x_i \equiv x, y, z. \quad (2.4.3)$$

Усредним микроскопические уравнения Максвелла (2.4.1) и применим свойство (2.4.3) к слагаемым этих уравнений:

$$\overline{\text{rot } \mathcal{E}} = \text{rot } \bar{\mathcal{E}}, \quad \overline{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial t} \text{ и т.д.} \quad (2.4.4)$$

Введем обозначения $\bar{\mathcal{E}} = \mathbf{E}$ и $\bar{\mathcal{H}} = \mathbf{B}$. При этом усредненное микроскопическое электрическое поле оставляет за собой название напряженности, усредненное же микроскопическое магнитное поле носит название магнитной индукции. Перепишем усредненные уравнения Максвелла (2.4.1) в новых обозначениях:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.4.5a)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\bar{\mathbf{j}}_{\text{int}} + \mathbf{j}_{\text{ext}}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.4.5b)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi (\bar{\rho}_{\text{int}} + \rho_{\text{ext}}), \quad (2.4.5c)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (2.4.5d)$$

Проблема уравнений (2.4.5) состоит в задании $\bar{\rho}_{\text{int}}$ и $\bar{\mathbf{j}}_{\text{int}}$.

2.5. Вектор поляризации в материальной среде. Ток поляризации. Вектор индукции электрического поля

Пусть материальной среда, занимающая объем Ω и помещенная во внешнее поле, обладает наведенной плотностью заряда $\bar{\rho}_{\text{int}}$. В целом среда электрически нейтральная:

$$\int_{\Omega} \bar{\rho}_{\text{int}}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 0. \quad (2.5.1)$$

Носителями таких зарядов могут быть, например, электрически нейтральные молекулы, состоящие из ионов.

Электрический дипольный момент среды известен (1.4.5):

$$\mathbf{p} = \int_{\Omega} \bar{\rho}_{\text{int}}(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3\mathbf{r}. \quad (2.5.2)$$

Рассмотрим дипольный момент единицы объема тела, обладающего наведенным зарядом плотности $\bar{\rho}_{\text{int}}$. Напомним, что эта характеристика материала, носит название вектора поляризации \mathbf{P} :

$$\mathbf{p} = \int_{\Omega} \mathbf{P} d^3\mathbf{r}. \quad (2.5.3)$$

Естественно, в реальном теле присутствует дискретное распределение дипольных моментов. Тогда формула для объемной плотности дискретных моментов имеет вид, аналогичный формуле плотности заряда (1.2.4):

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\Delta V}, \quad (2.5.4)$$

где $\sum_i \mathbf{p}_i$ - суммарный дипольный момент макроскопически малого объема ΔV . Подчеркнем, что макроскопически малый объем содержит, тем не менее, большое число элементов (в данном случае, моментов), но его линейные размеры малы по сравнению с пространственными параметрами задачи.

Докажем, что имеется следующая связь между плотностью наведенного объемного заряда и вектором поляризации:

$$-\operatorname{div} \mathbf{P} = \bar{\rho}_{\text{int}}. \quad (2.5.5)$$

Для доказательства рассмотрим уравнение, получающееся из равенств (2.5.2) и (2.5.3):

$$\int_{\Omega} \mathbf{P} d^3 \mathbf{r} = \int_{\Omega} \bar{\rho}_{\text{int}}(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}. \quad (2.5.6)$$

Умножим скалярно обе части уравнения на константный вектор \mathbf{a} :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{a}, \mathbf{P}) d^3 \mathbf{r} = \int_{\Omega} (\mathbf{a}, \mathbf{r}) \bar{\rho}_{\text{int}}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}. \quad (2.5.7)$$

Прямым дифференцированием легко показать, что

$$(\mathbf{a}, \mathbf{P}) = (\nabla(\mathbf{a}, \mathbf{r}), \mathbf{P}). \quad (2.5.8)$$

Из соотношения $\mathbf{P} \cdot \nabla \alpha = \operatorname{div}(\mathbf{P} \alpha) - \alpha \operatorname{div} \mathbf{P}$, которое также легко доказывается, следует, что

$$\int_{\Omega} (\mathbf{a}, \mathbf{P}) d^3 \mathbf{r} = \int_{\Omega} \operatorname{div}((\mathbf{a}, \mathbf{r}) \mathbf{P}) d^3 \mathbf{r} - \int_{\Omega} (\mathbf{a}, \mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{P} d^3 \mathbf{r} = \oint_S (\mathbf{a}, \mathbf{r}) \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} - \int_{\Omega} (\mathbf{a}, \mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{P} d^3 \mathbf{r}. \quad (2.5.9)$$

Поскольку поверхность интегрирования для члена $\oint_S (\mathbf{a}, \mathbf{r}) \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$ произвольна, ее можно выбрать за пределами тела, т.е. там, где $\mathbf{P} = 0$. Исходя из этого, получаем:

$$-\int_{\Omega} (\mathbf{a}, \mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{P} d^3 \mathbf{r} = \int_{\Omega} \bar{\rho}_{\text{int}}(\mathbf{r}) (\mathbf{a}, \mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}. \quad (2.5.10)$$

Отсюда в силу произвольности вектора \mathbf{a} следует уравнение (2.5.5).

Подставим полученное соотношение (2.5.5) в уравнение Максвелла (2.4.5с):

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi(-\operatorname{div} \mathbf{P} + \rho_{\text{ext}}) \Rightarrow \operatorname{div}(\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}) = 4\pi \rho_{\text{ext}}. \quad (2.5.11)$$

Сумма под оператором дивергенции имеет название вектора смещения или вектора индукции электрического поля и обозначается символом \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}. \quad (2.5.12)$$

С введением вектора смещения уравнение Максвелла (2.4.5с) приобретает следующий вид:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{ext}}. \quad (2.5.13)$$

Это уравнение содержит известную стороннюю плотность заряда ρ_{ext} и лишено неопределенности, связанной с наведенной плотностью заряда в материале $\bar{\rho}_{\text{int}}$, см. уравнение (2.4.5с).

Однако обратим внимание на два обстоятельства.

1. Если интересоваться средней поляризацией по некоторому внутреннему объему диэлектрика, то поверхностный интеграл в (2.5.9) в нуль не обратится. Поэтому определение поляризации, как плотности дипольного момента, в общем случае некорректно.

2. Для быстропеременных и сильно неоднородных полей усреднение (2.4.2) делать нельзя.

Для медленно меняющихся полей справедливо соотношение (2.5.5), записанное с учетом временной координаты:

$$-\operatorname{div}\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \bar{\rho}_{\text{int}}(\mathbf{r},t). \quad (2.5.14)$$

Уравнение непрерывности (2.1.5), связывающее плотности тока $\bar{\mathbf{j}}_{\text{int}}$ и заряда $\bar{\rho}_{\text{int}}$, имеет вид:

$$\operatorname{div}\bar{\mathbf{j}}_{\text{int}}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial\bar{\rho}_{\text{int}}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0. \quad (2.5.15)$$

Преобразуем это уравнение, используя соотношение (2.5.14):

$$\operatorname{div}\left(\bar{\mathbf{j}}_{\text{int}}(\mathbf{r},t) - \frac{\partial\mathbf{P}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right) = 0. \quad (2.5.16)$$

Здесь слагаемое $\frac{\partial\mathbf{P}(\mathbf{r},t)}{\partial t}$ имеет размерность плотности тока и называется плотностью тока поляризации.

2.6. Вектор намагничивания. Плотность тока намагничивания. Физический смысл вектора намагничивания

Рассмотрим уравнение (2.5.16). Очевидно, что величину в скобках можно представить в виде ротора некоторой векторной функции $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$, поскольку $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{M}(\mathbf{r},t) \equiv 0$:

$$\bar{\mathbf{j}}_{\text{int}}(\mathbf{r},t) - \frac{\partial\mathbf{P}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = c\operatorname{rot}\mathbf{M}(\mathbf{r},t). \quad (2.6.1)$$

Здесь в качестве коэффициента перед ротором введена электродинамическая постоянная c . Тогда в отсутствие плотности тока поляризации плотность наведенного внутри среды объемного тока есть:

$$\bar{\mathbf{j}}_{\text{int}}(\mathbf{r}) = c \operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}, t). \quad (2.6.2)$$

\mathbf{M} называется вектором намагничивания или вектором магнитной поляризации.

Наведенный внутри объема тела ток, существующий в отсутствие зарядов, представляет собой ток намагничивания. Уравнение (2.6.2) связывает плотность тока намагничивания с вектором намагничивания. Для упрощения записи в дальнейших уравнениях мы не используем знак усреднения для токов.

Докажем, что магнитный дипольный момент системы токов $\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int_{\Omega} [\mathbf{r}, \mathbf{j}_{\text{int}}] d^3\mathbf{r}$ (1.12.14) связан с вектором \mathbf{M} (2.6.2) соотношением:

$$\mathbf{m} = \int_{\Omega} \mathbf{M} d^3\mathbf{r}. \quad (2.6.3)$$

Для этого умножим вектор \mathbf{M} на константный вектор $2\mathbf{a}$ и проведем преобразования, аналогичные тем, которые делались в этом курсе неоднократно:

$$(2\mathbf{a}, \mathbf{M}) = (\mathbf{M}, \operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{r}]) = (\mathbf{a}, [\mathbf{r}, \operatorname{rot} \mathbf{M}]) - \operatorname{div}[\mathbf{M}, [\mathbf{a}, \mathbf{r}]]. \quad (2.6.4)$$

Здесь учтено, что для константного вектора $2\mathbf{a} = \operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{r}]$. Проядемострируем это:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{r}] &= [\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{r}]] = \mathbf{a}(\nabla, \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\nabla, \mathbf{a}) + (\mathbf{r}, \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{r} = \\ &= 3\mathbf{a} - (a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z})(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z) = 3\mathbf{a} - \mathbf{a} = 2\mathbf{a}. \end{aligned}$$

Сделаем замену $\operatorname{rot} \mathbf{M}$ с помощью соотношения (2.6.2) и проинтегрируем по объему тела:

$$\int_{\Omega} (2\mathbf{a}, \mathbf{M}) d^3\mathbf{r} = \int_{\Omega} (\mathbf{a}, [\mathbf{r}, \frac{1}{c} \mathbf{j}_{\text{int}}]) d^3\mathbf{r} - \int_{\Omega} \operatorname{div}[\mathbf{M}, [\mathbf{a}, \mathbf{r}]] d^3\mathbf{r}. \quad (2.6.5)$$

Последний интеграл в формуле (2.6.5) равен нулю, поскольку после перехода по теореме Остроградского-Гаусса к поверхностному интегралу, он содержит вектор \mathbf{M} , равный нулю вне тела.

В силу произвольности вектора \mathbf{a} из равенства (2.6.5) следует, что

$$\int_{\Omega} \mathbf{M} d^3\mathbf{r} = \int_{\Omega} [\mathbf{r}, \frac{1}{2c} \mathbf{j}_{\text{int}}] d^3\mathbf{r}. \quad (2.6.6)$$

Соотношение (2.6.6) есть прямое доказательство формулы (2.6.3). Значит, вектор намагниченности \mathbf{M} является плотностью магнитного дипольного момента \mathbf{m} .

В теле, где есть дискретное распределение дипольных моментов, их объемная плотность имеет вид, аналогичный представлениям плотности заряда (1.2.4) и вектора поляризации (2.5.4):

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{\sum_i \mathbf{m}_i}{\Delta V}, \quad (2.6.7)$$

где $\sum_i \mathbf{m}_i$ - дипольный момент макроскопического малого объема ΔV .

2.7. Уравнения Максвелла в материальной среде

Преобразуем уравнение Максвелла (2.4.5b) с учетом выражения для плотности наведенного объемного тока (2.6.1):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{M} + \mathbf{j}_{\text{ext}} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \\ \operatorname{rot} (\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ext}} + \frac{1}{c} \frac{\partial (\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P})}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

Введем вектор для обозначения выражения, стоящего в скобках в правой части уравнения (2.7.1):

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}. \quad (2.7.2)$$

Логично назвать этот вектор вектором напряженности магнитного поля. Используя соотношения $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ (2.5.12) и $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$ (2.7.2), перепишем уравнение Максвелла (2.7.1):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ext}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (2.7.3)$$

В итоге представим полученные уравнения Максвелла в средах такими, какими они обычно фигурируют в справочниках.

В гауссовой системе:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.7.4a,b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.7.4c,d)$$

В СИ:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.7.5a,b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.7.5c,d)$$

Необходимо отметить роль *О. Хевисайда* в построении электромагнитной теории. Хевисайд ввел операторное представление уравнений Максвелла, позволившее увидеть симметрию электрического и магнитного полей. Это дало возможность Хевисайду выделить из максвелловских уравнений основные и записать их в той форме, которую мы используем до сих пор (О. Хевисайд, 1885-1893гг.)

Уравнения Максвелла дополняются граничными условиями.

В гауссовой системе и в СИ граничные условия для векторов электромагнитного поля имеют вид:

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad H_{1\tau} - H_{2\tau} = \frac{4\pi}{c} i_v, \quad (\text{гауссова система}) \quad (2.7.6a,b)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\zeta, \quad B_{2n} = B_{1n}; \quad (\text{гауссова система}) \quad (2.7.6c,d)$$

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad H_{1\tau} - H_{2\tau} = i_v, \quad (\text{СИ}) \quad (2.7.7a,b)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \zeta, \quad B_{2n} = B_{1n}, \quad (\text{СИ}) \quad (2.7.7c,d)$$

где ζ - поверхностная плотность свободных электрических зарядов, i_v - проекция вектора плотности поверхностных токов проводимости на направление $[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}]$, \mathbf{n} - нормаль к поверхности раздела сред, $\boldsymbol{\tau}$ - орт, касательный к поверхности раздела сред в рассматриваемой точке.

Вывести граничные условия (2.7.6) и (2.7.7) можно переходом от дифференциальной формы записи уравнений Максвелла к их интегральной форме и проведя процедуры, показанные в разделе 1.2. Продемонстрируем вывод граничного условия (2.7.6a):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \Rightarrow \int_S \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \\ \oint_l \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow E_{1\tau} a - E_{2\tau} a + \lim_{h \rightarrow 0} \delta C = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \lim_{h \rightarrow 0} \delta \Phi \Rightarrow \\ E_{1\tau} - E_{2\tau} &= 0, \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

что и требовалось доказать. Здесь S - площадь прямоугольника, охватывающего границу двух сред 1 и 2; a и h - размеры сторон прямоугольника, причем стороны, имеющие размер h , пересекают границу раздела; δC - интеграл по боковым сторонам прямоугольника; $\delta \Phi$ - поток вектора \mathbf{B} через прямоугольник.

Для описания электромагнитного процесса помимо уравнений Максвелла необходимо знать уравнения связи, которые характеризуют электромагнитные особенности сред: диэлектриков, проводников, диа- и парамагнетиков и т.п. Линейные уравнения связи для анизотропных материалов имеют вид:

$$\mathbf{D} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{E}, \quad (2.7.9)$$

$$\mathbf{B} = \hat{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{H}, \quad (2.7.10)$$

$$\mathbf{j} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{E}, \quad (2.7.11)$$

где $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ и $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ - тензора второго ранга диэлектрической проницаемости, магнитной проницаемости и удельной проводимости соответственно. Для

изотропных материалов тензора $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ преобразуются в скалярные функции ε , μ и σ .

Следует подчеркнуть, что уравнения связи (2.7.9) и (2.7.10) неприменимы для материалов с гистерезисом, т.е. с остаточной поляризацией и намагничённостью, к которым относятся сегнетоэлектрики и ферромагнетики.

2.8. Электросопротивление и удельное сопротивление в гауссовой системе и в СИ. Примеры изоляторов. Максвелловское время и его физический смысл

Запишем закон Ома для участка электрической цепи:

$$V = RJ, \quad (2.8.1)$$

где V - разность электрических потенциалов (напряжение) на участке цепи; J - сила тока, протекающего между концами проводника под действием разности потенциалов; R - коэффициент пропорциональности, зависящий от материала и геометрии проводника, который носит название электрического сопротивления участка цепи.

В форме записи (2.8.1) закон Ома справедлив для обеих систем измерения - гауссовой и СИ.

В гауссовой системе размерность R составляет сек см^{-1} :

$$R_{GC} = \frac{V_{GC}}{J_{GC}} = \frac{q_{GC} x_{GC}^{-1}}{q_{GC} t^{-1}} = \frac{t}{x_{GC}} = \frac{\text{сек}}{\text{см}}.$$
 В СИ единица измерения сопротивления R

имеет название – ом ($\text{Ом}, \Omega$): $R_{СИ} = \frac{V_{СИ}}{J_{СИ}} = \frac{\text{вольт}}{\text{ампер}} = \text{ом}.$

Связь между единицами измерений сопротивления в гауссовой системе и в СИ определим, как и прежде, с помощью переводных коэффициентов:

$$u_R = \frac{u_V}{u_J} \approx \frac{1}{300 \cdot 3 \cdot 10^9} \approx \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \Rightarrow 1 \frac{\text{сек}}{\text{см}} = 9 \cdot 10^{11} \text{ Ом}.$$

Если взять однородный цилиндрический проводник длиной ℓ и площадью поперечного сечения S , то его сопротивление определится по следующей формуле:

$$R = \rho \frac{\ell}{S}, \quad (2.8.2)$$

где коэффициент ρ носит название удельного сопротивления.

Определим единицу измерения удельного сопротивления в гауссовой системе:

$$\rho_{GC} = R_{GC} x_{GC} = \text{сек}, \quad (2.8.3)$$

и найдем ее связь с единицей измерения ρ в СИ:

$$u_{\rho} = u_R u_x \approx \frac{10^2}{9 \cdot 10^{11}} = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \Rightarrow 1 \text{ сек} = 9 \cdot 10^9 \text{ Ом} \cdot \text{м} \text{ или, как принято,}$$

$$1 \text{ сек} = 9 \cdot 10^{11} \text{ Ом} \cdot \text{см}.$$

Ниже в Таблице показано, как широк диапазон значений удельных сопротивлений диэлектрических материалов.

Таблица. Удельные сопротивления некоторых материалов.

Материал	Удельное сопротивление ρ
янтарь, пластик	10^{15} - 10^{16} Ом см 10^3 - 10^4 сек
стекло	10^{12} - 10^{13} Ом см 1-10 сек
сухое дерево	10^{10} - 10^{11} Ом см 0.01-0.1 сек

Рассмотрим участок электрической цепи, включающей конденсатор, подробнее о конденсаторе см. в следующем разделе. Предположим, что в диэлектрике, заполняющем конденсатор, имеется линейная связь между векторами \mathbf{E} и \mathbf{D} : $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, где параметр ε - диэлектрическая проницаемость диэлектрика. Конденсатор заряжен, электрическая цепь разомкнута. На обкладках конденсатора плотность заряда составляет величину ρ_e . Умножим обе части уравнения (2.7.4с), которому подчиняется поле в конденсаторе, на удельную электропроводность σ :

$$\operatorname{div} \sigma \mathbf{E} = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \rho_e. \quad (2.8.4)$$

Воспользовавшись законом Ома в дифференциальной форме $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, перепишем соотношение (2.8.4):

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \rho_e. \quad (2.8.5)$$

С другой стороны $\operatorname{div} \mathbf{j}$ можно определить из уравнения непрерывности:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_e. \quad (2.8.6)$$

Приравняв правые части уравнений (2.8.5) и (2.8.6), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно ρ_e :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \rho_e = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \rho_e. \quad (2.8.7)$$

Отсюда находим

$$\rho_e = \tilde{\rho}_e e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \tau}. \quad (2.8.8)$$

Из формулы (2.8.8) следует определение так называемого максвелловского времени релаксации. Максвелловское время – это время разрядки емкости через утечку в обкладках, т.е. время, за которое плотность заряда на обкладках конденсатора со значения $\tilde{\rho}_e$ уменьшится в e раз:

$$\tau_m = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \rho. \quad (2.8.9)$$

Здесь мы учли связь удельной проводимости σ и удельного сопротивления ρ : $\sigma = 1/\rho$.

Физический смысл удельного сопротивления диэлектрика просматривается из соотношения (2.8.9): удельное сопротивление – это, с точностью до коэффициента, максвелловское время релаксации.

По наличию максвелловского времени релаксации можно определить, является ли материал диэлектриком. Значение удельного сопротивления (максвелловское время) показывает способность материала сохранять поле, и, значит, «удерживать» свободные внешние заряды.

2.9. Определение емкости через решение уравнения Лапласа.

Примеры вычисления емкости в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат.

Связь единиц емкости в гауссовой системе и в СИ. Энергия зарядки емкости и работа, затрачиваемая батареей на зарядку

Рассмотрим проводник, удаленный от других проводников и зарядов. Опыт показывает, что отношение заряда такого проводника q к его потенциалу φ (при условии $\varphi_\infty = 0$) не зависит от величин q и φ :

$$C = \frac{q}{\varphi} = f(q, \varphi). \quad (2.9.1)$$

Для каждого проводника параметр C (2.9.1), называемый емкостью, зависит только от геометрии проводника, т.е. его размеров и формы.

Если вблизи проводника есть другой проводник, заряженный противоположным по знаку, но равным по величине зарядом, то возникает разность потенциалов $V = \varphi_1 - \varphi_2$, пропорциональная заряду q : $V = q/C$. Система двух таких проводников называется *конденсатором*, при условии, что форма и расположение проводников обеспечивает сосредоточение электростатического поля в некоторой области пространства. Проводники в конденсаторе носят название обкладок.

Итак, емкость конденсатора определена соотношением:

$$C = \frac{q}{V}, \quad (2.9.2)$$

где V - разность потенциалов между обкладками.

В формулах (2.9.1) и (2.9.2) имеются в виду значения заряда, потенциала и разности потенциалов, т.е. полагается, что емкость C всегда положительна.

Найдем общую формулу для вычисления емкости конденсатора и рассчитаем емкости конденсаторов разной геометрии. Заметим, что электрическое поле существует только между обкладками конденсатора. Воспользуемся уравнением Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$ и линейной связью $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$. Тогда граничное условие (2.7.6с) на каждой из обкладок площадью S_1 или S_2 можно записать как:

$$\varepsilon E_n |_{S_1, S_2} = 4\pi\zeta |_{S_1, S_2} \quad \text{или} \quad \zeta |_{S_1, S_2} = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} |_{S_1, S_2}. \quad (2.9.3)$$

Здесь учтено то, что заряд распределен по обкладке с поверхностной плотностью ζ , и принято во внимание соотношение $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$. В декартовой системе координат, связанной с поверхностью \mathbf{S} (см. рис. 1.2а), оператор Гамильтона имеет вид $\nabla = \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{n} + \frac{\partial}{\partial \tau} \boldsymbol{\tau} + \frac{\partial}{\partial \nu} \mathbf{v}$.

Зная, что полный заряд на каждой обкладке конденсатора есть $q |_{S_1} = q |_{S_2} = \int_{S_1} \zeta |_{S_1} dS = \int_{S_2} \zeta |_{S_2} dS$, в итоге, для емкости конденсатора можно записать следующую формулу:

$$C = \frac{\varepsilon}{4\pi V} \int_{S_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} |_{S_1} dS = \frac{\varepsilon}{4\pi V} \int_{S_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} |_{S_2} dS. \quad (2.9.4)$$

Здесь в формулу входят модули V и $\frac{\partial \varphi}{\partial n} |_{S_1, S_2}$.

В отсутствие объемной плотности зарядов, а именно это характерно для конденсатора, уравнение Пуассона для потенциала преобразуется к уравнению Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0. \quad (2.9.5)$$

Рассмотрим три конденсатора, отличающихся между собой геометрией - плоский, цилиндрический и сферический, и рассчитаем их емкости.

Плоский конденсатор. Для плоского конденсатора оператор Лапласа целесообразно записать в декартовой системе координат (x, y, z) . С учетом того, что в силу симметрии задачи потенциал φ в плоском конденсаторе зависит только от одной координаты, перпендикулярной поверхностям обкладки (пусть это будет координата x), уравнение Лапласа (2.9.5) примет вид:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0. \quad (2.9.6)$$

Уравнение (2.9.6) – обыкновенное дифференциальное уравнение, для которого легко найти решение:

$$\varphi = \alpha_1 x + \alpha_2. \quad (2.9.7)$$

Разность потенциалов V между обкладками конденсатора, имеющими координаты $x=d$ и $x=0$, примет вид:

$$V = \varphi(0) - \varphi(d) = -\alpha_1 d. \quad (2.9.8)$$

Отсюда

$$\alpha_1 = -\frac{V}{d} \text{ и } \varphi = -\frac{V}{d} x + \alpha_2. \quad (2.9.9)$$

Пренебрегая знаком, подставим (2.9.9) в выражение для емкости (2.9.4). Для плоского (plane) конденсатора с учетом $S_1 = S_2 = S$ получаем

$$C_{plane} = \frac{\varepsilon}{4\pi V} \int_S \frac{V}{d} dS = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}. \quad (2.9.10)$$

Цилиндрический конденсатор. Цилиндрический конденсатор представляет собой систему из двух коаксиальных проводящих цилиндров, между которыми расположен диэлектрик. Очевидно, что в этом случае потенциал зависит только от полярной координаты r в цилиндрической системе координат (r, ϕ, z) . В цилиндрической системе координат при условии $\varphi \neq f(\phi, z)$ уравнение Лапласа (2.9.5) преобразуется к виду (см. Приложение 2.3):

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0. \quad (2.9.11)$$

Найдем решение этого уравнения:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{d\varphi}{dr} = \alpha_1 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\alpha_1}{r} \Rightarrow \varphi = \alpha_1 \ln r + \alpha_2. \quad (2.9.12)$$

Тогда разность потенциалов между обкладками с координатами r_1 и r_2 есть:

$$V = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \alpha_1 \ln \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{V}{\ln(r_1 / r_2)} \quad (2.9.13)$$

Следовательно, из ф. (2.9.12) получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{V}{\ln(r_1 / r_2)} \frac{1}{r}. \quad (2.9.14)$$

Отсюда емкость цилиндрического (cylindrical) конденсатора, для которого $r_1 > r_2$, примет вид:

$$C_{cyl} = \frac{\varepsilon}{4\pi V} \int_{S_1} \frac{V}{\ln(r_1 / r_2)} \frac{1}{r_1} dS = \frac{\varepsilon 2\pi r_1 \ell}{4\pi \ln(r_1 / r_2) r_1} = \frac{\varepsilon \ell}{2 \ln(r_1 / r_2)}, \quad (2.9.15)$$

где ℓ - высота цилиндра.

