

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**



**ПОБЕДИТЕЛЬ КОНКУРСА ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВУЗОВ**

**И.Б. Бондаренко, Ю.А. Гатчин, К.В. Дукельский**

## **УПРАВЛЕНИЕ КАЧЕСТВОМ ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ**

**Методические указания к лабораторным работам**



**Санкт-Петербург  
2008**

УДК 519.6

Бондаренко И.Б., Гатчин Ю.А., Дукельский К.В. Управление качеством электронных средств. Методические указания к лабораторным работам. СПб: СПбГУ ИТМО, 2008. 95 с.

Пособие содержит руководство по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Управление качеством электронных средств».

Методические указания предназначены для студентов вузов, обучающихся по специальности 210202.65 "Проектирование и технология электронно-вычислительных средств», а также для специалистов в области оптимизации и машинной обработки результатов экспериментов.

Илл. – 15, табл. – 13, список литературы – 12 наим.

Рекомендовано к печати на заседании Ученого совета факультета Компьютерных технологий и управления «25» марта 2008г. протокол заседания №7.

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.



© Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики 2008.

© И.Б. Бондаренко, Ю.А. Гатчин, К.В. Дукельский 2008.

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение.....	5
<b>1. Оптимизация функций. Общие сведения.....</b>	<b>6</b>
1.1. Признаки функций качества.....	8
1.2. Постановка задачи оптимизации. Объекты оптимизации.....	10
<b>2. Лабораторная работа №1.</b>	
<b>«Исследование градиентных методов оптимизации».....</b>	<b>14</b>
2.1. Краткие теоретические сведения.....	14
2.2. Метод градиента.....	21
2.3. Метод релаксации.....	22
2.4. Метод Ньютона.....	24
2.5. Порядок выполнения работы. Задания по работе.....	25
Контрольные вопросы.....	28
<b>3. Лабораторная работа №2.</b>	
<b>«Безградиентные методы оптимизации».....</b>	<b>29</b>
3.1. Краткие теоретические сведения.....	29
3.2. Метод дихотомии.....	32
3.3. Метод чисел Фибоначчи.....	34
3.4. Метод золотого сечения.....	36
3.5. Сравнение безградиентных методов.....	37
3.6. Порядок выполнения работы. Задания по работе.....	38
Контрольные вопросы.....	41
<b>4. Лабораторная работа №3.</b>	
<b>«Распределение параметров элементов ЭВА».....</b>	<b>42</b>
4.1. Краткие теоретические сведения.....	42
4.2. Порядок выполнения работы. Задания по работе.....	46
Контрольные вопросы.....	49
<b>5. Лабораторная работа №4.</b>	
<b>«Исследование методов оптимизации в задаче оптимального резервирования».....</b>	<b>50</b>
5.1. Задача для иллюстрации методов оптимизации.....	50
5.2. Краткие теоретические сведения.....	51
5.3. Порядок выполнения работы. Задания по работе.....	54
Контрольные вопросы.....	57

<b>6. Лабораторная работа №5.</b>	
<b>«Исследование и сравнительный анализ статистических методов дифференциального прогнозирования состояния ЭВА»</b> .....	58
6.1. Краткие теоретические сведения.....	58
6.2. Метод распознавания Байеса.....	59
6.3. Метод последовательного анализа.....	61
6.4. Метод наименьшего риска.....	62
6.5. Метод наибольшего правдоподобия.....	64
6.6. Исходные данные и порядок выполнения работы.....	65
Контрольные вопросы.....	78
<b>7. Лабораторная работа №6.</b>	
<b>«Исследование надежности электронных устройств методом матричных испытаний»</b> .....	79
7.1. Краткие теоретические сведения.....	79
7.2. Сравнение различных методов определения надежности ЭВА..	82
7.3. Порядок выполнения работы. Задания по работе.....	84
Контрольные вопросы.....	86
<b>Литература</b> .....	87
<b>Приложения</b> .....	88
<b>Приложение I</b> .....	89
<b>Приложение II</b> .....	91

## Введение

Руководство предназначено для студентов специальности 210202 «Конструирование и технология электронных вычислительных средств» и составлено в соответствии с программой курса «Управление качеством электронных средств». Оно содержит краткие теоретические сведения, необходимые для правильного понимания теории выполняемых работ и предназначено для оказания помощи студентам в подготовке к лабораторным занятиям, а также при оформлении и защите отчетов по выполненным работам.

Каждая работа рассчитана на 2 часа и выполняется на ЭВМ. Каждому студенту на занятии выдается индивидуальное задание в виде номера варианта. К работе студент допускается, получив допуск у преподавателя. По окончании выполнения работы на ЭВМ студент получает распечатку результатов, которую подписывает у преподавателя. После выполнения лабораторной работы студент подготавливает отчет в соответствии с «Методическими указаниями по оформлению отчетов лабораторных работ», который должен содержать:

- титульный лист;
- цель и задачи лабораторной работы;
- краткие сведения по теории;
- расчеты и графики;
- индивидуальную распечатку результатов;
- выводы по работе.

Более детально содержание отчета описано в каждой конкретной работе.

Для более глубокого усвоения материала и методик студентам рекомендуется пользоваться: литературой, указанной в программе курса «Управление качеством электронных средств» и в конце методических указаний, а также конспектом.

Для выполнения лабораторных работ каждая студенческая группа делится на бригады. К выполнению работ допускаются студенты, изучившие «Правила по технике безопасности в лабораториях кафедры ПКС».

Автор благодарит за помощь коллектив кафедры Проектирования компьютерных систем, а также студентов и аспирантов, принимавших активное участие при разработке лабораторного курса.

## 1. Оптимизация функций. Общие сведения

При создании различных устройств, систем, процессов всегда требуется определить такую комбинацию управляемых и неуправляемых параметров, при которых режим работы этих объектов - наилучший. Система действий по выявлению наилучшего режима работы объектов называются *настройкой*. Естественно, что для проведения настройки необходимо уметь различать состояния объектов так, чтобы можно было определить, какое из них «лучше» другого, т.е. в процессе настройки должна быть определена *мера* качества настройки [1].

Простейшим примером может служить настройка (отладка) техпроцесса - показателем качества в этом случае может служить количество бракованной продукции. Целью настройки в данном случае является минимизация брака.

Однако, не всегда можно настолько просто оценить показатель качества. Самый яркий пример - настройка радио- или телеприемников. Мерами качества здесь служат качество звучания, а в телевизоре - еще и качество изображения. Понятно, что довольно трудно подобрать однозначную количественную характеристику этим показателям. Рассматривая процесс настройки этих приборов, становится видно, что иногда достаточно знать только знак приращения показателя качества - вращением колесика настройки (или нажатием эквивалентных кнопок в цифровом приборе) мы выявляем направление лучшего звучания станции: так как качество звучания не несет необходимой для настройки информации (т.е. не указывает направления вращения колесика), то вначале мы проводим пробное вращение в произвольном направлении, что дает дополнительную и необходимую информацию для настройки. После первого пробного шага уже можно точно сказать, в каком направлении вращать колесико - если слышимость ухудшилась, то в противоположном направлении, если улучшилась - продолжать вращение до максимума слышимости.

Таким образом, для определения качества настройки необходимо наличие некоторого алгоритма обработки выходной информации настраиваемого объекта, который позволит количественно определить качество настройки (или знак изменения качества в процессе настройки).

Значение показателя качества будем обозначать буквой  $Q$ , зависящей от состояния некоторых управляемых параметров объекта  $X_1, \dots, X_n$ :

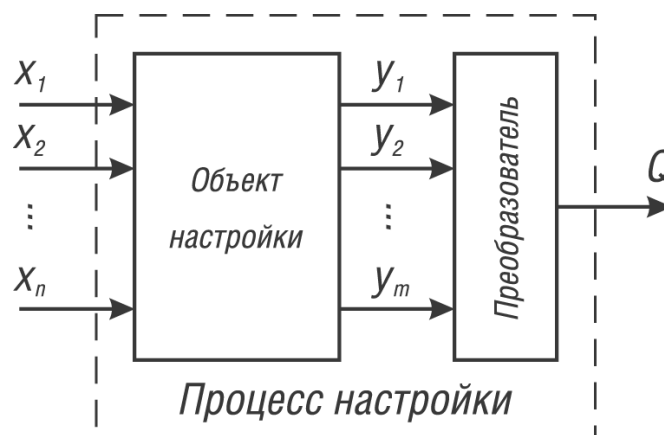
$$Q = Q(x_1, \dots, x_n). \quad (1.1)$$

Целью настройки является экстремизация этого показателя, т.е. решение задачи:

$$Q(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \underset{x_1, \dots, x_n \in S}{\text{extr}} \quad (1.2)$$

где символом  $S$  обозначена область допустимого изменения управляемых параметров.

На рис. 1.1 изображена блок-схема процесса настройки. Он состоит из собственно настраиваемого объекта с управляемыми входами  $x_1, \dots, x_n$  и наблюдаемыми выходами  $y_1, \dots, y_m$ , несущими информацию о состоянии объекта, а также преобразователя, который на основе полученных сведений формирует скалярный показатель качества объекта  $Q = Q(x_1, \dots, x_n)$ .



**Рис. 1.1**

Выше, на примере настройки радиоприемника (который является типичным примером объекта настройки), был описан простейший алгоритм поиска экстремального значения показателя качества. Вообще, настраиваемые объекты, как правило, отличаются недостаточностью информации, что делает необходимым введение поиска в виде специальных пробных шагов. Наличие поиска характерно для настройки, а также экстремального управления, и отличает их от других видов управления.

Задача оптимизации функции качества объекта может решаться в совершенно различных условиях - как при неизменных свойствах объекта и среды, так и при изменяющихся свойствах; как при наличии априорной информации об объекте, так и при ее отсутствии.

Объекты можно классифицировать по различным признакам, среди которых имеет смысл упомянуть следующие:

1. число оптимизируемых параметров;
2. число экстремумов;
3. непрерывность или дискретность;
4. инерционность;
5. объем априорной информации.

Перечисленные признаки в равной степени распространяются на

функции качества объектов, так как последние их наследуют. Очевидно, что выбор метода оптимизации напрямую зависит от этих признаков.

## 1.1. Признаки функций качества

### 1. Число оптимизируемых параметров

По числу управляемых параметров различают *одно-* ( $n = 1$ ) и *многопараметрические* ( $n > 1$ ) объекты [2].

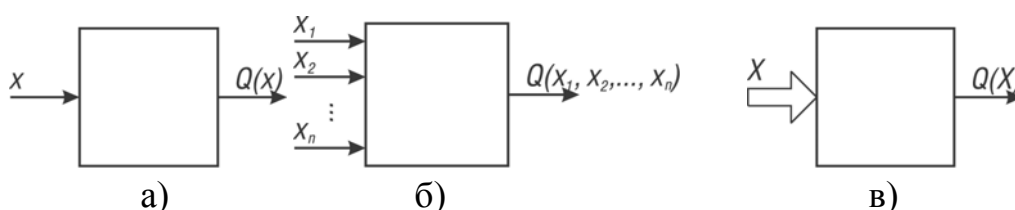


Рис. 1.2

На рис. 1.2 показано схематическое представление таких объектов (*а* - однопараметрический объект; *б* - многопараметрический объект в скалярном представлении; *в* - векторное представление объекта).

### 2. Число экстремумов

По числу экстремумов функции качества делят на *одноэкстремальные* и *многоэкстремальные*. В последнем случае, как правило, решается задача поиска глобального экстремума, т.е. минимального минимума или максимального максимума.

### 3. Характер изменения

По характеру изменения функции качества можно выделить *непрерывные* и *дискретные* объекты. Соответственно, функция качества именуется *непрерывной* или *дискретной*.

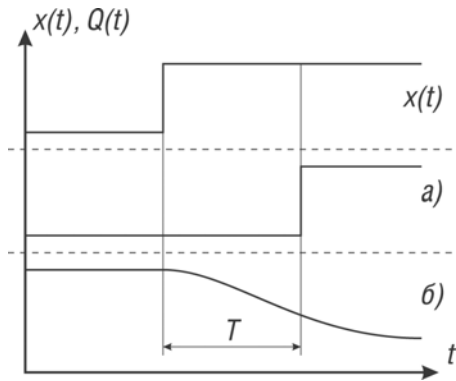
*Непрерывным* объектом будем считать такой объект, функция качества которого изменяется сразу с изменением ее параметров (рис. 1.3.(а)).

*Дискретным* объектом будем считать объект, функция качества которого *дискретна по времени*, т.е. изменение ее значения происходит скачком через некоторое время после изменения значения параметра (параметров). Объект, функция качества которого изменяется скачком одновременно со скачком на входе, будем считать непрерывным.

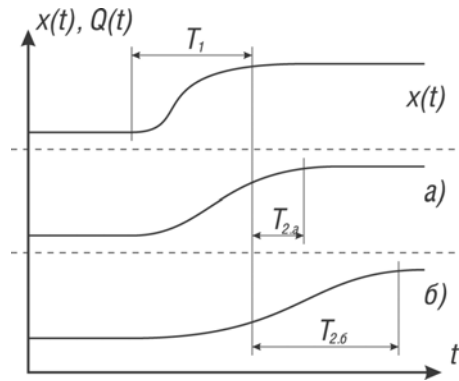
### 4. Инерционность

Разделение объектов по характеру инерционности на *инерционные* и *безынерционные* иллюстрируется на рис. 1.4.





**Рис. 1.3**



**Рис. 1.4**

Параметры объекта изменяются за время  $T_1$ . Соответствующее значение функции качества устанавливается через время  $T_2$  после установки параметров. Если  $T_1 \gg T_2$ , то объект *безынерционный*, если  $T_1 \ll T_2$ , то объект *инерционный*.

### 5. Объем априорной информации

По этому пункту объекты можно разделить на те, для которых не имеется (или почти не имеется) никакого математического описания (такие объекты будем называть объектами типа «Х»), и для которых математическое описание имеется в полном объеме.

К первому типу объектов можно отнести различные техпроцессы, процессы в биологических системах и т.п. Их отличает почти полное отсутствие математического описания, т.е. зависимость показателя качества  $Q$  от управляемых параметров  $X$  неизвестна.

Ко второму типу объектов относятся те, для которых имеется полное математическое описание, но зависимость  $Q$  от параметров  $X$  настолько сложна, что обычные способы отыскания экстремума бессмысленны из-за огромных вычислительных трудностей. Примерами таких объектов могут служить системы оптимального проектирования, когда известен функционал, связывающий показатель качества с искомыми параметрами объекта.

## 1.2. Постановка задачи оптимизации. Объекты оптимизации

*Оптимизация* - процесс однократного достижения экстремальной цели, т.е. определение такого допустимого состояния  $X^*$  объекта, в котором показатель качества  $Q$  достигает своего минимального значения  $Q^*$  (вообще — экстремального) [1,4]:

$$Q^* = Q(X^*) \leq Q(X) \quad (1.3)$$

для  $X, X^* \in S$ , где  $S$  - множество допустимых состояний объекта. Значение  $Q^*$  при этом может быть неизвестно. Предполагается, что в процессе оптимизации положение цели  $X^*$  остается неизменным:

$$X^* = \text{const} . \quad (1.4)$$

Объекты оптимизации можно разделить на три типа:

1. *Математические объекты*, для которых функция качества и множество  $S$  заданы математическими выражениями.
2. *Модельные объекты*, представляющие собой разного рода физические модели объектов (например, электронные модели).
3. *Реальные объекты* с неизменными свойствами (неизменность свойств необходима для выполнения условия (1.4)).

Рассмотрим объекты более подробно.

### 1. Математические объекты

Прежде всего, это объекты т.н. *математического программирования*, среди которых особо следует отметить задачи *линейного* программирования, формулируемые так: следует минимизировать линейную форму:

$$Q(X) = \sum_{i=1}^n a_i x_i \rightarrow \min_{X \in S} , \quad (1.5)$$

где множество  $S$  допустимых значений переменных определяется системой линейных неравенств:

$$S: \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j \geq c_i \quad (i = 1, \dots, m > n). \quad (1.6)$$

Процесс решения задачи линейного программирования естественным образом ориентирован на линейность основных зависимостей (1.5) и (1.6). Важным обстоятельством является тот факт, что задачи линейного программирования являются довольно грубым приближением к реальным задачам оптимизации (настройки), которые, как правило, нелинейны.

В качестве примеров задач линейного программирования можно

привести задачу об оптимальной смеси (из  $m$  видов некоего ресурса, характеризующихся вектором стоимости, составить смесь заданного состава, причем стоимость единицы смеси должна быть минимальной) и транспортную задачу (имеется  $n$  поставщиков  $m$  видов продукции, распределяемой  $k$  потребителям; возможности поставщиков по производству и потребности заказчиков характеризуются векторами  $A$  и  $B$  соответственно; между поставщиками и заказчиками существует транспортная сеть, эксплуатационные расходы которой характеризуются матрицей стоимости; необходимо составить план перевозок, минимизирующий транспортные расходы).

Еще один тип задач математического программирования - задачи *выпуклого* программирования. Они имеют более общий характер и формулируются следующим образом.

Необходимо минимизировать выпуклую вниз функцию:

$$Q(X) \rightarrow \min_{X \in S},$$

где область допустимых состояний  $S$  задается системой  $m$  неравенств:

$$S: h_i(X) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m),$$

где  $h_i(X) \geq 0$  - выпуклые вниз функции, что гарантирует выпуклость области  $S$ .

Выпуклые функции - достаточно широкий класс функций и сравнительно хорошо могут использоваться для представления задач настройки (оптимизации) [1]. Существенной их особенностью является совпадение точек локального и глобального экстремумов, т.е. решение таких задач можно свести только к отысканию локального экстремума.

Пример задачи выпуклого программирования. В  $n$ -мерном пространстве заданы система из  $m$  точек  $X_1, \dots, X_m$  и выпуклое множество  $S$ . Нужно найти в этом множестве такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до точек  $X_i$  была минимальной. Функция качества для этой задачи имеет вид:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^m |X - X_i| \rightarrow \min_{X \in S}.$$

Следует отметить, что требования выпуклости не всегда выполняются в задачах оптимизации. В общем случае задача *нелинейного* программирования формулируется так: минимизировать произвольную функцию качества

$$Q(X) \rightarrow \min_{X \in S}, \quad (1.7)$$

где область  $S$  задается системой из  $m$  неравенств произвольного вида:

$$S: h_i(X) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (1.8)$$

Если нет сведений о выпуклости, то единственность экстремума нельзя гарантировать. Однако даже при одноэкстремальности не существует специальных математических методов решения задач нелинейного программирования. Типичным примером такой задачи могут служить задачи оптимального проектирования.

В процессах проектирования новых систем всегда определена экстремальная цель (1.7), например, быстродействие, надежность, масса конструкции, эффективность и т.д. Оптимальное проектирование представляется как процесс определения вектора параметров конструкции:

$$X = (x_1, \dots, x_n).$$

Эти параметры экстремизируют эту цель, но не произвольно, а в пределах определенных ограничений. Один из видов ограничений состоит в строгом выполнении ряда требований - например, использовать конструктивы определенного вида. Такие ограничения называются ограничениями типа равенств. Другие ограничения состоят, к примеру, в непревышении рассеиваемой мощности и т.п. Это ограничения типа неравенств, представляемые в виде (1.8).

Запишем задачу оптимального проектирования в виде обобщенной задачи нелинейного программирования:

$$S: \begin{cases} Q(X) \rightarrow \mathbf{extr}, \\ X \in S \\ g_i(X) = 0 \quad i = 1, \dots, k < n, \\ h_j(X) \geq 0 \quad j = 2, \dots, m, \end{cases}$$

где функции  $Q$ ,  $g$  и  $h$  могут быть любыми, что не гарантирует совпадения локального и глобального экстремумов.

## 2. Модельные объекты

Моделирование находит широкое применение в создании и отладке систем различной природы. В процессах оптимального проектирования очень часто используются различные физические модели объекта. Это означает, что объект моделируется так, чтобы его искомые параметры можно было изменять в процессе оптимизации. Критерий качества и состояния ограничений определяются на этой же модели.

## 3. Реальные объекты

В процессе оптимизации реальных объектов необходимо, чтобы характеристики объекта изменялись очень медленно (значительно медленнее, чем проходит процесс оптимизации). Из-за реальности объекта оптимизации сам процесс протекает в обстановке неизбежных случайных и неслучайных помех, создающих характерное шумовое поле.

Отладка технологического процесса - яркий пример оптимизации реального объекта, т.е. достижения какой-то экстремальной цели

(минимум брака, максимум производительности и т.д.) при соблюдении определенных ограничений (выдерживание технологических норм, соблюдение правил и норм безопасности и т.д.). Очевидно, что задача заключается в определении оптимальных значений параметров данного техпроцесса, т.е. в решении обычной задачи оптимизации.