Сферический конденсатор. В сферической системе координат (R, θ, ϕ) с учетом зависимости потенциала только от радиальной

координаты R уравнение Лапласа преобразуется к формуле (см. Приложение 2):

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d\varphi}{dR} \right) = 0. \quad (2.9.16)$$

Дифференциальное уравнение (2.9.16) также легко разрешимо:

$$\frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d\varphi}{dR} \right) = 0 \Rightarrow R^2 \frac{d\varphi}{dR} = \alpha_1 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dR} = \frac{\alpha_1}{R^2} \Rightarrow \varphi = -\frac{\alpha_1}{R} + \alpha_2. \quad (2.9.17)$$

Отсюда получаем

$$V = \varphi(R_1) - \varphi(R_2) = \alpha_1 \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{V R_1 R_2}{(R_1 - R_2)} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{d\varphi}{dR} = \frac{V R_1 R_2}{(R_1 - R_2) R^2} \quad (2.9.18)$$

Применив формулу (2.9.4), найдем емкость сферического (spherical) конденсатора при условии $R_1 > R_2$:

$$C_{sph} = \frac{\varepsilon}{4\pi V} \int_{S_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{S_1} dS = \frac{\varepsilon V R_1 R_2 \cancel{4\pi} R_1^2}{\cancel{4\pi} V (R_1 - R_2) R_1^2} = \frac{\varepsilon R_1 R_2}{(R_1 - R_2)}. \quad (2.9.19)$$

Определим единицы измерения емкости в гауссовой системе и в СИ и найдем связь между ними.

В обеих системах $q = CV$, значит, $C_{GC} = \frac{q_{GC}}{V_{GC}} = \frac{q_{GC}}{(q_{GC} / x_{GC})} = x_{GC} = \text{см}$. В СИ

единица измерения емкости, равная $\frac{1 \text{ кулон}}{1 \text{ вольт}}$, носит название “*фарад*” (Φ ,

F). Переводной коэффициент, связывающий единицу измерения емкости в

гауссовой системе и в СИ, есть: $u_q = u_C u_V \Rightarrow u_C = \frac{u_q}{u_V} = \frac{\text{с}}{10 \cdot 300} \approx 9 \cdot 10^{11} \Rightarrow$

$1\Phi \approx 10^{12} \text{ см} \Rightarrow 1 \text{ см} \approx 1 \text{ нФ}$ (pF), здесь приставка “*n*” означат «пико».

Рассчитаем энергию зарядки конденсатора и работу, затрачиваемую батареей на зарядку. Определим работу тока в единицу времени P в электрической цепи, состоящей из конденсатора и нагрузки:

$$P = -\frac{dW}{dt} = VJ, \quad (2.9.20)$$

где W - энергия зарядки конденсатора. Поскольку из уравнения

непрерывности следует, что $J = -\frac{dq}{dt}$, и из ф. (2.9.2) $q = CV$, получаем

$$J = -C \frac{dV}{dt}. \quad (2.9.21)$$

Подстановка выражения (2.9.21) в ф. (2.9.20) дает $-\frac{dW}{dt} = V(-C \frac{dV}{dt}) \Rightarrow$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (CV^2). \quad (2.9.22)$$

Интегрируя уравнение (2.9.22), находим энергию зарядки конденсатора

$$W = \frac{CV^2}{2} \text{ или } W = \frac{qV}{2}, \text{ или } W = \frac{q^2}{2C}. \quad (2.9.23)$$

2.10. Закон Ампера для магнитного поля в тороидальной круглой катушке различного сечения. Индуктивности катушек.

Рассмотрим уравнение Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ в стационарном случае и перепишем его в интегральном виде:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \Rightarrow \int_S \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \oint_{\ell} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} J. \quad (2.10.1)$$

Здесь переход от поверхностного интеграла к интегралу по замкнутому контуру (циркуляции) совершен в соответствии с теоремой Стокса.

Формула (2.10.1) называется законом (или теоремой) Ампера о циркуляции магнитного поля (1826 г.). Важно отметить, что циркуляция магнитного поля постоянных токов (левая часть уравнения (2.10.1)) пропорциональна сумме сил токов, пронизывающих контур циркуляции (правая часть уравнения (2.10.1)). Позже в 1861 году Максвелл снова вывел эту теорему и обобщил ее.

Законом Ампера удобно пользоваться для вычисления магнитного поля и индуктивности катушек с током.

Рассмотрим тороидальные круглые катушки различного сечения. Согласно закону Ампера (2.10.1) поле на расстоянии r от оси круглой катушки до точки сердечника есть:

$$H 2\pi r = \frac{4\pi}{c} J_{total} \Rightarrow H = \frac{2J_{total}}{cr} \Rightarrow H = \frac{2NJ}{cr}, \quad (2.10.2)$$

где учтено, что J_{total} - ток, «пронизывающий контур циркуляции». В случае N витков катушки и тока J , текущего по обмотке, $J_{total} = NJ$.

Величина магнитной индукция при заполнении катушки линейным изотропным магнетиком, т.е. при условии $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, где μ - магнитная проницаемость материала, определяется формулой:

$$B = \frac{2\mu NJ}{cr}. \quad (2.10.3)$$

Мы видим, что форма сечения для тороидальной круглой катушки не играет никакой роли при определении магнитного поля, создаваемого током.

Индуктивность катушки – это коэффициент, связывающий магнитный поток с током (см. раздел 1.14):

$$\Phi = \frac{1}{c} L J . \quad (2.10.4)$$

Здесь Φ - это суммарный поток, пронизывающий все витки катушки. Заметим, что в общем случае магнитный поток Φ определяется как поток магнитной индукции \mathbf{B} . В разделе 1.14 мы находили магнитный поток в вакууме, поэтому использовали вместо индукции \mathbf{B} напряженность \mathbf{H} .

Найдем индуктивность длинного соленоида, у которого число витков на единицу длины ℓ составляет n . Полный поток поля через все витки соленоида в этом случае есть

$$n\ell \int_s \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{c\mu} L J , \quad (2.10.5)$$

где полагаем, что сердечник соленоида - это линейный магнетик. Следуя формуле (2.10.1), определим поле длинного соленоида:

$$H\ell = \frac{4\pi}{c} n\ell J \Rightarrow H = \frac{4\pi}{c} nJ . \quad (2.10.6)$$

Подставив (2.10.6) в выражение (2.10.5), получаем

$$n\ell \frac{4\pi}{c} nJS = \frac{1}{c\mu} L J \Rightarrow L = 4\pi\mu n^2 \ell S , \quad (2.10.7)$$

где S - площадь, охватываемая витком соленоида (площадь поперечного сечения сердечника).

2.11. Закон Ома для переменного тока для R-L-C цепи в гауссовой системе и в СИ. Резонансная частота контура (формула Томпсона).

Определение *эдп* электрическим методом

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из источника эдс \mathcal{E} , активного сопротивления R , конденсатора C и индуктивности L , соединенных последовательно. На участке цепи между обкладками конденсатора закон Ома имеет вид:

$$JR = \varphi_2 - \varphi_1 + \mathcal{E}_L + \mathcal{E} . \quad (2.11.1)$$

Здесь J - ток, $\varphi_2 - \varphi_1$ - разность потенциалов между обкладками конденсатора, \mathcal{E}_L - эдс самоиндукции. Полагаем, что ток течет от обкладки 1 конденсатора, имеющей заряд q_1 , по цепи к обкладке конденсатора 2, имеющей заряд q_2 . Очевидно, что $q_1 = -q_2$. С помощью уравнения непрерывности находим, что

$$J = -\frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt}. \quad (2.11.2)$$

Все составляющие уравнения (2.11.1) известны из разделов 2.9 и 2.10:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = V = \frac{q_1}{C}, \quad (2.11.3a)$$

$$\mathcal{E}_L = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{L}{c^2} \frac{dJ}{dt} = \frac{L}{c^2} \frac{d^2q_1}{dt^2}. \quad (2.11.3b)$$

Перепишем уравнений (2.11.1) в виде дифференциального уравнения 2-го порядка относительно заряда q (индекс у заряда убрали, как несущественный):

$$\frac{L}{c^2} \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}. \quad (2.11.4)$$

Это уравнение описывает электрические колебания в контуре, включающем активное сопротивление, емкость и индуктивность. Решение уравнения (2.11.4) дает заряд $q(t)$ и ток $J(t) = dq / dt$.

В 1853 г. *Вильям Томсон* представил решение задачи об определении характера изменения заряда проводника с заданной емкостью и потенциалом, если он соединяется с Землей проволокой малой емкости с известным омическим сопротивлением. В работе не фигурировал колебательный контур из конденсатора и индуктивности. Рассуждения Томсона сводились к следующему. Пусть тело имеет емкость C и заряд q . При разряде возникает ток J , имеющий энергию $AJ^2 / 2$, где A - константа. Эта формула написана по аналогии с выражением для кинетической энергии. Согласно закону сохранения энергии, работа, затраченная на возбуждение тока и на выделение джоулева тепла, равна уменьшению энергии заряженного тела, см. ф (2.9.23):

$$-d\left(\frac{q^2}{2C}\right) = d\left(\frac{AJ^2}{2}\right) + RJ^2 dt. \quad (2.11.5)$$

Из этого уравнения следует формула (2.11.4) при $\mathcal{E} = 0$. Колебания в этом случае называются свободными. Отсутствие активного сопротивления делает колебания незатухающими. Уравнение, описывающее незатухающие колебания в контуре, имеет вид:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0, \quad \omega_0^2 = c^2 / (LC) \quad (2.11.6)$$

Решение уравнения (2.11.6) записывается в следующей форме:

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (2.11.7)$$

Здесь q_0 - максимальное значение заряда на обкладках конденсатора, α - начальная фаза колебательного процесса. Эти параметры определяются начальными условиями дифференциального уравнения (2.11.6).

Собственная частота колебаний или резонансная частота контура ω_0 определяется только параметрами контура и, согласно обозначению в уравнении (2.11.6), имеет вид:

$$\omega_0 = \frac{c}{\sqrt{LC}}. \quad (2.11.8)$$

Выражение (2.11.8), связывающее частоту собственных колебаний с индуктивностью и емкостью электрической цепи, называется формулой Томпсона. Она позволяет определить $\varepsilon_{\text{дп}}$ с помощью известных L и C в гауссовой системе и измеренной частоты ω_0 или периода колебаний T ($\omega_0 = 2\pi / T$):

$$c = \frac{2\pi}{T} \sqrt{LC}. \quad (2.11.9)$$

Увеличивая L и C , *Р.А. Колли* получал медленные электрические колебания, которые наблюдал с помощью изобретенного им осциллоскопа. Величина определенной таким образом $\varepsilon_{\text{дп}}$ составила $\approx 3.015 \cdot 10^{10} \text{ см сек}^{-1}$.

2.12. Скорость изменения плотности электрической и магнитной энергии. Плотность энергии в изотропных линейных диэлектрике и магнетике. Поток энергии в электромагнитном поле, теорема Пойнтинга

Для определения скорости изменения энергии электрического поля в диэлектрике составим билинейное выражение $(\mathbf{H}, \text{rot } \mathbf{E}) - (\mathbf{E}, \text{rot } \mathbf{H})$ и с помощью уравнений Максвелла (2.3.4) преобразуем его:

$$(\mathbf{H}, \text{rot } \mathbf{E}) - (\mathbf{E}, \text{rot } \mathbf{H}) = (\mathbf{H}, -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) - (\mathbf{E}, \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \Rightarrow$$

$$(\mathbf{H}, \text{rot } \mathbf{E}) - (\mathbf{E}, \text{rot } \mathbf{H}) = -\frac{1}{c} \{ (\mathbf{H}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) + (\mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \} - \frac{4\pi}{c} (\mathbf{E}, \mathbf{j}). \quad (2.12.1)$$

Применив соотношение $\text{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \text{rot } \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \text{rot } \mathbf{b})$ и поделив обе части формулы (2.12.1) на $\frac{4\pi}{c}$, из формулы (2.12.1) получим

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div } \boldsymbol{\gamma} = -(\mathbf{E}, \mathbf{j}), \quad (2.12.2)$$

где

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \{ (\mathbf{H}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) + (\mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \}, \quad (2.12.3)$$

$$\gamma = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]. \quad (2.12.4)$$

Для физической интерпретации уравнения (2.12.2) проинтегрируем его по объему, ограниченному поверхностью S :

$$-\frac{d}{dt} \int_V w d^3 \mathbf{r} = \oint_S \gamma \cdot d\mathbf{S} + \int_V (\mathbf{E}, \mathbf{j}) d^3 \mathbf{r}. \quad (2.12.6)$$

Последний интеграл в формуле (2.12.6) – это работа, производимая электромагнитным полем над частицами. Покажем это.

Полная сила Лоренца \mathbf{F}_L , действующая на каждую заряженную частицу в электромагнитном поле, есть сумма двух компонент – электрической (1.2.6) и магнитной (1.11.8):

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad (2.12.7)$$

Работа силы Лоренца, производимая в единицу времени, очевидно, равна:

$$(\mathbf{F}_L, \mathbf{v}) = q(\mathbf{E}, \mathbf{v}) + \frac{q}{c} \underbrace{([\mathbf{v}, \mathbf{B}], \mathbf{v})}_{=0} = q(\mathbf{E}, \mathbf{v}). \quad (2.12.8)$$

Как следует из выражения (2.12.8), магнитная сила не совершает работу над движущейся заряженной частицей.

Работа, совершаемая полем в единице объема в единицу времени, есть:

$$qv(\mathbf{E}, \mathbf{v}) = (\mathbf{E}, \mathbf{j}), \quad (2.12.9)$$

где ν - число частиц в единице объема. Здесь плотность тока, вызванного перемещением частиц, определяется по формуле $\mathbf{j} = q\nu \mathbf{v}$. Частицы разгоняются полем.

Полная работа электромагнитного поля над объемом V в единицу времени определена интегралом:

$$\int_V (\mathbf{E}, \mathbf{j}) d^3 \mathbf{r}. \quad (2.12.10)$$

По закону сохранения энергии работа (2.12.10) производится за счет убыли энергии поля в рассматриваемом объеме V .

Проиллюстрируем тот факт, что энергия поля в единицу времени – это член $\frac{d}{dt} \int_V w d^3 \mathbf{r}$ в формуле (2.12.6).

Для этого рассчитаем w в вакууме:

$$w = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi}. \quad (2.12.11)$$

Выражение (2.12.11) совпадает с суммой плотностей энергий электрического и магнитного полей в вакууме, см. формулы (1.6.15) и (1.14.19).

Для линейных диэлектрика и магнетика энергия есть:

$$W = \int_V \frac{1}{8\pi} (\mu H^2 + \varepsilon E^2) d^3\mathbf{r}. \quad (2.12.12)$$

В диэлектрике $\mathbf{j}=0$ внутри объема, и убыль энергии поля может происходить только в результате ее «вытекания» из объема.

Такая интерпретация величин в соотношении (2.12.2) позволяет трактовать его, как уравнение баланса энергии: уменьшение энергии, накопленной в самом электромагнитном поле в объеме V , происходит за счет утечки энергии за пределы объема и передачи энергии движущимся зарядам.

Общее представление о потоке энергии в пространстве впервые было введено *Николаем Алексеевичем Умовым* в 1874 году в работе «Уравнения движения энергии в телах». Он же определил вектор плотности потока энергии $\boldsymbol{\rho}$ и уравнение передачи энергии: «всегда существуют три функции ρ_x, ρ_y, ρ_z , обладающие тем свойством, что сумма их первых производных по осям x, y, z дает уменьшение плотности энергии в единицу времени в данной точке тела». Математическая запись этого утверждения имеет вид:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{\rho} = 0. \quad (2.12.13)$$

Уравнение (2.12.13) выражает принцип сохранения энергии и справедливо для любой среды. Вектор плотности потока энергии $\boldsymbol{\rho}$ без конкретизации её физической природы называется *вектором Умова*. Умов получил выражения этого вектора для упругих сред и вязких жидкостей.

Независимо от Умова ту же идею, только в более узкой и конкретной форме, развили английские физики *О. Хевисайд* и *Джон Генри Пойнтинг*. В 1883-84гг. Пойнтинг опубликовал статью «О переносе энергии в электромагнитном поле», в которой доказал теорему: «электромагнитная энергия вытекает через поверхность S из рассматриваемого объема V наружу и притом в количестве $\oint_S \boldsymbol{\gamma} \cdot d\mathbf{S}$ единиц энергии в секунду, где

$\boldsymbol{\gamma} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ ». Вектор плотности потока электромагнитной энергии $\boldsymbol{\gamma}$ называется *вектором Пойнтинга*.

Контрольные вопросы к Главе 2

1. Объяснить, каким образом Максвелл устранил противоречие между двумя экспериментальными законами – законом сохранения заряда и законом Био-Савара-Лапласа в случае переменного во времени электрического тока.
2. Покажите, почему нарушается потенциальность электрического поля, порожденного переменным магнитным полем.
3. Дайте определение вектора поляризации и укажите на возможные ограничения этого определения в материальной среде.
4. Что означает термин «максвелловское время» применительно к изоляторам?
5. Выведите общую формулу емкости конденсатора и вычислите емкости конденсаторов простых геометрий.
6. Выведите формулу Томпсона, связывающую частоту собственных колебаний с индуктивностью и емкостью электрической цепи, и поясните, как с ее помощью определить эдп.
7. Дайте определение вектора Умова - Пойнтинга и сформулируйте теорему Пойнтинга.

Глава 3. Электромагнитные волны

3.1. Плоские волны в однородном изотропном диэлектрике как решение уравнений Максвелла. Правая винтовая тройка, соотношение между электрическим и магнитным полем, дисперсионное уравнение и дисперсионная поверхность

В этом разделе мы покажем, что уравнения Максвелла, записанные в отсутствие зарядов и токов, могут иметь ненулевые решения, и эти решения представляют собой электромагнитные волны.

Предположим, что рассматриваемый нами диэлектрик лишен свободных электрических зарядов $\rho = 0$. Кроме того, в диэлектрике $\mathbf{j} = 0$.

Запишем уравнения Максвелла (2.7.4) при $\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.1.1a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3.1.1b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (3.1.1c)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (3.1.1d)$$

Предположим также, что изотропный диэлектрик линеен: $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Перепишем уравнение (3.1.1a), взяв rot от обеих его частей:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{B}). \quad (3.1.2)$$

Подставим уравнение $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\mu \varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, записанное на основании уравнения (3.1.1b) и связи $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, в уравнение (3.1.2):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu \varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \\ &\nabla \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \end{aligned}$$

откуда в силу уравнения (3.1.1c) $\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = 0$ получаем волновое уравнение

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1.3)$$

Запишем аналогичное уравнение для поля \mathbf{H} :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{E}) \Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta \mathbf{H} - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1.4)$$

Ищем решение уравнений (3.1.3) и (3.1.4) в виде *плоской монохроматической волны*, направленной вдоль оси Z :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^*(z)e^{i\omega t}, \quad (3.1.5a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^*(z)e^{i\omega t}. \quad (3.1.5b)$$

Волна называется *плоской*, если в любой момент времени во всех точках любой плоскости, перпендикулярной к направлению волны, векторы поля имеют одинаковое значение. Иными словами, если выбрать ось Z по направлению волны, то вектора \mathbf{E} и \mathbf{H} поля плоской волны должны зависеть только от координаты z , но не от координат x и y .

Рассмотрение подобных волн имеет вполне определенное физическое значение, ибо, например, в достаточном удалении от осциллятора ограниченный участок излучаемой им сферической волны можно с достаточной точностью считать плоским. Волна называется монохроматической, если поле волны является гармонической (синусоидальной) функцией времени.

Подставим предполагаемые решения (3.1.5a,b) в уравнения (3.1.3) и (3.1.4), сокращаем на $e^{i\omega t}$ и получаем:

$$-\frac{\varepsilon \mu \omega^2}{c^2} \mathbf{E}^*(z) = \frac{\partial^2 \mathbf{E}^*(z)}{\partial z^2}, \quad (3.1.6a)$$

$$-\frac{\varepsilon \mu \omega^2}{c^2} \mathbf{H}^*(z) = \frac{\partial^2 \mathbf{H}^*(z)}{\partial z^2}, \quad (3.1.6b)$$

или:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}^*(z)}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{E}^*(z) = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{H}^*(z)}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{H}^*(z) = 0, \quad (3.1.7a,b)$$

где введено обозначение $k^2 = \frac{\varepsilon \mu \omega^2}{c^2}$, $k = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon \mu}}{c}$.

Решения уравнений (3.1.7a,b), как известно, имеют вид:

$$\mathbf{E}^*(z) = \mathbf{E}_0 e^{-ikz} + \mathbf{E}'_0 e^{ikz}, \quad \mathbf{H}^*(z) = \mathbf{H}_0 e^{-ikz} + \mathbf{H}'_0 e^{ikz}, \quad (3.1.8a,b)$$

где \mathbf{E}_0 , \mathbf{E}'_0 , \mathbf{H}_0 , \mathbf{H}'_0 - произвольные постоянные интегрирования, не зависящие от координаты и времени.

Внося эти выражения в уравнения (3.1.5a,b), получаем:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} + \mathbf{E}'_0 e^{i(\omega t + kz)}, \quad (3.1.9a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - kz)} + \mathbf{H}'_0 e^{i(\omega t + kz)}. \quad (3.1.9b)$$

Первые члены этих выражений представляют собой волну, распространяющуюся в положительном направлении оси Z , а вторые – волну, распространяющуюся в обратном направлении. Без ущерба

общности рассуждения можно ограничиться рассмотрением лишь одной из этих волн, например, первой, и положить:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - kz)}. \quad (3.1.10a,b)$$

Здесь \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 суть амплитуды векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} . Независимость этих амплитуд от координаты означает, что распространение плоских волн в диэлектрике не связано с изменением, их интенсивности. Заметим, что амплитуды, вообще говоря, величины комплексные.

Скорость волны можно определить из соотношения:

$$\mathbf{E}_0 e^{i(\omega t_0 - kz_0)} = \mathbf{E}_0 e^{i[\omega(t_0 + \Delta t) - k(z_0 + \Delta z)]}, \quad (3.1.11)$$

смысл которого заключается в том, что двигаясь с некоторой скоростью, величина вектора \mathbf{E} , зафиксированная в точке пространства z_0 в момент времени t_0 , станет таковой в точке пространства $z_0 + \Delta z$ в момент времени $t_0 + \Delta t$.

Отсюда

$$\begin{aligned} \omega t_0 - kz_0 &= \omega(t_0 + \Delta t) - k(z_0 + \Delta z) \Rightarrow \omega \Delta t = k \Delta z \Rightarrow v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \\ v &= \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Здесь использовано выражение для k , см. (3.1.7): $k = \frac{\omega \sqrt{\epsilon \mu}}{c}$.

Величина k очень просто связана с длиной волны λ . Подставим $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T - период, в выражение для k и используем (3.1.12):

$$k = \frac{\frac{2\pi}{T} \sqrt{\epsilon \mu}}{c} = \frac{2\pi}{Tv} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (3.1.13)$$

Таким образом, k равно числу волн, укладывающихся в отрезке 2π , и поэтому называется волновым числом.

Для дальнейшего изложения мы для наглядности рассмотрим пару решений (3.1.10a,b) с действительными амплитудами, при этом пусть волна распространяется в направлении единичного вектора \mathbf{e}_r (r - координата в направлении \mathbf{e}_r):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - k r), \quad (3.1.14a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - k r). \quad (3.1.14b)$$

Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \epsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \epsilon k (\mathbf{E}, \mathbf{e}_r) = 0, \quad (3.1.15a)$$

следует, что вектора $\mathbf{e}_r, \mathbf{E}, \mathbf{H}$ взаимно перпендикулярны и образуют так называемую правую тройку ($\mathbf{e}_r, \mathbf{E}, \mathbf{H}$).

Из соотношения (3.1.17а) следует, что

$$\sqrt{\mu} |\mathbf{H}| = \sqrt{\varepsilon} |\mathbf{e}_r| |\mathbf{E}| \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\mu} |\mathbf{H}| = \sqrt{\varepsilon} |\mathbf{E}|. \quad (3.1.19)$$

Отношение численных значений векторов \mathbf{H}, \mathbf{E} не зависит от времени, то есть эти вектора обладают одинаковыми фазами и изменяются синхронно. Отметим, что в обычных диэлектриках, где $\mu = 1$ и $\varepsilon > 1$, модуль вектора \mathbf{H} больше модуля вектора \mathbf{E} .

Из определения вектора Пойнтинга $\boldsymbol{\gamma} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ следует, что $\boldsymbol{\gamma}$ направлен вдоль вектора \mathbf{e}_r .

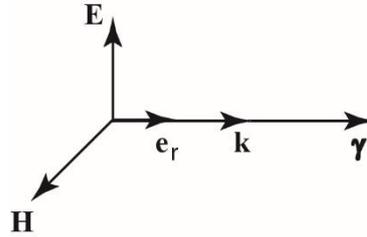


Рис. 3.1. Правая тройка векторов ($\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$) и вектор Пойнтинга $\boldsymbol{\gamma}$ в линейном изотропном материале.

Введем вектор \mathbf{k} :

$$\mathbf{k} = k \mathbf{e}_r, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon \mu}}{c} \mathbf{e}_r, \quad \Rightarrow \quad (3.1.20)$$

и назовем его волновым вектором. Очевидно, что ($\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$) - правая тройка (рис. 3.1).

Из соотношения (3.1.20) следует *дисперсионное* уравнение:

$$c^2 k^2 - \omega^2 \varepsilon \mu = 0. \quad (3.1.21)$$

Дисперсионное уравнение связывает частоту и волновой вектор. В более общем виде оно имеет вид:

$$c^2 k^2 - \omega^2 \varepsilon(k, \omega) \mu(k, \omega) = 0. \quad (3.1.22)$$

Зная функциональные зависимости $\varepsilon(k, \omega)$ и $\mu(k, \omega)$, задают либо волновой вектор, либо частоту и определяют другую величину из дисперсионного уравнения (3.1.22). Отметим также, что в анизотропных средах диэлектрическая и магнитная проницаемости являются симметричными тензорами второго ранга, в связи с чем соотношение (3.1.22) преобразуется к более сложному виду.

Введем векторный показатель преломления:

$$\mathbf{n} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k}. \quad (3.1.23)$$

Для изотропного материала, который мы сейчас рассматриваем, закон дисперсии связывает векторный показатель преломления с проницаемостью ε (с учетом того, что для большинства оптических диэлектриков $\mu = 1$):

$$n^2 = \varepsilon. \quad (3.1.24)$$

В Главе 4 «Общие вопросы кристаллооптики», посвященной рассмотрению прохождения света через анизотропные материалы, будет показано, что закон дисперсии (3.1.23) характерен не только для изотропных материалов, но и для кристаллов кубической системы.

Дисперсионной поверхностью называется поверхность, которая описывает все семейство значений векторного показателя преломления для всех его направлений в кристалле. Очевидно, что в изотропном диэлектрике дисперсионная поверхность – это сфера с радиусом $n = \sqrt{\varepsilon}$.

3.2. Перенос энергии плоской электромагнитной волной. Поглощение электромагнитной волны в проводящей среде

Вначале найдем плотность энергии монохроматической плоской электромагнитной волны в изотропном диэлектрике, состоящей из плотностей электрической w_e и магнитной энергий w_m :

$$w_e = \frac{ED}{8\pi} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\varepsilon \mu H^2}{8\pi \varepsilon} = \frac{\mu H^2}{8\pi}, \quad (3.2.1a)$$

$$w_m = \frac{HB}{8\pi} = \frac{\mu H^2}{8\pi} = w_e \Rightarrow \quad (3.2.1b)$$

$$w = w_e + w_m = \frac{\varepsilon E^2}{4\pi} = \frac{\mu H^2}{4\pi}. \quad (3.2.1c)$$

Из соотношений (3.2.1a,b) видно, что плотность магнитной энергии в поле волны оказывается равной плотности энергии электрической.

Перенос энергии электромагнитным полем характеризуется вектором Пойнтинга γ (см. раздел 2.12).

Найдем вектор Пойнтинга монохроматической плоской электромагнитной волны в изотропном диэлектрике:

$$\gamma = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \Rightarrow$$

$$|\gamma| = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{4\pi\sqrt{\mu}} E^2 = \frac{c\varepsilon}{4\pi\sqrt{\varepsilon\mu}} E^2 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} w = wv. \quad (3.2.2)$$

Формула (3.2.2) означает, что скорость течения электромагнитной энергии совпадает с фазовой скоростью волны (3.1.12) (это не относится к диспергирующим и (или) анизотропным средам). Отметим еще раз, что в рассматриваемом случае направление вектора Пойнтинга совпадает с направлением волнового вектора \mathbf{k} (рис. 3.1).

Рассмотрим теперь процесс прохождения электромагнитной волны в металле. Для этого запишем уравнения Максвелла для проводника ($\mathbf{j} \neq 0$):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.2.3a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (3.2.3b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (3.2.3c)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (3.2.3d)$$

Полагая, что ток в материале создается электронами проводимости и вклад связанных зарядов мал, можно записать линейную связь тока \mathbf{j} поля \mathbf{E} (закон Ома):

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (3.2.4)$$

где σ - удельная проводимость.

В уравнении (3.2.3b) мы пренебрегли током смещения $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, т.е. положили:

$$\mathbf{j} \gg \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.2.5)$$

Для монохроматической волны $\mathbf{E} = \mathbf{E}^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ условие (3.2.5) с учетом связи (3.2.4) означает следующее ограничение на частоту:

$$\omega \ll 4\pi\sigma \quad (3.2.6)$$

Применяя операцию rot к обеим частям уравнений (3.2.3a) и (3.2.3b), используя выражение для двойного ротора по правилу «бац минус цаб» и учитывая уравнения (3.2.3c) и (3.2.3d), получим пару диффузионных уравнений

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad (3.2.7a)$$

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0. \quad (3.2.7b)$$

Эти уравнения отличаются от волновых уравнений (3.1.3) и (3.1.4), которые описывают прохождение электромагнитной волны в вакууме и диэлектрике. Поле в проводящей среде распространяется по законам диффузии и теплопроводности:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \Delta \mathbf{H}, \quad (3.2.8)$$

где $c^2 / (4\pi\mu\sigma)$ - коэффициент диффузии.

Граничные условия для уравнений (3.2.7a,b), вытекающие из уравнений (3.2.3), запишем в следующем виде:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, H_{1\tau} = H_{2\tau}, B_{1n} = B_{2n}. \quad (3.2.9a,b,c)$$

В заключение определим глубину проникновения электромагнитного поля в проводник. Для этого рассмотрим плоскую монохроматическую волну, падающую на плоскую поверхность металла из диэлектрика. Волновой вектор направлен вдоль оси Oz перпендикулярно границе металла, имеющей координату $z=0$. Магнитное поле на границе проводника задано как следующее:

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}. \quad (3.2.10)$$

Ищем решение уравнения (3.2.8) в виде

$$\mathbf{H}(z,t) = \mathbf{H}^*(z) e^{-i\omega t} \quad (3.2.11)$$

Подставим поле (3.2.11) в уравнение (3.2.8) и, учтя граничное условие (3.2.9b), находим вид $\mathbf{H}^*(z)$:

$$\begin{aligned} -i\omega \mathbf{H}^* &= \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \cdot \frac{d^2 \mathbf{H}^*}{dz^2} \Rightarrow \frac{d^2 \mathbf{H}^*}{dz^2} - (1-i)^2 \frac{2\pi\mu\sigma\omega}{c^2} \mathbf{H}^* = 0 \Rightarrow \\ \frac{d^2 \mathbf{H}^*}{dz^2} - \chi^2 \mathbf{H}^* &= 0, \text{ где } \chi^2 = (1-i)^2 \frac{2\pi\mu\sigma\omega}{c^2} \Rightarrow \mathbf{H}^* = \mathbf{H}_0 e^{-\chi z}. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

На последнем этапе получения формулы (3.2.12) мы выбрали решение, имеющее физический смысл.

Окончательно, поле, проникающее в проводник, примет вид:

$$\mathbf{H}(z,t) = \mathbf{H}_0 e^{-(1-i)z/\delta} e^{-i\omega t}, \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}, \quad (3.2.13a)$$

$$\mathbf{E}(z,t) = -(1-i) \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} [\mathbf{e}_z, \mathbf{H}]. \quad (3.2.13b)$$

Здесь δ имеет смысл глубины проникновения поля в проводник и называется толщиной скин-слоя, а само проникновение поля в проводник – скин-эффектом. Формула (3.2.13b) следует из уравнения (3.2.3b) с подстановкой (3.2.4).

3.3. Плоская зеркальная граница диэлектрика. Закон сохранения касательной составляющей волнового вектора света на зеркальной границе. Законы отражения и преломления, явление ПВО. Волны типа ТЕ и ТМ. Явление Брюстера в ТМ поляризации

В этом разделе мы рассмотрим преломление и отражение плоских монохроматических волн на (от) поверхности раздела двух однородных изотропных диэлектриков 1 и 2, диэлектрические постоянные которых равны, соответственно, ε_1 и ε_2 .

Далее примем для простоты условие $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Тогда скорость волн в диэлектриках будет равняться:

$$v_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}, \quad v_2 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}} \quad (3.3.1a,b)$$

Приступая к рассмотрению преломления и отражения волн, дадим определение зеркальной границы диэлектрика (или зеркальной границы раздела двух диэлектриков): граница называется зеркальной, если глубина выпуклостей и впадин границы a много меньше длины падающей волны σ : $a \ll \lambda$. В противном случае, т.е. при $a \gg \lambda$, граница является матовой.

Мы будем рассматривать плоскую зеркальную границу раздела двух диэлектриков и как частный случай плоскую зеркальную границу *диэлектрик-вакуум*.

Пусть волна распространяется в направлении оси z' (рис. 3.1). В точке P, согласно уравнению (3.1.10a,b), фаза электромагнитной волны будет составлять величину:

$$\omega t - kz', \quad (3.3.2)$$

где z' - координата точки P по оси z' или проекция вектора \mathbf{r} точки P на направление распространения волны $\mathbf{e}_{z'}$.

Единичный вектор направления распространения волны $\mathbf{e}_{z'}$ составляет с осями x, y, z углы α, β, γ . Тогда в системе координат (x, y, z) проекция вектора \mathbf{r} на ось z' направления вектора $\mathbf{e}_{z'}$ будет равна:

$$z' = (\mathbf{e}_{z'}, \mathbf{r}) = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma, \quad (3.3.3)$$

где x, y, z - координаты точки P в исходной системе координат (x, y, z) .

Внося это соотношение в уравнение (3.1.11a,b), получаем вектора электромагнитного поля волны в точке P:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (3.3.4a,b)$$

где \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 - комплексные амплитуды соответствующих векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , и учтено, что $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_{z'}$.

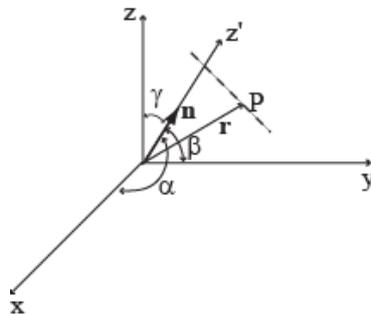


Рис. 3.1. Взаимное расположение лабораторной системы координат (x, y, z) и оси z' , вдоль которой направлен волновой вектор \mathbf{k} .

Если волна (3.3.4a,b) идет из диэлектрика 1 и через плоскую зеркальную границу проходит в диэлектрик 2, то в самом общем случае следует ожидать, что в среде 2 она пойдет под другим углом и станет *преломленной* волной, а кроме того, появится *отраженная* волна, поскольку иначе, как будет показано ниже, граничные условия не смогут быть выполнены.

Итак, у нас есть три волны: падающая (3.3.4a,b), отраженная, которой мы дадим индекс «*r*», и преломленная с индексом «*g*». В лабораторной системе координат (*x, y, z*) две последние запишутся в виде:

$$\mathbf{E}^r = \mathbf{E}_0^r e^{i(\omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})}, \quad \mathbf{H}^r = \mathbf{H}_0^r e^{i(\omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})}, \quad (3.3.5a,b)$$

$$\mathbf{E}^g = \mathbf{E}_0^g e^{i(\omega_g t - \mathbf{k}_g \cdot \mathbf{r})}, \quad \mathbf{H}^g = \mathbf{H}_0^g e^{i(\omega_g t - \mathbf{k}_g \cdot \mathbf{r})}. \quad (3.3.6a,b)$$

В дальнейшем будем рассматривать только вектор \mathbf{E} , поскольку для вектора \mathbf{H} все рассуждения полностью аналогичны.

Первые две волны распространяются в диэлектрике 1, поэтому поле в нем равно:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + \mathbf{E}^r, \quad (3.3.7a)$$

во втором диэлектрике есть одна преломленная волна

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}^g. \quad (3.3.7b)$$

Рассмотрим условие непрерывности тангенциальных составляющих вектора \mathbf{E} (1.2.17) на границе раздела диэлектриков S , которое с учетом (3.3.7a,b) запишется в виде:

$$\mathbf{E}_\tau|_S + \mathbf{E}_\tau^r|_S = \mathbf{E}_\tau^g|_S. \quad (3.3.8)$$

Принимая во внимание вид этих полей (3.3.4)–(3.3.6) и опуская лишние громоздкие обозначения, из ф. (3.3.8) получаем

$$\mathbf{E}_{0\tau} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + \mathbf{E}_{0\tau}^r e^{i(\omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} = \mathbf{E}_{0\tau}^g e^{i(\omega_g t - \mathbf{k}_g \cdot \mathbf{r})}, \quad (3.3.9)$$

где \mathbf{r} - радиус-вектор произвольной точки поверхности раздела.

Для того, чтобы условие (3.3.9) выполнялось в любой момент времени t , необходимо, чтобы частоты всех рассматриваемых в системе волн были равны:

$$\omega = \omega_r = \omega_g. \quad (3.3.10)$$

Покажем это.

Уравнение (3.3.9) перепишем в виде

$$a e^{i\omega t} + b e^{i\omega_r t} = c e^{i\omega_g t}, \quad (3.3.11)$$

где коэффициенты при временных экспонентах содержат и амплитуды, и экспоненты типа $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ соответствующих волн. Продифференцируем это уравнение по t :

$$\omega a e^{i\omega t} + \omega_r b e^{i\omega_r t} = \omega_g c e^{i\omega_g t}. \quad (3.3.12)$$

Уравнение (3.3.11) умножаем на $-\omega_g$ и складываем его с уравнением (3.3.12):

$$(\omega - \omega_g) a e^{i\omega t} + (\omega_r - \omega_g) b e^{i\omega_r t} = 0. \quad (3.3.13)$$

Продифференцируем уравнение (3.3.12) еще раз по t :

$$\omega^2 a e^{i\omega t} + \omega_r^2 b e^{i\omega_r t} = \omega_g^2 c e^{i\omega_g t}. \quad (3.3.14)$$

Уравнение (3.3.12) умножаем на $-\omega_g$ и складываем его с уравнением (3.3.14):

$$\omega(\omega - \omega_g) a e^{i\omega t} + \omega_r(\omega_r - \omega_g) b e^{i\omega_r t} = 0. \quad (3.3.15)$$

Теперь уравнение (3.3.13) умножаем на $-\omega$ и складываем с уравнением (3.3.15). В результате получим:

$$(\omega_r - \omega)(\omega_r - \omega_g) b e^{i\omega_r t} = 0. \quad (3.3.16)$$

Отсюда $\omega = \omega_r$ или $\omega_r = \omega_g$. При $\omega_r = \omega_g$ из уравнения (3.3.15) следует, что $\omega = \omega_g$, а, значит, $\omega = \omega_r$. При $\omega = \omega_r$ из уравнения (3.3.15) следует, что $\omega_r = \omega_g$, значит, $\omega = \omega_g$. Таким образом, мы доказали, что $\omega = \omega_r = \omega_g$.

Аналогичным образом можно убедиться в том, что

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}' = \mathbf{k}_g \cdot \mathbf{r}', \quad (3.3.17)$$

где \mathbf{r}' - произвольный вектор, лежащий в плоскости раздела. Действительно, радиус-вектор \mathbf{r} произвольной точки поверхности раздела может быть представлен в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$, где \mathbf{r}' лежит в плоскости раздела, а \mathbf{r}_0 - радиус-вектор некоторой произвольной фиксированной точки этой поверхности. Следовательно, граничное условие может быть представлено в виде

$$a' e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} + b' e^{-i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}'} = c' e^{-i\mathbf{k}_g \cdot \mathbf{r}'}. \quad (3.3.18)$$

Здесь коэффициенты при экспонентах не зависят от \mathbf{r}' . Далее доказательство равенства (3.3.17) протекает аналогично доказательству равенства (3.3.10).

Для последующих вычислений удобно перейти к координатным выражениям. Пусть ось z лежит перпендикулярно плоскости раздела сред (рис. 3.2). Тогда лежащий в этой плоскости вектор \mathbf{r}' будет перпендикулярен оси z , и на основании уравнения (3.3.3) равенства (3.3.17) можно записать так:

$$k(x \cos \alpha + y \cos \beta) = k_r(x \cos \alpha_r + y \cos \beta_r) = k_g(x \cos \alpha_g + y \cos \beta_g), \quad (3.3.19)$$

где x, y - координаты вектора \mathbf{r}' , а $\alpha, \beta, \alpha_r, \beta_r, \alpha_g, \beta_g$ - суть соответственно углы векторов $\mathbf{k}, \mathbf{k}_r, \mathbf{k}_g$ с осями x и y .

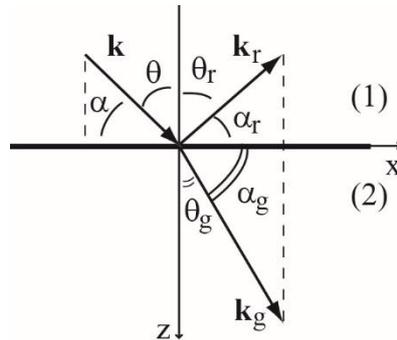


Рис. 3.2. Падающий, преломленный и отраженный лучи на границе раздела двух сред.

Для упрощения выберем оси x и y так, чтобы направление распространения падающей волны, а значит, и вектор \mathbf{k} , лежали в плоскости $(x0z)$. В этом случае $\cos \beta = 0$. Поскольку соотношения (3.3.19) должны выполняться в любых точках x и y , в том числе и нулевых, то

$$0 = \cos \beta_r = \cos \beta_g, \quad (3.3.20)$$

$$k \cos \alpha = k_r \cos \alpha_r = k_g \cos \alpha_g. \quad (3.3.21)$$

Первое из этих уравнений означает, что волновые вектора отраженной и преломленной волн \mathbf{k}_r и \mathbf{k}_g лежат в плоскости $(x0z)$, т.е. в плоскости падения волны. Второе соотношение означает *сохранение тангенциальной составляющей волнового вектора* при переходе волны через границу.

Согласно соотношению (3.1.12) с учетом (3.3.10) можно представить волновые числа k в виде:

$$k = \frac{\omega}{v_1}, \quad k_r = \frac{\omega}{v_1} = k, \quad k_g = \frac{\omega}{v_2}.$$

Следовательно, уравнения (3.3.21) примут вид:

$$\frac{1}{v_1} \cos \alpha = \frac{1}{v_1} \cos \alpha_r = \frac{1}{v_2} \cos \alpha_g. \quad (3.3.22)$$

Отсюда,

$$\alpha = \alpha_r, \quad (3.3.23)$$

или вводя угол падения $\theta = \pi/2 - \alpha$ и угол отражения $\theta_r = \pi/2 - \alpha_r$, можно сказать, что *угол падения равен углу отражения*.

Кроме того,

$$\frac{1}{v_1} \sin \theta = \frac{1}{v_2} \sin \theta_g, \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\sin \theta_g} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}. \quad (3.3.24)$$

Таким образом, отношение синусов углов падения и преломления есть величина постоянная, зависящая только от свойств граничащих сред. Закон (3.3.24) – это закон Снелля для изотропных диэлектриков.

В литературе отношение $\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$ иногда называется показателем преломления среды 2 относительно среды 1 и обозначается n_{12} . Если среда 1 – это вакуум, то принято обозначение коэффициента преломления n , при этом $n = \sqrt{\varepsilon}$, где ε - диэлектрическая проницаемость диэлектрика. Для векторного показателя преломления $\mathbf{n} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k}$, см. ф. (3.1.23), справедливы описанным выше законы (3.3.21) и (3.3.23) для волнового вектора при переходе волны через границу диэлектрика.

При $n_{12} < 1$ величина угла преломления θ_g , определяемая из уравнения (3.3.24), принимает вещественные значения лишь в том случае, если угол падения не превышает так называемого угла внутреннего отражения Φ , определяемого уравнением

$$\sin \Phi = n_{12}. \quad (3.3.25)$$

В противном случае при $\theta > \Phi$ $\sin \theta_g = n_{12} \sin \theta = \sin \theta / \sin \Phi > 1$ и величина θ_g становится комплексной. При этом должно наблюдаться явление полного внутреннего отражения - явление ПВО, при котором преломленная волна отсутствует, а электромагнитное поле во второй среде есть только в узком, порядка длины волны, приповерхностном слое.

Итак, из-за существования на границе двух сред условий типа (3.3.8) вытекают все геометрические законы преломления и отражения электромагнитных волн.

Более детальное рассмотрение граничных условий позволяет определить соотношения между амплитудами или интенсивностями падающей, отраженной и преломленной волн в зависимости от коэффициента преломления, угла падения и поляризации волны.

Что такое поляризация вообще и ТЕ и ТМ поляризации в частности? Если в плоской волне, вектор \mathbf{E} (и вектор \mathbf{H}) совершает колебания вдоль одной оси (вектор \mathbf{H} колеблется, естественно, вдоль своей оси), то волна называется линейно поляризованной.

На рис. 3.3 изображены два синусоидальных колебания x и y , моделирующие световые волны, линейно поляризованные в двух взаимно перпендикулярных направлениях:

$$x = A \sin \omega t, \quad y = A \sin(\omega t + \delta). \quad (3.3.26a,b)$$

Эти колебания имеют относительный сдвиг фаз δ .

В зависимости от величины δ суммарная световая волна может приобрести эллиптическую или круговую поляризации, а также остаться

линейно поляризованной, но повернутой относительно суммарной волны при нулевой разности фаз (рис. 3.3).

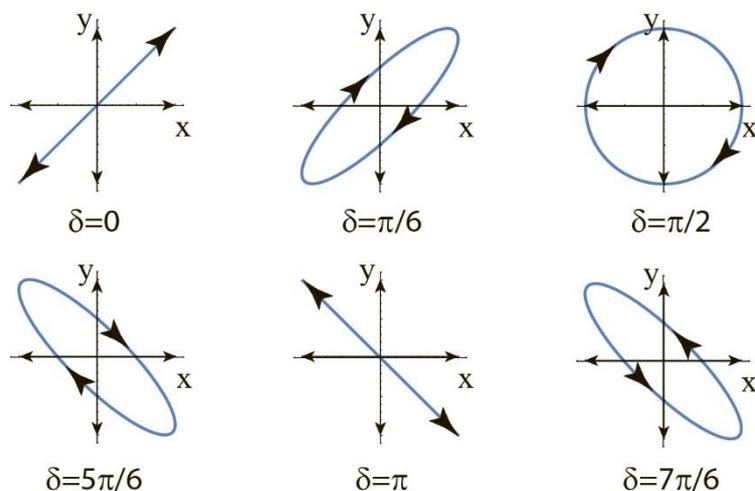


Рис. 3.3. Примеры поляризаций волны, состоящей из двух линейно поляризованных волн, имеющих разность фаз δ .

ТЕ поляризацией называется линейная поляризация, при которой вектор \mathbf{H} лежит в плоскости падения луча, т.е. в плоскости векторов \mathbf{k} , \mathbf{k}_r и \mathbf{k}_g . Вектор \mathbf{E} , естественно, перпендикулярен этой плоскости. При ТМ поляризации вектор \mathbf{E} лежит в плоскости падения луча, а вектор \mathbf{H} перпендикулярен ей. Можно показать, что при переходе через границу раздела диэлектриков тип поляризации сохраняется. Любую плоскую монохроматическую волну можно разложить на совокупность двух линейно поляризованных волн ТЕ и ТМ, которые можно рассматривать порознь.

В заключение этого раздела отметим явление Брюстера в ТМ поляризации. При определенном угле падения волны, называемом углом Брюстера, интенсивность отраженной волны нулевая, т.е. отраженной волны нет. Подробнее на явлении Брюстера мы остановимся в следующем разделе.

3.4. Коэффициент отражения света от диэлектрика в вакуум в ТЕ и ТМ поляризациях. Зависимость коэффициента отражения от угла падения. Угол Брюстера

Целью настоящего раздела является найти формулы соотношения интенсивностей (или амплитуд) электромагнитных падающей, отраженной и преломленной волн при прохождении через границу диэлектриков. Будет показано, что эти соотношения тождественны так называемым формулам Френеля, определяющими сравнительную интенсивность отраженного и преломленного света в зависимости от коэффициента преломления, угла падения и типа поляризации падающего света. Этот вывод подтверждаемых

опытом формул Френеля из общих положений электродинамики является одним из важнейших доказательств электромагнитной природы света.