Другим характерным примером может служить этап отработки новой конструкции. Этот этап начинается с появлением первого экземпляра и заканчивается пуском серии. В это время происходит незначительное изменение конструкции (фактически - изменение ее некоторых параметров  $X_1, \dots, X_n$ ) с целью «выжать все» из этой конструкции, т.е. добиться выполнения экстремальных целей - максимальной скорости, минимальной массы, максимальной технологичности и т.д. при соблюдении определенных ограничений (не слишком глубокая переработка конструкции, выполнение ТТХ к ней и т.д.). Очевидно, что отработка конструкции является примером типичной оптимизации при заданном экстремальном критерии и сформулированных ограничениях.

## 2. Лабораторная работа №1. «Исследование градиентных методов оптимизации»

*Цель работы:*

Получить представление о градиентных методах оптимизации функций и сравнить эти методы при оптимизации функций с двумя управляемыми переменными.

### 2.1. Краткие теоретические сведения

Объектом многопараметрической оптимизации (см. рис. 2.1) является система с  $n$  управляемыми входами  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , которые удобно представить в виде  $n$ -мерного вектора [3,5]:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.1)$$

Помимо управляемых входов, на объект действуют неуправляемые и неконтролируемые факторы  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ , определяющие ситуацию; их также удобно представить в виде  $m$ -мерного вектора, называемого вектором ситуации:

$$E = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m). \quad (2.2)$$

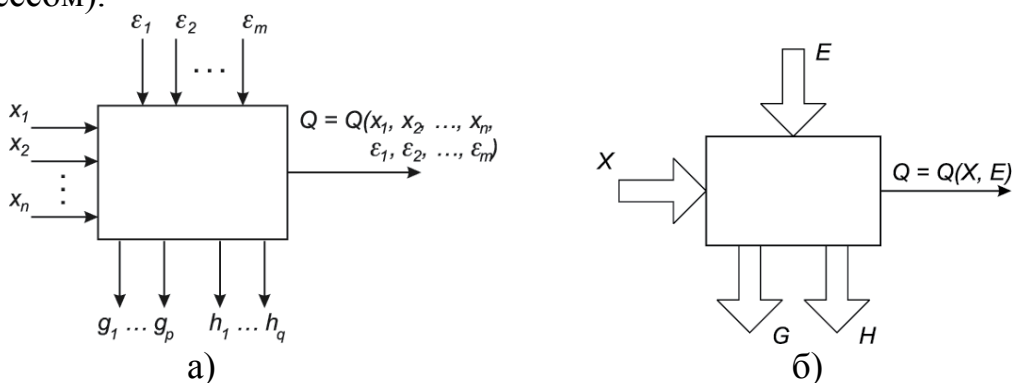
Ситуация  $E$  неизвестна - в противном случае не ставилась бы задача об оптимизации объекта в этой ситуации. Ситуация может быть как неизменной:

$$E = \mathbf{const},$$

так и изменяться во времени:

$$E = E(t)$$

каким-то неизвестным образом (т. е. являться многомерным случайным процессом).



**Рис. 2.1**

С выходов объекта снимается информация о его работе. Один из выходов представляет собой скалярный показатель качества оптимизируемого объекта:

$$Q = (x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m) = Q(X, E), \quad (2.3)$$

который в процессе оптимизации следует привести к экстремуму (максимуму или минимуму - в зависимости от поставленной задачи).

Также, объект имеет  $p + q$  выходов, состояние которых должно поддерживаться в определенных пределах, т. е. на поведение объекта в процессе оптимизации накладываются ограничения разного рода.

Ограничения первого рода имеют вид равенств:

$$g_i = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_i(X) = 0 \quad (2.4)$$

$$(i = 1, \dots, p < n),$$

т. е. выходы  $g_1, g_2, \dots, g_p$  должны быть равны нулю. Случай, когда какой-либо из выходов  $f_i$  объекта должен быть равен заданной величине  $a_i$ , легко сводится к (2.4) преобразованием:

$$g_i = f_i - a_i,$$

где  $g_i$  должно удовлетворять ограничениям вида (2.4). В векторной форме условия (4) записываются так:

$$G(X) = 0,$$

где:

$$G = (g_1, \dots, g_p).$$

Ограничения второго рода имеют вид неравенств:

$$h_j = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = h_j(X) \geq 0 \quad (2.5)$$

$$(j = 1, \dots, q),$$

т. е. выходы  $h_1, h_2, \dots, h_q$  должны иметь положительное значение. Случай, когда какой-либо из выходов  $f_i$  объекта должен быть больше или меньше заданного числа  $b_i$ , приводится к (2.5) преобразованием:

$$h_j = \pm(f_j - b_j),$$

причем верхний знак берется для случая  $f_i > b_j$ , а нижний - при  $f_i < b_j$ . В векторной форме условия (2.5) записываются так:

$$H(X) \geq 0,$$

где:

$$H = (h_1, \dots, h_q).$$

Сформулируем задачу многопараметрической оптимизации в ситуации  $E = \mathbf{const}$ . Требуется определить такое состояние управляемых переменных объекта  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , которое минимизирует

значение функции качества при соблюдении всех ограничений, наложенных на остальные переменные:

$$Q = (x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m) \rightarrow \min_{x_1, x_2, \dots, x_n \in S}, \quad (2.6)$$

где множество  $S$  определяется как:

$$S: \begin{cases} g_i(x_1, \dots, x_n) = 0 & (i = 1, \dots, p), \\ h_j(x_1, \dots, x_n) > 0 & (j = 1, \dots, q). \end{cases} \quad (2.7)$$

Приведенные выражения означают, что состояние  $X^*$  является оптимальным для ситуаций  $E$  среди всех состояний, удовлетворяющих наложенным ограничениям. В векторной форме эта задача записывается так:

$$Q(X, E) \rightarrow \min_{X \in S}, \quad (2.8)$$

$$S: \begin{cases} G(X) = 0, \\ H(X) \geq 0. \end{cases}$$

Если ситуация изменяется во времени:

$$E = E(t),$$

то задача ставится несколько иначе. Здесь мы не будем рассматривать задачи с изменяющимся вектором ситуации.

Рассмотрим геометрию поиска решения. Состояние безынерционного многопараметрического объекта характеризуется  $n$ -мерным вектором:

$$X = (x_1, \dots, x_n). \quad (2.9)$$

Рассмотрим  $n$ -мерное пространство, в котором имеется ортогональная прямоугольная система координат, определяемая базисом:

$$(e_1, e_2, \dots, e_n),$$

где:  $e_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) - орты.

Каждая точка этого пространства может быть описана вектором:

$$A = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n,$$

где  $a_1, \dots, a_n$  - координаты точки в выбранной система координат.

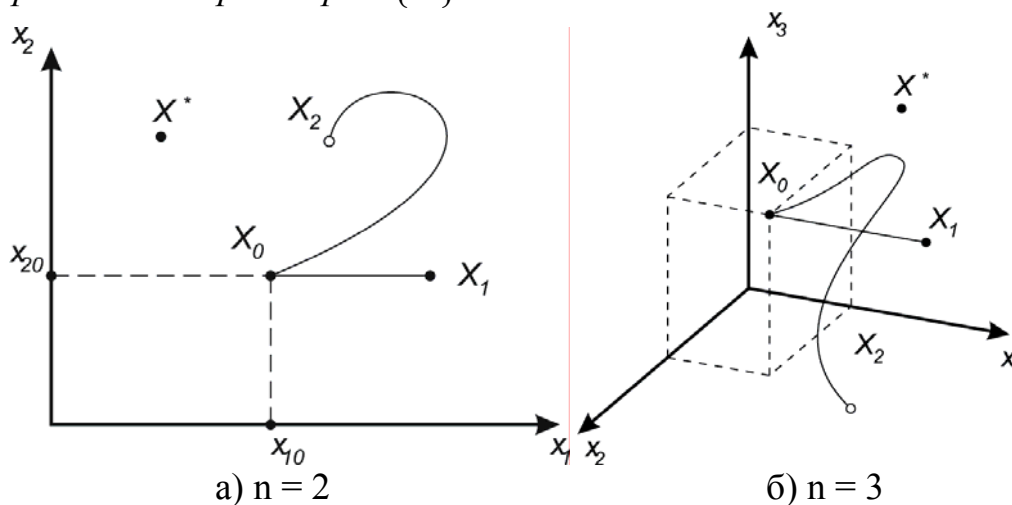
Вектор  $X$  в таком  $n$ -мерном пространстве  $\{A\}$  определяет точку с координатами:

$$a_1 = x_1, a_2 = x_2, \dots, a_n = x_n.$$

Таким образом, между точками пространства  $\{A\}$  и состояниями оптимизируемого объекта устанавливается взаимно однозначное соответствие, т. е. каждому состоянию объекта  $X$  соответствует одна



точка  $A$  в пространстве  $\{A\}$ , и наоборот. Это позволяет не различать векторы  $X$  и  $A$ , так как  $X = A$ . Такое пространство называется *пространством параметров*  $\{X\}$ .



**Рис. 2.2. Пространство параметров**

Пространство параметров дает возможность алгоритмам оптимизации приобрести наглядный геометрический смысл, что делает удобным рассмотрение процесса поиска экстремума.

В настоящей работе рассматривается двухпараметрический случай, поэтому будем рассматривать только двумерные иллюстрации и примеры. Очевидно, что выводы и построения, которые при этом будут сделаны, можно легко распространить и на многомерный случай.

На рис. 2.2 изображено пространство параметров для двухмерного (а) и трехмерного (б) объектов. Исходное состояние объекта определяется точкой:

$$X_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}).$$

При изменении только одного параметра  $X_1$  мы попадаем в точку  $X_1$ , при этом точка, изображающая состояние объекта в этом пространстве параметров, описывает некую траекторию в виде прямой  $X_0X_1$ , параллельной оси  $X_1$ . При изменении всех параметров одновременно, точка, описывающая состояние объекта, в общем случае опишет криволинейную траекторию, например такую, как это показано на рис. 2.2 при переходе из состояния  $X_0$  в состояние  $X_2$ . Изменяя параметры оптимизируемого объекта, мы двигаемся в различных направлениях пространства параметров.

Искомое экстремальное состояние  $X^*$ , минимизирующее функцию качества, также представляется в пространстве параметров точкой, сближение с которой является целью оптимизации функции качества.

Помимо характерной точки «цели», в пространстве параметров

имеются поверхности равного значения показателя качества, уравнения которых имеют вид:

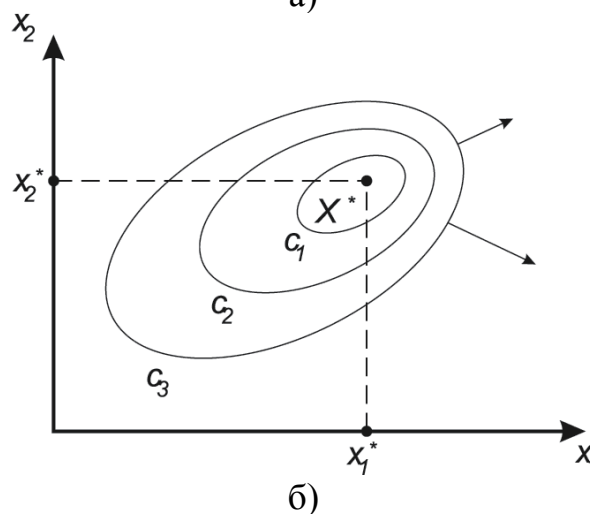
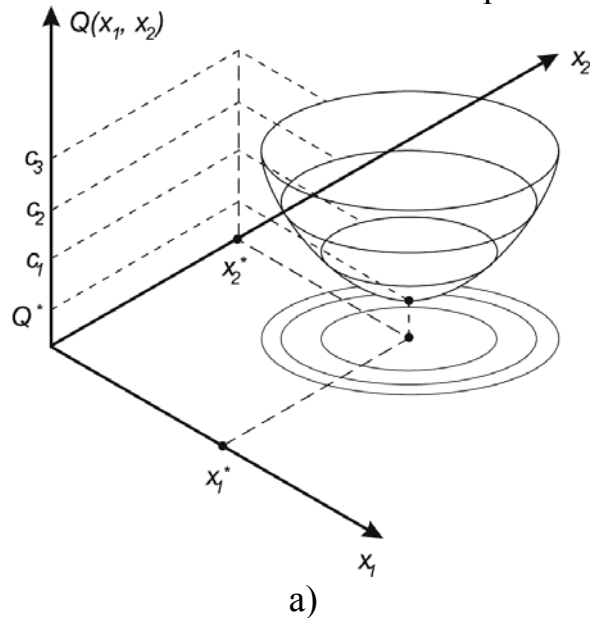
$$Q(X) = c = \mathbf{const}, \quad (2.10)$$

где  $c$  - значение функции качества. В дальнейшем будем называть эти поверхности поверхностями равного уровня. Для двумерного случая, при  $n = 2$ , они представляют собой линии.

В настоящей лабораторной работе используется функция вида:

$$Q(X) = a_1(x_1 + b_1) + a_2(x_2 + b_2), \quad (2.11)$$

которая, будучи изображенной в виде зависимости  $y = Q(x_1, x_2)$  представляет собой чашеобразную фигуру. На рис. 2.3 (а) показано образование линий равного уровня для такой функции. Сечения функции  $Q(x_1, x_2)$  плоскостями  $Q = c_i$  спроецированы на плоскость параметров. Полученные замкнутые линии и являются линиями равного уровня.



**Рис. 2.3. Линии равного уровня: а) - пример построения линий, б) - общий вид в плоскости параметров**

На рис. 2.3 (б) показан возможный вид линий равного уровня. Любопытно, что в двумерном случае эти линии имеют явную топографическую аналогию.

Рельеф функции качества можно характеризовать не только поверхностями равного уровня. Другой важной и наглядной характеристикой многомерной функции является ее *градиент*.

Определить градиент можно двумя способами.

1. Градиентом называется вектор, направленный в сторону наибольшего увеличения показателя качества и модуль которого равен производной показателя качества в этом направлении.

2. Градиент функции  $Q = Q(X)$  аналитически определяется так:

$$\mathbf{grad} Q(X) = \left( \frac{\partial Q(X)}{\partial x_1}, \frac{\partial Q(X)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial Q(X)}{\partial x_n} \right), \quad (2.12)$$

т. е. составляющие градиента вдоль координатных осей равны частным производным по этим координатам.

Можно доказать, что оба эти определения идентичны для любого количества параметров.

На рис. 2.3 (б) проведены две градиентные линии. Покажем, что они ортогональны линиям равного уровня и определим соотношение между ними.

Уравнение прямой, касательной к линии равного уровня в точке  $X_0$ :

$$a_1(x_1 - x_1^0) + a_2(x_2 - x_2^0) + Q_0 = c.$$

Наклон этой прямой к оси  $X_1$ :

$$k_1 = -\frac{a_1}{a_2},$$

наклон вектора градиента к оси  $X_1$ :

$$k_2 = \frac{a_2}{a_1}$$

вполне очевидным образом. Видим, что:

$$k_1 \cdot k_2 = -1,$$

т. е. градиент ортогонален к касательной линии равного уровня.

Рассмотрим необходимые условия существования экстремума.

*Стационарной точкой* называют такую точку пространства параметров, в которой все частные производные равны нулю. Стационарная точка может определять положение экстремума или «седла», которое является аналогом точки перегиба в одномерной задаче.

Необходимым условием экстремума непрерывной функции является либо стационарность данной точки, либо отсутствие частных производных в ней. Следовательно, что для нахождения экстремума, прежде всего, следует найти стационарные точки, координаты которых определяются системой уравнений:

$$\frac{\partial Q(X)}{\partial x_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2.13)$$

и точки отсутствия хотя бы одной частной производной. Естественно, что эти точки не обязательно являются экстремумами, но обязательно экстремум, если он есть, находится среди этих точек.

Рассмотрим теперь достаточные условия существования экстремума.

Достаточное условие минимума может быть записано в виде неравенства:

$$Q(X^*) < Q(X^* + \Delta) \quad (2.14)$$

для всех возможных значений вектора  $\Delta$ , модуль которого достаточно мал, но не равен нулю. Если какая-либо из стационарных точек или точек разрыва не удовлетворяет этому условию, то эта точка не является минимумом. Аналогично можно построить условие достаточности для максимума.

Очевидно, что проверка условия в виде (2.14) приводит к непрактичным затратам. Строго говоря, проверка условия во всех точках, пусть и достаточно близких, связана с бесконечным числом вычислений, что, естественно, неприемлемо. Поэтому условие (2.14) заменяют более простым, но требующим наложения на функцию качества некоторых ограничений, а именно - наличия возможности разложить ее в ряд Тэйлора в районе стационарной точки  $X^*$ . При этом можно ограничиться малыми членами второго порядка малости. В результате преобразований можно показать, что в общем случае многих переменных достаточные условия минимума принимают вид:

$$D_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.15)$$

где  $D_i$  - определитель вида:

$$D_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_i} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2 \partial x_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_1} & \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} \end{vmatrix}. \quad (2.16)$$

В случае максимума достаточные условия принимают вид:

$$D_i > 0 \quad (i = 2, 4, \dots)$$

$$D_i < 0 \quad (i = 1, 3, \dots)$$

Существует достаточно обширное количество методов и сочетаний методов оптимизации многопараметрических функций. В настоящей лабораторной работе предлагаются три из них.

## 2.2. Метод градиента

Метод градиента является одним из самых распространенных методов поиска экстремума [1]. Идея его заключается в движении вдоль градиентного направления (для максимума) или против градиентного направления (для минимума). Так как градиентное направление в пространстве параметров по определению является направлением, в котором происходит локальное увеличение показателя качества, то движение в этом направлении (или противоположном ему) приводит к наилучшему результату, т.е. к наибольшему изменению показателя качества. Поэтому метод градиента можно считать локально-оптимальным методом.

По методу градиента переход из состояния  $X_N$  в состояние  $X_{N+1}$ :

$$X_{N+1} = X_N + \Delta X_{N+1}, \quad (2.17)$$

где  $\Delta X_{N+1}$  — рабочий шаг, который в случае минимизации находится как:

$$\Delta X_{N+1} = -a_N \overline{\mathbf{grad}Q}(X_N), \quad (2.18)$$

где  $a_N$  - параметр длины рабочего шага, который в общем случае зависит от номера шага  $N$ ;  $\overline{\mathbf{grad}Q}(X_N)$  - оценка градиента показателя качества в точке.

Составляющие градиента - частные производные:

$$\partial Q / \partial x_i, (i = 1, \dots, n)$$

оцениваются путем измерений показателя качества в пробных состояниях. В качестве таких пробных состояний могут быть выбраны состояния в районе исходной точки  $X_N$ .

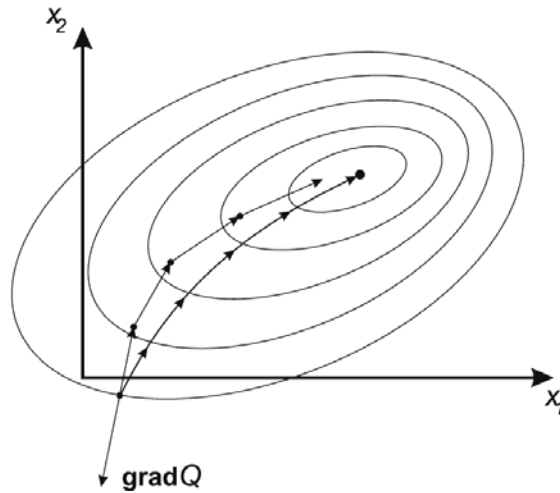


Рис. 2.4.

Рассмотрим поведение процесса поиска по методу градиента. Запишем уравнение траектории поиска. Предположим, что все частные производные определяются за время  $\Delta t$ . Тогда можно записать конечно-разностное векторное уравнение:

$$\frac{\Delta X}{\Delta t} = -a \mathbf{grad} Q,$$

которое при малом  $a$  и при  $\Delta t \rightarrow 0$  переходит в дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{dX}{dt} = -a \mathbf{grad} Q(X). \quad (2.19)$$

На рис. 2.4 показаны траектории, соответствующие конечно-разностному и дифференциальному уравнениям поиска. Это траектории близки, а при малом значении  $a$  они практически совпадают.

### 2.3. Метод релаксации

Пусть решаемая система уравнений (2.13) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x_1} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - b_1 = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x_2} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - b_2 = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial x_n} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n - b_n = 0 \end{aligned} \right\}.$$

Разрешим первое уравнение относительно  $x_1$ , второе — относительно  $x_2$  и т. д. (предполагается, что  $a_{ii} \neq 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 &= c_{21}x_1 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2n}x_n + d_2 \\ &\vdots \\ x_n &= c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{n,n-1}x_{n-1} + d_n \end{aligned} \right\},$$

где:

$$c_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad (i \neq j), \quad d_i = -\frac{b_i}{a_{ii}}.$$

Преобразуем полученную систему, обозначив:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= -x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1n}x_n + d_1 = 0 \\ \delta_2 &= c_{21}x_1 - x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2n}x_n + d_2 = 0 \\ &\vdots \\ \delta_n &= c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots - x_n + d_n = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.20)$$

Если в правые части этих выражений подставить координаты точки  $X_{N-1}$ , то величины  $\delta_i^{(N-1)}$ ,  $(i = 1, \dots, n)$  покажут степень несоответствия точки  $X$  этой системе уравнений на  $(N-1)$ -м этапе решения.