Рассмотрим *ТЕ поляризованную электромагнитную волну*, которая падает из вакуума на плоскую зеркальную границу диэлектрика (рис. 3.4). Примем то, что амплитуда отраженной волны E^r и преломленной волны E^g связаны с амплитудой падающей волны E соотношениями:

$$E^r = R E, \quad (3.4.1a)$$

$$E^g = \tau E, \quad (3.4.1b)$$

где R и τ - коэффициенты отражения и поглощения соответственно. Понятно, что соотношения между амплитудами векторов $\mathbf{H}, \mathbf{H}^r, \mathbf{H}^g$ будут такими же. На рисунке 3.4 направления векторов $\mathbf{H}, \mathbf{H}^r, \mathbf{H}^g$ нарисованы произвольными (вектора $\mathbf{E}, \mathbf{E}^r, \mathbf{E}^g$ изображены в соответствие с выбранными направлениям $\mathbf{H}, \mathbf{H}^r, \mathbf{H}^g$ и волновыми векторами, с которыми они образуют правовинтовую систему).

Запишем граничные условия:

$$\begin{cases} E_{1\tau} = E_{2\tau} \\ H_{1\tau} = H_{2\tau} \end{cases} \quad (3.4.2)$$

Перепишем эти уравнения с использованием обозначения рисунка 3.4.

$$\begin{cases} E + E^r = E^g \\ (H - H^r) \cos \theta = H^g \cos \psi \end{cases} \quad (3.4.3)$$

где θ - угол падения луча, ψ - угол прошедшего луча (угол преломления). Согласно соотношениям между величинами полей \mathbf{H} и \mathbf{E} имеем: в вакууме $H = E$, $H^r = E^r$, в диэлектрике $H^g = \sqrt{\epsilon} E^g = n E^g$.

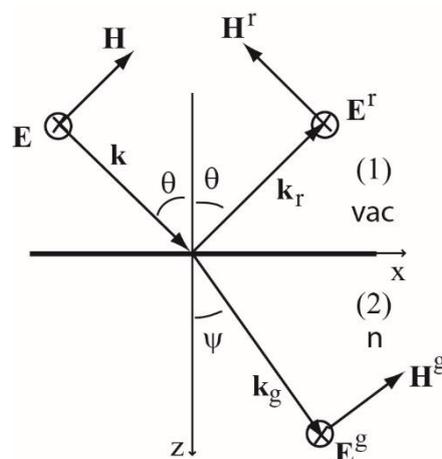


Рис. 3.4. ТЕ поляризованная волна, падающая из вакуума на границу диэлектрика.

Подставим равенства (3.4.1) в уравнения (3.4.3):

$$\begin{cases} 1 + R = \tau \\ (1 - R) \cos \theta = \tau n \cos \psi \end{cases} \quad (3.4.4)$$

Отсюда

$$\begin{cases} (1 + R)n \cos \psi = \tau n \cos \psi \\ (1 - R) \cos \theta = \tau n \cos \psi \end{cases} \Rightarrow (n \cos \psi - \cos \theta) + Rn \cos \psi + R \cos \theta = 0 \Rightarrow$$

получаем коэффициент отражения для ТЕ поляризованной волны:

$$R_{1n}^{TE} = -\frac{n \cos \psi - \cos \theta}{n \cos \psi + \cos \theta}, \quad (3.4.5)$$

где индекс 1n означает, что волна проходит из вакуума в диэлектрик (см. рис. 3.4). Это одна из формул Френеля.

Рассмотрим два предельных частных случая формулы (3.4.5).

1. При $\theta = 0$, а значит, согласно закону Снелля (3.3.14), и при $\psi = 0$ $R_{1n}^{TE} = -(n - 1) / (n + 1)$, из чего видно, что при вертикальном падении волны, отраженная волна теряет интенсивность, не меняет тип поляризации, но изменяет направление вектора \mathbf{E} на противоположный по сравнению с падающей волной (имеет сдвиг по фазе π).

2. При $\theta = \pi / 2$ и, соответственно, $\psi = \arcsin(1 / n)$ $R_{1n}^{TE} = -1$. Отсюда следует, что отраженная волна не теряет типа поляризации, имеет такую же интенсивность, как и падающая, но при этом имеет сдвиг по фазе π .

Рассмотрим *ТМ* поляризованную электромагнитную волну, которая падает из вакуума на плоскую зеркальную границу диэлектрика (рис. 3.5). Амплитуда отраженной волны E^r и преломленной волны E^g связаны с амплитудой падающей волны E соотношениями (3.4.1a,b). Граничные условия те же, что и в случае ТЕ поляризации (3.4.2).

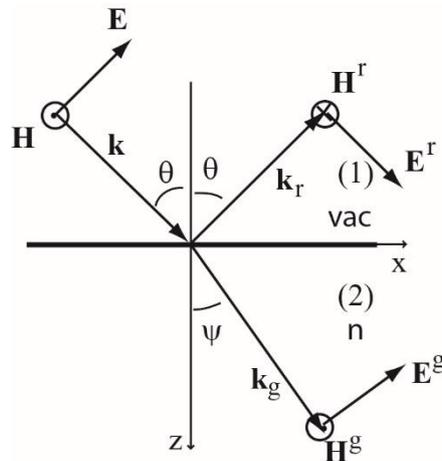


Рис. 3.5. ТМ поляризованная волна, падающая из вакуума на границу диэлектрика.

Как и в первом случае имеем в вакууме $H = E$, $H^r = E^r$, в диэлектрике $H^s = \sqrt{\varepsilon} E^s = nE^s$.

Граничные условия (3.4.2) для ТМ поляризованной волны, изображенной на рис. 3.4.2, приобретают вид:

$$\begin{cases} (E + E^r) \cos \theta = E^s \cos \psi \\ (H - H^r) = H^s \end{cases} \quad (3.4.6)$$

$$\begin{cases} (E + E^r) \cos \theta = E^s \cos \psi \\ (E - E^r) = nE^s \end{cases} \Rightarrow (1 + R)n \cos \theta - (1 - R) \cos \psi = 0 \Rightarrow$$

$$R_{1n}^{TM} = -\frac{n \cos \theta - \cos \psi}{n \cos \theta + \cos \psi} \quad (3.4.7)$$

1. При $\theta = 0$, а значит, согласно закону Снелля (3.3.14), и при $\psi = 0$, $R_{1n}^{TM} = -(n - 1) / (n + 1)$, из чего видно, что при вертикальном падении волны, отраженная волна теряет интенсивность, не меняет тип поляризации, но изменяет направление вектора \mathbf{E} на противоположный по сравнению с падающей волной (имеет сдвиг по фазе π).

2. При $\theta = \pi / 2$ и, соответственно, $\psi = \arcsin(1 / n)$ $R_{1n}^{TM} = 1$.
Здесь отраженная волна не теряет типа поляризации, имеет такую же интенсивность, как и падающая.

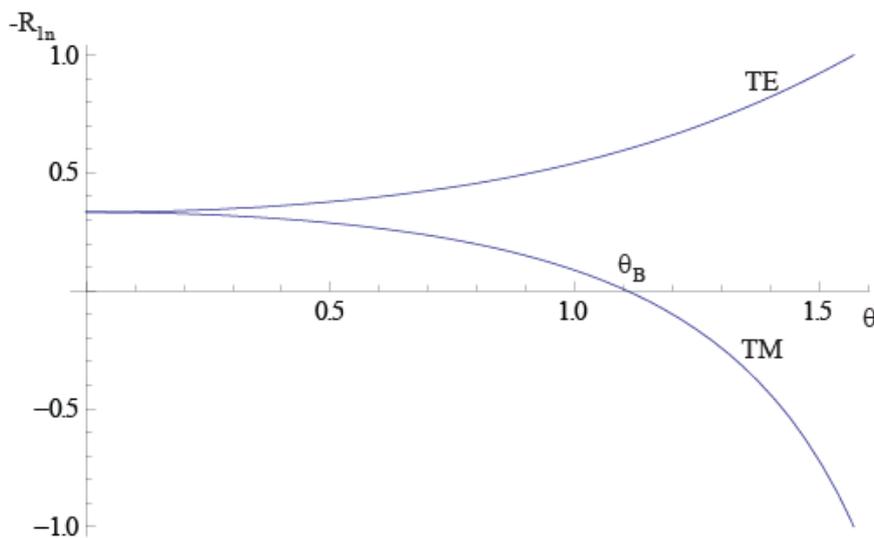


Рис. 3.6. Коэффициент отражения как функция угла падения ТЕ и ТМ поляризованных волн из вакуума на диэлектрик. Диэлектрик имеет коэффициент преломления $n = 2$.

3. Мы обнаружили, что на границах диапазона угла падения волны $0 \leq \theta \leq \pi / 2$ коэффициент R_{1n}^{TM} меняет знак. Значит, существует такой угол,

при котором интенсивность отраженной волны равна нулю, т.е. $R_{ln}^{TM} = 0$. Это - угол Брюстера θ_B . Найдем его.

Из ф. (3.4.7) следует, что

$$\frac{n \cos \theta_B - \cos \psi}{n \cos \theta_B + \cos \psi} = 0 \Rightarrow n \cos \theta_B - \cos \psi = 0 \Rightarrow n \cos \theta_B = \cos \psi.$$

Кроме того, $\sin \theta_B = n \sin \psi$. Перемножив правые и левые части этих уравнений, соответственно, получим $n \cos \theta_B \sin \theta_B = n \cos \psi \sin \psi \Rightarrow \sin 2\theta_B = \sin 2\psi \Rightarrow \psi = \psi_B = \pi/2 - \theta_B \Rightarrow n \cos \theta_B = \sin \theta_B \Rightarrow \tan \theta_B = n \Rightarrow \theta_B = \arctan(n)$.

На графике 3.6 видно, как меняется коэффициент отражения в зависимости от угла падения волн разного типа поляризации из вакуума на границу диэлектрика. Для наглядности, принято, что коэффициент преломления диэлектрика $n = 2$.

3.5. Коэффициент отражения света от границы раздела «диэлектрик-вакуум» при падении из диэлектрика. Формулы Френеля для коэффициентов отражения для случаев ТМ и ТЕ поляризаций. Принцип взаимности

Рассмотрим теперь ситуацию, когда свет падает из диэлектрика в вакуум.

На рисунке 3.7 показана ТМ поляризованный свет, падающий из диэлектрика в вакуум.

Граничные уравнения (3.4.2) в рассматриваемом случае имеют вид:

$$\begin{cases} H - H^r = H^g \\ (E + E^r) \cos \psi = E^g \cos \theta \end{cases} \quad (3.5.1)$$

Здесь угол ψ - угол падения, а угол θ - угол преломления (рис. 3.7).

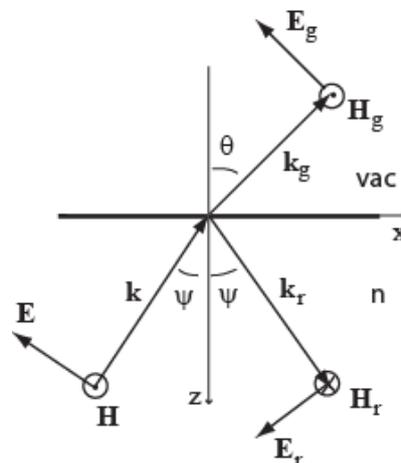


Рис. 3.7. ТМ поляризованная волна, идущая из диэлектрика в вакуум.

При условии $H = nE$, $H^r = nE^r$ и $H^s = E^s$ система уравнений (3.5.1) преобразуется:

$$\begin{cases} n(E - E^r) = E^s \\ (E + E^r) \cos \psi = E^s \cos \theta \end{cases} \quad (3.5.2)$$

Обозначив коэффициент отражения как R' : $E^r = R'E$, находим его из соотношения (3.5.2).

$$R_{n1}^{rTM} = \frac{n \cos \theta - \cos \psi}{n \cos \theta + \cos \psi}. \quad (3.5.3)$$

Видно, что эта формула с точностью до знака совпадает с формулой (3.4.7) для R_{in}^{TM} при условии, что обозначения углов падения и отражения поменялись местами. Благодаря этому принципу взаимности можно, не решая записать коэффициент отражения для ТЕ поляризованного света, падающего из диэлектрика в вакуум:

$$R_{n1}^{rTE} = \frac{n \cos \psi - \cos \theta}{n \cos \psi + \cos \theta}. \quad (3.5.4)$$

Еще раз подчеркнем, что в формулах (3.5.3) и (3.5.4) угол ψ - угол падения, а угол θ - угол преломления (рис. 3.7).

3.6. Материальные и вакуумные уравнения Максвелла, введение векторного и скалярного потенциалов. Условие калибровки Лоренца, уравнения Гельмгольца для потенциалов

Рассмотрим уравнения Максвелла в вакууме, разделив их на две пары – вакуумные и материальные уравнения.

В вакуумные уравнения не входят ни токи, ни заряды. Они описывают только поля \mathbf{H} и \mathbf{E} .

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{cases} \quad (3.6.1a,b)$$

Из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ следует, что

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (3.6.2)$$

С учетом (3.6.2) второе вакуумное уравнение $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ испытает цепочку следующих преобразований:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{rot} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &\Rightarrow \operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi \Rightarrow \\ \mathbf{E} &= -\left(\nabla \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Итак, уравнения (3.6.2) и (3.6.3) приводят к тождественному удовлетворению вакуумных уравнений Максвелла (3.6.1a,b).

Подставим (3.6.2) и (3.6.3) в материальные уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho \end{cases} \quad (3.6.4a,b)$$

Получаем

$$\begin{cases} \text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{1}{c} \left(\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) \\ -\text{div } \nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{A} = 4\pi\rho \end{cases} \quad (3.6.5a,b)$$

Преобразуем двойной ротор в уравнении (3.6.5a) с помощью известного правила «бац минус цаб» и откроем скобки в правой части уравнения. Тогда уравнение (3.6.5a) приобретет вид:

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla \text{div } \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (3.6.6)$$

Потребуем, чтобы уравнения для φ и \mathbf{A} расцепились. Для этого поставим условие:

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (3.6.7)$$

Это условие называется калибровкой Лоренца. Сравните с калибровкой Кулона для стационарного магнитного поля $\text{div } \mathbf{A} = 0$.

С применением калибровки Лоренца получаем уравнение Гельмгольца для векторного потенциала:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (3.6.8)$$

Подставим $\text{div } \mathbf{A}$ из условия Лоренца (3.6.7) в уравнение (3.6.5b) и перепишем получившееся уравнение в виде уравнения Гельмгольца для скалярного потенциала φ :

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \quad (3.6.9)$$

Уравнения (3.6.8) и (3.6.9) можно представить с помощью оператора Даламбера \square^2 , являющегося аналогом оператора Лапласа ∇^2 (или Δ) в 4-х мерном пространстве Минковского:

$$\square^2 = \nabla^2 + \frac{\partial^2}{(ic)^2 \partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{(ic)^2 \partial t^2}. \quad (3.6.10)$$

Оператор \square^2 носит название *даламбертиан*.

С помощью этого оператора \square^2 уравнения (3.6.8) и (3.6.9) приобретут лаконичный вид:

$$\square^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \square^2 \varphi = -4\pi \rho \quad (3.6.11a,b)$$

В итоге у нас есть два сепаратных уравнения второго порядка в частных производных для потенциалов \mathbf{A} и φ в случае нестационарного электромагнитного поля.

3.7. Запаздывающие потенциалы. Представление потенциалов в виде рядов Фурье. Функция Грина для потенциалов

Запишем уравнения (3.6.11a,b) в общем виде:

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi f, \quad (3.7.1)$$

Известно, что решение этого уравнения ψ имеет вид запаздывающего потенциала:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{f(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}', \quad (3.7.2)$$

где для потенциалов \mathbf{A} и φ функция f имеет вид $\frac{1}{c} \mathbf{j}$ и ρ соответственно.

Представим функцию $f(\mathbf{r}', t)$ в виде ряда Фурье по временной координате:

$$f(\mathbf{r}', t) = \sum_{\omega} e^{-i\omega t} f_{\omega}(\mathbf{r}'). \quad (3.7.3)$$

Тогда функцию со сдвигом $f(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})$ можно записать в виде:

$$f(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}) = \sum_{\omega} e^{-i\omega t} e^{i\omega \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}} f_{\omega}(\mathbf{r}'). \quad (3.7.4)$$

Подставим ряд (3.7.4) в интеграл (3.7.2):

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(\sum_{\omega} e^{-i\omega t} e^{i\omega \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}} f_{\omega}(\mathbf{r}') \right) d^3 \mathbf{r}' = \sum_{\omega} e^{-i\omega t} \int f_{\omega}(\mathbf{r}') \frac{e^{i\omega \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}'. \quad (3.7.5)$$

Уравнение (3.7.5) является рядом Фурье для функции $\psi(\mathbf{r}, t)$:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\omega} e^{-i\omega t} \psi_{\omega}(\mathbf{r}), \quad (3.7.6)$$

где фурье-коэффициенты имеют вид:

$$\psi_{\omega}(\mathbf{r}) = \int f_{\omega}(\mathbf{r}') \frac{e^{i\omega \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (3.7.7)$$

Симметричная подынтегральная функция носит название функции Грина $G_{\omega}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$:

$$G_{\omega}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{e^{i\omega \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (3.7.8)$$

Индекс ω при $G_{\omega}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ указывает на то, что это функция Грина для фурье-коэффициентов $\psi_{\omega}(\mathbf{r})$, а не для функции $\psi(\mathbf{r},t)$.

Функция Грина позволяет строить решения для нестационарных уравнений типа (3.7.1) с произвольной ненулевой правой частью.

Что такое функция Грина? Вспомним интеграл Пуассона из Главы 1, который является решением уравнения Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi f$, стационарного аналога нестационарного уравнения (3.7.1). Очевидно, что функцией Грина для уравнения Пуассона является функция

$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$. В то же время, $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ - это потенциал в точке \mathbf{r}

точечного источника $f(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, расположенного в точке \mathbf{r}' . Для уравнения Гельмгольца (3.7.1) функция Грина - это потенциал от дельтаобразного источника $f(\mathbf{r},t) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')$.

Вернемся к полученному решению (3.7.6) - (3.7.7) и перепишем коэффициенты Фурье в следующем виде:

$$\psi_{\omega}(\mathbf{r}) = \int G_{\omega}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') f_{\omega}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \quad (3.7.9)$$

Для потенциалов \mathbf{A} и φ коэффициенты Фурье (3.7.7) примут вид:

$$\mathbf{A}_{\omega}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int G_{\omega}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \mathbf{j}_{\omega}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}', \quad (3.7.10a)$$

$$\varphi_{\omega}(\mathbf{r}) = \int G_{\omega}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \rho_{\omega}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (3.7.10b)$$

и решения запишутся в форме рядов:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \sum_{\omega} e^{-i\omega t} \mathbf{A}_{\omega}(\mathbf{r}), \quad \varphi(\mathbf{r},t) = \sum_{\omega} e^{-i\omega t} \varphi_{\omega}(\mathbf{r}). \quad (3.7.11a,b)$$

3.8. Закон сохранения заряда как следствие материальных уравнений Максвелла

Запишем материальные уравнения Максвелла (3.6.4a,b), подействовав на них следующими операторами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \leftarrow \text{div} \\ \text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \leftarrow \frac{\partial}{\partial t} \end{array} \right. \quad (3.8.1a,b)$$

Перепишем уравнения (3.8.1a,b) после действия операторов:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = 4\pi \text{div } \mathbf{j} + \text{div } \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \text{div } \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{array} \right. .$$

Отсюда следует закон сохранения заряда:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{j}. \quad (3.8.2)$$

Мы убедились, что закон сохранения заряда вытекает из уравнений Максвелла и не требует отдельного постулирования.

В завершение этого раздела представим закон сохранения заряда в Фурье-пространстве, и докажем, что запаздывающий потенциал удовлетворяет калибровке Лоренца.

Подставим в уравнение (3.8.2) плотности тока и заряда в виде рядов Фурье:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\omega} e^{-i\omega t} \rho_{\omega} = -\text{div} \sum_{\omega} e^{-i\omega t} \mathbf{j}_{\omega} \Rightarrow i\omega \rho_{\omega} = \text{div } \mathbf{j}_{\omega}. \quad (3.8.3)$$

Запишем потенциалы в Фурье-пространстве $\mathbf{A}_{\omega}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int G_{\omega}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{j}_{\omega}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$,

$\varphi_{\omega}(\mathbf{r}) = \int G_{\omega}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho_{\omega}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$ и подействуем на векторный потенциал

оператором div : $\text{div } \mathbf{A}_{\omega}(\mathbf{r}) = \sum_k \frac{\partial A_{\omega k}}{\partial x_k} \Rightarrow \text{div } \mathbf{A}_{\omega}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \sum_k \int \frac{\partial G_{\omega}}{\partial x_k} j_{\omega k}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$.

Производную под знаком интеграла $\frac{\partial G_{\omega}}{\partial x_k}$ заменим на производную по

штрихованным переменным $\frac{\partial G_{\omega}}{\partial x_k} = -\frac{\partial G_{\omega}}{\partial x'_k}$ и возьмем интеграл по частям:

$$\text{div } \mathbf{A}_{\omega}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c} \sum_k \int \frac{\partial G_{\omega}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial x'_k} j_{\omega k}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \Rightarrow$$

$$\text{div } \mathbf{A}_{\omega}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c} \int \text{div}' \{ G_{\omega}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{j}_{\omega}(\mathbf{r}') \} d^3 \mathbf{r}' + \frac{1}{c} \sum_k \int G_{\omega}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{j}_{\omega k}(\mathbf{r}')}{\partial x'_k} d^3 \mathbf{r}' .$$

По теореме Остроградского-Гаусса преобразуем первый объемный интеграл к поверхностному, который в силу ограниченности области распространения токов и произвольности поверхности интегрирования обращается в ноль.

В итоге, получаем:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int G_\omega(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \operatorname{div}' \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}', \quad (3.8.4)$$

где div' означает дифференцирование по штрихованным координатам.

Воспользовавшись законом сохранения заряда (3.8.3), приходим к уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{i\omega}{c} \varphi_\omega, \quad (3.8.5)$$

что является условием калибровки Лоренца $\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, записанной в Фурье-пространстве.

Доказательство того, что запаздывающий потенциал удовлетворяет калибровке Лоренца, получено.

3.9. Асимптотика функции Грина на больших расстояниях от источника переменного поля. Асимптотика электрического и магнитного поля точечного электрического диполя. Поток энергии на больших расстояниях

Посмотрим, как выглядит электромагнитное поле вдали от своего нестационарного источника.

Представим сначала асимптотику функции Грина $G_\omega(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$, где $k = \omega / c$ при условии $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$:

$$G_\omega(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{e^{ik\sqrt{r^2 - 2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + r'^2}}}{\sqrt{r^2 - 2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + r'^2}} \approx \frac{1}{r} e^{ik(r - r' \cos \theta)} = \frac{1}{r} e^{ikr} e^{-ikr' \cos \theta}, \quad (3.9.1)$$

Здесь было использовано разложение $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 - 2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + r'^2} \approx \sqrt{r^2 - 2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} = r \left(1 - \frac{2r r' \cos \theta}{r^2} \right)^{1/2} \approx r \left(1 - \frac{r r' \cos \theta}{r^2} \right) = (r - r' \cos \theta)$.

Перепишем потенциалы в Фурье-пространстве с использованием асимптотики функции Грина (3.8.5):

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} e^{ikr} \int e^{-ikr' \cos \theta} \frac{1}{c} \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}', \quad (3.9.2a)$$

$$\varphi_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} e^{ikr} \int e^{-ikr' \cos \theta} \rho_\omega(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (3.9.2b)$$

Для удобства дальнейшего изложения введем обозначения:

$$\Phi_A = \int e^{-ikr'\cos\theta} \frac{1}{c} \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}', \quad (3.9.3a)$$

$$\Phi_\varphi = \int e^{-ikr'\cos\theta} \rho_\omega(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \quad (3.9.3b)$$

и перепишем потенциалы (3.9.2) в виде:

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} e^{ikr} \Phi_A, \quad (3.9.4a)$$

$$\varphi_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} e^{ikr} \Phi_\varphi. \quad (3.9.4b)$$

Запишем уравнение для напряженности электрического поля (3.6.3) как сумму двух слагаемых:

$$\mathbf{E} = -\left(\nabla\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{E}_\varphi + \mathbf{E}_A, \quad (3.9.5)$$

где $\mathbf{E}_\varphi = -\nabla\varphi$ и $\mathbf{E}_A = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$.