Задачей каждого шага является удовлетворение системе (2.20). Поэтому естественным представляется начать с того уравнения, для которого  $\delta_k$  по модулю больше, т.е.:

$$|\delta_k^{(N-1)}| = \max_{j=1, \dots, n} \{|\delta_j^{(N-1)}|\}.$$

Из этого уравнения определяется  $X_k^{(N)}$ , которое затем подставляется в остальные уравнения, заменяя  $X_k^{(N-1)}$ . В результате получаем новые значения невязок  $\delta_i^{(N)}$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), где  $\delta_k^{(N)} = 0$ . Следующим шагом определяется очередная наибольшая по модулю невязка и т. д.

## 2.4. Метод Ньютона

Идея метода заключается в задействовании информации о вторых производных [1,7]. Пусть решаемая система уравнений (2.13) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x_2} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial x_n} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.21)$$

где  $f_1, f_2, \dots, f_n$  - известные функции. Перейдем к векторной форме:

$$\mathbf{grad} Q(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0, \quad (2.22)$$

где:

$$\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Пусть  $X_N$  - приближенное решение уравнения (2.22) на  $N$ -м шаге и пусть  $X^*$  - точное решение (т.е.  $\mathbf{F}(X^*) = 0$ ). Тогда вектор невязки равен:

$$\mathbf{E} = X^* - X_N. \quad (2.23)$$

Подставляя полученное отсюда выражение:

$$X^* = X_N + \mathbf{E}$$

в (2.22), разлагая функцию  $\mathbf{F}$  в ряд Тэйлора по малой невязке  $\mathbf{E}$ , и, ограничиваясь малыми членами первого порядка малости, получаем:

$$\mathbf{F}(X_N) + \mathbf{F}'(X_N)\mathbf{E} = 0, \quad (2.24)$$

где  $\mathbf{F}'$  — матрица Якоби:



$$F' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{grad} f_1 \\ \mathbf{grad} f_2 \\ \vdots \\ \mathbf{grad} f_n \end{pmatrix}.$$

Разрешим уравнение (2.24) относительно  $E$  :

$$E = -\frac{F(X_N)}{F'(X_N)} = E(X_N). \quad (2.25)$$

Теперь, подставляя (2.25) в (2.23), получаем решение для  $X_{N+1}$  в виде рекуррентной формулы:

$$X_{N+1} = X_N + E(X_N).$$

## 2.5. Порядок выполнения работы. Задания по работе

*Порядок выполнения работы:*

1. Ознакомиться с краткой теорией по работе, и получить у преподавателя номер варианта задания.
2. Запустите работу «Градиентные методы оптимизации»;
3. На закладке «Параметры» укажите согласно варианту (см. табл. 2.1):
  - параметры функции:  $a_1, a_2, b_1, b_2$ ;
  - границы поиска управляемых параметров  $x_1$  и  $x_2$ ;
4. Установите точность в значение  $\pm 0,00000001$  (для этого можно использовать кнопки внутри текстового поля, увеличивающие или уменьшающие текущее значение в 10 раз);
5. Нажмите кнопку «Начать вычисления». Программа вычислит значения управляемых параметров  $x_1$  и  $x_2$  и занесет их в таблицу «Результаты»;
6. Уменьшите точность в 10 раз и повторите пункты 4 и 5 до значения точности  $\pm 0,1$  (вы можете очистить таблицу «Результаты» при помощи кнопки «Уничтожить результаты»);
7. Нажмите кнопку «Создать отчет» на панели инструментов. Программа сгенерирует отчет и внесет в него результаты вычислений, содержащиеся в таблице «Результаты»;
8. Нажмите кнопку «Печать» на панели инструментов и распечатайте отчет. Вы также можете сохранить отчет, нажав кнопку «Сохранить отчет» и указав в предложенном окне, куда его поместить.

*Отчет должен содержать:*

- титульный лист;
- цель лабораторной работы;
- краткие сведения по теории;
- распечатку результатов;
- расчет истинного значения экстремума функции;
- построенный график функции в заданных пределах изменения параметров в удобном ракурсе. Построение графика функции можно произвести с помощью бесплатной программы 3D Grapher v.1.2.рус. (или выше) или аналогичной. Порядок работы с программой описан в приложении I.
- выводы по работе.

*Варианты заданий*

Таблица 2.1.

№	Функция	Границы поиска для $x_1$ и $x_2$ не более	Границы поиска для $x_1$ и $x_2$ не менее
1	$f(x_1, x_2) = (x_1 - 0,3)^2 + (x_2 - 0,2)^2$	0	1
2	$f(x_1, x_2) = (x_1 - 0,28)^2 + (x_2 - 0,55)^2$	0	1
3	$f(x_1, x_2) = (x_1 - 0,825)^2 + (x_2 - 0,378)^2$	0	1
4	$f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 0,523)^2$	0	1
5	$f(x_1, x_2) = (x_1 - 0,905)^2 + (x_2 - 0,07)^2$	0	1
6	$f(x_1, x_2) = (x_1 - 0,2)^2 + 3x_2^2$	0	1
7	$f(x_1, x_2) = (x_1 - 0,428)^2 + (x_2 - 0,439)^2$	0	1
8	$f(x_1, x_2) = (x_1 + 1,111)^2 - 2x_2^2$	-1,5	0
9	$f(x_1, x_2) = -(x_1)^2 - 3x_2^2$	-3	3
10	$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + (x_2 + 1)^2$	-1,5	1
11	$f(x_1, x_2) = (x_1 - 0,03)^2 + (x_2 - 0,7)^2$	0	1
12	$f(x_1, x_2) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 0,5)^2$	-1,1	1
13	$f(x_1, x_2) = (x_1 + 1,1)^2 + (x_2 + 8)^2$	0	10
14	$f(x_1, x_2) = (x_1 - 0,7)^2 + (x_2 - 0,4)^2$	0	1
15	$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1,2)^2 + (x_2 - 1,8)^2$	0	1,5
16	$f(x_1, x_2) = (x_1 - 0,5)^2 + (x_2 - 0,2)^2$	0	1
17	$f(x_1, x_2) = -(x_1)^2 - 2(x_2)^2$	-3	3

Продолжение таблицы 2.1.

№	Функция	Границы поиска для $x_1$ и $x_2$ не более	Границы поиска для $x_1$ и $x_2$ не менее
18	$f(x_1, x_2) = (x_1)^2 + 3(x_2)^2$	-4	4
19	$f(x_1, x_2) = 2(x_1 - 0,82)^2 + 3(x_2 + 1,7)^2$	-2	1
20	$f(x_1, x_2) = -2(x_1 - 0,1)^2 + 10(x_2 - 0,3)^2$	-2	2
21	$f(x_1, x_2) = 2(x_1 + 0,5)^2 + 2(x_2 + 0,2)^2$	0	1
22	$f(x_1, x_2) = -4(x_1)^2 + 2(x_2)^2$	-4	5
23	$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 3(x_2 - 3)^2$	-8	8
24	$f(x_1, x_2) = 2(x_1 - 0,8)^2 + 3(x_2 + 1,7)^2$	-3	2
25	$f(x_1, x_2) = 5(x_1 - 0,1)^2 + 3(x_2 - 0,2)^2$	-2	2
26	$f(x_1, x_2) = -4x_1^2 + (x_2 - 1,23)^2$	-10	10
27	$f(x_1, x_2) = 5(x_1 - 0,35)^2 + 2(x_2 + 0,721)^2$	-2	2
28	$f(x_1, x_2) = 2(x_1 - 0,111)^2 + 4(x_2 + 0,553)^2$	-3	3
29	$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1,234)^2 + 8x_2^2$	-10	10
30	$f(x_1, x_2) = 4(x_1 + 0,711)^2 - (x_2 + 0,439)^2$	-5	5

## Контрольные вопросы

1. Опишите основные достоинства и недостатки градиентных методов оптимизации.
2. Что такое целевая функция?
3. Почему сходимость у метода Ньютона высокая?
4. Как вы считаете, влияют ли свойства самих поставленных задач на эффективность методов оптимизации?
5. Что такое оптимум функции?
6. Является ли оптимизация функции при помощи градиентных методов детерминированной задачей (т.е. можно ли заранее предсказать число шагов, которое потребуется при поиске решения)?
7. В чём заключается отличие между условной и безусловной оптимизацией?
8. Что такое точка локального минимума целевой функции?
9. Чем отличается точка глобального минимума функции от точки локального минимума?
10. Всегда ли упомянутые выше градиентные методы оптимизации являются сходящимися к точке глобального минимума целевой функции, а если нет, то в каких случаях?
11. Можно ли на основании результатов, полученных при помощи расчетно-обучающей программы, объективно судить об эффективности того или иного метода оптимизации? С помощью каких параметров?

### 3. Лабораторная работа №2. «Безградиентные методы оптимизации»

#### *Цель работы*

Получить представление о безградиентных методах оптимизации функций и сравнить эти методы при оптимизации унимодальных функций с одной управляющей переменной.

#### 3.1. Краткие теоретические сведения

Зависимость значения показателя качества  $Q$  от управляемого параметра  $x$  является неизвестной функцией, называемой *функцией качества* объекта [5,7]:

$$Q = Q(x). \quad (3.1)$$

Функция качества  $Q(x)$  в допустимой области  $S$  должна иметь экстремум - противное делает задачу оптимизации бессмысленной. В дальнейшем будем рассматривать минимум. Существование экстремума  $Q^*$  необходимо хотя бы в одной допустимой точке  $x^*$ , положение которой определяется в процессе поиска экстремума:

$$Q^* = Q(x^*) \leq Q(x), \quad (3.2)$$

где  $x$  и  $x^*$  — допустимые значения управляемого параметра ( $x, x^* \in S$ , где  $S$  - область допустимых значений параметров). Следует различать локальный и глобальный экстремумы. Для локального экстремума  $x^*$  выражение (3.2) имеет место в некоторой малой области:

$$|x - x^*| < \varepsilon \ll S$$

(см. рис. 3.1, где  $x^* = x_i^*$ ,  $i = 1, 2$ ). Функция качества может иметь много локальных экстремумов, но только один из них является глобальным ( $x_1^*$  на рис. 3.1). Глобальный минимум  $x^{**}$  может быть найден как наименьший из  $N$  локальных (максимум — как наибольший):

$$Q(x^{**}) = \min_{i=1, \dots, N} Q(x_i^*).$$

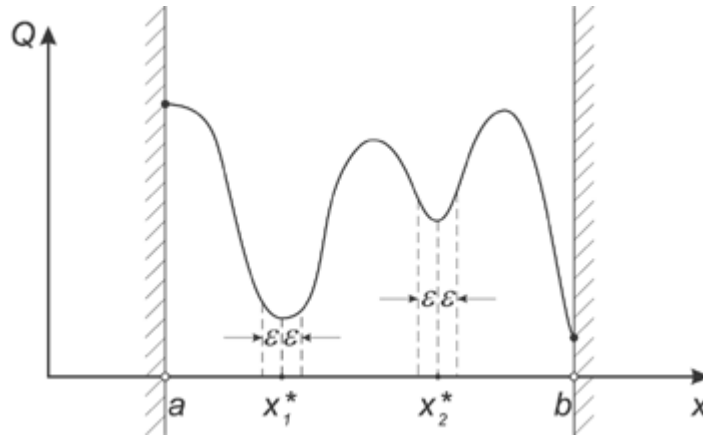


Рис. 3.1.

Сформулированное выше требование к функции  $Q(x)$  - иметь экстремум - относится, естественно, к глобальному экстремуму.

Следует подчеркнуть, что данное требование имеет глубокий физический смысл. Очень часто оказывается, что решение задачи находится на границе строгого ограничения типа

$$S: a > x > b.$$

В этом случае экстремальная точка попадает на границу  $x^* = b$ , которая не относится к допустимой области  $S$  (см. рис. 3.1).

Если ограничиться только одним требованием о наличии экстремума, то процесс его поиска может растянуться на весьма неопределенное время, так как априорная информация о наличии экстремума функции  $Q(x)$  слишком мала для того, чтобы построить разумный процесс поиска экстремума. Единственно возможным способом остается последовательное определение параметра качества при всех допустимых значениях управляемого параметра. Такой способ поведения называется *сканированием*, или *перебором*.

Вначале введем понятие точности определения оптимального значения параметра  $X^*$ . Практически, нет необходимости различать два достаточно близко расположенных значения параметра. Следовательно, перед решением *любой* практической задачи следует задать точность определения параметра  $X$ .

Пусть  $\pm \varepsilon$  — заданная точность в определении оптимального значения параметра  $x^*$ , а  $S = b - a$  — допустимый интервал изменения этого параметра. Тогда для реализации сканирования с числом шагов  $N$ :

$$N = \frac{S}{2\varepsilon} + 1 \quad (3.3)$$

надо определить показатель качества в точках:

$$a = x_1, x_2, \dots, x_n = b,$$

равномерно отстоящих друг от друга на расстоянии  $2\varepsilon$ :

$$x_j = a + (j-1) \cdot 2\varepsilon.$$

Из полученных значений показателя качества:

$$Q_1 = Q(x_1), Q_2 = Q(x_2), \dots, Q_N = Q(x_N) \quad (3.4)$$

выбирается наименьшее значение (либо наибольшее):

$$Q_i = \min_{j=1, \dots, N} \{Q_j\}, \quad (3.5)$$

номер которого и определяет оценку положения экстремума с точностью не меньшей, чем  $\pm \varepsilon$ :

$$\hat{x}^* = x_i.$$

Очевидно, что такой метод следует применять только при отсутствии каких-либо дополнительных сведений об объекте. Также видно, что этот метод крайне невыгоден, ведь он требует чрезмерно большого измерения показателя качества. А именно, для определения положения экстремума с точностью 0,01 надо сделать  $S/0,01 + 1$  измерений показателя качества.

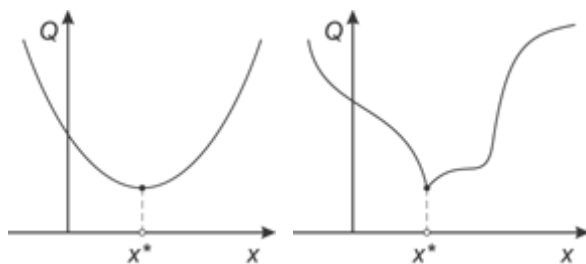
Следует отметить, что ситуация отсутствия каких-либо априорных сведений об объекте крайне редка. Обычно хоть что-то известно, и это является очень ценной априорной информацией, которую можно использовать при организации процесса поиска экстремума функции качества; это дает возможность применять методики, которые при такой же точности  $\varepsilon$  требуют гораздо меньшего количества измерений, чем при переборе (на порядки). Например, может быть известно, что функция имеет один экстремум, или она монотонна, или ее вторая производная всюду сохраняет знак и т.д.

#### *Унимодальные функции*

Наиболее ценным и наименее обременительным из всех возможных дополнительных сведений о функции является констатация ее унимодальности (одноэкстремальности). *Унимодальной* функцией называется функция, имеющая один локальный экстремум. Для оптимизируемой функции унимодальность математически требует выполнения следующих условий:

$$\begin{cases} Q(x_1) < Q(x_2), & x^* < x_1 < x_2, \\ Q(x_1) > Q(x_2), & x_1 < x_2 < x^*, \end{cases} \quad (3.6)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — два произвольно выбранных состояния, а  $x^*$  — положение локального (и в данном случае — глобального) минимума функции качества, что означает возрастание функции качества слева и справа от минимума. На рис. 3.2 можно видеть примеры унимодальных функций, для которых условие (3.6), как легко видеть, выполняется.



**Рис. 3.2.**

Если известно, что функция качества объекта унимодальна, то можно при помощи любой пары замеров  $Q(x_1)$  и  $Q(x_2)$  при отсутствии помех значительно сузить зону поиска и указать интервал, на котором находится экстремум. Это следует непосредственно из условия (3.6), которое, как видно, не является очень жестким.

Унимодальность, являясь достаточно широким свойством различных объектов, позволяет построить эффективные методы поиска экстремума. Любая унимодальная функция представляет собой весьма удобную модель достаточно большого класса функций качества реальных объектов.

В лабораторной работе рассматриваются три метода поиска экстремума унимодальной функции. Это метод *дихотомии*, метод *чисел Фибоначчи* и метод *золотого сечения*.

### 3.2. Метод дихотомии

Идея метода, как следует из его названия, проста — делить пополам зону, где расположен экстремум, и отбрасывать часть, где экстремума заведомо быть не может [1,3,7].

Пусть отрезок  $AB = S$  содержит внутри себя оптимальное значение параметра  $x^*$ :

$$A < x^* < B.$$

На первом шаге разделим этот промежуток пополам точкой:

$$x_1 = \frac{A + B}{2},$$

в районе которой сделаем два измерения показателя качества чтобы выяснить, справа или слева от точки  $x_1$  находится экстремум. Для этого определим показатель качества в точках  $x \pm \varepsilon$ , отстоящих друг от друга на расстояние  $2\varepsilon$ . Значение  $\varepsilon$  должно быть как можно более малым, но настолько, чтобы знак разности:

$$\Delta Q_1 = Q(x_1 + \varepsilon) - Q(x_1 - \varepsilon) \tag{3.7}$$

сохранял информацию о положении экстремума - в силу унимодальности функции  $Q(x)$ :

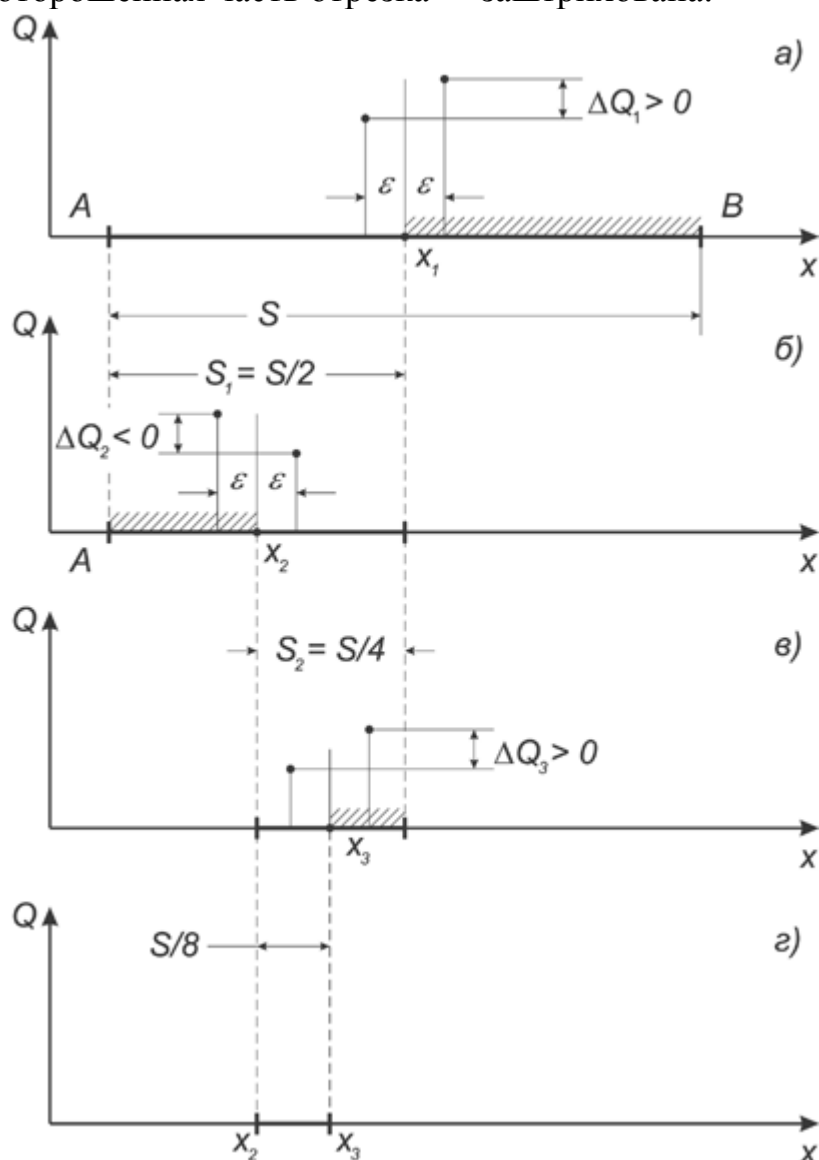


$$\begin{aligned} x^* < x_1, & \text{ если } \Delta Q_1 > 0, \\ x^* > x_1, & \text{ если } \Delta Q_1 < 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В результате двух произведенных замеров, промежутков, где содержится экстремум, сократился вдвое:

$$S_1 = S/2.$$

На рис. 3.3 (а) отброшенная часть отрезка  $S$  заштрихована.



**Рис. 3.3. Метод половинного деления**

Следующая пара измерений производится в районе середины оставшегося отрезка:

$$x_2 = \frac{A + x_1}{2},$$

т.е. в точках:

$$x = x_2 \pm \varepsilon \text{ и т.д.}$$

Аналогично производятся последующие шаги поиска до тех пор, пока на  $k$ -м шаге после  $2k$  измерений показателя качества отрезок, где находится экстремум, не станет меньше или равен  $2\varepsilon$ , т.е.:

$$S_k \leq 2\varepsilon.$$

Очевидно, что дальнейшие замеры избыточны и бессмысленны.

### 3.3. Метод чисел Фибоначчи

Введем некоторые определения [1,3,5,7].

*Интервал неопределенности* - отрезок оси управляемого параметра (в нашем случае -  $x$ ), где расположен экстремум  $x^*$  (внутри или на его краях).

*Числа Фибоначчи* — числовой ряд, в котором каждое последующее число равно сумме двух предыдущих:

$$F_i = \begin{cases} 1 & : i = 0, 1, \\ F_{i-1} + F_{i-2} & : i > 1. \end{cases} \quad (3.9)$$

Первые 15 чисел последовательности выглядят следующим образом:

Таблица 3.1.

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$F_i$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

где  $i$  – номер числа Фибоначчи.

Пусть задана точность  $\pm \varepsilon$ ; очевидно, что минимальный интервал неопределенности равен  $2\varepsilon$  (дальнейшее уменьшение интервала бессмысленно). Разделим длину исходного отрезка АВ на  $\varepsilon$ :

$$F_{\sim N} = \frac{S}{\varepsilon}.$$

Полученное значение округлим в сторону ближайшего большего числа Фибоначчи ( $F_{\sim N} \rightarrow F_N$ ); число  $N$  даст нам число шагов, за которые мы приблизимся к результату на интервал нечувствительности.

Разделим длину исходного интервала неопределенности на  $F_{N+1}$ :

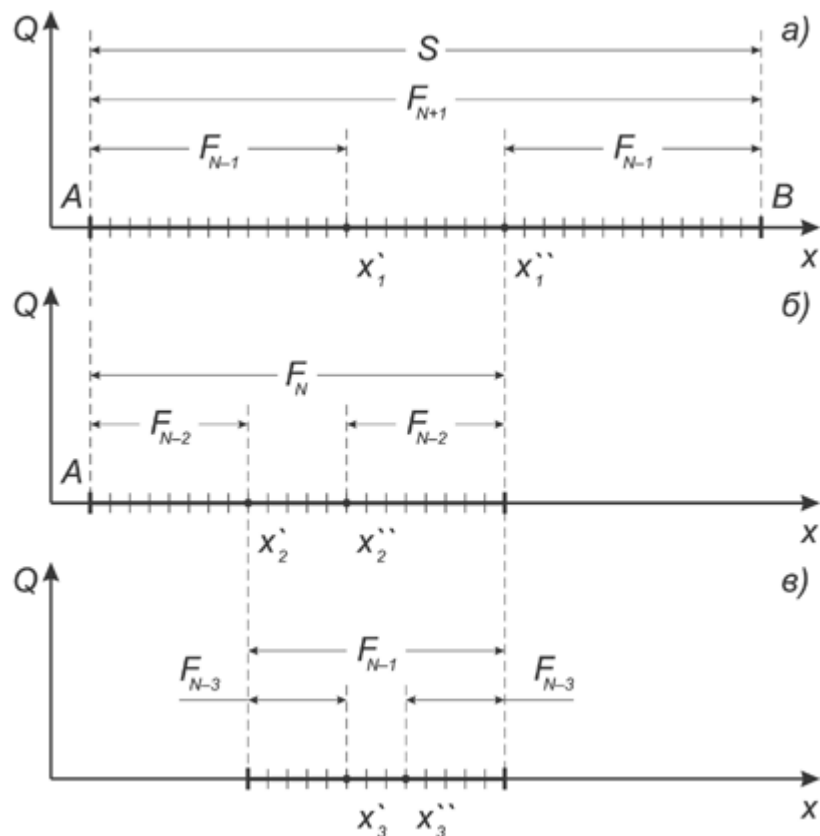
$$\Delta x = \frac{S}{F_{N+1}},$$

получив, таким образом, единичный отрезок (см. рис. 3.4 (а)). Проведем начальный замер функции качества:

$$Q_1'' = Q(x_1'')$$

в точке, отстоящей от правой границы начального интервала неопределенности на  $F_{N-1}$ . Каждый последующий эксперимент должен располагаться симметрично наилучшему из предыдущих, для того, чтобы исключить максимальную часть интервала неопределенности при самом худшем соотношении значений функции качества.

Выведем правило размещения каждого последующего эксперимента и уменьшения интервала неопределенности (см. рис. 3.4 (а)). Пусть на  $i$ -м шаге длина интервала неопределенности составляет  $F_{N-i+1}$ . Также нам известно значение функции качества  $Q_i'' = Q(x_i'')$  в точке, расположенной на расстоянии  $F_{N-i-1}$  от правого края интервала (точка  $B$ ). Следовательно, новый эксперимент  $Q_i' = Q(x_i')$  должен быть расположен на расстоянии  $F_{N-i-1}$  от левого края интервала (точка  $A$ ). Сравним показатели качества в этих точках. Если  $Q_i' < Q_i''$ , то новым интервалом неопределенности становится отрезок  $Ax_i''$ ; в противном случае ( $Q_i' \geq Q_i''$ ) новым интервалом неопределенности становится отрезок  $x_i'B$ . Очевидно, что длина интервала в обоих случаях равна  $F_{N-i}$ . Таким образом, между длинами интервалов неопределенности выполняется соотношение:



**Рис. 3.4. Метод чисел Фибоначчи**

$$l_{i-1} = l_i + l_{i+1}. \quad (3.10)$$

Уменьшение интервала целесообразно проводить до тех пор, пока его длина не станет меньше или равной интервалу нечувствительности  $2\varepsilon$ .

Можно показать, что метод чисел Фибоначчи эффективнее метода дихотомии.

### 3.4. Метод золотого сечения

Этот метод является, в некотором роде, эволюцией метода чисел Фибоначчи. Принцип расположения каждого последующего эксперимента и сокращения интервала неопределенности у них аналогичны [1,5].

Будем располагать каждый следующий эксперимент  $X_{i+1}$  так, чтобы выполнялось соотношение (3.10). Так как неизвестно, на каком шаге окончится поиск, логично ввести постоянное соотношение между длинами текущего и последующего интервалов неопределенности:

$$\frac{l_{i-1}}{l_i} = \tau = \text{const} \quad i = (1, 2, 3, \dots). \quad (3.11)$$

Для определения значения  $\tau$  воспользуемся соотношением (3.10). Подставляя его в (3.11), получаем:

$$1 + \frac{l_{i+1}}{l_i} = \tau, \quad (3.12)$$

но так как из (3.11):

$$\frac{l_{i+1}}{l_i} = \tau,$$

то, подставляя это выражение в (3.12), после элементарных преобразований получаем уравнение относительно  $\tau$ :

$$\tau^2 - \tau - 1 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения (отрицательный не имеет смысла) равен:

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

Таким образом, каждый из последующих экспериментов  $X_{i+1}$ , как и в методе чисел Фибоначчи, располагается на интервале неопределенности симметрично наилучшему из предыдущих  $X_i^*$ . Однако, место первого эксперимента определяется проще:

$$x_0 = \frac{S}{\tau}. \quad (3.13)$$

После  $i$  экспериментов интервал неопределенности равен

$$S_i = \frac{S}{\tau^{i-1}}. \quad (3.14)$$

Почему данный метод называется «метод золотого сечения»? В геометрии золотым сечением называется такое деление отрезка на две неравные части, при котором отношение всего отрезка к его большей части равно отношению большей части к меньшей. Из соотношений (3.13) и (3.14) видно, что каждым новым экспериментом интервал неопределенности делится именно по золотому сечению:

$$\frac{l_{i-1}}{l_i} = \frac{l_i}{l_{i+1}}.$$

### 3.5. Сравнение безградиентных методов

Зная, что длина исходного интервала неопределенности  $S$ , а длина интервала, получаемого в результате  $N$  вычислений значений функции  $\Delta x$ , введем в рассмотрение характеристику относительного уменьшения интервала в качестве показателя эффективности того или иного метода:

$$FR(N) = \frac{\Delta x}{S}. \quad (3.15)$$

Например, после  $N$  вычислений для метода дихотомии:

$$\Delta x = S \cdot 0,5^{\frac{N-1}{2}},$$

- для золотого сечения:

$$\Delta x = S \cdot 0,618^{N-1},$$

- для метода Фибоначчи:

$$\Delta x = S \frac{2}{F_{N+1}}.$$

Следовательно, подставив  $\Delta x$  в (3.15), получим:

- для метода дихотомии:

$$FR(N) = 0,5^{\frac{N-1}{2}},$$

- для золотого сечения:

$$FR(N) = 0,618^{N-1}, \quad (3.16)$$

- для метода Фибоначчи:

$$FR(N) = \frac{2}{F_{N+1}}.$$

Если известна величина точности  $\varepsilon$ , то, положив:

$$FR(N) = \varepsilon,$$

можно вычислить число шагов для каждого из методов, используя (3.16).

Например, для метода дихотомии:

$$N = 2 \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(0,5)} + 1. \quad (3.17)$$

Для остальных методов подобные соотношения Вы можете вывести самостоятельно.

### 3.6. Порядок выполнения работы. Задания по работе

1. Ознакомиться с краткой теорией по работе, и получить у преподавателя номер варианта задания.
2. Запустите работу «Безградиентные методы оптимизации».
3. На закладке «Параметры» укажите:
  - параметры функции:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ;
  - границы поиска управляемого параметра  $x$ .
4. Установите точность в значение  $\pm 0,00000001$  (для этого можно использовать кнопки внутри текстового поля, увеличивающие или уменьшающие текущее значение в 10 раз).
5. Нажмите кнопку «Начать вычисления». Программа вычислит значения управляемого параметра  $x$  и занесет их в таблицу «Результаты».
6. Уменьшите точность в 10 раз и повторите пункты 4 и 5 до значения точности  $\pm 0,1$ . (Вы можете очистить таблицу «Результаты» при помощи кнопки «Уничтожить результаты»).
7. Нажмите кнопку «Создать отчет» на панели инструментов. Программа сгенерирует отчет и внесет в него результаты вычислений, содержащиеся в таблице «Результаты».
8. Нажмите кнопку «Печать» на панели инструментов и распечатайте отчет. Вы также можете сохранить отчет, нажав кнопку «Сохранить отчет» и указав в предложенном окне, куда его поместить.

*Отчет должен содержать:*

  - титульный лист;
  - цель лабораторной работы;
  - краткие сведения по теории;
  - распечатку результатов;

- расчет истинного значения экстремума функции;
- построенный график функции в заданных пределах изменения параметров в удобном ракурсе. Построение графика функции можно произвести с помощью бесплатной программы 3D Grapher v.1.2.рус. (или выше) или аналогичной. Порядок работы с программой описан в приложении I.
- расчет количества шагов для отыскания экстремума с требуемой точностью для каждого метода;
- выводы по работе.

*Варианты заданий*

Таблица 3.2.

№	Функция	Границы поиска для X не более	Границы поиска для X не менее
1	$f(x) = 2x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 4x$	-10	10
2	$f(x) = x^6 - x^4 + 2x^2 + 1x$	-10	10
3	$f(x) = x^6 + 0x^4 - 3x^2 + x$	-10	10
4	$f(x) = -2x^6 - 3x^4 - 3x^2 - x$	-10	10
5	$f(x) = -x^6 + 10x^4 - x^2 + 10x$	-10	10
6	$f(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 6x$	-10	10
7	$f(x) = 0x^6 - 4x^4 + 3x^2 + 0x$	-10	10
8	$f(x) = 10x^6 + 30x^4 - 60x^2 - 30x$	-100	100
9	$f(x) = 0x^6 + 30x^4 - 30x^2 + 40x$	-100	100
10	$f(x) = 20x^6 + 10x^4 + 10x^2 + 5x$	-100	100
11	$f(x) = -20x^6 - 30x^4 + 15x^2 + 0x$	-100	100
12	$f(x) = -10x^6 - 10x^4 + 10x^2 + 10x$	-100	100
13	$f(x) = -x^6 - 3x^4 + 5x^2 + 25x$	-100	100
14	$f(x) = -2x^6 - 3x^4 - 25x^2 + 25x$	-100	100
15	$f(x) = 20x^6 - 30x^4 + 20x^2 + 30x$	-100	100
16	$f(x) = -x^6 + x^4 - x^2 + x$	-10	10
17	$f(x) = 5x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 4x$	-10	10

Продолжение табл. 3.2.

№	Функция	Границы поиска для X не более	Границы поиска для X не менее
18	$f(x) = 0x^6 - 20x^4 - 10x^2 + 4x$	-100	100
19	$f(x) = 10x^6 - 5x^4 - 3x^2 - 4x$	-100	100
20	$f(x) = 100x^6 - 20x^4 - 20x^2 - 20x$	-200	200
21	$f(x) = 20x^6 - 20x^4 - 20x^2 + 20x$	-100	100
22	$f(x) = -15x^6 + 12x^4 - 5x^2 + 4x$	-100	100
23	$f(x) = -90x^6 + 70x^4 - 50x^2 + 10x$	-200	200
24	$f(x) = 200x^6 + 10x^4 - 30x^2 - 400x$	-200	200
25	$f(x) = -120x^6 - 130x^4 - 3x^2 + 0x$	-200	200
26	$f(x) = 20x^6 - 50x^4 - 0x^2 + 0x$	-200	200
27	$f(x) = 0x^6 + 30x^4 - 30x^2 + 0x$	-100	100
28	$f(x) = -20x^6 + 0x^4 - 10x^2 + 20x$	-100	100
29	$f(x) = 23x^6 + 32x^4 + 10x^2 + 10x$	-100	100
30	$f(x) = -22x^6 - 50x^4 + 23x^2 - 5x$	-100	100



## Контрольные вопросы

1. В чем состоит свойство унимодальности функции и в чем заключается важное значение этого свойства при решении задач оптимизации с одной переменной?
2. Какие критерии используют для сравнения различных методов оптимизации?
3. Что такое минимаксная стратегия поиска? Какой из алгоритмов реализует ее наиболее эффективно?
4. Может ли унимодальная функция иметь горизонтальный участок? Точку перегиба?
5. В чем заключаются преимущества безградиентных методов? Недостатки?
6. За счет чего методы золотого сечения и чисел Фибоначчи имеют лучшую сходимость?
7. Какие недостатки имеют методы, описанные в работе?
8. Может ли унимодальная функция иметь кроме глобального локальный экстремум?
9. Какие особенности будут у поисковой процедуры для оптимизации функций, заданных таблично?
10. Как заставить работать безградиентные методы для функции, не обладающей свойством унимодальности?

## 4. Лабораторная работа №3. «Распределение параметров элементов ЭВА»

### *Цель работы*

Исследовать законы распределения типовых элементов ЭВА, определяемые производственными условиями.

### 4.1. Краткие теоретические сведения

Производство большинства элементов ЭВА является массовым или крупносерийным. Непосредственно после изготовления, первоначальные законы распределения параметров элементов ЭВА могут быть как нормальными (для резисторов и конденсаторов) так и отличаться от нормальных [9]. Например, распределение производственных погрешностей транзисторов не соответствует нормальному закону. Параметры законов распределения отдельных партий элементов могут сильно отличаться друг от друга.

Типичными операциями в производстве являются разбраковка и выборка по номиналам. Это приводит к значительным изменениям форм кривых распределения параметров. При этом нельзя забывать о том, что возможные значения параметров находятся в строго определённых пределах.

Параметры элементов ЭВА представляют собой непрерывные случайные величины. Для анализа и расчёта допусков и стабильности ЭВА необходимо знать законы распределения параметров или их числовые характеристики.

Закон распределения случайной величины можно определить по статистическим данным. Для этого необходимо ограниченное количество экспериментальных данных сгладить или выровнять, т. е. представить в наиболее компактном виде с помощью простых аналитических зависимостей.

Задача выравнивания статистических рядов состоит в том, чтобы подобрать теоретическую плавную кривую распределения, которая наилучшим образом описывает данное статистическое распределение. Принципиальный вид теоретической кривой выбирается заранее из соображений, связанных с существом задачи, или просто в соответствии с внешним видом статистического распределения.

Аналитическое выражение выбранной кривой распределения зависит от нескольких параметров. Значения этих параметров можно выбрать так, чтобы расхождения между статистическими и теоретическими

распределениями оказались наименьшими.

Предположим, что функция  $f(x, a, b, \dots)$  обладает основными свойствами плотности распределения:

$$f(x, a, b, \dots) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, a, b, \dots) dx = 1. \quad (4.1)$$

Для решения задачи используют *метод моментов* [11]. Параметры  $a, b, \dots$  выбирают с таким расчётом, чтобы несколько важнейших числовых характеристик (моментов) теоретического распределения были равны соответствующим статистическим характеристикам. Например, если теоретическая кривая  $f(x, a, b, \dots)$  зависит только от двух параметров  $a$  и  $b$ , то эти параметры выбирают так, чтобы математическое ожидание  $a$  и дисперсия  $m_x$  теоретического распределения совпадали с соответствующими величинами статистического распределения  $m_x^*$  и  $D_x^*$ .

Если кривая  $f(x, a, b, \dots)$  зависит от трёх параметров, то, соответственно, подбираются такие значения этих параметров, чтобы совпали первые три момента и т. д.

Гистограмма и выравнивающая её кривая строятся на одном графике.

Ввиду того, что с увеличением порядка моментов сильно уменьшается точность вычислений, следует пользоваться моментами порядка не выше четвертого. Для выравнивая статистических рядов данных используют *бета-распределение*, которое определяется двухпараметрической плотностью вероятностей:

$$f(y, a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} \cdot y^{a-1} (1-y)^{b-1}, \quad (4.2)$$

при  $0 < y < 1$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ . В остальных случаях:

$$f(y, a, b) = 0.$$

При этом математическое ожидание:

$$m_y = \frac{a}{a+b}, \quad (4.3)$$

а дисперсия:

$$D_y = \frac{a \cdot b}{(a+b)^2 (a+b+1)}. \quad (4.4)$$

*Бета-распределение* ограничено в пределах  $0 < y < 1$  и форма кривой плотности распределения полностью определяется параметрами  $a$

и  $b$ . Чтобы оценить их, следует принять математическое ожидание  $m_y$  равным статистическому математическому ожиданию  $m_y^*$ , а дисперсию  $D_y$  статистической дисперсии  $D_y^*$ :

$$m_y = m_y^*, D_y = D_y^*.$$

После очевидных преобразований, получаем два уравнения, характеризующие бета-распределение:

$$m_y^* = \frac{a}{a + b}, \quad (4.5)$$

$$D_y^* = \frac{a \cdot b}{(a + b)^2 (a + b + 1)}. \quad (4.6)$$

Совместное решение этих уравнений даст значения параметров  $a$  и  $b$ . Если  $a = b$ , то бета-распределение становится симметричным с одномерной плотностью вероятности вида:

$$f(a, y) = \frac{\Gamma(2a)}{\Gamma^2(a)} \cdot y^{a-1} (1 - y)^{a-1}, \quad (4.7)$$

при  $0 < y < 1$  и  $a > 0$  (в остальных случаях  $f(a, y) = 0$ ).

Таким образом, получаем выражения для математического ожидания:

$$m_y = \frac{1}{2}$$

и дисперсии

$$D_y = \frac{1}{4 \cdot (2a + 1)}.$$

Преобразуя уравнение дисперсии, получаем значение параметра  $a$  симметричного бета-распределения:

$$a = \frac{1 - 4D_y}{8D_y}. \quad (4.8)$$

Для того, чтобы совместить экспериментальную гистограмму и теоретическую кривую бета-распределения, необходимо шкалу оси абсцисс измеряемой величины  $X$  пересчитать в относительные значения:

$$y = \frac{X - X_H}{X_B - X_H}. \quad (4.9)$$

Параметрам  $X_H$  и  $X_B$  соответствуют нижнее и верхнее измеренные

значения параметра  $X$ .

Полученные ранее оценки  $m_y^*$  и  $D_x^*$  также нужно пересчитать на величины  $m_y^*$  и  $D_y^*$ :

$$m_y^* = \frac{m_x^* - X_H}{x_B - x_H}, \quad (4.10)$$

$$D_y^* = \frac{D_x^*}{(x_B - x_H)^2}. \quad (4.11)$$

По рассчитанным оценкам  $a$  и  $b$  строится кривая теоретического распределения  $f(y, a, b)$ . Для вычисления гамма-функции  $\Gamma(x)$  используют таблицы (см. Приложение II).

В данной работе по статистическим данным вычисляются оценки  $m_x^*$  и  $D_x^*$ . Для этого значения величины  $X$ , полученные путём измерений, подвергают статистической обработке. Чтобы не измерять большое количество элементов, «измеренный» ряд генерируется программой. Затем диапазон «измеренных» значений делят на интервалы как одинаковой, так и различной длины.

Для определения оптимального числа интервалов применяют правило Страджерса:

$$k = 1 + 5,5 \lg n,$$

где  $n$  - размер выборки (число «измеренных» значений случайной величины).

На следующем этапе подсчитывается количество значений  $m_j$  случайной величины, приходящиеся на каждый  $j$ -й интервал. Затем определяется статистическая вероятность  $P_j^*$  попадания случайной величины в данный  $j$ -й интервал:

$$P_j^* = \frac{m_j}{n}. \quad (4.12)$$

По данным полученного статистического ряда определяют статистические моменты распределения. Статистическое среднее вычисляется по формуле:

$$m_x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (4.13)$$

где  $x_i(n)$  - значение случайной величины  $X$  при  $i$ -ом измерении.

Для упрощения вычислений принято считать значение случайной величины в каждом интервале постоянным и равным среднему значению  $\tilde{X}_i$ :

$$m_x^* = \sum_{i=1}^k \tilde{X}_i \cdot P_i^* \quad (4.14)$$

Статистическая дисперсия вычисляется по формуле:

$$D_x^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i \cdot m_x^*)^2}{n}, \quad (4.15)$$

или, используя статистический ряд, по приближенной формуле:

$$D_x^* = \sum_{i=1}^k (\tilde{X}_i - m_x^*)^2 \cdot P_x^* \approx \left| \sum_{i=1}^k \tilde{X}_i^2 \cdot P_x^* - (m_x^*)^2 \right|. \quad (4.16)$$

Для наглядности эмпирическое распределение изображают графически в виде полигона или гистограммы.

## 4.2. Порядок выполнения работы. Задания по работе

### *Порядок работы*

1. Ознакомиться с краткой теорией по работе, и получить у преподавателя номер варианта задания.
2. Запустите работу «Определение закона распределения параметров элементов ЭВА».
3. На закладке «Параметры» укажите:
  - номинальное сопротивление партии;
  - допустимые максимальное и минимальное отклонения;
  - объем партии.
4. Активизируйте закладку «Гистограмма распределения», рассмотрите сгенерированную гистограмму.
5. Нажмите кнопку «Создать отчет» на панели инструментов. Программа сгенерирует отчет и внесет в него параметры партии резисторов и полученную гистограмму распределения.
6. Нажмите кнопку «Печать» на панели инструментов и распечатайте отчет. Вы также можете сохранить отчет, нажав кнопку «Сохранить отчет» и указав в предложенном окне, куда его поместить.
7. Используя математические соотношения, определите

параметры  $a$  и  $b$ , а затем, используя таблицу значений гамма-функции (см. Приложение II), рассчитайте кривую, выравнивающую гистограмму, и изобразите ее на графике гистограммы.

*Примечание.* Гамма-функция  $\Gamma(x)$  для больших значений аргумента  $x$  вычисляется по формуле:

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) = (x-1)(x-2)\Gamma(x-2) = \dots$$

Если  $x < 1$  и  $x \neq 0, -1, -2, \dots$ , то:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} = \frac{\Gamma(x+3)}{x(x+1)(x+2)} = \dots$$

*Отчет должен содержать:*

- титульный лист;
- цель лабораторной работы;
- краткие сведения по теории;
- распечатку гистограммы распределения;
- расчеты гамма-функции;
- построенный график гамма-функции на распечатанном листе с гистограммой.
- выводы по работе.

*Варианты заданий*

Таблица 4.1.

№	Сопротивление резисторов, Ом	Объем партии, шт.	Отклонение, %
1	220	100	±1
2	200	200	±1
3	300	90	±5
4	350	110	±1
5	400	120	±5
6	1000	130	±1
7	1200	140	±10
8	1500	150	±1
9	2000	160	±5
10	2200	170	±10
11	2300	190	±10
12	2500	200	±5
13	3000	50	±1
14	3200	100	±1
15	3300	150	±5
16	4000	180	±5
17	4500	200	±10

Продолжение таблицы 4.1.

№	Сопротивление резисторов, Ом	Объем партии, шт.	Отклонение, %
18	5000	220	±5
19	5100	240	±1
20	75	250	±5
21	100	270	±5
22	10000	280	±1
23	1000	300	±1
24	2000	200	±10
25	3000	100	±10
26	4000	50	±1
27	5000	150	±1
28	1500	100	±5
29	2500	250	±1
30	3500	300	±1



## Контрольные вопросы

1. Для чего могут применяться статистические методы?
2. Какой тип распределения должен получиться при исследовании выборки однотипных элементов?
3. Что отражает и как была получена гистограмма распределения случайных величин?
4. Для чего служит соотношение Страджерса?
5. Определите по гистограмме область бракованных электроэлементов.
6. Что отражает гамма-функция?
7. Что произойдет, если параметры  $a$  и  $b$  будут равны 0, станут отрицательными?
8. В чем состоит принцип работы метода моментов?
9. На что указывает отклонение от теоретической гистограммы распределения случайных величин? Как с этим бороться?
10. На что влияет объем выборки электроэлементов?
11. Покажите на гистограмме распределения значение математического ожидания случайной величины.

## 5. Лабораторная работа №4. «Исследование методов оптимизации в задаче оптимального резервирования»

### *Цель работы*

Исследование методов оптимизации: релаксационного, метода неопределенных множителей Лагранжа, вариационного метода.

Методы оптимизации рассмотрены на примере нижеследующей задачи.

### 5.1. Задача для иллюстрации методов оптимизации

Рассмотрим электронную систему, состоящую из четырёх блоков, каждый из которых должен обязательно функционировать для работы всей системы. Надежность системы может быть улучшена за счет включения в блоки параллельно работающих компонент (резервирования). В табл. 5.1 приведены вероятности функционирования блоков, если они содержат 1, 2 или 3 параллельно включенные компоненты.

Таблица 5.1.

Число компонент	Вероятность функционирования блока			
	№1	№2	№3	№4
1	0.70	0.50	0.70	0.60
2	0.80	0.70	0.90	0.70
3	0,90	0,80	0,95	0,90

Вероятность успешного функционирования всей системы равна произведению вероятностей надежной работы блоков.

Стоимость включения 1, 2 и 3 параллельных компонент в блоки приведена в табл. 5.2.

Таблица 5.2.

Число компонент	Стоимость блока, тыс. руб.			
	№1	№2	№3	№4
1	10	20	10	20
2	20	40	30	30
3	30	50	40	40

На создание всей системы выделено не более 100 тыс. руб.

Определить необходимое число компонент в каждом из четырех блоков, чтобы максимизировать вероятность успешной работы всей системы.

## 5.2. Краткие теоретические сведения

### Метод неопределенных множителей Лагранжа

С помощью метода множителей Лагранжа по существу устанавливаются необходимые условия, позволяющие идентифицировать точки оптимума в задачах оптимизации с ограничениями в виде равенств [3]. При этом задача с ограничениями преобразуется в задачу безусловной оптимизации, в которой фигурируют некоторые неизвестные параметры, называемые множителями Лагранжа.

Рассмотрим задачу оптимизации функции  $n$  переменных с учетом одного ограничения в виде равенства. Минимизировать:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (5.1)$$

при ограничении:

$$h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (5.2)$$

В соответствии с методом множителей Лагранжа эта задача преобразуется в следующую задачу безусловной оптимизации: минимизировать:

$$L(x, V) = f(x) - Vh_1(x). \quad (5.3)$$

Функция  $L(x, V)$  называется функцией Лагранжа;  $V$  - неизвестная постоянная, которая носит название неопределенного множителя Лагранжа. На знак  $V$  никаких требований не накладывается.

Пусть при заданном значении  $V = V^\circ$  безусловный минимум функции  $L(x, V)$  по  $x$  достигается в точке  $x = x^\circ$  и  $x^\circ$  удовлетворяет уравнению  $h_1(x^\circ) = 0$ . Тогда, как не трудно увидеть,  $x$  минимизирует (5.1) с учетом (5.2), поскольку для всех значений  $x$ , удовлетворяющих (5.2):

$$h_1(x) = 0 \text{ и } \min(L(x, V)) = \min(f(x)).$$

Разумеется, необходимо подобрать значение  $V = V^\circ$  таким образом, чтобы координата точки безусловного минимума  $x^\circ$  удовлетворяла равенству (5.2). Это можно сделать, если рассматривать  $V$  как переменную, найти безусловный минимум функции (5.3) в виде функции  $V$ , а, затем, выбрать значение  $V$ , при котором выполняется равенство (5.2).

В нашем случае задача безусловной оптимизации записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} L(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3) = & 1 - (0,7a_1 + 0,8a_2 + 0,9a_3) * \\ & * (0,5b_1 + 0,7b_2 + 0,8b_3) * (0,7c_1 + 0,9c_2 + 0,95c_3) * (0,6d_1 + 0,7d_2 + 0,9d_3) - \\ & - V_1(10a_1 + 20a_2 + 30a_3 + 20b_1 + \\ & + 40b_2 + 50b_3 + 10c_1 + 30c_2 + 40c_3 + 20d_1 + 30d_2 + 40d_3 - 100) - \\ & - V_2(a_1 + a_2 + a_3 - 1) - V_3(b_1 + b_2 + b_3 - 1) - V_4(c_1 + c_2 + c_3 - 1) - V_5(d_1 + d_2 + d_3 - 1). \end{aligned}$$

Достоинства метода неопределенных множителей Лагранжа:

- простота;
- задача с ограничениями сводится к задаче без ограничений.

Недостатки метода:

- в результате преобразования Лагранжа получается модель не полного подобия, что связано со сложностью объекта;
- при использовании этого метода вносятся погрешности из-за принятых допущений и из-за преобразования систем уравнений, что снижает точность получаемых на модели результатов.

#### *Релаксационный метод*

Применяется для отыскания экстремума сложной целевой функции [5, 10]. Идея метода: сложная целевая функция заменяется на сумму простых функций.

Требования к функции: непрерывность и дифференцируемость.

Дано:  $L(X)$  - целевая функция,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Находим оптимум целевой функции. Для этого, полагая:

$$x_i = \text{const},$$

находим результат нулевой итерации:

$$L(X) = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = C_0.$$

Затем высвобождается переменная  $x_1$  и исследуемая функция примет вид:

$$L(x_1) = (x_1, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}).$$

Находим решение, приравняв производную по  $x_1$  нулю:

$$\frac{\partial L(x_1)}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow x_1^{(1)}.$$

Т.о. нашли  $x_1^{(1)}$ , при котором значение целевой функции наилучшее. Затем высвобождается переменная  $x_2$  и, аналогично, отыскивается  $x_2^{(1)}$ :

$$L(x_2) = (x_1^{(1)}, x_2, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}),$$

$$\frac{\partial L(x_2)}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow x_2^{(1)}.$$

И так далее  $n$  раз. После проделанных операций получается:

$$L(X) = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) = C_1.$$

Дальнейшие релаксации аналогичны. После  $n$  релаксаций выбирается решение задачи путем сравнения всех  $C_i$  и выбора из них наилучшего. Оптимальной константе  $C$  соответствует оптимальный вектор  $X^\circ$  - решение задачи.

Достоинства релаксационного метода:

- простота;
- наглядность.

Недостатки:

- особые требования к целевой функции;
- необходимы аналитические выражения для первых производных;

- метод характеризуется медленной сходимостью.

Для нашего примера:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \rightarrow \max.$$

Возьмем за отправную точку то, что в электронной схеме содержится каждого блока по одной штуке. Тогда:

$$0,7*0,5*0,7*0,6=0,147.$$

Шаг 1. Зафиксируем каждое из  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$ . Находим новое значение  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} 0,8*0,5*0,7*0,6=0,168; & 20+20+30+20=90 < 100. \\ 0,7*0,7*0,7*0,6=0,17; & 10+40+10+20=80 < 100, \\ 0,7*0,5*0,9*0,6=0,19; & 10+20+30+20=80 < 100, & (*) \\ 0,7*0,5*0,7*0,7=0,17; & 10+20+10+30=70 < 100. \end{aligned}$$

Шаг 2. Берем лучший вариант и начинаем теперь с него:

$$\begin{aligned} 0,8*0,5*0,9*0,6=0,216; & 20+20+30+20=90 < 100, \\ 0,7*0,7*0,9*0,6=0,265; & 10+40+30+20=100 < 100, & (*) \\ 0,7*0,5*0,95*0,6=0,199; & 10+20+40+10=90 < 100, \\ 0,7*0,5*0,9*0,7=0,22; & 10+20+30+20=90 < 100. \end{aligned}$$

Ответ: 1 блок-1шт; 2 блок-2шт; 3 блок-2шт; 4 блок-1шт.

#### *Вариационный метод*

Вариационный метод предполагает алгоритм, построенный по схеме последовательного анализа вариантов [3,10]. С использованием процедур, имеющих своей целью на основании косвенных оценок отбросить все те допустимые решения, среди которых нет оптимального. По мере выполнения этих процедур происходит постепенное сжатие множества конкурентоспособных вариантов. В конце концов, остается один или несколько, которые уже непосредственно сравниваются между собой.

Метод применяется для отыскания минимума или максимума аддитивной функции. Функция называется аддитивной, если она имеет вид:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i, x_{i+1}),$$

где  $x_0, x_1, \dots, x_n$  - векторы с размерностью  $n_0, n_1, \dots, n_n$  соответственно.

Ограничения имеют вид:

$$x_i \in G_i, i = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим на нашем примере:  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \rightarrow \max.$

Возьмем начальную точку: всех блоков по одной штуке.

Шаг 1.

$0,7*0,5*0,7*0,6=0,147$ ;  
 $0,8*0,5*0,7*0,6=0,168$ ;  $20+20+10+20=70<100$ ,  
 $0,7*0,7*0,7*0,6=0,17$ ;  $10+40+10+20=80<100$ ,  
 $0,7*0,5*0,9*0,6=0,19$ ;  $10+20+30+20=80<100$ ,  
 $0,7*0,5*0,7*0,7=0,17$ ;  $10+20+10+30=70<100$ .

Шаг 2. Откидываем наименьшее и рассматриваем оставшиеся:

$0,8*0,7*0,7*0,6=0,235$ ;  $20+40+10+20=90<100$ ,  
 $0,7*0,8*0,7*0,6=0,235$ ;  $10+50+10+20=90<100$ ,  
 $0,7*0,7*0,9*0,6=0,265$ ;  $10+40+30+20=100<100$ ,  
 $0,7*0,7*0,7*0,7=0,224$ ;  $10+40+10+30=90<100$ ,

$0,8*0,5*0,9*0,6=0,216$ ;  $20+20+30+20=90<100$ ,

.....  
 $0,7*0,5*0,95*0,6=0,199$ ;  $10+20+40+20=90<100$ , (\*)

$0,7*0,5*0,9*0,7=0,22$ ;  $10+20+30+30=90<100$ ,

$0,8*0,5*0,7*0,7=0,186$ ;  $20+20+10+30=80<100$ , (\*)

.....  
 $0,7*0,5*0,7*0,9=0,22$ ;  $10+20+10+40=80<100$ .

Откидываем (\*) и т.д.

Достоинство вариационного метода:

- высокая надежность нахождения оптимального варианта.

Недостаток:

- большая трудоемкость.

### 5.3. Порядок выполнения работы. Задания по работе

*Порядок работы*

1. Ознакомиться с краткой теорией по работе, и получить у преподавателя номер варианта задания.
2. Запустить программу, ввести фамилию, номер группы, выбрать вариант ( см. табл. 5.3 и 5.4).
3. Распечатать полученные результаты.
4. Объяснить полученные результаты.

*Содержание отчёта*

- Цель работы;
- краткие теоретические сведения;
- результаты работы – распечатка;
- расчет стоимости полученных вариантов системы;
- сравнительный анализ изученных методов;
- выводы по работе (объяснение результатов).

Вариант	Число компонент	Стоимость блока, тыс. руб.			
		1	2	3	4
1	1	10	20	10	20
	2	20	30	30	40
	3	30	40	40	60
2	1	10	15	40	25
	2	20	20	45	30
	3	25	40	50	45
3	1	10	15	10	15
	2	20	35	20	45
	3	40	50	40	60
4	1	10	10	10	20
	2	20	40	20	30
	3	30	50	30	40
5	1	20	10	15	25
	2	25	20	25	30
	3	50	30	35	55
6	1	20	10	30	10
	2	30	25	40	20
	3	40	30	60	30
7	1	30	20	10	35
	2	35	25	15	45
	3	40	30	20	50
8	1	15	25	15	10
	2	25	30	20	15
	3	30	40	25	20
9	1	15	25	25	25
	2	20	45	30	30
	3	40	50	40	50
10	1	15	30	20	25
	2	20	40	25	35
	3	50	50	40	65
11	1	15	25	30	10
	2	25	45	45	30
	3	40	55	50	50

Таблица 5.4.

Вариант	Число компонент	Вероятность функционирования блока			
		1	2	3	4
1	1	0,50	0,60	0,50	0,60
	2	0,60	0,70	0,70	0,65
	3	0,70	0,80	0,90	0,70
2	1	0,60	0,75	0,75	0,80
	2	0,70	0,80	0,80	0,90
	3	0,95	0,95	0,95	0,95
3	1	0,50	0,60	0,60	0,60
	2	0,75	0,70	0,75	0,65
	3	0,95	0,90	0,95	0,75
4	1	0,70	0,50	0,50	0,60
	2	0,75	0,65	0,55	0,80
	3	0,80	0,70	0,65	0,95
5	1	0,50	0,55	0,60	0,65
	2	0,60	0,75	0,70	0,85
	3	0,95	0,90	0,95	0,90
6	1	0,60	0,70	0,60	0,50
	2	0,70	0,75	0,80	0,60
	3	0,80	0,95	0,90	0,70
7	1	0,70	0,60	0,50	0,50
	2	0,75	0,70	0,60	0,55
	3	0,85	0,95	0,90	0,70
8	1	0,55	0,50	0,60	0,50
	2	0,60	0,70	0,85	0,75
	3	0,65	0,90	0,95	0,95
9	1	0,60	0,50	0,60	0,60
	2	0,85	0,75	0,85	0,90
	3	0,95	0,95	0,90	0,95
10	1	0,50	0,55	0,50	0,55
	2	0,65	0,70	0,65	0,70
	3	0,70	0,90	0,75	0,95
11	1	0,50	0,60	0,50	0,50
	2	0,70	0,85	0,70	0,85
	3	0,85	0,95	0,90	0,90



## Контрольные вопросы

1. Раскройте краткую суть метода неопределенных множителей Лагранжа.

2. Раскройте суть релаксационного метода.

3. Расскажите, как работает вариационный метод.

4. В чем основное отличие вариационного метода от других?

5. Перечислите недостатки и достоинства методов.

6. Какой метод обеспечивает наибольшую надежность? За счет чего?

7. Может ли у данной задачи отсутствовать оптимальное решение?

Почему?

8. Правильно ли указаны вероятности функционирования блоков в предлагаемых вариантах с учетом заданного вида резервирования?

9. В чем отличие между допустимым и оптимальным решением задачи оптимизации? Может ли оптимальных решений быть несколько?

10. Можно ли применить описанные в работе методы для оптимизации унимодальных функций?

11. Как изменится полученное Вами решение, если стоимость системы сильно увеличить?

12. Предположите, какой вид резервирования использован в работе при такой стоимости зарезервированных элементов?

## 6. Лабораторная работа №5. «Исследование и сравнительный анализ статистических методов дифференциального прогнозирования состояния ЭВА»

### *Цель работы*

Исследовать состояние прибора, состоящего из блоков, с помощью статистических методов дифференциального прогнозирования.

### 6.1. Краткие теоретические сведения

*Прогнозированием* называют научно обоснованное предвидение и оценку основных параметров и характеристик того или иного технологического процесса или ЭВА. Прогнозирование необходимо осуществлять на стадиях проектирования, производства и эксплуатации объектов. Состояние  $E$  ЭВА удобно характеризовать совокупностью определяющих её параметров  $e(i)$ , изменяющихся во времени  $t$ , и представлять его в виде многомерной функции состояния [6]:

$$E[e(1), e(2), \dots, e(k), t].$$

Очевидно, что в  $k$ -мерном пространстве параметров можно выделить некоторые области, в каждой из которых ЭВА сохраняет, например, единственное присущее этой области состояние  $E(i)$ .

Все возможные состояния  $E(k)$  называются диагнозами или классами. В простейшем случае их может быть два: диагноз "исправного состояния" и диагноз "неисправного состояния" устройства. Прогноз при этом называется дифференциальной диагностикой. Он наиболее характерен для ЭВА.