Представим фурье-образы для составляющих \mathbf{E}_φ и \mathbf{E}_A :

$$\mathbf{E}_{\varphi\omega} = -\nabla\varphi_\omega, \quad (3.9.6a)$$

$$\mathbf{E}_{A\omega} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{A}_\omega = ik\mathbf{A}_\omega. \quad (3.9.6b)$$

Подставляем уравнения $\varphi_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} e^{ikr} \Phi_\varphi$ и $\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} e^{ikr} \Phi_A$ (3.9.4a,b) в уравнение (3.9.6a,b), записываем оператор Гамильтона в сферической системе координат $\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$ и пренебрегаем членами порядка выше $\frac{1}{r}$. Введем обозначение:

$$\mathbf{k} = k \mathbf{e}_r \quad (3.9.7)$$

и в итоге получаем:

$$\mathbf{E}_{\varphi\omega} = -\mathbf{e}_r ik \frac{e^{ikr}}{r} \Phi_\varphi = -ik \frac{e^{ikr}}{r} \Phi_\varphi, \quad (3.9.8a)$$

$$\mathbf{E}_{A\omega} = ik \frac{e^{ikr}}{r} \Phi_A. \quad (3.9.8b)$$

Окончательно, для вектора \mathbf{E} получаем

$$\mathbf{E} = \sum_\omega e^{-i\omega t} (\mathbf{E}_{\varphi\omega} + \mathbf{E}_{A\omega}) \approx \frac{1}{r} \sum_\omega e^{-i(\omega t - kr)} ik (-\mathbf{e}_r \Phi_\varphi + \Phi_A). \quad (3.9.9)$$

Уравнение (3.9.9) – это асимптотика электрической составляющей электромагнитного поля на больших расстояниях от источника.

С учетом введения вектора \mathbf{k} (3.9.7) функции Φ_A и Φ_φ можно переписать:

$$\Phi_A = \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \frac{1}{c} \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}', \quad (3.9.10a)$$

$$\Phi_\varphi = \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \rho_\omega(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \quad (3.9.10b)$$

Асимптотика магнитной составляющей электромагнитного поля получается из уравнения $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ (3.6.2) с учетом формулы $\text{rot}(g \mathbf{a}) = g \text{rot } \mathbf{a} - [\mathbf{a}, \nabla g]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\omega = \text{rot} \mathbf{A}_\omega &= \text{rot} \left(\frac{1}{r} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \Phi_A \right) = \frac{1}{r} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \underbrace{\text{rot} \Phi_A}_0 - [\Phi_A, \nabla \left(\frac{1}{r} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right)] = -[\Phi_A, \nabla \left(\frac{1}{r} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right)] \Rightarrow \\ \mathbf{H}_\omega &\approx i[\mathbf{k}, \Phi_A] \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r}. \end{aligned} \quad (3.9.11)$$

В итоге

$$\mathbf{H} = \sum_\omega e^{-i\omega t} \mathbf{H}_\omega \approx \frac{1}{r} \sum_\omega e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} i[\mathbf{k}, \Phi_A]. \quad (3.9.12)$$

Равенство (3.9.12) - это асимптотика магнитной составляющей электромагнитного поля.

На основании найденных асимптотик векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} (3.9.9), (3.9.12) рассчитаем поле точечного электрического диполя с переменным во времени дипольным моментом $\mathbf{p}(t)$. Таким диполем можно считать конденсатор, удаленный от точки расчета поля, на расстояния, много превышающие размеры конденсатора.

Для точечного электрического диполя, помещенного в начало координат, вектор поляризации \mathbf{P} связан с дипольным моментом следующим соотношением:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}(t) \delta(\mathbf{r}). \quad (3.9.13)$$

Это уравнение проистекает из определения поляризации, как плотности дипольного момента $\mathbf{p} = \int_\Omega \mathbf{P} d^3\mathbf{r}$.

Для дальнейшего имеет смысл представить поляризацию (3.9.13) в виде ряда Фурье:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \sum_\omega e^{-i\omega t} \mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}) = \sum_\omega e^{-i\omega t} \mathbf{p}_\omega \delta(\mathbf{r}). \quad (3.9.14)$$

По определению (см. комментарий к ф.(2.5.16)) ток поляризации связан с вектором поляризации соотношением:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.9.15)$$

которое в Фурье-пространстве приобретает вид:

$$\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}) = -i\omega \mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}). \quad (3.9.16)$$

С заменой плотности тока на поляризацию (3.9.16) функция Φ_A (3.9.10а) упрощается:

$$\Phi_A = -\frac{i\omega}{c} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = -\frac{i\omega}{c} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \mathbf{p}_\omega \delta(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{p}_\omega = -ik \mathbf{p}_\omega, \quad (3.9.17)$$

На основании ф. (3.9.8b) мы можем написать:

$$\mathbf{E}_{A\omega} = ik \frac{e^{ikr}}{r} \Phi_A = ik \frac{e^{ikr}}{r} (-ik \mathbf{p}_\omega) = k^2 \mathbf{p}_\omega \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (3.9.18)$$

Из закона сохранения заряда $i\omega\rho_\omega = \text{div} \mathbf{j}_\omega$ (3.8.3) и ф. (3.9.16) следует, что

$$\rho_\omega = -\text{div} \mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}). \quad (3.9.19)$$

Значит, функцию Φ_φ можно выразить через поляризацию и далее воспользоваться формулой $g \text{div} \mathbf{a} = \text{div}(g\mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \nabla g)$ и теоремой Остроградского-Гаусса:

$$\begin{aligned} \Phi_\varphi &= \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \rho_\omega(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = -\int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \text{div} \mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \\ &= -\int \text{div}(e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}')) d^3\mathbf{r}' + \int (\mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}'), \nabla(e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'}) d^3\mathbf{r}' = \\ &= -\oint_S (e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}')) d\mathbf{S} + \int (\mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}'), \nabla(e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'}) d^3\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (3.9.20)$$

Очевидно, что интеграл по замкнутой произвольной поверхности, охватывающей диполь, равен нулю. Во втором интеграле ф. (3.9.20) проведем преобразования и замены:

$$\nabla(e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'}) = -i(k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'},$$

$$(\mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}'), \nabla(e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'}) = -ie^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} (\mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}'), (k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z)) = -ie^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} (\mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}'), \mathbf{k}),$$

$$\mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}') = \mathbf{p}_\omega \delta(\mathbf{r}').$$

Тогда

$$\Phi_\varphi = \int -ie^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} (\mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}'), \mathbf{k}) d^3\mathbf{r}' = \left(\int -ie^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \mathbf{p}_\omega \delta(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \right) = -i(\mathbf{p}_\omega, \mathbf{k}). \quad (3.9.21)$$

Электрическое поле $\mathbf{E}_{\varphi\omega}$ (3.9.8a), обусловленное функцией Φ_φ , становится следующим:

$$\mathbf{E}_{\varphi\omega} = -i\mathbf{k} \frac{e^{ikr}}{r} \Phi_\varphi = -i\mathbf{k} \frac{e^{ikr}}{r} \{-i(\mathbf{p}_\omega, \mathbf{k})\} = -\mathbf{k} \frac{e^{ikr}}{r} (\mathbf{p}_\omega, \mathbf{k}), \quad (3.9.22)$$

На основании формул (3.9.18) и (3.9.22), в которых сделаем замену $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_r$ (3.9.7), для искомого поля $\mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_{\varphi\omega} + \mathbf{E}_{\Lambda\omega}$ находим выражение:

$$\mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_{\varphi\omega} + \mathbf{E}_{\Lambda\omega} \approx -k^2 \mathbf{e}_r \frac{e^{ikr}}{r} (\mathbf{p}_\omega, \mathbf{e}_r) + k^2 \mathbf{p}_\omega \frac{e^{ikr}}{r} = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\mathbf{p}_\omega - \mathbf{e}_r (\mathbf{p}_\omega, \mathbf{e}_r)). \quad (3.9.23)$$

Можно заметить, что, вектор $\mathbf{p}_\omega - \mathbf{e}_r (\mathbf{p}_\omega, \mathbf{e}_r)$, входящий в эту формулу является вектором, перпендикулярным вектору \mathbf{e}_r и составляющим в сумме с вектором $\mathbf{e}_r (\mathbf{p}_\omega, \mathbf{e}_r)$ вектор \mathbf{p}_ω .

Введем обозначение:

$$\mathbf{p}_{\perp\omega} \equiv \mathbf{p}_\omega - \mathbf{e}_r (\mathbf{p}_\omega, \mathbf{e}_r). \quad (3.9.24)$$

Соотношения (3.9.11) и (3.9.17) позволяют найти поле \mathbf{H}_ω :

$$\mathbf{H}_\omega \approx i[\mathbf{k}, -ik\mathbf{p}_\omega] \frac{e^{ikr}}{r} = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} [\mathbf{e}_r, \mathbf{p}_\omega]. \quad (3.9.25)$$

Итак, асимптотики гармоник полей точечного диполя с переменным во времени дипольным моментом найдены (см. ф. (3.9.23) и ф. (3.9.25)), а значит, и найдены асимптотики самих полей:

$$\mathbf{E} = \sum_{\omega} e^{-i\omega t} \mathbf{E}_\omega \approx \frac{1}{r} \sum_{\omega} e^{-i(\omega t - kr)} k^2 \mathbf{p}_{\perp\omega} = -\frac{1}{rc^2} \ddot{\mathbf{p}}_{\perp} (t - \frac{r}{c}), \quad (3.9.26a)$$

$$\mathbf{H} = \sum_{\omega} e^{-i\omega t} \mathbf{H}_\omega \approx \frac{1}{r} \sum_{\omega} e^{-i(\omega t - kr)} k^2 [\mathbf{e}_r, \mathbf{p}_\omega] = -\frac{1}{rc^2} [\mathbf{e}_r, \ddot{\mathbf{p}} (t - \frac{r}{c})]. \quad (3.9.26b)$$

Из формул видно, что на больших расстояниях от источника поля убывают как $1/r$, при этом $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_\varphi$ в сферической системе координат (r, θ, φ) , где в центре находится источник. Орты системы - $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$, см. приложение П.2.3.

Излучение электромагнитных волн системой заряженных частиц в свободном пространстве - это процесс, при котором электромагнитное поле отрывается от источника и распространяется в виде волн на произвольные расстояния. Поэтому для расчета процесса излучения необходимо исследовать поле на большом расстоянии от источника ($|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$) и кроме того, превышающем длину излучаемой волны ($|\mathbf{r}| \gg 2\pi/k$, волновая зона).

Рассмотрим простейший случай, когда дипольный момент точечного диполя меняется во времени синусоидально:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cos \omega t, \quad (3.9.27)$$

Поля на больших расстояниях от такого источника имеют вид:

$$\mathbf{E} \approx -\frac{1}{rc^2} \ddot{\mathbf{p}}_{\perp}(t - \frac{r}{c}) = \frac{\omega^2}{rc^2} \mathbf{p}_{0\perp} \cos(\omega t - kr) = \frac{k^2}{r} \mathbf{p}_{0\perp} \cos(\omega t - kr), \quad (3.9.28a)$$

$$\mathbf{H} \approx -\frac{1}{rc^2} [\mathbf{e}_r, \ddot{\mathbf{p}}(t - \frac{r}{c})] = \frac{\omega^2}{rc^2} [\mathbf{e}_r, \mathbf{p}_0] \cos(\omega t - kr) = \frac{k^2}{r} [\mathbf{e}_r, \mathbf{p}_0] \cos(\omega t - kr). \quad (3.9.28b)$$

Найдем асимптотику вектора Пойтинга (вектора плотности потока энергии) для осциллирующего диполя (3.9.27):

$$\gamma = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \approx \frac{ck^4}{4\pi r^2} [\mathbf{p}_{0\perp}, [\mathbf{e}_r, \mathbf{p}_0]] \cos^2(\omega t - kr). \quad (3.9.29)$$

По формуле двойного векторного произведения преобразуем ф. (3.9.29) и учтем перпендикулярность вектора $\mathbf{p}_{0\perp}$ и вектора \mathbf{e}_r (или вектора $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_r$) - $(\mathbf{p}_{0\perp}, \mathbf{e}_r) = 0$. Введем замену $\mathbf{p}_{0\perp} = \mathbf{p}_0 \sin \theta$, где θ угол между направлением вектора \mathbf{p}_0 и вектора $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_r$, тогда:

$$\begin{aligned} \gamma(\theta) &= \frac{ck^4}{4\pi r^2} [\mathbf{p}_{0\perp}, [\mathbf{e}_r, \mathbf{p}_0]] \cos^2(\omega t - kr) = \frac{ck^4}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r (\mathbf{p}_{0\perp}, \mathbf{p}_0) \cos^2(\omega t - kr) = \\ &= \frac{ck^4}{4\pi r^2} \cos^2(\omega t - kr) |\mathbf{p}_{0\perp}| |\mathbf{p}_0| \sin \theta \mathbf{e}_r = \\ &= \frac{ck^4}{4\pi r^2} \cos^2(\omega t - kr) |\mathbf{p}_0|^2 \sin^2 \theta \mathbf{e}_r. \end{aligned} \quad (3.9.30)$$

Видно, что вектор Пойтинга направлен по радиусу от источника и обратно пропорционален квадрату расстояния до него.

Найдем энергию диполя $P(t)$, проходящую в единицу времени через сферическую поверхность радиуса r , окружающую диполь. Элемент поверхности сферы равен $r^2 d\Omega$, где Ω - телесный угол, тогда:

$$\begin{aligned} P(t) &= \int (\gamma, \mathbf{e}_r) r^2 d\Omega = \frac{ck^4 |\mathbf{p}_0|^2 r^2}{4\pi r^2} \cos^2(\omega t - kr) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \frac{ck^4 |\mathbf{p}_0|^2}{4\pi} \cos^2(\omega t - kr) 2\pi \int_0^{\pi} (-1)(1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = \\ &= \frac{ck^4 |\mathbf{p}_0|^2}{2} \cos^2(\omega t - kr) \frac{4}{3} = \frac{2ck^4 |\mathbf{p}_0|^2}{3} \cos^2(\omega t - kr). \end{aligned} \quad (3.9.31)$$

Из расчетов видно, что энергия, проходящая через замкнутую поверхность, окружающую диполь, не зависит от расстояния до диполя.

В заключение усредним энергию диполя (3.9.31) по периоду колебаний источника $T = 2\pi / \omega$:

$$\langle P(t) \rangle = \frac{2ck^4 |\mathbf{p}_0|^2}{3} \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kr) dt}_{1/2} = \frac{ck^4 |\mathbf{p}_0|^2}{3} = \frac{c |\mathbf{p}_0|^2}{3} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4. \quad (3.9.32)$$

Формула (3.9.32) показывает, что средняя скорость излучения энергии пропорциональна λ^{-4} . Это означает, например, что излучение медленно-переменных токов, используемых в сильноточной технике, незначительно и является практически незаметным.

Контрольные вопросы к Главе 3

1. Проясните, при каких условиях уравнения Максвелла становятся волновыми уравнениями. Выведите эти уравнения. Запишите частное решение волнового уравнения в виде плоской монохроматической волны.
2. Докажите, что волновой вектор, вектор электрического и вектор магнитного поля электромагнитной волны образуют правую тройку.
3. Объясните, при каких условиях уравнения Максвелла становятся диффузионными уравнениями. Решите задачу о проникновении переменного магнитного поля в проводник и дайте определение скин-слоя.
4. Докажите сохранение тангенциальной составляющей волнового вектора света, падающего на плоскую зеркальную границу диэлектрика.
5. Докажите равенство угла падения и угла отражения света от плоской границы диэлектрика и закон Снелля. Дайте определение векторному показателю преломления.
6. Дайте определение поляризованного света, а также ТЕ и ТМ поляризаций.
7. Выведите формулы для коэффициентов отражения света от диэлектрика в вакуум в ТЕ и ТМ поляризациях. Определите угол Брюстера.
8. Выведите формулы для коэффициентов отражения света от границы диэлектрик – вакуум при падении из диэлектрика в ТЕ и ТМ поляризациях.
9. Покажите, как с помощью калибровки Лоренца можно получить уравнения Гельмгольца для скалярного и векторного потенциалов электромагнитного поля.
10. Продемонстрируйте решение уравнения Гельмгольца с помощью запаздывающего потенциала. Найдите функцию Грина для уравнения Гельмгольца. Дайте общее определение функции Грина.

Глава 4. Основы кристаллооптики

4.1. Уравнения Максвелла при наличии связи $D_i = \varepsilon_{ik} E_k$, где ε_{ik} - тензор диэлектрической проницаемости кристалла. Дисперсионное уравнение. Двойное лучепреломление

Рассмотрим роторные уравнения Максвелла для нестационарного электромагнитного поля в материале:

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \end{cases} \quad (4.1.1a,b)$$

где напряженность магнитной составляющей электромагнитного поля \mathbf{H} связана с вектором магнитной индукции \mathbf{B} и намагниченностью \mathbf{M} соотношением: $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$.

В отсутствие намагниченности $\mathbf{M} = 0$ и сторонних токов $\mathbf{j} = 0$ уравнения (5.1.1) преобразуются к виду:

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{cases} \quad (4.1.2a,b)$$

Полагаем, что электромагнитное поле – это плоская монохроматическая волна, т.е. вектора \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{D} пропорциональны фазовому множителю $e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$, где \mathbf{k} - волновой вектор и ω - частота.

Для произвольного вектора $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$, используя свойство $\text{rot}(g \mathbf{a}) = g \text{rot } \mathbf{a} - [\mathbf{a}, \nabla g]$, можно записать:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \text{rot } \mathbf{A}_0 - [\mathbf{A}_0, \nabla e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}] = -[\mathbf{A}_0, e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} (ik_x \mathbf{e}_x + ik_y \mathbf{e}_y + ik_z \mathbf{e}_z)] = \\ &= -i[\mathbf{A}, \mathbf{k}] = i[\mathbf{k}, \mathbf{A}]. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Кроме того,

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{A}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = -i\omega \mathbf{A}. \quad (4.1.4)$$

Тогда уравнения (4.1.2a,b) примут вид:

$$[\mathbf{k}, \mathbf{E}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, \quad [\mathbf{k}, \mathbf{B}] = -\frac{\omega}{c} \mathbf{D}. \quad (4.1.5a,b)$$

Обе части уравнения (4.1.5a) умножим справа векторно на \mathbf{k} . В результате в левой части формулы (4.1.5a) получаем $[\mathbf{k}, [\mathbf{k}, \mathbf{E}]]$. Векторное

произведение $[\mathbf{k}, \mathbf{B}]$, возникающее в правой части ф. (4.1.5a), заменим на $-\frac{\omega}{c} \mathbf{D}$, см. уравнение (4.1.5b).

Раскрывая двойное векторное произведение $[\mathbf{k}, [\mathbf{k}, \mathbf{E}]]$, приходим к следующему уравнению:

$$\mathbf{k}(\mathbf{k}, \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D}. \quad (4.1.6)$$

Вспомним, как определяется векторный показатель преломления, а именно, $\mathbf{n} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k}$. С учетом этого уравнение (4.1.6) преобразуем к виду

$$n^2 \mathbf{E} - \mathbf{n}(\mathbf{n}, \mathbf{E}) = \mathbf{D}. \quad (4.1.7)$$

Отсюда можно получить однородную систему алгебраических уравнений для компонент поля \mathbf{E} , найти закон дисперсии и типы поляризации собственных волн, если известен тип связи между полями \mathbf{E} и \mathbf{D} . Отметим очевидное: вектора \mathbf{k} , \mathbf{n} и фазовая скорость \mathbf{v} волны сонаправлены (рис. 4.1).

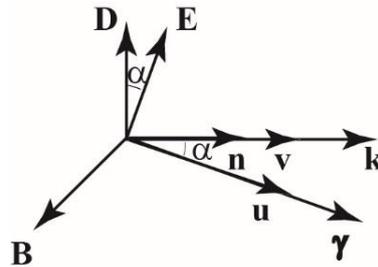


Рис. 4.1. Правая тройка векторов $(\mathbf{k}, \mathbf{D}, \mathbf{B})$. Показаны векторный показатель преломления \mathbf{n} , фазовая скорость \mathbf{v} , вектор напряженности \mathbf{E} , вектор Пойнтинга $\boldsymbol{\gamma}$ и лучевая скорость \mathbf{u} .

Запишем теперь пару уравнений Максвелла, содержащие дивергенции, при условии отсутствия свободных зарядов ρ :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \end{cases} \quad (4.1.8a,b)$$

С учетом волнового характера поля $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ представим $\operatorname{div} \mathbf{A}$, как $\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} \mathbf{A}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = (A_0 i k_x + A_0 i k_y + A_0 i k_z) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = i(\mathbf{A}, \mathbf{k})$. Значит, уравнения (4.1.8a,b) эквивалентны следующим уравнениям:

$$\begin{cases} (\mathbf{D}, \mathbf{k}) = 0, \\ (\mathbf{B}, \mathbf{k}) = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (\mathbf{D}, \mathbf{n}) = 0, \\ (\mathbf{B}, \mathbf{n}) = 0. \end{cases} \quad (4.1.9a,b)$$

Уравнения (4.1.5a,b) и (4.1.9a,b) показывают, что вектора \mathbf{k} , \mathbf{D} и \mathbf{B} образуют правую тройку ($\mathbf{k}, \mathbf{D}, \mathbf{B}$) (рис. 4.1). Вектор \mathbf{E} перпендикулярен вектору \mathbf{B} (4.1.5a) и, следовательно, лежит в плоскости, образованной векторами \mathbf{D} и \mathbf{k} .

Для анизотропного кристалла между векторами электрического смещения \mathbf{D} и напряженности \mathbf{E} имеется следующая связь:

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k, \quad (4.1.10)$$

где ε_{ik} - тензор диэлектрической проницаемости кристалла. Суммирование ведется по повторяющемуся индексу, то есть $D_i = \sum_k \varepsilon_{ik} E_k$.

Из соотношения (4.1.10) видно, что вектора \mathbf{D} и \mathbf{E} взаимно не коллинеарны. Они лежат в одной плоскости с волновым вектором \mathbf{k} , но повернуты друг относительно друга на угол α (рис. 4.1).

Перепишем связь (4.1.10), используя матричную форму:

$$(D_x, D_y, D_z) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} (E_x, E_y, E_z). \quad (4.1.11)$$

Из курса теории твердого тела известно, что тензор диэлектрической проницаемости - симметричный тензор: $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$. В этом случае можно подобрать такую собственную систему координат, в которой тензор $\hat{\varepsilon}$, имеющий вещественные компоненты, приобрел бы диагональный вид с вещественными же диагональными элементами (собственными или главными значениями):

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.1.12)$$

Рассмотрим на качественном уровне различные варианты, которые могут возникнуть, при определенных соотношениях главных значений тензора $\hat{\varepsilon}$.

1. При $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$ материал - изотропный диэлектрик, т.е. $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$. В этом случае, \mathbf{D} и \mathbf{E} сонаправлены и, значит, $\mathbf{n} \perp \mathbf{E}$ (или $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$).

Уравнение (4.1.7) преобразуется к виду

$$n^2 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (4.1.13)$$

из которого получается простой закон дисперсии:

$$n^2 = \varepsilon. \quad (4.1.14)$$

Помимо изотропных тел свойством $\varepsilon_{ik} = \varepsilon \delta_{ik}$, где δ_{ik} - символ Кронекера, обладают кристаллы кубической системы.

2. Если $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} \neq \varepsilon_{33}$, диэлектрик - *одноосный* кристалл. К таким материалам относятся кристаллы, имеющие поворотные оси симметрии 3-го, 4-го и 6-го порядков, т.е. кристаллы ромбоэдрической (тригональной), тетрагональной и гексагональной систем.

3. При условии $\varepsilon_{11} \neq \varepsilon_{22} \neq \varepsilon_{33}$, мы имеем дело с *двуосным* кристаллом. Сюда относятся кристаллы триклинной, моноклинной и ромбической систем.

Прежде, чем перейти к точным математическим выкладкам, рассмотрим эффект *двойного лучепреломления* в кристаллах (рис. 4.2) и введем определения.

Оптическая ось кристалла C - направление в оптически анизотропном кристалле, по которому луч света распространяется, не испытывая двойного лучепреломления. Заметим, что под осью мы понимаем здесь не одиночную линию, а направление. Оптическая ось на рисунках изображается линиями со стрелками или без них (см. ниже рис. 4.3с-е, 4.4 и 4.5).

Помимо кристаллов двойное лучепреломление наблюдается и в изотропных средах, помещённых в электрическое (эффекты Поккельса и Керра) или магнитное поле (эффекты Коттона — Мутона и Фарадея), а также подверженных действию механической силы (фотоупругость). Внешние поля преобразуют изначально изотропную среду в анизотропную. В этих случаях оптическая ось среды совпадает с направлением электрического или магнитного поля, или с направлением приложения силы.

Главная плоскость (главное сечение) – плоскость, образуемая осью c и вектором \mathbf{n} . В литературе встречается определение главного сечения кристалла, как любой плоскости, в которой лежит оптическая ось.

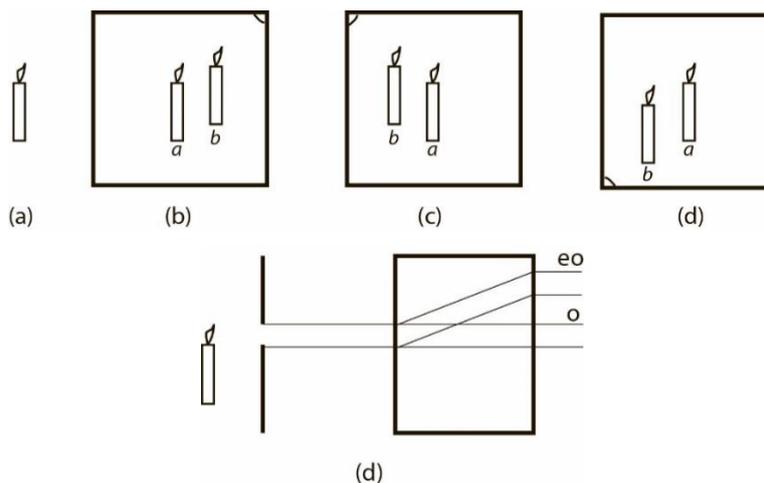


Рис. 4.2. Опыт Бартолина.

(а) Источник света – свеча. (б)-(д) Изображения свечи после прохождения света через кристалл при различных его поворотах.

Отмеченный угол кристалла показывает, как он поворачивался.

(е) Схема прохождения о- и ео- лучей через кристалл.

Волна, у которой $\mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$ и эти вектора перпендикулярны главной плоскости, иными словами, волна, поляризованная \perp главной плоскости – *обыкновенная волна* или о-луч (о - ordinary).

Волна, поляризованная в главной плоскости – *необыкновенная волна* – ео-луч (ео - extraordinary).

В 1669 году *Эразм Бартолин* провел опыт на исландском шпате, в котором наблюдал раздвоение изображения свечи, которое еще и менялось при повороте кристалла (рис. 4.2).

Обыкновенный луч, падая перпендикулярно поверхности кристалла, не изменяет своего направления согласно закону Снелля (рис. 4.2).

В 1808 году *Этьен Луи Малюс*, наблюдая отражение от окон Люксембургского дворца сквозь кусок исландского шпата, обнаружил, что два изображения, возникшие в результате двойного преломления, имели различную яркость. Вращая кристалл, Малюс видел, что изображения поочередно то делались ярче, то угасали. Так он открыл *поляризацию* света и ввел этот термин в оптику.

Возможны разные виды прохождения луча через кристалл (рис. 4.3).

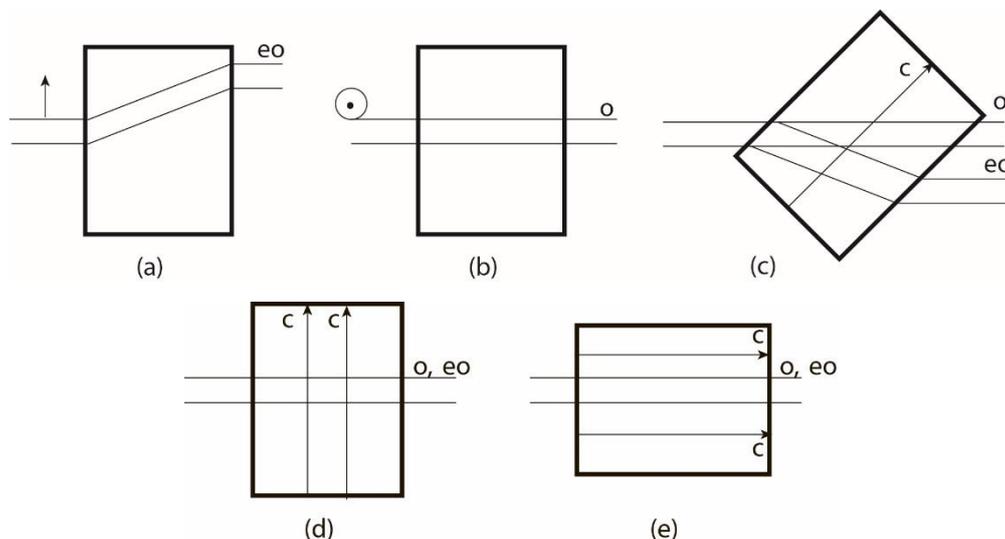


Рис. 4.3. Прохождение луча через кристалл.

(а) Проходит только ео-луч; (б) проходит только о-луч; (с) два луча возбуждаются с одинаковой амплитудой, если падающий свет поляризован под углом 45° к главной оси; (д, е) разделения лучей не происходит, если оптическая ось $c \parallel$ или \perp направлению падения света.

Отдельный случай имеет место для преломления света при прохождении через призму. Здесь расщепление максимально при ориентациях, изображенных на рис. 4.4.

В таблице 4.1 приводятся экспериментальные данные по показателю преломления n для некоторых кристаллов, верные для оптического диапазона $\lambda = 0.589$ мкм (желтый свет).

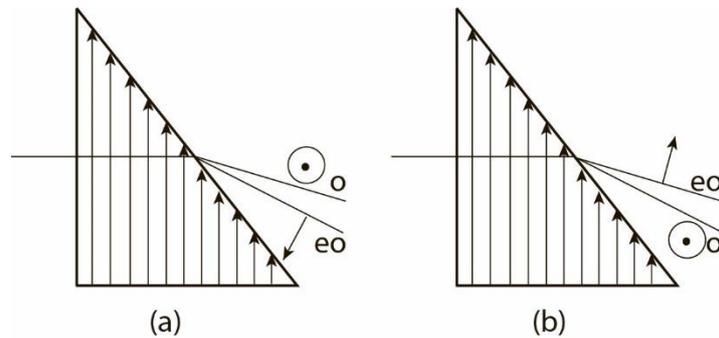


Рис. 4.4. Двойное лучепреломление в призме.
 (а) Положительный кристалл $n_{eo} > n_o$;
 (б) отрицательный кристалл $n_{eo} < n_o$.

Таблица. Показатели преломления одноосных кристаллов

Кристалл	Формула	n_o	n_{eo}	Δn
кварц	SiO_2	1.54	1.55	+0.01
кальцит (исландский шпат)	CaCO_3	1.66	1.49	-0.17
селитра	NaNO_3	1.58	1.33	-0.25
рутил	TiO_2	2.62	2.90	+0.28

Свойство двойного лучепреломления анизотропных материалов используется для создания *поляризаторов*. Ниже рассмотрены классические поляризаторы.

Призма Николя (николь) (1828 г.) – поляризатор из кальцита с возможным диапазоном длин поляризуемых волн $\lambda \in (0.3 - 2.5)$ мкм. Видно, что данный диапазон захватывает видимый свет $\lambda \in (0.3 - 0.8)$ мкм. Для работы в области УФ используется аналогичная призма из кварца. Лучи в призме расщепляются, и один из них – о-луч (так подобран угол наклона склея) - испытывает полное внутреннее отражение (рис. 4.5). Склея изготавливается, например, из канадского бальзама.

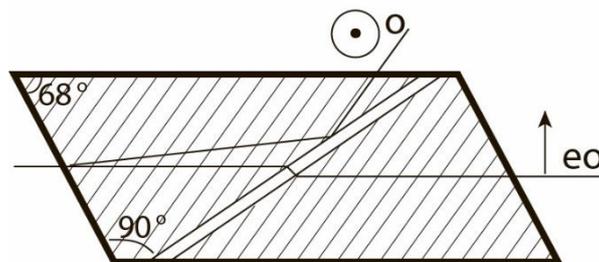


Рис. 4.5. Двойное лучепреломление в призме Николя. Показан склей, на границе которого о-луч испытывает полное внутреннее отражение.

Полуволновая пластинка (пластинка $\lambda / 2$)

Можно подобрать условия, при которых обыкновенный и необыкновенный лучи распространяются в кристалле по одной траектории, но с разными скоростями (см., например, рис. 4.3d). Тогда наблюдается эффект изменения поляризации. Например, линейно поляризованный свет, падающий на пластинку можно представить в виде двух составляющих (обыкновенной и необыкновенной волн), двигающихся с разными скоростями. Из-за разности скоростей этих двух составляющих, по мере продвижения их по кристаллу между ними будет накапливаться некоторая разность фаз, в зависимости от которой волна на выходе будет иметь различные поляризации, см. рис. 3.3.

Найдем толщину пластинки d , при которой свет, прошедший через нее, останется линейно поляризованным, но плоскость поляризации повернется на угол $\pi / 2$ (рис. 3.3).

После попадания в пластинку волна сразу же как бы «расщепляется» на две, которые распространяются с разными скоростями v_o и v_{eo} , в результате чего у них накапливается разность фаз:

$$\delta = k_1 d - k_2 d, \quad (4.1.15)$$

где $k_1 = \frac{\omega}{c} n_o = \frac{\omega}{v_o}$ и $k_2 = \frac{\omega}{c} n_{eo} = \frac{\omega}{v_{eo}}$.

Из рис. 3.3 видно, что при сложении двух взаимно перпендикулярных линейных поперечных волн с разностью фаз $\delta = \pi + 2\pi m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), плоскость поляризации повернута на угол $\pi / 2$ относительно плоскости поляризации суммы таких же волн с разностью фаз $\delta = 0$. Значит, толщина пластинки, при прохождении которой плоскость поляризации линейно поляризованного света повернется на угол $\pi / 2$, найдется из уравнения:

$$\delta = \frac{\omega}{c} \Delta n d \Rightarrow \delta = \frac{2\pi \Delta n d}{\lambda} \Rightarrow \frac{2\pi \Delta n d}{\lambda} = \pi + 2\pi m, \quad (4.1.16)$$

где λ - длина волны, $m = 0, 1, 2, \dots$

Из соотношения (5.1.16) определим толщину пластинки:

$$d \Delta n = \frac{\lambda}{2} + m \lambda, \quad (4.1.17)$$

Отсюда пластинка называется полуволновой.

Пример: для поворота плоскости поляризации линейно поляризованного зеленого света ($\lambda = 0.5$ мкм) на угол $\pi / 2$, полуволновая пластинка кальцита ($\Delta n = 0.17$) должна иметь толщину $d = 1.75$ мкм (или плюс целое число длин волн).

Четвертьволновая пластинка (пластинка $\lambda / 4$)

Для того, чтобы изначально линейно поляризованный свет, приобрел круговую поляризацию, необходимо, чтобы при прохождении через кристалл разность фаз о- и ео-волн составила величину $\pi / 2$, см. рис. 3.3. Здесь для толщины пластинки d должно выполняться условие

$$d \Delta n = \frac{\lambda}{4} + m \lambda . \quad (4.1.18)$$

Из этой формулы видно, откуда происходит название поляризатора – четвертьволновая пластинка.

Поляризатор, основанный на разности двулучепреломления – дихроизме.

Явление дихроизма состоит в том, что коэффициенты поглощения о- и ео-лучей сильно отличаются. Если кристалл достаточно толстый, то на выходе из него остается только одна волна, а вторая поглощается кристаллом. Примеры: турмалин, в котором о-волна поглощается на толщине 1 мм; в йодистом хинине поглощение одной волны происходит на толщине 0.1 мм.

4.2. Уравнения Френеля для векторного показателя преломления, фазовой и лучевой скоростей

Вернемся к решению уравнений Максвелла для анизотропных кристаллов и опишем рассмотренный выше эффект двулучепреломления.

Перейдем в собственную систему координат для тензора диэлектрической проницаемости, тогда связь между векторами \mathbf{D} и \mathbf{E} (4.1.10) приобретет вид системы трех алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} D_1 = \varepsilon_1 E_1 \\ D_2 = \varepsilon_2 E_2 . \\ D_3 = \varepsilon_3 E_3 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Здесь мы использовали запись главных значений тензора $\hat{\varepsilon}$ с помощью одного индекса $\varepsilon_{ii} \equiv \varepsilon_i, i = 1, 2, 3$.

Из уравнения (4.1.7) получим систему уравнений:

$$\begin{cases} n^2 E_1 - n_1(\mathbf{n}, \mathbf{E}) = \varepsilon_1 E_1 \\ n^2 E_2 - n_2(\mathbf{n}, \mathbf{E}) = \varepsilon_2 E_2 . \\ n^2 E_3 - n_3(\mathbf{n}, \mathbf{E}) = \varepsilon_3 E_3 \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Здесь $n_1 = n c_1, n_2 = n c_2, n_3 = n c_3$, где $c_i = \cos(\mathbf{n} \mathbf{e}_i)$, \mathbf{e}_i - орты собственной системы координат.

Мы считаем, что c_1, c_2, c_3 заданы. Причем, очевидно, что $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$.

Наша задача – найти \mathbf{n} и виды поляризаций выходящих волн.

Система однородных линейных алгебраических уравнений (4.2.2) имеет ненулевое решение, если ее \det равен нулю. Кроме того, независимых уравнений реально лишь два в силу того, что имеется условие $(\mathbf{n}, \mathbf{D}) = 0$ (4.1.9а). Поэтому мы должны получить лишь два корня дисперсионного уравнения:

$$E_i(n^2 - \varepsilon_i) = n_i(\mathbf{n}, \mathbf{E}). \quad (4.2.3)$$

Умножим обе части уравнения (4.2.3) на n_i и просуммируем, тогда

$$\begin{aligned} \sum_i n_i E_i &= \sum_i \frac{n_i(\mathbf{n}, \mathbf{E})}{(n^2 - \varepsilon_i)} n_i \Rightarrow \sum_i \frac{n_i^2}{(n^2 - \varepsilon_i)} = 1 \Rightarrow \\ \sum_i n^2 \frac{c_i^2}{(n^2 - \varepsilon_i)} &= \sum_i c_i^2 \Rightarrow \\ \sum_i c_i^2 \frac{\varepsilon_i}{(n^2 - \varepsilon_i)} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Итоговое уравнение - уравнение Френеля для показателя преломления. Представим его в развернутом виде:

$$\begin{aligned} c_1^2 \varepsilon_1 (n^2 - \varepsilon_2)(n^2 - \varepsilon_3) + c_2^2 \varepsilon_2 (n^2 - \varepsilon_1)(n^2 - \varepsilon_3) + c_3^2 \varepsilon_3 (n^2 - \varepsilon_1)(n^2 - \varepsilon_2) &= 0 \Rightarrow \\ n^4 \sum_i c_i^2 \varepsilon_i - n^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \sum_i c_i^2 \varepsilon_i + n^2 \sum_i c_i^2 \varepsilon_i^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Рассмотрим частные случаи уравнения Френеля (4.2.5):

1. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$,

тогда

$$\begin{aligned} n^4 \varepsilon - 2n^2 \varepsilon + \varepsilon^3 = 0 \Rightarrow n^4 - 2n^2 + \varepsilon^2 = 0 \Rightarrow (n^2 - \varepsilon)^2 = 0 \Rightarrow \\ n^2 = \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Как видим, получили закон дисперсии для изотропного тела, ср. с ф. (3.1.14). Следовательно, никаких особенностей при прохождении луча в изотропном диэлектрике быть не должно.

2. Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{\perp}$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_{\parallel}$ (одноосный кристалл).

Из уравнения (4.2.5) получаем уравнение

$$n^4 \left[\underbrace{(c_1^2 + c_2^2)}_{c_{\perp}^2} \varepsilon_{\perp} + \underbrace{c_3^2}_{c_{\parallel}^2} \varepsilon_{\parallel} \right] - n^2 (2\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel}) (c_{\perp}^2 \varepsilon_{\perp} + c_{\parallel}^2 \varepsilon_{\parallel}) + n^2 (c_{\perp}^2 \varepsilon_{\perp}^2 + c_{\parallel}^2 \varepsilon_{\parallel}^2) + \varepsilon_{\perp}^2 \varepsilon_{\parallel} = 0,$$

которое после группировки членов преобразуется к следующему виду

$$(n^2 - \varepsilon_{\perp}) [n^2 (c_{\perp}^2 \varepsilon_{\perp} + c_{\parallel}^2 \varepsilon_{\parallel}) - \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}] = 0. \quad (4.2.6)$$

Это уравнение имеет два решения

$$n^2 = \varepsilon_{\perp}, \quad (4.2.7a)$$

$$n^2 \left(\frac{c_{\perp}^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{c_{\parallel}^2}{\varepsilon_{\perp}} \right) = 1. \quad (4.2.7b)$$

Решение (4.2.7a) соответствует о-волне, решение (4.2.7b) соответствует ео-волне. Видно, что в о-волне показатель преломления n не зависит от направления её распространения, а в ео-волне – зависит через косинусы c_1 , c_2 , c_3 .

Если ео-волна распространяется вдоль оптической оси кристалла c : $c_{\parallel} = 1$, $c_{\perp} = 0$. Тогда из (4.2.7b) получаем $n^2 = \varepsilon_{\perp}$, значит, ео- и о – волны распространяются вместе.

Если ео-волна распространяется поперек оптической оси кристалла c : $c_{\parallel} = 0$, $c_{\perp} = 1$. Тогда из (4.2.7b) получаем $n^2 = \varepsilon_{\parallel}$, т.е. ео- и о – волны опять идут вместе, но имеют разные n и, значит, скорости распространения (на этом основаны $\lambda/2$ - и $\lambda/4$ - пластинки).

Уравнение Френеля (4.2.4) можно переписать относительно фазовой скорости распространения волны \mathbf{v} (рис. 4.1).

Подставим в ф. (4.1.7) и (4.2.4) значение показателя преломления через значение фазовой скорости $n = c/v$ и, используя связь фазовых скоростей волны по главным направлениям тензора $\hat{\varepsilon}$ с главными значениями ε_i - $v_i = c/\sqrt{\varepsilon_i}$, получим связь между \mathbf{D} и \mathbf{E} через \mathbf{v} и формулу Френеля для фазовых скоростей:

$$\frac{c^2}{v^2}(\mathbf{E} - \mathbf{e}_v(\mathbf{e}_v, \mathbf{E})) = \mathbf{D}, \quad (4.2.8)$$

где \mathbf{e}_v - единичный вектор в направлении вектора фазовой скорости \mathbf{v} , а также векторов \mathbf{n} и \mathbf{k} ;

$$\sum_i \frac{c_i^2}{(v_i^2 - v^2)} = 0. \quad (4.2.9)$$

Поскольку \mathbf{v} и \mathbf{n} сонаправлены (рис. 4.1), то c_i - направляющие косинусы фазовой скорости в собственной для $\hat{\varepsilon}$ системе координат.

Известно, что излучение характеризуется вектором Пойнтинга γ (2.12.4). Можно показать, что он лежит в плоскости, образованной векторами \mathbf{D} и \mathbf{n} , а также перпендикулярен векторам \mathbf{E} и \mathbf{B} (здесь мы полагаем, что $\mathbf{H} = \mathbf{B}$). Значит, вектор γ повернут относительно вектора \mathbf{n} на угол α , равный углу между \mathbf{D} и \mathbf{E} (рис. 4.1). Лучевая скорость \mathbf{u} - это скорость распространения вектора Пойнтинга.

Запишем уравнение Френеля для лучевой скорости \mathbf{u} .

Для этого векторно умножим обе части уравнения (4.1.5b) на единичный вектор направления векторов γ и \mathbf{u} - \mathbf{s} и раскроем двойное векторное произведение:

$$[\mathbf{s}, [\mathbf{k}, \mathbf{B}]] = -\frac{\omega}{c}[\mathbf{s}, \mathbf{D}] \Rightarrow \mathbf{k}(\mathbf{s}, \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{s}, \mathbf{k}) = -\frac{\omega}{c}[\mathbf{s}, \mathbf{D}] \Rightarrow$$

$$-\mathbf{B}(\mathbf{s}, \mathbf{n}) = -[\mathbf{s}, \mathbf{D}] \Rightarrow \mathbf{B} n \cos \alpha = [\mathbf{s}, \mathbf{D}], \quad (4.2.10)$$

где α - угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{s} (или между векторами \mathbf{D} и \mathbf{E}).
Далее в ф. (4.2.10) делаем замену $n = c/v$, введем значение лучевой скорости $u = v/\cos \alpha$, используем уравнение Максвелла (4.1.5а), умножим векторно обе части уравнения на \mathbf{s} и преобразуем:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \frac{c}{v} \cos \alpha = [\mathbf{s}, \mathbf{D}] &\Rightarrow \mathbf{B} = \frac{u}{c} [\mathbf{s}, \mathbf{D}] \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{1}{c} [\mathbf{u}, \mathbf{D}] \Rightarrow [\mathbf{n}, \mathbf{E}] = \frac{1}{c} [\mathbf{u}, \mathbf{D}] \Rightarrow \\ [\mathbf{s}, [\mathbf{n}, \mathbf{E}]] &= \frac{1}{c} [\mathbf{s}, [\mathbf{u}, \mathbf{D}]] \Rightarrow \underbrace{\mathbf{n}(\mathbf{s}, \mathbf{E})}_0 - \mathbf{E} n \cos \alpha = \frac{1}{c} [\mathbf{s}, [\mathbf{u}, \mathbf{D}]] \Rightarrow \\ -\mathbf{E} \frac{c}{u} &= \frac{1}{c} (\mathbf{u}(\mathbf{s}, \mathbf{D}) - u \mathbf{D}) \Rightarrow \\ \frac{u^2}{c^2} (\mathbf{D} - \mathbf{s}(\mathbf{s}, \mathbf{D})) &= \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Формула (4.2.11) показывает связь векторов \mathbf{D} и \mathbf{E} через лучевую скорость.
Исключая из ф. (4.2.11) \mathbf{D} и \mathbf{E} , получаем формулу Френеля для лучевой скорости:

$$\sum_i \frac{s_i^2 v_i^2}{(v_i^2 - u^2)} = 0, \quad (4.2.12)$$

где $s_i = \cos(\mathbf{s}, \mathbf{e}_i)$ - направляющие косинусы единичного вектора \mathbf{s} в главной для тензора диэлектрической проницаемости системе координат.

Обратимся к уравнению Френеля (4.2.5) и перепишем его в обобщенном виде:

$$A(c_i) n^4 - B(c_i) n^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 0. \quad (4.2.13)$$

Это биквадратное уравнение, и его решением является следующий набор функций:

$$\begin{cases} n_1^2 = f_1(c_i) \\ n_2^2 = f_2(c_i) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} n_1 = \pm \sqrt{f_1(c_i)} \\ n_2 = \pm \sqrt{f_2(c_i)} \end{cases}. \quad (4.2.14)$$

Будем откладывать в координатном пространстве длину n , как функцию направления. Приведенное выше решение показывает, что в общем случае получающаяся поверхность будет состоять из 2-х полостей.

Для одноосного положительного кристалла – это сфера, вложенная в сплюснутый эллипсоид вращения $n_{eo} > n_o$ (рис. 4.6а). Для одноосного отрицательного кристалла поверхность волновых векторов – это сфера, охватывающая вытянутый эллипсоид вращения $n_{eo} < n_o$ (рис. 4.6б). Представленные геометрические построения решений следуют из уравнения (4.2.6), переписанного в следующем виде:

$$(n^2 - \varepsilon_{\perp}) \left(\frac{n^2 c_{\perp}^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{n^2 c_{\parallel}^2}{\varepsilon_{\perp}} - 1 \right) = 0. \quad (4.2.15)$$

Корень этого уравнения $n^2 = \varepsilon_{\perp}$ отвечает сфере, а корень $n^2 \left(\frac{c_{\perp}^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{c_{\parallel}^2}{\varepsilon_{\perp}} \right) = 1$ - эллипсоиду.

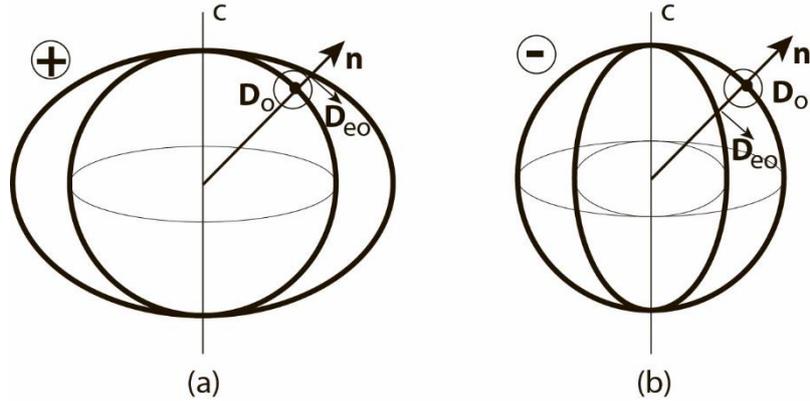


Рис. 4.6. Поверхность волновых векторов (а) положительного ($n_{eo} > n_o$) и (б) отрицательного ($n_{eo} < n_o$) одноосных кристаллов. Радиус сферы - $n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$, главные оси сфероида вращения - $n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ и $n_{eo} = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$.

Если строить поверхность, представляющую собой решение уравнения (4.2.9) или (4.2.12) для одноосного кристалла, беря в качестве радиуса сферы $v_o = c/\sqrt{\varepsilon_{\perp}}$, а в качестве главных осей эллипсоида - $v_o = c/\sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ и $v_{eo} = c/\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$, то положительный и отрицательный кристаллы, будут выглядеть с точностью до наоборот тем, которые изображены на рис. 4.6.