Состояние можно также характеризовать совокупностью признаков  $K(v)$ , имеющих в общем случае  $m(j)$  разрядов. Если  $m(j)=2$ , то это означает, что признак может принимать только два значения: максимум или минимум. Такие признаки называют простыми и используют при диагностике в смысле "да"/"нет".

Под *распознаванием состояния* ЭВА понимается отнесение состояния, в котором пребывает система, к одному из заранее установленных классов (диагнозов).

К статистическим методам прогнозирования относятся:

- метод распознавания Байеса;
- метод последовательного анализа;
- метод минимального риска;
- метод наибольшего правдоподобия.

Рассмотрим каждый из них подробно.

## 6.2. Метод распознавания Байеса

Метод Байеса является в настоящее время одним из самых эффективных методов прогнозирования. Он позволяет одновременно учитывать признаки различной физической природы. Метод основан на формуле Байеса, имеющей следующий вид [1]:

$$P[D(k)/k(i)] = P[D(k)] \cdot P[K(i)/D(k)] / P[k(i)], \quad (6.1)$$

где:  $P[D(k)/K(i)]$  - вероятность постановки диагноза  $D(k)$  при наличии у исследуемого объекта признака  $k(i)$ , её называют также апостериорной вероятностью диагноза;

$P[D(k)]$  - вероятность постановки диагноза  $D(k)$ , вычисляемая по статистическим данным; её называют также априорной вероятностью диагноза;

$P[K(i)/D(k)]$  - вероятность появления признака  $k(i)$  у объекта с диагнозом  $D(k)$ ;

$P[k(i)]$  - вероятность появления признака  $k(i)$  во всех объектах независимо от того, в каком состоянии они находятся.

Перечисленные вероятности вычисляют следующим образом. Если при обследовании  $n$  объектов у  $n_k$  из них обнаружено состояние  $D(k)$ , то:

$$P[D(k)] = \frac{n_k}{n}.$$

Если среди  $n_k$  объектов, имеющих диагноз  $D(k)$ , у  $n_i$  появится признак  $k(i)$ , то:

$$P[K(i)/D(k)] = \frac{n_i}{n_k}.$$

Если при исследовании  $n$  объектов у  $n_i$  из них обнаружен признак  $k(i)$ , то:

$$P[K(i)] = \frac{n_i}{n}.$$

Формула (6.1) применима только в том случае, когда постановка диагноза для объекта осуществляется только по наличию одного признака (т.е. каждому  $D[k]$  соответствует только ему присущий  $k(k)$ ). Для обследования объектов по нескольким признакам может быть применена обобщенная формула Байеса, которая, по аналогии с (6.1), имеет следующий вид:

$$P[D(k)/\tilde{K}] = P[D(k)] \cdot P[\tilde{K}/D(k)] / P[\tilde{K}], \quad (6.2)$$

где  $\tilde{K} = \{k(1), k(2), \dots, k(s)\}$  - конкретная реализация комплекса признаков. Формула (6.2) предполагает, что ЭВА одновременно может находиться только в одном состоянии.

Из свойства вероятности вытекает, что:

$$\sum_{k=1}^N P[D(k)] = 1,$$

где  $N$  - количество состояний.

Это условие важно т.к. им пользуются для проверки правильности расчета. Для диагностически независимых признаков справедливо следующее соотношение:

$$P[\tilde{K}/D(k)] = \prod_{k=1}^s P[\tilde{k}(i)/D(k)], \quad (6.3)$$

где  $\tilde{k}(1, \dots, s)$  - реализация признаков  $k(1, \dots, s)$ . Вероятность появления комплекса признаков  $P[\tilde{K}]$  запишется:

$$P[\tilde{K}] = \sum_{k=1}^N P[D(k)] \cdot P[K'/D(k)]. \quad (6.4)$$

Обобщенная формула Байеса (6.2) с учетом (6.3) и (6.4) может быть записана в следующем виде:

$$P[D(k)/\tilde{K}] = P[D(k)] \cdot \prod_{k=1}^s P[\tilde{k}(i)/D(k)] / \sum_{k=1}^N P[D(k)] \cdot P[\tilde{K}/D(k)].$$

Очевидно, что:

$$\sum_{k=1}^N P[D(k)/\tilde{K}] = 1.$$

Правило, руководствуясь которым принимают решение о диагнозе технической системы, называется решающим. Решающее правило в методе Байеса следующее:

$\tilde{K}$  относится к  $D(k)$ , если:

$$P[D(k)/\tilde{K}] > P[D(j)/\tilde{K}], j = 1, 2, \dots, N, k \neq j,$$

т.е. объект с комплексом реализованных признаков  $\tilde{K}$  относят к состоянию (диагнозу)  $D(k)$ , характеризующемуся наибольшей апостериорной вероятностью. Для большей определенности решающее правило уточняют введением порогового значения  $P(i)$  для вероятности диагноза, обычно  $P(i) \geq 0,9$ . Условие постановки диагноза  $D(k)$  при этом запишется:

$$P[D(k)/\tilde{K}] \geq P(i).$$

Если оказывается, что:

$$P[D(k)/\tilde{K}] \leq P(i),$$

то решение о постановке диагноза не принимается и для этого необходима дополнительная информация.

Недостаток метода Байеса состоит в том, что он требует сравнительно большого объема диагностической информации. Это и является основным ограничением для его применения.

### 6.3. Метод последовательного анализа

Этот метод получил широкое применение в дифференциальной диагностике для распознавания двух состояний из-за того, что в отношении вычислительных затрат он более экономичен, чем метод Байеса. Если в последнем число обследований изучаемого объекта заранее определено, то в методе последовательного анализа их проводится ровно столько, сколько необходимо для принятия решения о диагнозе с минимальным риском.

В методе последовательного анализа отношение вероятностей появления признаков  $k(i)$  при известных диагнозах  $D(1)$  и  $D(2)$  составляются последовательно. Сначала составляется соотношение для первого признака  $k(1)$ , затем (если это необходимо) для признака  $k(2)$  и т.д. При этом каждое отношение оценивается, т.е. сравнивается с верхней:  $A$  и нижней:  $B$  границами решения о постановке диагноза.

Если очередное такое соотношение не даёт возможности поставить диагноз, то составляется следующее. Эта процедура выполняется вплоть до того, пока не появится возможность принять обоснованное решение. Указанное отношение вероятностей называется отношением правдоподобия.

Если отношение правдоподобия:

$$P[\tilde{k}(l) / D(2)] / P[\tilde{k}(l) / D(1)] > A,$$

то  $\tilde{K}$  относится к  $D(2)$ , т.е. ставится диагноз  $D(2)$ . Если:

$$P[\tilde{k}(l) / D(2)] / P[\tilde{k}(l) / D(1)] < B,$$

то  $\tilde{K}$  относится к  $D(1)$ , т.е. ставится диагноз  $D(1)$ . Если имеет место неравенство вида:

$$B < P[\tilde{k}(l) / D(2)] / P[\tilde{k}(l) / D(1)] < A,$$

то принять решение о постановке диагноза для объекта не представляется возможным. Необходимо его дальнейшее обследование по очередному признаку  $k(2)$  и т.д. вплоть до принятия решения.

Обследование диагностируемого объекта всегда следует начинать по наиболее информативному признаку и продолжать с последовательным уменьшением информативности. При этом можно смело полагать, что в выражении:

$$P[\tilde{k}(l) / D(2)] / P[\tilde{k}(l) / D(1)]$$

вероятность заменяется частотой появления данного признака при соответствующих диагнозах.

## 6.4. Метод наименьшего риска

Прежде, чем изложить этот метод, рассмотрим ошибки, имеющие место быть при прогнозировании состояния ЭВА, и определим понятие риска. Условимся, что  $D(1)$  - исправное состояние, а  $D(2)$  - неисправное. При постановке диагноза могут быть допущены два рода ошибок. Ошибка 1 рода: ставится диагноз  $D(2)$  вместо  $D(1)$  - ложная тревога или риск поставщика. Ошибка 2 рода: ставится диагноз  $D(1)$  вместо  $D(2)$  - пропуск цели или риск заказчика. Естественно, что ошибки 2 рода более опасны. Поэтому ошибки 1 и 2 рода имеют разные цены (веса). Метод наименьшего риска, как и предыдущие, относится к статистическим, но отличается от них правилом принятия решения. В этом методе решающее правило выбирается из условия оптимальности, которым является минимум риска.

Будем считать, что процесс распознавания ЭВА производится при наличии одного диагностического признака и считать, что априорные вероятности диагнозов  $P[D(1)]$  и  $P[D(2)]$  нам заранее известны из статистических данных.

Обозначим диагностируемый параметр через  $x$ . Тогда задачу распознавания можно сформулировать так: необходимо выбрать граничное (оптимальное) значение параметра  $x$ , равное  $x(0)$ , такое, чтобы при  $x < x(0)$  диагностируемая ЭВА находилась в исправном состоянии (диагноз  $D(1)$ ), а при  $x > x(0)$  выходила из строя (диагноз  $D(2)$ ). Решающее правило для постановки диагноза будет при этом следующее:

$$\begin{aligned} \text{при } x < x(0), x \text{ относится к } D(1), \\ \text{при } x > x(0), x \text{ относится к } D(2). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Обозначим возможные решения, которые в принципе могут быть выбраны в соответствии с решающим правилом (6.5), через  $H(i,j)$ , где  $i$  - означает поставленный диагноз, а  $j$  - действительное состояние системы. Тогда очевидно, что правильными решениями будут  $H(1,1)$  и  $H(2,2)$  (т.е. когда поставленный диагноз совпадает с действительным). Решение  $H(1,2)$  означает пропуск цели или риск заказчика, а  $H(2,1)$  ложную тревогу или риск поставщика.

Будем считать, что цена (вес) принятия неправильного решения  $P[H(1,2)]$  - пропуска цели - равна  $C(1,2)$ , а цена решения  $P[H(2,1)]$  - ложной тревоги -  $C(2,1)$ . Обозначим цены правильных решений  $H(1,1)$  и  $H(2,2)$  через  $C(1,1)$  и  $C(2,2)$  соответственно.

Тогда риск принятия решения будет равен сумме вероятностей возможных ошибок с учетом их весов:

$$R = C(1,2) \cdot P[H(1,2)] + C(2,1) \cdot P[H(2,1)].$$

Из условия получения минимума риска  $R_{\min}$  определим граничное значение  $x(0)$  в правиле (6.5).

Решающее правило метода минимального риска с учетом введенных обозначений будет иметь следующий вид:

$$x \text{ относится к } B(1), \text{ если } \frac{f[x/D(1)]}{f[x/D(2)]} < \frac{P[D(2)] \cdot [C(1,2) - C(2,2)]}{P[D(1)] \cdot [C(2,1) - C(1,1)]}, \quad (6.6)$$

$$x \text{ относится к } B(2), \text{ если } \frac{f[x/D(1)]}{f[x/D(2)]} > \frac{P[D(2)] \cdot [C(1,2) - C(2,2)]}{P[D(1)] \cdot [C(2,1) - C(1,1)]}, \quad (6.7)$$

где  $f[x/D(1)]$  и  $f[x/D(2)]$  - плотности распределения соответствующих вероятностей. Они подчинены нормальному закону, т.е.:

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2 \cdot s^2}\right).$$

Тогда очевидно, что  $x(0)$  будет лежать между  $Y1$  и  $Y2$  - центрами распределений  $f[Y1/D(1)]$  и  $f[Y2/D(1)]$  при заведомо известных диагнозах.

Условие (6.6) соответствует  $x < x(0)$ , а (6.7) -  $x > x(0)$ . Пороговым значением отношения правдоподобия считают величину:

$$L = \frac{P[D(2)] \cdot [C(1,2) - C(2,2)]}{P[D(1)] \cdot [C(2,1) - C(1,1)]}. \quad (6.8)$$

Если цены принятия правильных решений  $C(1,1)$  и  $C(2,2)$  не учитывают, то выражение (6.8) принимает следующий вид:

$$L = (P[D(2)] \cdot C(1,2)) / (P[D(1)] \cdot C(2,1)). \quad (6.9)$$

*Пример*

Пусть для исправного состояния  $Y1 = 400$  и  $s = 15$ . При неисправном состоянии  $Y2 = 430$  и  $s = 50$  (здесь  $s$  - среднеквадратическое отклонение). Априорное значение  $P(1) = 5\%$  и  $C(1,2)/C(2,1) = 50$ . Цены  $C(1,1)$  и  $C(2,2)$  не учитываются.

Найти  $x(0)$ .

*Решение*

$P(1) = 5\%$ ,  $\Rightarrow P(2) = 95\%$  и при известном  $C(1,2)/C(2,1)$  получаем:

$$L = \frac{0,05}{0,95} \cdot 50 = 2,632;$$

$$\frac{f(x(0)/D(1))}{f(x(0)/D(2))} = L = 2,632;$$

$$f(x(0)/D(1)) = \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - 400)^2}{2 \cdot 15^2}\right),$$

$$f(x(0)/D(2)) = \frac{1}{50\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - 430)^2}{2 \cdot 50^2}\right),$$

$$x^2 - 0,794 \cdot 10^3 x + 15,74 \cdot 10^4 = 0,$$

$$x(0) = 411,46.$$

## 6.5. Метод наибольшего правдоподобия

Этот метод для записи своего решающего правила использует следующее отношение правдоподобия:

$$x \text{ относится к } D(1), \text{ если } \frac{f[x/D(1)]}{f[x/D(2)]} > 1;$$

$$x \text{ относится к } D(2), \text{ если } \frac{f[x/D(1)]}{f[x/D(2)]} < 1,$$

где  $x$  - диагностируемый параметр исследуемого объекта.

Оптимальное значение (граничное)  $x = x(0)$  находят из следующего условия:

$$f[x/D(1)] = f[x/D(2)].$$

Учитывая, что:

$$\frac{f[x(0)/D(1)]}{f[x(0)/D(2)]} = \frac{P[D(2)] \cdot [C(1,2) - C(2,2)]}{P[D(1)] \cdot [C(2,1) - C(1,1)]},$$

видно, что они совпадают, если:

$$\frac{P[D(2)] \cdot [C(1,2) - C(2,2)]}{P[D(1)] \cdot [C(2,1) - C(1,1)]} = 1. \quad (6.10)$$

В большинстве практических задач используют условие (6.9), поэтому, (6.10) принимает вид:

$$(P[D(2)] \cdot C(1,2)) / (P[D(1)] \cdot C(2,1)) = 1$$

Точность предсказаний, которую гарантируют рассмотренные методы, примерно одного порядка, но для их использования требуется различный объём статистической информации. Наибольший он в методе Байеса, наименьший - в методе последовательного анализа. Выбор метода зависит от конкретных решаемых задач, что проиллюстрировано в данной лабораторной работе. Однако следует иметь в виду, что в инженерной практике все же наибольшее распространение получили методы последовательного анализа и минимального риска.

Выполнение данной лабораторной работы включает в себя два этапа.

1. Определение работоспособности отдельных блоков на основании статистической информации с помощью методов минимального риска и наибольшего правдоподобия.

2. Определение работоспособности прибора в целом на основе данных из предыдущего пункта с помощью методов Байеса и последовательного анализа.



## 6.6. Исходные данные и порядок выполнения работы

### *Исходные данные*

Прибор состоит из 6 блоков, каждый из которых характеризуется определенными параметрами, заданными в варианте.

### *Этап 1*

Условия задачи для расчета одного блока. Дано:

- для исправного состояния (диагноз  $D(1)$ ): среднее значение параметра  $Y_1$  и его среднеквадратическое отклонение  $\sigma_1$ ;
- для неисправного состояния (диагноз  $D(2)$ ):  $Y_2$  и  $\sigma_2$ ;
- соотношение стоимостей пропуска цели  $C(1,2)/C(2,1) = 50$ ;
- априорная вероятность выхода блока из строя  $P[D(2)]$ ;
- имеющееся значение параметра  $Y$ .

Необходимо получить предельное значение параметра  $Y_0$ , при котором еще можно продолжить эксплуатацию, и данные о работоспособности каждого блока, определяемые на основе сравнения  $Y_0$  (полученного методом минимального риска) с имеющимся значением параметра  $Y$ .

Результатом первого этапа является получение набора признаков для выполнения второго этапа.

### *Этап 2*

Условия задачи для расчета прибора. Дано:

- данные о работоспособности каждого блока (из предыдущего этапа);
- кратность резервирования блока;
- априорная вероятность выхода прибора из строя  $P[D(2)]$ ;
- границы принятия решений:  $A=4$  и  $B=0,25$  (для метода последовательного анализа).

### *Задание*

- зная кратность резервирования блоков (отношение суммы основных и резервных блоков к количеству основных) и данные об их работоспособности, определить вероятности выхода прибора из строя  $P[k(i)/D(k)]$  при наличии того или иного признака (см. пример ниже);
- получить вероятность суммарного диагноза, причем в методе последовательного анализа очередность выбора признака определяется из полученных вероятностей  $P[k(i)/D(k)]$ . При защите объясните свой выбор.

*Примечание.* Если по результатам первого этапа все блоки исправны, то второй этап не выполняется!

Для определения вероятностей  $P(k(i)/D(k))$  воспользуйтесь следующим примером.

### Пример

Пусть имеются следующие данные о кратности резервирования и работоспособности блоков (см. табл. 6.1), где 1 – блок работоспособен, 0 – неработоспособен.

Таблица 6.1.

№ блока	Работоспособность	Кратность резервирования
1	1	1
2	0	2
3	1	3
4	0	4
5	0	5
6	1	10

Тогда, работоспособность резервных блоков распределяется так:  
 $P(k(1)/D(2)) = 00\%$ ,  $P(k(2)/D(2)) = 50\%$ ,  $P(k(3)/D(2)) = 00\%$ ,  
 $P(k(4)/D(2)) = 25\%$ ,  $P(k(5)/D(2)) = 20\%$ ,  $P(k(6)/D(2)) = 00\%$ ,

и выполняется условие:

$$P(k(i)/D(1)) = 1 - P(k(i)/D(2)).$$

### Порядок работы

1. Ознакомиться с краткой теорией по работе, и получить у преподавателя номер варианта задания.

2. Запустить программу, ввести исходные данные к первому этапу работы (см. табл. 6.2 и 6.3).

3. Выполнить расчеты для первого этапа.

4. Выполнить второй этап. Для этого определить вероятности  $P(k(i)/D(k))$  (аналогично рассмотренному примеру) и ввести их в соответствующие графы таблицы. Ввести кратность резервирования по каждому блоку.

5. Выполнить расчеты.

6. Войти в просмотр отчета и получить распечатку отчета. В случае если машина сообщит о неверности решения какой-либо задачи, к отчету требуется приложить (сделанное дома) правильное решение с объяснением. Отчет подписать у преподавателя.

### Содержание отчёта

- цель работы;
- краткие теоретические сведения;
- результаты работы – распечатка;
- выводы по работе (объяснение результатов).

Варианты

Таблица 6.2.

Номер варианта	Номер блока	Параметр $Y$	Исходное состояние		Неисправное состояние		Вероятность выхода из строя $\sigma$ , %
			$Y_1$	$\sigma_1$	$Y_2$	$\sigma_2$	
1	1	404	400	15	430	50	5
	2	316	290	10	360	40	10
	3	204	200	7	210	30	4
	4	530	470	20	570	60	13
	5	643	590	12	650	55	6
	6	660	620	16	670	36	8
2	1	116	100	7	128	30	8
	2	52	50	2	58	20	5
	3	370	350	14	400	37	9
	4	720	700	22	760	50	4
	5	805	800	25	890	60	3
	6	925	900	24	960	50	6
3	1	510	500	10	520	20	1
	2	12	10	1	13	5	2
	3	4050	4000	40	4200	60	12
	4	625	620	15	670	45	8
	5	125	100	5	128	20	8
	6	55	50	4	58	27	5
4	1	610	590	18	650	64	6
	2	475	470	16	568	50	13
	3	355	350	12	400	35	9
	4	209	200	8	210	26	4
	5	726	700	30	760	55	4
	6	302	290	9	360	11	10
5	1	810	800	23	890	55	3
	2	414	400	17	430	48	5
	3	930	900	28	960	60	6
	4	508	500	10	510	30	1
	5	51	50	4	58	16	5
	6	55	50	4	58	27	5

Продолжение таблицы 6.2.

Номер варианта	Номер блока	Параметр $Y$	Исходное состояние		Неисправное состояние		Вероятность выхода из строя $\sigma$ , %
			$Y_1$	$\sigma_1$	$Y_2$	$\sigma_2$	
6	1	14	10	2	13	4	2
	2	596	590	10	650	50	6
	3	305	290	11	360	42	10
	4	108	100	5	128	32	8
	5	716	700	24	760	45	4
	6	640	620	15	670	35	8
7	1	404	400	15	430	50	5
	2	116	100	7	128	30	8
	3	510	500	10	520	20	1
	4	610	590	18	650	64	6
	5	810	800	23	890	55	3
	6	14	10	2	13	4	2
8	1	316	290	10	360	40	10
	2	52	50	2	58	20	5
	3	12	10	1	13	5	2
	4	475	470	16	568	50	13
	5	414	400	17	430	48	5
	6	596	590	10	650	50	6
9	1	204	200	7	210	30	4
	2	370	350	14	400	37	9
	3	4050	4000	40	4200	60	12
	4	355	350	12	400	35	9
	5	930	900	28	960	60	6
	6	305	290	11	360	42	10
10	1	530	470	20	570	60	13
	2	720	700	22	760	50	4
	3	625	620	15	670	45	8
	4	209	200	8	210	26	4
	5	508	500	10	510	30	1
	6	108	100	5	128	32	8
11	1	643	590	12	650	55	6
	2	805	800	25	890	60	3
	3	125	100	5	128	20	8
	4	726	700	30	760	55	4
	5	51	50	4	58	16	5
	6	716	700	24	760	45	4

Продолжение таблицы 6.2.

Номер варианта	Номер блока	Параметр $Y$	Исходное состояние		Неисправное состояние		Вероятность выхода из строя $\sigma$ , %
			$Y_1$	$\sigma_1$	$Y_2$	$\sigma_2$	
12	1	660	620	16	670	36	8
	2	925	900	24	960	50	6
	3	55	50	4	58	27	5
	4	302	290	9	360	11	10
	5	55	50	4	58	27	5
	6	640	620	15	670	35	8
13	1	404	400	15	430	50	5
	2	52	50	2	58	20	5
	3	4050	4000	40	4200	60	12
	4	209	200	8	210	26	4
	5	51	50	4	58	16	5
	6	640	620	15	670	35	8
14	1	316	290	10	360	40	10
	2	370	350	14	400	37	9
	3	625	620	15	670	45	8
	4	726	700	30	760	55	4
	5	55	50	4	58	27	5
	6	14	10	2	13	4	2
15	1	204	200	7	210	30	4
	2	720	700	22	760	50	4
	3	125	100	5	128	20	8
	4	302	290	9	360	11	10
	5	810	800	23	890	55	3
	6	596	590	10	650	50	6
16	1	204	200	7	210	30	4
	2	720	700	22	760	50	4
	3	125	100	5	128	20	8
	4	302	290	9	360	11	10
	5	414	400	17	430	48	5
	6	305	290	11	360	42	10
17	1	404	400	15	430	50	5
	2	316	290	10	360	40	10
	3	370	350	14	400	37	9
	4	720	700	22	760	50	4
	5	125	100	5	128	20	8
	6	55	50	4	58	27	5

Продолжение таблицы 6.2.

Номер варианта	Номер блока	Параметр $Y$	Исходное состояние		Неисправное состояние		Вероятность выхода из строя $\sigma$ , %
			$Y_1$	$\sigma_1$	$Y_2$	$\sigma_2$	
18	1	610	590	18	650	64	6
	2	475	470	16	568	50	13
	3	930	900	28	960	60	6
	4	508	500	10	510	30	1
	5	716	700	24	760	45	4
	6	640	620	15	670	35	8
19	1	316	290	10	360	40	10
	2	116	100	7	128	30	8
	3	12	10	1	13	5	2
	4	610	590	18	650	64	6
	5	414	400	17	430	48	5
	6	14	10	2	13	4	2
20	1	204	200	7	210	30	4
	2	720	700	22	760	50	4
	3	4050	4000	40	4200	60	12
	4	209	200	8	210	26	4
	5	930	900	28	960	60	6
	6	108	100	5	128	32	8
21	1	660	620	16	670	36	8
	2	805	800	25	890	60	3
	3	55	50	4	58	27	5
	4	726	700	30	760	55	4
	5	55	50	4	58	27	5
	6	716	700	24	760	45	4
22	1	404	400	15	430	50	5
	2	660	620	16	670	36	8
	3	116	100	7	128	30	8
	4	925	900	24	960	50	6
	5	510	500	10	520	20	1
	6	55	50	4	58	27	5
23	1	316	290	10	360	40	10
	2	643	590	12	650	55	6
	3	52	50	2	58	20	5
	4	805	800	25	890	60	3
	5	12	10	1	13	5	2
	6	125	100	5	128	20	8

Продолжение таблицы 6.2.

Номер варианта	Номер блока	Параметр $Y$	Исходное состояние		Неисправное состояние		Вероятность выхода из строя $\sigma$ , %
			$Y_1$	$\sigma_1$	$Y_2$	$\sigma_2$	
24	1	204	200	7	210	30	4
	2	530	470	20	570	60	13
	3	370	350	14	400	37	9
	4	720	700	22	760	50	4
	5	4050	4000	40	4200	60	12
	6	625	620	15	670	45	8
25	1	610	590	18	650	64	6
	2	302	290	9	360	11	10
	3	810	800	23	890	55	3
	4	55	50	4	58	27	5
	5	14	10	2	13	4	2
	6	640	620	15	670	35	8
26	1	475	470	16	568	50	13
	2	726	700	30	760	55	4
	3	414	400	17	430	48	5
	4	51	50	4	58	16	5
	5	596	590	10	650	50	6
	6	716	700	24	760	45	4
27	1	355	350	12	400	35	9
	2	209	200	8	210	26	4
	3	930	900	28	960	60	6
	4	508	500	10	510	30	1
	5	305	290	11	360	42	10
	6	108	100	5	128	32	8
28	1	404	400	15	430	50	5
	2	643	590	12	650	55	6
	3	116	100	7	128	30	8
	4	805	800	25	890	60	3
	5	510	500	10	520	20	1
	6	125	100	5	128	20	8
29	1	475	470	16	568	50	13
	2	302	290	9	360	11	10
	3	414	400	17	430	48	5
	4	55	50	4	58	27	5
	5	596	590	10	650	50	6
	6	640	620	15	670	35	8

Продолжение таблицы 6.2.

Номер варианта	Номер блока	Параметр $Y$	Исходное состояние		Неисправное состояние		Вероятность выхода из строя $\sigma$ , %
			$Y_1$	$\sigma_1$	$Y_2$	$\sigma_2$	
30	1	370	350	14	400	37	9
	2	643	590	12	650	55	6
	3	12	10	1	13	5	2
	4	475	470	16	568	50	13
	5	414	400	17	430	48	5
	6	305	290	11	360	42	10
31	1	643	590	12	650	55	6
	2	805	800	25	890	60	3
	3	55	50	4	58	27	5
	4	302	290	9	360	11	10
	5	930	900	28	960	60	6
	6	305	290	11	360	42	10
32	1	530	470	20	570	60	13
	2	720	700	22	760	50	4
	3	625	620	15	670	45	8
	4	660	620	16	670	36	8
	5	925	900	24	960	50	6
	6	55	50	4	58	27	5

Таблица 6.3.

Номер варианта	Номер блока	Кратность резервирования	Априорная вероятность выхода прибора из строя, %
1	1	2	24
	2	3	
	3	2	
	4	4	
	5	5	
	6	2	
2	1	4	30
	2	2	
	3	3	
	4	2	
	5	2	
	6	5	



Продолжение таблицы 6.3.

Номер варианта	Номер блока	Кратность резервирования	Априорная вероятность выхода прибора из строя, %
3	1	3	10
	2	4	
	3	2	
	4	5	
	5	2	
	6	3	
4	1	2	40
	2	4	
	3	3	
	4	5	
	5	3	
	6	2	
5	1	4	15
	2	5	
	3	3	
	4	2	
	5	3	
	6	2	
6	1	2	25
	2	3	
	3	4	
	4	2	
	5	3	
	6	4	
7	1	4	20
	2	2	
	3	5	
	4	4	
	5	2	
	6	2	
8	1	2	12
	2	3	
	3	2	
	4	2	
	5	4	
	6	2	

Продолжение таблицы 6.3.

Номер варианта	Номер блока	Кратность резервирования	Априорная вероятность выхода прибора из строя, %
9	1	5	25
	2	4	
	3	3	
	4	2	
	5	2	
	6	2	
10	1	3	30
	2	2	
	3	3	
	4	3	
	5	4	
	6	2	
11	1	2	40
	2	2	
	3	2	
	4	5	
	5	3	
	6	2	
12	1	3	15
	2	4	
	3	5	
	4	2	
	5	3	
	6	2	
13	1	3	22
	2	2	
	3	2	
	4	3	
	5	3	
	6	4	
14	1	2	20
	2	3	
	3	4	
	4	5	
	5	2	
	6	3	

Продолжение таблицы 6.3.

Номер варианта	Номер блока	Кратность резервирования	Априорная вероятность выхода прибора из строя, %
15	1	4	10
	2	5	
	3	5	
	4	3	
	5	4	
	6	5	
16	1	3	15
	2	4	
	3	2	
	4	3	
	5	4	
	6	3	
17	1	5	10
	2	4	
	3	3	
	4	2	
	5	2	
	6	3	
18	1	2	10
	2	3	
	3	3	
	4	2	
	5	2	
	6	3	
19	1	4	40
	2	5	
	3	3	
	4	2	
	5	3	
	6	4	
20	1	4	30
	2	3	
	3	2	
	4	3	
	5	2	
	6	2	

Продолжение таблицы 6.3.

Номер варианта	Номер блока	Кратность резервирования	Априорная вероятность выхода прибора из строя, %
21	1	3	40
	2	4	
	3	2	
	4	3	
	5	2	
	6	3	
22	1	4	30
	2	3	
	3	2	
	4	3	
	5	2	
	6	2	
23	1	2	20
	2	3	
	3	4	
	4	2	
	5	5	
	6	3	
24	1	2	15
	2	3	
	3	2	
	4	3	
	5	4	
	6	2	
25	1	2	10
	2	3	
	3	2	
	4	2	
	5	2	
	6	3	
26	1	4	20
	2	5	
	3	3	
	4	2	
	5	2	
	6	2	

Продолжение таблицы 6.3.

Номер варианта	Номер блока	Кратность резервирования	Априорная вероятность выхода прибора из строя, %
27	1	3	10
	2	4	
	3	2	
	4	2	
	5	4	
	6	2	
28	1	3	10
	2	2	
	3	3	
	4	2	
	5	2	
	6	3	
29	1	4	15
	2	2	
	3	4	
	4	2	
	5	4	
	6	2	
30	1	4	24
	2	2	
	3	4	
	4	2	
	5	4	
	6	2	
31	1	4	30
	2	2	
	3	4	
	4	2	
	5	3	
	6	2	
32	1	2	10
	2	2	
	3	3	
	4	4	
	5	3	
	6	5	

## Контрольные вопросы

1. Что называют прогнозированием?
2. Какие бывают состояния у ЭВА?
3. Что такое диагноз?
4. Чем отличаются ошибки 1-го и 2-го рода? Какая из них опаснее?
5. Какие методы используются для прогнозирования в работе?
6. В чем достоинства и недостатки метода Байеса?
7. Что такое риск, и от каких параметров он зависит?
8. Что такое кратность резервирования?
9. В чем недостатки резервирования?
10. Как распределяется вероятность работоспособности по резервным блокам?
11. Чему равно пороговое значение для решающего правила метода Байеса?
12. Что произойдет, если пороговое значение будет меньше (больше) данной границы?
13. Может ли быть диагнозов больше двух? Какой метод диагностирования при этом необходимо использовать?

## 7. Лабораторная работа №6 «Исследование надежности электронных устройств методом матричных испытаний»

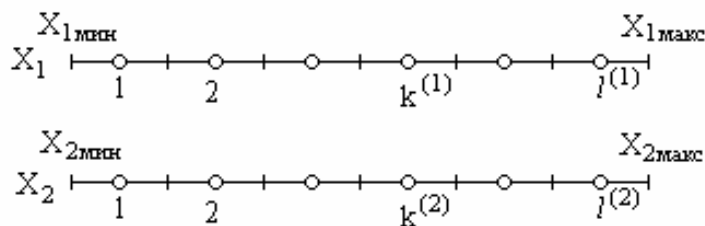
### *Цель работы*

В данной лабораторной работе ставится цель дать студенту общее представление об оптимизации надежности устройства на основе результатов матричных испытаний.

### 7.1. Краткие теоретические сведения

Суть метода матричных испытаний и задачу оптимизации надежности по результатам этих испытаний поясним на примере устройства, работоспособность которого существенным образом зависит только от двух параметров  $X_1$  и  $X_2$ .

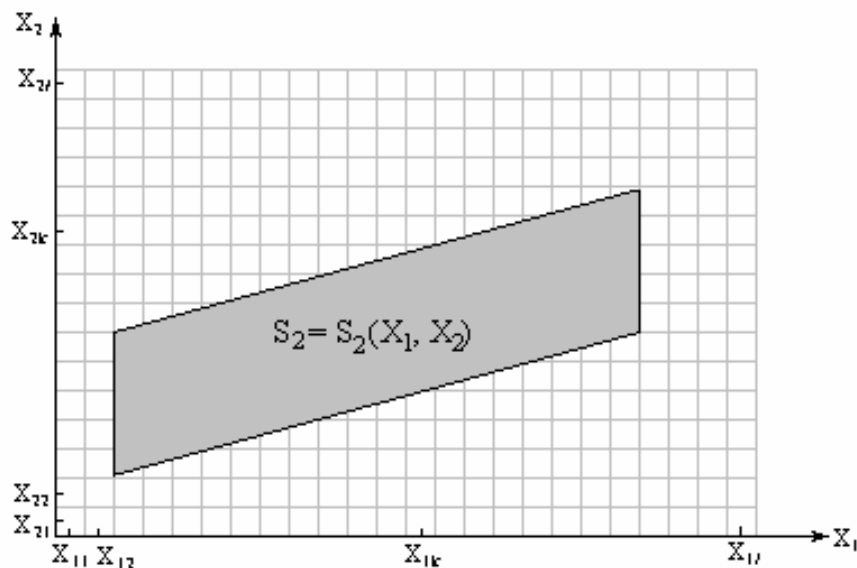
Пусть диапазон возможного изменения этих параметров задан интервалами  $[X_{1\text{мин}}, X_{1\text{макс}}]$ ,  $[X_{2\text{мин}}, X_{2\text{макс}}]$ . Разобьем эти интервалы эквидистантно на  $l^{(1)}$  и  $l^{(2)}$  квантов соответственно (см. рис. 7.1). В качестве представителей квантов выберем значения параметров, соответствующие серединам квантов. При этом, если устройство оказывается неработоспособным (работоспособным) при данном значении параметра, соответствующем представителю кванта, то мы будем считать, что схема не работает (работает) при всех значениях параметров, лежащих в этом кванте.



**Рис. 7.1. Квантование диапазонов возможного изменения двух определяющих параметров**

Введем понятие ситуации, где под ситуацией будем понимать такое состояние устройства, когда каждый из его двух определяющих параметров (для двумерного случая) принимает значение, соответствующее представителю определенного кванта. Это определение легко распространяется на  $n$ -мерный случай. Число всех возможных ситуаций устройства в двумерном случае, очевидно, равно:

$$N_2 = l^{(1)} \cdot l^{(2)}.$$



**Рис. 7.2. Область работоспособности ЭВА**

Перебрав в какой-либо последовательности все несовместные ситуации устройства и установив их характер (т.е. установив, является ли при данной ситуации устройство работоспособным или нет), мы получим область работоспособности исследуемого устройства  $S_2(X_1, X_2)$  для выбранного или заданного критерия его отказа. Так, на рис. 7.2 для примера показана двухмерная область работоспособности ЭВА при заданном критерии отказа.

Знание области работоспособности исследуемого устройства является необходимым условием для решения ряда различных задач, обычно рассматриваемых в теории надежности радиоэлектронных систем и, в частности задачи оптимизации надежности устройства, путем выбора номинальных значений определяющих параметров, соответствующими центру тяжести области работоспособности.

В общем случае работоспособность ЭВА может существенным образом зависеть от  $n$  определяющих входных параметров  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

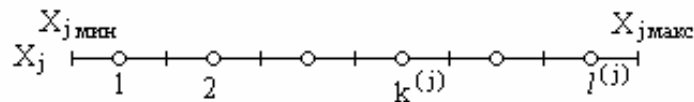
Под определяющими входными параметрами могут пониматься как характеристики различных сигналов или компонентов устройства, так и внешние факторы, воздействующие на его функционирование, например, температура окружающей среды, механические нагрузки и т.п. Задаваясь определенным выходным уровнем срабатывания исследуемого устройства (который в частном случае может совпадать с заданным или выбранным критерием его отказов), всегда можно определить разумный диапазон изменения определяющих входных параметров, который следует учитывать при проведении матричных испытаний. Этот диапазон изменения, в принципе, может быть и неограниченным. Интервал (диапазон) изменения  $j$ -го определяющего входного параметра устройства



$[X_{j\text{мин}}, X_{j\text{макс}}]$  при проведении матричных испытаний разбивается на  $l^{(j)}$  квантов, причем:

$$j=1,2,\dots,n; k^{(j)} = 1,2,\dots, l^{(j)}$$

(см. рис.7.3). Представителем крайнего кванта, соответствующего началу или концу диапазона изменения  $X_j$ , мы будем по-прежнему считать его середину.



**Рис. 7.3. Квантование диапазона возможного изменения  $j$ -го определяющего параметра**

Для моделирования возможных состояний исследуемого безынерционного устройства с  $n$  определяющими параметрами составим матрицу ситуаций, где под ситуацией будем понимать состояние устройства, когда каждый из его  $n$  определяющих параметров принимает значение, соответствующее представителю определенного кванта. Причем, очевидно, что в каждой ситуации любой параметр может встретиться только один раз.

Число всех возможных ситуаций равно:

$$N = \prod_{j=1}^n l^{(j)}.$$

Упорядоченная определенным образом, например матричным построением, последовательность всех возможных ситуаций устройства обозначается:

$$\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_v, \dots, \alpha_N.$$

С принципиальной точки зрения, очевидно, нет никаких трудностей в том, чтобы перебрать все возможные ситуации устройства, т.е. провести матричные испытания устройства. При этом будут автоматически учтены все факторы, влияющие на работоспособность устройства, в том числе и второстепенные, которые при других видах моделирования, как правило, не рассматриваются. Очевидно также, что в ситуациях  $\{\alpha_N\}$  учитывается изменение (дискретное) всех определяющих параметров одновременно.

Среди  $N$  возможных ситуаций устройства при матричных испытаниях будет обнаружено некоторое количество  $Q$  отказов с точки зрения заданного уровня срабатывания или критерия отказа рассматриваемого устройства.

Таким образом, проведение матричных испытаний позволяет определить  $n$ -мерную область работоспособности исследуемого устройства:

$$S_n(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Для оптимизации надежности устройства необходимо выбрать значения определяющих параметров, соответствующие координатам центра тяжести  $n$ -мерной области работоспособности  $S_n$ .

Координата центра тяжести по  $j$ -му параметру определяется следующим образом:

$$X_{jc} = \frac{1}{N - Q} \cdot \left\{ X_{j1}(N_1 - Q_{j1}) + (X_{j1} + \Delta X_j)(N_1 - Q_{j2}) + \dots \right. \\ \left. \dots + [X_{j1} + (I^{(j)} - 1)\Delta X_j](N_1 - Q_{jI^{(j)}}) \right\},$$

где  $X_{j1}$  - значение 1-го кванта для  $j$ -го параметра;

$N$  - число всех ситуаций, соответствующих матричным испытаниям;

$Q$  - число отказовых ситуаций;

$Q_{ji}$  - число отказовых ситуаций при значении  $i$ -го кванта  $j$ -го параметра.

При эквидистантном разбиении:

$$\Delta X_j = X_{j,k^{(j)}+1} - X_{j,k^{(j)}}, \quad N_1 = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n I^{(i)}.$$

Величина:

$$P = 1 - \frac{Q}{N}$$

может характеризовать вероятность безотказной работы или схемную надежность устройства.

Однако следует при этом учитывать, что указанная величина будет, как правило, несколько заниженной по сравнению с действительной, т.к. в данном случае предполагается равная возможность для всех отказовых ситуаций. В действительности, вероятность проявления некоторых ситуаций может быть малой, в то время как вероятность появления других ситуаций - значительно большей.

## 7.2. Сравнение различных методов определения надежности ЭВА

Надежность ЭВА можно определить, исследуя соответствующие математические и физические модели. Испытаниями таких моделей можно заменить испытания реальных устройств. Возможны три вида испытаний моделей: статистические, испытания при частных значениях входных параметров и матричные.

Статистические испытания проводятся с применением метода Монте-Карло. Идея этого метода состоит в том, что исследуемый случайный процесс моделируется с помощью выбора по жребию отдельных реализаций процесса. Закон выбора реализаций основывается на статистических закономерностях процесса. Метод Монте-Карло представляет собой метод численного решения вероятностных задач.

Испытания при частных значениях входных параметров (наиболее распространенный вид испытаний на моделях), заключается в том, что с помощью датчиков и соответствующих устройств (например, термокамер, барокамер и т.д.) задаются конкретные условия работы модели. Одновременно производится наблюдение за поведением выходных параметров модели. Частным видом таких испытаний являются граничные испытания.

Метод граничных испытаний можно кратко охарактеризовать следующим образом. При заданном критерии отказа исследуемого устройства определяют тем или иным способом все основные параметры, от которых работоспособность устройства зависит существенным образом. Затем из числа этих параметров выбирают один (крайне редко два) характеристический параметр, от которого работоспособность устройства зависит наиболее сильно. Далее, для каждого из основных параметров определяют границы области устойчивой работы исследуемого устройства путем дискретного (через определенный интервал) изменения характеристического параметра и путем непрерывного изменения основного параметра (или наоборот) или дискретного изменения обоих параметров одновременно.

Методу граничных испытаний свойственны следующие недостатки:

1. Выделение характеристического параметра всегда носит достаточно искусственный характер. При испытаниях не учитывается, что в общем случае каждый основной параметр зависит от остальных и это обстоятельство должно существенным образом сказываться на форме области работоспособности исследуемого устройства в соответствии ее границах.
2. Не учитывается одновременно влияние внешних факторов, воздействующих на функционирование устройства.

3. Результаты граничных испытаний не позволяют корректно определять оптимальную рабочую точку в области работоспособности исследуемого устройства.

От перечисленных недостатков свободен метод матричных испытаний, рассмотренный в настоящей лабораторной работе.

В выполняемой работе сделаны следующие допущения:

- Устройство в большей степени зависит от 4 параметров: А, В, С и D.
- Существуют зависимости между А и В, А и С, А и D, но нет взаимосвязей между В, С и D.
- Значения квантов берутся в целочисленном представлении.
- Областью работоспособности устройства считается пересечение всех областей.

### **7.3. Порядок выполнения работы. Задания по работе**

#### *Порядок выполнения работы*

1. Ознакомиться с методическими указаниями. Узнать у преподавателя свой вариант.

2. Ответить на контрольные вопросы.

3. Выполнить лабораторную работу на ЭВМ:

- запустить программу;
- набрать свои данные (ФИО, номер группы и вариант);
- можно ввести границы параметров (необязательно чтобы они совпадали с минимальными и максимальными значениями);
- ввести число квантов  $K$  (5...25);
- рассчитать области работоспособности для пар А и В, А и С, А и D;
- после вычислений выбрать имя файла для вывода результатов работы;
- открыть файл текстовым редактором и распечатать результаты расчетов (можно дома).

4. Построить общую область работоспособности устройства (зависимость параметров В, С и D от А).

5. Рассчитать величину вероятности безотказной работы и центры тяжести для всех параметров.

6. Оформить отчет по лабораторной работе.

#### *Содержание отчёта*

- цель работы;
- краткие теоретические сведения;
- результаты работы – распечатка, построенная область работоспособности и рассчитанные центры тяжести для каждого

- параметра;
- выводы по работе (объяснение результатов).

*Варианты*

Таблица 7.1.

№ Ва- ри- ан- та	Параметры							
	А		В		С		D	
	мин.	макс.	мин.	макс.	мин.	макс.	мин.	макс.
1	371	13181	155	648	522	5610	896	14501
2	448	5669	960	7378	700	12669	156	6043
3	465	5454	959	1932	71	2547	211	9157
4	839	2075	453	933	196	5391	965	9702
5	949	2675	755	2942	106	9404	854	1599
6	694	13618	783	13330	127	10014	824	6270
7	862	3286	462	14721	502	2500	811	13000
8	483	600	248	11782	360	11697	313	12632
9	698	1475	687	12871	80	10640	860	6453
10	464	4133	117	11141	892	1466	162	1308
11	237	8880	73	4570	285	13975	931	11040
12	581	4243	129	8226	460	8108	497	7166
13	984	11421	640	7623	876	12389	899	5698
14	343	1598	474	3382	643	14264	55	4396
15	768	1104	571	10124	855	5077	667	12199
16	17	14772	848	12448	581	5317	391	8412
17	895	4224	855	2015	92	14187	974	4742
18	412	12693	998	6077	292	13041	422	9664
19	65	4354	495	7797	26	3550	567	10393
20	468	7642	798	5508	685	10453	158	13557
21	325	2547	357	4589	123	6584	5	2000
22	487	3258	258	2587	258	6598	35	3250
23	356	12300	445	2525	254	9523	64	10258
24	600	1248	367	10450	256	10456	78	13564
25	80	2300	697	12456	325	12123	98	12658
26	357	4758	257	8500	657	2564	125	12458
27	159	2018	358	6325	654	4951	328	9820
28	254	1345	886	1452	459	6257	369	6520
29	856	3258	995	3258	890	3158	350	3540
30	657	4589	378	6521	600	6210	215	6540

## Контрольные вопросы

1. Что называется квантом?
2. Что понимается под понятием ситуация?
3. Как находится область работоспособности исследуемого устройства?
4. Для чего необходимо знать область работоспособности устройства?
5. Что можно принять в качестве определяющего входного параметра?
6. Что можно определить с помощью критерия отказа?
7. Для чего нужно рассчитывать координаты центра тяжести?
8. Почему величина вероятности безотказной работы будет неточной?
9. Какие существуют виды испытаний математических и физических моделей?
10. Какова идея статистических испытаний?
11. Какой вид испытаний наиболее распространен и в чем он заключается?
12. Какие недостатки у метода граничных испытаний?
13. Какой метод лишен недостатков метода граничных испытаний и почему?
14. Какие допущения сделаны в работе?

## Литература

1. Батищев Д.И. Методы оптимального проектирования.: Учеб. пособие для вузов. - М.-: Радио и связь, 1984. -248с.,ил.
2. Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. Численные методы.- 4-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
3. В.И. Киреев, А. В. Пантелеев Численные методы в примерах и задачах.- Изд. 2-е, стер. М.: Высшая школа, 2006.
4. Железнов И.Г. Сложные технические системы (оценка характеристик): Учеб. Пособие для техн. Вузов. - М.: Высш. шк., 1984.
5. Аттетнов А.В.и др. Методы оптимизации. Вып.XIV(в пер.) Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 440с.
6. Гришин В.К. Статистические методы анализа и планирования экспериментов. Изд-во Московского университета, 1975г.
7. Фролов В.А. Математические модели и методы оптимального проектирования ЭВА и РЭА. - Харьков, 1985г.
8. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М. : Наука, 1980.
9. Г.Реклейтис,А.Рейвиндран,К.Рэгсдел. Оптимизация в технике (в двух книгах ). Перевод с английского. Москва. "Мир" 1986.
10. Е.М.Кудрявцев Исследование операций в задачах, алгоритмах и программах. Москва, "Радио и связь" 1984.
11. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановская Ю.В. "Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий", М., "Наука", 1971.
12. Васильев Б.В., Козлов В.А., Ткаченко Л.Г., Надежность и эффективность радиоэлектронных устройств. Советское радио, 1964, стр. 285-364.

# Приложения



## Приложение I

### Порядок построения графиков с помощью программы 3D Grapher v.1.2

Программа является бесплатно распространяемой по принципу «как есть». 3D Grapher имеет русский интерфейс и предназначена для построения как двухмерных, так и трехмерных графиков (поверхностей) с большим количеством настроек. Причем, имеется возможность отображения сразу нескольких графиков в одной системе координат, построения графиков в полярных координатах, печатать и копировать построенный график во внешнее приложение.

Для построения графика необходимо.

1. Зайти в меню «Графики»→«Добавить график функции». В появившемся окне:

- задать имя в соответствующем поле;
- установить «Координаты» в значение «декартовы»;
- задать в поле «Функция» (соблюдая регистр):
  - « $X(u,v,t)=$ » → $u$ ;
  - « $Y(u,v,t)=$ » → $v$ ;
  - « $Z(u,v,t)=$ » →функцию, зависящую от  $u$  и  $v$ ;
- задать интервалы построения по переменным  $u$  и  $v$ ;
- задать число шагов по каждой переменной (ограничено 1000 шагами и зависит от производительности ЭВМ);
- убрать галочки с «Точки» и с «Линии» (для 3D-графиков);
- поставить галочки «Поверхность» и «Освещение» (для 3D-графиков);
- выбрать цвет «Поверхность» и «Освещение» (желательно ставить близкие цвета, например, зеленый и светло зеленый) - для 3D-графиков.

2. Далее зайти в меню «Графики» →«Внешний вид». В появившемся окне:

- убрать галочки со всех «Границ»;
- поставить галочки на всех шести плоскостях линий сетки;
- установить «Шаг» →1;
- по всем осям выбрать цвет (лучше бледнее).

3. Зайти в меню «Графики» →«Параметры построения». В появившемся окне поставить «Масштаб»→1.

4. Кнопкой «Круговое вращение» выбрать нужный ракурс.

### *Некоторые дополнительные возможности*

Двойной щелчок левой кнопки мыши по имени графика в левом окне позволяет войти в меню, в котором можно поменять основные параметры для построения графика.

Цвета для графика и осей рекомендуется выбирать темными.

Количество шагов определяет «зернистость» графика, и для построения поверхностей, рекомендуется выбирать возможно большее значение.

Для построения 2D-графиков необходимо одну из переменных « $X(u,v,t)=$ » или « $Y(u,v,t)=$ » сделать равной 0. Тогда, функция должна зависеть только от второй переменной. Не забудьте поставить галочки «Точки» и «Линии», убрать галочки с «Поверхность» и «Освещение» в меню «Графики»→«Добавить график функции».

Скопировать нарисованный график во внешнее приложение можно набором команд:

«Правка»→«Копировать»→«В буфер обмена».

Сохранить график можно так:

«Файл»→«Сохранить».

## Приложение II Определение значений гамма-функции

Таблица 1.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,00	1,0000	0,9994	9983	9983	9977	9971	9966	9960	9954	9949
1	0,9943	9938	9932	9927	9921	9916	9910	9905	9899	9894
2	9888	9883	9878	9872	9867	9862	9856	9851	9846	9841
3	9835	9830	9825	9820	9815	9810	9805	9800	9794	9789
4	9784	9779	9774	9769	9764	9759	9755	9750	9745	9740
5	9735	9730	9725	9721	9716	9711	9706	9702	9697	9692
6	9687	9683	9678	9673	9669	9664	9660	9655	9651	9646
7	9642	9637	9633	9628	9624	9619	9615	9610	9606	9602
8	9597	9593	9589	9584	9580	9576	9571	9567	9563	9559
9	9555	9550	9546	9542	9538	9534	9530	9526	9522	9518
1,10	9514	9509	9505	9501	9498	9494	9490	9486	9482	9478
1	9474	9470	9466	9462	9459	9455	9451	9447	9443	9440
2	9436	9432	9428	9425	9421	9417	9414	9410	9407	9403
8	9399	9396	9392	9389	9385	9382	9378	9375	9371	9368
4	9364	9361	9357	9354	9350	9347	9344	9340	9337	9334
5	9330	9327	9324	9321	9317	9314	9311	9308	9304	9301
6	9298	9295	9292	9289	9285	9282	9279	9276	9273	9270
7	9267	9264	9261	9258	9255	9252	9249	9246	9243	9240
8	9237	9234	9231	9229	9226	9223	9220	9217	9214	9212
9	9209	9206	9203	9201	9198	9195	9192	9190	9187	9184
1,20	9182	9179	9176	9174	9171	9169	9166	9163	9161	9158
1	9156	9153	9151	9148	9146	9143	9141	9138	9136	9133
2	9131	9129	9126	9124	9122	9119	9117	9114	9112	9110
3	9108	9105	9103	9101	9098	9096	9094	9092	9090	9087
4	9085	9083	9081	9079	9077	9074	9072	9070	9068	9066
5	9064	9062	9060	9058	9056	9054	9052	9050	9048	9046
6	9044	9042	9040	9038	9036	9034	9032	9031	9029	9027
7	4025	9023	9021	9020	9018	9016	9014	9012	9011	9009
8	9007	9005	9004	9002	9000	8999	8997	8995	8994	8992
9	8990	8989	8987	8986	8984	8982	8981	8979	8978	8976

Продолжение таблицы 1.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,30	8975	8973	8972	8970	8969	8967	8966	8964	8963	8961
1	8960	8959	8957	8956	8954	8953	8952	8950	8949	8948
2	8946	8945	8944	8943	8941	8940	8939	8937	8936	8935
3	8934	8933	8931	8930	8929	8928	8927	8926	8924	8923
4	8922	8921	8920	8919	8918	8917	8916	8915	8914	8913
5	8912	8911	8910	8909	8908	8907	8906	8905	8904	8903
6	8902	8901	8900	8899	8898	8897	8897	8896	8895	8894
7	8893	8892	8892	8891	8890	8889	8888	8888	8887	8886
8	8885	8885	8884	8883	8883	8882	8881	8880	8880	8879
9	8879	8878	8877	8877	8876	8875	8875	8874	8874	8873
1,40	8873	8872	8872	8871	8871	8870	8870	8869	8869	8868
1	8868	8867	8867	8866	8866	8865	8865	8865	8864	8864
2	8864	8863	8863	8863	8862	8862	8862	8861	8861	8861
3	8860	8858	8860	8860	8859	8859	8859	8859	8858	8858
4	8858	8858	8858	8858	8857	8857	8857	8857	8857	8857
5	8857	8857	8856	8856	8856	8856	8856	8856	8856	8856
6	8856	8856	8856	8856	8856	8856	8856	8856	8856	8856
7	8856	8856	8856	8857	8857	8857	8857	8857	8857	8857
8	8857	8858	8858	8858	8858	8858	8859	8859	8859	8859
9	8859	8860	8860	8860	8860	8861	8861	8861	8862	8862
1,50	0,8862	8863	8863	8863	8864	8864	8864	8865	8865	8866
1	8866	8866	8867	8867	8868	8868	8869	8869	8869	8870
2	8870	8871	8871	8872	8872	8873	8873	8874	8875	8875
3	8876	8876	8877	8874	8878	8879	8879	8880	8880	8881
4	8882	8882	8883	8884	8884	8885	8886	8887	8887	8888
5	8889	8889	8890	8891	8892	8892	8893	8894	8895	8896
6	8896	8897	8898	8899	8900	8901	8901	8902	8903	8904
7	8905	8966	8907	8908	8909	8909	8910	8911	8912	8913
8	8914	8915	8916	8917	8918	8919	8920	8921	8922	8923
9	8924	8925	8926	8927	8929	8930	8931	8932	8933	8934
1,60	8935	8936	8937	8939	8940	8941	8942	8943	8944	8946
1	8947	8948	8949	8950	8952	8953	8954	8955	8957	8958
2	8959	8961	8962	8963	8964	8966	8967	8968	8970	8971
3	8972	8974	8975	8977	8978	8979	8981	8982	8984	8985
4	8986	8988	8989	8991	8992	8994	8995	8997	8998	9000
5	9001	9003	9004	9006	9007	9009	9010	9012	9014	9015
6	9017	9018	9020	9021	9023	9025	9026	9028	9030	9031
7	9033	9035	9036	9038	9040	9041	9043	9045	9047	9048
8	9050	9052	9054	9055	9057	9059	9061	9062	9064	9066
9	9068	9070	9071	9073	9075	9077	9079	9081	9083	9084

Продолжение таблицы 1.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,70	9086	9088	9090	9092	9094	9096	9098	9100	9102	9104
1	9106	9108	9110	9112	9114	9116	9118	9120	9122	9125
2	9126	9128	9130	9132	9134	9136	9138	9140	9142	9145
3	9147	9149	9151	9153	9155	9157	9160	9162	9164	9166
4	9168	9170	9173	9175	9177	9179	9182	9184	9186	9188
5	9191	9193	9195	9197	9200	9202	9204	9207	9209	9211
6	9214	9216	9218	9221	9223	9226	9228	9230	9233	9235
7	9238	9240	9242	9245	9247	9250	9252	9255	9257	9260
8	9262	9265	9267	9270	9272	9275	9277	9280	9283	9285
9	9288	9290	9293	9295	9298	9301	9303	9306	9309	9311
1,80	9314	9316	9319	9322	9325	9327	9330	9333	9335	9338
1	9341	9343	9346	9349	9352	9355	9357	9360	9363	9366
2	9368	9371	9374	9377	9380	9383	9385	9388	9391	9394
3	9397	9400	9403	9406	9408	9411	9414	9417	9420	9423
4	9426	9429	9432	9435	9435	9441	9444	9447	9450	9453
5	9456	9459	9462	9465	9468	9471	9474	9478	9481	9484
6	9487	9490	9493	9496	9499	9503	9506	9509	9512	9515
7	9518	9522	9525	9528	9531	9534	9538	9541	9544	9547
8	9551	9554	9557	9561	9564	9567	9570	9574	9577	9580
9	9584	9587	9591	9594	9597	9601	9604	9607	9611	9614
1,90	9618	9621	9625	9628	9631	9635	9638	9642	9645	9649
1	9652	9656	9659	9663	9666	9670	9673	9677	9681	9684
2	9688	9691	9695	9699	9702	9706	9709	9713	9717	9720
3	9724	9728	9731	9735	9739	9742	9746	9750	9754	9757
4	9761	9765	9768	9772	9776	9780	9784	9787	9791	9795
5	9799	9803	9806	9810	9814	9818	9822	9826	9830	9834
6	9837	9841	9845	9849	9853	9857	9861	9865	9869	9873
7	9877	9881	9885	9889	9893	9897	9901	9905	9909	9913
8	9917	9921	9925	9929	9933	9938	9942	9946	9950	9954
9	9958	9962	9966	9971	9975	9979	9983	9987	9992	9996
2,00	1,0000	0004	0008	0013	0017	0021	0026	0030	0034	0038

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

---

## КАФЕДРА ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ

### ИСТОРИЯ КАФЕДРЫ

**1945-1966 РЛПУ** (кафедра радиолокационных приборов и устройств). Решением Советского правительства в августе 1945 г. в ЛИТМО был открыт факультет электроприборостроения. Приказом по институту от 17 сентября 1945 г. на этом факультете была организована кафедра радиолокационных приборов и устройств, которая стала готовить инженеров, специализирующихся в новых направлениях радиоэлектронной техники, таких как радиолокация, радиоуправление, теленаведение и др. Организатором и первым заведующим кафедрой был д.т.н., профессор С. И. Зилитинкевич (до 1951 г.). Выпускникам кафедры присваивалась квалификация инженер-радиомеханик, а с 1956 г. – радиоинженер (специальность 0705).

В разные годы кафедрой заведовали доцент Б.С. Мишин, доцент И.П. Захаров, доцент А.Н. Иванов.

**1966–1970 КиПРЭА** (кафедра конструирования и производства радиоэлектронной аппаратуры). Каждый учебный план специальности 0705 коренным образом отличался от предыдущих планов радиотехнической специальности своей четко выраженной конструкторско-технологической направленностью. Оканчивающим институт по этой специальности присваивалась квалификация инженер-конструктор-технолог РЭА.

Заведовал кафедрой доцент А.Н. Иванов.

**1970–1988 КиПЭВА** (кафедра конструирования и производства электронной вычислительной аппаратуры). Бурное развитие электронной вычислительной техники и внедрение ее во все отрасли народного хозяйства потребовали от отечественной радиоэлектронной промышленности

решения новых ответственных задач. Кафедра стала готовить инженеров по специальности 0648. Подготовка проводилась по двум направлениям – автоматизация конструирования ЭВА и технология микросистемных устройств ЭВА.

Заведовали кафедрой: д.т.н., проф. В.В. Новиков (до 1976 г.), затем проф. Г.А. Петухов.

**1988–1997 МАП** (кафедра микроэлектроники и автоматизации проектирования). Кафедра выпускала инженеров-конструкторов-технологов по микроэлектронике и автоматизации проектирования вычислительных средств (специальность 2205). Выпускники этой кафедры имеют хорошую технологическую подготовку и успешно работают как в производстве полупроводниковых интегральных микросхем, так и при их проектировании, используя современные методы автоматизации проектирования. Инженеры специальности 2205 требуются микроэлектронной промышленностью и предприятиям-разработчикам вычислительных систем.

Кафедрой с 1988 г. по 1992 г. руководил проф. С.А. Арустамов, затем снова проф. Г.А. Петухов.

С **1997 ПКС** (кафедра проектирования компьютерных систем). Кафедра выпускает инженеров по специальности 210202 «Проектирование и технология электронно-вычислительных средств». Область профессиональной деятельности выпускников включает в себя проектирование, конструирование и технологию электронных средств, отвечающих целям их функционирования, требованиям надежности, дизайна и условиям эксплуатации. Кроме того, кафедра готовит специалистов по защите информации, специальность 090104 «Комплексная защита объектов информатизации». Объектами профессиональной деятельности специалиста по защите информации являются методы, средства и системы обеспечения защиты информации на объектах информатизации.

С 1996 г. кафедрой заведует д.т.н., профессор Ю.А. Гатчин.

За время своего существования кафедра выпустила 4264 инженеров. На кафедре защищено 62 кандидатских и 7 докторских диссертаций.