4.3. Поляризация волн

Найдем теперь, какие поляризации \mathbf{D}' и \mathbf{D}'' будут иметь волны, соответствующие общему решению уравнения (4.2.13). Для этого скалярно умножим уравнение (4.1.7), записанное для \mathbf{D}' и \mathbf{E}' , на \mathbf{D}'' , а записанное для \mathbf{D}'' и \mathbf{E}'' , - на \mathbf{D}' :

$$n'^2 (\mathbf{D}'', \mathbf{E}') - (\mathbf{D}'', \mathbf{n}') (\mathbf{n}', \mathbf{E}') = (\mathbf{D}'', \mathbf{D}'), \quad (4.3.1a)$$

$$n''^2 (\mathbf{D}', \mathbf{E}'') - (\mathbf{D}', \mathbf{n}'') (\mathbf{n}'', \mathbf{E}'') = (\mathbf{D}', \mathbf{D}''). \quad (4.3.1b)$$

Поскольку $(\mathbf{D}', \mathbf{n}'') = 0$ и $(\mathbf{D}'', \mathbf{n}') = 0$, см. (4.1.9а), получим

$$n'^2 (\mathbf{D}'', \mathbf{E}') = (\mathbf{D}'', \mathbf{D}'), \quad n''^2 (\mathbf{D}', \mathbf{E}'') = (\mathbf{D}', \mathbf{D}'') \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
n'^2 \sum_{i=1} \varepsilon_i E_i'' E_i' &= (\mathbf{D}'', \mathbf{D}'), \quad n''^2 \sum_{i=1} \varepsilon_i E_i' E_i'' = (\mathbf{D}', \mathbf{D}'') \Rightarrow \\
\sum_{i=1} \varepsilon_i E_i'' E_i' &= \frac{v'^2}{c^2} (\mathbf{D}'', \mathbf{D}'), \quad \sum_{i=1} \varepsilon_i E_i' E_i'' = \frac{v''^2}{c^2} (\mathbf{D}', \mathbf{D}'') \Rightarrow \\
\frac{v'^2}{c^2} (\mathbf{D}'', \mathbf{D}') &= \frac{v''^2}{c^2} (\mathbf{D}', \mathbf{D}'') \Rightarrow (v'^2 - v''^2) (\mathbf{D}'', \mathbf{D}') = 0 \Rightarrow \\
(\mathbf{D}'', \mathbf{D}') &= 0, \tag{4.3.2}
\end{aligned}$$

что доказывает взаимную ортогональность поляризаций волн.

Покажем, что для одноосного кристалла поляризации о- и ео- волн будут действительно такими, какими они изображены на рис. 4.6.

Пусть в собственной для диэлектрической проницаемости системе координат оптическая ось совпадает с осью 3 и показатель преломления \mathbf{n} лежит в плоскости, образованной осями 1 и 3, т.е. $n_2 = 0$.

Рассмотрим поляризацию

$$\begin{cases} E_1 = E_3 = 0, \\ E_2 \neq 0. \end{cases} \tag{4.3.3}$$

Тогда, согласно уравнению (4.1.7), получим

$$n^2 E_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{D}. \tag{4.3.4}$$

Здесь учтено, что при условии $n_2 = 0$ член $n_2(\mathbf{n}, \mathbf{E})$ в (4.1.7) равен нулю.

Из (4.3.4) следует, что

$$\varepsilon_2 E_2 \mathbf{e}_2 = n^2 E_2 \mathbf{e}_2 \Rightarrow n^2 = \varepsilon_2. \tag{4.3.5}$$

Сравнивая это дисперсионное уравнение с ф. (4.2.7а), видим, что $n^2 = \varepsilon_{\perp}$, что соответствует о-волне. Следовательно, вектор \mathbf{D}_o перпендикулярен плоскости, образованной осью c и вектором \mathbf{n} . Кроме того, $\mathbf{D}_o \perp \mathbf{n}$.

Рассмотрим теперь поляризацию

$$\begin{cases} E_1, E_3 \neq 0, \\ E_2 = 0. \end{cases} \tag{4.3.6}$$

Тогда можем записать систему:

$$\begin{cases} n^2 E_1 - n_1(\mathbf{n}, \mathbf{E}) = \varepsilon_1 E_1, \\ (\mathbf{n}, \mathbf{D}) = 0. \end{cases} \tag{4.3.7}$$

Из второго уравнения системы (4.3.7) с учетом $n_2 = 0$ получаем,

$$n_1 D_1 + n_3 D_3 = 0 \Rightarrow D_3 = -\frac{n_1}{n_3} D_1. \tag{4.3.8}$$

Подставим соотношение (4.3.8) в первое уравнение системы (4.3.7):

$$\frac{n^2}{\varepsilon_1} D_1 - n_1 \left(\frac{n_1 D_1}{\varepsilon_1} + \frac{n_3 D_3}{\varepsilon_3} \right) = D_1 \Rightarrow \frac{n^2}{\varepsilon_{\perp}} D_1 - n_1 \left(\frac{n_1 D_1}{\varepsilon_{\perp}} - \frac{n_1 D_1}{\varepsilon_{\parallel}} \right) = D_1 \Rightarrow$$

$$\frac{n^2}{\varepsilon_{\perp}} - n_1^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_{\perp}} - \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} \right) = 1 \Rightarrow \frac{n_{\parallel}^2}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{n_{\perp}^2}{\varepsilon_{\parallel}} = 1. \quad (4.3.9)$$

Значит, поляризация (4.3.6) соответствует ео-волне. Вектор \mathbf{D}_{eo} лежит в плоскости, образованной осью c и вектором \mathbf{n} и кроме того $\mathbf{D}_{eo} \perp \mathbf{n}$.

4.4. Построение направлений о- и ео-волн при переходе через границу одноосного кристалла

Рассмотрим теперь построение направлений о- и ео- волн, пользуясь поверхностью волновых векторов кристалла при нулевом (рис. 4.7а) и ненулевом (рис. 4.7б) углах падения из вакуума. Из рис. 4.7с видно, когда получается случай ПВО для ео-волны при переходе через границу контакта двух кристаллов.

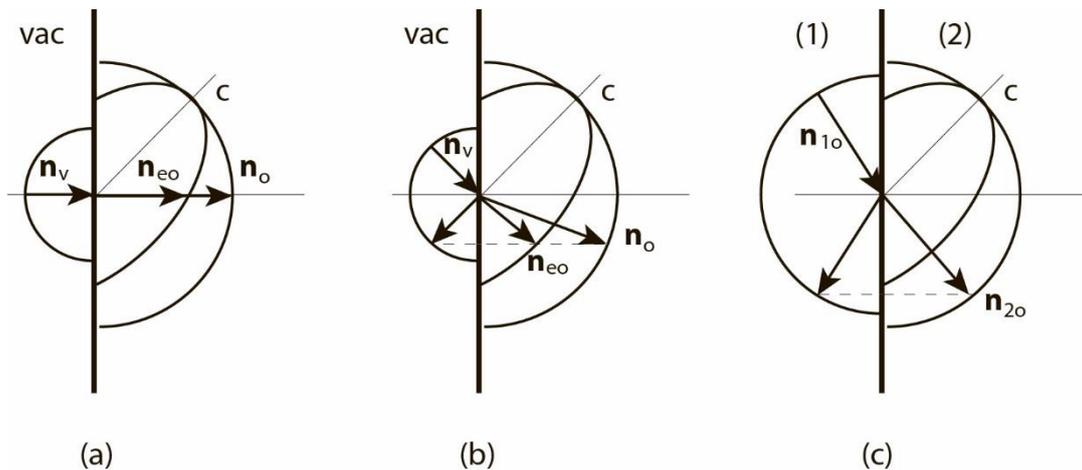


Рис. 4.7. Геометрические построения направлений волновых векторов о- и ео- лучей через границу кристалла. Главная плоскость и плоскость падения луча совпадают.

Отметим еще раз, что на рис. 4.7 сделаны построения для векторных показателей преломления или, что тоже самое, для волновых векторов, а не для лучей. Лучи направлены вдоль вектора Пойнтинга, см. рис. 4.1. Поэтому направление ео-луча в общем случае не совпадает с направлением волнового вектора. Для построения световых лучей при переходе через границу кристалла делают так называемые построения Гюйгенса.

В следующем разделе будет показано, как ориентирован вектор Пойнтинга по отношению к поверхности волновых векторов в кристалле.

4.5. Вектор Пойнтинга световой волны в кристалле

Докажем в общем случае двуосного кристалла, что вектор Пойнтинга направлен по нормали к поверхности волновых векторов. Поверхность определяется так, что на ней лежит конец вектора \mathbf{n} . Величина \mathbf{n} и направления \mathbf{E} и \mathbf{B} определяются уравнениями Максвелла (4.1.5a,b):

$$\begin{cases} \mathbf{D} = [\mathbf{B}, \mathbf{n}], \\ \mathbf{B} = [\mathbf{n}, \mathbf{E}]. \end{cases} \quad (4.5.1)$$

Возьмем малые приращения векторов \mathbf{n} , \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{D} так, чтобы уравнения Максвелла сохранились при этих приращениях. Очевидно, что при этом вектор $\delta\mathbf{n}$ будет находиться на поверхности волновых векторов. Таким образом, $\delta\mathbf{n} \parallel \boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ - орт касательной к поверхности волновых векторов.

Получаем уравнения, связывающие приращения векторов $\delta\mathbf{n}$, $\delta\mathbf{D}$, $\delta\mathbf{B}$ и $\delta\mathbf{E}$, которые умножим скалярно на вектора \mathbf{E} и \mathbf{B} так, как это показано ниже:

$$\begin{cases} \delta\mathbf{D} = [\delta\mathbf{B}, \mathbf{n}] + [\mathbf{B}, \delta\mathbf{n}] \\ \delta\mathbf{B} = [\delta\mathbf{n}, \mathbf{E}] + [\mathbf{n}, \delta\mathbf{E}] \end{cases} \begin{cases} \cdot \mathbf{E} \\ \cdot \mathbf{B} \end{cases} \quad (4.5.2)$$

Используя свойство смешанного произведения векторов, получаем:

$$\begin{cases} (\mathbf{E}, \delta\mathbf{D}) = (\delta\mathbf{B}, [\mathbf{n}, \mathbf{E}]) + ([\mathbf{E}, \mathbf{B}], \delta\mathbf{n}) \\ (\mathbf{B}, \delta\mathbf{B}) = (\delta\mathbf{n}, [\mathbf{E}, \mathbf{B}]) + ([\mathbf{B}, \mathbf{n}], \delta\mathbf{E}) \end{cases} \quad (4.5.3)$$

Сложив правые и левые части уравнений (4.5.3), приходим к следующему соотношению:

$$\begin{cases} (\mathbf{E}, \delta\mathbf{D}) = (\delta\mathbf{B}, \mathbf{B}) + ([\mathbf{E}, \mathbf{B}], \delta\mathbf{n}) \\ + \\ (\mathbf{B}, \delta\mathbf{B}) = (\delta\mathbf{n}, [\mathbf{E}, \mathbf{B}]) + (\mathbf{D}, \delta\mathbf{E}) \end{cases} \Rightarrow (\mathbf{E}, \delta\mathbf{D}) - (\mathbf{D}, \delta\mathbf{E}) = 2([\mathbf{E}, \mathbf{B}], \delta\mathbf{n}). \quad (4.5.4)$$

Запишем левую часть уравнения (4.5.4) в явном виде:

$$(\mathbf{E}, \delta\mathbf{D}) - (\mathbf{D}, \delta\mathbf{E}) = \sum_{i,k} \{E_i \varepsilon_{ik} \delta E_k - \varepsilon_{ki} E_k \delta E_i\} = \sum_{i,k} \{E_i \delta E_k (\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ki})\} = 0. \quad (4.5.5)$$

Здесь мы воспользовались свойством симметричности тензора диэлектрической проницаемости.

Отсюда получаем

$$2([\mathbf{E}, \mathbf{B}], \delta\mathbf{n}) = 0. \quad (4.5.6)$$

Поскольку вектор Пойнтинга $\boldsymbol{\gamma} \sim [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ и в отсутствие намагнитченности $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, следствием уравнения (4.5.6) является равенство:

$$(\boldsymbol{\gamma}, \delta \mathbf{n}) = 0, \quad (4.5.7)$$

откуда вытекает, что $\boldsymbol{\gamma} \perp \delta \mathbf{n}$, т.е. направление распространения энергии, а, значит, и направление видимого луча, всегда совпадает с направлением нормали к поверхности волновых векторов.

Можно доказать и обратное утверждение: направление волнового вектора (показателя преломления) совпадает с направлением нормали к лучевой поверхности. Лучевая поверхность – это поверхность, образованная концами лучевых скоростей.

4.6. Оптическая индикатриса и построение Френеля

Рассмотрим построение Френеля для определения направлений поляризаций собственных волн в общем случае двухосного кристалла.

Наиболее удобно для этой цели геометрическое построение, использующее *оптическую индикатрису*. Оптическая индикатриса (указательная поверхность) иначе называется эллипсоидом Френеля. Она строится в пространстве, где по осям кроме x, y, z откладываются также проекции приведенного вектора индукции \mathbf{d} : $(\mathbf{d} \parallel \mathbf{D})$, по величине \mathbf{d} нормируется как $d^2 = n^2$.

Тогда эллипсоид Френеля будет иметь вид:

$$\frac{d_1^2}{\varepsilon_1} + \frac{d_2^2}{\varepsilon_2} + \frac{d_3^2}{\varepsilon_3} = 1. \quad (4.6.1)$$

Здесь мы перешли в систему координат, собственную для $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

Для определения направлений поляризации и показателей преломления двух волн согласно построению Френеля

1) проводим направление \mathbf{n} (орт \mathbf{c}), $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, от центра эллипсоида Френеля;

2) через центр эллипсоида Френеля проводим плоскость, перпендикулярную \mathbf{c} ;

3) в сечении эллипсоида Френеля этой плоскостью появится эллипс, полуоси которого численно равны показателям преломления 2-х волн, а направление этих полуосей будут давать направления поляризации вектора \mathbf{D} .

Если в сечении получился круг, то это значит, что направление нормали к плоскости сечения совпадает с направлением оптической оси. Если волна распространяется вдоль оптической оси, то кристалл ведет себя как изотропное тело. Это означает, что имеется всего лишь одно значение показателя преломления, а любая поляризация, перпендикулярная оптической оси, является возможной.

Рассмотрим кристалл, мало отличающийся от одноосного.

Начнем с одноосного кристалла. Оптическая индикатриса здесь - эллипсоид вращения. Во всех плоскостях, перпендикулярных к оптической оси \mathbf{c}_0 - круги. Слегка деформируем кристалл так, что его оптическая индикатриса сжимается. Круги перейдут в эллипсы. Круг в срединной плоскости переходит в эллипс с полуосями a_1 и a_2 , где $a_1 < a_2 = a_0$ (ранее $a_1 = a_2 = a_0$). Видно, что если теперь начать поворачивать плоскости вокруг оси l , лежащей для определенности в срединной плоскости и проходящей через центр эллипсоида, то у срединного эллипса $a_2 = \text{const}$, а полуось a_1 начнет расти и может достичь ситуации, когда $a_1 = a_2 = a_0$. Такое положение возникнет дважды (в зависимости направления вращения), т.е. после сдавливания возник двухосный кристалл с осями \mathbf{c}_1 и \mathbf{c}'_1 .

Стоит особо подчеркнуть (здесь это видно), что оптические оси необязательно совпадают по направлению с кристаллографическими.

Докажем справедливость описанного выше построения Френеля. Запишем уравнения Максвелла для приведенного вектора индукции \mathbf{d} .

$$\begin{cases} D_i = \varepsilon_i E_i, \\ E_i n^2 - n_i(\mathbf{n}, \mathbf{E}) = D_i, \end{cases} \quad (4.6.2)$$

где i - собственные оси тензора $\hat{\varepsilon}$.

Следовательно,

$$D_i \frac{n^2}{\varepsilon_i} - n_i \sum_k \frac{n_k D_k}{\varepsilon_k} = D_i. \quad (4.6.3)$$

Но $d^2 = n^2$, тогда

$$D_i \frac{d^2}{\varepsilon_i} - d^2 c_i \sum_k \frac{c_k D_k}{\varepsilon_k} = D_i. \quad (4.6.4)$$

В то же время $D_i = A d_i$. С учетом этого получаем:

$$\begin{aligned} A d_i \frac{d^2}{\varepsilon_i} - d^2 c_i \sum_k \frac{c_k A d_k}{\varepsilon_k} &= A d_i \Rightarrow \\ d_i \left(\frac{d^2}{\varepsilon_i} - 1 \right) - c_i d^2 \sum_k \frac{c_k d_k}{\varepsilon_k} &= 0. \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

Уравнение эллипсоида Френеля имеет вид $\sum_k \frac{d_k^2}{\varepsilon_k} = 1$, см. ф. (4.6.1).

Кроме того, есть следующее соотношение:

$$d^2 = \sum_k d_k^2 \quad (4.6.6)$$

В построении Френеля требуется найти экстремумы этой величины при

наличии дополнительного условия:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{D}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{c}, \mathbf{D}) = 0 \Rightarrow \sum_k c_k d_k = 0. \quad (4.6.7)$$

Для определения экстремумов функции (4.6.6) при условиях (4.6.1) и (4.6.7) составим функционал Лагранжа:

$$F = \sum_k d_k^2 + 2\lambda \sum_k c_k d_k + \rho \sum_k \frac{d_k^2}{\varepsilon_k}, \quad (4.6.8)$$

где λ и ρ - параметры Лагранжа.

Нам необходимо найти, при каких d_i выполняется равенство

$$\frac{\partial F}{\partial d_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.6.9)$$

После дифференцирования, получаем

$$d_i + \lambda c_i + \rho \frac{d_i}{\varepsilon_i} = 0. \quad (4.6.10)$$

Умножим это уравнение на d_i , просуммируем и найдем ρ :

$$\sum_i d_i^2 + \lambda \underbrace{\sum_i c_i d_i}_0 + \rho \underbrace{\sum_i \frac{d_i^2}{\varepsilon_i}}_1 = 0 \Rightarrow \rho = -\sum_i d_i^2 = -d^2. \quad (4.6.11)$$

Если же умножить уравнение (4.6.10) на c_i и просуммировать, то с учетом значения ρ , получим:

$$\underbrace{\sum_i c_i d_i}_0 + \lambda \underbrace{\sum_i c_i^2}_1 + \rho \sum_i \frac{c_i d_i}{\varepsilon_i} = 0 \Rightarrow \lambda = -\rho \sum_i \frac{c_i d_i}{\varepsilon_i} = d^2 \sum_i \frac{c_i d_i}{\varepsilon_i}. \quad (4.6.12)$$

Подставим λ и ρ в исходное уравнение (4.6.10) и получим соотношение, которому подчиняются d_i :

$$d_i \left(\frac{d^2}{\varepsilon_i} - 1 \right) - c_i d^2 \sum_k \frac{c_k d_k}{\varepsilon_k} = 0. \quad (4.6.13)$$

Уравнение (4.6.13) совпало с уравнением (4.6.5). Это означает, что условия экстремума, из которых по методу Френеля следует находить направления поляризации вектора \mathbf{D} , совпадают с уравнениями Максвелла, что и доказывает справедливость построений Френеля.

В качестве примера предлагаем самостоятельно проанализировать построение Френеля при прохождении света через пластинки $\lambda/2$ и $\lambda/4$. Пластинки вырезаны из кристаллов параллельно оптической оси, т.е.

оптическая ось лежит в плоскости поверхности кристалла.

4.7. Математическое описание опыта Бартолина

Дадим теперь описание опыта Бартолина, изображенного на рис. 4.2.

Пусть x, y, z - оси расположения кристалла в полупространстве; 1, 2, 3 – внутренние оси, собственные для $\hat{\epsilon}$ (рис. 4.8). Пусть α - угол между осью z и осью c , совпадающей с осью 3. Плоскость, образованная осями 1 и 3, совпадает с плоскостью xOz (рис. 4.8).

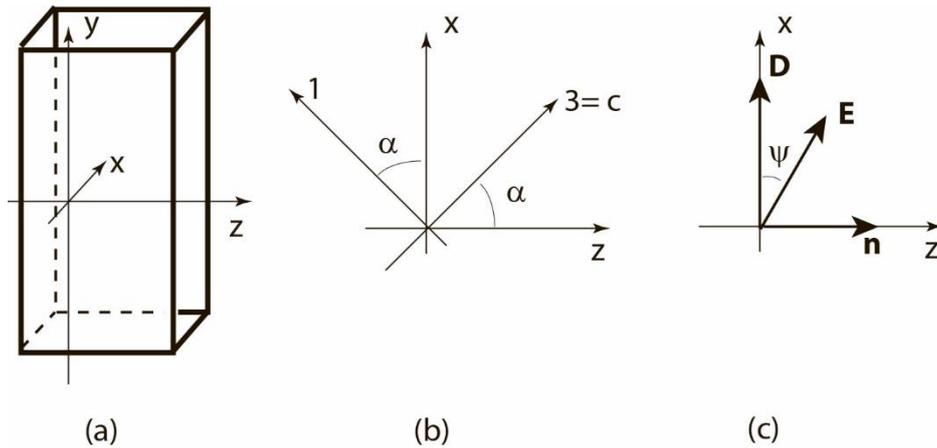


Рис. 4.8. Геометрическая схема опыта Бартолина.

Очевидно, что в одноосном кристалле направление о-луча (вектора Пойнтинга) совпадает с направлением \mathbf{n} , а его вектор \mathbf{D} совпадает по направлению с вектором \mathbf{E} . У ео-луча вектор \mathbf{E} повернут относительно \mathbf{D} на угол ψ (рис. 4.8). Чем больше угол ψ , тем больше расходятся о- и ео-лучи.

Найдем такие параметры эксперимента, при которых расхождение ео- и о-лучей наибольшее.

Рассмотри ео-луч и его вектор \mathbf{E}

$$\begin{cases} E_x = E \cos \psi, \\ E_z = E \sin \psi, \\ E_y = 0. \end{cases} \quad (4.7.1)$$

Согласно рис. 4.8b, для произвольного вектора \mathbf{A} можно записать:

$$\begin{cases} A_x = A_1 \cos \alpha + A_3 \sin \alpha, \\ A_z = -A_1 \sin \alpha + A_3 \cos \alpha. \end{cases} \quad (4.7.2)$$

Отсюда

$$D_z = -D_1 \sin \alpha + D_3 \cos \alpha = 0 \Rightarrow D_3 = tD_1, \quad (4.7.3a)$$

где $t = \tan \alpha$.

$$E_z = E_3 \cos \alpha - E_1 \sin \alpha \Rightarrow E_z = \frac{D_3}{\varepsilon_3} \cos \alpha - \frac{D_1}{\varepsilon_1} \sin \alpha \Rightarrow$$

$$E_z = \frac{D_1}{\varepsilon_3} t \cos \alpha - \frac{D_1}{\varepsilon_1} \sin \alpha \Rightarrow E_z = D_1 \sin \alpha \left(\frac{1}{\varepsilon_3} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \Rightarrow$$

$$E_z = D_1 \sin \alpha \left(\frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} - \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \right), \quad (4.7.3b)$$

$$E_x = E_1 \cos \alpha + E_3 \sin \alpha \Rightarrow E_x = \frac{D_1}{\varepsilon_1} \cos \alpha + \frac{D_1 t}{\varepsilon_3} \sin \alpha \Rightarrow E_x = D_1 \cos \alpha \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{t^2}{\varepsilon_3} \right)$$

$$\Rightarrow$$

$$E_x = D_1 \cos \alpha \left(\frac{1}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{t^2}{\varepsilon_{\parallel}} \right). \quad (4.7.3c)$$

Согласно ф. (4.7.1), $E_z/E_x = \tan \psi$. следовательно,

$$\tan \psi = t \frac{\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\parallel} + t^2 \varepsilon_{\perp}}. \quad (4.7.4)$$

Найдем экстремум этого выражения:

$$\frac{d}{dt}(\tan \psi) = 0 \Rightarrow (\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}) \left[\frac{1}{\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp} t^2} - \frac{2t^2 \varepsilon_{\perp}}{(\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp} t^2)^2} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}) \left[\frac{\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp} t^2 - 2t^2 \varepsilon_{\perp}}{(\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp} t^2)^2} \right] = 0 \Rightarrow \varepsilon_{\parallel} - t^2 \varepsilon_{\perp} = 0 \Rightarrow$$

$$t^2 = \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} \approx 1 \Rightarrow \alpha \approx 45^\circ. \quad (4.7.5)$$

Это угол, под которым эффект проявляется наиболее ярко.

При этом

$$\tan \psi_{\max} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} \frac{\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp}} = \frac{\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}}{2\sqrt{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}}}. \quad (4.7.6)$$

Известно, что $n_o^2 = \varepsilon_{\perp}$ и $n_{eo}^2 = \varepsilon_{\parallel}$, тогда

$$\tan \psi_{\max} = \frac{(n_o - n_{eo})(n_o + n_{eo})}{2\sqrt{n_o^2 n_{eo}^2}} = (n_o - n_{eo}) \frac{(n_o + n_{eo})}{2n_o n_{eo}}. \quad (4.7.7)$$

В нашем случае $n_o \approx n_{eo} = n$ и, окончательно, получаем

$$\tan \psi_{\max} = \frac{\Delta n}{n}, \quad (4.7.8)$$

где $\Delta n = n_o - n_{e_o}$. Вообще говоря, видно, что угол ψ всегда мал.

4.8. Искусственная анизотропия

Линейный электрооптический эффект (эффект Погкельса).
Линейный электрооптический эффект (ЛЭО) основан на связи тензора диэлектрической проницаемости с внешним электростатическим полем \mathbf{E}^0 по линейному закону:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ik} &= \varepsilon_{ik}^{(0)} + \Delta\varepsilon_{ik}(\mathbf{E}), \\ \Delta\varepsilon_{ik} &= \sum_{\ell} \gamma_{ik\ell} E_{\ell},\end{aligned}\tag{4.8.1}$$

где $\gamma_{ik\ell}$ - тензор ЛЭО эффекта.

Линейный электрооптический эффект наблюдается на кристаллах KDP (дигидрофосфат калия), DKDP (дейтерированный дигидрофосфат калия), LiNbO₃ (ниобат лития) и др., см. таблицу. Они все имеют группу симметрии С₄. Все эти кристаллы лишены центра инверсии, поэтому имеет место внутренняя асимметрия.

В отсутствие внешнего электрического поля уравнение оптической индикатрисы будет следующим:

$$\frac{d_1^2 + d_2^2}{\varepsilon_1} + \frac{d_3^2}{\varepsilon_3} = 1.\tag{4.8.2}$$

Таблица. Напряжения $V_{\lambda/2}$ для кристаллов с ЛЭО эффектом.

Кристалл	Формула	$V_{\lambda/2}$, kV
KDP (дигидрофосфат калия)	K ₂ H ₃ PO ₄	7.5
DKDP (дейтерированный дигидрофосфат калия)	K ₂ D ₃ PO ₄	4
ниобат лития	LiNbO ₃	2.3
титанат бария (кристаллы очень маленькие)	BaTiO ₃	0.5
арсенид галлия	GaAs	91
теллурид кадмия	CdTe	44

Без поля оптическая индикатриса в центральном сечении – окружность. При приложении напряжения V она становится эллипсом (индикатриса перестает быть эллипсоидом вращения), т.е. появляется дополнительная анизотропия свойств.

Наибольшая деформация оптической индикатрисы происходит при приложении поля вдоль c (кристалл как бы становится двухосным).

Основное применение данного эффекта – возможность создания пластинки $\lambda/2$. В таблице приведены значения напряжений $V_{\lambda/2}$ для различных кристаллов на длине волны видимого света.

Квадратичный электрооптический эффект (эффект Керра). В этом случае тензор диэлектрической проницаемости связан с внешним электростатическим полем $\mathbf{E}^{(0)}$ по закону:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ik} &= \varepsilon_{ik}^{(0)} + \Delta\varepsilon_{ik}(\mathbf{E}), \\ \Delta\varepsilon_{ik} &= \sum_{i',k'} \lambda_{iki'k'} E_{i'} E_{k'}.\end{aligned}\quad (4.8.3)$$

Ограничимся случаем изотропной среды (например, жидкости) во внешнем поле $\mathbf{E} = \text{const}$.

При приложении поля жидкость в кювете становится подобной одноосному кристаллу, оптическая ось которого направлена вдоль электрического поля:

$$\begin{cases} \varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_0 + \alpha E^2, \\ \varepsilon_{\perp} = \varepsilon_0, \end{cases}\quad (4.8.4)$$

где α - коэффициент Керра, ε_0 - диэлектрическая проницаемость жидкости в отсутствии поля. У нитробензола и глицерина эффект Керра проявляется заметно, для них - $\alpha = \alpha_{\text{max}}$.

Диэлектрическую проницаемость, приобретенную жидкостью при помещении ее в электростатическое поле, можно представить в тензорном виде:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0 + \alpha E_i E_k. \quad (4.8.5)$$

При некотором поле $\mathbf{E}_{\lambda/2}$ произойдет полный поворот плоскости поляризации света на 90° .

Фотоупругость. Этот эффект состоит в появлении оптической анизотропии в изотропном упругом прозрачном теле при деформации. Практический пример – полистирол (оргстекло) под нагрузкой. Диэлектрическая проницаемость при появлении тензора деформации u_{ik} приобретает вид

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0 + \beta u_{ik}. \quad (4.8.6)$$

Тело становится двулучепреломляемой оптической средой.

Линейный магнитооптический эффект (эффект Фарадея). Тензор диэлектрической проницаемости связан с внешним магнитостатическим полем $\mathbf{B}^{(0)}$ по закону:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^{(0)} + \Delta\varepsilon_{ik}(\mathbf{B}),$$

$$\Delta\varepsilon_{ik} = \sum_{\ell} \beta_{ik\ell} B_{\ell} \quad (4.8.7)$$

Эффект Фарадея состоит во вращении плоскости поляризации света в веществе в магнитном поле. *Ячейка* Фарадея – это катушка индуктивности с диэлектриком внутри.

Эффект Фарадея отличается от прохождения света через одноосный кристалл тем, что на выходе *ячейки* Фарадея всегда будет линейно поляризованный свет, тогда как на выходе кристалла (пластинки) свет с линейной поляризацией на входе превращается в свет с эллиптической поляризацией на выходе.

Основные особенности эффекта Фарадея.

1. Плоскость поляризации поворачивается в одну и ту же сторону вне зависимости от того, куда распространяется свет. Направление поворота плоскости поляризации задается направлением электрического тока в катушке. В силу этого свет, прошедший катушку, после отражения от зеркала и повторного прохождения катушки будет иметь не старую поляризацию, а поляризацию под углом 2φ к первоначальной.

2. Следствием первого свойства является возможность создания невзаимного элемента, способного пропускать свет в одну сторону, например, слева направо и не пропускать его справа налево. Для его создания нужно иметь ячейку Фарадея, поворачивающую плоскость на 45° , и два поляризатора - входной и выходной.

Контрольные вопросы к Главе 4

1. Запишите уравнения Максвелла для кристаллического диэлектрика и найдите уравнение связи между векторами показателя преломления, электрического поля и смещения. Определите правую тройку векторов для кристалла.
2. Что такое тензор диэлектрической проницаемости, Опишите его свойства и выведите закон дисперсии для изотропного диэлектрика.
3. Выведите уравнение Френеля для показателя преломления и проанализируйте характерные частные формы этого уравнения.
4. Выведите уравнения Френеля для фазовой и лучевой скоростей.
5. Дайте определение обыкновенной и необыкновенной световой волне в кристалле и определите их поляризации.
6. Приведите доказательство со-направленности вектора Пойнтинга и нормали к поверхности волновых векторов.

7. Докажите справедливость построения Френеля с помощью оптической индикатрисы для двухосного кристалла.

8. Что такое искусственная анизотропия? Назовите и опишите эффекты Поггеля, Керра, Фарадея и фотоупругость.

Приложение 1. Единицы измерения физических величин в гауссовой системе и в СИ

Таблица 1. Основные единицы измерения механических величин

	СГС	СИ	Соотношение единиц
длина, x	сантиметр (см, cm)	метр (м, m)	$1 \text{ м} = 10^2 \text{ см}$
масса, m	грамм (г, g)	килограмм (кг, kg)	$1 \text{ кг} = 10^3 \text{ г}$
время, t	секунда (сек, s)	секунда (сек, s)	

Таблица 2. Производные единицы измерения механических величин

	Размерность	СГС	СИ	Соотношение единиц
сила, F	$x m t^{-2}$	дина (дин, dyn)	ньютон (Н, N)	$1 \text{ Н} = 10^5 \text{ дин}$
работа, A	$x^2 m t^{-2}$	эрг (эрг, erg)	джоуль (Дж, J)	$1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрг}$
мощность	$x^2 m t^{-3}$	эрг/сек	ватт (Вт, W)	$1 \text{ Вт} = 10^7 \text{ эрг/сек}$

Таблица 3. Единицы измерения электрических и магнитных величин

	Гауссова система		СИ		Соотношение единиц
	Размерность	Наименование	Размерность	Наименование	
ток, J	$x^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}$	-	I^*	ампер (А, A)	$1 \text{ А} = \frac{c}{10} \text{ СГС}_J^{**}$
заряд, q	$x^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$	статкулон (statC)	$t I$	кулон (Кл, C)	$1 \text{ Кл} = \frac{c}{10} \text{ СГС}_q$
разность потенциалов, V	$x^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$	-	$x^2 m t^{-3} I^1$	вольт (В, V)	$1 \text{ В} = \frac{10^8}{c} \text{ СГС}_V$ $\approx \frac{1}{300} \text{ СГС}_V$
напряженность электрического поля, E	$x^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$	-	$x m t^{-3} I^1$	вольт на метр (В/м, V/m)	$1 \text{ В/м} = \frac{10^6}{c} \text{ СГС}_E$ $\approx \frac{1}{3 \cdot 10^4} \text{ СГС}_E$
электрическое смещение, D	$x^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$	-	$x^{-2} t I$	кулон на квадратный метр (Кл/м ² , C/m ²)	$1 \text{ Кл/м}^2 = \frac{10^5}{4\pi c} \text{ СГС}_D$ $\approx \frac{1}{4\pi \cdot 3 \cdot 10^5} \text{ СГС}_D$
электрическая емкость, C	x	сантиметр (см, cm)	$x^{-2} m^{-1} t^4 I^2$	фарад (Ф, F)	$1 \text{ Ф} = \frac{c^2}{10^9} \text{ см}$
электрическое сопротивление, R	$x^{-1} t$	-		ом (Ом, Ω)	$1 \text{ Ом} = \frac{10^9}{c^2} \text{ СГС}_R$

напряженность магнитного поля, H	$x^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$	эрстед (Э, Oe)	$x^{-1} I$	ампер на метр (А/м, А/м)	$1 \text{ A/м} = \frac{10^6}{c} \text{ CGSE} \approx \frac{1}{3 \cdot 10^4} \text{ CGSE}$
магнитная индукция, B	$x^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$	гаусс (Гс, Gs)	$m t^{-2} I^1$	тесла (Тл, Т)	1 Тл = 10^4 Гс
индуктивность, L	x	сантиметр (см, cm)	$x^2 m t^{-2} I^{-2}$	генри (Гн, H)	1 Гн = 10^9 см
поток магнитной индукции или магнитный поток, Φ	$x^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$	максвелл (Мкс, Mx)	$x^2 m t^{-2} I^1$	вебер (Вб, Wb)	1 Вб = 10^8 Мкс

* Ампер - одна из основных единиц измерения в системе СИ.

** Электродинамическая постоянная c , входящая в эти соотношения в безразмерном виде $c \approx 3 \cdot 10^{10}$, имеет размерность см/сек.

Приложение 2. Математический аппарат классической электродинамики

П.2.1. Биномиальные разложения и ряды

1. Бином Ньютона

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{n!}{(n-r)!r!}x^r + \dots + x^n = \sum_{r=0}^n C_n^r x^r,$$

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + (-1)^r \frac{n!}{(n-r)!r!}x^r + \dots + x^n = \sum_{r=0}^n (-1)^r C_n^r x^r,$$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n!}{(n-r)!r!}a^{n-r}b^r + \dots + b^n = \sum_{r=0}^n C_n^r a^{n-r}b^r.$$

Здесь $0! = 1$, n - целые положительные числа, а биномиальные коэффициенты C_n^r определены соотношением:

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (r = 0, 1, 2, \dots \leq n = 0, 1, 2, \dots).$$

2. Локальная формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0.$$

3. Локальный ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

Основные разложения, следующие из формулы Маклорена

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0;$$

биномиальный ряд и его частные случаи:

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0,$$

$$(1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 \pm \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots, \quad (x^2 \leq 1),$$

$$(1 \pm x)^{3/2} = 1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots, \quad (x^2 \leq 1),$$

$$(1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots, \quad (x^2 < 1),$$

$$(1 \pm x)^{-3/2} = 1 \mp \frac{3}{2}x + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots, \quad (x^2 < 1),$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 \mp \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \dots + (\mp 1)^r \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!} + \dots \quad (x^2 < 1),$$

$$(1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \dots, \quad (x^2 < 1),$$

$$(1 \pm x)^{-2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \dots, \quad (x^2 < 1).$$

П.2.2. Элементы векторной алгебры и анализа

Вектор в 3D пространстве – это совокупность трех величин v_1, v_2, v_3 , которые преобразуются при поворотах системы координат по правилу:

$$v'_\alpha = \alpha_{\alpha\beta} v_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

где $\alpha_{\alpha\beta}$ - матрица поворота и полагается суммирование по повторяющемуся индексу.

Матрица поворота $\alpha_{\alpha\beta}$ образована из косинусов углов между направлением осей штрихованной и нештрихованной координатных систем:

$$\alpha_{\alpha\beta} = \mathbf{e}'_{\alpha} \cdot \mathbf{e}_{\beta},$$

где \mathbf{e}'_{α} и \mathbf{e}_{β} - орты соответствующих координатных систем; $\mathbf{e}'_{\alpha} \cdot \mathbf{e}_{\beta}$ - скалярное произведение ортов (см. ниже).

Свойства матрицы поворота $\alpha_{\alpha\beta}$

1) ортогональность

$$\alpha_{\alpha\mu} \alpha_{\beta\mu} = \delta_{\alpha\beta} \text{ и } \alpha_{\alpha\mu} \alpha_{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu},$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ - символ Кронекера, $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta; \\ 0, & \alpha \neq \beta; \end{cases}$

2)

$$\det \alpha = 1;$$

3) некоммутативность

$$\alpha \mathbf{g} \neq \mathbf{g} \alpha.$$

Через компоненты v_1, v_2, v_3 вектор имеет следующую запись:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i \text{ или } \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i.$$

Вектора, компоненты которых меняют знак при инверсии координатных осей $x'_{\alpha} = -x_{\alpha}$, называются *полярными или истинными*, а вектора, компоненты которых не меняют знак при инверсии, называются *аксиальными или псевдовекторами*.

Примеры псевдовекторов: угол поворота (с привязкой к оси поворота), угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$, напряженность магнитного поля \mathbf{H} , момент силы, момент количества движения, дипольный магнитный момент \mathbf{m} .

Псевдоскаляр — величина, не изменяющаяся при переносе и повороте координатных осей, но изменяющая свой знак при замене направления одной оси на противоположное. Пример псевдоскаляра - объем V .

Скалярное произведение векторов

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{ab}) = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_i b_i,$$

где \mathbf{ab} - угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Векторное произведение векторов

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \equiv \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3,$$

или в компактной записи

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \sum_{i,j,k=1}^3 e_{ijk} \mathbf{e}_i a_j b_k,$$

где e_{ijk} - абсолютный антисимметричный тензор Леви-Чивита. Компоненты этого псевдотензора определены соотношениями:

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1, \quad e_{132} = e_{213} = e_{321} = -1,$$

все остальные $e_{ijk} = 0$.

Модуль векторного произведения есть

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\angle \mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Свойство двойного векторного произведения (правило «бац минус цаб»)

$$[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] = [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Свойство смешанного произведения векторов

$$(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = (\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]) = -(\mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]) = -(\mathbf{a}, [\mathbf{c}, \mathbf{b}]) = -(\mathbf{c}, [\mathbf{b}, \mathbf{a}]).$$

Соотношения между полярными и аксиальными векторами

$$\mathbf{c}^* = [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \quad \mathbf{c} = [\mathbf{a}^*, \mathbf{b}], \quad \mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}^*], \quad \mathbf{c}^* = [\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*],$$

$$f = (\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad f^* = (\mathbf{a}, \mathbf{b}^*),$$

$$h^* = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]), \quad h = (\mathbf{a}^*, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]),$$

где псевдовектора и псевдоскаляры обозначены звездочками.

Дифференциальные операторы в декартовых координатах (x, y, z)

Оператор Гамильтона набла ∇

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Градиент скалярного поля $\text{grad } f$

$$\text{grad } f \equiv \nabla f = \mathbf{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Дивергенция векторного поля $\text{div } \mathbf{a}$

$$\text{div } \mathbf{a} \equiv \nabla \cdot \mathbf{a} \equiv (\nabla, \mathbf{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Ротор векторного поля rota

$$\text{rota} \equiv \nabla \times \mathbf{a} \equiv [\nabla, \mathbf{a}] =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z.$$

Оператор Лапласа или *лапласиан* Δ

$$\Delta \equiv \text{div } \nabla \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Лапласиан функции Δf

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Теоремы многомерного анализа

Теорема о градиенте

$$\varphi(q) - \varphi(p) = \int_L \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r},$$

где p и q - граничные точки кривой.

Теорема Грина

$$\oint_C Ldx + Mdy = \iint_D \left(\frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy} \right) dA,$$

где C – замкнутый плоский контур; D - область, ограниченная контуром C .

Теорема Стокса

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

где S - поверхность, ∂S - граница поверхности.

Теорема Остроградского — Гаусса

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} d^3\mathbf{r} = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

где V - объём, ∂V - поверхность, ограничивающая объём.

Свойства дифференциальных операторов

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi,$$

$$\operatorname{div}(g \mathbf{a}) = g \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \nabla g),$$

$$\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b}),$$

$$\operatorname{rot}(g \mathbf{a}) = g \operatorname{rot} \mathbf{a} - [\mathbf{a}, \nabla g],$$

$$\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{b}, \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{b},$$

$$\operatorname{rot} \nabla f = 0,$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}.$$

Дифференциальные соотношения между полярными и аксиальными векторами

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{b}^*, \quad \operatorname{rot} \mathbf{a}^* = \mathbf{b};$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \psi, \quad \operatorname{div} \mathbf{b}^* = \varphi^*,$$

где псевдовектора и псевдоскаляры обозначены звездочками.

П.2.3. Системы координат

Декартова система координат (x, y, z) . Правая декартова система координат показана на рис. П.2.3.1

Орты этой системы обозначаются как $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$.

Область определения декартовых координат: $-\infty < x < \infty$; $-\infty < y < \infty$; $-\infty < z < \infty$.

Элемент объема: $dV = dx dy dz$.

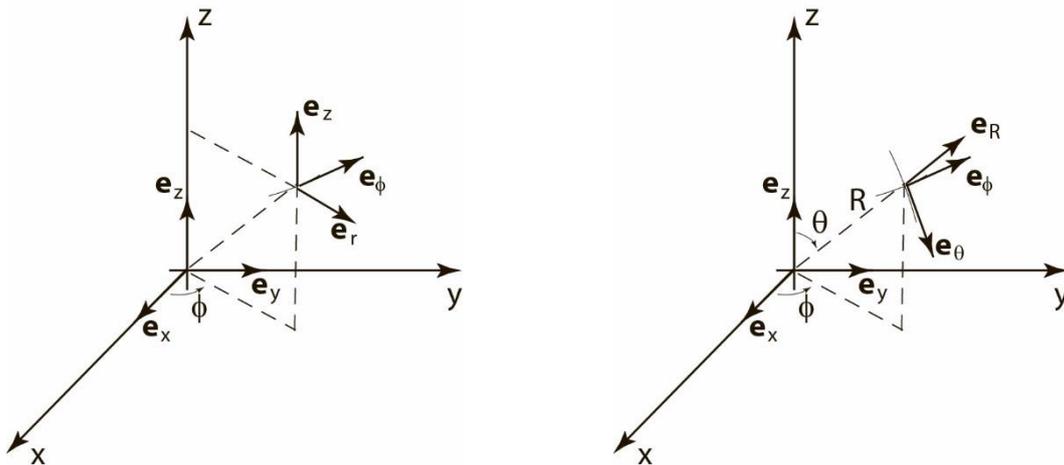


Рис. П.2.3.1. Декартова (x, y, z) , цилиндрическая (r, φ, z) и сферическая (R, θ, φ) системы координат.

В зависимости от геометрии задачи часто вместо декартовых координат (x, y, z) удобно использовать *криволинейные* системы координат, такие как цилиндрическая и сферическая. Ниже приведены основные характеристики цилиндрической и сферической систем, а также связи этих координатных систем с декартовой.

Цилиндрическая система координат (r, φ, z) (рис. П.2.3.1). Помимо (r, φ, z) используется обозначение (ρ, φ, z) .

Область определения цилиндрических координат: $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

Соотношения между цилиндрическими и декартовыми координатами:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(x/y); \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Элемент объема: $dV = r dr d\varphi dz$.

Сферическая система координат (R, θ, φ) . Помимо (R, θ, φ) используется обозначение (r, θ, φ) .

Область определения сферических координат: $0 \leq R < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Соотношения между сферическими и декартовыми координатами:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arccos(z/R) \quad \varphi = \arctan(x/y);$$

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta.$$

Элемент объема: $dV = R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi$.

Таблица П.2.3.1. Градиент, дивергенция, ротор и лапласиан в цилиндрической и сферической системах координат.

Цилиндрические координаты (r, φ, z)	Сферические координаты (R, θ, φ)
$\nabla f = \mathbf{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}$	$\nabla f = \mathbf{e}_R \frac{\partial f}{\partial R} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$
$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$	$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \cdot \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial R} (R^2 a_R) + R \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\theta) + R \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right]$
$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_r & r a_\varphi & a_z \end{vmatrix}$	$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{e}_R & R\mathbf{e}_\theta & R \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_R & R a_\theta & R \sin \theta a_\varphi \end{vmatrix}$
$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\nabla^2 f = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \cdot \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial f}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right]$

П. 2.4. Обобщенные функции

Во многих задачах на вычисление поля от источников используется дельта-функция Дирака $\delta(x)$ и связанные с ней всевозможные обобщенные функции, например, функция Хевисайда (функция «скачка»)

$$\theta(x) \equiv H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

По определению дельта-функция Дирака $\delta(x)$ - это функционал, который определяется равенством:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0),$$

где $\varphi(x)$ - пробная функция. Если $x_0 = 0$, то $\varphi(x_0) = \varphi(0)$.

Используется следующая форма записи функционала:

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0).$$

Аналогично представлению дельта-функции, как функционала, с другими обобщенными функциями также связывают функционалы.

Например, функционал, связанный с функцией Хевисайда, имеет вид:

$$(H, \varphi) = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx.$$

Действия над обобщенными функциями f , f_1 и f_2

1) сложение

$$(f_1 + f_2, \varphi) = (f_1, \varphi) + (f_2, \varphi),$$

2) умножение на число

$$(\gamma f, \varphi) = (f, \gamma \varphi),$$

3) умножение на функцию h , возможно, обобщённую,

$$(hf, \varphi) = (f, h\varphi).$$

Действие 3) имеет интересное следствие:

$$(h\delta, \varphi) = (\delta, h\varphi) = h(0)\varphi(0) \Rightarrow h\delta = h(0)\delta,$$

отсюда, $x\delta = 0$ и $e^x\delta = \cos x \delta = \delta$.

4) изменение порядка дифференцирования

$$(f', \varphi) = (f, -\varphi').$$

Последнее соотношение приводит к известным формулам:

$$(\delta', \varphi) = (\delta, -\varphi') = -\varphi'(0),$$

$$(\theta', \varphi) = (\theta, -\varphi') = -\int_0^{\infty} \varphi' dx = -\varphi(\infty) + \varphi(0) = (\delta, \varphi) \Rightarrow \theta' = \delta.$$

Трёхмерная дельта-функция Дирака

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0).$$

П.2.5. Преобразование Фурье и ряды Фурье

Фурье-преобразование $F[...]$ и обратное преобразование Фурье $F^{-1}[...]$ имеют вид:

$$F[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik_x x} dx \equiv \hat{f}(k_x),$$

$$F^{-1}[\hat{f}(k_x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k_x) e^{ik_x x} dk_x = f(x).$$

В литературе встречается определение $F[...]$ и $F^{-1}[...]$, в котором плюсом в показателе экспоненты обладает прямое преобразование Фурье, а минусом – обратное. Кроме того, нормировочный коэффициент может быть иным, например, при $F[...]$ - 1, а при $F^{-1}[...]$ - $(1/(2\pi))$.

Свойства $F[...]$

$$1) F[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)] = \alpha F[f_1(x)] + \beta F[f_2(x)],$$

$$2) F[f(\alpha x)] = \frac{1}{|\alpha|} \hat{f}\left(\frac{k_x}{\alpha}\right),$$

$$3) F[f^{(n)}(x)] = (ik_x)^n F[f(x)],$$

$$4) F[f_1(x) \times f_2(x)] = \sqrt{2\pi} F[f_1(x)] F[f_2(x)] \text{ (теорема о свёртке),}$$

$$\text{где свёртка } f_1(x) \times f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') f_2(x - x') dx' = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x') f_1(x - x') dx'.$$

Трёхмерные преобразования Фурье

$$\hat{\varphi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{r})} d^3\mathbf{r}, \quad \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{r})} d^3\mathbf{k}.$$

Ряды Фурье. Для широкого класса функций $f(t)$ при заданном интервале разложения $-T/2 < t < T/2$ существуют ряды

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t},$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$, и коэффициенты разложения определены интегралами

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cos k\omega_0 \tau d\tau, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \sin k\omega_0 \tau d\tau,$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-ik\omega_0 \tau} d\tau.$$

Библиография

1. Тамм И.Е., Основы теории электричества, Москва, Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1956.
2. Арфкен Г., Математические методы в физике, Москва, Атомиздат, 1970.
3. Яворский Б.М., Детлаф А.А., Справочник по физике, Москва, Наука, 1980.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теоретическая физика т. VIII, Электродинамика сплошных сред, Москва, Наука, 1982.
5. Шарипов Р.А., Классическая электродинамика и теория относительности, Уфа, Изд-е Башкирского университета, 1997.
6. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н., Современная электродинамика. Часть 1 Микроскопическая теория, Москва-Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005.
7. Топтыгин И.Н., Современная электродинамика. Часть 2 Теория электромагнитных явлений в веществе, Москва-Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005.
8. Ландсберг Г.С., Оптика, Москва, Физматлит, 2003.

Константинов Олег Владиславович
Бугров Владислав Евгеньевич
Колесникова Анна Львовна

Лекции по классической электродинамике

Учебное пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе