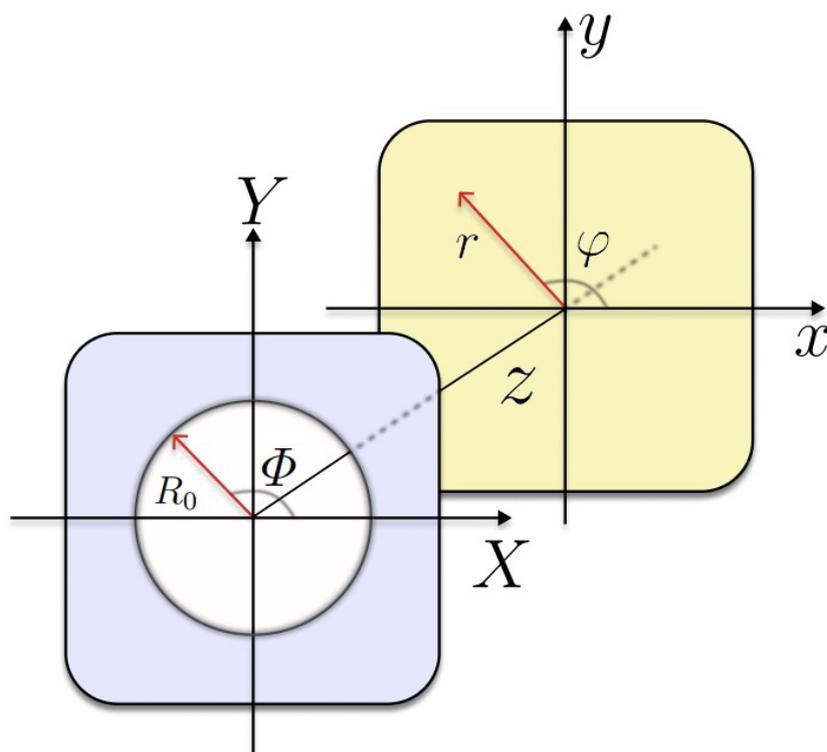


А.С. Чирцов, К.Н. Баранов, Б.В. Богданов,
В.С. Тучин, А.Р. Цветков, В.С. Шумигай

ФИЗИЧЕСКАЯ ОПТИКА



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**А.С. Чирцов, К.Н. Баранов, Б.В. Богданов,
В.С. Тучин, А.Р. Цветков, В.С. Шумигай**

ФИЗИЧЕСКАЯ ОПТИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО по
направлению подготовки 12.03.03 Фотоника и оптоинформатика
(бакалавриат), 16.03.01. Техническая физика (бакалавриат) в качестве
Учебного пособия для реализации основных профессиональных
образовательных программ высшего образования бакалавриата

 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург
2022

Чирцов А.С., Баранов К.Н., Богданов Б.В., Тучин В.С., Цветков А.Р., Шумигой В.С., Физическая оптика – СПб: Университет ИТМО, 2022. – 207 с.

Рецензент(ы):

Мельник Максим Владимирович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории квантовых процессов и измерений Университета ИТМО.

Учебное пособие разработано в соответствии с программами дисциплин «Физика» и «Физическая оптика» и предназначено для студентов, обучающихся по программам направления подготовки 12.03.03 Фотоника и оптоинформатика (бакалавриат), 16.03.01. Техническая физика (бакалавриат). Учебное пособие содержит теоретический материал, который посвящен общим вопросам классической оптики, таким как: оптические волноводы, спектральное разложение, дипольное излучение, дифракция и интерференция, а также голография и экспериментальные основы квантовой механики. В пособии разобраны основные задачи оптики, в решении которых использовались стандартные модели физики, такие как классический осциллятор, атом Томсона и др.



Университет ИТМО – национальный исследовательский университет, ведущий вуз России в области информационных, фотонных и биохимических технологий. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию – ICPC (единственный в мире семикратный чемпион), Google Code Jam, Facebook Hacker Cup, Яндекс.Алгоритм, Russian Code Cup, Topcoder Open и др. Приоритетные направления: IT, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, ArtScience, Science Communication. Входит в ТОП-100 по направлению «Автоматизация и управление» Шанхайского предметного рейтинга (ARWU) и занимает 74 место в мире в британском предметном рейтинге QS по компьютерным наукам (Computer Science and Information Systems). С 2013 по 2020 гг. – лидер Проекта 5–100.

© Университет ИТМО, 2022

© Чирцов А.С., Баранов К.Н., Богданов Б.В., Тучин В.С., Цветков А.Р., Шумигой В.С., 2022

Содержание

1	4-ЭЛЕКТРОДИНАМИКА	7
1.1	Обозначения. Преобразования Лоренца	7
1.2	Скалярное произведение 4-векторов, их норма	8
1.3	4-мерный оператор набла, 4-мерный градиент, 4-мерная дивергенция. Закон сохранения электрического заряда	11
1.4	Уравнение Д'Аламбера и релятивистский эффект Доплера	13
2	РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В ВАКУУМЕ	19
2.1	Уравнение Д'Аламбера для плоских монохроматических волн	19
2.2	Характеристики плоской монохроматической волны	20
2.3	Система уравнений Максвелла для плоской монохроматической волны	22
2.4	Волновой фронт. Поверхности постоянной фазы	23
2.5	Интенсивность электромагнитных волн	25
2.6	Поляризация электромагнитных волн	26
2.7	Монохроматические поля. Уравнение Гельмгольца	31
2.8	Открытый и закрытый резонатор	32
2.9	Прямоугольный волновод	40
2.10	Сферические волны	42
2.11	Спектральное разложение	45
2.12	Разложение в ряд Фурье	46
2.13	Преобразования Фурье	48
2.14	Энергетический аспект разложения сигнала в Фурье-спектр	51
2.15	Спектр светового пучка	53
3	КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИПОЛЬНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ	57
3.1	Электрическое поле ускоренно движущегося заряда	57
3.2	Модель атома Томсона	59
3.3	Радиационное затухание	61
3.4	Классическая оценка константы радиационного затухания	64
3.5	Однородное уширение спектра атома Томсона. Лоренцев контур	65
3.6	Спектр некогерентного источника	68
3.7	Доплеровское уширение атома Томсона. Фойтовский контур	70
3.8	Столкновительное уширение атома Томсона	72
3.9	Нормальный эффект Зеемана	73
4	РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ	79
4.1	Электромагнитные волны в веществе	79
4.2	Неоднородные волны	81

4.3	Комплексный показатель преломления. Закон Бугера	82
4.4	Диэлектрическая проницаемость газа из атомов Томсона	85
4.5	Показатель преломления газа из атомов Томсона	87
4.6	Фазовая и групповая скорость	90
4.7	Прохождение света через границу двух прозрачных диэлектриков. Формулы Френеля	93
4.8	Угол Брюстера	97
4.9	Полное внутреннее отражение	99
4.10	Распространение света в слоистых средах	102
4.11	Распространение света в проводящих средах	107
5	РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ	112
5.1	Преобразования инверсии. Вращение плоскости поляризации	112
5.2	Эффект Фарадея	113
5.3	Эффект Керра	116
5.4	Классификация кристаллических сред. Сокращенные уравнения Максвелла для плоских волн в кристалле	118
5.5	Распространение света в одноосных кристаллах	121
5.6	Распространение света в двуосных кристаллах	124
6	ДИФРАКЦИЯ	127
6.1	Постановка задачи на расчет дифракции	127
6.2	Интеграл Кирхгофа	129
6.3	Дифракция на круглом отверстии. Зоны Френеля	132
6.4	Зонные пластинки и голографические линзы	136
6.5	Дифракция на прямом крае непрозрачного экрана	138
6.6	Приближение Фраунгофера	142
6.7	Дифракция Фраунгофера на прямоугольном отверстии	143
6.8	Дифракция на периодической структуре. Дифракционная решетка	146
6.9	Дифракция на круглом отверстии	151
7	ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ	156
7.1	Определение интерференции света. Общие положения. Опыт Юнга	156
7.2	Реальный опыт Юнга	159
7.3	Пространственная когерентность. Функция видности	164
7.4	Временная когерентность	164
7.5	Интерференция методом деления волнового фронта	167
7.6	Интерференция методом деления амплитуды	168
7.7	Интерферометр Фабри-Перо. Многолучевая интерференция	171

7.8	Интерферометр Майкельсона. Экспериментальное определение скорости света	173
7.9	Голография. Схема работы голографической установки	175
7.10	Запись голограмм	176
7.11	Синусоидальная решётка	180
8	ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ	183
8.1	Ультрафиолетовая катастрофа. Опыт Резерфорда	183
8.2	Абсолютно чёрное тело	184
8.3	Плотность энергии излучения черного тела	187
8.4	Гипотеза Планка	193
8.5	Фотоны. Первое знакомство. Фотоэффект	194
	ПРИЛОЖЕНИЕ	197
	Световое давление	197
	Генерация второй гармоники	199
	Самофокусировка и самоканализация	205
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	207

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии рассмотрены основы физической оптики и элементы квантовой механики. Данная работа предназначена для студентов, обучающихся по направлениям 12.03.03 – «Фотоника и оптоинформатика» и 16.03.01 - «Техническая физика». Целью учебного пособия является: сформировать у студентов базовые знания в области волновой оптики, а именно в вопросах интерференции и дифракции света, распространении света в изотропных и анизотропных средах, а также основах голографии и экспериментальных основ квантовой механики с дополнением по нелинейной оптике.

Учебное пособие может быть использовано как дополнение к курсу лекций по общей физике и физической оптики у студентов 2-го курса. По курсу «Физика» количество часов СРС составляет 144 часа, по курсу «Физическая оптика» - 108 часов. Учебное пособие может быть также полезно для научных работников, аспирантов, студентов и преподавателей, интересующихся этой областью знаний.

1 4-ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1.1 Обозначения. Преобразования Лоренца



Определение 1.1. **4-вектором** по определению называется совокупность из трех (пространственных) компонент трехмерного вектора и нулевой (временной) компоненты, которая совместно с пространственными при переходах между инерциальными системами отсчета преобразуется в соответствии с преобразованиями Лоренца.

В матричной форме 4-вектор записывается следующим образом:

$$\vec{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_t \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее любой 4-вектор будет обозначаться заглавной буквой жирным шрифтом со стрелкой $\vec{\mathbf{A}}$.

Необходимость введения 4-векторов обусловлена тем, что при преобразованиях Лоренца длины используемых в классической нерелятивистской физике обычных трехмерных векторов не являются инвариантами относительно перехода из одной системы координат в другую. Введение 4-мерного пространства-времени Минковского решает эту проблему. Ранее длина вектора определялась корнем из его скалярного произведения самого на себя, поэтому и в дальнейшем построение компонент 4-векторов будет требовать инвариантности скалярного произведения уже 4 вектора самого на себя.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета $Oxyz$ и $O'x'y'z'$. Здесь и далее "штрихованная" система координат движется равномерно и прямолинейно относительно "нештрихованной" системы со скоростью \vec{v} , то есть в $Oxyz$ находится неподвижный наблюдатель.

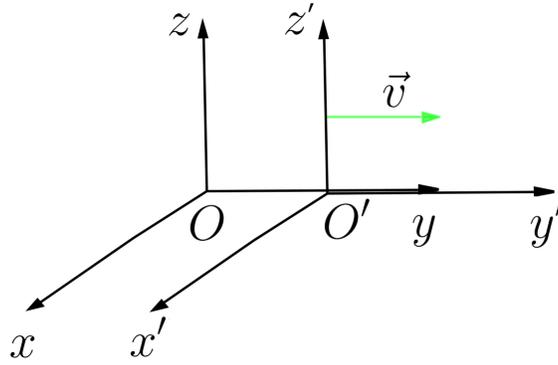


Рис. 1. Неподвижная и подвижная ИСО



Определение 1.2. Преобразованиями Лоренца будем называть следующие преобразования координат и времени:

$$\boxed{a'_t = \frac{a_t - \frac{v}{c}a_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad a'_x = \frac{a_x - \frac{v}{c}a_t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad a'_y = a_y; \quad a'_z = a_z.}$$

Скалярное произведение векторов инвариантно относительно *четырёхмерного вращения* системы координат. Таким вращением называют поворот системы координат и равномерное прямолинейное движение одной системы координат относительно другой (преобразования Лоренца).

1.2 Скалярное произведение 4-векторов, их норма

Пусть даны два 4-вектора:

$$\vec{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_t \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}; \quad \vec{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} b_t \\ b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}.$$



Определение 1.3. Скалярным произведением в пространстве Минковского по определению назовём следующее соотношение:

$$\boxed{\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} \equiv a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z}. \quad (1.1)$$

Можно показать, что выражение (1.1) для скалярного произведения действительно инвариантно относительно преобразований Лоренца. Аналогично скалярным произведением 4-вектора на себя называют соотношение:

$$(\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{A}}) = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2.$$

Как и в трехмерном пространстве, норма 4-вектора вводится как корень из скалярного произведения вектора самого на себя:

$$|\vec{\mathbf{A}}| = \sqrt{a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2}.$$

Рассмотрим основные примеры 4-векторов.

 **Определение 1.4. Радиус-вектором в пространстве Минковского по определению назовём следующий 4-вектор:**

$$\vec{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} ct \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \implies (\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{R}}) = c^2 t^2 - (\vec{r})^2 = \text{inv}.$$

Также можно ввести квадрат интервала: $ds^2 = c^2 dt^2 - (d\vec{r})^2 = \text{inv}$ - величина, которая остается инвариантной при повороте системы координат, пространственных трансляциях и преобразованиях Лоренца (вместе эти преобразования образуют группу Пуанкаре).

 **Определение 1.5. 4-вектором скорости в пространстве Минковского по определению назовём следующий 4-вектор:**

$$\vec{\mathbf{V}} \equiv \frac{d}{dt_0} \vec{\mathbf{R}}.$$

Договоримся, что производная берется по *собственному времени* t_0 системы отсчета, которая связана со временем t в лабораторной системе отсчета следующим образом:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \implies dt_0 = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Тогда 4-вектор скорости можно записать в матричном виде следующим образом:

$$\vec{\mathbf{V}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \vec{v} \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что квадрат нормы 4-вектора скорости всегда равен квадрату скорости света:

$$\boxed{(\vec{V}, \vec{V}) = c^2 = \text{inv}}.$$

 **Определение 1.6.** *4-вектором импульса в пространстве Минковского по определению назовём следующее соотношение:*

$$\vec{P} \equiv m_0 \vec{V},$$

где m_0 - масса покоя.

В матричной форме 4-вектор импульса можно записать так:

$$\vec{P} = m_0 \begin{pmatrix} \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \vec{v} \\ \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ m_0 \vec{v} \\ \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{W}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix},$$

где W - кинетическая энергия частицы.

Квадрат нормы 4-вектора импульса равен:

$$(\vec{P}, \vec{P}) = \frac{m_0^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0^2 c^2 (c^2 - v^2)}{c^2 - v^2} = m_0^2 c^2 = \text{inv}.$$

 **Определение 1.7.** *4-вектором плотности тока в пространстве Минковского по определению назовём следующее соотношение:*

$$\vec{J} \equiv \rho_0 \vec{V},$$

где ρ_0 - плотность тока в системе отсчета, где заряд покоится.

Данный вектор в матричной форме может быть записан как:

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} \frac{\rho_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \rho_0 \vec{v} \\ \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho c \\ \rho \vec{v} \end{pmatrix},$$

где $\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ плотность заряда в лабораторной системе отсчета.

Плотность заряда ρ отличается от ρ_0 из-за эффекта сокращения продольных размеров в лабораторной системе отсчета относительно собственной. С учетом

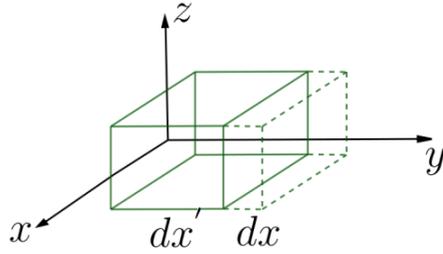


Рис. 2. Уменьшение элементарного объема

эффекта сокращения продольных размеров плотность заряда в лабораторной системе отсчета равна

$$\rho = \frac{\delta Q}{\delta V} = \frac{\delta Q}{\delta x \delta y \delta z} = \frac{\delta Q}{\delta x_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \delta y_0 \delta z_0} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Аналогичным образом скалярное произведение 4-вектора плотности тока самого на себя есть инвариант: $(\vec{\mathbf{J}}, \vec{\mathbf{J}}) = \text{inv}$.

1.3 4-мерный оператор набла, 4-мерный градиент, 4-мерная дивергенция. Закон сохранения электрического заряда

Пусть $f(t, \vec{R}) = f(\vec{\mathbf{R}}) = f(\vec{\mathbf{R}}')$ - скалярная релятивистски инвариантная функция. Запишем приращение δf :

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial R_t} \delta R_t + \frac{\partial f}{\partial R_x} \delta R_x + \frac{\partial f}{\partial R_y} \delta R_y + \frac{\partial f}{\partial R_z} \delta R_z. \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \delta f' &= \frac{\partial f}{\partial R_t'} \delta R_t' + \frac{\partial f}{\partial R_x'} \delta R_x' + \frac{\partial f}{\partial R_y'} \delta R_y' + \frac{\partial f}{\partial R_z'} \delta R_z' = \\ &= \frac{\partial f}{\partial R_t'} \frac{\delta R_t - \frac{v}{c} \delta R_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\partial f}{\partial R_x'} \frac{\delta R_x - \frac{v}{c} \delta R_t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\partial f}{\partial R_y'} \delta R_y + \frac{\partial f}{\partial R_z'} \delta R_z. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Из уравнений (1.2) и (1.3) приравняем слагаемые, содержащие δR_t , и разделим всё на δR_t :

$$\frac{\partial f}{\partial R_t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial f}{\partial R_t'} - \frac{v}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial f}{\partial R_x'} = \frac{\frac{\partial f}{\partial R_t'} - \frac{v}{c} \frac{\partial f}{\partial R_x'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \implies \frac{\partial}{\partial R_t} = \frac{\frac{\partial}{\partial R_t'} - \frac{v}{c} \frac{\partial}{\partial R_x'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Аналогично для R_x получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial R_x} = \frac{\frac{\partial}{\partial R_x'} - \frac{v}{c} \frac{\partial}{\partial R_t'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Для y и z компонент всё остаётся по-прежнему. Тогда получим преобразования Лоренца для операторов дифференцирования по времени и координатам:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial R_t} = \frac{\frac{\partial}{\partial R_t'} - \frac{v}{c} \frac{\partial}{\partial R_x'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \frac{\partial}{\partial R_x} = \frac{\frac{\partial}{\partial R_x'} - \frac{v}{c} \frac{\partial}{\partial R_t'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \frac{\partial}{\partial R_y} = \frac{\partial}{\partial R_y'}; \quad \frac{\partial}{\partial R_z} = \frac{\partial}{\partial R_z'}.$$

Возникает необходимость ввести 4-мерный аналог оператора Набла. Один из вариантов, как можно это сделать, приведен ниже:

$$\vec{\nabla}_4 \equiv \begin{pmatrix} \nabla_t \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}.$$

Но это неправильно, так как существует требование, чтобы четырехмерный оператор Набла был представим как вектор, а значит при смене системы координат он должен удовлетворять системе уравнений Лоренца. С учетом этого условия 4-мерный вектор Набла определяется следующим образом

 **Определение 1.8.** *4-мерным оператором Набла по определению назовём следующее соотношение:*

$$\vec{\nabla}_4 \equiv \begin{pmatrix} \nabla_t \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial R_t} \\ -\frac{\partial}{\partial R_x} \\ -\frac{\partial}{\partial R_y} \\ -\frac{\partial}{\partial R_z} \end{pmatrix}.$$

Проверим, выполняются ли преобразования Лоренца для такого 4-вектора:

$$\nabla_t = \frac{\nabla_t' - \frac{v}{c}(-\nabla_x')}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} = \frac{\nabla_t' + \frac{v}{c}\nabla_x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad -\nabla_x = \frac{-\nabla_x' - \frac{v}{c}\nabla_t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} \implies \nabla_x = \frac{\nabla_x' + \frac{v}{c}\nabla_t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Мы получили правильные преобразования для компоненты $\vec{\nabla}_4$.

Из определения четырехмерного оператора Набла следует, что приращение скалярной функции можно записать как: $\delta f = (\vec{\nabla}_4 f, \delta \vec{\mathbf{R}})$.

 **Определение 1.9.** *4-мерную дивергенцию по определению введём следующим образом:*

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{a}} \equiv (\vec{\nabla}_4, \vec{\mathbf{a}}) = \frac{\partial a_t}{\partial R_t} + \frac{\partial a_x}{\partial R_x} + \frac{\partial a_y}{\partial R_y} + \frac{\partial a_z}{\partial R_z}.$$

Теперь же рассмотрим 4-дивергенцию 4-вектора плотности тока:

$$\boxed{(\vec{\nabla}_4, \vec{\mathbf{J}}) = \frac{\partial \rho c}{\partial ct} + \frac{\partial j_x}{\partial r_x} + \frac{\partial j_y}{\partial r_y} + \frac{\partial j_z}{\partial r_z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla, \vec{j}) = 0.}$$

Последнее равенство мы получали в классической электродинамике, и оно выражало закон сохранения электрического заряда.

 **Физический закон 1.1.** *Закон сохранения заряда в четырехмерном виде*

Алгебраическая сумма электрических зарядов замкнутой системы не меняется во времени:

$$(\vec{\nabla}_4, \vec{\mathbf{J}}) = 0.$$

1.4 Уравнение Д'Аламбера и релятивистский эффект Доплера

Запишем систему уравнений Максвелла в удобном виде:

$$\begin{cases} (\nabla, \vec{E}) = 4\pi\rho, \\ (\nabla, \vec{B}) = 0, \\ [\nabla, \vec{E}] + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \\ [\nabla, \vec{B}] - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \end{cases}$$

Рассмотрим дивергенцию вектора \vec{B} :

$$(\nabla, \vec{B}) = 0 \implies \exists \vec{A} : \vec{B} = [\nabla, \vec{A}].$$

Рассмотрим $\text{rot } \vec{E}$ для случая электростатики:

$$[\nabla, \vec{E}] = 0 \implies \exists \varphi : \vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi.$$

Рассмотрим уравнение №3 из системы уравнений Максвелла и сделаем в нем замену:

$$\vec{B} = [\nabla, \vec{A}] \implies 0 = [\nabla, \vec{E}] + \frac{1}{c} \frac{\partial [\nabla, \vec{A}]}{\partial t} = \left[\nabla, \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right].$$

Из представленного выше уравнения следует, что

$$\exists \varphi : -\nabla \varphi = \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Таким образом, вектор напряженности электрического поля может быть записан через скалярный и векторный потенциал следующим образом:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Теперь рассмотрим уравнение №4 из системы уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \vec{j} &= [\nabla, [\nabla, \vec{A}]] + \frac{1}{c} \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = |\text{используем правило bac-cab}| = \\ &= \nabla(\nabla, \vec{A}) - \Delta \vec{A} + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \nabla \left((\nabla, \vec{A}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для конкретизации векторного и скалярного потенциала воспользуемся калибровкой Лоренца, а именно:

$$(\nabla, \vec{A}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Тогда с учетом формулы (1.5) получим уравнение Д'Аламбера для векторного потенциала:

$$\boxed{\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}}.$$

 **Определение 1.10.** **Оператором Д'Аламбера по определению назовём следующий дифференциальный оператор:**

$$\square \equiv (\vec{\nabla}_4, \vec{\nabla}_4) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

Рассмотрим уравнение №1 системы уравнений Максвелла с учетом формулы (1.4):

$$4\pi\rho = - \left(\nabla, \nabla\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\Delta\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial(\nabla, \vec{A})}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = \square\varphi.$$

Теперь запишем систему уравнений Д'Аламбера для потенциалов:

$$\begin{cases} \square\varphi = \frac{4\pi}{c} \rho c, \\ \square\vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \end{cases}$$

Её можно записать в более компактном виде:

$$\square \begin{pmatrix} \varphi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \quad (1.6)$$

 **Определение 1.11.** **4-потенциалом** по определению назовём следующий **4-вектор**:

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = \vec{A}.$$

Таким образом, получим следующую систему:

$$\begin{cases} (\vec{\nabla}_4, \vec{J}) = 0, \\ (\vec{\nabla}_4, \vec{\nabla}_4) \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \end{cases}$$

Теперь выберем удобный нам потенциал $\varphi = 0 \implies (\nabla, \vec{A}) = 0$ - такой выбор потенциала называют калибровкой Кулона. Тогда вектора \vec{B} и \vec{E} соответственно равны:

$$\vec{B} = [\nabla, \vec{A}]; \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

В случае вакуума $\rho = 0$ и $\vec{j} = 0$, а значит уравнение (1.6) примет вид

$$\square \vec{A} = 0 \implies \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t),$$

где $\vec{A}(\vec{r}, t)$ - решение волнового уравнения в случае вакуума.

Так как \vec{A} - 4-вектор и \vec{A}_0 - 4-вектор, из этого следует, что функция $\exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ обязана быть инвариантом. Значит, и ее аргумент должен быть инвариантом:

$$\text{inv} = (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = - \left(\begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega \\ \vec{k} \end{pmatrix} \right) = - (\vec{R}, \vec{K}),$$

☞ **Определение 1.12.** *4-волновой вектор по определению назовём:*

$$\vec{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \vec{k} \end{pmatrix}.$$

Действительно, полученный 4-вектор является инвариантом, так как скалярное произведение двух 4-векторов является инвариантом. Длина 4-волнового вектора равна

$$(\vec{\mathbf{K}}, \vec{\mathbf{K}}) = \frac{\omega^2}{c^2} - (\vec{k}, \vec{k}) = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0.$$

Домножая 4-вектор $\vec{\mathbf{K}}$ на приведенную постоянную Планка, получим 4-вектор энергии импульса:

☞ **Определение 1.13.** *4-вектор энергии импульса по определению назовём:*

$$\vec{\mathbf{P}} = \hbar \vec{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \frac{W}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix}.$$

$$0 = (\vec{\mathbf{P}}, \vec{\mathbf{P}}) = \frac{W^2}{c^2} - (\vec{p})^2 = m_0^2 c^2 \implies m_0 = 0.$$

Отсюда получаем, что фотон - частица с массой покоя, равной нулю.

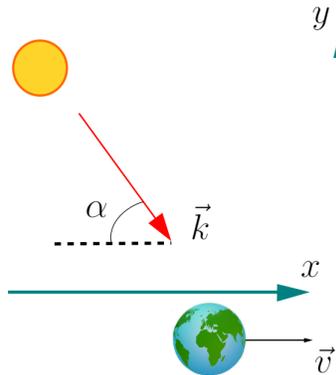


Рис. 3. Эффект Доплера при относительном движении

Если модуль трехмерного волнового вектора представить, как это следует из дисперсионного соотношения (подробнее этот вопрос будет рассмотрен в параграфе 2.2), и рассмотреть волну, распространяющуюся под углом α к оси x , вдоль которой движется наблюдатель относительно исходной системы отсчета, то выражения для x -компоненты волнового вектора в неподвижной и в движущейся системе отсчета будут, очевидно, разными.

Подстановка этих выражений в преобразования Лоренца позволяет исключить из них один из косинусов углов и получить выражение для новой частоты, которую будет регистрировать наблюдатель, движущийся относительно исходной системы отсчета:

$$\begin{cases} \frac{\omega'}{c} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{v}{c}k_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ k'_x = \frac{k_x - \frac{v}{c}\frac{\omega}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ k'_y = k_y, \\ k'_z = k_z. \end{cases} \quad (1.7)$$

Из первого уравнения системы (1.7) следует, что

$$\omega' = \frac{\omega - v\frac{\omega}{c}\cos(\alpha)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \omega \frac{1 - \frac{v}{c}\cos(\alpha)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Изменение частоты воспринимаемого света в случае движения источника света или наблюдателя (это не важно, ведь движение относительное) носит название *эффекта Доплера*.

Рассмотрим случай, когда $\alpha = 0$ (продольный случай).



Физический закон 1.2. Продольный эффект Доплера

При переходе в систему отсчета, которая движется в направлении распространения излучения, частота последнего меняется следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \omega \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} = \omega \left(1 - \frac{v}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{v}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \\ &\simeq \omega \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v}{c}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v}{c}\right) = \omega \left(1 - \frac{v}{c} + \frac{1}{4}\frac{v^2}{c^2}\right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

В формуле (1.8) квадратичный по скорости член опускается при рассмотрении нерелятивистских скоростей:

$$\delta\omega_{\parallel} = -\omega\frac{v}{c}.$$

В случае, когда $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (поперечный случай).



Физический закон 1.3. Поперечный эффект Доплера

При переходе в систему отсчета, которая движется перпендикулярно направлению распространения излучения, частота последнего меняется следующим образом:

$$\omega' = \omega \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \omega \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \implies \delta\omega_{\perp} = \frac{1}{2} \omega \frac{v^2}{c^2}.$$

Видно, что поправка к частоте в поперечном случае меньше, чем поправка к частоте в продольном случае. Именно поэтому на эксперименте обычно рассматривают пучок частиц перпендикулярно направлению движения этих частиц, чтобы уменьшить влияние эффекта Доплера.

Контрольные вопросы

1. Чем обусловлен переход от 3-мерного пространства к 4-мерному?
2. Что такое группа Пуанкаре? Какие преобразования составляют эту группу?
3. Докажите, что скалярное произведение 4-вектора плотности тока самого на себя равно нулю.
4. Как выглядит закон сохранения заряда в 4-мерном виде?
5. Какую калибровку необходимо применить к системе уравнений Максвелла, чтобы получить уравнение Д'аламбера для векторного потенциала?
6. В чем заключается поперечный и продольный эффект Доплера?

2 РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В ВАКУУМЕ

2.1 Уравнение Д'Аламбера для плоских монохроматических волн

Для вывода уравнения Д'Аламбера запишем систему уравнений Максвелла с источниками

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho_0, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{cases}$$

Запишем закон Ома в дифференциальной форме, а также два материальных уравнения:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}; \quad \vec{D} = \hat{\mathcal{E}} \vec{E}; \quad \vec{B} = \hat{\mu} \vec{H}.$$

В случае вакуума система значительно упрощается: исчезают все источники полей, а также становятся определенными следующие коэффициенты ($\hat{\mathcal{E}} = 1$, $\hat{\mu} = 1$, $\sigma = 0$). Таким образом:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases}$$

Выведем волновое уравнение. Для этого продифференцируем по времени выражение для $\operatorname{rot} \vec{B}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Однако для функций нескольких переменных порядок дифференцирования можно менять так, что

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

С учётом третьего уравнения системы уравнений Максвелла для вакуума имеем:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Воспользуемся известным тождеством векторного анализа:

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}.$$

Однако дивергенция вектора напряженности электрического поля в вакууме равна нулю в соответствии с первым уравнением системы. Таким образом:

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = 0}.$$

 **Определение 2.1.** *Волновым (однородным) уравнением* будем называть следующее уравнение:

$$\square \vec{E} = 0, \quad \text{где } \square = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right).$$

Аналогичным образом можно получить такое же уравнение для вектора \vec{B} . Стоит отметить, что даламберриан является четырехмерным обобщением оператора Лапласа.

2.2 Характеристики плоской монохроматической волны

В случае, когда функция \vec{E} или \vec{B} зависит от одной координаты, волновое уравнение упрощается. Пусть в нашем случае этой координатой будет x :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = 0.$$

Решением этого уравнения является электромагнитная волна весьма произвольной формы. Функция, описывающая ее форму, должна быть дважды дифференцируема, а её аргументом должно быть выражение $(x \pm ct)$, что соответствует распространению волны вдоль и против оси Ox . Математически это можно записать как

$$\vec{E} = \vec{e}_x f(x \pm ct), \quad f(x \pm ct) : \exists \frac{\partial^2 f}{\partial (x \pm ct)^2}.$$

 **Определение 2.2.** *Плоская монохроматическая волна* - наиболее важная физическая модель электромагнитных волн, задаваемая математически следующим образом:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \tilde{E}_0 \vec{e}_p \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi). \quad (2.1)$$

Проверим, что функций $\vec{E}(\vec{r}, t)$ является решением волнового уравнения. Считаем частные производные:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \tilde{E}_0 \vec{e}_p \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) = \frac{1}{c^2} \tilde{E}_0 \vec{e}_p (-\omega)^2 (-\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)) = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{r}, t),$$

$$\Delta \vec{E} = \tilde{E}_0 \vec{e}_p \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) = - (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \vec{E}(\vec{r}, t) = -k^2 \vec{E}(\vec{r}, t),$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{E} = 0 \implies |k| = \frac{\omega}{c}.$$

Таким образом, выражение (2.1) является решением волнового уравнения при выполнении, так называемого, дисперсионного соотношения.

 **Определение 2.3.** *Дисперсионным соотношением для электромагнитных волн в вакууме назовем следующее соотношение:*

$$\boxed{(\vec{k}, \vec{k}) = \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (2.2)$$

Введем набор величин для описания плоской монохроматической волны:

1. \vec{e}_p - вектор поляризации (в общем случае комплексный);
2. \tilde{E}_0 - вещественная амплитуда;
3. $\Phi \equiv (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)$ - фаза колебаний;
4. φ - начальная фаза колебаний, характеризующая волну при $t = 0$ и $\vec{r} = 0$;
5. $T = \frac{2\pi}{\omega}$ - период колебаний волны;
6. ω - циклическая частота волны (далее просто частота);
7. $\lambda = \frac{2\pi}{|k|}$ - длина волны.

Удобно воспользоваться экспоненциальной формой записи плоской монохроматической волны:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \tilde{E}_0 \vec{e}_p \exp \left(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) \right).$$

Здесь Re - операция вычисления вещественной части комплексного числа. Введём комплексную амплитуду волны:

$$E_0 = \tilde{E}_0 e^{i\varphi} \implies \vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} E_0 \vec{e}_p \exp \left(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right).$$

Теперь объединим вектор поляризации с комплексной амплитудой:

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_p \implies \boxed{\vec{E}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))}. \quad (2.3)$$

Для экономии места и времени не будем писать операцию вычисления вещественной части, но всегда будем подразумевать, что работаем именно с ней, где это не оговаривается отдельно.

2.3 Система уравнений Максвелла для плоской монохроматической волны

До этого момента не обсуждались математические и физические свойства плоских монохроматических волн. Преимущество экспоненциальной записи (2.3) в том, что экспоненциальную функцию легко дифференцировать:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}; \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial r_j} = ik_j \vec{E}. \quad (2.4)$$

Таким образом, выражение для дивергенции электрического поля в вакуума примет вид

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = ik_x E_x + ik_y E_y + ik_z E_z = i(\vec{k}, \vec{E}) = 0.$$

Равенство нулю дивергенции следует из системы уравнений Максвелла для вакуума. Аналогичное соотношение получается для вектора \vec{B} . Таким образом:

$$\boxed{\vec{E} \perp \vec{k} \quad \vec{B} \perp \vec{k}}.$$

К тому же, векторы \vec{E} , \vec{B} , \vec{k} образуют правую тройку векторов. Для доказательства этого факта обратимся к уравнению №3 системы уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

С учетом соотношений (2.4) получим:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ ik_x & ik_y & ik_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ k_x & k_y & k_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = i[\vec{k}, \vec{E}].$$

В итоге уравнение №3 системы Максвелла примет вид

$$i[\vec{k}, \vec{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{i\omega}{c} \vec{B} \implies [\vec{k}, \vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{B}.$$

Аналогично из 4-го уравнения Максвелла можно получить:

$$\vec{k} \times \vec{B} = -\frac{\omega}{c} \vec{E}.$$

Вспомнив, что $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \alpha$ (α - угол между векторами \vec{a} и \vec{b}), а также учитывая, что векторы \vec{E} и \vec{B} перпендикулярны вектору \vec{k} , получим:

$$kB = \frac{\omega}{c} E, \quad kE = \frac{\omega}{c} B \implies |\vec{B}| = |\vec{E}|. \quad (2.5)$$

Выражение (2.5) является свойством исключительно системы СГС, а не фундаментальным соотношением. Из геометрического смысла векторного произведения также следует перпендикулярность векторов \vec{E} и \vec{B} . Полученные соотношения о взаимной ориентации векторов \vec{E} , \vec{B} и \vec{k} позволяют говорить о *поперечности* плоских монохроматических волн. Подытожим:

$$\begin{cases} (\vec{k}, \vec{E}) = 0, \\ (\vec{k}, \vec{B}) = 0, \\ [\vec{k}, \vec{B}] = -\frac{\omega}{c} \vec{E}, \\ [\vec{k}, \vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{B}, \end{cases} \implies \boxed{\vec{k} \perp \vec{B} \quad \vec{k} \perp \vec{E} \quad \vec{E} \perp \vec{B} \quad |\vec{E}| = |\vec{B}|}. \quad (2.6)$$

Из соотношений (2.6) и следует, что вектора \vec{k} , \vec{E} и \vec{B} образуют правую тройку векторов.

2.4 Волновой фронт. Поверхности постоянной фазы

Рассмотрим фазу плоской монохроматической волны в момент времени $t = 0$:

$$\Phi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0 = \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0. \quad (2.7)$$

Скалярное произведение в выражении (2.7) можно упростить с учетом того, что любой вектор \vec{r} можно записать как:

$$\vec{r} = \vec{r}_k + \vec{r}_\perp \implies \vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{k} \cdot \vec{r}_k + \vec{k} \cdot \vec{r}_\perp = \vec{k} \cdot \vec{r}_k.$$

Последнее равенство следует из того, что вектора \vec{k} и \vec{r}_\perp перпендикулярны друг другу.

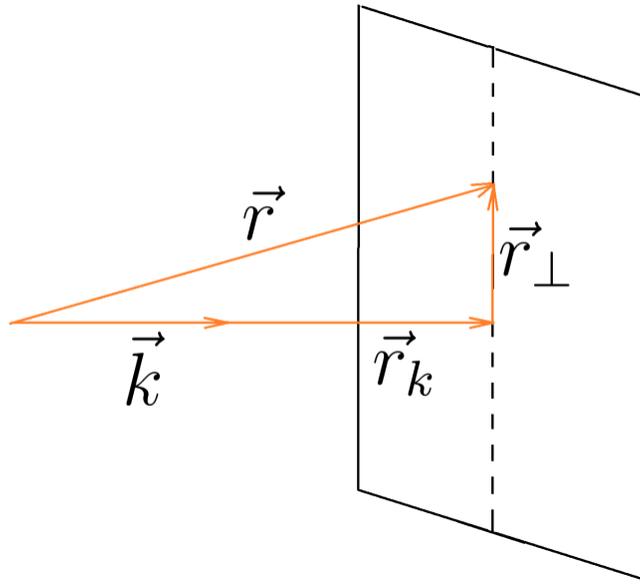


Рис. 4. Поверхность постоянной фазы

Рассмотрим случай постоянной фазы: $\Phi = \text{const} = C$, тогда выражение (2.7) примет вид

$$\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0 = C \implies \vec{k} \cdot \vec{r} = C - \varphi_0 = C_1.$$

Докажем, что множество точек, для которых $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const}$, образуют плоскость. Для этого запишем скалярное произведение векторов \vec{k} и \vec{r} по определению:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \implies \vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z - C_1 = 0.$$

Из курса аналитической геометрии известно, что это уравнение плоскости, причем вектор \vec{k} является для неё нормалью. Такие плоскости, перпендикулярные вектору \vec{k} , называются поверхностями постоянной фазы. Найдём скорость распространения таких плоскостей:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0 \implies k \frac{dr_k}{dt} - \omega = 0.$$

 **Определение 2.4.** **Фазовой скоростью** плоской монохроматической волны по определению назовём следующую величину:

$$v_\Phi \equiv \frac{dr_k}{dt}.$$

Исходя из дисперсионного соотношения для электромагнитных волн в вакууме (2.2), имеем:

$$v_{\Phi} = \frac{\omega}{k} = c.$$

Таким образом, фазовая скорость плоской электромагнитной волны в вакууме оказалась равна скорости света.

2.5 Интенсивность электромагнитных волн



Определение 2.5. *Интенсивность светового излучения - усреднённый по периоду вектор Пойнтинга \vec{S} .*

Как известно из курса электродинамики, вектор Умова-Пойнтинга задается следующим выражением:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}]. \quad (2.8)$$

До выполнения операции векторного произведения в выражении (2.8) нужно выделить действительные части векторов \vec{E} и \vec{B} . Сделать это необходимо, так как векторное произведение - операция нелинейная. С учетом того, что вектора \vec{k} , \vec{E} и \vec{B} образуют правую тройку векторов, положим:

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, выражение (2.8) примет следующий вид:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & E(t) \\ B(t) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{c}{4\pi} \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & E(t) \\ B(t) & 0 \end{vmatrix} = \frac{c}{4\pi} E(t) B(t) \vec{e}_y.$$

Можно заметить, что вектор \vec{S} совпадает по направлению с вектором \vec{k} . Это значит, что плоская монохроматическая волна переносит энергию в направлении своего распространения, чего и следовало ожидать.

Так как в системе СГС $|\vec{E}| = |\vec{B}|$, можно переписать вектор Пойнтинга в следующем виде:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} E^2(t) \frac{\vec{k}}{k}. \quad (2.9)$$



Теорема 2.1. Среднее значение периодической функции $f(t)$ за период T определяется по следующей формуле:

$$\langle f(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

С учетом выражения (2.9) интенсивность светового излучения равна

$$\langle |\vec{S}| \rangle_T = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E^2(t) dt.$$

Для плоской монохроматической волны в данной точке пространства $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$. Здесь E_0 - вещественная амплитуда колебаний. Тогда среднее значение модуля вектора Умова-Пойнтинга равно

$$\langle |\vec{S}| \rangle_T = \frac{cE_0^2}{4\pi} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \cos^2(\omega t) dt. \quad (2.10)$$

Найдем значение интеграла в выражении (2.10) отдельно:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} \cos^2(\omega t) dt &= \frac{1}{2\omega} \int_t^{t+T} 2 \cos^2(\omega t) d(\omega t) = \frac{1}{2\omega} \int_t^{t+T} (1 + \cos(2\omega t)) d(\omega t) = \\ &= \frac{1}{2\omega} \int_t^{t+T} d(\omega t) + \frac{1}{4\omega} \int_t^{t+T} \cos(2\omega t) d(2\omega t) = \frac{1}{2\omega} [\omega(t+T) - \omega t] + \frac{1}{4\omega} [\sin(t+T) - \sin t] = \frac{1}{2} T. \end{aligned}$$

В итоге среднее значение вектора Пойнтинга задается следующим выражением:

$$\langle \vec{S} \rangle_T = \frac{cE_0^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} \frac{\vec{k}}{k} = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \frac{\vec{k}}{k}.$$

2.6 Поляризация электромагнитных волн

Вспомним введенные ранее обозначения. Под вектором напряженности электрического поля в плоской волне мы понимали $\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re } E_0 \vec{e}_p \exp(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$.

Здесь E_0 - комплексная амплитуда, зависящая от начальной фазы колебаний. Вектор \vec{e}_p называют вектором поляризации электромагнитной волны. Его

связывают с напряженностью \vec{E} , а не с магнитной индукцией \vec{B} , так как наиболее существенно влияет на взаимодействие света с веществом именно напряженность электрического поля \vec{E} .

Пусть задана некоторая система координат, тогда вектор \vec{E} можно представить в виде суммы координатных ортов, умноженных на соответствующие проекции вектора \vec{E} :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_x \vec{e}_x e^{i\Phi} + E_y \vec{e}_y e^{i\Phi}.$$

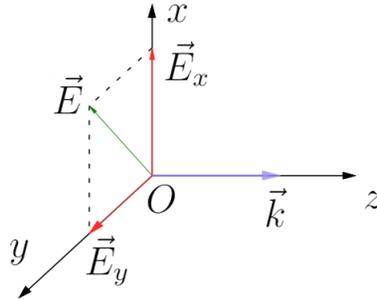


Рис. 5. Разложение \vec{E} по базису

Фактически мы перешли от рассмотрения одной волны к двум взаимно перпендикулярно поляризованным волнам. Взаимная ориентация векторов поляризации может влиять на интенсивность суммы двух волн. Разберемся с этим вопросом подробнее. Для этого рассмотрим две такие волны, при этом представив их следующим образом:

$$\begin{cases} \vec{E}_1(\vec{r}, t) = a \vec{e}_1 e^{i\Phi}, \\ \vec{E}_2(\vec{r}, t) = b \vec{e}_2 e^{i(\Phi + \varphi)}. \end{cases}$$

Теперь базисные векторы не ортогональны, а волны имеют разность фаз, равную φ , относительно друг друга.

 **Определение 2.6.** *Модулем комплексного числа называют длину его радиус-вектора в комплексной плоскости.*

Приведем пример следующего комплексного числа:

$$z = 2e^{i\varphi} \implies |z| = 2.$$

В этом примере длина радиус-вектора равна 2.

Пусть дано число $a = x + iy$, тогда число $a^* = x - iy$ называется *комплексно сопряженным* к числу a . Важнейшим свойством комплексно сопряженных чисел является:

$$zz^* = |z|^2.$$

Действительно, пусть в экспоненциальной записи $z = re^{i\varphi}$, тогда $z^* = re^{-i\varphi}$:

$$zz^* = r^2 = |z|^2.$$

Если некоторое комплексное число z представляется суммой двух других комплексных чисел, то справедливо соотношение:

$$z = a + b \implies zz^* = aa^* + bb^* + ab^* + a^*b.$$

Приведем пример:

$$z = a_1e^{i\varphi_1} + a_2e^{i\varphi_2}.$$

Тогда квадрат модуля комплексного числа равен:

$$\begin{aligned} zz^* &= a_1e^{i\varphi_1}a_1e^{-i\varphi_1} + a_2e^{i\varphi_2}a_2e^{-i\varphi_2} + a_1e^{i\varphi_1}a_2e^{-i\varphi_2} + a_1e^{-i\varphi_1}a_2e^{i\varphi_2} = \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_1a_2e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} + a_1a_2e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z|^2 &= a_1^2 + a_2^2 + a_1a_2(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) + a_1a_2(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \\ |z|^2 &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Вернемся к вычислению суммарной интенсивности двух волн:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \implies |\vec{E}|^2 = \vec{E}\vec{E}^* = \vec{E}_1\vec{E}_1^* + \vec{E}_2\vec{E}_2^* + \vec{E}_1\vec{E}_2^* + \vec{E}_2\vec{E}_1^*.$$

Для наглядности вычислим каждое слагаемое отдельно:

1. $\vec{E}_1\vec{E}_1^* = a\vec{e}_1e^{i\Phi} \cdot a\vec{e}_1e^{-i\Phi} = a^2(\vec{e}_1)^2 = a^2$;
2. $\vec{E}_2\vec{E}_2^* = b\vec{e}_2e^{i(\Phi+\varphi)} \cdot b\vec{e}_2e^{-i(\Phi+\varphi)} = b^2(\vec{e}_2)^2 = b^2$;
3. $\vec{E}_1\vec{E}_2^* = a\vec{e}_1e^{i\Phi} \cdot b\vec{e}_2e^{-i(\Phi+\varphi)} = ab(\vec{e}_1, \vec{e}_2)e^{-i\varphi}$;
4. $\vec{E}_2\vec{E}_1^* = a\vec{e}_1e^{-i\Phi} \cdot b\vec{e}_2e^{i(\Phi+\varphi)} = ab(\vec{e}_1, \vec{e}_2)e^{i\varphi}$.

Тогда квадрат модуля вектора напряженности равен

$$|\vec{E}|^2 = a^2 + b^2 + 2ab(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cos \varphi.$$

Однако интенсивность излучения с точностью до константы равна квадрату модуля напряженности поля.

Значит, при сложении двух когерентных волн, разность фаз между которыми равна φ , интенсивность суммарного излучения равна

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cos \varphi.$$

Или для векторов Пойнтинга:

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + 2\frac{\vec{k}}{k}\sqrt{|\vec{S}_1||\vec{S}_2|}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cos \varphi.$$

В случае, когда суммарная интенсивность двух волн не равна сумме интенсивностей этих волн, говорят о явлении интерференции. Определение интерференции и остальные смежные вопросы будут подробно рассмотрены в главе №7.

На практике существует множество устройств, которые способны модулировать поляризацию электромагнитных волн. Одним из таких устройств является поляризатор.

 **Определение 2.7. Поляризатор** - устройство, пропускающее излучение только определенного направления колебания напряженности электрического поля.

Если ось поляризатора повернута относительно вектора поляризации падающей волны на угол α , то интенсивность прошедшего света описывается выражением:

$$I' = I_0 \cos^2 \alpha.$$

Поляризаторы, пропускание которых отличается на $\alpha = \frac{\pi}{2}$, называются скрещенными и полностью гасят падающее излучение. Однако если между ними разместить третий поляризатор, который пропускает какое-то промежуточное направление, то, пройдя все три поляризатора, свет не будет полностью гаситься. Это демонстрирует один из фундаментальных принципов квантовой механики.

 **Физический закон 2.1. Фундаментальный принцип квантовой механики**

Квантовая система "не запоминает" свои предыдущие состояния.

В некоторых случаях вместо привычных ортов \vec{e}_x и \vec{e}_y удобно ввести так называемые *циркулярные орты* \vec{e}_+ и \vec{e}_- .

 **Определение 2.8. Циркулярными ортами** будем называть следующие вектора:

$$\vec{e}_+ = \frac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}}; \quad \vec{e}_- = \frac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}}. \quad (2.11)$$

Орты (2.11) линейно независимы, а их модуль равен 1. Напишем уравнение волны с применением циркулярных ортов. Возьмём, к примеру, орт со знаком плюс:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \vec{e}_+ \exp(i\Phi).$$

Выделим действительную часть:

$$\text{Re } \vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re } E_0 \frac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} (\cos \Phi + i \sin \Phi) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \vec{e}_x \cos(kz - \omega t) - \frac{E_0}{\sqrt{2}} \vec{e}_y \sin(kz - \omega t).$$

В результате мы получили суперпозицию двух ортогональных волн, сдвинутых по фазе на 90° . Такой случай соответствует циркулярной поляризации, когда вектор \vec{E} как бы вращается и своим концом описывает окружность.

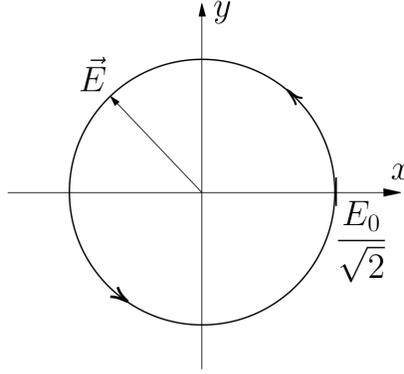


Рис. 6. Циркулярно поляризованная волна

Если отвлечься от циркулярных ортов, можно рассмотреть наиболее общий случай поляризации электромагнитной волны. Пусть имеются две волны, у которых разная амплитуда, а разность фаз так же составляет $\frac{\pi}{2}$. Тогда в данной точке пространства проекции вектора \vec{E} имеют вид:

$$E_x = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos \omega t; \quad E_y = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin \omega t.$$

что, действительно, соответствует вращению по окружности.

В случае если амплитуды по осям различаются:

$$E_x = a \cos \omega t; \quad E_y = b \sin \omega t$$

имеем более сложный вид поляризации - *эллиптическую*. Убедимся в этом:

$$\frac{E_x^2}{a^2} + \frac{E_y^2}{b^2} = 1. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) является каноническим уравнением эллипса с полуосями a и b . Дадим наиболее общее определение эллиптической поляризации электромагнитной волны:



Определение 2.9. Плоская монохроматическая волна имеет *эллиптическую поляризацию* в случае, если проекции вектора \vec{E} на ортогональные направления можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} E_x(t) = E_{x0} \cos(\omega t + \varphi_x), \\ E_y(t) = E_{y0} \cos(\omega t + \varphi_y) \end{cases}, \text{ где } \delta\Phi \equiv \varphi_x - \varphi_y \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

В том случае, когда разница фаз между ортогональными волнами выражена следующим образом:

$$\delta\Phi = \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

эллиптическая поляризация вырождается, а суммарная волна становится поляризована линейно. Также линейная поляризация может быть получена при условии равенства нулю одной из амплитуд ортогональных волн.

Во многих задачах бывает удобно воспользоваться тем математическим свойством, что волну любой поляризации можно представить в виде суперпозиции двух линейно поляризованных волн с ортогональными поляризациями или же двух циркулярно поляризованных волн, векторы напряженности которых вращаются в противоположных направлениях.

2.7 Монохроматические поля. Уравнение Гельмгольца

Вспомним выражение (2.3) для напряженности плоской монохроматической волны:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp\left(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\right).$$

Такой тип волн является лишь удобной математической моделью и не встречается на практике, поскольку такая волна должна занимать все пространство и существовать в любой момент времени. Поэтому в ряде задач возникает необходимость перейти к более реалистичной модели электромагнитных волн. В качестве такой модели может выступить *монохроматическое поле*.



Определение 2.10. *Монохроматическим полем* по определению будем называть функцию вида:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \exp(-i\omega t).$$

Амплитуда такой волны может меняться в пространстве от точки к точке, но частота остается постоянной. Для того, чтобы определить вид функции $\vec{E}(\vec{r})$,

подставим выражение для монохроматической волны в уравнение Д'Аламбера, ведь если волна и может распространяться в вакууме, то только тогда, когда она является решением уравнения Д'Аламбера:

$$\square \vec{E}(\vec{r}, t) = 0, \text{ где } \square = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right).$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{E}(\vec{r}) \exp(-i\omega t) = \frac{(-i\omega)^2}{c^2} \vec{E}(\vec{r}) \exp(-i\omega t) - \exp(-i\omega t) \Delta \vec{E}(\vec{r}) = 0.$$

Поделим обе части на экспоненциальную функцию:

$$\frac{(-i\omega)^2}{c^2} \vec{E}(\vec{r}) - \Delta \vec{E}(\vec{r}) = 0 \implies -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{r}) - \Delta \vec{E}(\vec{r}) = 0 \implies \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{r}) + \Delta \vec{E}(\vec{r}) = 0.$$

Вспомним дисперсионное соотношение:

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{c} \implies k^2 \vec{E}(\vec{r}) + \Delta \vec{E}(\vec{r}) = 0.$$

В итоге для монохроматической волны получаем *уравнение Гельмгольца*:

$$\boxed{(k^2 + \Delta) \vec{E}(\vec{r}) = 0}. \quad (2.13)$$

Таким образом, волна будет монохроматической, если функция $\vec{E}(\vec{r})$, описывающая амплитуду волны, является решением уравнения Гельмгольца (2.13).

2.8 Открытый и закрытый резонатор

Рассмотрим подробно следующий случай: отражение плоской монохроматической волны от идеального плоского зеркала. В дальнейшем мы увидим, что идеальное зеркало - это объект, который ведёт себя по отношению к полю бегущих волн, как металлы к электростатическому полю.

Пусть плоская монохроматическая волна бежит против оси z (рисунок 7), а поляризована вдоль оси Ox . Тогда вектор напряженности падающей волны $\vec{E}_{\text{пад}}$ можно записать в следующем виде:

$$\vec{E}_{\text{пад}}(\vec{r}, t) = E_0 \vec{e}_x e^{i(-kz - \omega t)}.$$

Минус перед k означает, что $\vec{k} \uparrow \downarrow Oz$.

Падающая волна проходит сквозь зеркало, практически не искажаясь. Однако из бытового опыта известно, что за зеркалом света нет. Дело в том, что в зеркале присутствует слой металла, где есть свободные электроны. Электрон находится в поле волны, и на него действует периодическая сила, значит, он начинает совершать вынужденные колебания. Колебания же всех электронов являются

когерентными (синхронными), так как в плоскости зеркала поле во всех точках одинаковое.

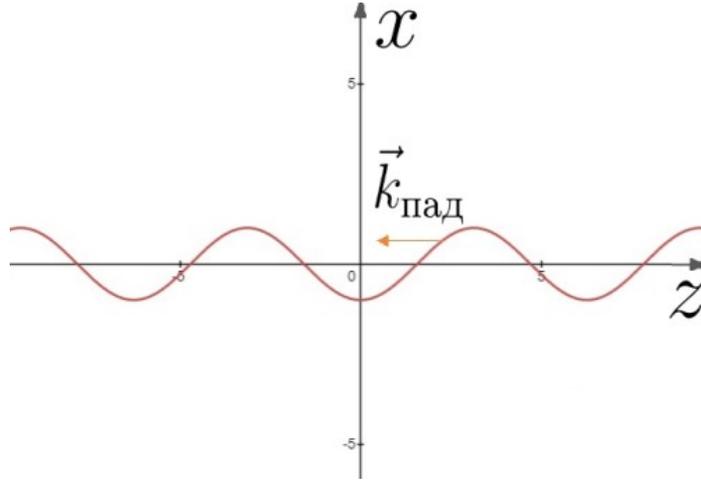


Рис. 7. Падающая на зеркало волна

Определить это поле сложно, однако из эксперимента известно, что сумма падающей волны и излучения колеблющихся электронов должно давать нуль. Из этих соображений можно определить поле "гасящей" волны:

$$\vec{E}_{\text{гас}}(z < 0, t) = -E_0 \vec{e}_x e^{i(-kz - \omega t)}.$$

Получается, что за зеркалом есть волны, даже в два раза больше, правда, они бегут в противофазе, поэтому суммарная интенсивность за зеркалом равна нулю. Но колеблющиеся электроны в зеркале излучают и направо. Будем называть данное излучение отраженной волной. Математически она очень похожа на гасящую волну, отличие лишь в направлении распространения:

$$\vec{E}_{\text{отр}}(z > 0, t) = -E_0 \vec{e}_x e^{i(kz - \omega t)}.$$

Найдем поле по другую сторону зеркала. Оно является суммой падающей и отраженной волны:

$$\vec{E}_{\Sigma}(z > 0, t) = E_0 \vec{e}_x e^{-i\omega t} \frac{e^{-ikz} - e^{ikz}}{2i} 2i = -2i E_0 \vec{e}_x \sin(kz) e^{-i\omega t}. \quad (2.14)$$

Полученная волна уже не может быть названа бегущей, так как ее нельзя представить в виде $f(z \pm ct)$. Такой объект принято называть стоячей волной. Осталось взять действительную часть от выражения (2.14):

$$\text{Re } \vec{E} = -2E_0 \vec{e}_x \sin(kz) \sin(\omega t).$$

Вид поля в разные моменты времени показан на рисунке 8. Легко определить, где находятся *узлы* - точки в пространстве, где поле стоячей волны равно нулю в любой момент времени:

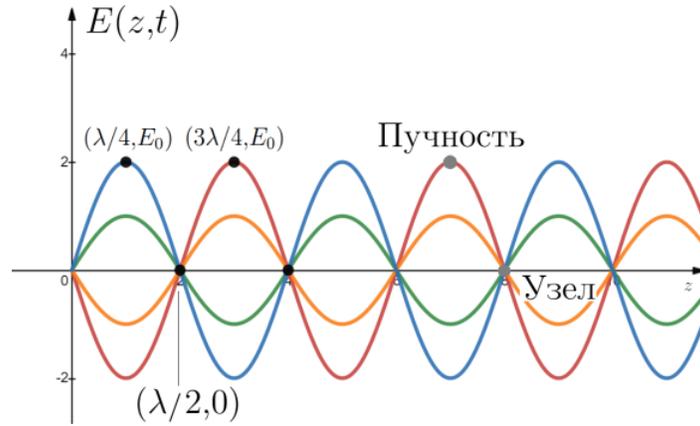


Рис. 8. Стоячая волна в плоскости Oxz

$$kz_m = \pi m \implies z_m = \frac{\pi}{k} m \implies z_m = \frac{\lambda}{2} m.$$

Поставим еще одно зеркало в один из узлов. При этом никаких изменений не произойдет, поскольку способное раскачивать электроны поле в точке узла обращается в ноль. В результате участок стоячей волны можно запереть между двумя параллельными зеркалами. Такая система будет называться *открытым резонатором*.

 **Определение 2.11. Открытый резонатор** - объект, поле в котором существует только в том случае, если между его зеркалами укладывается целое число полуволн.

$$L = m \frac{\lambda}{2} = m \frac{2\pi}{2k} = m\pi \frac{c}{\omega}.$$

Получается, что в открытом резонаторе могут существовать волны только с определенной частотой:

$$\omega = \pi \frac{c}{L} m.$$

Теперь рассмотрим следующий случай: пусть есть прямоугольный зеркальный ящик со сторонами L_x , L_y , L_z , а внутри него существует электромагнитная волна, которую можно представить в следующем виде:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E(\vec{r}) \vec{e}_z \exp(-i\omega t).$$

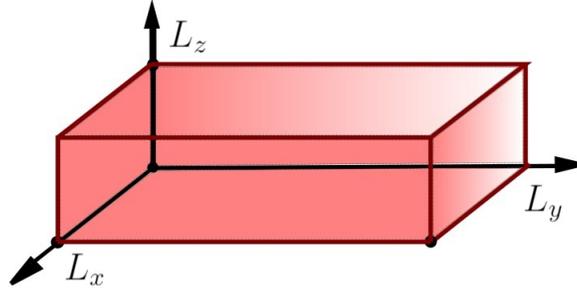


Рис. 9. Зеркальный ящик

То есть такая волна линейно поляризована вдоль оси Oz , а также является монохроматической, так что $E(\vec{r})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца (2.13):

$$(\Delta + k^2)E(\vec{r}) = 0.$$

Поскольку зеркала идеальные, введем граничные условия:

$$E(x = 0) = E(x = L_x) = E(y = 0) = E(y = L_y) = 0.$$

Можно предположить, что $E(\vec{r})$ является функцией только координат x и y , но не координаты z . Докажем это. Рассмотрим выражение для дивергенции электрического поля в вакууме:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \implies \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

Однако \vec{E} имеет только z -составляющую:

$$\vec{E} = 0 \cdot \vec{e}_x + 0 \cdot \vec{e}_y + E(\vec{r}) \exp(-i\omega t) \cdot \vec{e}_z \implies \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0.$$

Из этого следует, что

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \implies E(\vec{r}) \neq f(z).$$

Таким образом, $E(\vec{r})$ является функцией лишь от координат x и y .



Теорема 2.2. Если есть уравнение в частных производных и его решение удовлетворяет теореме Стеклова, то это решение можно искать в виде комбинации функций, зависящих только от отдельных переменных (метод Фурье):

$$E(x, y) = X(x)Y(y). \quad (2.15)$$

Подставим представление (2.15) электрического поля $E(x,y)$ в уравнение Гельмгольца:

$$(k^2 + \Delta)X(x)Y(y) = 0,$$

$$X(x)\Delta Y(y) + Y(y)\Delta X(x) + k^2 X(x)Y(y) = 0. \quad (2.16)$$

Будем считать, что при делении выражения (2.16) на $X(x)Y(y)$ не возникает неопределённостей. Это возможно, если в точках равенства нулю знаменателя и числитель равен нулю. Тогда после деления уравнение запишется в следующем виде:

$$\frac{1}{Y(y)}\Delta Y(y) + \frac{1}{X(x)}\Delta X(x) + k^2 = 0.$$

Вспомним, что функции X и Y зависят только от одноименных координат. Это значит, что частные производные по другим координатам от этих функций равны нулю, но тогда частная производная по одноименной координате будет полной производной:

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0. \quad (2.17)$$

Заметим, что для любой точки (x,y) , принадлежащей объему зеркального ящика, выполняется соотношение (2.17), причем сумма слагаемых, зависящих от x,y всегда постоянна и равна $-k^2$. Из этого можно сделать вывод, что сами слагаемые должны быть константами. Обозначим их следующим образом:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \alpha_x; \quad \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \alpha_y.$$

Тогда имеем систему из двух дифференциальных уравнений и алгебраического уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \alpha_x X(x), \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} = \alpha_y Y(y), \\ \frac{\omega^2}{c^2} + \alpha_x + \alpha_y = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Решим уравнение относительно $X(x)$, а для $Y(y)$ построим аналогичное решение, так как уравнения идентичны с точностью до обозначений:

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} - \alpha_x X(x) = 0.$$

Будем искать решение линейного дифференциального уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами в экспоненциальном виде:

$$X(x) = C_1 \exp(b_1 x) + C_2 \exp(b_2 x). \quad (2.19)$$

Получим характеристическое уравнение:

$$b^2 - \alpha_x = 0 \implies b = \pm \sqrt{\alpha_x}.$$

Определим константы C_1 и C_2 в выражении (2.19) из граничных условий:

$$X(0) = 0 \implies C_1 + C_2 = 0 \implies C_1 = -C_2,$$

$$X(L_x) = 0 \implies C_1 [\exp(\sqrt{\alpha_x} L_x) - \exp(-\sqrt{\alpha_x} L_x)] = 0. \quad (2.20)$$

Запишем следствие из уравнения (2.20):

$$\exp(\sqrt{\alpha_x} L_x) = \exp(-\sqrt{\alpha_x} L_x) \implies \exp(2\sqrt{\alpha_x} L_x) = 1.$$

Вспомним, что единицу можно представить в виде комплексного числа:

$$\exp(2\sqrt{\alpha_x} L_x) = \exp(2\pi m i) \implies \sqrt{\alpha_x} = \frac{\pi m i}{L_x}, \text{ где } m \in \mathbb{N} (\mathbb{Z}).$$

Таким образом, выражение для $X(x)$ имеет вид:

$$X(x) = C_{x+} \left(e^{i \frac{\pi}{L_x} m x} - e^{-i \frac{\pi}{L_x} m x} \right) = 2i \cdot C_{x+} \frac{e^{i \frac{\pi}{L_x} m x} - e^{-i \frac{\pi}{L_x} m x}}{2i} = \tilde{C}_{x+} \sin \left(\frac{\pi}{L_x} m x \right).$$

Совершенно аналогично для $Y(y)$ получится:

$$Y(y) = \tilde{C}_{y+} \sin \left(\frac{\pi}{L_y} n y \right). \quad (2.21)$$

Наконец, для функции $\vec{E}(\vec{r}, t)$ имеем:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}_z C_{xy} \sin \left(\frac{\pi}{L_x} m x \right) \sin \left(\frac{\pi}{L_y} n y \right) e^{-i \omega t}, \text{ где } C_{xy} \equiv \tilde{C}_{x+} \tilde{C}_{y+}. \quad (2.22)$$

Ввиду линейности уравнений Максвелла можно сделать вывод, что сумма волн такого вида (2.22) являются общим решением:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}_z \sum_{m, n \in \mathbb{N}} C_{xy} \sin\left(\frac{\pi}{L_x} m x\right) \sin\left(\frac{\pi}{L_y} n y\right) e^{-i\omega t}.$$

На рисунках 10 - 13 приведены поверхности электрического поля при закрепленных значениях L_x и L_y . Рисунки иллюстрируют распределение амплитуды вектора $\vec{E}(x, y, z)$ в плоскости Oxy , однако для любого z внутри ящика распределение амплитуд будет таким же, так как ранее было доказано, что полученное решение от z -координат не зависит.

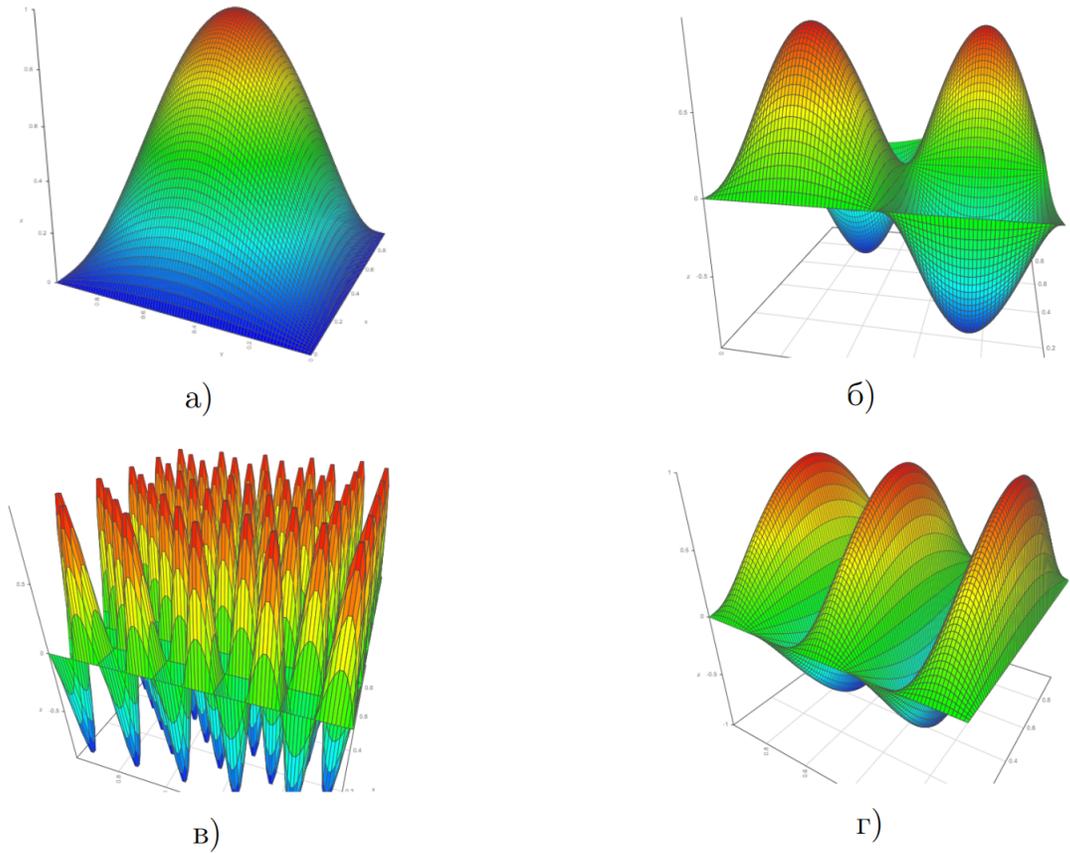


Рис. 10. Распределение амплитуды $\vec{E}(x, y, z)$ в плоскости Oxy в случае а) $m = n = 1$, б) $m = n = 2$, в) $m = n = 10$, г) $m = 5; n = 1$

С помощью уравнения №3 системы (2.18) определим, какие значения ω допустимы:

$$\frac{\omega^2}{c^2} + \alpha_x + \alpha_y = 0 \implies \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\pi^2}{L_x^2} m^2 + \frac{\pi^2}{L_y^2} n^2.$$

Таким образом, для волны в зеркальном ящике, которая поляризована вдоль оси z , существует дискретный набор частот, зависящий от натуральных чисел m и n :

$$\omega = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}}.$$

Можно показать, что для произвольной поляризации набор частот, с которыми излучение может распространяться в закрытом ящике, будет следующим:

$$\omega = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} + \frac{k^2}{L_z^2}}.$$

В главе №8 мы сделаем предположение, что энергия одного кванта электромагнитного излучения равна $W = \hbar\omega$ (*гипотеза Планка*). В этом случае получим дискретный набор значений энергий, допустимых для полей в зеркальном ящике:

$$W = \pi \hbar c \sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} + \frac{k^2}{L_z^2}}. \quad (2.23)$$

Пусть в выражении (2.23) $L_x > L_y > L_z$, тогда можно составить диаграмму частот (энергий). Стоит отметить, что в случае кубического ящика частоты, а, следовательно, и энергии могут совпадать для различных наборов (m, n, k) . Тогда имеет место так называемое *вырождение энергетических уровней*.

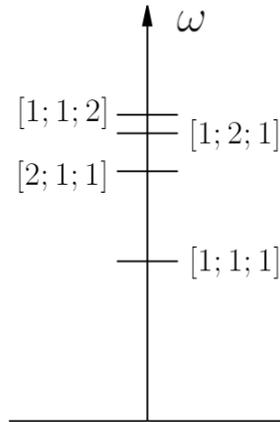


Рис. 11. Диаграмма $\omega(m, n, k)$

2.9 Прямоугольный волновод

Теперь же рассмотрим случай закрытого резонатора, когда его размеры вдоль одной из осей, например, вдоль оси x , не ограничены. Тогда возникнет некая труба с прямоугольным сечением. Вспомним выражение для функции $X(x)$:

$$X(x) = C_1 \exp \sqrt{\alpha_x} x + C_2 \exp (-\sqrt{\alpha_x} x).$$

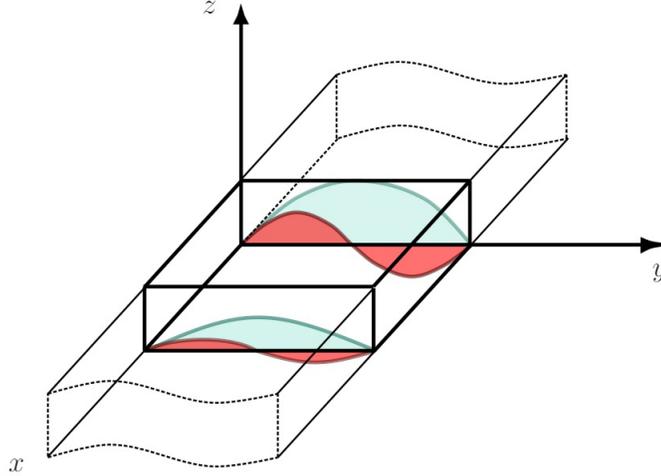


Рис. 12. Прямоугольный волновод

В отличие от закрытого волновода, граничное условие для $X(L_x)$ отсутствует. Тогда с учетом того, что $X(x = 0) = 0$, можно записать, что

$$X(x) = C_1 [\exp(\sqrt{\alpha_x} x) - \exp(-\sqrt{\alpha_x} x)].$$

Выражение для $Y(y)$ совпадает с (2.21) для закрытого резонатора. Итоговое поле в волноводе представится выражением:

$$\vec{E} = \vec{e}_z \sin \left(\frac{\pi}{L_y} n y \right) \cdot \left(C_1 e^{\sqrt{\alpha_x} x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha_x} x} \right) e^{-i\omega t}. \quad (2.24)$$

Константы C_1 и C_2 вновь введены для общности решения. С учетом уравнения №3 системы (2.18) найдем выражение для α_x :

$$\alpha_y = -\frac{\pi^2}{L_y^2} n^2 \implies \alpha_x = \frac{\pi^2}{L_y^2} n^2 - \frac{\omega^2}{c^2}.$$

В зависимости от величины ω возможны два случая:

1) Если $\omega < c \frac{\pi}{L_y} n$, то $\alpha_x > 0$. То есть показатели экспонент, приведенных в скобках в выражении (2.24), являются вещественными, так что

$$\vec{E} = \vec{e}_z \sin\left(\frac{\pi}{L_y}ny\right) \cdot \left(C_1 e^{\sqrt{\alpha_x}x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha_x}x}\right) e^{-i\omega t}. \quad (2.25)$$

Из выражения (2.25) для электрического поля следует, что бегущих волн не возникает. Электромагнитное поле совершает гармонические по времени колебания, амплитуда которых меняется вдоль движения по оси x . Так как амплитуда волны не может быть бесконечно большой (это означало бы бесконечную интенсивность излучения), при движении в сторону возрастания x стоит выбрать константу C_1 равной 0. При движении в область $x < 0$ по той же причине необходимо положить равной нулю константу C_2 . Тогда для каждого случая мы получим экспоненциально затухающие колебания по мере проникновения вглубь волновода.

2) Если $\omega > c\frac{\pi}{L_y}n$, то $\alpha_x < 0$, тогда показатели тех же экспонент чисто мнимые. В таком случае формула (2.25) примет вид

$$\vec{E} = \vec{e}_z \sin\left(\frac{\pi}{L_y}ny\right) \left[C_1 \exp\left(i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{L_y^2}n^2}x\right) + C_2 \exp\left(-i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{L_y^2}n^2}x\right) \right] e^{-i\omega t}.$$

В результате мы получаем решение в виде двух волн с изменяющимися амплитудами, бегущими вдоль оси x и против нее. А выражение для модуля волнового вектора в этом случае примет вид

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{L_y^2}n^2}.$$

Теперь найдем фазовую скорость одной из плоских монохроматических волн:

$$\Phi = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{L_y^2}n^2} \cdot x - \omega t = \text{const},$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{L_y^2}n^2} \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \implies v_\Phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{L_y^2}n^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{L_y^2}n^2 \frac{c^2}{\omega^2}}} > c.$$

Таким образом, в данном случае фазовая скорость плоской монохроматической волны больше скорости света в вакууме c . Такой результат не несет в себе физических противоречий, так как фазовая плоскость не является наблюдаемым объектом. А один из постулатов специальной теории относительности накладывает ограничения на скорость физически измеряемых величин. Фазовая скорость и фазовая плоскость к таким величинам не относятся.

Заметим также, что $\omega = f(L_y)$, так что при изменении ширины волновода L_y , мы можем менять частоту электромагнитной волны.

Рассмотрим волновод с переменной толщиной.

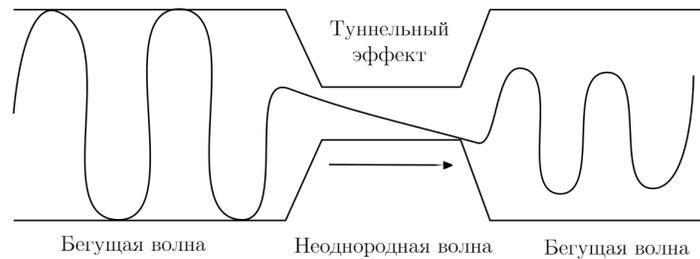


Рис. 13. Демонстрация туннельного эффекта

Волна, бегущая вдоль волновода, в месте сужения становится *неоднородной*. По мере распространения в зоне сужения амплитуда неоднородной волны экспоненциально затухает. На выходе из зоны сужения вновь возникает бегущая волна, но уже меньшей амплитуды.

 **Определение 2.12.** *Туннельный эффект в волноводе* - явление проникновения электромагнитных волн через запрещенные для их распространения зоны волновода.

Аналогичный эффект наблюдается в квантовой механике, когда у частицы не хватает энергии преодолеть потенциальный барьер, однако вероятность ее нахождения в области вне барьера не равна нулю, то есть частица действительно может как бы просочиться сквозь запрещенную область. Это явление и называют туннельным эффектом.

2.10 Сферические волны

Сферические волны - еще одна важная физическая модель, поскольку многие источники излучения являются точечными, поэтому их волновой фронт не является плоским. В свою очередь, плоская монохроматическая волна должна быть возбуждена бесконечной плоскостью, что в реальном мире, конечно, нереализуемо.

Для описания сферических волн логично перейти в *сферические координаты*. Займемся рассмотрением *истинно сферических* волн, то есть таких волн, для которых \vec{E} будет зависеть лишь от модуля вектора \vec{r} :

$$\vec{E}(|\vec{r}|, t) = \vec{E}(|\vec{r}|) \exp(-i\omega t).$$

Для того, чтобы теперь перейти к уравнению Д'Аламбера, необходимо в операторе Лапласа дифференцирование по координатам x, y, z заменить на дифференцирование по r :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{x}{r} \frac{\partial f}{\partial r},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} x \right) \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} x \right) \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + x \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{x^2}{r^3} \frac{\partial f}{\partial r}. \end{aligned}$$

В выкладках выше мы пользовались формулой производной произведения, а также пользовались правилом цепочки. То же самое необходимо сделать с y и z . Сложив вторые производные от скалярной функции f по координатам, получим оператор Лапласа, примененный к этой функции:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{3}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial r} \right). \quad (2.26)$$

Сумму в скобках в выражении (2.26) можно преобразовать во вторую производную от произведения двух функций с помощью формулы Лейбница:

$$\frac{d^2}{dr^2}(f \cdot g) = f \frac{d^2 g}{dr^2} + 2 \frac{df}{dr} \frac{dg}{dr} + g \frac{d^2 f}{dr^2}.$$

Если взять в качестве функции g модуль радиус-вектора \vec{r} , то получим в точности сумму в скобках в выражении (2.26). Таким образом, для функции, не зависящей от углов, имеем:

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r \cdot f).$$

Полученный лапласиан подставим в уравнение Д'Аламбера:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(r, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 [rE(r, t)]}{\partial r^2} = 0. \quad (2.27)$$

Для удобства в выражении (2.27) домножим равенство на r и объединим r и E в первом слагаемом под знаком второй производной:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 [rE]}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 [rE]}{\partial r^2} = 0.$$

Введем новую функцию $S = rE$. Тогда получится однородное уравнение Д'Аламбера, решение для которого известно:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} = 0 \implies S(r, t) = C \exp(i(kr - \omega t)).$$

Откуда нетрудно получить решение для поля $E(r, t)$:

$$E(r, t) = \frac{C}{r} \exp(i(\pm kr - \omega t)). \quad (2.28)$$

Поверхностью постоянной фазы у таких волн будет множество точек такое, что для каждой точки поверхности $|r| = \text{const}$ - сфера.

Знаки плюс и минус в аргументе экспоненциальной функции соответствуют расходящимся и сходящимся волнам соответственно. Амплитуда убывает как $1/r$, а интенсивность, пропорциональная $|E|^2$, как $1/r^2$.

Заметим, что решение для напряженности - скалярное. При построении решения, не зависящего от углов, ориентация вектора \vec{E} на параллелях сферы должна быть одинаковой в силу аксиальной симметрии, а также \vec{E} ортогонален \vec{k} : этого требует уравнение $\text{div } \vec{E} = 0$. Однако возникает неопределенность данной ориентации при $\theta = \{0; \pi\}$. Такой проблемы не возникает для скалярных или продольных волн. Скалярные волны вовсе не имеют ориентации вектора напряженности, а у продольных волн (например, акустических) вектор поляризации смотрит вдоль распространения.

На рисунке 14 рассмотрен случай расходящихся сферических волн от точечного источника. Так как направление \vec{E} на полюсах не определено, можно сделать вывод, что *истинно сферических электромагнитных волн* не бывает. Представленное выше решение отлично подходит для акустических и электромагнитных продольных волн (гамма и радио излучение).

Таким образом, нужно искать решение в виде функции, зависящей от углов, так что необходим полный оператор Лапласа в сферических координатах.

Оператор Лапласа, записанный в сферических координатах, имеет большое практическое применение при решении задач квантовой механики, поэтому стоит его запомнить:

$$\Delta\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \right].$$

Так как уравнение Д'Аламбера - это уравнение в частных производных, воспользуемся методом Фурье. Тогда $\vec{E}(r, \theta, \varphi, t)$ можно представить в следующем виде:

$$\vec{E} = \vec{E}(r, \theta, \varphi, t) = \vec{e}_p R(r) Y(\theta, \varphi) \exp(-i\omega t),$$

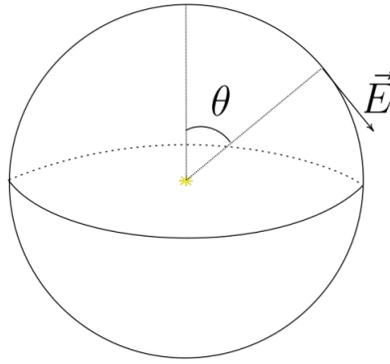


Рис. 14. Распространение сферических волн от точечного источника

где $R(r)$ - радиальная часть решения, $Y(\theta, \varphi)$ - сферическая функция.

На больших расстояниях слагаемые с $1/r^2$ в операторе Лапласа стремятся к нулю быстрее, чем слагаемое с $1/r$. В таком случае получится уравнение (2.27). Таким образом, на больших расстояниях решение (2.28) является *асимптотическим* решением для электромагнитных волн, распространяющихся от точечного источника.

2.11 Спектральное разложение

Если существует множество \mathcal{H} такое, что для его элементов выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathcal{H} : \quad x + y \in \mathcal{H}, \\ \forall x \in \mathcal{H}, \forall \alpha \in \mathbb{C} : \quad \alpha \cdot x \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

то есть, если в множестве определены операция сложения между элементами и умножение на скаляр, то говорят, что задано *линейное пространство* \mathcal{H} над полем комплексных чисел \mathbb{C} . Элементы линейного пространства называют *векторами* и могут обозначать буквой со стрелкой.

 **Определение 2.13.** *Векторами* по определению называют элементы *линейного пространства*, для которых выполняются восемь аксиом:

1. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ - коммутативность сложения;
2. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ - ассоциативность сложения;
3. $\exists \vec{0} : \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ - существование нуля (нейтрального элемента);
4. $\exists (-\vec{x}) \in \mathcal{H} : x + (-\vec{x}) = \vec{0}$ - существование противоположного элемента;

5. $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$ - ассоциативность умножения на скаляр;

6. $\exists 1: \vec{x} \cdot 1 = \vec{x}$ - унитарность (существование нейтрального относительно умножению);

7. $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$ - дистрибутивность умножения относительно сложения скаляров;

8. $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ - дистрибутивность умножения относительно сложения векторов.

В векторном пространстве можно задать операцию *скалярного произведения* (\vec{x}, \vec{y}) .

 **Определение 2.14.** Скалярным произведением двух векторов в линейном пространстве \mathcal{H} по определению называют комплексное число, которое удовлетворяет трем аксиомам:

1. $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})^*$;

2. $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$, причем $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = 0$;

3. $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = (\vec{x}_1, \vec{y}) + (\vec{x}_2, \vec{y})$.

 **Определение 2.15.** Векторы называются *ортонормальными*, если их скалярное произведение равно 0.

Можно ввести *ортонормированный базис* $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^n$ со следующими свойствами:

$$(\vec{e}_j, \vec{e}_{j'}) = \delta_{jj'} = \begin{cases} 1, & j = j', \\ 0, & j \neq j', \end{cases}$$

где $\delta_{jj'}$ - символ Кронекера. Любой вектор можно разложить по данному базису, причем сделать это можно *единственным* образом:

$$\vec{X} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n.$$

Координаты разложения можно определить следующим образом:

$$(\vec{X}, \vec{e}_j) = x_j.$$

2.12 Разложение в ряд Фурье

Пусть имеется хорошая (то есть непрерывная и сколько требуется раз дифференцируемая) периодическая функция $f(t) = f(t + T)$. Тогда такую функцию

можно разложить в ряд Фурье.



Теорема 2.3. Любую периодическую функцию $f(t) = f(t + T)$ можно разложить по базису функций $\{\cos \omega_m t\}_{m=0}^{\infty}$ и $\{\sin \omega_m t\}_{m=0}^{\infty}$. Такое разложение по определению называется ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos \omega_m t + S_m \sin \omega_m t, \text{ где } \omega_m = \frac{2\pi}{T} m.$$

Здесь и далее мы предполагаем, что m принадлежит множеству натуральных чисел, а также может равняться 0. Запишем синусы и косинусы по формулам Эйлера:

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \frac{e^{i\omega_m t} + e^{-i\omega_m t}}{2} + S_m \frac{e^{i\omega_m t} - e^{-i\omega_m t}}{2i}. \quad (2.29)$$

Перегруппируем слагаемые в выражении (2.29) и сделаем переобозначения:

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{i\omega_m t} \left(\frac{C_m}{2} + \frac{S_m}{2i} \right) + e^{-i\omega_m t} \left(\frac{C_m}{2} - \frac{S_m}{2i} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{C}_m e^{i\omega_m t} + \tilde{S}_m e^{-i\omega_m t}. \quad (2.30)$$

Поскольку в сумме (2.30) есть слагаемые как с положительным показателем степени у экспоненциальной функции, так и с отрицательным, то две суммы можно заменить на одну сумму, заменив при этом индекс суммирования:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_m e^{-i\omega_m t}. \quad (2.31)$$

При этом та часть спектра, которая соответствует отрицательным частотам, введена формально для удобства записи в кратком виде интеграла Фурье, а в дальнейшем и преобразования Фурье. В действительности колебаний с отрицательными частотами, конечно, не существует.

Найти f_m можно, умножив обе части уравнения на $e^{i\omega_{m'} t} dt$. После этого необходимо полученное выражение проинтегрировать в пределах от $-T/2$ до $T/2$:

$$I = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{i\omega_{m'} t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} f_m e^{i(\omega_{m'} - \omega_m) t} dt. \quad (2.32)$$

В выражении (2.32) ω_m пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$, а $\omega_{m'}$ - постоянна. Далее необходимо вынести суммирование за знак интеграла:

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_m e^{i(\omega_{m'} - \omega_m)t} dt = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i(\omega_{m'} - \omega_m)} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_m e^{i(\omega_{m'} - \omega_m)t} d(i(\omega_{m'} - \omega_m)t) = \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} f_m \frac{e^{i(\omega_{m'} - \omega_m)\frac{T}{2}} - e^{-i(\omega_{m'} - \omega_m)\frac{T}{2}}}{i(\omega_{m'} - \omega_m)}. \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Домножим числитель и знаменатель выражения (2.33) на T , чтобы перейти к синусу по формуле Эйлера:

$$I = \sum_{-\infty}^{\infty} T f_m \frac{e^{i(\omega_{m'} - \omega_m)\frac{T}{2}} - e^{-i(\omega_{m'} - \omega_m)\frac{T}{2}}}{2i(\omega_{m'} - \omega_m)\frac{T}{2}} = \sum_{-\infty}^{\infty} T f_m \frac{\sin\left((\omega_{m'} - \omega_m)\frac{T}{2}\right)}{(\omega_{m'} - \omega_m)\frac{T}{2}}. \tag{2.34}$$

Видим, что для дроби в формуле (2.34) возможно два случая:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\sin\left((\omega_{m'} - \omega_m)\frac{T}{2}\right)}{(\omega_{m'} - \omega_m)\frac{T}{2}} = 1, \quad m = m', \\ \frac{\sin\left((\omega_{m'} - \omega_m)\frac{T}{2}\right)}{(\omega_{m'} - \omega_m)\frac{T}{2}} = 0, \quad m \neq m'. \end{array} \right.$$

Таким образом, интеграл I может быть записан следующим образом:

$$I = \sum_{-\infty}^{\infty} T f_m \frac{\sin\left((\omega_{m'} - \omega_m)\frac{T}{2}\right)}{(\omega_{m'} - \omega_m)\frac{T}{2}} = \sum_{-\infty}^{\infty} T f_m \delta_{mm'} = f_{m'} T.$$

В итоге для коэффициентов в формуле (2.31) имеем:

$$\boxed{f(\omega_{m'}) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{i\omega_{m'} t} dt.} \tag{2.35}$$

2.13 Преобразования Фурье

Ранее мы рассмотрели разложение периодической функции в ряд Фурье. При этом важно помнить, что далеко не все функции являются периодическими - чаще всего в физике рассматриваются функции, обращающиеся в ноль на бесконечности, для которых, очевидно, нельзя ввести понятие периода. Однако существует

алгоритм, с помощью которого любую хорошую функцию можно представить периодичной.

Рассмотрим напряженность поля $E(t)$, представляющую собой одиночный импульс. Достроим несколько импульсов $E(t + T)$, $E(t + 2T)$, ..., $E(t + mT)$, а затем период T устремим к бесконечности. Таким образом, формально функция стала периодической, но с точки зрения физики остальные импульсы, находящиеся на бесконечности, не вносят никакого вклада в наблюдаемые явления.

При увеличении T в выражении (2.35) расстояние между гармониками ω_m и ω_{m+1} начнет уменьшаться. При стремлении $T \rightarrow \infty$ они сольются в одну сплошную полосу.

Поскольку $E(t)$ формально стала периодической функцией, запишем для нее ряд Фурье:

$$E(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_m e^{-i\omega_m t}. \quad (2.36)$$

Введем расстояние между соседними гармониками $\delta\omega$ как $\omega_{m+1} - \omega_m$:

$$\delta\omega = \omega_{m+1} - \omega_m = \frac{2\pi}{T}(m+1) - \frac{2\pi}{T}m = \frac{2\pi}{T}.$$

Домножим каждый член в сумме (2.36) на $\delta\omega$, но саму сумму разделим на $\delta\omega$, так что ничего не изменится:

$$E(t) = \frac{1}{\delta\omega} \sum_{-\infty}^{\infty} f_m e^{-i\omega_m t} \delta\omega = \sum_{-\infty}^{\infty} E(\omega_m) e^{-i\omega_m t} \delta\omega, \quad (2.37)$$

где было введено обозначение $E(\omega_m) \equiv f_m / \delta\omega$.

Если в выражении (2.37) период устремить к бесконечности (перейти к рассмотрению единичного импульса), то получится интегральная сумма, так как $\lim_{T \rightarrow \infty} \delta\omega = 0$:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2.38)$$

 **Определение 2.16.** Функция $E(t)$, которая сопоставляется по формуле (2.38) функции $E(\omega)$, по определению называется **обратным преобразованием Фурье**.

Рассмотрим более подробно функцию $E(\omega_m)$, при этом индекс m для ω опустим, так как спектр частот при устремлении периода к бесконечности становится сплошным:

$$E(\omega) = \frac{T}{2\pi} f_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E(t) e^{i\omega t} dt = |T \rightarrow \infty| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt.$$

В итоге для функции $E(\omega)$ мы получили следующее выражение:

$$\boxed{E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt.} \quad (2.39)$$



Определение 2.17. Функция $E(\omega)$, которая сопоставляется по формуле (2.39) функции $E(t)$ (не обязательно периодичной) по определению называется **преобразованием Фурье (Фурье образом)**.

Подставим обратное Фурье преобразование для $E(t)$ в формулу (2.39):

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' E(\omega') \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega') t} dt. \quad (2.40)$$

Здесь ω связана с конкретным значением $E(\omega)$, а ω' обозначает переменную интегрирования. Последний интеграл в выражении (2.40) обозначим как $F(\omega - \omega')$. Рассмотрим сначала этот интеграл для конечного интервала, а затем устремим интервал к бесконечности:

$$\begin{aligned} F(\omega - \omega') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(\omega - \omega') t} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(\omega - \omega') \frac{T}{2}} - e^{-i(\omega - \omega') \frac{T}{2}}}{i(\omega - \omega')} = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{T \sin [(\omega - \omega') \frac{T}{2}]}{(\omega - \omega') \frac{T}{2}}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Функция в выражении (2.41) при стремлении периода к бесконечности ведет себя также, как *дельта-функция Дирака*. Для проверки этого докажем одно из свойств волновой функции - интеграл от нее по бесконечным пределам должен равняться 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega - \omega') d(\omega - \omega') = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin [(\omega - \omega') \frac{T}{2}]}{(\omega - \omega') \frac{T}{2}} d \left[(\omega - \omega') \frac{T}{2} \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1. \quad (2.42)$$

В выражении (2.42) мы воспользовались тем, что интеграл по бесконечным пределам от функции вида $\sin(x)/x$ с переменной интегрирования x равен π . С учетом того, что при стремлении T к бесконечности функция (2.41) сходится к δ -функции, можно сделать вывод, что

$$F(\omega - \omega') = \delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega't} \cdot e^{i\omega t} dt.$$

Значит, Фурье образом гармонической функции $e^{-i\omega't}$ является дельта-функция.

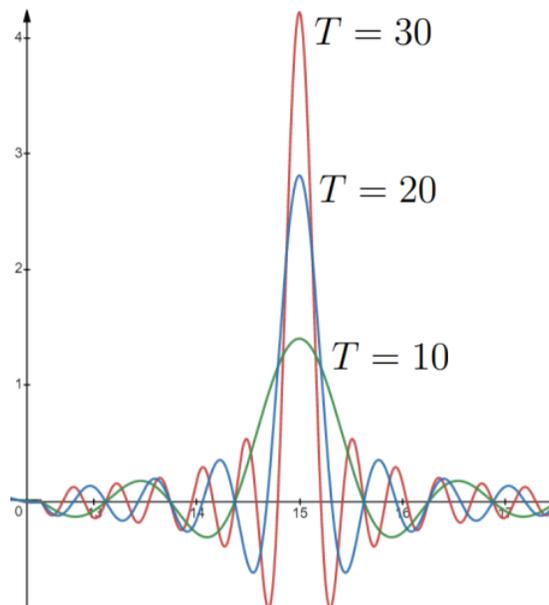


Рис. 15. Значение интеграла $F(\omega - \omega')$ при различных T ($\omega' = 15$)

До этого момента мы описывали свет с помощью гармонических функций - монохроматических волн, а частицы с помощью δ -функций. Однако они оказались Фурье-образами друг друга. Соответственно, свет можно представить как сумму гармонических функций, а также как сумму δ -функций. Таким образом, вопрос о том, как мы описываем свет, есть вопрос о том, по какому базису мы раскладываем функцию $E(t)$.

2.14 Энергетический аспект разложения сигнала в Фурье-спектр

Существуют приборы, которые осуществляют преобразования Фурье, т. е. разложение сигналов в спектр, не на математическом, а на физическом уровне.

К таким приборам относятся призмы, дифракционные решетки и другие, как их называют в оптике, диспергирующие элементы. Правда, необходимо сделать одно существенное уточнение. На экспериментах регистрируются не частотные зависимости комплексной амплитуды, а зависимости от частоты интенсивности излучения, которая вычисляется как квадрат модуля комплексной амплитуды излучения. При этом та часть спектра, которая соответствует отрицательным частотам, введенным чисто формально для удобства записи в кратком виде преобразования и интеграла Фурье, просто не рассматриваются. Описанную зависимость интенсивности света от частоты или квадрата модуля амплитуды Фурье-спектра от частоты принято называть *энергетическим спектром излучения*.

Если мы научились считать Фурье-образ, то теперь можно немонохроматический сигнал считать суммой монохроматических. Поле можно разложить в сумму полей, но на эксперименте мы всегда наблюдаем не поле, а интенсивность, поэтому имеет смысл ввести два типа спектров: фурье-спектр $E(\omega)$ (математический спектр) и физический (энергетический) спектр $I(\omega)$. Последний спектр мы и наблюдаем на эксперименте.

$$I(\omega) = |E(\omega)|^2 = E(\omega) \cdot E^*(\omega).$$

Рассмотрим произвольный сигнал $E(t)$, форма которого изображена на рисунке 16. В каждый момент времени энергия пропорциональна интенсивности, а интенсивность, в свою очередь, в каждый момент времени меняется, поэтому чтобы найти полную энергию сигнала W , необходимо просуммировать все интенсивности по всем временам:

$$W \sim \int_{-\infty}^{\infty} E(t)E^*(t)dt \sim \int_{-\infty}^{\infty} E^*(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega)e^{-i\omega t}d\omega. \quad (2.43)$$

В формуле (2.43) сигнал $E(t)$ мы записали через обратное Фурье преобразование.

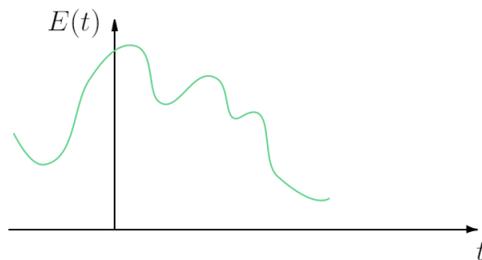


Рис. 16. Форма сигнала $E(t)$

Теперь поменяем порядок интегрирования:

$$W \sim \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} E^*(t) e^{-i\omega t} dt,$$

где $E^*(t)e^{-i\omega t} = (E(t)e^{i\omega t})^*$. Последнее верно, так как комплексное сопряжение произведения - это произведение комплексных сопряжений. Значит, полная энергия сигнала:

$$W \sim \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) d\omega \left[\int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt \right]^*. \quad (2.44)$$

Формула (2.44) следует из того, что интеграл - это не что иное как сумма, а суммирование можно внести под знак комплексного сопряжения. Заметим,

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt \right]^* \sim E^*(\omega). \quad (2.45)$$

Величины в выражении (2.45) равны с точностью до 2π . С учетом выражения (2.44) полную энергию сигнала можно представить в следующем виде:

$$\boxed{W \sim \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) E^*(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) d\omega}. \quad (2.46)$$

В формуле (2.46) получили интеграл по всем частотам от $I(\omega)$. Оказывается, что энергия импульса равна сумме энергий по всем его частотам.

2.15 Спектр светового цуга

Рассмотрим сигнал, который в пределах от $-T/2$ до $T/2$ имеет косинусоидальную форму, а вне этого диапазона равен 0:

$$E(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}], \\ E_0 \cos(\omega_0 t), & t \in [-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]. \end{cases}$$

Или же функцию $E(t)$ можно представить как

$$E(t) = E_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \text{rect} \left(\frac{t}{T} \right),$$

где функция $\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ имеет вид, как показано на рисунке 17. В данном случае эта функция есть *огбающая волны*: именно её мы видим, когда принимаем сигнал. А множитель $E_0 \cos \omega_0 t$ в данном случае является *несущей волны*.

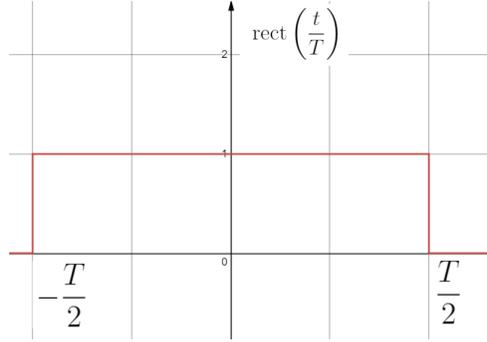


Рис. 17. Функция $\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

Теперь запишем выражение для Фурье-образа косинусоидального сигнала:

$$\begin{aligned}
 E(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E_0 \cos(\omega_0 t) e^{i\omega t} dt = \frac{E_0}{4\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(\omega+\omega_0)t} dt + \frac{E_0}{4\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(\omega-\omega_0)t} dt = \\
 &= \frac{TE_0}{2 \cdot 2\pi} \left(\frac{e^{i(\omega+\omega_0)\frac{T}{2}} - e^{-i(\omega+\omega_0)\frac{T}{2}}}{2i(\omega+\omega_0)\frac{T}{2}} + \frac{e^{i(\omega-\omega_0)\frac{T}{2}} - e^{-i(\omega-\omega_0)\frac{T}{2}}}{2i(\omega-\omega_0)\frac{T}{2}} \right) = \\
 &= \frac{TE_0}{4\pi} \left(\frac{\sin[(\omega+\omega_0)\frac{T}{2}]}{(\omega+\omega_0)\frac{T}{2}} + \frac{\sin[(\omega-\omega_0)\frac{T}{2}]}{(\omega-\omega_0)\frac{T}{2}} \right). \tag{2.47}
 \end{aligned}$$

Теперь построим график зависимости Фурье-образа конечного во времени косинусоидального сигнала от частот излучения. При этом вспомним, что отрицательных частот не существует, поэтому одну из компонент стоит стереть в той области, где $\omega < 0$, однако в интервале $\omega > 0$ ее вклад в спектр не равен 0.

Тогда из формулы (2.47) видно, что при $T \rightarrow 0 : \delta\omega \rightarrow \infty$, а значит, сигнал не является монохроматическим. Другими словами, чем короче сигнал, тем шире спектр этого сигнала.

Если же $T \rightarrow \infty$, то косинусоидальный сигнал является истинно монохроматическим, и его спектр представляет собой дельта-функцию.

Теперь рассмотрим соотношение, связывающее неопределенность частоты $\delta\omega$ с периодом колебаний T , при этом домножим обе части на постоянную Дирака (приведенную постоянную Планка) \hbar :

$$\delta\omega \hbar \cdot T \sim 2\pi \hbar \implies \boxed{\delta W \cdot T \sim h}.$$

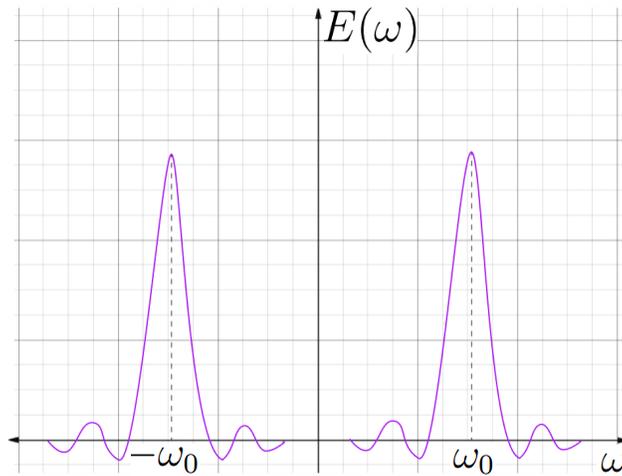


Рис. 18. Фурье образ сигнала $E(t) = E_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$



Физический закон 2.2. Принцип неопределенности Гейзенберга
Любая система, существующая в нашем мире в течении конечного времени, не может обладать определенной энергией.

Рассмотрим случай, когда на фотозатвор падает монохроматическое излучение, например, от лазера на длине волны 550 нм. Это означает, что в пучке света летят фотоны с одинаковой энергией, соответствующей частоте красного цвета. Все фотоны имеют одинаковую энергию. Однако после прохождения через фотозатвор, который открывается и закрывается на очень короткий интервал времени (порядка фемтосекунды), спектр неизбежно расширится в диапазоне частот. Таким образом, красные фотоны должны будут превращаться в зеленые, синие, желтые, фиолетовые, а также инфракрасные фотоны.

Однако закрытый фотозатвор, на самом деле, пропускает свет (как и в случае с идеальным зеркалом), но генерирует собственное поле, которое, складываясь с исходным, и дает нуль. Если фотозатвор работает очень быстро, генерируя короткие световые импульсы, его шторки должны двигаться с огромной скоростью. Но ранее было показано, что излучение от подвижного источника претерпевает сдвиг частоты из-за эффекта Доплера - это и обеспечивает дополнительные частоты.

Контрольные вопросы

1. Какое выражение называется волновым уравнением? Что является его решением?
2. Что такое плоская монохроматическая волна?
3. В каком виде можно переписать систему уравнений Максвелла для плоских монохроматических волн? Что из этого следует?
4. Как определяется фазовая скорость для плоской монохроматической вол-

ны?

5. Что такое вектор Пойтинга?
6. Какие виды поляризации существуют? В каком случае монохроматическая волна имеет эллиптическую поляризацию?
7. Что такое монохроматическое поле?
8. Как выглядит уравнение Гельмгольца для монохроматических полей?
9. При каком условии существует открытый резонатор?
10. Что такое туннельный эффект в волноводе?
11. Как выглядит уравнение сферической волны?
12. Какую функцию можно разложить в ряд Фурье?
13. Для чего используется преобразование Фурье?
14. Как формулируется принцип неопределенности Гейзенберга?

3 КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИПОЛЬНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

3.1 Электрическое поле ускоренно движущегося заряда

 **Физический закон 3.1.** Излучение электромагнитных волн
Электромагнитные волны излучаются ускоренно движущимися электрическими зарядами.

Общие формулы для поля ускоренно движущегося электрического заряда удобно получить на модельном примере. Согласно этой модели заряд в момент времени $t = 0$ покоился, затем в течение времени τ двигался с постоянным ускорением a , а далее в течение времени $T \gg \tau$ движется с постоянной скоростью $v \ll c$.

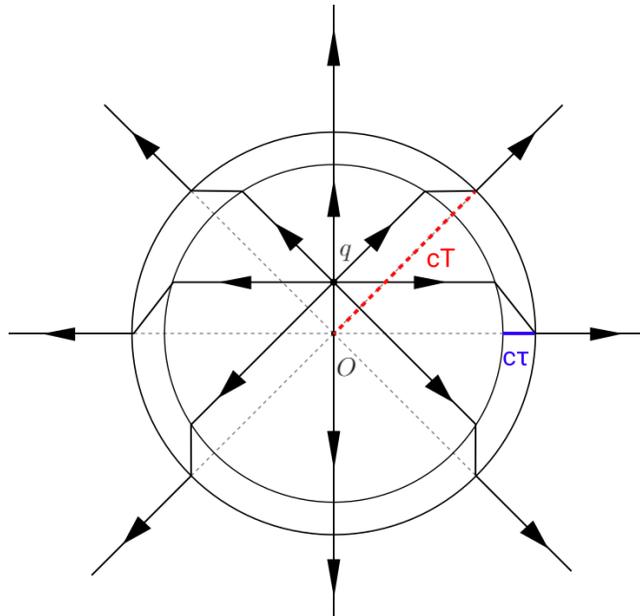


Рис. 19. Линии электрического поля ускоренно двигающегося заряда

Так как предельная скорость распространения взаимодействий в вакууме равна c , то в точках, лежащих за пределами сферы радиусом cT , в момент времени T еще не известно о том, что в момент времени $t = 0$ заряд начал движение. Тогда за пределами этой сферы электрическое поле соответствует полю точечного заряда, покоящегося в точке O - начале координат:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{r^3} \vec{r}.$$

Внутри же сферы радиусом $c(T - \tau)$ электрическое поле в момент времени T такое же, как и поле равномерно движущегося заряда, так как с момента τ заряд уже движется с постоянной скоростью. Таким образом, все изменения электрического поля, связанные с ускоренным движением заряда, заключены в слое толщиной $c\tau$. Как устроено электрическое поле в этой области? Как правило, природа среди множества альтернатив выбирает простейший выход из сложившейся ситуации. Разорвавшиеся силовые линии внутри слоя надо соединять отрезками прямых, как показано на рисунке 20. Тогда выполняется изучающаяся в курсе классической электродинамики теорема Гаусса: линии электрического поля не прерываются, ведь в слое толщиной $c\tau$ отсутствуют электрические заряды.

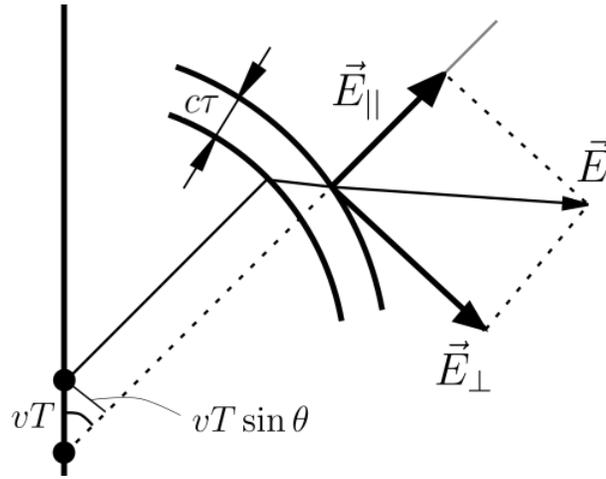


Рис. 20. Компоненты поля излучения

Наличие преломленных силовых линий электрического поля означает появление дополнительной тангенциальной компоненты напряженности электрического поля. Эта компонента существует внутри сферического слоя с внутренним радиусом $c(T - \tau)$. Отношение перпендикулярной составляющей поля E_{\perp} , генерируемой ускоренно движущимся зарядом, к параллельной составляющей классического кулоновского поля E_{\parallel} легко найти из геометрических соображений.

Получается, что отношение поперечной и продольной составляющих электрического поля равно

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{vT \sin \theta}{c\tau} \implies E_{\perp} = \frac{vT \sin \theta}{c\tau} \cdot \frac{q}{r^2} = \frac{q \cdot a}{c^2 r} \sin \theta. \quad (3.1)$$

Обратим внимание, что электрическое поле (3.1) зависит от расстояния, как $1/r$, т. е. гораздо медленнее, чем кулоновское. Именно это свойство полей ускоренно движущихся зарядов объясняет удобство их использования для передачи сигналов на большие расстояния.

Кроме того, амплитуда дополнительного поля зависит от угла между векторами \vec{a} и \vec{r} . В направлении ускоренного движения заряды не излучают, так что

вдоль \vec{a} наблюдается только кулоновское поле. Максимальное же поле излучения можно наблюдать на экваториальной линии построенной сферы (рисунок 19).

Теперь предположим, что заряд q движется вдоль оси z с переменным ускорением $a(t)$, оставаясь при этом вблизи начала координат, где установлен неподвижный заряд $-q$. Важно, что поле положительного заряда на расстоянии r определяется ускорением в более ранний момент времени $t' = t - r/c$. В этом заключается так называемый эффект запаздывания:

$$E_{\perp}(r, t) = \frac{q \cdot a(t - r/c)}{c^2 r} \sin \theta. \quad (3.2)$$

Важно отметить, что на больших расстояниях можно записать формулу для перпендикулярной составляющей поля диполя:

$$E_{\perp}(r, t) = \frac{\ddot{d}(t - r/c)}{c^2 r} \sin \theta. \quad (3.3)$$

В формуле (3.3) d - дипольный момент системы зарядов.

В курсе классической электродинамики строго доказывается, что полученное в модельном примере выражение для электрического поля ускоренно движущегося заряда применимо для любого ускоренного движения в нерелятивистском приближении, так что результат (3.2) весьма универсален.

3.2 Модель атома Томсона



Определение 3.1. Атом Томсона можно представить как положительно заряженное ядро, которое окружено сферой с равномерно распределенным по объему отрицательным зарядом (рисунок 21):

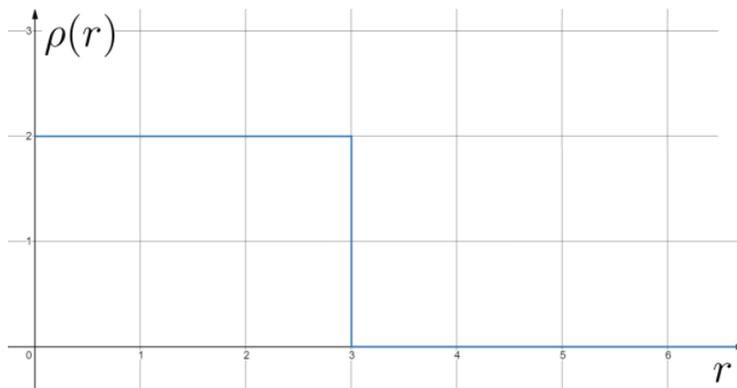


Рис. 21. Функция распределение плотности заряда от расстояния

По теореме Гаусса можно найти электрическое поле внутри атома:

$$\oint (\vec{E}, d\vec{S}) = 4\pi Q_{in} \quad \left(Q_{in} = e \frac{r^3}{a_0^3} \right).$$

С учетом выражения для заряда, ограниченного поверхностью:

$$|\vec{E}| = e \frac{r}{a_0^3}. \quad (3.4)$$

В центре облака поле равно нулю ввиду (3.4), так что равна нулю и сила взаимодействия ядра с облаком. При смещении ядра относительно центра облака, возникнет возвращающая сила. По 2 закону Ньютона получаем:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -k \vec{r}. \quad (3.5)$$

В выражении (3.5) $k = \frac{e}{a_0^3}$ - эффективная жесткость связи.

Ввиду стабильности атома у системы, очевидно, есть положение устойчивого равновесия. Около него при небольшом отклонении возвращающая сила хорошо аппроксимируется линейной зависимостью, что видно из уравнения (3.5). Перепишем его в виде

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \vec{r} = 0, \quad \text{где } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Комплексная форма решения данного уравнения имеет вид:

$$r(t) = r_0 e^{-i\omega_0 t} \implies d(t) = d_0 e^{-i\omega_0 t}. \quad (3.6)$$

Вспомним выражение (3.3) для поля излучения (в данном случае считаем мгновенное значение поля, а не в точке наблюдения):

$$E_{\perp} = \frac{\ddot{d}}{c^2 r} \sin \theta. \quad (3.7)$$

Подставляя выражение (3.6) в (3.7), получим:

$$E(t) = (-i\omega_0)^2 \frac{d_0 e^{-i\omega_0 t}}{c^2 r} \sin \theta = -\frac{d_0 \omega_0^2 \sin \theta}{c^2 r} e^{-i\omega_0 t}.$$

Знак минус иллюстрирует лишь различие в направлении электрического поля излучения и дипольного момента. Далее будем его опускать, говоря лишь о пропорциональности данных величин.

Сосчитаем вектор Пойнтинга, усредненный за период, то есть интенсивность:

$$|\langle \vec{S} \rangle| = \frac{c}{8\pi} E_{\perp} E_{\perp}^* = \frac{c}{8\pi} \frac{d_0^2 \omega_0^4}{c^4 r^2} \sin^2 \theta = \frac{d_0^2 \omega_0^4}{8\pi c^3 r^2} \sin^2 \theta. \quad (3.8)$$

Удобно изобразить, так называемую, *диаграмму направленности* излучения (рисунок 22).

 **Определение 3.2.** *Диаграмма направленности излучения* - графическое представление направлений излучения от колебаний электрона в атоме Томсона.

Как видно из диаграммы направленности излучения для атома Томсона (рисунок 22), диполь не излучает вдоль направления колебаний. А в направлении перпендикулярном движению диполя, излучение наиболее интенсивно.

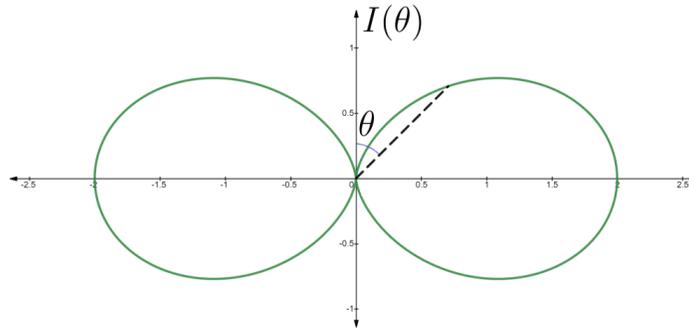


Рис. 22. Диаграмма направленности излучения диполя

На рисунке 23 можно увидеть спектр излучения атома Томсона, который соответствует дельта-функции. Такой вид спектра обусловлен тем, что атом излучает монохроматическую волну, а, согласно параграфу 2.13, Фурье образом гармонической функции является дельта-функция.

Важно отметить, что такая модель противоречит закону сохранения энергии. Если атом излучает, то энергия от него распространяется в пространстве. Сам же колеблющийся диполь в виде возбужденного атома Томсона должен терять энергию, так что, на самом деле, колебания имеют затухающий характер. Рассмотрению этого вопроса будет посвящен следующий параграф.

3.3 Радиационное затухание

Как уже было сказано ранее, на практике любые свободные колебания должны иметь затухающий характер. Значит, необходимо во второй закон Ньютона добавить слагаемое, которое будет обеспечивать диссипацию энергии. Последнее можно объяснить следующим образом.

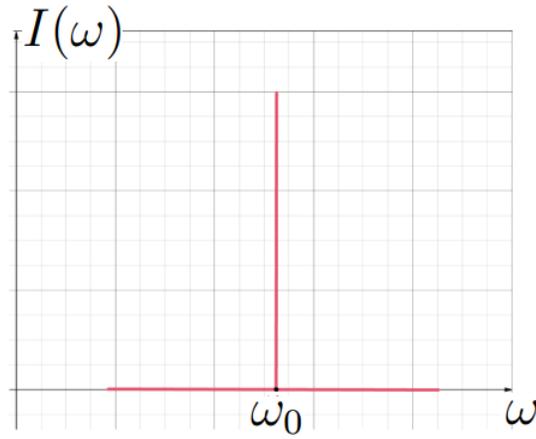


Рис. 23. Спектр излучения атома Томсона



Определение 3.3. Радиационное трение - тормозящая сила, возникающая при движении заряда с ускорением. Опыт показывает, что сила радиационного трения пропорциональна третьей производной от расстояния.

Потери энергии при этом довольно слабые, так что на самом деле заряд совершает почти гармонические колебания. Если говорить точнее, то характерная частота оптических колебаний $\omega_0 \sim 10^{16}$ Гц, а характерное время затухания (обратная величина к частоте) $\tau \sim 10^{-8}$ с. Таким образом, за время заметной потери энергии происходит порядка 10^8 осцилляций, так что затухание незначительное.

Если колебания почти гармонические, то третья производная по времени от гармонической функции (какой и является функция $\vec{r}(t)$ или $\vec{d}(t)$) ведет себя с точностью до константы, как первая производная. Поэтому эффективная сила радиационного затухания $F_\beta \sim \dot{r}$.

Запишем уравнение движения электрона в атоме Томсона с учетом радиационного трения (в приближении вязкого трения):

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + 2\beta\frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2\vec{r} = 0. \quad (3.9)$$

Решение уравнения (3.9) будем искать в стандартном виде: $\vec{r}(t) = \vec{C} \exp(\alpha t)$. Тогда характеристическое уравнение примет вид

$$\alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega_0^2 = 0,$$

$$\alpha_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}} \simeq -\beta \pm i\omega_0.$$

Последнее приближение обусловлено тем, что $\omega_0 \gg \beta$. Поскольку речь идет о расходящихся волнах, то искомое решение можно записать в следующем виде:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \exp(-\beta t) \exp(-i\omega_0 t). \quad (3.10)$$

Домножив на заряд выражение (3.10), получаем выражение для дипольного момента:

$$\vec{d}(t) = \vec{d}_0 \exp(-\beta t) \exp(-i\omega_0 t).$$

Дипольный момент будет совершать гармонические колебания на частоте, близкой к ω_0 , а $\exp(-\beta t)$ будет обеспечивать затухание (оранжевая кривая на рисунке 24).

Из формулы (3.7) следует, что при гармонических колебаниях электрическое поле колеблется на одной частоте с дипольным моментом.

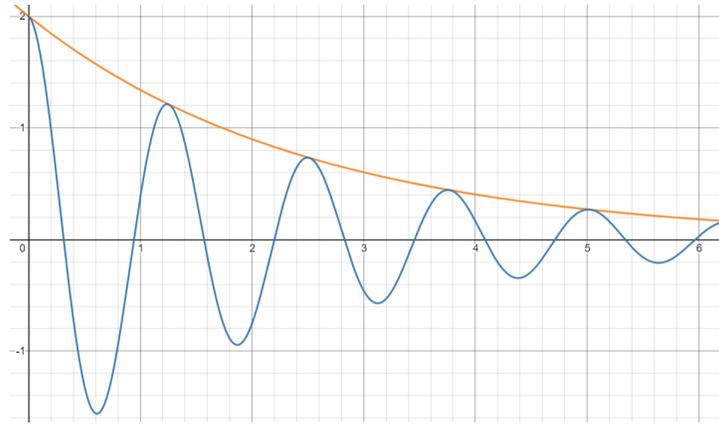


Рис. 24. Зависимость дипольного момента от времени (синий график), огибающая этой зависимости (оранжевый график)

Значит, электрическое поле $E(t)$ примет аналогичный вид, как показано на рисунке 24:

$$E(t) = E_0 \exp(-\beta t) \exp(-i\omega_0 t). \quad (3.11)$$

Перейдем в вещественную область (пусть колебания начались в момент времени $t = 0$):

$$E(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ E_0 \exp(-\beta t) \cos \omega t, & t \geq 0. \end{cases}$$

На характерном времени затухания (порядка 10^{-8} с) лежит 10^8 периодов длительностью около 10^{-16} с. Такое поле излучается атомом Томсона. Говоря о атоме Томсона, принято говорить об излучении *светового цуга*.

3.4 Классическая оценка константы радиационного затухания

Итак, в процессе затухающих колебаний атом Томсона теряет энергию в виде излучения. Тогда в соответствии с законом сохранения энергии скорость её изменения равна мощности излучения. Запишем полную механическую энергию атома Томсона (кинетическая энергия колеблющегося облака и потенциальная энергия электрического взаимодействия):

$$W = T + U = \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega_0^2}{2}x^2.$$

Когда атом больше всего деформирован, вся энергия запасена в потенциальной, но из-за излучения энергия всё время убывает, так что $W(t)$:

$$W = \frac{m\omega_0^2}{2} \left[\frac{d_0}{q} \right]^2 \exp(-2\beta t),$$

где $x = d_0/q$ - максимальное растяжение натянутой пружинки, а d_0 - амплитуда дипольного момента, убывающая со временем: из этих соображений и возникает затухающая экспонента.

Чтобы определить мощность излучения, необходимо найти производную от $W(t)$:

$$\left| \frac{dW}{dt} \right| = \beta \frac{m\omega_0^2 d_0^2}{q^2} \exp(-2\beta t). \quad (3.12)$$

Окружим излучающий атом сферой радиуса R и определим поток вектора Пойнтинга через поверхность такой сферы - это и будет мощность излучения диполя.

Вектор Пойнтинга направлен радиально, так что $(\langle \vec{S} \rangle, d\vec{s}) = \langle S \rangle ds$.

$$\oint_{S_R} (\langle \vec{S} \rangle, d\vec{s}) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{8\pi} \frac{\omega_0^4 d_0^2 \exp(-2\beta t)}{c^3 r^2} r^2 \sin^3 \theta d\theta d\varphi.$$

Интеграл по $d\varphi$ равен 2π . Внесем $\sin \theta$ под дифференциал, а появившийся минус нейтрализуем заменой пределов интегрирования:

$$\begin{aligned} \oint_{S_R} (\langle \vec{S} \rangle, d\vec{s}) &= \frac{\omega_0^4 d_0^2 \exp(-2\beta t)}{4c^3} \int_\pi^0 (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = \\ &= \frac{\omega_0^4 d_0^2 \exp(-2\beta t)}{4c^3} \left[\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_\pi^0 = \frac{\omega_0^4 d_0^2 \exp(-2\beta t)}{3c^3}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

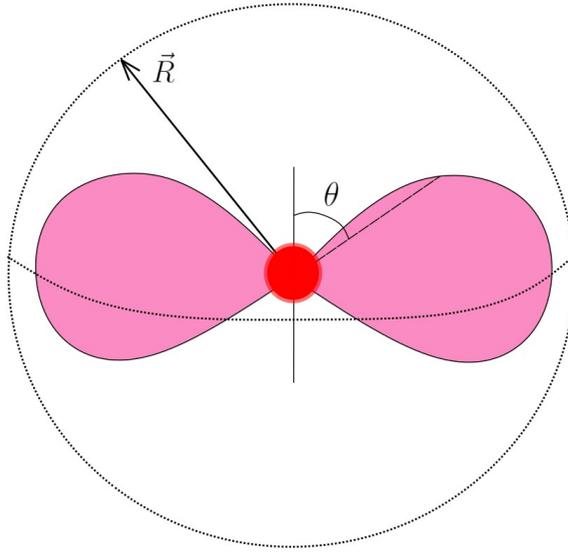


Рис. 25. Излучение диполя через сферу радиусом R

Выражение (3.13) показывает, сколько энергии в единицу времени уносит излучение, а выражение (3.12) - сколько в единицу времени энергии теряет атом Томсона. Приравняем полученные соотношения из условия выполнения з.с.э.:

$$\frac{\omega_0^4 d_0^2 \exp(-2\beta t)}{3c^3} = \beta \frac{m\omega_0^2 d_0^2}{q^2} \exp(-2\beta t).$$

Тогда константа радиационного затухания получается равной

$$\boxed{\beta = \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2 q^2}{mc^3}}. \quad (3.14)$$

Оказывается, что константа радиационного затухания не зависит от того, насколько велика начальная амплитуда колебаний. Для константы β справедливо следующее утверждение: чем выше частота, тем сильнее диссипация энергии. Опыт показывает, что разные атомы излучают на разных частотах, тогда можно экспериментально установить, есть ли зависимость скорости затухания от ω_0^2 . И действительно, чем больше частота, тем сильнее радиационное затухание - это экспериментальный факт.

3.5 Однородное уширение спектра атома Томсона. Лоренцев контур

Теперь рассмотрим задачу о спектре излучения диполя с учетом константы радиационного затухания (3.14). С помощью формулы (3.11) запишем напряженность электрического поля в действительном виде:

$$E(t) = \text{Re } E_0 e^{-\beta t} e^{-i\omega_0 t} = E_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t). \quad (3.15)$$

Запишем косинус в выражении (3.15) по формуле Эйлера:

$$\cos \omega_0 t = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\pm} e^{\pm i\omega_0 t}.$$

Сосчитаем математический спектр поля (3.15) с помощью прямого преобразования Фурье:

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt = \frac{E_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \sum_{\pm} e^{(-\beta + i(\omega \pm \omega_0))t} dt. \quad (3.16)$$

При взятии интеграла (3.16) на верхнем пределе значение первообразной равно нулю, а на нижнем, если вместо времени t подставить 0, получим единицу. Таким образом, в числителе после интегрирования будет -1 :

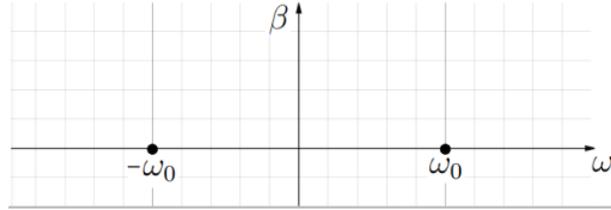


Рис. 26. Зависимость β от частоты

$$E(\omega) = \frac{E_0}{4\pi} \sum_{\pm} \frac{-1}{-\beta + i(\omega \pm \omega_0)}. \quad (3.17)$$

Полученный Фурье-спектр является комплексным. Оценивая дробь (3.17), становится ясно, что экстремумы будут находиться в точках $\pm\omega_0$.

Для получения физического спектра нужно возвести $E(\omega)$ в квадрат по модулю:

$$I(\omega) = \frac{I_0}{\beta^2 + (\omega - \omega_0)^2}. \quad (3.18)$$

Перекрестных членов в выражении (3.18) не будет, так как один из сомножителей в них обязательно равен нулю. Зависимость интенсивности излучения атома Томсона от частоты представлено на рисунке 27.

Ранее радиационное трение исключалось из рассмотрения, поэтому и в физическом спектре мы получали δ -функцию. Теперь же зависимость интенсивности от частоты описывается так называемым *Лоренцевым контуром*.

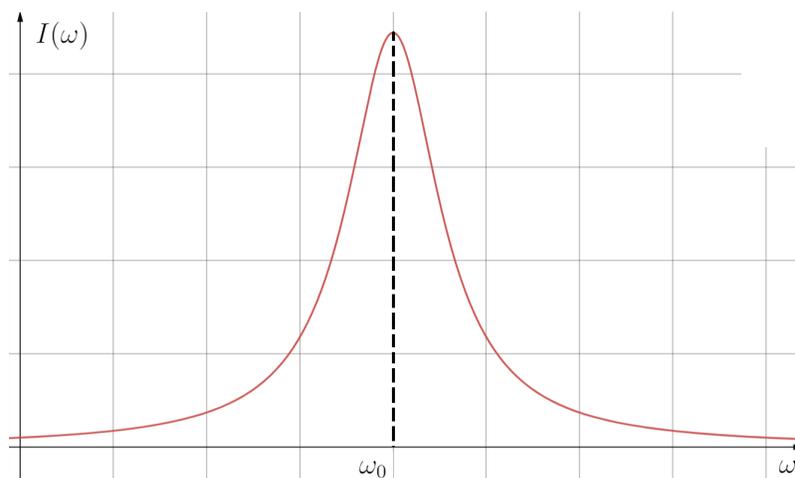


Рис. 27. Лоренцев контур

 **Определение 3.4.** *Лоренцевым контуром* по определению будем называть зависимости типа 3.18.

Эффект уширения спектра излучения из-за наличия радиационного трения называется *естественным (или однородным) уширением*. Лоренцев контур нигде не обращается в нуль, поэтому удобно ввести понятие полуширины.

 **Определение 3.5.** *Полуширина* - это ширина линии на уровне, где значение интенсивности света равно половине от максимума контура.

Из формулы (3.18) легко показать, что полуширина кривой $\delta\omega$, изображенной на рисунке 28, равна:

$$\delta\omega = 2\beta$$

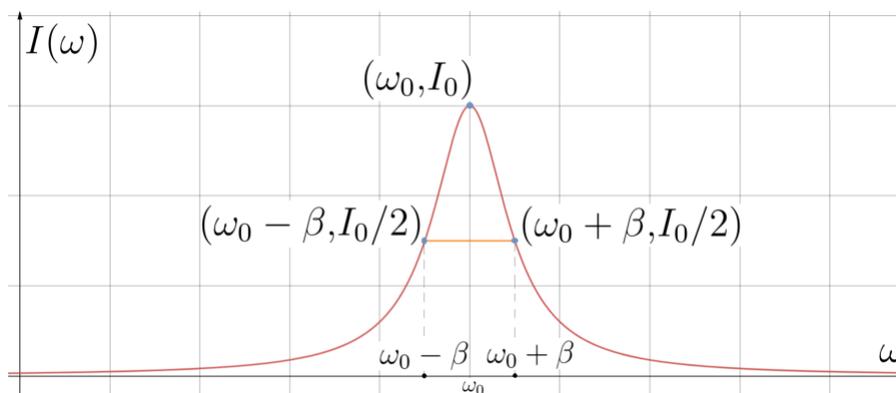


Рис. 28. Полуширина для Лоренцева контура

Следовательно, константу радиационного затухания β можно определить теоретически, а можно и экспериментальными методами.

3.6 Спектр некогерентного источника

Итак, все это время в поставленных задачах свет излучал уединенный атом, в реальном же эксперименте трудно добиться излучения от единственного атома - чаще всего имеется некоторый объем, в котором находится большое количество атомов с хаотически движущимися электронами.

Будем считать, что в среднем столкновения электронов с атомами вызывают колебания одинаковой амплитуды. Однако каждое такое столкновение провоцирует изменение фазы колебаний, причем можно считать, что каждое такое изменение случайно:

$$E_{\Sigma}(t) = \sum_{i=1}^N E_i(t - \theta_i),$$

где θ_i - случайный момент времени.

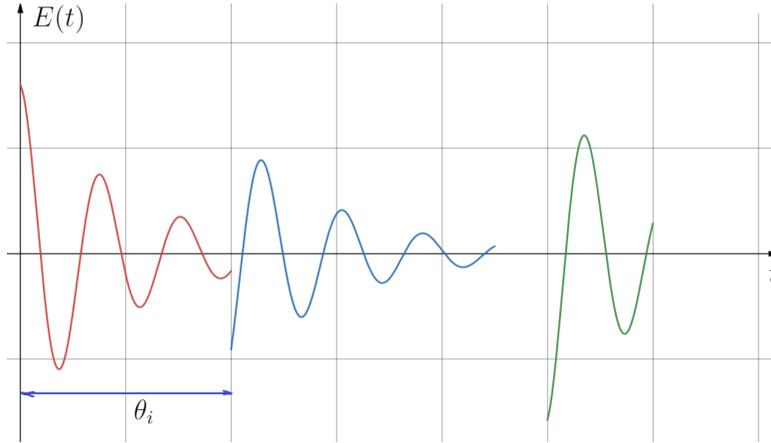


Рис. 29. Импульсы от некогерентного источника света

Такие атомы совершают некогерентные колебания, то есть начала этих колебаний не скоррелированы. Такие хаотические некогерентные колебания проиллюстрированы на рисунке 29.

Посчитаем математический спектр системы несвязанных друг с другом источников света. При расчетах сделаем следующую замену: $t = t_i + \theta_i$. В результате получим:

$$E_{\Sigma}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N E(t - \theta_i) e^{i\omega t} dt = \sum_{i=1}^N \frac{e^{i\theta_i \omega}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(t_i) e^{i\omega t_i} dt_i. \quad (3.19)$$

Но значение интеграла в выражении (3.19) уже известно, оно никак не зависит от i , тогда его значение $E(\omega)$ можно вынести за знак суммирования:

$$E_{\Sigma}(\omega) = E(\omega) \sum_{i=1}^N e^{i\omega\theta_i}.$$

Как уже было сказано ранее, на практике мы детектируем интенсивность электромагнитного поля, поэтому следует найти выражение для $I_{\Sigma}(\omega)$:

$$\begin{aligned} I_{\Sigma}(\omega) &= E_{\Sigma}(\omega)E_{\Sigma}^*(\omega) = E(\omega)E^*(\omega) \sum_{i=1}^N e^{i\omega\theta_i} \sum_{j=1}^N e^{-i\omega\theta_j} = \\ &= E(\omega)E^*(\omega) \sum_{i,j=1}^N e^{i\omega(\theta_i-\theta_j)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Перепишем сумму в формуле (3.20) в виде двух таких слагаемых, что для первой суммы $i = j$, а для второй - $i \neq j$, тогда получим:

$$I_{\Sigma}(\omega) = I(\omega) \left(N + \sum_{i \neq j}^N e^{i\omega(\theta_i-\theta_j)} \right). \quad (3.21)$$

Первая сумма дает нам N - количество источников. Это следует из того, что при $i = j$ экспоненциальная функция обращается в единицу. Вторую сумму можно изобразить на комплексной плоскости, так как каждое входящее в неё слагаемое - это единичный вектор со случайной фазой, ведь по договоренности θ_i - случайные числа.

То есть стоит задача о нахождении суммы множества векторов с одинаковой длиной и случайным направлением (рисунок 30). Скорее всего, при большом количестве источников в результате должен получиться нуль.

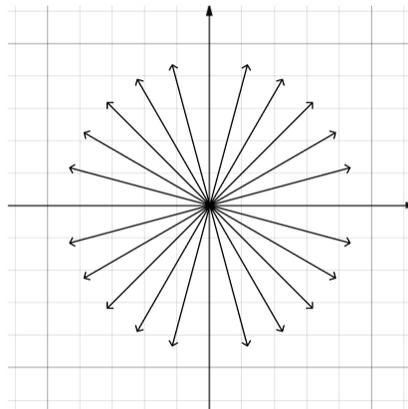


Рис. 30. Единичные вектора со случайной фазой в комплексной плоскости

В статической физике была задача о моряке, который, выйдя на палубу, делал каждый шаг в случайном направлении. Также и в данном случае требуется сложить N векторов, имеющих случайное направление. В среднем, моряк удалялся от центра как \sqrt{N} , где N - число шагов единичной длины.

Значит, сумма в выражении (3.21) примерно равна

$$\sum_{i \neq j} e^{i\omega(\theta_i - \theta_j)} \sim \sqrt{N}, \quad \sqrt{N} \ll N.$$

Слагаемым с \sqrt{N} можно в первом приближении пренебречь, тогда получаем интересный результат:

$$\boxed{I_{\Sigma}(\omega) = N \cdot I(\omega)}. \quad (3.22)$$

То есть, если существует N одинаковых световых сигналов, которые начинаются случайным образом, то физический спектр их такой же, как и спектр одиночного сигнала, но в N раз больше для каждого значения ω .

3.7 Доплеровское уширение атома Томсона. Фойтовский контур

Рассмотрим случай, когда имеется газовая лампа, где атомы летают хаотично во всех направлениях. Если считать, что данный газ идеальный и для него работает теория Максвелла, то функция распределения вероятности нахождения молекулы с определенной проекцией скорости на ось x дается выражением

$$f(v_x) = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right). \quad (3.23)$$

Следствием выражения (3.23) является то, что большее число молекул имеет скорости, близкие к нулю.

В параграфе 1.4 обсуждалось возникновение продольного эффекта Доплера в случае, когда излучающий объект движется в сторону или против наблюдателя. В этом случае частота преобразуется следующим образом:

$$\omega(v_x) \approx \omega_0 \left(1 + \frac{v_x}{c}\right) = \omega_0 + \delta\omega, \quad \text{где } \delta\omega = \omega_0 \frac{v_x}{c}.$$

Группа молекул, которая практически неподвижна, в энергетическом спектре дает лоренцев контур, имеющий пик на частоте ω_0 . Другая группа молекул, которая имеет ненулевую скорость, дает лоренцев контур, имеющий пик на частоте большей, чем ω_0 . Таких молекул в соответствии с выражением (3.23) меньше, чем молекул с почти нулевой скоростью.

Ввиду формулы (3.22) в случае некогерентного излучения физические спектры складываются, так что интенсивность излучения этой группы молекул во столько же раз меньше, во сколько раз больше почти неподвижных молекул. В итоге получится некоторый набор лоренцевых контуров, изображенных на рисунке 31.

Далее вклады от каждой из молекул необходимо проинтегрировать. Для этого преобразуем функцию (3.23) к функции распределения по сдвигу частот:

$$f(\delta\omega) = \text{const} \int \exp\left(-\frac{mc^2(\delta\omega)^2}{2kT\omega_0^2}\right) \frac{1}{\beta^2 + (\delta\omega)^2} d(\delta\omega). \quad (3.24)$$

В формуле (3.24) была использована связь между v_x и $\delta\omega$, полученная из продольного эффекта Доплера.

Если считать, что каждая лоренцева кривая аппроксимируется δ -функцией ($\delta\omega \approx 0$), то из дельта-функций получится гауссово распределение. В результате вместо лоренцева контура получим очень широкий гауссов контур, ширина которого естественным образом будет зависеть от температуры. Чем выше температура, тем медленнее спадают "крылья" полученной кривой.

Опыт показывает, что физический спектр рассмотренной системы атомов будет на 1-2 порядка шире, чем естественное уширение.

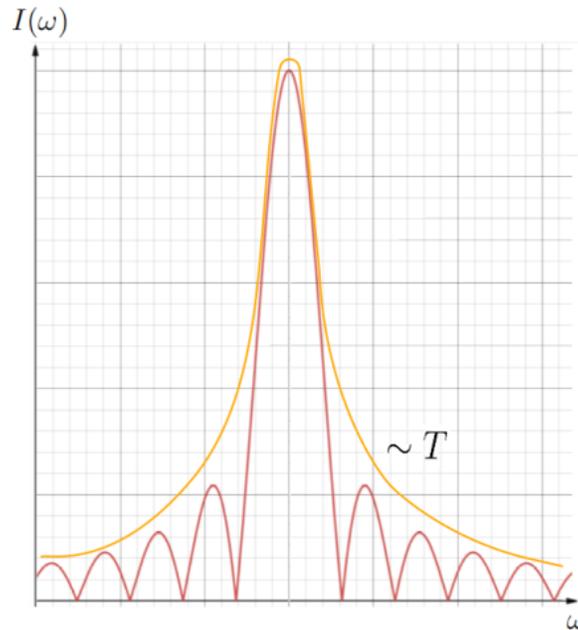


Рис. 31. Фойгтовский контур

На бесконечности экспоненциальная функция в формуле (3.24) убывает быстро, а лоренцев контур значительно медленнее, поэтому около центральной частоты полученная кривая с высокой степенью достоверности может быть описана гауссовым распределением, однако огибающая на периферийных частотах не является гауссовой.

Если говорить еще точнее, то нельзя считать, что каждый лоренцев контур аппроксимируется дельта-функцией. Именно поэтому в формуле (3.24) добавляется интеграл с дробью.

Такая свёртка двух кривых (лоренцева контура и гауссова распределения) может считаться только численно.

 **Определение 3.6. Фойгтовский контур** - огибающая графика свертки лоренцевых контуров и гауссова распределения.

3.8 Столкновительное уширение атома Томсона

Атомы, ограниченные в какой-то области пространства, взаимодействуют друг с другом, то есть сталкиваются. Было показано, что электрон с квазиупругой связью с атомным ядром может совершать затухающие колебания с некоторой частотой и фазой, зависящей от времени. Пусть во время этих колебаний произошло столкновение, тогда электрон должен претерпеть случайное изменение фазы и амплитуды колебаний. Значит, начнутся уже другие, новые затухающие колебания. Следовательно, при столкновениях колебания постоянно обрываются. Тогда среднее время существования сигнала за счет постоянных столкновений уменьшается, что и приводит к уширению спектра. Этот вывод сделан на основании того, что в параграфе 2.15 было показано, что чем короче световой пучок, тем шире его спектр. Таким образом, столкновения накладывают дополнительный эффект уширения.

Для идеального газа существует выражение для плотности вероятности существования атома в течение времени t без столкновений:

$$f(t) = \text{const} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (3.25)$$

где τ - среднее время свободного пробега. Данная функция распределения (3.25) должна быть учтена в подынтегральном выражении (3.24).

Столкновительное уширение приводит к нетривиальным эффектам: из общих соображений кажется, что при большем давлении столкновения должны происходить чаще. Тогда линии должны быть шире, что не всегда согласуется с опытными фактами. Увеличение давления может приводить к сужению линий или к смещению главной частоты кривой, в этом заключается *эффект Дики*. Данный эффект в том числе доказывает несовершенство модели атома Томсона.

Два связанных ядра образуют простейшую молекулу, а столкновительное уширение в квантовой механике молекул является актуальной темой для реальных исследований.

Если требуется увидеть естественное уширение линий, то нужно избавиться от столкновений и продольного эффекта Доплера. Это реализуемо в пучковых экс-

периментах, где атомы находятся не в замкнутом объеме, а, например, в сверхзвуковой струе. Летающие атомы возбуждают (например, сталкиваются с электронами или облучают лазером) и фиксируют время затухания данного излучения. Можно наблюдать за пучком перпендикулярно летящим в нём атомам, тогда возникает не продольный, а поперечный эффект Доплера (сдвиг частоты квадратичен по скорости). Для реальных атомов отношение скорости атома к скорости света пренебрежимо мало, и поперечный эффект Доплера практически не производит уширения спектральных линий.

3.9 Нормальный эффект Зеемана

Итак, в отсутствие внешнего поля каждый атом излучал во всех направлениях одинаковую спектральную линию (лоренцев контур). Оказывается, если поместить атом в магнитное поле, его спектральная линия расщепляется.

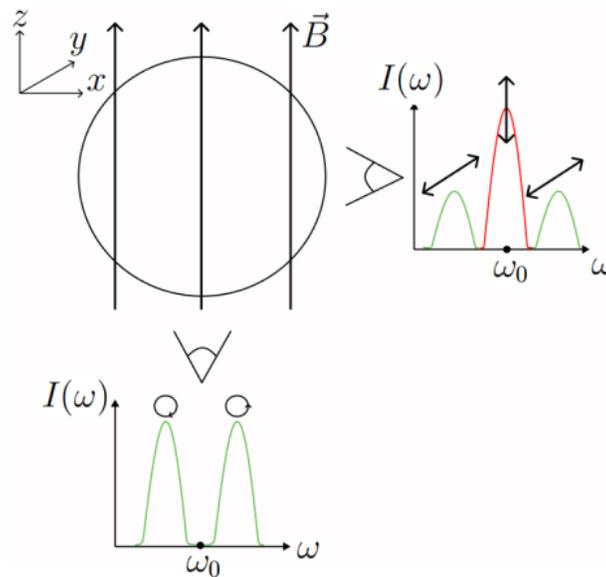


Рис. 32. Нормальный эффект Зеемана

Причем при наблюдении вдоль линий магнитного поля возникают две смещенные относительно ω_0 компоненты, поляризованные циркулярно в правую и левую стороны. Величина смещения этих компонент будет пропорциональна величине модуля вектора \vec{B} .



Физический закон 3.2. Нормальный эффект Зеемана

При детектировании излучения атома, помещенного в постоянное магнитное поле, наблюдаются смещенные по частоте компоненты, положение и величина пиков которых зависит от направления наблюдения.

При наблюдении света в направлении, перпендикулярном линиям магнитного поля, помимо смещенных компонент наблюдается еще несмещенная компонента спектра на частоте ω_0 . В данном случае все три компоненты будут линейно поляризованы, причем центральная компонента будет иметь линейную поляризацию, перпендикулярную поляризациям боковых контуров.

Попробуем объяснить природу данного явления.

Уравнение движения электрона в атоме Томсона, помещенном в магнитное поле, в рамках классического ньютоновского описания, имеет привычный вид, но содержит одно дополнительное слагаемое, описывающее действие силы Лоренца:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + 2\beta\frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{q}{m} \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{B} \right] = 2 \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{\Omega} \right], \text{ где } 2\vec{\Omega} = \frac{q\vec{B}}{mc}.$$

Вектор $2\vec{\Omega}$ будем называть вектором ларморовской частоты.

Представим модель "электрон + атом" в виде осциллирующего близ положения равновесия диполя. Разложим вектор дипольного момента $\vec{\mathfrak{D}}$ по базису:

$$\vec{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}_x\vec{e}_x + \mathfrak{D}_y\vec{e}_y + \mathfrak{D}_z\vec{e}_z.$$

Тогда уравнение движения примет следующий вид:

$$\frac{d^2\vec{\mathfrak{D}}}{dt^2} + 2\beta\frac{d\vec{\mathfrak{D}}}{dt} + \omega_0^2\vec{\mathfrak{D}} = 2 \left[\frac{d\vec{\mathfrak{D}}}{dt}, \vec{\Omega} \right].$$

Так как во втором законе Ньютона присутствует векторное произведение, то уравнения в проекции на декартовы оси станут сцепленными друг с другом. Попробуем перейти к циркулярным ортам, при этом рассмотрев векторное произведение ортов \vec{e}_+ и \vec{e}_- на орт $\vec{e}_z = \vec{e}_0$, сонаправленный с вектором ларморовской частоты:

$$\begin{aligned} \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}; &\longrightarrow \{\vec{e}_+, \vec{e}_-, \vec{e}_0\}; & \begin{cases} \vec{e}_0 = \vec{e}_z \\ \vec{e}_{\pm} = (\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y)/\sqrt{2} \end{cases} & ; \\ [\vec{e}_{\pm}; \vec{e}_0] &= \left[\frac{\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y}{\sqrt{2}}, \vec{e}_z \right] = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_y \pm i\vec{e}_x) = i\frac{\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} = \pm i\vec{e}_{\pm}. \end{aligned}$$

Тогда, разложив дипольный момент в проекциях на циркулярные орты, можно переписать 2 закон Ньютона, где уравнения перестанут быть сцепленными:

$$\vec{\mathfrak{D}}(t) = \mathfrak{D}(t)\vec{e}_+ + \mathfrak{D}(t)\vec{e}_- + \mathfrak{D}(t)\vec{e}_0 = \sum_{\xi} \mathfrak{D}_{\xi}\vec{e}_{\xi}, \text{ где } \xi = -1, 0, 1.$$

$$\begin{cases} \ddot{\mathfrak{D}}_+ + 2\beta\dot{\mathfrak{D}}_+ - 2i\Omega\dot{\mathfrak{D}}_+ + \omega_0^2\mathfrak{D}_+ = 0, \\ \ddot{\mathfrak{D}}_- + 2\beta\dot{\mathfrak{D}}_- + 2i\Omega\dot{\mathfrak{D}}_- + \omega_0^2\mathfrak{D}_- = 0, \\ \ddot{\mathfrak{D}}_0 + 2\beta\dot{\mathfrak{D}}_0 + 0 + \omega_0^2\mathfrak{D}_0 = 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

Из системы (3.26) видно, что колебания, которые происходят вдоль магнитного поля и соответствуют орту \vec{e}_0 , не изменяются из-за того, что при движении заряда в магнитном поле, вдоль линий поля магнитных сил не возникает.

Что касается вращений (соответствующих ортам \vec{e}_+ и \vec{e}_-) в плоскости, перпендикулярной линиям \vec{B} - видно, что такие вращения претерпевают изменение частоты. В зависимости от того, по часовой или против часовой стрелки вращается заряженная частица, частота либо увеличивается, либо уменьшается на частоту Ларморовской прецессии, которая пропорциональна магнитному полю.

Решим систему (3.26). Для каждого из уравнений запишем решение в виде экспоненциальной подстановки:

$$\mathfrak{D}_\xi(t) = C_\xi e^{\alpha_\xi t}. \quad (3.27)$$

Подставив выражение (3.27) в систему (3.26), получим набор характеристических уравнений. Найдем их корни:

$$\alpha_\xi^2 + 2\beta\alpha_\xi - 2i\xi\Omega\alpha_\xi + \omega^2 = 0 \implies \alpha_{\xi\pm} = -(\beta - i\xi\Omega) \pm \sqrt{(\beta - i\xi\Omega)^2 - \omega_0^2},$$

$$\alpha_{\xi\pm} = -(\beta - i\xi\Omega) \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{(\beta - i\xi\Omega)^2}{\omega_0^2}} = -(\beta - i\xi\Omega) \pm i\omega_0 \mp i \frac{(\beta - i\xi\Omega)^2}{2\omega_0}.$$

Последним слагаемым можно пренебречь ввиду его малости. Теперь запишем решение каждого из уравнений системы и проанализируем каждое из них:

1. Если колебания соответствуют орту $\vec{e}_z = \vec{e}_0$, то $\vec{\mathfrak{D}}_0(t) = C_0 \vec{e}_z e^{-\beta t} e^{-i\omega_0 t}$.

Вдоль орта \vec{e}_z возникают затухающие колебания на частоте собственных колебаний диполя. Дополнительное слагаемое в данном случае оказывается равным нулю. Этого и следовало ожидать, поскольку при движении электрона или любого другого заряда вдоль линий магнитного поля силы Лоренца не возникает. Диаграмма направленности для этого случая изображена на рисунке 33.

2. Если колебания соответствуют орту \vec{e}_+ , то $\vec{\mathfrak{D}}_+(t) = C_+ \vec{e}_+ e^{-\beta t} e^{-i(\omega_0 + \Omega)t}$.

3. Если колебания соответствуют орту \vec{e}_- , то $\vec{\mathfrak{D}}_-(t) = C_- \vec{e}_- e^{-\beta t} e^{-i(\omega_0 - \Omega)t}$.

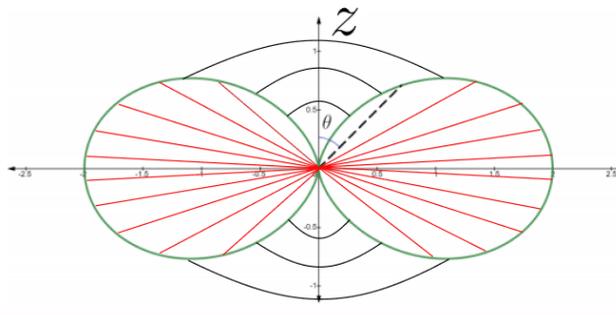


Рис. 33. Диаграмма направленности для колебаний с ортом \vec{e}_z

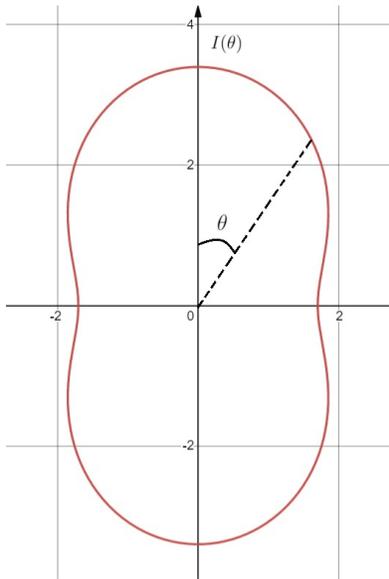


Рис. 34. Диаграмма направленности для колебаний с оортами \vec{e}_\pm

Что касается двух решений для проекций дипольного момента на циркулярные орты - для них получены стандартные затухающие осциллирующие решения, при вычислении вещественной части от которых получают вращения по правому и по левому кругу, как это было показано в вопросе о круговой поляризации излучения.

Теперь же определим векторные диаграммы направленности таких ускоренных движений заряженных частиц. Для компоненты \vec{e}_z диаграмма направленности такая же, как для осциллирующего электрона в атоме Томсона с частотой ω_0 .

Для определения диаграммы направленности для орта \vec{e}_+ полученное решение можно представить как вращение электрона с частотой $\omega_0 + \Omega$ в плоскости Oxy . Такое вращение можно представить как сумму ортогональных колебаний сдвинутых по фазе на 90° . Каждая из этих компонент излучает, как показано на рисунке 33. Отсюда следует, что при одинаковых значениях амплитуды колебаний, вдоль оси \vec{e}_z наблюдается круговая поляризация. При наблюдении вдоль

оси x одно из колебаний не дает вклада в излучение, а второе дает линейную поляризацию. Получается, что интенсивность вдоль оси x или y в 2 раза меньше интенсивности излучения вдоль оси z .

Аналогичным образом для решения, направленного вдоль орта \vec{e}_- , получаем вращение в противоположную сторону на частоте $\omega_0 - \Omega$.

Таким образом, электроны в атоме Томсона, помещенном в магнитное поле, могут совершать следующие типы движений: линейные осцилляции вдоль линий поля и вращения в плоскости, перпендикулярной полю, по и против часовой стрелки.

Впервые это явление объяснил Лоренц со своим аспирантом Зееманом. Им повезло в том, что, готовя свой опыт, Зееман выбрал атомы первой группы. Для таких атомов линии спектра действительно расщепились на три компоненты, и был получен так называемый нормальный эффект Зеемана, допускающий классическое объяснение. На самом деле, для других атомов все могло оказаться гораздо сложнее, что в дальнейшем было проверено на эксперименте.

 **Определение 3.7. Аномальный эффект Зеемана - расщепление спектральных линий на 5, 7 и более компонент в условиях эффекта Зеемана.**

Классическая физика не может дать убедительного описания аномального эффекта Зеемана как, впрочем, и не может дать простого описания эффекта Штарка. И тот, и другой эффект описываются на языке квантовой механики.

 **Определение 3.8. Эффекта Штарка - расщепление спектральных линий источника излучения в случае его помещения в электрическое поле.**

Контрольные вопросы

1. Чем обусловлено "преломление" силовых линий ускоренно движущегося заряда?
2. Что такое атом Томсона?
3. Как получить диаграмму направленности излучения для атома Томсона, в чём её смысл и какой она имеет вид?
4. Что такое радиационное трение, как оно учитывается в уравнении движения и как влияет на колебания дипольного момента?
5. От каких величин зависит константа радиационного затухания?
6. Как учет радиационного затухания сказывается на спектре излучения атома Томсона? Как называют подобную зависимость интенсивности от частоты?

7. Какое распределение использовалось для описания источника с неупорядоченным движением атомов и почему?
8. Как и почему в случае подобного источника нужно учитывать продольный эффект Доплера?
9. В чём суть эффекта Зеемана, и при каких условиях он наблюдается?
10. Для чего использовался переход к циркулярным орбитам при решении уравнения "электрон + атом"? Как осуществить этот переход?

4 РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

В главе №2 была рассмотрена классическая теория распространения света в вакууме, при этом были введены понятия, такие как диэлектрическая проницаемость и показатель преломления, но в вакууме данные величины равны единице. Теперь нам предстоит разобраться с этими понятиями подробнее, ведь в общем случае они не равны единице. Более того, существуют среды, в которых данные величины могут быть не равны единице, притом диэлектрическая проницаемость будет тензором или комплексной величиной.

4.1 Электромагнитные волны в веществе

Запишем систему уравнений Максвелла для вещества. Учтем, что для большинства оптических материалов $\mu = 1$, тогда $\vec{H} = \vec{B}$:

$$\begin{cases} (\nabla, \vec{E}) = 4\pi\rho' \\ (\nabla, \vec{B}) = 0 \\ [\nabla, \vec{E}] + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ [\nabla, \vec{B}] - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}'. \end{cases}$$

Здесь ρ' - плотность зарядов в веществе, а \vec{j}' - вектор плотности тока в среде. Если отклик атома на внешнее поле линеен, то можно вспомнить электродинамические обозначения:

$$\begin{cases} (\nabla, \vec{D}) = 0 \\ (\nabla, \vec{B}) = 0 \\ [\nabla, \vec{E}] + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ [\nabla, \vec{B}] - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Вектор $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ - вектор электрического смещения или электрической индукции. Вектор $\vec{P} = \langle \vec{d} \rangle / V$ - средний дипольный момент единицы объема вещества. Средний дипольный момент связан с микроскопическим значением поля \vec{E} и тензором поляризуемости $\hat{\alpha}$ следующим соотношением:

$$\langle \vec{d} \rangle = \hat{\alpha} \vec{E}.$$

Однако также стоит учесть, что атомы могли быть возбуждены ранее, так что значение дипольного момента в момент времени t , вообще говоря, зависит от значения поля в любой момент времени до этого:

$$\vec{d}(t) = \int_{-\infty}^t \hat{\alpha}(t,t') \vec{E}(t') dt'. \quad (4.1)$$

В выражении (4.1) множитель $\alpha(t,t')$ связывает поле и дипольный момент. Таким образом, поляризуемость - это ядро интегрального оператора (4.1). Зависимость $\vec{E}(t)$ может иметь сложный вид, поэтому воспользуемся обратным преобразованием Фурье:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Тогда изменится выражение для дипольного момента:

$$\vec{d}(\omega) = \hat{\alpha}(\omega) \vec{E}(\omega).$$

Идея перехода к гармоническим колебаниям хороша тем, что по предположению для атома справедлив принцип суперпозиции: при воздействии на систему периодической силы возникают переходные процессы, а затем устанавливаются гармонические колебания на частоте вынуждающей силы. Однако ввиду линейности результирующим движением будет сумма колебаний на каждой частоте ω .

Тогда для дипольного момента в поле монохроматической волны:

$$E(t) = E_0 \cos \omega t \implies d = d_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Вынужденные колебания могут иметь фазовый сдвиг относительно вынуждающей силы, тогда это значит, что $\hat{\alpha}(\omega)$ - тензор с комплексными элементами. Аналогично комплексно значащей матрицей будет и тензор диэлектрической проницаемости. В этой главе мы будем иметь дело только с изотропными веществами, так что $\hat{\alpha}(\omega)$ будет просто скалярной функцией от ω .

Будем искать решения системы уравнений Максвелла по аналогии с вакуумом: в виде плоских монохроматических волн. Запишем в компактном виде выражение для полей:

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{r},t) \\ \vec{D}(\vec{r},t) \\ \vec{B}(\vec{r},t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{D}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}.$$

Учитывая формулы (2.4) для дифференцирования функций такого вида, запишем упрощенную систему уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} (\vec{k}, \vec{D}) = 0, \\ (\vec{k}, \vec{B}) = 0, \\ [\vec{k}, \vec{E}] - \frac{\omega}{c} \vec{B} = 0, \\ [\vec{k}, \vec{B}] + \frac{\omega}{c} \vec{D} = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Как и в случае с поляризуемостью, будем рассматривать среды, где диэлектрическая проницаемость $\mathcal{E}(\omega)$ - скаляр (не обязательно вещественный). Выразим вектор магнитной индукции \vec{B} из третьего уравнения и подставим его в четвертое системы (4.2):

$$[\vec{k}, [\vec{k}, \vec{E}]] + \frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{E}(\omega) \vec{E} = 0. \quad (4.3)$$

Первое слагаемое в выражении (4.3) представляет из себя двойное векторное произведение, запишем его согласно мнемоническому правилу "bac - cab":

$$\vec{k}(\vec{k}, \vec{E}) - \vec{E}(\vec{k}, \vec{k}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{E}(\omega) \vec{E} = 0. \quad (4.4)$$

Первое слагаемое в выражении (4.4) равно нулю, так как плоские волны поперечны, тогда:

$$\boxed{(\vec{k}, \vec{k}) = \frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{E}(\omega)}. \quad (4.5)$$

Это дисперсионное соотношение для волн в веществе. Обратим внимание, что вектор \vec{k} в общем случае комплексный, так как $\mathcal{E}(\omega)$ - скалярная функция от частоты, которая может быть комплексной.

4.2 Неоднородные волны

Рассмотрим наиболее общий случай, когда волновой вектор \vec{k} является комплексной величиной. Тогда его можно записать как

$$\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}''.$$

В этом случае электрическое поле плоской монохроматической волны равно

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = E_0 \vec{e}_p e^{i((\vec{k}' + i\vec{k}'') \cdot \vec{r} - \omega t)} = E_0 \vec{e}_p e^{-\vec{k}'' \cdot \vec{r}} e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (4.6)$$

В выражении (4.6) помимо плоской монохроматической волны в произведение входит экспонента с вещественным отрицательным показателем, зависящим

от расстояния. То есть теперь в среде с комплексной диэлектрической проницаемостью $\mathcal{E}(\omega)$ электрическое поле экспоненциально затухает. Быстрее всего затухание происходит в направлении вектора \vec{k}'' . Отметим, что плоскости равной фазы теперь не являются плоскостями равной амплитуды, а на взаимное расположение векторов \vec{k}' и \vec{k}'' до сих пор не накладывалось никаких ограничений.

Найдем выражение для скалярного произведения вектора \vec{k} самого на себя:

$$(\vec{k}, \vec{k}) = (k')^2 - (k'')^2 + 2i(\vec{k}', \vec{k}'').$$

В случае вакуума, то есть, если $\mathcal{E}(\omega) = 1$ - вещественный, можно сделать вывод, что $\vec{k}' \perp \vec{k}''$.

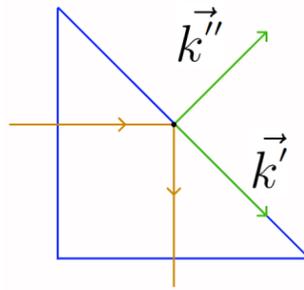


Рис. 35. Полное внутреннее отражение для среды с комплексной $\mathcal{E}(\omega)$

Рассмотрим пример *полного внутреннего отражения* света. Мы привыкли, что для случая, когда свет падает на границу раздела двух сред из более плотной среды под определенными углами, все излучение отражается и не проходит через границу. Однако это не так. В оптически менее плотную среду проходит излучение, которое можно регистрировать на эксперименте. Но проблема состоит в том, что амплитуда прошедших волн затухает согласно формуле (4.6) по экспоненциальному закону, поэтому такие волны можно увидеть только на расстояниях, порядка длины волны излучения. Вопрос полного внутреннего отражения при прохождении света через призму будет подробно рассмотрен в параграфе 4.9.

4.3 Комплексный показатель преломления. Закон Бугера

Пусть теперь \vec{k}' сонаправлен с вектором \vec{k}'' . Тогда комплексный волновой вектор можно записать следующим образом:

$$\vec{k}' \uparrow \vec{k}'' \implies \vec{k} = \vec{e}_k (k' + ik'').$$

С учетом дисперсионного соотношения (4.5) для плоской волны в веществе имеем:

$$\vec{k} = \vec{e}_k \frac{\omega}{c} (n'(\omega) + in''(\omega)).$$

Величину n будем называть *показателем преломления* среды. Обратим внимание, что это, вообще говоря, комплексная величина. Для поля, распространяющегося вдоль оси z , имеем:

$$\begin{aligned} E(z,t) &= E_0 \exp \left\{ i \frac{\omega}{c} (zn'(\omega) + izn''(\omega)) - \omega t \right\} = \\ &= E_0 \exp \left\{ \frac{-\omega n''(\omega)z}{c} \right\} \exp \left\{ i\omega \left(\frac{n'z}{c} - t \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

 **Определение 4.1. Показатель преломления - комплексная величина, действительная часть которой равна отношению k' к ω/c , а мнимая часть равна отношению k'' к ω/c .**

Вспомним, что в вакууме $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$. Значит, выражение (4.7) можно переписать следующим образом:

$$E(z,t) = E_0 \exp \left\{ \frac{-2\pi n''z}{\lambda} \right\} \exp \left\{ i\omega \left(\frac{n'z}{c} - t \right) \right\}. \quad (4.8)$$

Найдем значение фазовой скорости плоской монохроматической волны, которая распространяется в изотропной среде. Для этого рассмотрим поверхности постоянной фазы:

$$\Phi = \text{const} \implies \frac{d\Phi}{dt} = 0 = \frac{n'(\omega)}{c} \frac{dz}{dt} - 1 \implies \boxed{v_\Phi = \frac{dz}{dt} = \frac{c}{n'(\omega)}}.$$

Таким образом, физический смысл приобретает вещественная часть показателя преломления n : он является отношением скорости света к фазовой скорости волны, распространяющейся в среде. Сам факт зависимости $n'(\omega)$ называется *дисперсией показателя преломления*.

 **Определение 4.2. Дисперсия показателя преломления - явление зависимости показателя преломления среды от частоты проходящего света.**

После того, как мы получили физический смысл действительной части показателя преломления, имеет смысл подробнее рассмотреть мнимую часть n . Из формулы (4.8) видно, что амплитуда волны по мере распространения вдоль оси

z экспоненциально затухает. За скорость затухания амплитуды отвечает мнимая часть показателя преломления.

Так как нас интересует интенсивность, возведем поле \vec{E} в квадрат по модулю. Тогда интенсивность в точке r и в момент времени t :

$$I(z) = I_0 \exp\left(-4\pi n''(\omega) \frac{z}{\lambda_0}\right) = I_0 \exp(-\mathcal{K}(\omega)z). \quad (4.9)$$

В выражении (4.9) $\mathcal{K} = 4\pi n''(\omega)/\lambda_0$ - коэффициент поглощения.

Получается, что мере распространения света в веществе, когда возможно ввести понятие комплексного показателя преломления, интенсивность должна экспоненциально убывать. Встречаются также случаи, когда \mathcal{K} отрицательное - среды с отрицательным поглощением, которые используются в лазерах. Такие среды называются *инверсными*.

По решению (4.9) можно предположить, какому дифференциальному уравнению для интенсивности оно соответствует:

$$\boxed{\frac{dI}{dz} = -\mathcal{K}(\omega)I}. \quad (4.10)$$

Уравнение (4.10) называется *законом Бугера*.

Физический закон 4.1. Закон Бугера

По мере распространения света через среду с комплексным показателем преломления (поглощающую среду) интенсивность света затухает экспоненциально. Причем показатель экспоненциальной функции прямо пропорционален мнимой части показателя преломления.

Из уравнения (4.10) следует, что в средах поглощение света пропорционально интенсивности света, то есть чем больше света, тем сильнее поглощение. Такой результат получился, потому что мы сделали предположение о вынужденных колебаниях атома, излучающего электромагнитные волны, которые складываются с исходными.

Такая модель допускает, что свет можно рассматривать как поток частиц - *фотонов*. Если считать, что свет - поток частиц, несущих энергию, то эта энергия может поглощаться атомами, и вероятность поглощения этой энергии атомами в единице объема будет тем больше, чем частиц больше летит.

4.4 Диэлектрическая проницаемость газа из атомов Томсона

Для модели газа из атомов Томсона полезно будет сосчитать показатель преломления. Напишем уравнение движения электрона в атоме Томсона (здесь и далее \vec{r} - смещение электрона от равновесного положения):

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + 2\beta\frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{q}{m}\vec{E}(t) + \frac{q}{m}\left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{B}(t)\right]. \quad (4.11)$$

При падении электромагнитной волны на атом Томсона необходимо учитывать не только электрическую силу, но и силу Лоренца, так как электрон под действием электрической силы начнёт колебаться, а значит, на него будет действовать и магнитная составляющая поля. Однако скорость колеблющегося электрона пренебрежимо мала по сравнению со скоростью света, поэтому вклад силы Лоренца, ввиду ее малости, в выражении (4.11) не учитывается.

Преобразуем это уравнение с учетом того, что электрическое поле порождается плоской электромагнитной волной:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + 2\beta\frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{q}{m}\vec{E}_0 \exp\left[i(\vec{k} \cdot \vec{R} - \omega t)\right]. \quad (4.12)$$

Уравнение (4.12) представляет собой неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Решить его можно по следующему алгоритму:

1. Найдем общее решение однородного уравнения (в правой части будет стоять нуль);
2. Найдем частное решение неоднородного уравнения;
3. Сложим полученные решение и получим окончательный ответ.

Решением однородного уравнения являлись затухающие колебания с характерным временем затухания порядка 10^{-8} с. Таким образом, решение однородного уравнения уже через весьма незначительный промежуток времени будет пренебрежимо мало ввиду экспоненциального затухания. То есть имеет смысл рассматривать, что происходит со светом в веществе через значительное время после того, как включили источник света.

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \exp\left[i(\vec{k} \cdot \vec{R} - \omega t)\right]. \quad (4.13)$$

Подставим (4.13) в уравнение (4.12), тогда

$$\vec{r}_0 [(i\omega)^2 + 2\beta(i\omega)^2 + \omega_0^2] = \frac{q}{m} \vec{E}_0.$$

Напомним, что в уравнении (4.12) и далее ω - частота электромагнитной волны, а ω_0 - собственная частота колебаний электронов в атоме Томсона под действием электростатических сил.

Теперь нетрудно найти амплитуду вынужденных колебаний:

$$\vec{r}_0 = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega} \vec{E}_0 \implies \vec{r}(t) = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega} \vec{E}_0 \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{R} - \omega t)]. \quad (4.14)$$

Домножив выражение (4.14) на заряд, получим дипольный момент. Таким образом, мы определили дипольный момент, который индуцируется в атоме Томсона при прохождении через него плоской электромагнитной волны. Функция $\vec{E}_0 \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{R} - \omega t)]$ является монохроматическим электрическим полем, а коэффициент пропорциональности между монохроматическим полем и дипольным моментом - это динамическая поляризуемость атома Томсона на частоте ω . С учётом выражения (4.14), можно сделать вывод, что данная величина оказалась комплексной.

$$\vec{d}(t) = \hat{\alpha}(\omega) \vec{E}(t) \implies \alpha(\omega) = \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega}. \quad (4.15)$$

Из курса электродинамики известно, что диэлектрическая проницаемость равна

$$\mathcal{E} = 1 + 4\pi\mathcal{N}\langle\alpha\rangle, \quad (4.16)$$

где \mathcal{N} - концентрация атомов Томсона. Теперь подставим полученную поляризуемость (4.15) в формулу (4.16):

$$\mathcal{E} = 1 + 4\pi\mathcal{N} \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega}. \quad (4.17)$$

Можно заметить, что в выражении (4.17) встречается квадрат плазменной частоты ω_p . Тогда выражение для диэлектрической проницаемости можно упростить:

$$\boxed{\mathcal{E}(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega}},$$

где было учтено, что $\omega_p^2 = \frac{4\pi\mathcal{N}q^2}{m}$ - квадрат плазменной частоты.

4.5 Показатель преломления газа из атомов Томсона

Используя дисперсионное соотношение для вещества и определение волнового числа, найдем показатель преломления $n(\omega)$:

$$(\vec{k}; \vec{k}) = \frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{E}(\omega) \implies n(\omega) = \sqrt{\mathcal{E}(\omega)}.$$

Так как рассматривается газ, концентрацию \mathcal{N} можно считать малой, а значит, для расчета показателя преломления можно воспользоваться формулой, справедливой при $x \rightarrow 0$: $(1 + \alpha x) = (1 + x)^\alpha$. Значит, показатель преломления равен

$$\begin{aligned} n(\omega) &= \sqrt{\mathcal{E}(\omega)} = \sqrt{1 + 4\pi\mathcal{N} \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega}} \implies \\ \implies n(\omega) &= 1 + 2\pi\mathcal{N} \frac{q^2/m \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} + i \cdot 4\pi\mathcal{N}\beta\omega \frac{q^2/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Из формулы (4.18) можно получить явное выражение для действительной и мнимой части показателя преломления.

$$\begin{aligned} n'(\omega) &= 1 + 2\pi\mathcal{N} \frac{q^2/m \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}; \\ n''(\omega) &= 4\pi\mathcal{N}\beta\omega \frac{q^2/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Графики зависимости действительной и мнимой части показателя преломления от частоты приведены на рисунках 36 и 37.

Для действительной части показателя преломления n' можно сказать, что, так как $\beta \sim 10^8$, а $\omega_0 \sim 10^{16}$, то в области частот, далеких от резонансных, получаем:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \gg 4\beta^2\omega^2 \implies n'(\omega) \approx 1 + 2\pi\mathcal{N} \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (4.20)$$

Из формулы (4.20) следует, что в области $\omega \ll \omega_0$ график выходит из единицы и медленно возрастает. В области $\omega \gg \omega_0$ график также медленно возрастает и стремится к 1 на бесконечности.

Что же касается области резонансной частоты, то слагаемое в выражении (4.19) для действительной части показателя преломления $n'(\omega)$ становится равно нулю, и тогда $n'(\omega_0) = 1$.

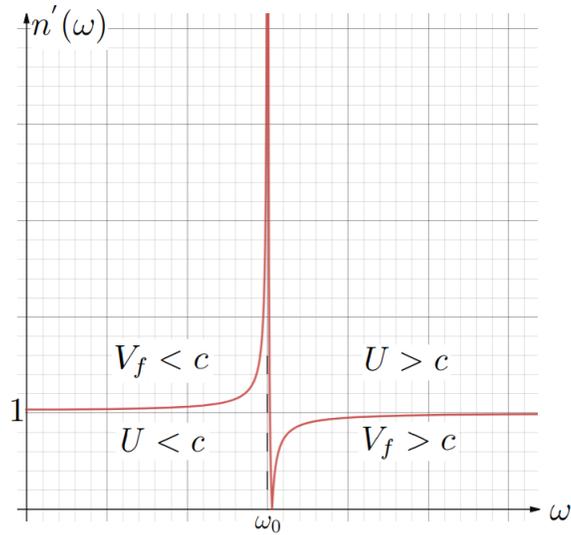


Рис. 36. Зависимость n' от ω

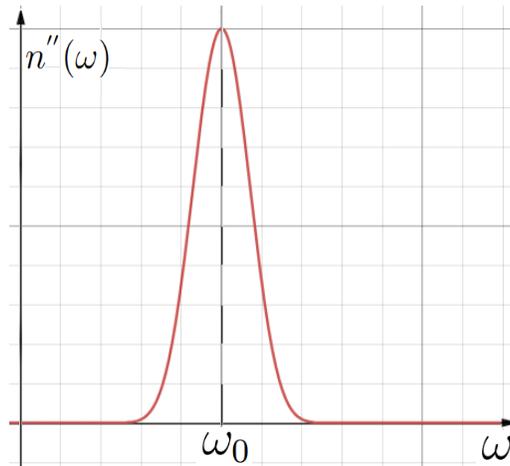


Рис. 37. Зависимость n'' от ω

Полученная кривая называется *дисперсионной кривой* (рисунок 36). Области, где $\frac{dn'(\omega)}{d\omega} > 0$, называются областями нормальной дисперсии, а области, где $\frac{dn'(\omega)}{d\omega} < 0$, носят название областей аномальной дисперсии.

Если речь идёт о мнимой части показателя преломления, то максимального значение она достигает в случае, когда знаменатель дроби в выражении (4.19) становится наименьшим при $\omega = \omega_0$. Поэтому в области аномальной дисперсии $n''(\omega)$ - большой, при этом $\mathcal{K}(\omega) \sim n''(\omega)$, интенсивность экспоненциально затухает с гигантским показателем в экспоненте. Вещество в области аномальной дисперсии становится непрозрачным, потому что коэффициент поглощения $\mathcal{K}(\omega)$ становится очень большим.

На близкую к резонансу область частот приходится соответствующая линия спектра поглощения, которая располагается там же, где у газа в возбужденном состоянии лежит соответствующая линия спектра излучения. Для примера при-

ведены фотографии спектров излучения и поглощения натрия (1, 4 - на рисунке 38), водорода (2, 5 - на рисунке 38), гелия (3, 6 на рисунке 38). Хорошо видно, что линии излучения каждого газа, для которого приведён спектр, соответствуют линиям поглощения.

Для стекла резонансные линии лежат в области ультрафиолетового излучения. По этой причине для обычных стеклянных оптических деталей практически всегда наблюдается явно выраженная нормальная дисперсия, когда действительная часть показателя преломления возрастает с увеличением частоты. Именно в этой области Исаак Ньютон с помощью стеклянной призмы наблюдал разложение солнечного, т. е. белого, света в оптический спектр. При этом излучение сине-фиолетовой части спектра отклонялось на большие углы, чем обладающая меньшими частотами красно-желтая область спектра. Что же касается эффектов аномальной дисперсии, то их удалось наблюдать гораздо позже в парах йода.

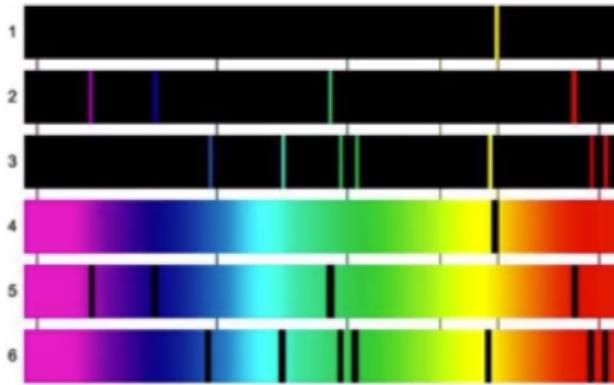


Рис. 38. Линии поглощения и испускания

Важно отметить, что около линии резонанса классическая теория отлично описывает поведение показателя преломления, однако поведение показателя преломления в других областях она описывает плохо. На самом деле, у реального атома много резонансных частот, и $\mathcal{E}(\omega)$ устроена следующим образом:

$$\mathcal{E}(\omega) = 1 + \sum_j \frac{\omega_p^2 \cdot f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - 2i\beta_j\omega}.$$

Сила осциллятора f_j равна вероятности того, что электрон будет колебаться на j -й резонансной частоте. Причем $\sum_j f_j = 1$.

Величины же ω_{0j} и β_j равны:

$$\omega_{0j} = \frac{W_j - W_0}{\hbar}; \quad 2\beta = \frac{1}{2} \sum_{j' < j} A_{jj'}.$$

где W_j - энергия электрона в возбужденном состоянии, W_0 - энергия электрона в основном состоянии, $A_{jj'}$ - вероятность спонтанного перехода электрона с излучением фотона с j -го уровня на j' -й уровень, где $j' < j$.

Таким образом, согласно квантово-механической теории, зависимость диэлектрической проницаемости от частоты будет выглядеть так, как показано на рисунке 39.

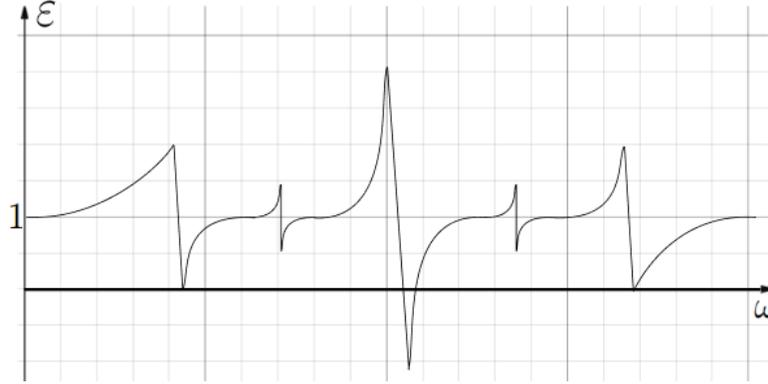


Рис. 39. Зависимость \mathcal{E} от ω

4.6 Фазовая и групповая скорость

Рассмотрим волновой пучок, который представим как произведение несущей (плоской волны) и огибающей, модулирующую этот сигнал. Разложим в ряд Фурье такой сигнал в момент времени $t = 0$:

$$E(z, t = 0) = E_0(z) \cos(k_0 z) = \int_{-\infty}^{\infty} E(k) e^{ikz} dk.$$

Мгновенный портрет такого пучка по теореме Фурье может быть разложен в суперпозицию пространственных гармоник (с учетом того, что $\tilde{k} = k - k_0$):

$$\begin{aligned} E(k) &\sim \int_{-\infty}^{\infty} E(z) e^{-ikz} dz = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(z) \cos(k_0 z) e^{-ikz} dz \sim \\ &\sim \int_{-\infty}^{\infty} E_0(z) e^{-i(k-k_0)z} dz = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(z) e^{-\tilde{k}z} dz \sim E(\tilde{k} + k_0). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Что касается огибающей светового цуга, то она также может быть разложена в интеграл Фурье в момент времени $t = 0$:

$$\begin{aligned} E_0(z, t = 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} E_0(k) e^{ikz} dk \implies E_0(k) \sim \int_{-\infty}^{\infty} E_0(z) e^{-ikz} dz \implies \\ &\implies E_0(\tilde{k}) \sim \int_{-\infty}^{\infty} E_0(z) e^{-i\tilde{k}z} dz. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Из формул (4.21) и (4.22) видно, что Фурье преобразование для цуга с волновым числом $\tilde{k} + k_0$ совпадает с Фурье преобразованием для огибающей этого цуга с волновым числом \tilde{k} :

$$E(\tilde{k} + k_0) = E_0(\tilde{k}). \quad (4.23)$$

Если в среде нет поглощения, т.е. $k'' = 0$, то частота, которая является функцией от волнового числа, близ точки k_0 раскладывается в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} (k')^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{E}(\omega) \implies \omega = \omega(k) &\approx \omega(k_0) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k_0} (k - k_0)^2 + \dots \\ \omega(k) = \omega_0 + \mathcal{U}(k - k_0) + \frac{1}{2} \Gamma (k - k_0)^2, &\text{ где } \mathcal{U} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0}, \Gamma = \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k_0}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

В формуле (4.24) \mathcal{U} - групповая скорость (та скорость, с которой распространяется огибающая сигнала), Γ - квадратичная поправка, которой в нашем рассмотрении мы пренебрежем. В действительности квадратичная поправка в выражении (4.24) приводит к временному уширению импульса, что возможно при распространении импульса в *диспергирующей среде*. При этом скорость расползания импульса зависит от константы γ , которая стоит в показателе гауссова пучка. Можно сказать, что ширина гауссова пучка и скорость его уширения связаны между собой через множитель порядка 1. Чем уже пакет, тем с большей скоростью он уширяется, т.е. чем мы точнее знаем, где расположен пакет, тем хуже мы знаем скорость его огибающей. Это и есть *соотношение неопределенности импульс - координата*, к которому мы еще ни раз вернемся в курсе квантовой механики.

При рассмотрении цуга с течением времени подставим в выражение для поля совокупности бегущих волн в приближении линейного разложения. Тогда с учетом соотношения (4.23) получим:

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(k) e^{i(kz - \omega t)} dk = \int_{-\infty}^{\infty} E(k) e^{i(kz - \omega_0 t - \mathcal{U}(k - k_0)t)} e^{\pm i k_0 z} dk =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} E(\tilde{k} + k_0) e^{i\tilde{k}(z - Ut)} d(k - k_0) = e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} E(\tilde{k} + k_0) e^{i\tilde{k}(z - Ut)} d\tilde{k} = \\
&= e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\tilde{k}) e^{i\tilde{k}(z - Ut)} d\tilde{k} = e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} E_0(z - Ut).
\end{aligned}$$

Таким образом, скорость несущей и огибающей не совпадают друг с другом. Так, на величину групповой скорости специальной теорией относительности накладывается фундаментальное ограничение: эта скорость никогда не может превосходить величину скорости света в вакууме. Что же касается фазовой скорости, то она, в общем-то, может быть любой. Теперь найдем выражение для групповой скорости:

$$k' = \frac{\omega}{c} n'(\omega) \implies \mathcal{U} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{\partial k / \partial \omega} = \frac{c}{n'(\omega) + \omega \frac{\partial n'}{\partial \omega}}. \quad (4.25)$$

Из выражения (4.25) следует, в частности, что для газа из атомов Томсона в области нормальной дисперсии (даже в том случае, когда действительная часть показателя преломления оказывается меньше 1) групповая скорость не может превышать скорости света в вакууме c . Это следует из того, что к отношению n'/c еще добавляется слагаемое, содержащее положительную производную. Если для низких частот это довольно очевидно, так как $n'(\omega) > 1$ и $\partial n / \partial \omega > 0$, то для больших частот рассмотрим этот вопрос подробнее. Пусть, например, частота возбуждающей силы лежит в области жесткого гамма излучения ($\omega \gg \omega_0, \omega \gg \beta$), тогда:

$$\mathcal{E}(\omega) = 1 + \sum_j \frac{\omega_p^2 f_j}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \implies n(\omega) = \sqrt{1 - (\omega_p^2/\omega^2)}.$$

Тогда выражение для групповой скорости излучения при больших частотах примет вид

$$\mathcal{U} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_p^2/\omega^2)} + \omega \frac{1}{2} \frac{2\omega_p^2/\omega^3}{\sqrt{1 - (\omega_p^2/\omega^2)}}} = c \sqrt{1 - (\omega_p^2/\omega^2)}.$$

где $\sqrt{1 - (\omega_p^2/\omega^2)} < 1$, тогда $\mathcal{U} < c$. Рассмотрим, чему равно произведение фазовой и групповой скорости в пределе больших частот:

$$\mathcal{U}v_\phi = c \sqrt{1 - (\omega_p^2/\omega^2)} \cdot \frac{c}{n'(\omega)} = c \sqrt{1 - (\omega_p^2/\omega^2)} \cdot \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_p^2/\omega^2)}} = c^2.$$

В области же аномальной дисперсии, так как $n'(\omega) < 1$ и $\frac{\partial n}{\partial \omega} < 0$, групповая скорость превосходит скорость света ($U > c$). Однако это не означает, что нарушается теория относительности. Дело в том, что в области аномальной дисперсии разные гармоники бегут с разным затуханием. В нашем случае затухание не учитывалось, так как среда была почти прозрачной. Если же учитывать поглощение, то необходимо вводить еще одну скорость распространения - *сигнальную скорость* - на нее и накладывается ограничение СТО.

4.7 Прохождение света через границу двух прозрачных диэлектриков. Формулы Френеля

На границе раздела двух прозрачных сред возникают всем хорошо известные явления отражения и преломления света. Их можно вывести из уравнений Максвелла, написанных для случая распространения света через изотропные среды. Рассмотрим эту задачу на конкретном примере.

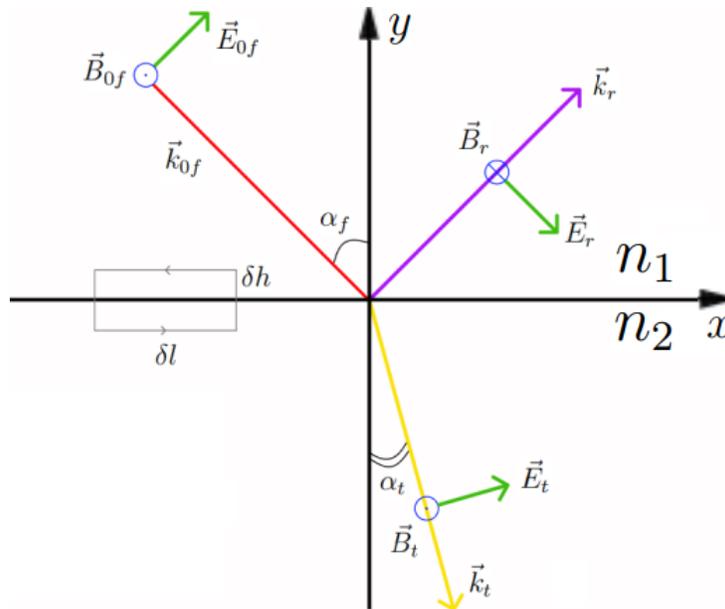


Рис. 40. Прохождение света через границу двух сред

Так как мы рассматриваем прозрачные среды, то n_1 и n_2 практически вещественны. Как видно из рисунка 40, на границу раздела двух сред падает монохроматическая волна под углом α_f и выходит под углом α_t .

Однако, помимо падающей (f) и прошедшей волны (t), есть также отраженная волна (r). Ее наличие можно объяснить следующим образом: поскольку атомы под границей колеблются не так, как над ней, то может случиться так, что колеблющиеся атомы вблизи границы излучат еще одну волну - отраженную. Это можно наблюдать на эксперименте.

Для вывода знакомых со школы законов распространения света запишем уравнение Максвелла для ротора поля \vec{E} в дифференциальной и интегральной форме:

$$[\nabla, \vec{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = -\frac{1}{c} \int_\sigma \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S} \right). \quad (4.26)$$

Далее на границе раздела двух сред начертим контур Γ_1 (длиной δl и шириной δh), как показано на рисунке 40. Если граница достаточно жесткая, то можно сделать контур узким, т.е. δh устремить к нулю. Пусть в верхней полуплоскости суммарное поле от падающей и отраженной волны равно E_2 . Однако из-за наличия скалярного произведения в формуле (4.26) останется только тангенциальная составляющая поля E_2 . В нижней полуплоскости суммарное поле есть просто поле прошедшей волны. Обозначим его как E_1 . В итоге:

$$E_{2\tau} \delta l - E_{1\tau} \delta l = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \delta l \delta h \implies E_{2\tau} = E_{1\tau}.$$

Аналогичным образом из уравнения с ротором вектора магнитной индукции получим, что

$$B_{2\tau} = B_{1\tau}.$$

Теперь воспользуемся одним из уравнений Максвелла, записанного для плоской волны:

$$[\vec{k}, \vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{B} \implies |\vec{k}| \cdot |\vec{E}| = \frac{\omega}{c} |\vec{B}|. \quad (4.27)$$

С помощью уравнения (4.27) и выражения для волнового числа в среде получаем соотношение между магнитными и электрическими полями в среде:

$$|\vec{B}| = n |\vec{E}|.$$

Будем считать, что все три волны (f, t, r) имеют произвольные амплитуды и частоты. Тогда равенство тангенциальных компонент электрического поля можно записать следующим образом в проекции на ось x :

$$E_{0f} \cos \alpha_f e^{i(k_f \sin \alpha_f x - \omega_f t)} + E_{0r} \cos \alpha_r e^{i(k_r \sin \alpha_r x - \omega_r t)} = E_{0t} \cos \alpha_t e^{i(k_t \sin \alpha_t x - \omega_t t)}. \quad (4.28)$$

Уравнение (4.28) должно выполняться для любой точки x . Рассмотрим случай, когда $x = 0$:

$$E_{0f} \cos \alpha_f e^{-i\omega_f t} + E_{0r} \cos \alpha_r e^{-i\omega_r t} = E_{0t} \cos \alpha_t e^{-i\omega_t t}.$$

Поскольку экспоненциальные функции с чисто мнимым показателем и с разными частотами образуют линейно независимый набор функций, то между частотами обязано выполняться следующее соотношение:

$$\omega_f = \omega_r = \omega_t = \omega.$$

Возвращаясь к выражению (4.28), можно сократить на экспоненциальную функцию, содержащую частоту. Получившиеся равенство должно выполняться при любых x . Следовательно, множитель при x во всех трех экспонентах должны быть одинаковыми:

$$k_f \sin \alpha_f = k_r \sin \alpha_r = k_t \sin \alpha_t. \quad (4.29)$$

Если в выражении (4.29) расписать волновые числа в среде, то получится следующий результат:

$$\frac{\omega}{c} n_1 \sin \alpha_f = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \alpha_r = \frac{\omega}{c} n_2 \sin \alpha_t \implies \begin{cases} \alpha_f = \alpha_r \\ n_1 \sin \alpha_f = n_2 \sin \alpha_t \end{cases}. \quad (4.30)$$

Из первого уравнения в системе (4.30) следует, что угол падения волны равен углу отражения. Второе же уравнение выражает *закон Снеллиуса*.

Для удобства введем переобозначения:

$$\alpha_f = \alpha_r = \alpha_1; \quad \alpha_t = \alpha_2.$$



Физический закон 4.2. Закон Снеллиуса

При падении света на границу раздела двух сред угол падающего луча α_1 связан с углом преломленного луча α_2 следующим соотношением (в обоих случаях углы отсчитываются от нормали):

$$\boxed{n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2}.$$

Рассмотрим случай, когда все три волны поляризованы в плоскости падения. Для начала вернемся к граничным условиям для тангенциальных составляющих электрического поля для случая, когда $x = 0$ (систему координат всегда можно расположить таким образом):

$$E_{0f} \cos \alpha_1 + E_{0r} \cos \alpha_1 = E_{0t} \cos \alpha_2. \quad (4.31)$$

Уравнение для тангенциальных составляющих магнитных полей, аналогичным образом, выводится из уравнения Максвелла для ротора поля \vec{B} :

$$n_1 E_{0f} - n_1 E_{0r} = n_2 E_{0t}. \quad (4.32)$$

Объединив уравнения (4.31) и (4.32) в систему, получаем две неизвестных величины - E_{0t} и E_{0r} . Умножим первое уравнение на n_2 , а второе уравнение - на $\cos \alpha_2$. Получим:

$$\begin{cases} n_2 E_{0f} \cos \alpha_1 + n_2 E_{0r} \cos \alpha_1 = n_2 E_{0t} \cos \alpha_2 \\ n_1 E_{0f} \cos \alpha_2 - n_1 E_{0r} \cos \alpha_2 = n_2 E_{0t} \cos \alpha_2. \end{cases}$$

Так как правые части равны, то можно приравнять друг к другу левые:

$$n_2 E_{0f} \cos \alpha_1 + n_2 E_{0r} \cos \alpha_1 = n_1 E_{0f} \cos \alpha_2 - n_1 E_{0r} \cos \alpha_2.$$

Теперь найдем отношение амплитуд полей отраженной и падающей волны:

$$r_{\parallel} \equiv \frac{E_{0r}}{E_{0f}} = -\frac{n_2 \cos \alpha_1 - n_1 \cos \alpha_2}{n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (4.33)$$

 **Определение 4.3.** Амплитудным коэффициентом отражения будем называть отношение амплитуд полей отраженной и падающей волны.

В том случае, когда коэффициент r_{\parallel} меньше нуля (выполняется при $n_2 > n_1$), поле отраженной волны имеет противоположный знак с полем падающей волны. Это значит, что при отражении от более оптически плотной среды у волны происходит скачок фазы на π или же, говорят, что происходит *потеря полуволны* при отражении. При нормальном падении луча амплитудный коэффициент отражения равен:

$$r_{\parallel} \left(\alpha = \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}.$$

Вернемся к рассмотрению уравнения (4.31) и (4.32):

$$\begin{cases} E_{0f} \cos \alpha_1 + E_{0r} \cos \alpha_1 = E_{0t} \cos \alpha_2 \\ n_1 E_{0f} - n_1 E_{0r} = n_2 E_{0t}. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на n_1 , а второе - на $\cos \alpha_1$:

$$\begin{cases} n_1 E_{0f} \cos \alpha_1 + n_1 E_{0r} \cos \alpha_1 = n_1 E_{0t} \cos \alpha_2 \\ n_1 E_{0f} \cos \alpha_1 - n_1 E_{0r} \cos \alpha_1 = n_2 E_{0t} \cos \alpha_1. \end{cases} \quad (4.34)$$

Сложим два уравнения системы (4.34):

$$2n_1 E_{0f} \cos \alpha_1 = E_{0t} (n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2).$$

Записав отношение амплитуды поля прошедшей волны и амплитуды поля падающей волны, мы получим *коэффициент пропускания по амплитуде*:

$$t_{\parallel} \equiv \frac{E_{0t}}{E_{0f}} = \frac{2n_1 \cos \alpha_1}{n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2} = \frac{2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

 **Определение 4.4.** *Амплитудным коэффициентом пропускания будем называть отношение амплитуд полей прошедшей и падающей волны.*

Аналогичными рассуждениями можно прийти к коэффициентам в случае, когда свет поляризован перпендикулярно плоскости падения:

$$r_{\perp} = -\frac{n_2 \cos \alpha_2 - n_1 \cos \alpha_1}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2} = -\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (4.35)$$

$$t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \alpha_1}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2} = \frac{2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

 **Определение 4.5.** *Коэффициенты r_{\parallel} , r_{\perp} , t_{\parallel} и t_{\perp} по определению назовем коэффициентами Френеля.*

Нетрудно, убедиться, что

$$r_{\parallel}^2 + r_{\perp}^2 + t_{\parallel}^2 + t_{\perp}^2 = 1. \quad (4.36)$$

Равенство (4.36) подтверждает, что формулы Френеля удовлетворяют закону сохранения энергии, ведь квадраты амплитуд с точностью до константы равны интенсивностям света.

4.8 Угол Брюстера

Рассмотрим случай, для которого отраженная и прошедшая волны распространяются во взаимно перпендикулярных направлениях, т.е. $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2$. В таком случае $\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)$ в выражении (4.33) будет равен бесконечности, поэтому $r_{\parallel} = 0$. При этом $\sin(\alpha_1 + \alpha_2)$ в выражении (4.35) не равен бесконечности, а значит и r_{\perp} не будет равен 0. То есть в этой ситуации коэффициент отражения волны, поляризованной в плоскости падения, обращается в ноль, в то время как волна, поляризованная перпендикулярно плоскости, отражается.



Определение 4.6. Угол падения, при котором отраженный луч полностью поляризован в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, называется *углом Брюстера*.

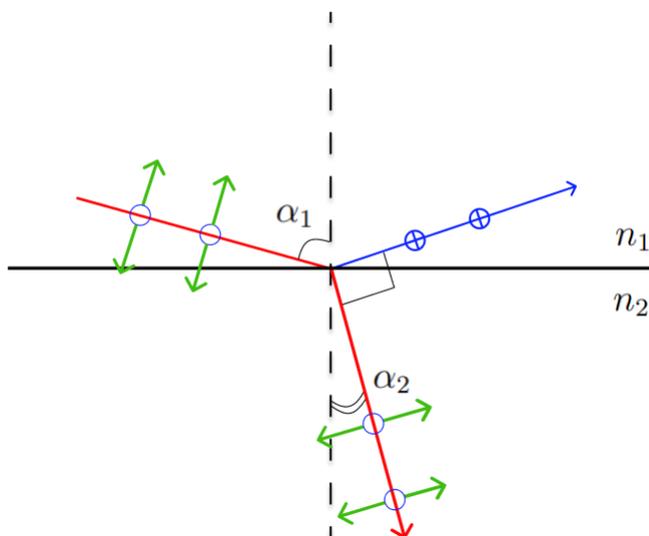


Рис. 41. Падение света на границу раздела двух сред под углом Брюстера

Возникновение эффекта отражения полностью поляризованного света при его падении под углом Брюстера на границу раздела двух диэлектриков можно пояснить на качественном уровне.

Дело в том, что в случае падения света под углом Брюстера преломленная и отраженная волны распространяются во взаимно перпендикулярных направлениях. Отраженная волна генерируется диполями, которые в отражающей среде совершают вынужденные колебания. Эти колебания для одной поляризации происходят в плоскости падения, а для другой - в перпендикулярной плоскости.

Обратим внимание, что в случае отражения света под прямым углом к направлению потока излучения в преломляющей среде отраженная волна распространяется точно в направлении колебаний диполей для поляризации в плоскости падения. В силу диаграммы направленности диполь не может излучать свет в том направлении, в котором он колеблется. Поэтому именно в том направлении, куда должна отразиться волна, диполи среды эту волну генерировать не могут.

В лазерах активное вещество, усиливающее свет, помещают между двумя зеркалами в так называемый *оптический резонатор*. При этом пучок света многократно проходит через активное вещество, усиливаясь в нем. Каждый раз свет, переходя из воздуха в активное вещество, испытывает частичное отражение, а, следовательно, потери усиливаемой мощности. Именно поэтому окошки лазерных сред, торцы активной среды обычно затачивают под углом Брюстера по отношению к направлению распространения света. В этом случае оказывается, что одна

из поляризаций усиливаемого света не теряет своей энергии на отражение, а другая теряет. В такой ситуации та поляризация, которая не отражается от торцов активной среды, оказывается в более выгодном положении для усиления и постепенно перетягивает на себя всю энергию активной среды.

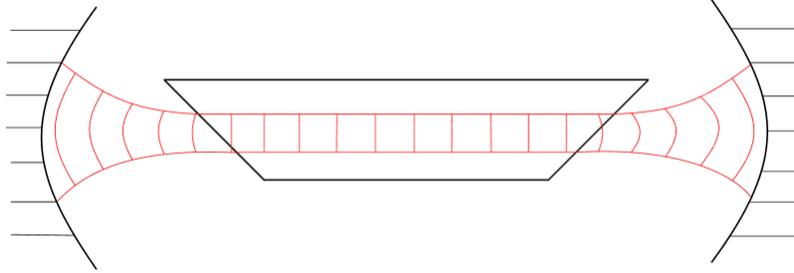


Рис. 42. Активная среда лазера

В результате излучение лазера оказывается практически полностью поляризованным. Так происходит не из-за того, что хочется иметь источник поляризованного света. Так просто получается само собой из-за эффекта, связанного с углом Брюстера.

4.9 Полное внутреннее отражение

Из закона Снеллиуса следует, что при переходе света в оптически менее плотную среду, т.е. среду с меньшим показателем преломления, преломленный пучок распространяется под большим углом к нормали, чем падающий:

$$\sin \alpha_2 = \sin \alpha_1 \frac{n_1}{n_2}.$$

Можно подобрать такой угол падения $\alpha_{\text{пр}}$, при котором преломленный луч пойдет вдоль границы раздела.

$$\sin \alpha_{\text{пр}} = \frac{n_2}{n_1}.$$

При угле падения, превышающем предельный, синус угла преломления формально оказывается большим 1. Можно сказать, что преломленная волна в этом случае распространяется под комплексным углом. Попробуем понять, как это интерпретировать.

Сперва воспользуемся граничными условиями. В рассматриваемом эксперименте необходимо, чтобы:

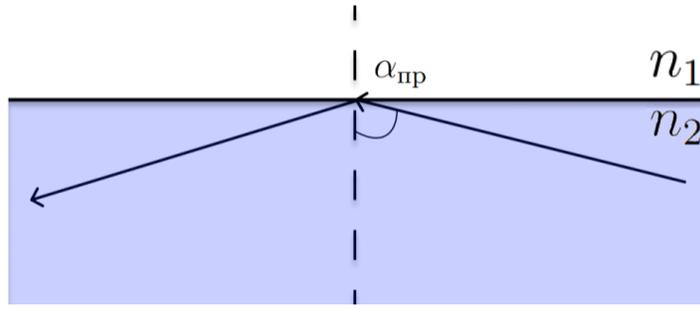


Рис. 43. Полное внутреннее отражение

$$k_{fx} = k_{tx} = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \alpha_1.$$

Чтобы найти полный вектор \vec{k} , необходимо также найти z-компоненту:

$$k_{tx}^2 + k_{tz}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 \implies k_{tz}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 \sin^2 \alpha_1 = \frac{\omega^2}{c^2} (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha_1) < 0.$$

Получаем, что z-компонента волнового вектора является комплексной величиной:

$$k_{tz} = \pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{-n_2^2 + n_1^2 \sin^2 \alpha_1}.$$

Это означает, что у прошедшей неоднородной волны с комплексным волновым вектором есть 3 компоненты. Так как мы рассматриваем изотропную среду с вещественным показателем преломления, то действительные и мнимые компоненты волнового векторы должны быть ортогональны друг другу (доказано в параграфе 4.2).

$$\vec{k}_t = \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} n_1 \sin \alpha_1 \\ 0 \\ \pm i \sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha_1 - n_2^2} \end{pmatrix} = \vec{k}' + \vec{k}''.$$

Тогда прошедшая волна будет выглядеть следующим образом:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_t \cdot \exp \left(-\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha_1 - n_2^2} \cdot z \right) \cdot \exp \left(i \left[\frac{\omega}{c} n_1 \sin \alpha_1 x - \omega t \right] \right). \quad (4.37)$$

Первый экспоненциальный множитель в выражении (4.37) взят со знаком минус, так как с ростом z волна обязана затухать. В противном случае будет наблюдаться сильный рост амплитуды поля, чего в действительности быть не может.

Из формулы (4.37) следует, что вдоль границы раздела по оси x бежит волна. По условию полного внутреннего отражения $n_2 > n_1$, тогда фазовая скорость:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \alpha_1 \cdot v_{\Phi} - \omega = 0 \implies v_{\Phi} = \frac{c}{n_1 \sin \alpha_1} < c.$$

Если полное внутреннее отражение наблюдать в призме, то рядом с ней можно поставить вторую призму так, чтобы отражающие поверхности оказались расположены очень близко друг к другу, примерно на расстоянии порядка длины волны. В этом случае сквозь материал второй призмы излучение неоднородной волны будет просачиваться, и свет будет частично проходить эту призму и в дальнейшем будет наблюдаться как непреломленный пучок. Если мы будем постепенно сближать гипотенузы двух таких преломляющих призм, то постепенно волна, возникающая при отражении в первой призме, будет затухать, а та, которая будет проходить насквозь, будет постепенно усиливаться. Когда расстояние между призмами станет много меньше, чем длина волны излучения, полное внутреннее отражение вообще исчезнет, и свет будет проходить через такую составную призму без каких-либо отражений напрямую, без какой-либо потери интенсивности, как через сплошной стеклянный куб. В этом можно действительно убедиться на эксперименте.

На примере полного внутреннего отражения вновь оказалось возможным проиллюстрировать квантовомеханический эффект просачивания носителей света, т.е. на самом деле фотонов, через *запрещенную область*. Таким образом, туннельный эффект не такое уж и экзотическое явление макромира.

Этот эффект нужно учитывать при изготовлении световодов, светонесущие волокна которых желательно покрывать защитным слоем, препятствующим оседанию пыли, на поверхности которой из-за просачивания волны в запрещенную область может рассеиваться свет.

Сосчитаем энергетические коэффициенты отражения (отношение векторов Пойнтинга):

$$R = \frac{|S_r|}{|S_f|} = \frac{E_r E_r^* n_1}{E_f E_f^* n_2} = |r|^2.$$

Вспомнив выражение для амплитудного коэффициента отражения, рассмотрим случай полного внутреннего отражения - синус угла отраженной волны больше 1, следовательно, косинус становится мнимым. Квадрат модуля отношения двух комплексно сопряженных чисел равен 1. Тогда энергетический коэффициент отражения также равен 1.

$$R = \left| \frac{n_2 \cos \alpha_1 - i n_1 \cos \alpha_2}{n_2 \cos \alpha_1 + i n_1 \cos \alpha_2} \right|^2 \equiv 1.$$

4.10 Распространение света в слоистых средах

Большинство диэлектриков имеют коэффициент отражения, находящийся в диапазоне между 0 и 1. Возникает вопрос: а можно ли сделать поверхность оптической детали с коэффициентом отражения, близким либо к 1 (идеальные зеркала), либо к 0 (просветленные оптические предметы)?

Да, это можно сделать. Для этого используются так называемые *интерференционные покрытия* - на поверхность оптической детали наносится серия слоев из прозрачных диэлектриков с разными показателями преломления n_p . На границе каждого слоя падающая волна частично проходит в следующий слой, частично отражается, и в том случае, когда интерференционное покрытие состоит из множества слоев, внутри него возникает множество бегущих в разных направлениях волн. Суммирование этих волн представляет собой непростую задачу, которая будет решена далее.

Для начала рассмотрим задачу, когда свет из воздуха попадает на среду с показателем преломления n_p . В случае нормального падения света амплитудные коэффициенты отражения и пропускания имеют вид

$$r_{\parallel} = r_{\perp} = -\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = -\frac{n_p - 1}{n_p + 1}; \quad t_{\parallel} = t_{\perp} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \frac{2}{1 + n_p}.$$

При прохождении света через тонкий прозрачный диэлектрический слой возникают многократные отражения волн от поверхности (рисунок 44). Для наглядности на рисунке 44 волна падает под углом к границе раздела двух сред, однако мы рассматриваем случай нормального падения. Отраженные и прошедшие волны имеют различные интенсивности и сдвиги фаз, определяемые толщиной диэлектрического слоя. Наша задача - просуммировать эти волны.

Обозначим поле падающей волны как E_f , а сумму полей всех отраженных от диэлектрического слоя волн - E_r . Сумма же полей всех прошедших волн будет обозначаться как E_t . Внутри слоя распространяется огромное множество волн, бегущих во взаимно противоположных направлениях. Сумму всех волн, распространяющихся в направлении падающей волны, будем обозначать индексом $+$, а волн, бегущих навстречу - индексом $-$.

В данной задаче электромагнитное поле удобно характеризовать двухкомпонентным вектором, составленным из комплексных амплитуд электрического и магнитного полей. На верхней границе слоя такой вектор представим суммой двух полей, описывающих совокупность волн. Эти волны бегут во встречных направлениях. Фазы этих волн спрятаны внутрь комплексных амплитуд:

$$\begin{pmatrix} E_{\uparrow} \\ B_{\uparrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_+ + E_- \\ n_p E_+ - n_p E_- \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

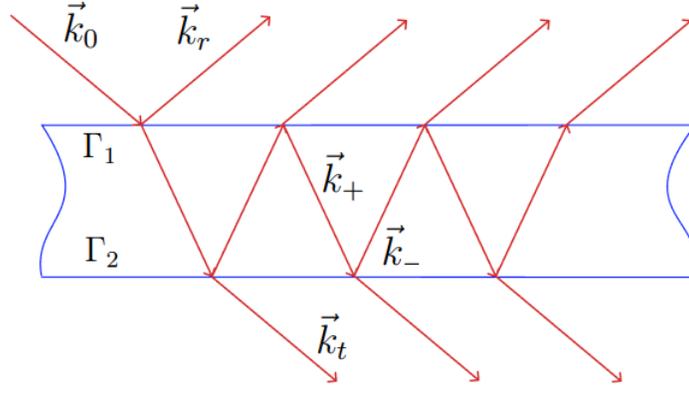


Рис. 44. Прохождение света через тонкий диэлектрический слой

С помощью выражения (4.38) найдем компоненты электромагнитного поля с индексом +:

$$\begin{cases} n_p E_{\uparrow} + B_{\uparrow} = 2n_p E_{+} \\ n_p E_{\uparrow} - B_{\uparrow} = 2n_p E_{-} \end{cases} \implies \begin{cases} E_{+} = \frac{E_{\uparrow}}{2} + \frac{B_{\uparrow}}{2n_p} \\ E_{-} = \frac{E_{\uparrow}}{2} - \frac{B_{\uparrow}}{2n_p} \end{cases} \quad (4.39)$$

На нижней границе необходим учет запаздывания и опережения фаз для суммарных волн, распространяющихся во встречных направлениях. Эти запаздывания и опережения приведены в виде соответствующих экспоненциальных множителей в выражении (4.40):

$$\begin{pmatrix} E_{\downarrow} \\ B_{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{+} e^{ikd} + E_{-} e^{-ikd} \\ n_p E_{+} e^{ikd} - n_p E_{-} e^{-ikd} \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

С учетом формул Эйлера при подстановке полей E_{+} и E_{-} , выражения для которых даны в (4.39), в двухкомпонентный вектор электромагнитного поля на нижней грани слоя получим:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_{\downarrow} \\ B_{\downarrow} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_{\uparrow} \cos(kd) + i \frac{B_{\uparrow}}{n_p} \sin(kd) \\ in_p E_{\uparrow} \sin(kd) + B_{\uparrow} \cos(kd) \end{pmatrix} \implies \\ \implies \begin{pmatrix} E_{\downarrow} \\ B_{\downarrow} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(kd) & \frac{i}{n_p} \sin(kd) \\ in_p \sin(kd) & \cos(kd) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{\uparrow} \\ B_{\uparrow} \end{pmatrix} = \hat{P} \cdot \begin{pmatrix} E_{\uparrow} \\ B_{\uparrow} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

В выражении (4.41) матрица \hat{P} - характеристическая матрица слоя, которая равна

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \cos(kd) & \frac{i}{n_p} \sin(kd) \\ in_p \sin(kd) & \cos(kd) \end{pmatrix}.$$

Теперь выразим компоненты электромагнитного поля с индексами \uparrow и \downarrow через привычные нам компоненты E_f , E_r и E_t . Тогда для верхней и нижней границы получим:

$$\begin{pmatrix} E_{\uparrow} \\ B_{\uparrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_f + E_r \\ E_f - E_r \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} E_{\downarrow} \\ B_{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_t \\ n_p E_t \end{pmatrix} = \hat{P} \cdot \begin{pmatrix} E_{\uparrow} \\ B_{\uparrow} \end{pmatrix} = \hat{P} \cdot \begin{pmatrix} E_f + E_r \\ E_f - E_r \end{pmatrix}.$$

В итоге мы получили взаимосвязь компонент электрического поля падающей, отраженной и преломленной волны.

Однако что будет при наложении нескольких диэлектрических слоев друг на друга (сами покрытия нанесены на слой из стекла с показателем преломления n)? Развитый формализм позволяет достаточно просто описать прохождение света через многослойное покрытие. На каждой границе раздела многослойного покрытия в силу граничных условий должно выполняться равенство между обоими компонентами описывающего полное электромагнитное поле двухкомпонентного вектора. Соответствующая цепочка равенств начинает строиться с ближайшего к поверхности оптической детали слоя. На каждой границе слоя равенства связываются с помощью граничных условий, а переход от нижней границы каждого слоя к верхней границе осуществляется путем домножения на соответствующую характеристическую матрицу слоя.

В результате электромагнитное поле по разные стороны от многослойного интерференционного покрытия оказывается связанным между собой через матрицу 2×2 , получающуюся в результате перемножения всех характеристических матриц всех слоев интерференционного покрытия:

$$\begin{pmatrix} E_t \\ nE_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_f + E_r \\ E_f - E_r \end{pmatrix}.$$

Здесь мы приравняли поле на нижней границе интерференционного покрытия и поле в стекле с показателем преломления n .

После перемножения матриц и приравнивания соответствующих компонент векторов у нас получится система из двух уравнений. Эта система с двумя неизвестными относительно полей отраженной и прошедшей внутрь стеклянного слоя волн решается стандартным методом. Таким образом, мы получаем явное выражение для амплитудного коэффициента отражения через элементы полной матрицы интерференционного покрытия:

$$r = \frac{E_r}{E_f} = -\frac{n(a+b) - (c+d)}{n(a-b) - (c-d)}.$$

Теперь все готово для решения конкретных задач практики.

В случае однослойного покрытия энергетический коэффициент отражения R описывается приведенным выражением:

$$\begin{aligned}
 R = r \cdot r^* &= \left| \frac{n \left(\cos \varphi + \frac{i}{n_p} \sin \varphi \right) - (in_p \sin \varphi + \cos \varphi)}{n \left(\cos \varphi - \frac{i}{n_p} \sin \varphi \right) - (in_p \sin \varphi - \cos \varphi)} \right|^2 = \\
 &= \frac{(n-1)^2 \cos^2 \varphi + \left(n_p - \frac{n}{n_p}\right)^2 \sin^2 \varphi}{(n+1)^2 \cos^2 \varphi + \left(n_p + \frac{n}{n_p}\right)^2 \sin^2 \varphi}.
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

где угол φ выражается следующим образом:

$$\varphi = 2\pi n_p \frac{d}{\lambda_0}.$$

Рассматривая выражение (4.42) как функцию двух переменных n и φ , последняя из которых зависит от толщины слоя, длины волны света и показателя преломления пленки, можно поставить и решить задачу о нахождении максимума и минимума нашей функции. Оказывается, что минимальный коэффициент отражения от стекла с однослойным интерференционным покрытием возникает в том случае, когда его оптическая толщина (произведение показателя преломления на геометрическую толщину) равна четверти длины волны света в диэлектрическом слое:

$$n_p d = \frac{\lambda_0}{4} \implies kd = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \frac{\lambda_0}{4} = \frac{\pi}{2} \implies \hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{n_p} \\ in_p & 0 \end{pmatrix}.$$

$$r = -\frac{n \frac{i}{n_p} - in_p}{n \frac{i}{n_p} + in_p} = -\frac{n - n_p^2}{n + n_p^2} \rightarrow 0 \implies R_{min} = R(n_p = \sqrt{n}, \varphi = \pi/2) = 0.$$

В случае покрытия с показателем преломления, равным корню из показателя преломления стекла, коэффициент отражения обращался бы в ноль, и возникало бы полное просветление оптики. К сожалению, твердых диэлектриков с такими диэлектрическими свойствами до сих пор не найдено. В результате используется частичное просветление оптики. Но даже и частичного просветления удается достичь не для всего видимого света. Дело в том, что в условие гашения отраженных пучков входит длина волны излучения. Покрытие для бытовой оптики делают так, чтобы максимальный эффект приходился на желто-зеленую часть спектра, где интенсивность солнечного излучения максимальна. Из-за этого объективы фотокамер, как правило, кажутся пурпурными, так как красную и сине-фиолетовую составляющую белого света объективы фотокамер отражают лучше, чем желто-зеленую.

Если же мы хотим добиться максимального отражения, то однослойные покрытия нам не подойдут, так как при исследовании энергетического коэффициента отражения можно получить только 2 решения относительно толщины пленки - бесконечно большая пленка или пленка нулевой толщины, что, очевидно, не встречается на практике.



Рис. 45. Отражение света разной длины волны от объектива фотокамеры

Тут на помощь приходят многослойные покрытия. Рассмотрим чередующиеся покрытия с показателем преломления n_1 и n_2 , толщина каждого из которых равна четверти длины волны в соответствующем покрытии. Тогда характеристические матрицы слоёв для двух различных покрытий будут выглядеть следующим образом:

$$\hat{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{n_1} \\ in_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{n_2} \\ in_2 & 0 \end{pmatrix} \implies \hat{P}_1 \cdot \hat{P}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{n_2}{n_1} & 0 \\ 0 & -\frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}.$$

При увеличении количества пар слоёв до N получим суммарную матрицу всех слоёв:

$$\hat{P}_{sum} = \hat{P}_{1sum} \cdot \hat{P}_{2sum} = \begin{pmatrix} -\frac{n_2}{n_1} & 0 \\ 0 & -\frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} \left(-\frac{n_2}{n_1}\right)^N & 0 \\ 0 & \left(-\frac{n_1}{n_2}\right)^N \end{pmatrix}.$$

Теперь же рассмотрим энергетический коэффициент отражения, устремив при этом число пар слоёв к бесконечности ($N \rightarrow \infty$):

$$R = |r|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{n \cdot \left(-\frac{n_2}{n_1}\right)^N - \left(-\frac{n_1}{n_2}\right)^N}{n \cdot \left(-\frac{n_2}{n_1}\right)^N + \left(-\frac{n_1}{n_2}\right)^N} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{n \cdot \left(-\frac{n_2}{n_1}\right)^{2N} - 1}{n \cdot \left(-\frac{n_2}{n_1}\right)^{2N} + 1} \right| = \begin{cases} 1, & n_1 > n_2, \\ 1, & n_2 > n_1. \end{cases}$$

Таким образом, при любых неравных друг другу значениях n_1 и n_2 мы получаем покрытие с максимальным отражением. Процесс напыления таких пленок довольно трудоемкий, и сами пленки функционируют не больше полугода, что существенно увеличивает затраты на их производство.

4.11 Распространение света в проводящих средах

В проводниках, в отличие от диэлектриков, плотность тока не равна нулю. Также в проводниках диэлектрическая проницаемость много больше, чем у диэлектриков. Рассмотрим общие вопросы металлооптики с макроскопической и микроскопической точки зрения.

Для начала запишем уравнение Максвелла с током смещения, при этом представим электрическое поле через плотность тока (закон Ома в дифференциальной записи):

$$[\nabla, \vec{B}] = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}.$$

Перейдём к плоским монохроматическим волнам:

$$i[\vec{k}, \vec{B}] = -\frac{i\omega}{c} \vec{D} + \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}.$$

Учитывая, что $\vec{D} = \mathcal{E} \vec{E}$:

$$i[\vec{k}, \vec{B}] = -\frac{i\omega}{c} \vec{D} + \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} = -\frac{i\omega}{c} \left(\mathcal{E}(\omega) + 4\pi \frac{i\sigma}{\omega} \right) \vec{E}. \quad (4.43)$$

Выражение в скобках в уравнении (4.43) содержит обобщенную диэлектрическую проницаемость. Тогда сделаем переобозначение:

$$\tilde{\mathcal{E}}(\omega) = \mathcal{E}(\omega) + 4\pi \frac{i\sigma}{\omega}.$$

Таким образом, уравнение (4.43) примет вид

$$[\vec{k}, \vec{B}] = -\frac{\omega}{c} \tilde{\mathcal{E}}(\omega) \vec{E}.$$

Следовательно, теперь обобщенная диэлектрическая проницаемость комплексна, значит комплексен и показатель преломления. Вспомним о коэффициенте отражения при нормальном падении волны:

$$r = -\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}. \quad (4.44)$$

Пусть свет падает из воздуха на проводник. Тогда коэффициент отражения можно представить следующим образом:

$$r = -\frac{n_2' + in_2'' - 1}{n_2' + in_2'' + 1} = -|\kappa| e^{i\phi}.$$

То есть коэффициент отражения существенно комплексен.

Если на проводник падает линейно поляризованная волна, то её можно разложить на две ортогональные поляризации. Пока коэффициент отражения был вещественным, обе поляризации отражались с разными коэффициентами, но без сдвига фаз друг относительно друга. Теперь, когда коэффициент отражения комплексный, для разных поляризаций при косом падении появляются разные $|\kappa|$ и $e^{i\phi}$. То есть разные поляризации оказываются с разным сдвигом фаз. А это значит, что при отражении будет не линейно-поляризованный свет, а эллиптически.

Отсюда появляется следующий вывод: при отражении от проводников свет теряет линейную поляризацию и становится поляризован эллиптически.

Рассмотрим теперь микроскопическое приближение. Ранее уже было получено выражение для диэлектрической проницаемости в приближении атома Томсона:

$$\mathcal{E}(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega}. \quad (4.45)$$

В среде со свободными электронами связью с ядром можно пренебречь, следовательно, собственная частота колебаний электронов в атоме равна нулю ($\omega_0 = 0$).

На небольших частотах слагаемым, включающим в себя β в выражении (4.45), можно пренебречь. В итоге получаем:

$$\mathcal{E}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (4.46)$$

С учетом того, что показатель преломления выражается из диэлектрической проницаемости как $n = \sqrt{\mathcal{E}}$, возможны две ситуации:

1. $\omega > \omega_p \implies n = n' < 1$. Таким образом, при больших частотах показатель преломления меньше 1.

2. $\omega < \omega_p \implies n = n''$. Это означает, что на низких частотах из-за комплексного показателя преломления электромагнитные волны почти не проходят и экспоненциально затухают согласно закону Бугера.

Теперь найдем амплитудный коэффициент отражения. Для этого возьмем корень из выражения (4.46) и подставим в (4.44):

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \implies r = -\frac{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} + 1}.$$

Для понимания того, как свет отражается от поверхности проводника, найдем энергетический коэффициент отражения:

$$R = |r|^2 = \left| \frac{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} + 1} \right|^2. \quad (4.47)$$

В выражении (4.47) возникает также 2 возможные ситуации для частот:

1. Если $\omega < \omega_p$, то энергетический коэффициент отражения равен:

$$R = |r|^2 = \left| \frac{ik - 1}{ik + 1} \right|^2 = 1.$$

Следовательно, на малых частотах отражается практически всё излучение.

2. Если $\omega > \omega_p$, а также $\omega \rightarrow \infty$, то энергетический коэффициент отражения равен:

$$R(\omega \rightarrow \infty) = \left| \frac{1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}{1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + 1} \right| = 0.$$

Концентрация свободных электронов в металле больше, чем в ионосфере. Если в ионосфере плазменная частота приходится на радиоизлучение, то в металлах частота плазменных колебаний на несколько порядков больше. Она лежит в области рентгена. Это больше, чем частота белого света, а значит, из выражения (4.36) следует, что белый свет отражается, а гамма излучение - нет. Поэтому проводники блестят при падении на него белого света.

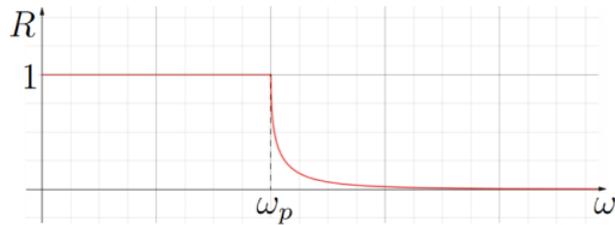


Рис. 46. Зависимость $R(\omega)$

График зависимости $R(\omega)$ будет выглядеть, как показано на рисунке 46.

Обратимся к рисунку 47. Пусть на проводник падает плоская монохроматическая волна, длина волны которой соответствует красному цвету. В результате её отражения формируется стоячая волна той же длины волны, в проводнике же происходит экспоненциальное затухание (для наглядности изображено зеленым цветом).

Теперь рассмотрим проводник, для которого $\omega_p = \omega$. В таком случае показатель преломления $n = 0$. Если на границу с нулевым показателем преломления

падает свет, то из-за нулевой мнимой части в проводнике свет не затухает, что видно из рисунка 48. При таком резонансе частот возникает интересная вещь. При равенстве частоты света и плазменной частоты получается, что $\mathcal{E} = 0$. Значит из системы уравнений Максвелла видно:

$$0 = (\vec{k}, \vec{D}) = \mathcal{E}(\vec{k}, \vec{E}) = 0.$$

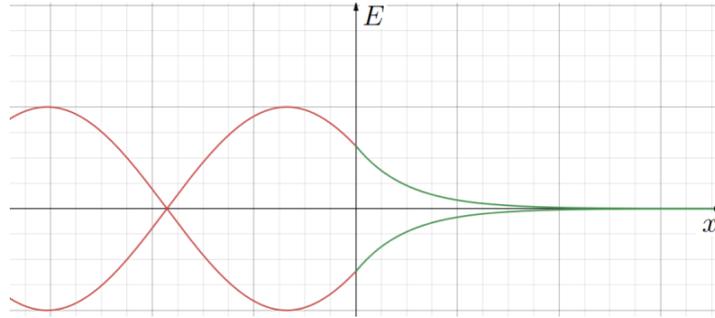


Рис. 47. Экспоненциальное затухание амплитуды вектора \vec{E} при $\omega \neq \omega_p$

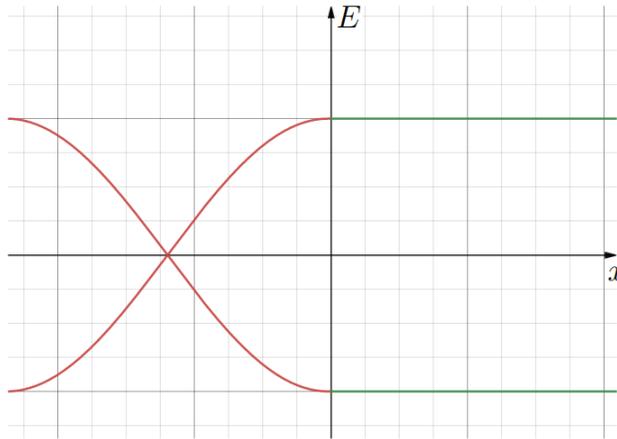


Рис. 48. Продольные колебания вектора \vec{E} в металле при $\omega = \omega_p$

Раньше уравнение решалось только тогда, когда векторы \vec{k} и \vec{E} были ортогональны. В таком случае мы говорили, что электромагнитные волны всегда поперечны. Теперь, когда $\mathcal{E} = 0$, скалярное произведение $(\vec{k}, \vec{D}) = 0$ даже в том случае, когда векторы \vec{k} и \vec{E} параллельны. Это означает, что в данном случае возможны и продольные электромагнитные волны.

$$[\vec{k}, \vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{B}.$$

Если векторы \vec{k} и \vec{E} параллельны, то векторное произведение таких векторов равно нулю. Следовательно, магнитная индукция $\vec{B} = 0$.

$$[\vec{k}, \vec{B}] = -\frac{\omega}{c} \vec{D} = -\frac{\omega}{c} \mathcal{E} \vec{E}.$$

В данной ситуации $\vec{B} = 0$, $\mathcal{E} = 0$, но \vec{E} может быть ненулевым. Таким образом, в ситуации, когда $\omega = \omega_p$, могут бежать продольные волны без магнитной составляющей.

Контрольные вопросы

1. Как выглядит система уравнений Максвелла для волн в веществе?
2. Что такое комплексный показатель преломления?
3. В чём заключается явление дисперсии?
4. Какие среды называют инверсными?
5. Что происходит со светом при распространении в среде с комплексным показателем преломления? Как называется это явление?
6. Чему равна диэлектрическая проницаемость атома Томсона и что такое плазменная частота?
7. Как выглядит дисперсионная кривая атома Томсона? Что такое зоны аномальной дисперсии? Нормальной дисперсии?
8. Что такое фазовая и групповая скорости? Есть ли противоречие с постулатами СТО в том, что фазовая скорость может превосходить скорость распространения света?
9. Запишите формулы коэффициентов Френеля. В чём физический смысл этих коэффициентов?
10. В чём особенность угла Брюстера?
11. Что происходит с поляризацией света при отражении от проводника? Почему?
12. При каких условиях возможно появление продольных световых колебаний?

5 РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

5.1 Преобразования инверсии. Вращение плоскости поляризации

Пространственная инверсия направляет все три оси декартовой системы координат в противоположные стороны. Такая операция меняет правую систему координат на левую. Иногда говорят, что операцию инверсии условно можно считать отражением в зеркале.

Мы знаем, что законы физики инвариантны относительно преобразования инверсии. Значит, не только все физические, но и все химические явления одинаково протекают в правой и левой системах координат.

Также мы знаем, что законы сохранения в физике связаны с тем или иным преобразованием симметрии:

1. Закон сохранения импульса связан с симметрией нашего мира относительно сдвига в пространстве.

В силу однородности пространства физические процессы, протекающие в замкнутой системе, не меняются при любом параллельном переносе системы как целого в пространстве.

2. Закон сохранения момента импульса связан с симметрией нашего мира относительно вращения.

Из-за изотропности нашего пространства физические процессы, протекающие в замкнутой системе, не меняются при повороте системы как целого в пространстве.

3. С отражением во времени связан закон сохранения энтропии, который не очень хорошо выполняется в нашем мире. Напомним, что энтропия - приведенное количество тепла, отнесенное к абсолютной температуре. В тех системах, где можно время повернуть вспять (т.е. для обратимых процессов), энтропия (или беспорядок) сохраняется, где повернуть вспять время нельзя, энтропия возрастает.

4. Закон сохранения энергии связан со сдвигом во времени. Интересно отметить, что в курсе классической механики мы говорили об однонаправленности течения времени. Сейчас мы понимаем, что это свойство времени связано с наличием диссипативных сил и процессов, протекающих с повышением энтропии. То есть время течет в ту сторону, куда повышается энтропия.

Но у нас есть еще одно преобразование симметрии - это *преобразование инверсии*. С ним тоже связан закон сохранения - *закон сохранения четности*.

Этот закон не имеет классического аналога, но широко используется в квантовой механике. Так, в квантовой механике каждому состоянию мы можем приписать волновую функцию $\Psi(\vec{r}, t)$, такую что квадрат ее модуля дает вероятность найти систему именно в этом состоянии. Вероятность - это измеряемая величина, а значит, при операции инверсии она не изменяется, как и должно быть. Сама же волновая функция может быть как четной, так и нечетной. Во всех процессах суммарная четность системы должна сохраняться. Важно отметить, что если наш мир симметричен относительно право-лево, то четность в таком мире обязана сохраняться.

Однако в начале 19 века был обнаружен эффект, который создал сомнения о симметрии нашего мира относительно право-лево. Этот эффект называется *естественная активность вещества*. Оказалось, что раствор сахара вращает плоскость поляризации в правую сторону (если смотреть вдоль вектора \vec{k}).

5.2 Эффект Фарадея

Прежде, чем обсуждать эффекты естественного вращения плоскости поляризации, займемся более простыми эффектами искусственного вращения. Оказывается, если вещество поместить в постоянное магнитное поле и пропускать через него электромагнитные волны, плоскость поляризации излучения будет поворачиваться. Однако здесь нет никаких проблем с общими представлениями о симметрии, так как продольное магнитное поле мы будем создавать с помощью соленоида, ток по которому может течь как по часовой, так и против часовой стрелки. А значит, мы заранее выбираем направление протекания тока, и тем самым вопрос симметрии сразу же отпадает.

Соответствующий эффект носит название *эффекта Фарадея*, а вещество, находящееся в магнитном поле и поворачивающее плоскость поляризации, обычно называют ячейкой Фарадея. Как нетрудно догадаться, далее будет использоваться модель газа из атомов Томсона.

Запишем второй закон Ньютона для электронных облаков, где вектор \vec{r} будет обозначать их смещение от положения равновесия:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + 2\beta\frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{q\vec{E}(t)}{m} + \frac{q}{mc} \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{B}_0 \right].$$

Здесь $\vec{E}(t)$ - электрическое поле бегущей волны, \vec{B}_0 - внешнее магнитное поле. Как и в случае для эффекта Зеемана, компонентой с магнитным полем бегущей волны пренебрежем ввиду малости относительно электрической силы.

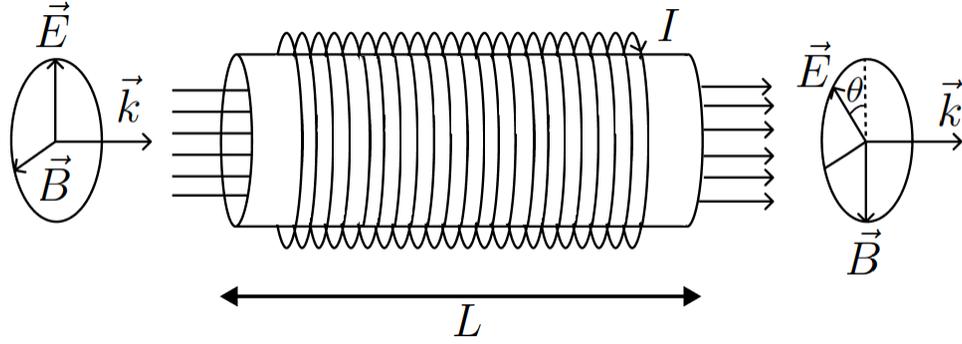


Рис. 49. Эффект Фарадея

Теперь же перепишем второй закон Ньютона с учетом частоты лармоновской прецессии:

$$2\vec{\Omega} = \frac{q\vec{B}_0}{mc} \implies \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + 2\beta\frac{d\vec{r}}{dt} - 2\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{\Omega}\right] + \omega_0^2\vec{r} = \frac{q\vec{E}(t)}{m}.$$

При распространении света с x -поляризацией на электронные облака будет действовать сила Лоренца, которая приведет к дополнительным колебаниям вдоль оси y . Тогда уравнения, полученные в результате проецирования на оси x и y второго закона Ньютона, зацепятся. Спроектируем второй закон Ньютона на циркулярные орты:

$$\vec{r}(t) = r_+(t)\vec{e}_+ + r_-(t)\vec{e}_- \implies \frac{d^2r_{\pm}}{dt^2} + 2\beta\frac{dr_{\pm}}{dt} \mp 2\Omega i\frac{dr_{\pm}}{dt} + \omega_0^2r_{\pm} = \frac{q}{m}E_{0\pm}e^{-i\omega t}. \quad (5.1)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (5.1) будем искать после времени 10^{-8} с (характерное время затухания). Удобнее рассматривать именно на этих временах, так как общее решение однородного уравнения будет практически равно 0, а значит, им можно будет пренебречь. Тогда решение будем искать в виде

$$r_{\pm}(t) = r_{0\pm}e^{-i\omega t} \implies r_{0\pm}[(-i\omega)^2 + 2\beta(-i\omega) \mp 2i\Omega(-i\omega) + \omega_0^2] = \frac{q}{m}E_{0\pm}.$$

В итоге мы получим выражение для вращающегося дипольного момента (ротатора) в ячейке Фарадея:

$$d_{\pm}(t) = q \cdot r_{\pm} = \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega \mp 2\Omega\omega} E_{0\pm}e^{-i\omega t} = \langle\alpha_{\pm}(\omega)\rangle \cdot E_{\pm}(t),$$

где $\langle\alpha_{\pm}(\omega)\rangle$ - средняя динамическая поляризуемость атома Томсона, которая равна

$$\langle\alpha_{\pm}(\omega)\rangle = \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega \mp 2\Omega\omega}. \quad (5.2)$$

Из выражения (5.2) видно, что динамическая поляризуемость для волны, поляризованной по правому и левому кругу, разная. С учетом того, что

$$\mathcal{E}_{\pm}(\omega) = 1 + 4\pi\mathcal{N}\langle\alpha_{\pm}(\omega)\rangle; \quad n_{\pm}(\omega) = \sqrt{\mathcal{E}_{\pm}(\omega)}.$$

Мы получим, что излучение правой и левой поляризаций распространяется в ячейке Фарадея с разными фазовыми скоростями - $v_{\phi\pm} = c/n_{\pm}$. Именно эта особенность приводит к эффекту *искусственного поворота плоскости поляризации*. Рассмотрим ее на количественном уровне.

Падающая на ячейку Фарадея плоская монохроматическая волна линейной поляризации (пусть для определенности это будет x -поляризованная волна) представима суммой двух циркулярно поляризованных волн, бегущих в вакууме по направлению к ячейке с одинаковыми скоростями. Тогда вектор напряженности бегущей волны на входе в кювету:

$$\vec{E}(z = 0, t) = \vec{e}_x E_0 e^{i(kz - \omega t)} = \vec{e}_+ \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t} + \vec{e}_- \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t}.$$

Будем считать, что газ из атомов Томсона достаточно разряженный, и волна почти полностью проходит через кювету, т.е. энергетический коэффициент отражения $R \rightarrow 0$. Тогда внутри кюветы поле будет выглядеть следующим образом:

$$\vec{E}(z > 0, t) = \vec{e}_+ \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i(k_+ z - \omega t)} + \vec{e}_- \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i(k_- z - \omega t)}. \quad (5.3)$$

В формуле (5.3) $k_{\pm} = \frac{\omega}{c} n_{\pm}$ - волновые числа для колебаний разных поляризаций.

Теперь же примем частоту волны ω такой, что слагаемое $2\Omega\omega$ будет много меньше других слагаемых в знаменателе выражения (5.2). Значит, $\alpha_{\pm}(\omega)$ можно разложить в ряд Тейлора близ точки $\Omega = 0$:

$$\alpha_{\pm}(\Omega) = \alpha_{\pm}(\Omega = 0) + \left. \frac{\partial \alpha_{\pm}}{\partial \Omega} \right|_{\Omega=0} \Omega + \dots$$

Аналогичным образом показатель преломления газа из атомов Томсона:

$$n_{\pm}(\Omega) = n_{\pm}(\Omega = 0) + \left. \frac{\partial n_{\pm}}{\partial \Omega} \right|_{\Omega=0} \Omega + \dots = n_0 \pm \mathcal{B}\Omega.$$

Здесь величина n_0 для поляризаций \pm будет одна и та же, а \mathcal{B} будем считать величиной, пропорциональной *постоянной Верде*.

Теперь не составит труда найти, чему равен вектор напряженности на выходе из кюветы длиной L :

$$\vec{E}(z = L, t) = \vec{e}_+ \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i\omega(\frac{n_+}{c}L - t)} + \vec{e}_- \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i\omega(\frac{n_-}{c}L - t)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{E_0}{2} e^{i\omega\left(\frac{n_0}{c}L-t\right)} \left[(\vec{e}_x + i\vec{e}_y) e^{i\frac{\omega}{c}\mathcal{B}\Omega L} + (\vec{e}_x - i\vec{e}_y) e^{-i\frac{\omega}{c}\mathcal{B}\Omega L} \right] = \\
&= E_0 e^{i(kL-\omega t)} \left[\vec{e}_x \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\mathcal{B}\Omega L\right) - \vec{e}_y \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\mathcal{B}\Omega L\right) \right].
\end{aligned}$$

Вне ячейки волны бегут с одинаковой скоростью и, следовательно, могут рассматриваться как единая волна, поляризация которой оказывается вновь линейной. Правда, из-за того, что возник набег фаз между циркулярно поляризованными составляющими, направление колебаний в этой суммарной линейно поляризованной волне оказывается повернутым относительно направления колебаний падающей на ячейку волны с линейными x -колебаниями.

Описанный эффект широко используется для модуляции интенсивности лазерного пучка, пропускаемого через ячейку Фарадея, расположенную между двумя скрещенными поляризаторами. В случае, когда на ячейку Фарадея не подается электрический сигнал, излучение внутри оказывается линейно поляризованным и не поворачивается по мере распространения света, в результате свет не может пройти через систему скрещенных поляризаторов, и на выходе имеется нулевой сигнал. Если же на ячейку подать постоянный электрический ток, внутри возникает магнитное поле, приводящее к повороту плоскости поляризации излучения на выходе, что делает возможным прохождение света через второй из скрещенных поляризаторов. Таким образом, возникает возможность управления оптическими сигналами при помощи электрических.

Также эффект Фарадея используется в оптических приборах, которые называются *изоляторами*.



Определение 5.1. *Оптическим изолятором по определению называют оптический прибор, который пропускает свет только в одном направлении.*

В таких устройствах величина и направление электрического тока выбирается таким образом, чтобы повернуть плоскость поляризации на 45 градусов. Также до ячейки Фарадея ставится поляризатор, а после системы - анализатор. Возможность более детально разобраться в вопросах работы изолятора предоставляется читателю.

5.3 Эффект Керра

Рассмотрим такую систему: плоский конденсатор, напряженность электрического поля которого равна \vec{E}_0 , заполнен диэлектриком, а именно - газом из вытянутых молекул.

Во внешнем поле вытянутые молекулы поляризуются и частично ориентируются вдоль поля. Вспомним потенциальную энергию диполя во внешнем электрическом поле:

$$W = -(\vec{d}, \vec{E}_0). \quad (5.4)$$

Также вспомним, что число молекул, ориентированных внутри заданного телесного угла, определяется соотношением:

$$dN = C_1 \sin \theta d\theta,$$

где θ - угол между дипольным моментом молекулы и вектором напряженности. Дипольный момент связан с микроскопическим полем линейно, то есть

$$\vec{d} = \hat{\alpha} \vec{E}_0. \quad (5.5)$$

С помощью формул (5.4) и (5.5) получаем связь потенциальной энергии молекулы с величиной напряженности внешнего поля:

$$W = -C_2 E_0^2.$$

Тогда функция распределения молекул по углам будет выглядеть таким образом:

$$f(\theta) = C_1 \exp\left(\frac{C_2 E_0^2 \cos^2 \theta}{kT}\right) \sin \theta d\theta.$$

Теперь, если "пронести" линейно поляризованную волну \vec{E} через такой газ, будет наблюдаться следующий эффект: электроны в молекулах, ориентированных вдоль поля, начнут легко колебаться вдоль вытянутых молекул, возникнут и поперечные колебания, но с меньшей амплитудой. Значит, диэлектрическая проницаемость становится тензором, так как появляется анизотропия. Причем в этом случае

$$\mathcal{E}_{\parallel} \sim E_x; \quad \mathcal{E}_{\perp} \sim E_y.$$

Таким образом, показатель преломления для волн разной поляризации будет разным. Заметим, что эффект квадратичен по полю - это связано с видом функции распределения. Чем больше молекул будет ориентировано вдоль поля, тем заметнее будет разница для показателей преломления.

Возникает интересная идея: что если "пронести" волну круговой поляризации? Ведь её можно представить как сумму двух взаимно перпендикулярных колебаний, отличающихся по фазе на $\pi/2$. Действительно, если оптическая разность хода между компонентами составит $k\Delta = \pi/2$, то на выходе свет будет поляризован линейно. Запишем соответствующее выражение для толщины пластинки:

$$k\Delta = \pi/2 \implies \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_{\parallel} - n_{\perp})L = \frac{\pi}{2} \implies L = \frac{\lambda_0}{4(n_{\parallel} - n_{\perp})}.$$

Такие пластинки называются *четвертьволновыми*. Есть также полуволновые пластинки, работающие аналогично. Они используются для поворота поляризации плоско-поляризованного света на 90 градусов.

5.4 Классификация кристаллических сред. Сокращенные уравнения Максвелла для плоских волн в кристалле

Рассмотрим распространение света в анизотропной среде, в которой нет поглощения (\mathcal{E} - вещественная). Как известно, диэлектрическая проницаемость среды в общем случае является тензорной величиной. Поскольку тензор диэлектрической проницаемости симметричный, можно найти такой базис (систему координат), в котором матрица диэлектрической проницаемости примет диагональный вид. Будем работать в таких осях. Они носят название - *оси направления кристаллов*.

$$\mathcal{E}(\omega) \longrightarrow \hat{\mathcal{E}}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_{zz} \end{pmatrix}.$$

При рассмотрении анизотропных сред возможно 3 случая для диэлектрической проницаемости:

1. $\mathcal{E}_{xx} = \mathcal{E}_{yy} = \mathcal{E}_{zz}$ - если все компоненты диэлектрической проницаемости равны, то мы приходим к уже рассмотренному случаю изотропии.

2. $\mathcal{E}_{xx} = \mathcal{E}_{yy} = \mathcal{E}_{\perp}$, $\mathcal{E}_{zz} = \mathcal{E}_{\parallel}$ - случай так называемого *одноосного кристалла*, где \mathcal{E}_{\parallel} - соответствует направлению *оптической оси кристалла*.

Если вектор напряженности плоской волны лежит в плоскости, перпендикулярной направлению оптической оси кристалла ($\vec{E} \perp z$), то в силу равенства $\mathcal{E}_{xx} = \mathcal{E}_{yy} = \mathcal{E}_{\perp}$ получим одинаковые свойства среды во всех направлениях в плоскости Oxy (как в случае изотропии, т.к. $\mathcal{E}_{xx} = \mathcal{E}_{yy}$). Говоря же о направлении вектора \vec{E} , можно сказать, что свет обладает любой поляризацией в силу изотропии в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси кристалла.

3. $\mathcal{E}_{xx} \neq \mathcal{E}_{yy} \neq \mathcal{E}_{zz}$ - если все компоненты диэлектрической проницаемости не равны между собой, то этот случай принято называть *двуосным кристаллом*.

Рассмотрим поочередно 2 и 3 случая. Учтём, что связь напряженности электрического поля и вектора электрической индукции дается следующим соотношением:

$$\vec{D} = \hat{\mathcal{E}}(\omega)\vec{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_{zz} \end{pmatrix} \cdot \vec{E}. \quad (5.6)$$

Из формулы (5.6) следует, что в общем случае вектора \vec{E} и \vec{D} не параллельны.

Запишем систему уравнений Максвелла для плоской монохроматической волны и соотношения о взаимном расположении векторов, которые следуют из системы уравнений:

$$\begin{cases} (\vec{k}, \vec{D}) = 0, \\ (\vec{k}, \vec{B}) = 0, \\ [\vec{k}, \vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{B}, \\ [\vec{k}, \vec{B}] = -\frac{\omega}{c} \vec{D}. \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{k} \perp \vec{D}, \\ \vec{k} \perp \vec{B}, \\ \vec{E} \perp \vec{B}, \\ \vec{B} \perp \vec{D}. \end{cases}$$

Рассмотрим, как в общем случае могут быть направлены векторы, необходимые для описания плоской монохроматической волны. Вектор магнитной индукции \vec{B} направим на нас, а оставшиеся векторы ($\vec{k}, \vec{E}, \vec{D}, \vec{S}$) будут лежать в плоскости рисунка 50. При этом учтем направление вектора Пойтинга $\vec{S} \sim [\vec{E}, \vec{B}]$.

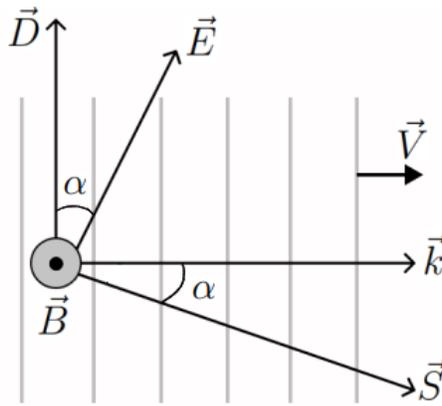


Рис. 50. Направление векторов волны в кристалле

Из рисунка 50 видно, что в общем случае вектор Пойтинга направлен под углом α к волновому вектору. Этот факт имеет большое значение, так как мы получили, что направление, куда бежит волна, в общем случае не совпадает с направлением, куда она излучает энергию. Такой же угол α будет между направлением вектора \vec{D} и вектора \vec{E} . Тогда при учете направления вектора фазовой скорости из геометрических соображений можно найти скорость распространения энергии плоской монохроматической волны (лучевая скорость), которая будет сонаправлена вектору Пойтинга:

$$U_{\text{л}} = \frac{v_{\text{ф}}}{\cos \alpha}.$$

Для дальнейшего рассмотрения распространения света в кристаллических средах нам будет необходима *теорема взаимности*. Сформулируем ее.

Теорема 5.1. Если мы получили уравнение в кристаллооптике, которое содержит величины из 1 набора: $(E, D, B, c, v_\varphi, U_\perp, \mathcal{E}_{ii}, \vec{e}_k, \vec{e}_s)$, то при замене величин из 1 набора на соответствующие величины из 2 набора: $(D, E, B, \frac{1}{c}, \frac{1}{U_\perp}, \frac{1}{v_\varphi}, \frac{1}{\mathcal{E}_{ii}}, \vec{e}_s, \vec{e}_k)$ мы получим верное тождество. А это означает, что в кристаллооптике нам необходимо знать в 2 раза меньше уравнений.

Для доказательства рассмотрим уравнения Максвелла для плоской монохроматической волны, деленные на волновое число:

$$\begin{cases} (\vec{e}_k, \vec{D}) = 0, \\ (\vec{e}_k, \vec{B}) = 0, \\ [\vec{e}_k, \vec{E}] = \frac{v_\Phi}{c} \vec{B}, \\ [\vec{e}_k, \vec{B}] = -\frac{v_\Phi}{c} \vec{D}. \end{cases} \quad (5.7)$$

Возьмем уравнение для ротора \vec{B} и домножим его слева векторно на \vec{e}_s :

$$[\vec{e}_s, [\vec{e}_k, \vec{E}]] = \frac{v_\Phi}{c} [\vec{e}_s, \vec{B}] \implies \vec{e}_k(\vec{e}_s, \vec{E}) - \vec{E}(\vec{e}_s, \vec{e}_k) = \frac{v_\Phi}{c} [\vec{e}_s, \vec{B}].$$

В итоге мы получим:

$$[\vec{e}_s, \vec{B}] = -\frac{c}{v_\Phi} \cos \alpha \cdot \vec{E} = -\frac{c}{U_\perp} \cdot \vec{E}.$$

Выведенное уравнение также может быть получено с помощью соответствующих замен величин из 1 набора величинами из 2 набора в исходном уравнении для ротора \vec{B} .

Аналогичным образом рассматривается уравнение для ротора \vec{E} .

В связи с тем, что распространение света в анизотропных средах полностью описывается уравнениями Максвелла, любое уравнение кристаллооптики может быть переписано с помощью вышеописанной заменой величин. Теорема доказана.

В конце этого параграфа хотелось бы вывести крайне важное соотношение, которое носит название *основного уравнения кристаллооптики*. Для этого нам необходимо будет взять уравнение №3 из системы (5.7) и выразить из него вектор \vec{B} , при этом подставив его в уравнение №4 из той же системы (домноженное на v_Φ/c):

$$[\vec{e}_k, \vec{E}] = \frac{v_\Phi}{c} \vec{B} \implies \vec{B} = \frac{c}{v_\Phi} [\vec{e}_k, \vec{E}] \implies -\frac{v_\Phi^2}{c^2} \vec{D} = [\vec{e}_k, [\vec{e}_k, \vec{E}]] = \vec{e}_k(\vec{e}_k, \vec{E}) - \vec{E}.$$

$$\boxed{-\frac{v_\Phi^2}{c^2} \vec{D} = \vec{e}_k(\vec{e}_k, \vec{E}) - \vec{E}}. \quad (5.8)$$

Выражение (5.8) и есть основное уравнение кристаллооптики.

5.5 Распространение света в одноосных кристаллах

Как уже было сказано ранее, в случае, когда $\vec{k} \parallel z$, где z - оптическая ось кристалла, вектор \vec{E} лежит на окружности, и отклик вещества одинаков для любой поляризации в плоскости Oxy .

Рассмотрим более интересный случай, когда вектор \vec{k} направлен под углом ϑ к оптической оси кристалла, при этом лежит в плоскости Oyz , как показано на рисунке 51.

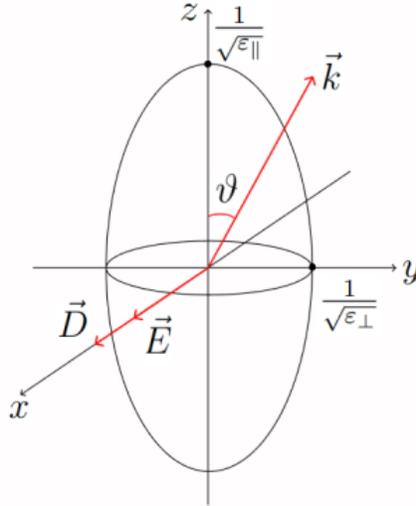


Рис. 51. Направление векторов в одноосном кристалле №1

Здесь и далее удобно будет рассмотреть эллипсоид с полуосями в плоскости Oxy , равными $1/\sqrt{\mathcal{E}_\perp}$, и последней полуосью, равной $1/\sqrt{\mathcal{E}_\parallel}$. Тогда, если $\vec{k} \in Oyz$, то вектор \vec{D} может быть параллелен оси Ox (также он может лежать и в плоскости Oyz , далее будет рассмотрен и этот случай). Что же касается направления вектора \vec{E} ?

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} D_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_\perp & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_\parallel \end{pmatrix} \cdot \vec{E} \implies \vec{E} \parallel \vec{e}_x.$$

Получено, что вектор \vec{E} обязан быть сонаправлен вектору \vec{D} и сонаправлен оси x , т.е. $\vec{D} = \mathcal{E}_\perp \vec{E}$. Соответственно, можно сделать вывод, что

$$\vec{E} \parallel \vec{e}_x \implies \vec{D} = \mathcal{E}_\perp \vec{E} \implies v_\Phi = \frac{c}{\sqrt{\mathcal{E}_\perp}}.$$

Однако, как уже было сказано ранее, рассмотренное решение не является единственным, так как вектор \vec{D} может лежать в плоскости Oyz и быть перпендикулярным вектору \vec{k} . В этом случае вектор \vec{D} будет лежать в плоскости, которая

в свою очередь будет наклонена под углом ϑ к плоскости Oxy , как показано на рисунке 52.

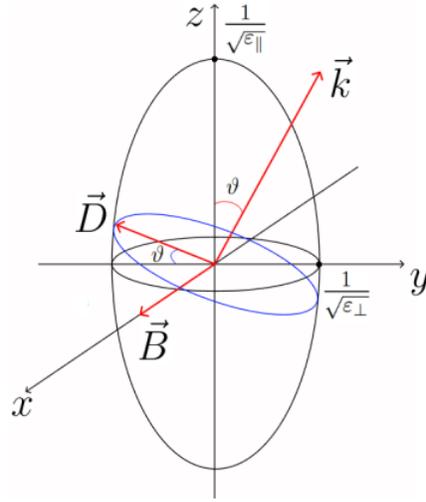


Рис. 52. Направление векторов в одноосном кристалле №2

Теперь аналогичным образом можно рассмотреть направление вектора \vec{E} . Тогда мы получим, что

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} \implies \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ D_y/\epsilon_{\perp} \\ D_z/\epsilon_{\parallel} \end{pmatrix}.$$

Для нахождения фазовой скорости плоской монохроматической волны домножим основное уравнение кристаллооптики (5.8) на $-\vec{D}$:

$$\left(\frac{v_{\Phi}}{c}\right)^2 D^2 = (\vec{E}; \vec{D}) = \left(\frac{D_y^2}{\epsilon_{\perp}} + \frac{D_z^2}{\epsilon_{\parallel}}\right). \quad (5.9)$$

С учетом того, что $D_y = -D \cos \vartheta$ и $D_z = D \sin \vartheta$, получим, что уравнение (5.9) преобразуется к следующему виду:

$$\left(\frac{v_{\Phi}}{c}\right)^2 D^2 = D^2 \left(\frac{\cos^2 \vartheta}{\epsilon_{\perp}} + \frac{\sin^2 \vartheta}{\epsilon_{\parallel}}\right) \implies v_{\Phi} = \pm c \sqrt{\frac{\cos^2 \vartheta}{\epsilon_{\perp}} + \frac{\sin^2 \vartheta}{\epsilon_{\parallel}}}.$$

В итоге получаем, что при заданном направлении вектора \vec{k} , в кристалле могут бежать две волны с линейной поляризацией.



Определение 5.2. *Обыкновенной волной* по определению будем называть волну, которая поляризована по прямой пересечения двух плоскостей: плоскости, перпендикулярной волновому вектору и плоскости, перпендикулярной оптической оси.

Фазовая скорость обыкновенной волны не зависит от угла ϑ и равна

$$v_{\text{ф,об}} = c/\sqrt{\mathcal{E}_{\perp}}. \quad (5.10)$$



Определение 5.3. *Необыкновенной волной* по определению будем называть волну, которая поляризована перпендикулярно по отношению к обыкновенной волне.

Фазовая скорость необыкновенной волны зависит от угла ϑ и равна

$$v_{\text{ф,необ}} = \pm c \sqrt{\frac{\cos^2 \vartheta}{\mathcal{E}_{\perp}} + \frac{\sin^2 \vartheta}{\mathcal{E}_{\parallel}}}. \quad (5.11)$$

Как видно из формул (5.10) и (5.11), в общем случае волны бегут с разными фазовыми скоростями. Только в том случае, когда $\vec{k} \parallel z$ (где z - оптическая ось), тогда $v_{\text{ф,об}} = v_{\text{ф,необ}}$. Тогда волны будут бежать вдоль одного направления, но с взаимно перпендикулярными поляризациями.

Теперь же воспользуемся теоремой взаимности для нахождения лучевой скорости для каждой из лучей

1. Лучевая скорость для обыкновенной волны:

$$\frac{1}{U_{\text{л}}} = \frac{\sqrt{\mathcal{E}_{\perp}}}{c} \implies U_{\text{л}} = \frac{c}{\sqrt{\mathcal{E}_{\perp}}}.$$

2. Лучевая скорость для необыкновенной волны:

$$\frac{1}{U_{\text{л}}} = \frac{1}{c} \sqrt{\cos^2 \vartheta \cdot \mathcal{E}_{\perp} + \sin^2 \vartheta \cdot \mathcal{E}_{\parallel}} \implies U_{\text{л}} = \frac{c}{\sqrt{\cos^2 \vartheta \cdot \mathcal{E}_{\perp} + \sin^2 \vartheta \cdot \mathcal{E}_{\parallel}}}.$$

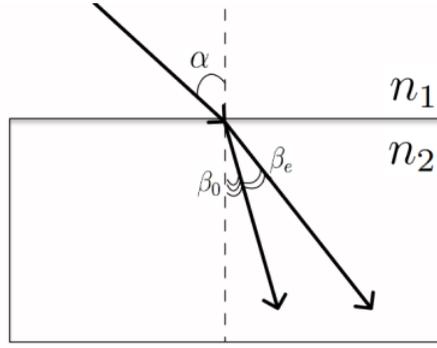


Рис. 53. Двулучепреломление на границе раздела двух сред

В соответствии с *принципом Гюйгенса-Френеля* (этот вопрос будет рассмотрен в параграфе 6.1) видно, что при падении волны на кристалл обыкновенная и необыкновенная волна распространяются в разных направлениях.

В частности, если на кристалл падает пучок неполяризованного света, то тот расщепляется на 2. Это так называемый *эффект двулучепреломления*. Именно на основе эффекта двулучепреломления работают многие поляризационные приборы, такие как призма Глана, призма Волластона, и др.

5.6 Распространение света в двуосных кристаллах

Для случая двуосного кристалла ($\epsilon_{xx} \neq \epsilon_{yy} \neq \epsilon_{zz}$) также нарисуем эллипсоид с полуосями, пропорциональными обратным корням диэлектрических проницаемостей (рисунок 54). В отличие от одноосного кристалла, теперь в плоскости Oxy лежит не окружность, а эллипс. Поэтому для нахождения плоскости, к которой перпендикулярен вектор \vec{k} необходимо вспомнить математическую теорему о том, что для эллипсоида всегда найдется две секущие плоскости, такие что их пересечения с эллипсоидом будут окружностями. Эти два сечения будут ответственны за случай, когда волна может обладать любой поляризацией.

Полученный результат распространяется также на одноосные кристаллы, но в этом случае две этих плоскости сходятся в одну.

Для нахождения фазовых скоростей волн в двуосных кристаллах воспользуемся основным уравнением кристаллооптики. Домножим его скалярно на орт кристаллической системы координат (в системе координат, где $\hat{\epsilon}$ - диагональная):

$$\frac{v_{\Phi}^2}{c^2} \vec{D} = -\vec{e}_k (\vec{e}_k, \vec{E}) + \vec{E} \cdot \vec{e}_{\xi} \implies \frac{v_{\Phi}^2}{c^2} D_{\xi} - E_{\xi} = -(\vec{e}_{\xi}, \vec{e}_k) \cdot (\vec{e}_k, \vec{E}).$$

Вспомним, что $E_\xi = D_\xi / \mathcal{E}_{\xi\xi}$. Тогда для ξ составляющей вектора \vec{D} получим выражение:

$$D_\xi = -\frac{(\vec{e}_\xi, \vec{e}_k) \cdot (\vec{e}_k, \vec{E})}{\frac{v_\Phi^2}{c^2} - \frac{1}{\mathcal{E}_{\xi\xi}}}. \quad (5.12)$$

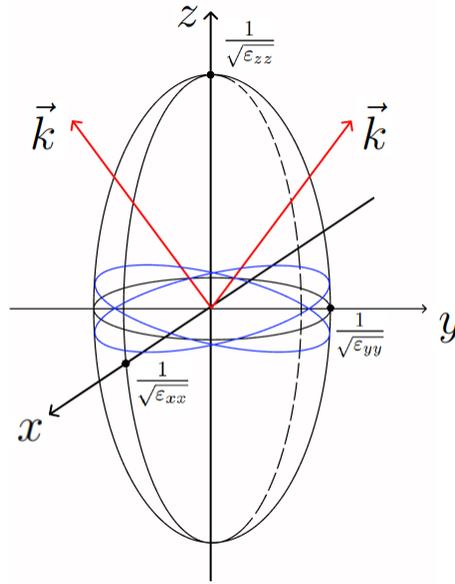


Рис. 54. Направление векторов в двуосном кристалле

Ввиду того, что вектора \vec{k} и \vec{D} ортогональны друг другу, можно записать следующее тождество (с учетом формулы (5.12)):

$$(\vec{e}_k, \vec{D}) = \sum_{\xi} D_{\xi} (\vec{e}_{\xi}, \vec{e}_k) = - \left(\sum_{\xi} (\vec{e}_{\xi}, \vec{e}_k)^2 \left(\frac{v_{\Phi}^2}{c^2} - \frac{1}{\mathcal{E}_{\xi\xi}} \right)^{-1} \right) \cdot (\vec{e}_k, \vec{E}) = 0. \quad (5.13)$$

Так как в общем случае вектора \vec{E} и \vec{k} неортогональны, то их скалярное произведение не равно нулю, а значит, равно нулю первое слагаемое в произведении (5.13). Перепишем тождество (5.13) с учетом того, что скалярное произведение ортов кристаллических осей на вектор \vec{k} есть направляющие косинусы. Тогда получим:

$$\sum_{\xi=x,y,z} \cos^2 \alpha_{\xi} \cdot \frac{1}{\frac{v_{\Phi}^2}{c^2} - \frac{1}{\mathcal{E}_{\xi\xi}}} = 0. \quad (5.14)$$

Для получения биквадратного уравнения относительно фазовой скорости необходимо домножить тождество на произведение нескольких величин.



Физический закон 5.1. Закон Френеля

Для двуосного кристалла с диагональными компонентами тензора диэлектрической проницаемости $\epsilon_{xx} \neq \epsilon_{yy} \neq \epsilon_{zz}$ справедливо следующее тождество, которое носит название закон Френеля:

$$\boxed{Av_{\Phi}^4 + Bv_{\Phi}^2 + C = 0}, \quad (5.15)$$

где A , B и C - константы, зависящие от кристалла.

Получим уравнение (5.14), домножив уравнение (5.14) на ряд величин:

$$\begin{aligned} \sum_{\xi=x,y,z} \cos^2 \alpha_{\xi} \cdot \frac{1}{\frac{v_{\Phi}^2}{c^2} - \frac{1}{\epsilon_{\xi\xi}}} = 0 \quad & \left| \cdot \left(\frac{v_{\Phi}^2}{c^2} - \frac{1}{\epsilon_{xx}} \right) \cdot \left(\frac{v_{\Phi}^2}{c^2} - \frac{1}{\epsilon_{yy}} \right) \cdot \left(\frac{v_{\Phi}^2}{c^2} - \frac{1}{\epsilon_{zz}} \right) \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos^2 \alpha_x \cdot \left(\frac{v_{\Phi}^2}{c^2} - \frac{1}{\epsilon_{yy}} \right) \cdot \left(\frac{v_{\Phi}^2}{c^2} - \frac{1}{\epsilon_{zz}} \right) + \cos^2 \alpha_y \cdot \left(\frac{v_{\Phi}^2}{c^2} - \frac{1}{\epsilon_{xx}} \right) \cdot \left(\frac{v_{\Phi}^2}{c^2} - \frac{1}{\epsilon_{zz}} \right) + \\ & \left. + \cos^2 \alpha_z \cdot \left(\frac{v_{\Phi}^2}{c^2} - \frac{1}{\epsilon_{xx}} \right) \cdot \left(\frac{v_{\Phi}^2}{c^2} - \frac{1}{\epsilon_{yy}} \right) = 0. \quad (5.16) \end{aligned}$$

Тогда, если углы α_{ξ} заданы, то уравнение (5.16) сводится к виду (5.15).

Таким образом, было получено биквадратное уравнение (5.15) относительно фазовой скорости плоской монохроматической волны в двуосном кристалле. Также, как было сказано в начале параграфа, получены два разрешенных значения для скорости волны - два направления, распространяясь вдоль которых, плоская волна сохраняет свою поляризацию.

Контрольные вопросы

1. Как связаны законы сохранения в физике с преобразованиями симметрии?
2. В чём заключается эффект Фарадея?
3. Для чего используются оптические изоляторы?
4. Из каких соображений выводится основное уравнение кристаллооптики?
5. Что такое одноосный кристалл?
6. В чем отличие обыкновенной волны от необыкновенной?
7. Что такое двуосный кристалл?

6 ДИФРАКЦИЯ

6.1 Постановка задачи на расчет дифракции

При рассмотрении вопросов распространения света в различных средах рассматривались бесконечные пространства или же полупространства, однако большинство оптических объектов ограничено в пространстве в некоторой области.

Пусть в пространстве задано плоское монохроматическое поле \vec{E}_0 . Тогда при внесении в это пространство оптического объекта с заданным распределением показателя преломления электромагнитное поле изменится. Задача состоит в том, чтобы посчитать суммарное электромагнитное поле \vec{E}_Σ после внесения этого объекта

$$\vec{E}_0 \longrightarrow \vec{E}_\Sigma = \vec{E}_0 + \vec{E}' ,$$

где \vec{E}' - поле, генерируемое телом с заданным распределением показателя преломления.

Эту задачу можно решать методом *последовательных приближений*, однако такой метод довольно трудоемок, поэтому стоит воспользоваться другим решением. Такое решение есть, но полученный ответ будет носить приближенный характер.

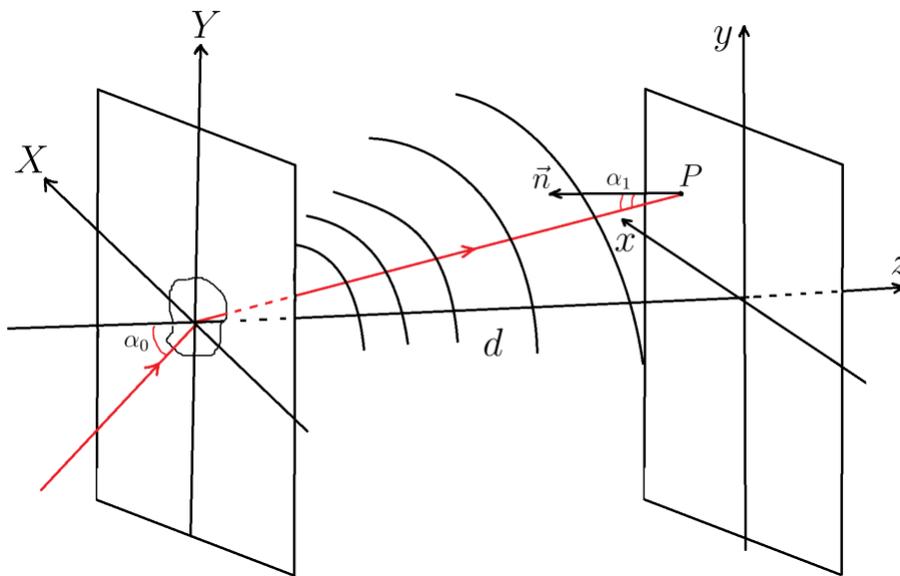


Рис. 55. Дифракция света на произвольном отверстии

Рассмотрим прохождение света через плоский экран, текущие координаты которого будут обозначаться большими буквами X и Y , как показано на рисунке

55. Пусть у этого экрана, на котором происходит дифракция, задана функция пропускания $t(X,Y)$, где $t(X,Y) = 0$, если пропускания нет и $t(X,Y) = 1$, если экран отсутствует, то есть свет полностью проходит. Также функция пропускания удовлетворяет условию:

$$E_0(X,Y, z = +0) = t(X,Y) \cdot E_0(X,Y, z = -0),$$

где $E_0(X,Y, z = +0)$ и $E_0(X,Y, z = -0)$ - комплексные амплитуды электрического поля, соответственно, сразу после и перед первым экраном.

Дифракционная картина наблюдается на другом экране, текущие координаты точек которого задаются малыми буквами x и y . Ось z направлена перпендикулярно плоскостям обоих экранов, причем значение $z = 0$ положено в точке нахождения первого экрана. Координата по z второго экрана задается значением d . Углы с нормалью, под которыми падают плоские монохроматические волны на первый и второй экран, будем обозначать α_0 и α_1 соответственно.

Для упрощения рассмотрения отметим, что в дальнейшем поляризации волн не будет рассматриваться, что ведет к потере многих эффектов, связанных с поляризацией волны.

Метод решения задачи по нахождению электрического поля на точке второго экрана был предложен Гюйгенсом в 1678 году. Согласно предложенному принципу (т.е. необоснованному утверждению) каждую точку, до которой дошли колебания, можно рассматривать как центр вторичного возмущения, порождающего вторичные сферические волны, а результирующее световое поле в каждой точке наблюдения $P = P(x,y,d)$ определяется суммой таких волн:

$$E(P) \sim \iint_S \frac{e^{ikr}}{r} E_0(X,Y) \cdot t(X,Y) \cdot (\cos \alpha_0 + \cos \alpha_1) dXdY. \quad (6.1)$$

При этом \vec{r} - это вектор, направленный из текущей открытой точки экрана в точку наблюдения дифракции. Множитель $(\cos \alpha_0 + \cos \alpha_1)$ в выражении (6.1) добавил Френель, однако конкретизировал его Кирхгоф.

Важно отметить, что *принцип Гюйгенса-Френеля-Кирхгофа* можно понимать по-другому: вместо виртуальных вторичных волн от открытых точек экрана (ведь в реальности никаких вторичных волн от открытых точек не существует, ведь вакуум не может излучать никаких волн) можно рассмотреть сложения волн исходного освещающего поля и реальных вторичных волн, генерируемых не открытыми точками экрана, а его закрытыми точками, т.е. атомами среды. В результате такая сумма, возведенная по модулю в квадрат, оказывается совпадающей с тем, что дает предложенный когда-то Гюйгенсом и Френелем принцип.

Прежде, чем приступать к решению задач, необходимо все-таки обсудить, откуда берется принцип Гюйгенса-Френеля и как его можно обосновать, исходя из волновой теории света.

6.2 Интеграл Кирхгофа

Пусть $\varphi(\vec{r})$ и $\psi(\vec{r})$ - решения задачи о дифракции на произвольном отверстии. При этом обе функции сколько нужно раз дифференцируемы в рассматриваемом пространстве. Тогда оба этих решения удовлетворяют уравнению Гельмгольца:

$$\begin{cases} \Delta\varphi + k^2\varphi = 0, \\ \Delta\psi + k^2\psi = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Исключив из системы уравнений (6.2) волновое число k , получим:

$$\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi = (\nabla, (\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi)) = 0.$$

Проинтегрируем полученное выражение по объему. Тогда по *теореме Гаусса-Остроградского* мы получим интеграл по поверхности, ограничивающей рассматриваемую область, где функции φ и ψ вместе с их производными не имеют особенностей:

$$0 = \iiint_V (\nabla, (\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi)) dV = \oint_{\Gamma_2} ((\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi), d\vec{S}). \quad (6.3)$$

В выражении (6.3) направление вектора \vec{S} выбирается по нормали внутрь поверхности (несмотря на то, что в предыдущих разделах направление вектора \vec{S} было противоположное, больших изменений это не принесет).

Теперь конкретизируем вид каждой из функций. В качестве одной из функций используется координатная зависимость реального электромагнитного поля. Для второй удобно взять выражение для координатной зависимости сферической волны, расходящейся из точки P , расположенной внутри рассматриваемой области на 2 экране:

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r}) = E(\vec{r}), \\ \psi(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{r}. \end{cases}$$

Однако такой выбор функций нарушает одно из условий, так как в точке $r = 0$ функции, а следовательно, и ее производных не существует. Для решения этой проблемы воспользуемся так называемым выкалыванием точки: окружим точку P сферой радиусом r и устремим этот радиус к нулю и проинтегрируем по

поверхности сферы. Тогда мы получим сумму интегралов по поверхности Γ_2 без точки P и по сфере, содержащую данную точку:

$$0 = \oint_{\Gamma_2} \left(\left(E \cdot \nabla \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \nabla E \right), d\vec{S} \right) + \oint_{S_{r \rightarrow 0}} \left(\left(E \cdot \nabla \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \nabla E \right), d\vec{S} \right). \quad (6.4)$$

Теперь воспользуемся связью производной по направлению и градиентом функции:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \nabla f \cdot \vec{l}.$$

Тогда в каждом из слагаемых в выражении (6.4) мы можем перейти к производной по нормали:

$$0 = \oint_{\Gamma_2} \left(\left(E \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial E}{\partial n} \right) \cdot dS \right) + \oint_{S_{\rho \rightarrow 0}} \left(\left(E \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik\rho}}{\rho} - \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \cdot \frac{\partial E}{\partial n} \right) \cdot dS \right).$$

Так как в интеграле по поверхности, окружающей точку P , мы используем сферу, то производную по нормали заменим производной по радиус-вектору, а дифференциал площади раскроем как произведение квадрата расстояния на дифференциал телесного угла $d\Omega$:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_2} \left(E \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial E}{\partial n} \right) \cdot dS &= - \oint_{S_{\rho \rightarrow 0}} \left(E \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{e^{ik\rho}}{\rho} - \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \cdot \frac{\partial E}{\partial \rho} \right) \cdot \rho^2 d\Omega = \\ &= - \oint_{S_{\rho \rightarrow 0}} \left(E \cdot ik \frac{e^{ik\rho}}{\rho} - E \frac{e^{ik\rho}}{\rho^2} - \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \cdot \frac{\partial E}{\partial \rho} \right) \cdot \rho^2 d\Omega = \\ &= - \oint_{S_{\rho \rightarrow 0}} \left(E \cdot ik\rho \cdot e^{ik\rho} - E e^{ik\rho} - \rho e^{ik\rho} \frac{\partial E}{\partial \rho} \right) d\Omega = \\ &= |\rho \rightarrow 0| = E(P) \oint_S d\Omega = 4\pi E(P). \end{aligned} \quad (6.5)$$

В выражении (6.5) мы воспользовались тем, что при стремлении радиуса сферы к нулю получаем $E \rightarrow E(P) = \text{const}$, $\exp(ikr) \rightarrow 1$.

Тогда, выразив $E(P)$, мы получим формулу, называемую *интегралом Кирхгофа*:

$$E(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \left(E \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial E}{\partial n} \right) \cdot dS.$$

Полученный интеграл вычисляется с помощью любой поверхности, окружающей точку P . Для удобства выберем поверхность Γ_2 в виде полусферы с бесконечным радиусом и основанием на 1 экране. Задача по нахождению исходного интеграла сведется к расчету трех интегралов по открытым точкам экрана - S_+ , по закрытым точкам экрана - S_- и по полусфере с бесконечным радиусом - $\frac{1}{2}S_{R \rightarrow \infty}$:

$$E(P) = \frac{1}{4\pi} \left(\int_{S_+} + \int_{S_-} + \int_{\frac{1}{2}S_{R \rightarrow \infty}} \right) \left(E \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial E}{\partial n} \right) \cdot dS.$$

Теперь необходимо ввести ряд приближений, которые приведут нас к ответу более коротким путем. Так, интеграл по поверхности закрытых точек экрана равен 0, т.е. поля сразу же после экрана нет. Далее в интеграле по открытым точкам экрана будем брать поле, которое было до экрана (это не так, потому что в этих точках существует также поле, генерируемое частицами экрана, однако этим пренебрежём). И самое неочевидное приближение состоит в том, что интеграл по полубесконечной сфере нужно взять равным 0. Эту нетривиальную математическую теорему оставим без доказательства, однако отошлем читателя к книге "Основы оптики" Борна и Вольфа.

Осталось только договориться о вычислении производной по нормали к поверхности открытых точек экрана. Направление нормали совпадает с направлением оси z , поэтому

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial r}, \text{ где } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \implies \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{z}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} = -\cos \alpha_1 \cdot \frac{\partial}{\partial r}.$$

Тогда выражение для поля точке P примет вид

$$E(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_+} dS_+ (-E_0(X,Y) \cdot \cos \alpha_1 \left(ik \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} ik \cdot \cos \alpha_0 \cdot E_0(X,Y)) \cdot t. \quad (6.6)$$

В выражении (6.6) слагаемое с r^2 в знаменателе много меньше, чем слагаемое с r в знаменателе, поэтому можно этим слагаемым пренебречь.

В итоге мы получим:

$$E(P) \approx -\frac{ik}{4\pi} \iint_{S_+} dXdY (\cos \alpha_0 + \cos \alpha_1) \cdot E_0(X,Y) \cdot t(X,Y) \cdot \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (6.7)$$

Итак, был получен интеграл Кирхгофа (6.7), совпадающий с тем интегралом, который был представлен в прошлом параграфе.

6.3 Дифракция на круглом отверстии. Зоны Френеля

Рассмотрим дифракцию света на круглом отверстии в приближении Гюйгенса-Френеля. Такая задача имеет большое практическое применение, так как большинство объективов и линз в оптике имеют форму окружности.

Пусть свет падает нормально на экран с отверстием. Найдем значение интенсивности света на оси круглого отверстия на расстоянии d от него (начало координат поместим в центр окружности). Тогда поле в точке P на втором экране согласно интегралу Кирхгофа равно

$$E(P) = -\frac{ik}{4\pi} E_0 \int_0^{\mathcal{R}} 2\pi R dR (1 + \cos \alpha_1(R)) \frac{e^{ikr}}{r}.$$

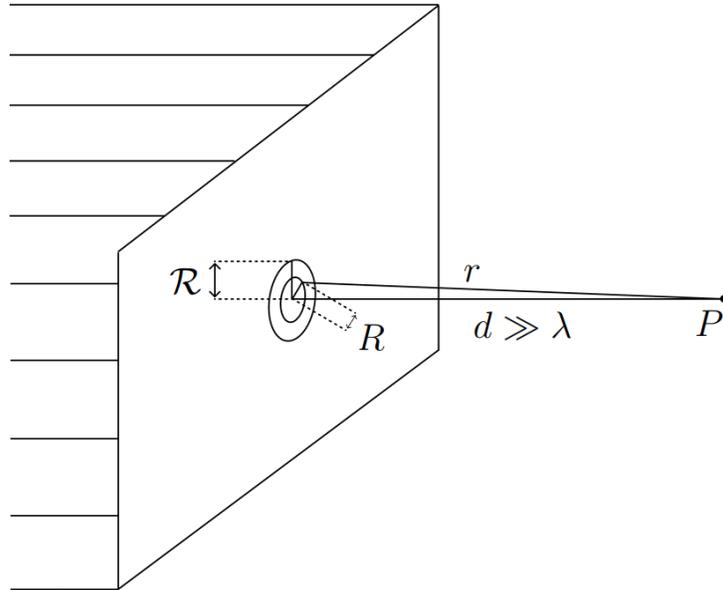


Рис. 56. Дифракция на круглом отверстии

Согласно введенным на рисунке 56 обозначениям воспользуемся теоремой Пифагора, чтобы в дальнейшем изменить переменную интегрирования:

$$r^2 = d^2 + R^2 \implies 2rdr = 2RdR. \quad (6.8)$$

Прежде, чем вычислять поле в точке P , введем полезное понятие *разности хода* ρ (насколько r отличается от d). В нашем приближении разность хода может быть вычислена следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho = r - d &= \sqrt{d^2 + R^2} - d = |d \gg R| = \\ &= d \left(1 + \frac{R^2}{d^2} \right)^{\frac{1}{2}} - d \approx \frac{R^2}{2d}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Из формул (6.8) и (6.9) следует, что поле в точке P выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} E(P) &= -\frac{ik}{2} E_0 \int_d^{\sqrt{d^2 + R^2}} e^{ikr} (1 + \cos \alpha_1) dr = \\ &= -\frac{ik}{2} E_0 e^{ikd} \int_0^{\sqrt{d^2 + R^2} - d} e^{ik\rho} (1 + \cos \alpha_1) d\rho. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Представленный интеграл не может быть вычислен аналитически. Для оценки величины интеграла (6.10) разобьем промежуток интегрирования на отрезки, соответствующие изменению разности хода на половину длины волны. На каждом из таких отрезков знак подынтегрального выражения, который определяется быстро осциллирующей экспонентой, остается постоянным:

$$e^{i\rho} = \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \rho \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \rho \right).$$

При таком разбиении функцию $(1 + \cos \alpha_1(\rho))$ как медленно меняющуюся можно вынести за знак интегрирования. Тогда электрическое поле $E(P)$ примерно равно

$$E(P) \approx -\frac{ik}{2} E_0 \sum_{m=0}^M (1 + \cos \alpha_m) \int_{m\lambda/2}^{(m+1)\lambda/2} e^{ik\rho} d\rho - \frac{ik}{2} E_0 \int_{M\lambda/2}^{\sqrt{d^2 + R^2} - d} e^{ik\rho} (1 + \cos \alpha_M) d\rho. \quad (6.11)$$

Второе слагаемое в выражении (6.11) мы обозначим за δI . Это слагаемое появляется из-за того, что в общем случае не всегда можно разбить окружность

на конечное число колец определенного радиуса.

$$\begin{aligned}
 E(P) &= -\frac{ik}{2} E_0 \sum_{m=0}^M (1 + \cos \alpha_m) \cdot \frac{e^{ik(m+1)\frac{\lambda}{2}} - e^{ikm\frac{\lambda}{2}}}{ik} + \delta I = \\
 &= -\frac{E_0}{2} \sum_{m=0}^M (1 + \cos \alpha_m) e^{ikm\frac{\lambda}{2}} (e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2}} - 1) + \delta I = E_0 \sum_{m=0}^M (1 + \cos \alpha_m) (-1)^m + \delta I. \quad (6.12)
 \end{aligned}$$

Описанное разбиение промежутка интегрирования эквивалентно разделению открытой области экрана на так называемые *зоны Френеля*.

 **Определение 6.1.** *Зонами Френеля называют небольшие области, от противоположных границ которых излучение приходит в точку наблюдения сдвинутым по фазе на $\pi/2$.*

С помощью формулы (6.9) найдем радиусы зон Френеля:

$$\rho = \frac{\lambda}{2} m = \frac{1}{2} \frac{R_m^2}{d} \implies R_m = \sqrt{m\lambda d}. \quad (6.13)$$

Можно заметить, что площади зон Френеля оказываются равными друг другу:

$$S_m = \pi R_{m+1}^2 - \pi R_m^2 = \pi \lambda d = \text{const}.$$

Значит, в каждой зоне Френеля равное количество одинаковых вторичных источников.

Вернемся к рассмотрению поля. Видно, что из-за наличия в выражении (6.12) множителя $(1 + \cos \alpha_m)$, соседние зоны Френеля не гасят друг друга. Отметим, что малый угол α_m по мере отдаления от центра окружности возрастает, а значит возрастает и $(1 + \cos \alpha_m)$.

Если открыта только 1 зона Френеля (рассматриваемое отверстие полностью совпадает по размерам с 1 зоной Френеля), то интенсивность излучения оказывается в 4 раза больше, чем интенсивность, которая регистрировалась бы в случае полностью открытого экрана. Важно, что здесь нет нарушения закона сохранения энергии, поскольку интенсивность света вычисляется лишь в выделенной точке пространства.

Если были бы открыты 2 зоны Френеля, то их поля почти погасили друг друга, так как без учета нашего множителя они отличаются только знаком. Но это не так, поэтому при открытии двух зон Френеля суммарная интенсивность будет отлична от нуля. Такие рассуждения можно применять и дальше, открывая при это соответствующие зоны. Тогда будем получать чередование экстремумов.

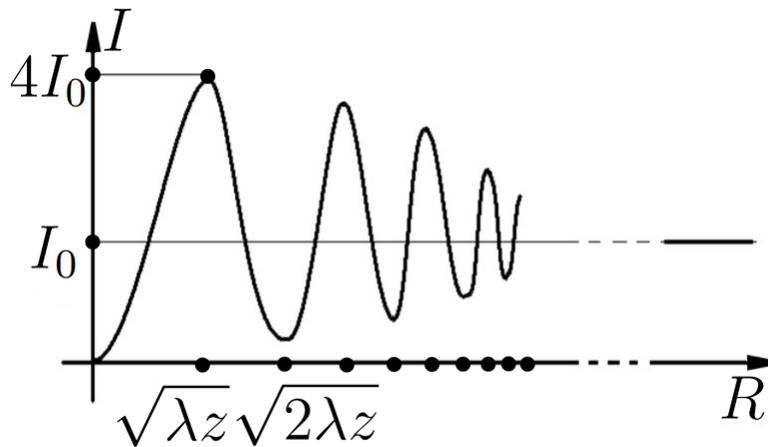


Рис. 57. График зависимости интенсивности света от радиуса зон Френеля

Как видно из рисунка 57, при стремлении радиуса отверстия к бесконечности интенсивность света стремится к I_0 , что полностью соответствует постановки задачи.

Если же нас интересует интенсивность света при промежуточных значениях радиуса зон Френеля, можно поступить следующим образом. Каждую зону Френеля можно разбить на большое число подзон, площади каждой из которых будут одинаковыми. Каждая из таких подзон будет давать вклад в комплексную амплитуду в виде комплексного числа, примерно одинакового по модулю, но с разными фазами.

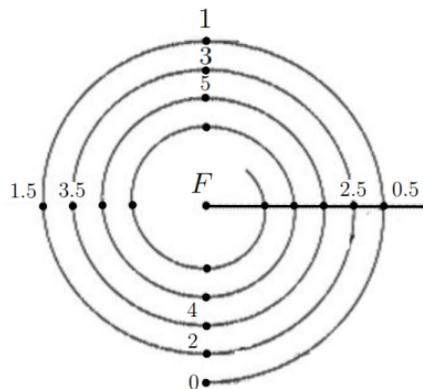


Рис. 58. Спираль Френеля

Если нарисовать эти вклады на комплексной плоскости, получим набор стрелок практически одинаковой длины, каждая из которых будет поворачивать на угол, зависящий от числа разбиений зон Френеля на подзоны. Так, например, если открыта половина нулевой зоны Френеля ($m = 0$), поле равно $\sqrt{2}E_0$. При открытии всех зон возникает некоторая непрерывная скручивающаяся спираль, каждый оборот которой соответствует открытию двух соседних зон Френеля (рисунок 58).

При закрытии нулевой зоны Френеля начало вектора \vec{E} будет в верхней точке ($m = 1$). Для закрытия большего числа зон аналогично.

Рассмотрим еще один интересный эффект, который носит название *пятно Пуассона*. Если представить, что никакого отверстия в экране нет, как и самого экрана, но на пути освещающего светового пучка будет расположен непрозрачный диск, то на оси диска появится яркое пятно света. Этот эффект можно объяснить тем, что рассмотрение непрозрачного диска на пути светового пучка эквивалентно закрытию несколько зон Френеля, и, если их количество нечетное, то будем получать интенсивность света, примерно равную $4I_0$.

6.4 Зонные пластинки и голографические линзы

Прежде чем разобраться в схеме работы оптической тонкой линзы, рассмотрим следующую систему: экран с отверстием, на котором закрыты все четные или нечетные зоны Френеля. Такое перекрытие должно устранить эффект гашения полей от соседних зон и привести к существенному усилению света в точке наблюдения на оси отверстия. Эта система называется *зонной пластинкой Френеля*, и ввиду того, что соседние зоны не гасят друг друга, свет параллельного пучка фокусируется в точке. То же самое наблюдается при работе с тонкой линзой.



Определение 6.2. *Зонной пластинкой Френеля* называют экран с отверстием, на котором закрыты все четные или нечетные зоны Френеля.

На самом деле у зонной пластинки и тонкой линзы намного больше общего, чем кажется на первый взгляд. Так, например, если перед зонной пластинкой поставить точечный источник света, то после пластинки свет, также как и в случае линзы (при условии, что источник находится не ближе первого фокусного расстояния к пластинке), будет фокусироваться в точку. Попробуем в этом убедиться.

Пусть от точечного источника света S_0 распространяется сферическая волна. Тогда на первом экране поле будет равно

$$E_0(X, Y) = \text{const} \cdot \frac{e^{ikr_0}}{r_0}.$$

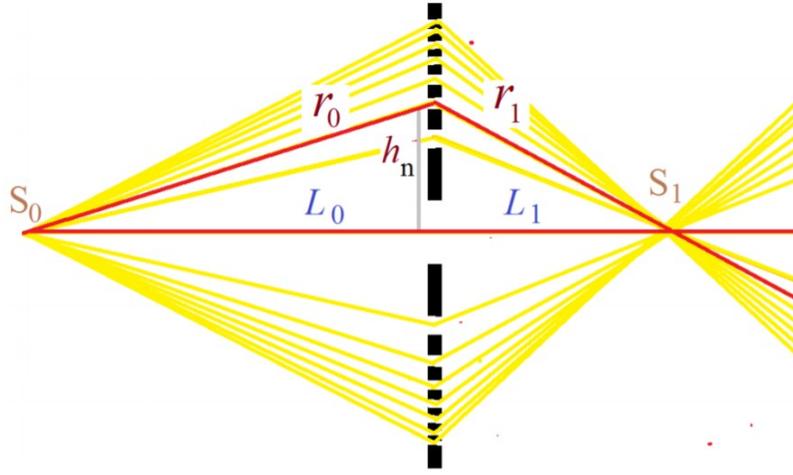


Рис. 59. Прохождение света от точечного источника через зонную пластинку

На открытых кольцах зонной пластинки Френеля возникают вторичные источники сферических волн, которые распространяются во всех направлениях и том числе проходят через точку наблюдения S_1 , набирая при этом дополнительный сдвиг фазы, определяемый расстоянием r_1 . В результате поле в точке наблюдения будет задаваться интегралом по открытым точкам зонной пластинки Френеля:

$$E(P) = \text{const} \int_{S_+} \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \cdot \frac{e^{ikr_1}}{r_1} (\cos \alpha_0 + \cos \alpha_1) dS_+.$$

Вклады в суммарное поле в точке наблюдения будут усиливать друг друга в том случае, если приходящие в них сферические волны будут в фазе друг с другом (т.е. разность оптических путей от соседних открытых зон будет равна целому числу длин волн):

$$\begin{aligned} (r_0 + r_1) - (L_0 + L_1) &= \left(\sqrt{L_0^2 + h_m^2} + \sqrt{L_1^2 + h_m^2} \right) - (L_0 + L_1) \approx \\ &\approx \frac{h_m^2}{2L_0} + \frac{h_m^2}{2L_1} = n\lambda, \quad n \in \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Здесь учитывается, что расстояния L_0 и L_1 много больше, чем радиусы колец h_m на первом экране.

В случае точечного источника радиусы зон Френеля также пропорционален корню из порядкового номера зоны, как в формуле (6.13). Теперь преобразуем выражение (6.14):

$$n\lambda = \frac{h_m^2}{2} \left(\frac{1}{L_0} + \frac{1}{L_1} \right) = C \cdot \frac{m}{2} \left(\frac{1}{L_0} + \frac{1}{L_1} \right).$$

В итоге получим соотношение, которое в геометрической оптике носит название *формулы тонкой линзы*:

$$\frac{1}{L_0} + \frac{1}{L_1} = \frac{1}{F}, \text{ где } F = \frac{C}{2\lambda n} m.$$

Здесь F - фокусное расстояние зонной пластинки. Из полученной выше формулы видно, что фокусных расстояний теперь бесконечно много, и они зависят от длины волны излучения.

Улучшим нашу систему: падающее на закрытые зоны излучение теряется, вместо этого можно изменить фазу излучения, проходящего через ранее закрытые зоны Френеля на 180° . Тогда излучение от каждой ранее закрытой зоны придет в точку P в фазе с излучением от открытых зон. Сделать это можно, если распределить показатель преломления так ловко, чтобы при прохождении света через соседние зоны свет обращал свою фазу на π .

Самой простой способ решения поставленной проблемы - это заменить зонную пластинку с зачерненными зонами Френеля на абсолютно прозрачный диск. Но на том месте, где были закрытые зоны Френеля, нужно сделать углубления, величины которых необходимо подобрать так, чтобы проходящий через них свет менял свою фазу на π относительно фазы света, проходящего через соседнюю зону. Сегодня именно таким способом делают линзы больших размеров, используемых во многих оптических устройствах.

Аналогичным образом, соседние зоны Френеля можно делать не в виде углубленных канавок, а в виде канавок, выступающих над поверхностью стекла. Так, нулевая зона Френеля больше всего выступает над поверхностью стекла, следующая меньше, так чтобы разность фаз равнялась π , следующая еще меньше и так далее. В результате вместо диска с канавками получается тело, с одной стороны плоское, а с другой - выпуклое. Это и есть *собирающая линза*.

На самом деле, нет никакого преломления света на границе стекло-воздух. Свет двигается по траектории в соответствии с *принципом Ферма*. Подробнее читателя просим ознакомиться с этим вопросом в сборнике лекций Ричарда Фейнмана в главе под названием "Оптика. Принцип наименьшего времени".

6.5 Дифракция на прямом крае непрозрачного экрана

Рассмотрим поглощающий экран с прямолинейным краем, освещаемый излучением, нормально падающим на его поверхность. Пусть экран наблюдения расположен параллельно поглощающему экрану на расстоянии h от него. В рамках представлений геометрической оптики под непрозрачным экраном должна возникать полная тень, а на открытых участках освещенность должна быть постоянной

и равной той освещенности, которая создавалась бы освещающим пучком в случае отсутствия такого экрана. В реальности же дело обстоит не совсем так.

При решении двумерных задач (сам же волновой фронт одномерный ввиду его плоскости) удобнее разбивать волновой фронт не на сегменты (зоны Френеля), а на определенные полосы - *зоны Шустера*.

 **Определение 6.3. Зоны Шустера** - полосы, имеющие разность хода, равную половине длине волны между соседними полосами.

При таком разбиении поле, излучаемое вторичными источниками, приходит в противофазе от точек, которые соответствуют границам полос.

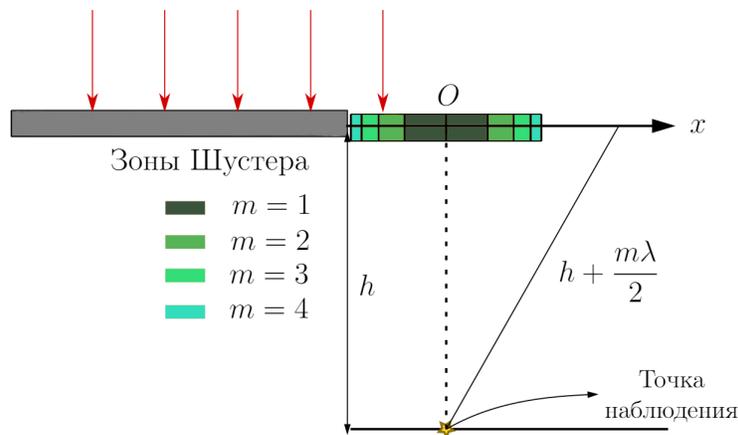


Рис. 60. Положение зон Шустера относительно точки наблюдения

Определим положение этих зон относительно точки наблюдения:

$$\frac{m\lambda}{2} = \sqrt{X_m^2 + h^2} - h \approx \frac{X_m^2}{2h} \implies X_m = \sqrt{m\lambda h}.$$

Обратим внимание, что значения m для зон Шустера могут принимать отрицательные значения в отличие от зон Френеля. Разбивая зоны Шустера на подзоны, получим векторную диаграмму - *спираль Корню*, показанную на рисунке 61.

В отличие от спирали Френеля, спираль Корню скручивается гораздо быстрее: это связано с тем, что площадь зон Шустера зависит от m в отличие от зон Френеля.

Упрощая интеграл Френеля, можно получить выражение для поля в точке наблюдения:

$$E(P) \sim \int_S \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2h}\right) dx dy. \quad (6.15)$$

Выражение (6.15) включает в себя множество упрощений, но все еще позволяет получить качественное представление о распределении относительной интенсивности в дифракционной картине, а также получить спираль Корню.

Так как задача одномерная, можно произвести интегрирование по y , в результате появится постоянный множитель, который мы опустим ввиду качественного характера описания.

Рассмотрим оставшийся интеграл:

$$E(P) \sim \int_0^s \exp\left(i\pi \frac{s^2}{2}\right) ds, \quad \text{где } \pi s^2 = \frac{kx^2}{h}.$$

Теперь можно изобразить векторную диаграмму в комплексной плоскости:

$$X(s) = \int_0^s \cos \frac{\pi s^2}{2} ds; \quad Y(s) = \int_0^s \sin \frac{\pi s^2}{2} ds. \quad (6.16)$$

Интегралы (6.16) описывают вещественную и комплексную часть поля и называются *интегралами Френеля*. Изобразим спираль Корню - именно её задают интегралы Френеля, параметризованные через s .

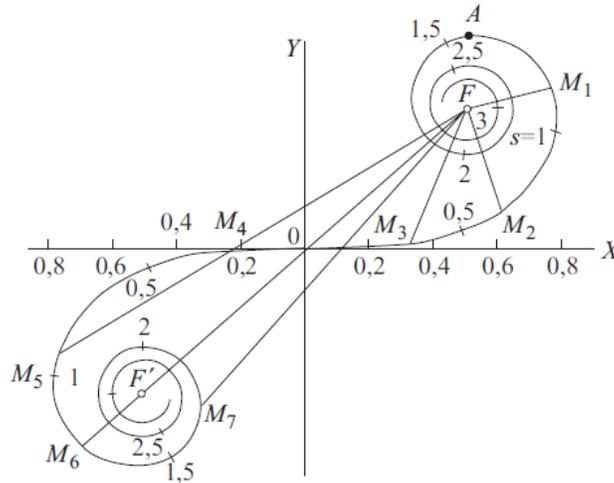


Рис. 61. Спираль Корню

Спираль Корню представляет собой две ветви, которые закручиваются вокруг фокусов F и F' , нижняя ветвь отвечает левой половине волнового фронта, верхняя - правой. Принято отсчитывать результирующее колебания поля от нижней ветви к верхней. Результирующее поле в отсутствие препятствий характеризуется вектором \vec{FF}' , а при наличии экрана - вектором \vec{OF}' . Из рисунка 61 видно, что при наличии экрана поле в два раза меньше по модулю (нижняя ветвь спирали отсекается), тогда интенсивность света в точке на границе "свет-тень" будет меньше интенсивности падающей волны в 4 раза.

Возможны и промежуточные случаи, когда экран находится не над точкой наблюдения, а смещен в ту или иную сторону. Эти точки обозначены на спирали за M_1, \dots, M_7 . Изобразим их положение по отношению к экрану на рисунке 62.

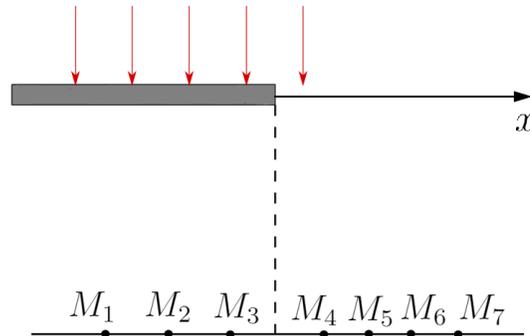


Рис. 62. Положение точек M_1, \dots, M_7 по отношению к экрану

Точка M_1 находится в области геометрической тени, результирующее поле дается вектором $\vec{M}_1 F$. Вообще, из рисунка 61 видно, что по мере удаления точки за экран интенсивность света монотонно убывает. При движении же точки наблюдения от экрана наблюдаются осцилляции: так, $|\vec{M}_4 F| < |\vec{M}_6 F|$, но $|\vec{M}_6 F| > |\vec{M}_7 F|$. Таким образом, качественное изображение дифракционной картины можно увидеть на рисунке 63.

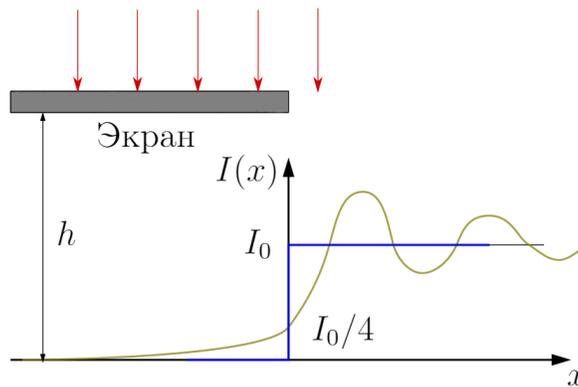


Рис. 63. Интенсивность дифракционной картины при дифракции на краю

На рисунке 63 синей линией обозначена кривая зависимости интенсивности света от расстояния с точки зрения геометрической оптики, а зеленой - с точки зрения волновой теории.

6.6 Приближение Фраунгофера

Прежде, чем решать задачи в рамках приближения дифракции Фраунгофера, необходимо обосновать это приближение и получить рабочие формулы для расчета.

Приближение Фраунгофера работает в том случае, когда отверстие, на котором происходит дифракция, имеет очень малые размеры, не только по сравнению с расстоянием до экрана, но и с характерными размерами изображения на экране, т.е.:

$$\{X, Y\} \ll \{x, y\} \ll z.$$

Также необходимым условием для приближения Фраунгофера служит нормально падающий свет. После того, как мы обговорили все условия, следует вывести рабочие формулы для расчета дифракции на отверстии.

В силу того, что свет падает нормально (случай лазера или света от точечного источника, прошедшего через линзу), $\cos \alpha_0 = 1$. Также, так как расстояние между экранами много больше, чем размеры отверстия и дифракционной картины, то расстояние r от точки отверстия до точки наблюдения дифракции приближенно можно считать константой, равной расстоянию между экранами d .

Аналогичными рассуждениями мы получим, что $\cos \alpha_1$ примерно равен 1. Тогда выражение для поля в точке P примет вид

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &\sim \iint_{S_+} dX dY E_0 \cdot t(X, Y) e^{ikr} \cdot \frac{(1 + \cos \alpha_1)}{r} \sim \\ &\sim \frac{2E_0}{d} \iint_{S_+} dX dY E_0 \cdot t(X, Y) e^{ikr}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Присутствующее в показателе экспоненциальной функции расстояние от текущей точки открытого отверстия до точки наблюдения дифракционной картины легко оценивается по теореме Пифагора с учетом сделанных в рамках приближения неравенств:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{z^2 + (x - X)^2 + (y - Y)^2} \approx z \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(x - X)^2}{z^2} + \frac{1}{2} \frac{(y - Y)^2}{z^2} \right) = \\ &= z \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{z^2} + \frac{1}{2} \frac{X^2 + Y^2}{z^2} - \frac{Xx - Yy}{z^2} \right) \approx \\ &\approx \left[z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \right] - \frac{Xx - Yy}{z}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Здесь мы также воспользовались приближением $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, при $x \rightarrow 0$.

В выражении (6.17) экспоненциальная функция с показателем, которая содержит заключенные в квадратные скобки величины (выражение (6.18)), не зависит от переменной интегрирования и может быть вынесена из-под интеграла.

Также в дальнейшем учтем, что

$$\sin \alpha_x = \frac{x}{z}; \quad \sin \alpha_y = \frac{y}{z},$$

где $\alpha_{x,y}$ - углы, под которыми видны проекции точки P из отверстия на 1 экране. В итоге поле в точке на втором экране равно

$$\begin{aligned} E(x,y,d) &\sim E_0 \iint_{S_+} dXdY \cdot t(X,Y) \cdot \exp\left(-ik\frac{Xx + Yy}{z}\right) = \\ &= E_0 \iint_{S_+} dXdY \cdot t(X,Y) \cdot \exp(-ik(X \sin \alpha_x + Y \sin \alpha_y)). \end{aligned}$$

Важно отметить, что функция пропускания $t(X,Y)$, умножается на две экспоненциальные функции, показатели которых являются чисто мнимыми и зависят как от координат (x,y) так и от координат (X,Y) .

Именно такое математическое преобразование, содержащее интеграл от некоторой функции, умноженной на так устроенную экспоненциальную функцию, в математике называется преобразованием Фурье. Можно сказать, что мы получили *двумерное Фурье преобразование*, где $E(x,y,d)$ - двумерный Фурье образ функции пропускания $t(X,Y)$.

На самом деле, каждый раз такие Фурье преобразования совершает наша сетчатка, чтобы передать Фурье образ нашему мозгу. Без выполнения этого механизма и с учетом плохой проводимости наших нервных клеток (см. раздел Электродинамика) информацию об окружающем нас мире мы бы воспринимали с примерно 30-ти минутной задержкой.

Теперь стоит рассмотреть ряд важных частных случаев для отверстия, на котором происходит дифракция в приближении Фраунгофера.

6.7 Дифракция Фраунгофера на прямоугольном отверстии

Рассмотрим случай дифракции света на прямоугольном отверстии, размеры которого по горизонтали - A , по вертикали - B , причем $A > B$.

Тогда функция пропускания примет вид

$$t(X,Y) = \text{rect}\left(\frac{X}{A}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{Y}{B}\right),$$

где $\text{rect}(x)$ - функция прямоугольника.

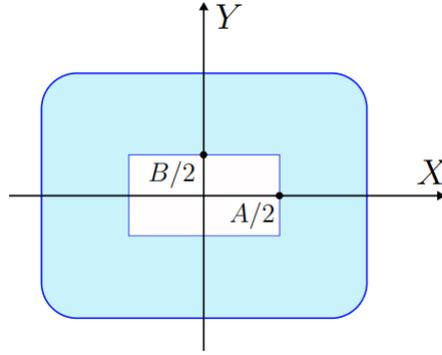


Рис. 64. Прямоугольное отверстие

Теперь с помощью приближения Фраунгофера запишем выражение для поля в точке P на втором экране. При этом учтем, что сумму в показателе экспоненциальной функции можно разбить на произведение экспонент, а тогда двойной интеграл разобьется на два независимых интеграла по X и по Y . В результате каждый из этих интегралов берется как интеграл от экспоненциальной функции:

$$\begin{aligned}
 E(x,y,z) &\sim E_0 \iint_S dXdY \cdot \text{rect}\left(\frac{X}{a}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{Y}{b}\right) \cdot e^{-ik(X \sin \alpha_x + Y \sin \alpha_y)} = \\
 &= E_0 \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ikX \sin \alpha_x} dX \cdot \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ikY \sin \alpha_y} dY = \\
 &= E_0 \cdot \frac{e^{-ik \sin \alpha_x \cdot \frac{a}{2}} - e^{ik \sin \alpha_x \cdot \frac{a}{2}}}{-ik \sin \alpha_x} \cdot \frac{e^{-ik \sin \alpha_y \cdot \frac{b}{2}} - e^{ik \sin \alpha_y \cdot \frac{b}{2}}}{-ik \sin \alpha_y} = \\
 &= E_0 \cdot ab \cdot \frac{\sin \left[\pi \frac{a}{\lambda} \sin \alpha_x \right]}{\pi \frac{a}{\lambda} \sin \alpha_x} \cdot \frac{\sin \left[\pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha_y \right]}{\pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha_y}. \tag{6.19}
 \end{aligned}$$

Здесь использовалось выражение для волнового числа: $k = 2\pi/\lambda$.

Теперь нетрудно записать выражение для интенсивности света в точке P :

$$I(P) = I(\alpha_x, \alpha_y) = I_0 \cdot (ab)^2 \cdot \frac{\sin^2 \left[\pi \frac{a}{\lambda} \sin \alpha_x \right]}{\left[\pi \frac{a}{\lambda} \sin \alpha_x \right]^2} \cdot \frac{\sin^2 \left[\pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha_y \right]}{\left[\pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha_y \right]^2}, \tag{6.20}$$

где I_0 - константа, которая не обязательно совпадает по размерности с интенсивностью.

Изобразим график полученных распределений для $\vec{E}(P)$ и $I(P)$. Для этого вспомним графики функций f и g (рисунок 65):

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ и } g(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}.$$

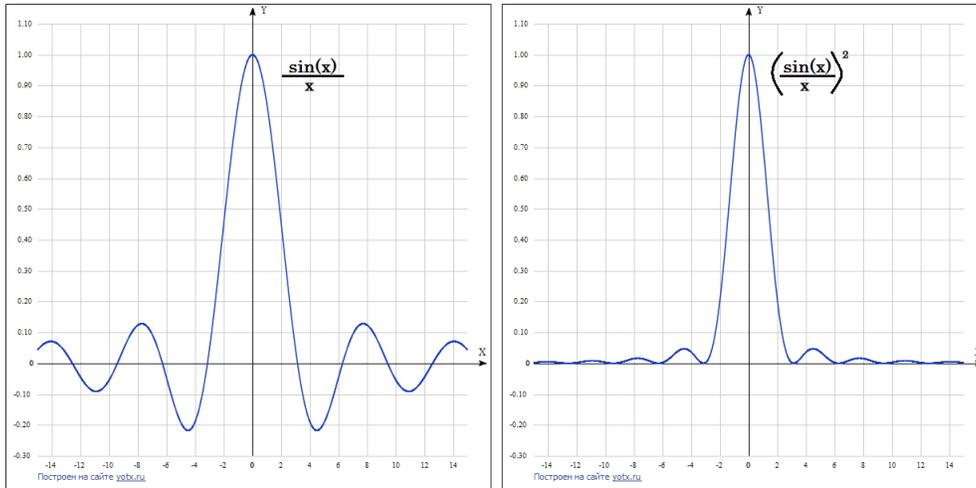


Рис. 65. Графики функций $f(x)$ и $g(x)$

Теперь построим график первой функции в выражении для интенсивности в плоскости Oxz и второй в плоскости Oyz . Причем нули каждой из функций будут достигаться соответственно в точках $m\lambda/a$ и $m\lambda/b$, где $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

При перемножении графиков $g(x)$ и $g(y)$ в плоскости Oxy получим дифракционную картину: главный максимум в начале координат, интенсивность в этой точке будет наибольшей; в точках максимума одной из перемножаемых функций в выражении (6.19) - вторичные максимумы дифракционной картины. При отклонении от координат вторичного максимума интенсивность будет убывать независимо от направления движения, так что эти максимумы являются локальными экстремумами.

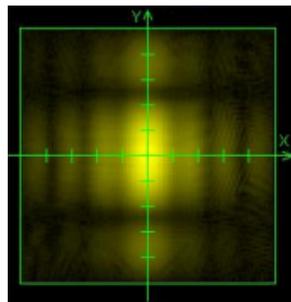


Рис. 66. Дифракция на прямоугольном отверстии

Нетрудно нарисовать график полученного распределения (рисунок 66) в плоскости Oxy . Из графика видно, что при уменьшении одного из поперечных разме-

ров отверстия сама картинка будет расширяться в соответствующем направлении, а из формулы (6.20) следует, что величина интенсивности будет уменьшаться.

Дифракцию на прямоугольной щели можно наблюдать собственными глазами. Достаточно вечером, сощурившись, посмотреть на уличный фонарь, тогда свет будет дифрагировать на узкой щели между веками, и вы увидите вертикальную линию, которая и является главным максимумом дифракционной картины.

6.8 Дифракция на периодической структуре. Дифракционная решетка

Рассмотрим важную с практической точки зрения задачу о дифракции на периодической структуре из прямоугольных отверстий. Такая структура называется дифракционной решеткой. Обычно на 1 мм дифракционной решетки наносится порядка 1200 штрихов, а сами решетки по размерам чаще всего не превосходят 10 см. Тогда количество штрихов N на стандартной решетке примерно равно 10^5 штук.

Дифракционная решетка характеризуется своим периодом - Λ , который отмечен на рисунке 70. Начало координат для дифракционной решетки положим в крайнее левое отверстие. Сделано этого для более удобного вида функции пропускания, а именно: при записи функции $t(X, Y)$ будем мысленно перемещать начало координат вправо на $m\Lambda$.

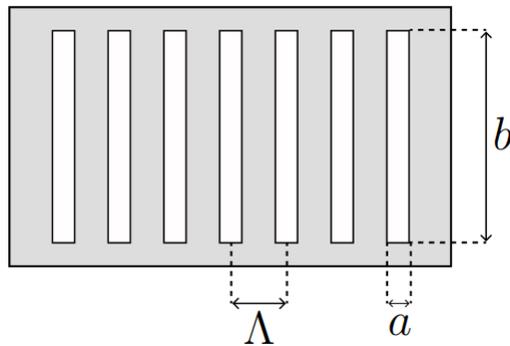


Рис. 67. Дифракционная решетка

Тогда с учетом того, что по оси Y никаких изменений нет, функция пропускания равна

$$t(X, Y) = \text{rect} \left(\frac{Y}{b} \right) \cdot \sum_{m=0}^N \text{rect} \left(\frac{X - m\Lambda}{a} \right). \quad (6.21)$$

Как и в прошлом параграфе, двойной интеграл в выражении для поля распадается на два интеграла по независимым пространственным переменным X и Y , что сильно облегчает расчеты. Также в записи ниже мы воспользовались тем, что интеграл от суммы есть сумма интегралов.

Тогда с учетом выражения (6.21), дифракционное поле на экране описывается следующим выражением:

$$\begin{aligned}
 E(\alpha_x, \alpha_y) &\sim E_0 \iint_{S_+} dX dY \cdot \text{rect} \left(\frac{Y}{b} \right) \cdot \sum_{m=0}^N \text{rect} \left(\frac{X - m\Lambda}{a} \right) \cdot e^{-ik(X \sin \alpha_x + Y \sin \alpha_y)} = \\
 &= E_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dY \text{rect} \left(\frac{Y}{b} \right) e^{-ikY \sin \alpha_y} \cdot \sum_{m=0}^N \int_{m\Lambda - a/2}^{m\Lambda + a/2} dX \cdot \text{rect} \left(\frac{X - m\Lambda}{a} \right) e^{-ikX \sin \alpha_x}. \quad (6.22)
 \end{aligned}$$

Для смены пределов интегрирования во втором интеграле в выражении (6.22) воспользуемся заменой переменной:

$$X \longrightarrow X_m = X - m\Lambda. \quad (6.23)$$

Первый интеграл был рассмотрен в предыдущем параграфе (формула (6.19)). Значит, с учетом замены (6.23), выражение для поля на экране примет вид

$$E(\alpha_x, \alpha_y) \sim E_0 \cdot \frac{\sin \left[\pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha_y \right]}{\pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha_y} \cdot \sum_{m=0}^N \left(\int_{-a/2}^{a/2} dX_m \cdot e^{-ikX_m \sin \alpha_x} \right) \cdot e^{-ik\Lambda \sin \alpha_x}. \quad (6.24)$$

Экспоненциальная функция с показателем $-ik\Lambda \sin \alpha_x$ в выражении (6.24) вынесена из под знака интеграла, так как она не зависит от переменной интегрирования. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, поэтому выражение в скобках не зависит от индекса суммирования, а значит, это слагаемое можно перенести за знак суммы. Тогда выражение для поля примет вид

$$E(\alpha_x, \alpha_y) \sim E_0 \cdot \frac{\sin \left[\pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha_y \right]}{\pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha_y} \cdot \frac{\sin \left[\pi \frac{a}{\lambda} \sin \alpha_x \right]}{\pi \frac{a}{\lambda} \sin \alpha_x} \cdot \sum_{m=0}^N e^{-ik\Lambda \sin \alpha_x}. \quad (6.25)$$

Получили решение $E_1(\alpha_x, \alpha_y)$ в случае дифракции на одной прямоугольной щели - , умноженное на сумму слагаемых, которые являются членами геометрической прогрессии.

Прежде чем перейти к записи выражения для поля в точке P , отметим, что решение вида (6.24) справедливо для любой периодической структуры.

$$E(\alpha_x, \alpha_y) = E_1(\alpha_x, \alpha_y) \cdot \sum_{m=0}^N e^{-ik\Lambda \sin \alpha_x}.$$

Из школьного курса математики известно, что сумма конечного числа членов убывающей геометрической прогрессии (где q - знаменатель геометрической прогрессии) равна

$$S_n = \frac{a_0 - a_n}{1 - q}.$$

Тогда поле в точки второго экрана можно представить как

$$E(\alpha_x, \alpha_y) = E_1(\alpha_x, \alpha_y) \cdot \frac{1 - e^{-ikN\Lambda \sin \alpha_x}}{1 - e^{-ik\Lambda \sin \alpha_x}} \sim E_1(\alpha_x, \alpha_y) \cdot \frac{\sin \left[\pi N \frac{\Lambda}{\lambda} \sin \alpha_x \right]}{\sin \left[\pi \frac{\Lambda}{\lambda} \sin \alpha_x \right]}. \quad (6.26)$$

При точном вычислении (6.26) в конечном выражении будет присутствовать также экспоненциальная функция с чисто мнимым показателем. Для нахождения интенсивности напряженность умножается на комплексно сопряженное выражение, поэтому мнимую экспоненциальную функцию можно опустить из рассмотрения, так как на практике интерес представляет только зависимость интенсивности от координат точки на экране.

В итоге выражение для интенсивности в случае дифракционной решетки примет вид

$$I(P) = I(\alpha_x, \alpha_y) = I_0 \cdot (ab)^2 \cdot \frac{\sin^2 \left[\pi \frac{a}{\lambda} \sin \alpha_x \right]}{\left[\pi \frac{a}{\lambda} \sin \alpha_x \right]^2} \cdot \frac{\sin^2 \left[\pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha_y \right]}{\left[\pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha_y \right]^2} \cdot \frac{\sin^2 \left[\pi N \frac{\Lambda}{\lambda} \sin \alpha_x \right]}{\sin^2 \left[\pi \frac{\Lambda}{\lambda} \sin \alpha_x \right]}.$$

Осталось изобразить график получившейся зависимости. В плоскости Oyz график не изменится, так как компонента с $\sin \alpha_y$ осталась без изменения. Поэтому будем рассматривать график на плоскости Oxz . Для этого рассмотрим произведение двух компонент. График первого сомножителя функции $f(\alpha_x)$ приведен на рисунке 68.

$$f(\alpha_x) = \frac{\sin^2 \left[\pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha_y \right]}{\left[\pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha_y \right]^2} \cdot \frac{\sin^2 \left[\pi N \frac{\Lambda}{\lambda} \sin \alpha_x \right]}{\sin^2 \left[\pi \frac{\Lambda}{\lambda} \sin \alpha_x \right]}.$$

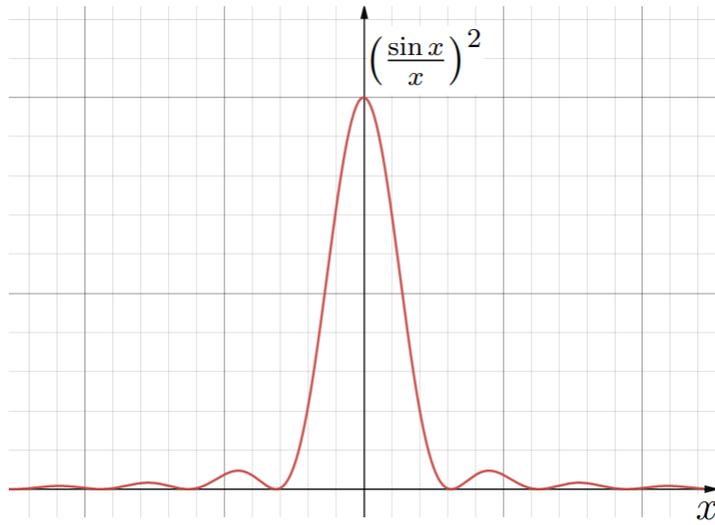


Рис. 68. Огибающая интенсивности

Для построения графика второго множителя важно отметить, что его знаменатель будет обращаться в нуль в случае, когда $\sin \alpha_x$ будет кратен λ/Λ . Однако период дифракционной решетки Λ всегда больше, чем ширина штриха. Значит, рассматриваемый знаменатель будет осциллировать чаще, чем первый множитель функции $f(\alpha_x)$. Рассмотрим случай, когда период решетки в 4 раза больше ширины штриха: $\Lambda = 4a$. График знаменателя второго множителя функции $f(\alpha_x)$ приведен на рисунке 69.

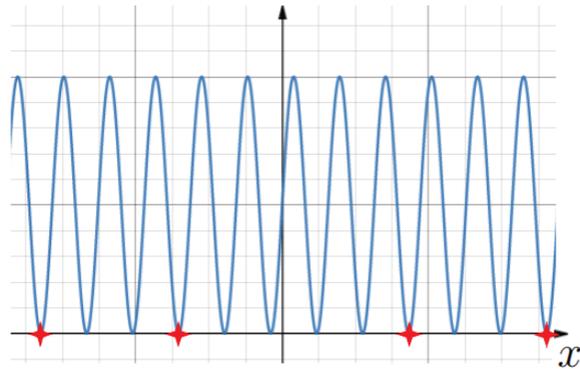


Рис. 69. Осциллирующий знаменатель для интенсивности

Теперь заметим, что на каждый нуль знаменателя приходится нуль числителя, но в аргументе синуса из числителя дроби также стоит N . Значит, при малых углах синус можно представить как его аргумент, а значит, в выражении для интенсивности будет присутствовать слагаемое порядка N^2 . Кроме того, между нулями знаменателя числитель совершает N осцилляций.

В итоге там, где и числитель и знаменатель обращаются в нули, возникает огромное усиление света в N^2 раз. Однако это усиление модулируется функцией, которая у нас играет роль первого слагаемого. В промежутках между максимум-

мами света интенсивность совершает $N = 10^5$ осцилляций. Также, так как мы положили, что период дифракционной решетки кратен ширине щели, то один из 4-х максимумов света приходится на ноль огибающей, а значит, всплеска интенсивности в этой точке не будет. Если бы Λ не был кратен a , то ни один из максимумов второго слагаемого не занулился.

Ширина получившихся максимумов очень мала, так как между двумя соседними максимумами укладывается $N = 10^5$ таких же по ширине осцилляций.

Теперь можно записать условие появления каждого из максимумов. Оно выполняется, если аргумент синуса в знаменателе равен целому числу π :

$$\frac{\pi\Lambda}{\lambda} \sin \alpha_x = m\pi \implies$$

$$\implies \sin \alpha_x = \frac{\lambda}{\Lambda} m, \text{ где } m \in \mathbb{Z}.$$

До этого момента рассматривалась только дифракция монохроматического света, однако на опыте можно получить только квазимонохроматический или же вовсе не монохроматический свет. Попробуем описать дифракцию на дифракционной решетке в немонохроматическом свете.

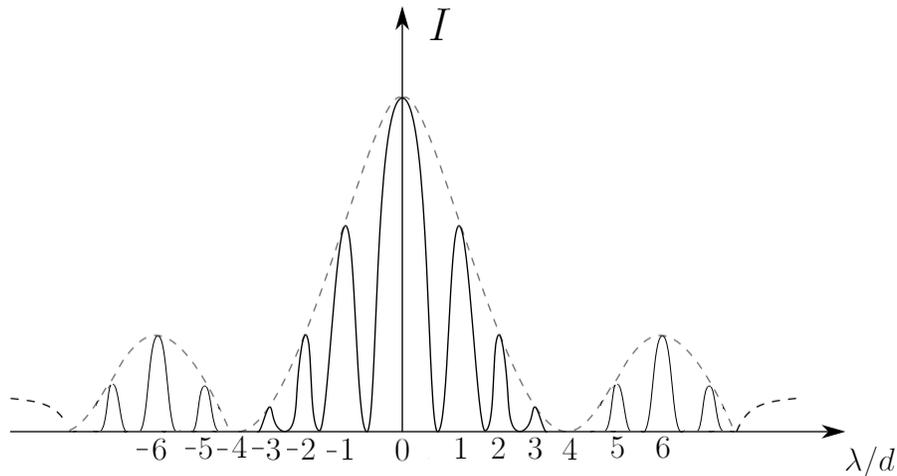


Рис. 70. Зависимость интенсивности от координаты на дифрагирующем экране

Тогда в нулевом порядке (при $m = 0$) получится, что каждая из гармоник находится в точке $x = 0$. Такая линия, где свет не распадается в спектр, носит название ахроматическая линия. Далее линии с наименьшей длиной волны в каждом из порядков возникают первыми (из основной формулы дифракционной решетки видно, что при m и Λ фиксированных, чем больше λ , тем больше $\sin \alpha_x$).

Также видно, что ширина между линиями во 2 спектре больше, чем ширина между линиями в 1 спектре. Поэтому при увеличении порядка можно прийти к тому, что фиолетовая линия $i + 1$ -го порядка будет накладываться на красную

линию i -го порядка, и при увеличении m этот эффект будет расти. Также не стоит забывать, что при увеличении порядка интенсивность света будет уменьшаться, что также усложняет наблюдение отдельных гармоник при больших порядках.

 **Определение 6.4. Область свободной дисперсии** - ширина области спектра, на которую не накладываются соседние порядки.

Ширина той области спектра, на которую не накладываются соседние порядки, носит название *области свободной дисперсии*, ее можно видеть на рисунке 73.

Однако в маленьких порядках существует проблема, связанная с тем, что расстояние между соседними гармониками крайне мало, что усложняет процесс анализа спектра того или иного излучения. Однако эту проблему можно решить, поставив на пути света светофильтр, который выберет только 1 гармонику излучения.



Рис. 71. Зависимость интенсивности от координаты на экране для разных длин волн

Помимо рассмотренного типа решеток, которые теряют много света, а также большую часть посылают в нуль, существует решетки с профилированным штрихом.

 **Определение 6.5. Решётка с профилированным штрихом** - это полностью прозрачная решётка с определенным периодическим рельефом, которая переводит много света в высокие порядки.

Излучение, проходя через такую решётку, меняет свое направление.

6.9 Дифракция на круглом отверстии

Решение задачи о дифракции на круглом отверстии в приближении Фраунгофера несет очень важное практическое значение: дело в том, что большое коли-

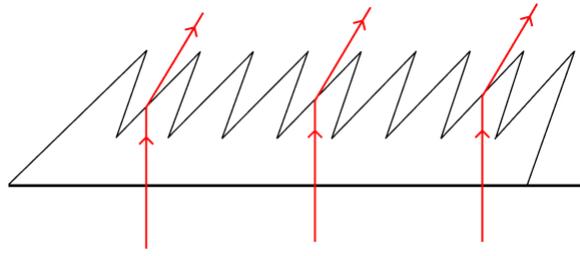


Рис. 72. Дифракционная решетка с профилированным штрихом

чество оптических приборов имеют объективы именно круглой формы. Объекты же, рассматриваемые через них, как правило, находятся очень далеко.

Таким образом, из теории дифракции следует, что свет, отраженный или излученный далекими объектами, непременно испытывает дифракцию на отверстии объектива, а при постановке задачи справедливо приближение Фраунгофера.

Для решения задачи обратимся к рисунку 73.

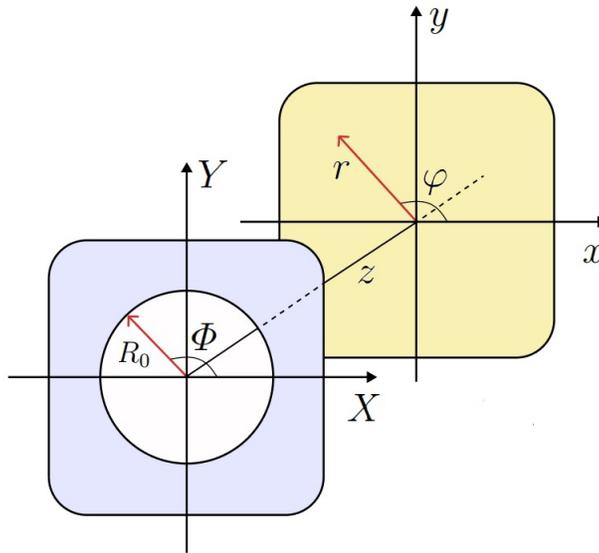


Рис. 73. Дифракция света на круглом отверстии

В силу симметрии, очевидно, решить задачу будет проще в цилиндрических координатах. Пусть, как обычно, (x, y) - координаты точки наблюдения на экране, отнесенном на расстояние z , а (X, Y) - координаты точек на круглом отверстии, являющихся источниками вторичных волн. Введём цилиндрические координаты:

$$\begin{cases} X = R \cos \Phi, \\ Y = R \sin \Phi. \end{cases} ; \begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Поле, описывающее напряженность в точке наблюдения, дается фраунгофе-

ровским интегралом:

$$E(x,y) = \int_S dS \exp \left\{ -i \frac{k}{z} (Xx + Yy) \right\}.$$

С учетом перехода к цилиндрическим координатам и последующего сведения интеграла к повторному получаем

$$E(r,\varphi) = \int_0^{R_0} R dR \int_0^{2\pi} d\Phi \exp \left\{ -i \frac{kRr}{z} (\cos \Phi \cos \varphi + \sin \Phi \sin \varphi) \right\}.$$

Заметим, что в экспоненте получается $\cos(\Phi - \varphi)$. Однако косинус является 2π -периодической функцией, так что при интегрировании по периоду в нашем случае от косинуса разности можно сразу перейти к $\cos \Phi$. В итоге получаем выражение:

$$E(r,\varphi) = \int_0^{R_0} R dR \int_0^{2\pi} d\Phi \exp \left\{ -i \frac{kRr}{z} \cos \Phi \right\}.$$

Интеграл с косинусом в экспоненте не выражается через элементарные функции, но выражается через специальные *цилиндрические функции Бесселя*.

 **Определение 6.6.** *Цилиндрическими функциями Бесселя по определению будем называть следующего вида функций:*

$$J_0(x) = J_0(-x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \{ix \cos \Phi\} d\Phi.$$

Тогда в данном случае:

$$E(r,\varphi) \sim 2\pi \int_0^{R_0} R J_0 \left(\frac{2\pi Rr}{\lambda z} \right) dR = 2\pi \left(\frac{\lambda z}{2\pi r} \right)^2 \int_0^{R_0} \left(\frac{2\pi Rr}{\lambda z} \right) J_0 \left(\frac{2\pi Rr}{\lambda z} \right) d \left(\frac{2\pi Rr}{\lambda z} \right).$$

Для функций Бесселя существует рекуррентная формула:

$$X J_1(x) \equiv \int_0^x x J_0(x) dx.$$

В таком случае получаем:

$$E(r, \varphi) \sim 2\pi \left(\frac{\lambda z}{2\pi r} \right)^2 \left(\frac{2\pi R_0 r}{\lambda z} \right) J_1 \left(\frac{2\pi R_0 r}{\lambda z} \right).$$

Итоговое выражение для интенсивности поля в точке наблюдения:

$$I(r, \varphi) = I_0 \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{2\pi R_0 r}{\lambda z} \right)}{\frac{2\pi R_0 r}{\lambda z}} \right]^2.$$

Удобно построить график зависимости интенсивности $I(\frac{r}{z}) = I(\theta)$ ввиду симметрии вращения относительно оси z . Угол θ также называют *углом дифракции*.

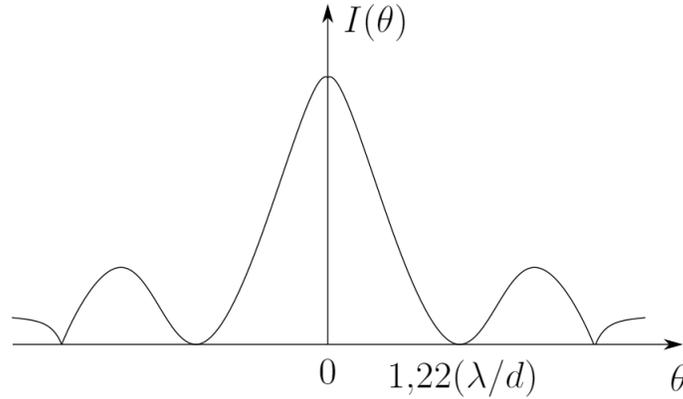


Рис. 74. Распределение интенсивности в дифракционной картине при дифракции на круглом отверстии в приближении Фраунгофера

Распределение интенсивности $I(\theta)$ напоминает аналогичное распределение вида $\sin^2(x)/x^2$ при дифракции на прямоугольном отверстии. При стремлении $z \rightarrow \infty$ эти графики практически совпадают. Отличие в том, что нули интенсивности при малых углах дифракции находятся чуть дальше, чем при дифракции на прямоугольном отверстии.

Далее приведён результат численного моделирования, который изображен на рисунке 75.

Как можно заметить, чем уже отверстие - тем более расплывчатая дифракционная картина. Данную дифракционную картину принято называть *диск* или же *картиной Эйри*.

При дифракции Фраунгофера на круглом отверстии гауссов пучок сохраняет свою форму, а интенсивность дифрагированного излучения вновь описывается гауссовым распределением.

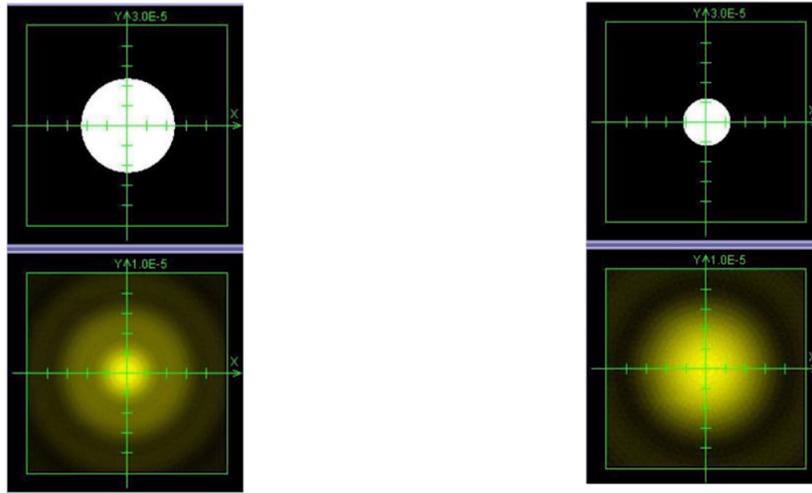


Рис. 75. Численное моделирование нормированной дифракционной картины для двух различных отверстий

Контрольные вопросы

1. Каким выражением определяется дифракция в общем виде? Запишите его.
2. Для чего вводят зоны Френеля, и что они из себя представляют?
3. Как устроены зонные пластинки Френеля, и что общего у них с тонкими линзами?
4. Отличие зон Шустера от зон Френеля?
5. Что описывают интегралы Френеля?
6. Как получить спираль Корню, и что она из себя представляет?
7. В чём суть приближения Фраунгофера?
8. Что такое ахроматическая линия и зоны свободной дисперсии?
9. Что будет происходить с дифракционной картиной при изменении поперечных размеров прямоугольного отверстия?
10. Для чего при рассмотрении дифракции на круглом отверстии в приближении Фраунгофера были введены цилиндрические функции Бесселя и что они из себя представляют?

7 ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ

7.1 Определение интерференции света. Общие положения. Опыт Юнга

 **Определение 7.1. Интерференция света** представляет собой явления, в которых при наложении пучков света результирующая интенсивность не равна сумме интенсивностей отдельных пучков.

В одних местах интенсивность больше, в других меньше, т.е. возникают чередующиеся светлые и темные участки.

Об интерференции говорят в том случае, когда возникает сложение двух или не очень большого числа волн. Так, при сложении, если максимум одной волны совпадает с максимумом другой, то они усиливаются, и колебания становятся более интенсивными. Но если на максимум одной волны накладывается минимум другой, то в результате суммирования можно получить нулевую интенсивность. Частицы в классическом смысле ведут себя совсем по-другому. При сложении классических частиц в результате суммирования их всегда становится больше.

В оптике мы будем рассматривать интерференцию как частный случай дифракции. Так можно поступать в некоторых частных случаях рассмотрения интерференционных картин. Однако интерференция возникает не только при сложении световых колебаний, но и во многих других ситуациях.

Удобнее всего начать рассмотрение вопроса о интерференции с *опыта Юнга*. Считается, что после того, как Юнг продемонстрировал интерференционную картину, возникающую при сложении световых колебаний от двух источников света, в физике закрепилось мнение, что свет является набором волн.

Рассмотрим опыт, где свет проходит через небольшое отверстие в непрозрачном экране. Если принять, что свет - это набор волн, то согласно теории дифракции Гюйгенса-Френеля-Кирхгофа-Фраунгофера на экране наблюдения появится светлое пятно, причем размеры этого пятна будут тем больше и пятно будет тем шире, чем уже отверстие на экране, где происходит дифракция. А что будет, если принять, что свет это поток частиц?

Если мы считаем, что частицы света распространяются прямолинейно, то, казалось бы, после пролета через отверстие на экране будут оставаться следы, которые будут повторять форму этого отверстия в соответствии с геометрической оптикой. Но предположим, что, пролетая через отверстие, частицы могут взаимодействовать с краями экрана. Пока отверстие большое, почти все частицы пролетают через него прямолинейно, не задевая краев. В результате на экране будет увеличенное изображение отверстия. Но при уменьшении отверстия все большей доле частиц будет трудно пролететь через него, не задев края экрана, и частицы начнут отклоняться в случайных направлениях. Именно так на языке частиц

можно объяснить явление дифракции на одной щели.

При открытии на первом экране двух щелей (причем абсолютно одинаковых), расположенных на достаточно большом расстоянии друг от друга (больше 1 см), возможно два результата, которые зависят от того, какой моделью описывается свет. Если свет - это поток частиц, то мы должны увидеть результирующую картину, которая получается при простом сложении интенсивностей двух дифракционных картин. Это верно, так как частицы, которые должны пролететь через 1 отверстие, не взаимодействуют с частицами, которые должны пролететь через 2 отверстие и наоборот. Причем, при достаточно большом расстоянии между щелями, дифракционные картины почти не пересекутся друг с другом.

При сближении двух отверстий пятна на экране начнут постепенно пересекаться друг с другом. Если вернуться к рассуждениям о том, что при прохождении через одно отверстие частица не взаимодействует с отверстием №2, тогда должна получиться сумма двух картинок, т.е. получится распределение интенсивности с двумя характерными максимумами, причем в области перекрытия дифракционных картин интенсивности просто сложатся. Однако опыт показывает, что в этом случае природа ведет себя совсем по-другому.

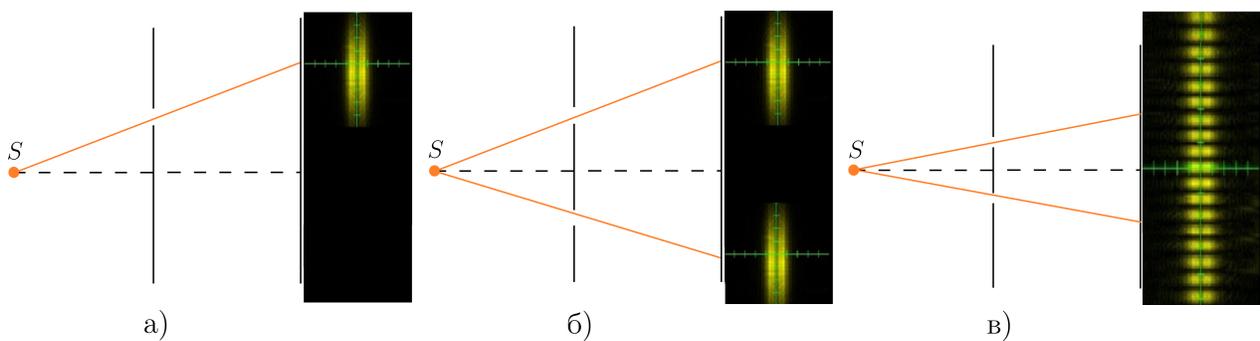


Рис. 76. Прохождение света через: а) одну щель; б) две, разведенные на большое расстояние, щели; в) две близко расположенные щели

В области перекрытия возникают характерные близко расположенные *интерференционные полосы*. Так был сделан вывод, что свет не является потоком частиц. Полученный результат можно обосновать на языке волн.

Светлую полосу в центре интерференционной картины легко объяснить. Исходная сферическая волна, убегающая от источника света, доходит до каждого из отверстий, и по принципу Гюйгенса-Френеля каждое из этих отверстий является источником вторичных сферических волн. Если отверстие маленькое, то оно открывает одну или несколько точек, и от них распространяется практически идеальная сферическая волна, идущая во всех направлениях. Таким образом, в каждую точку экрана будут приходить две сферических волны от верхнего и нижнего открытых отверстий. Если на максимум одной волны приходит максимум другой, то суммарная волна увеличит свою амплитуду. Если же на максимум

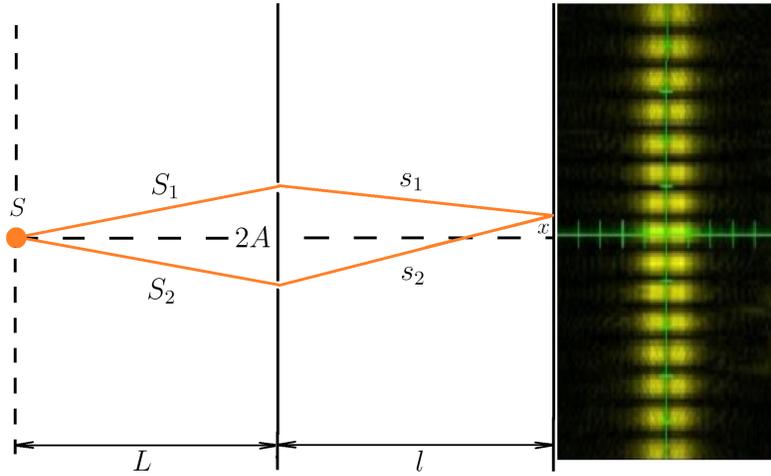


Рис. 77. Математическое описание опыта Юнга

одной волны приходится минимум другой, волны гасят друг друга, и суммарная амплитуда равна 0. Оба этих эффекта будут чередоваться в обе стороны относительно центрального максимума.

Запишем представленные рассуждения на языке математики. От источника распространяется сферическая волна, фаза которой определяется расстоянием от источника до отверстия S_1 . Естественно, эта волна затухает, как и любая сферическая волна, поэтому поле от источника в точке нахождения первого отверстия будет вычисляться, с точностью до коэффициентов, как

$$\tilde{E}_1 \sim E_0 \frac{e^{ikS_1}}{S_1}.$$

По принципу Гюйгенса из открытого отверстия стартует вторичная сферическая волна, амплитуда которой пропорциональна амплитуде поля, дошедшего до отверстия, но поскольку эта волна сферическая, у нас снова появляется стандартная для сферической волны комбинация e^{ikr} , но теперь r оказывается равным пути от точки, где произошла дифракция, до точки наблюдения. Значит, поле от сферической волны, которая дошла от 1 отверстия до экрана наблюдения, равно

$$E_1 \sim \tilde{E}_1 \frac{e^{iks_1}}{s_1} \sim E_0 \frac{e^{ikS_1}}{S_1} \frac{e^{iks_1}}{s_1} \approx E_0 \frac{e^{ikS_1}}{L} \frac{e^{iks_1}}{l}. \quad (7.1)$$

В выражении (7.1) мы сделали приближение, что поперечные размеры в нашей задаче гораздо меньше, чем продольные. Поэтому в знаменателе мы сделали замену $S_1 \rightarrow L$ и $s_1 \rightarrow l$. Такую замену ни в коем случае нельзя делать в показателе экспоненциальной функции, так как там S_1 и s_1 делятся на длину волны. В результате этого в показателе экспоненциальной функции мы получаем очень большое число, поэтому нашу замену произвести нельзя, так как в этом случае мы сильно изменим числитель.

Аналогично находится поле сферической волны, проходящей через второе отверстие:

$$E_2 \sim E_0 \frac{e^{ikS_2}}{S_2} \frac{e^{iks_2}}{s_2} \approx E_0 \frac{e^{ikS_2}}{L} \frac{e^{iks_2}}{l}.$$

Тогда, по принципу суперпозиции, поле в точке наблюдения равно

$$E_\Sigma(x) = E_1 + E_2 \sim E_0 \frac{e^{ik(S_1+s_1)}}{Ll} + E_0 \frac{e^{ik(S_2+s_2)}}{Ll}.$$

Однако на эксперименте наш глаз и наши приборы регистрируют квадрат модуля напряженности или же интенсивность:

$$\begin{aligned} I_\Sigma(x) &= E_\Sigma(x) \cdot E_\Sigma^*(x) = (E_1 + E_2)(E_1 + E_2)^* \sim \\ &\sim |E_0|^2 \left(1 + 1 + e^{ik(S_1+s_1)} e^{-ik(S_1+s_1)} + e^{-ik(S_1+s_1)} e^{ik(S_2+s_2)} \right) = \\ &= 2I_0 [1 + \cos(k(s_2 - s_1))]. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Здесь мы учли, что разница $S_1 - S_2$ равна нулю, так как источник находится на одинаковом расстоянии от 1 и 2 щели.

Из формулы (7.2) видно, что полная интенсивность не равна сумме интенсивностей света от каждого из отверстия ($2I_0$). У нас появляется дополнительное слагаемое, которое называется *интерференционным членом*.

Выражение в аргументе косинуса, с точностью до волнового числа k , есть разность хода, которую можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= \sqrt{l^2 + (x + A)^2} - \sqrt{l^2 + (x - A)^2} \approx \\ &\approx l \left(1 + \frac{(x + A)^2}{2l^2} \right) - l \left(1 + \frac{(x - A)^2}{2l^2} \right) = \frac{2xA}{l}. \end{aligned}$$

В итоге формула для интенсивности в точке на экране наблюдения примет вид

$$I_\Sigma(x) \sim 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi xA}{\lambda l} \right) \right] = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{2\pi xA}{\lambda l} \right).$$

Считается, что опыт Юнга был именно тем опытом, в результате которого в обществе укрепилось мнение, что свет - это электромагнитные волны.

7.2 Реальный опыт Юнга

Используемая в прошлом параграфе модель далека от реальности. Первое, что нам нужно сделать, чтобы добиться более правдоподобной картины - заменить точечный источник на светящуюся полосу конечной ширины с высотой β

и шириной α . Учитывая это, будем работать с трехмерной картинкой. Примем, что все точки нашей светящейся полоски будут излучать свет некогерентно, т.е. колебания в каждой из точек светящейся полоски будут происходить совершенно независимо от колебаний всех остальных точек.

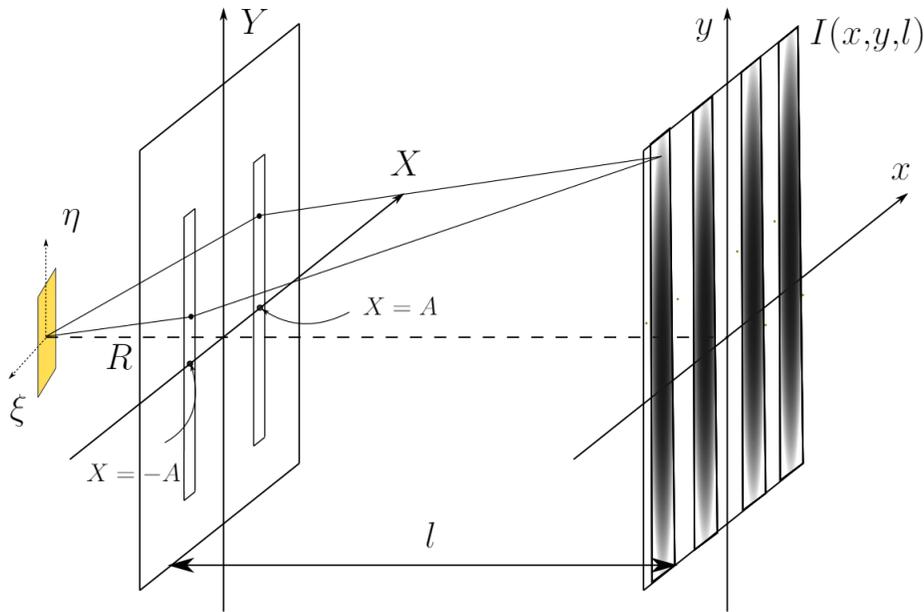


Рис. 78. Реальный опыт Юнга. Линейные размеры источника: ширина - α , высота - β

Вообще говоря, дифракционную картинку следует вычислять как квадрат модуля от суммы полей, пришедших на экран наблюдения от каждой из точек источника света путем прохождения через все мыслимые точки экрана, на котором происходит дифракция. Эту сумму следует возводить в квадрат. Однако в том случае, когда источник некогерентный, и каждая его точка излучает колебания, никак не скоррелированные по фазе с колебаниями другой точки, такая задача немного упрощается. Это происходит, так как в случае излучения большого числа нескоррелированных источников суммарная интенсивность равна сумме интенсивностей от каждого из источников, что было доказано в параграфе 3.6.

Теперь рассчитаем интенсивность света на экране от каждой точки такого источника, после чего сложить не поля от каждой точки, а уже интенсивности.

Согласно теории дифракции Гюйгенса-Френеля-Кирхгофа-Фраунгофера поле в точке на экране наблюдения вычисляется как

$$E(x, y) = \text{const} \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikR}}{R} t(X, Y) \frac{e^{ikr}}{r} (\cos \alpha_0 + \cos \alpha_1) \approx \text{const} \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikR}}{L} t(X, Y) \frac{e^{ikr}}{l} \cdot 2.$$

Здесь было использовано приближение, учитывающее малость поперечных размеров в сравнении с продольными. Тогда $R \rightarrow L$, $r \rightarrow l$ и $\cos \alpha_0 \approx \cos \alpha_1 \approx 1$.

Запишем выражение для функции пропускания $t(X, Y)$, с учетом того, что обе щели физически бесконечно узкие. Последнее означает, что щели узкие, но достаточного размера, чтобы пропускать свет.

$$t(X, Y) = \text{rect} \left(\frac{Y}{B} \right) (\delta(X - A) + \delta(X + A)).$$

По тем же самым причинам, что и в предыдущем параграфе, заменить расстояния в показателях экспонент мы не можем. Однако можем расписать их. Из геометрических соображений:

$$R = \sqrt{L^2 + (X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2} \approx L + \frac{(X - \xi)^2}{2L} + \frac{(Y - \eta)^2}{2L},$$

$$r = \sqrt{l^2 + (X - x)^2 + (Y - y)^2} \approx l + \frac{(X - x)^2}{2l} + \frac{(Y - y)^2}{2l}.$$

В итоге каждая экспонента с суммой в показателе разбивается на 3 экспоненциальные функции. Причем экспоненты с показателями ikL и ikl - константы, которые пройдут за знак интегрирования (их можно отбросить, так как при возведении в квадрат по модулю произведения экспоненты на ее комплексно сопряженную даст 1). Тогда поле получится равным

$$E(P) = E(x, y, l) \sim \text{const} \cdot \int_{-B/2}^{B/2} \exp \left(ik \left[\frac{(Y - \eta)^2}{2L} + \frac{(Y - y)^2}{2l} \right] \right) dY \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(X - A) + \delta(X + A)) \exp \left(ik \left[\frac{(X - \xi)^2}{2L} + \frac{(X - x)^2}{2l} \right] \right) dX. \quad (7.3)$$

Теперь воспользуемся одним из свойств дельта-функции Дирака:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0).$$

Тогда поле (7.3) можно будет записать как произведение интеграла (обозначим его за I), который берется по переменной Y , и второго интеграла:

$$E(x, y, l) = I(\eta, y, b, l, L, \lambda) \cdot e^{ik \frac{A^2}{2L}} e^{ik \frac{A^2}{2l}} e^{ik \frac{\xi^2}{2L}} e^{ik \frac{x^2}{2L}} \left[e^{ik \left(\frac{A\xi}{L} + \frac{Ax}{l} \right)} + e^{-ik \left(\frac{A\xi}{L} + \frac{Ax}{l} \right)} \right]. \quad (7.4)$$

В скобках выражения (7.4) нетрудно увидеть косинус (с точность до 1/2), а произведение 4-х экспонент с чисто мнимыми показателями можно отбросить, так

как при возведении в квадрат они исчезнут. В итоге получаем:

$$E(x,y,l) = f(\eta,y,b,l,L,\lambda) \cos \left[kA \left(\frac{\xi}{L} + \frac{x}{l} \right) \right].$$

Теперь запишем выражение для интенсивности света от источников, которые находятся на элементарной площади $d\eta d\xi$, в точке наблюдения:

$$dI(x,y,l) = \frac{f^2(\eta,y,b,l,L,\lambda)}{2} \left\{ 1 + \cos \left[2kA \left(\frac{\xi}{L} + \frac{x}{l} \right) \right] \right\} d\xi d\eta. \quad (7.5)$$

Осталось рассчитать интенсивность от всего источника путем интегрирования выражения (7.5) по площади протяженного источника света:

$$\begin{aligned} I(x,y,l) &= \int_{-\beta/2}^{\beta/2} \frac{1}{2} f^2(\eta,y,b,l,L,\lambda) d\eta \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left\{ 1 + \cos \left[2kA \left(\frac{\xi}{L} + \frac{x}{l} \right) \right] \right\} d\xi = \\ &= F(y) \left\{ \alpha + \frac{\sin \left[\frac{4\pi}{\lambda} A \left(\frac{\alpha}{2L} + \frac{x}{l} \right) \right]}{\frac{4\pi}{\lambda} \frac{A}{L}} - \frac{\sin \left[\frac{4\pi}{\lambda} A \left(\frac{-\alpha}{2L} + \frac{x}{l} \right) \right]}{\frac{4\pi}{\lambda} \frac{A}{L}} \right\} = \\ &= F(y) \left\{ \alpha + \frac{2 \sin \left[\frac{4\pi}{\lambda} A \frac{\alpha}{2L} \right] \cos \left[\frac{4\pi}{\lambda} A \frac{x}{l} \right]}{\frac{4\pi}{\lambda} \frac{A}{L}} \right\} = \\ &= F(y) \alpha \left\{ 1 + \frac{\sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} A \frac{\alpha}{L} \right]}{\frac{2\pi}{\lambda} \frac{A\alpha}{L}} \cos \left[\frac{4\pi}{\lambda} A \frac{x}{l} \right] \right\}. \quad (7.6) \end{aligned}$$

Важно еще раз отметить, что сложение интенсивностей от каждого из точечных источников (интегрирование по площади всего источника) возможно лишь в том случае, когда точечные источники между собой не когерентны.

Если пренебречь рассмотрением интерференционной картины по координате y , то оказывается, что интенсивность наблюдаемого света есть единица плюс косинус, периодически изменяющийся с изменением координаты наблюдения. Если бы не было множителя, стоящего перед косинусом, у нас появились бы чередующиеся светлые и темные полосы, точно такие же, как в результате классического расчета опыта Юнга. Однако учет конечности размеров источника приводит к появлению дополнительного множителя перед косинусом, который имеет вид типа отношения синуса некоторого аргумента к этому аргументу. Функции такого вида обозначают как $\text{sinc}(x)$. Давайте посмотрим, к чему приведет наличие этого множителя, который зависит от размеров ширины полосы источника, от расстояния между щелями Юнга, от длины волны и от расстояния между экранами.

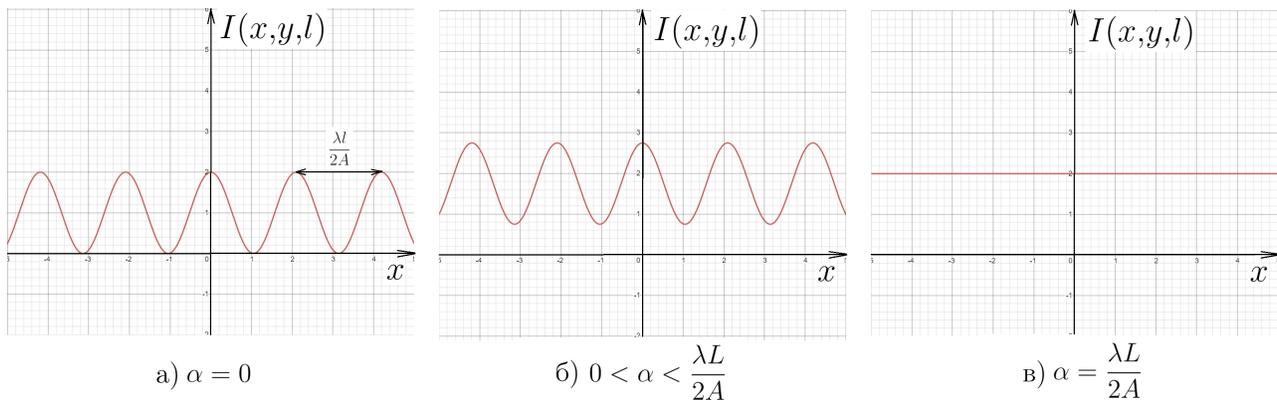


Рис. 79. Зависимость интенсивности от x координаты точки на экране в опыте Юнга для различных значений ширины щелей

Если $\alpha \rightarrow 0$, т.е. щель становится бесконечно узкой, предел отношения $\sin(u)/u$ равен единице. Тогда мы получаем стандартные осцилляции интенсивности света от нулевого значения до максимального, которое получались в опыте Юнга при его простейшем рассмотрении (рисунок 79 (а)).

Однако по мере увеличения ширины щели величина множителя синуса аргумента, содержащего эту ширину, деленного на этот же аргумент, постепенно убывает, и в скобках выражения (7.6) появляется выражение типа единица плюс косинус, умноженный на амплитуду, меньшую, чем 1. Это означает, что размах амплитуды колебаний косинуса станет меньше, чем постоянная составляющая, и в минимумах интерференционной картины интенсивность света не будет доходить до нуля. Появится "светлый фон" (рисунок 79 (б)).

При ширине щели, для которой аргумент синуса превращается в π , множитель, стоящий перед косинусом, превращается в ноль. Вследствие этого возникает равномерно освещенное поле, поскольку выражение для интенсивности получается равным единице, умноженной на некоторую константу. Тогда интерференционная картина полностью пропадает (рисунок 79 (в)).

Если далее расширять источник, множитель $\sin u/u$ снова становится отличным от нуля, но при этом он становится отрицательным. Это означает, что на том месте, где раньше, в классическом опыте Юнга, должны были появляться максимумы интенсивности, теперь появятся минимумы, ведь из единицы будет что-то вычитаться. А в области, где были минимумы, появятся максимумы, т.е. полосы поменяются: максимумы заменят минимумы, и наоборот.

При дальнейшем расширении щели сначала интенсивность снова станет нулевой на всей области, а потом мы вернемся к исходному косинусоидальному распределению интенсивности с правильными положениями максимумов и минимумов.

7.3 Пространственная когерентность. Функция видности

Для характеристики интерференционной картины, которую мы получили, в оптике иногда вводят так называемую *функцию видности*.

 **Определение 7.2.** *Функция видности* - это разность интенсивностей света в максимуме и минимуме интерференционных полос, отнесённая к сумме этих интенсивностей.

$$V \equiv \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}.$$

Нетрудно увидеть, что функция видности численно равна модулю того множителя, который стоит перед косинусом в выражении (7.6):

$$V = \left| \frac{\sin \left(2\pi \frac{A\alpha}{\lambda L} \right)}{2\pi \frac{A\alpha}{\lambda L}} \right|.$$

График функции видности показывает, что идеальная видность интерференционной картины в случае опыта Юнга возникает только в том случае, когда у нас имеется бесконечно узкий источник света в виде не когерентной светящейся нити.

Способность света давать интерференционную картину в опыте Юнга часто называют *пространственной когерентностью*.

 **Определение 7.3.** Два источника называются *пространственно когерентными* в том случае, если их размеры и взаимное расположение позволяет наблюдать интерференционные полосы.

7.4 Временная когерентность

В ранее рассмотренном опыте Юнга интерференционная картина наблюдалась в области, равноудаленной от вторичных источников света, роль которых играли щели в экране.

В том случае, когда первичный фронт генерируется некогерентным ансамблем излучающих атомов или первичных источников, говорят, что возникает проблема пространственной когерентности между вторичными источниками света. Если вторичные источники оказываются когерентными, то видность интерференционной картины в точке наблюдения оказывается хорошей. По мере ухудшения когерентности вторичных источников качество или видность интерференционной картины убывает.

Будем считать, что два вторичных источника излучают стационарные во времени световые потоки, но поля, излучаемые этими источниками, представляют собой некоррелированные между собой колебания, фазы которых хаотически меняются со временем. В этом случае суммарная интенсивность света оказывается равной сумме интенсивностей света от первого и второго вторичных источников, а также дополнительного слагаемого, которое принято называть интерференционным членом:

$$I_{\Sigma} = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2 \left\langle \sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) \right\rangle. \quad (7.7)$$

В том случае, если среднее значение от косинуса разности фаз оказывается отличным от нуля, интерференция возникает, и наблюдаемая картина не равна сумме интенсивностей света от двух источников. Если же разность фаз меняется так сильно, что среднее значение от интерференционного члена в выражении (7.7) оказывается равным нулю, интерференция исчезает, и мы говорим о полностью некогерентных вторичных источниках.

Этот расчет имеет большое практическое применение. Дело в том, что обычными астрономическими методами довольно трудно различить две компоненты одной звезды. Эти две компоненты, вращаясь одна относительно другой, находятся довольно близко друг к другу. Конечно, эти разные звезды можно пытаться увидеть за счет сдвига частот, обусловленным эффектом Доплера, но есть и другой вариант. Понятно, что две близко расположенные звезды являются некоррелированными между собой источниками света. Поэтому, если после телескопа поставить две щели, как это было сделано в опыте Юнга, и наблюдать интерференционную картину, в том случае, когда источником света является не одна звезда, а две близко расположенные звезды, мы увидим характерное уменьшение видности интерференционной картины в зависимости, скажем, от положения щелей. Именно так устроена идея распознавания близко расположенных некоррелированных между собой звезд.

Помимо пространственной когерентности нужно рассмотреть ещё и так называемую *временную когерентность*. В другом варианте опыта Юнга наблюдается интерференция от одного источника, но пути в точку наблюдения приходят с запаздыванием один относительно другого. В этом случае мы формально размещаем вместо второго источника мнимое изображение первого. Оптические пути для реального источника и для мнимого будут иметь разную длину, как показано на рисунке 80.

В результате в точке наблюдения встречаются поле, излучаемое реальным источником в один момент времени, и поле, излученное его же образом с учетом запаздывания. О такой когерентности двух источников говорят как о временной когерентности.

Временная когерентность характеризует свойство самого источника света, которое состоит в том, насколько скоррелированы его собственные колебания в два разных момента времени t_1 и t_2 , в те моменты времени, когда в точку наблюдения приходят цуги, распространяющиеся по путям разной длины.

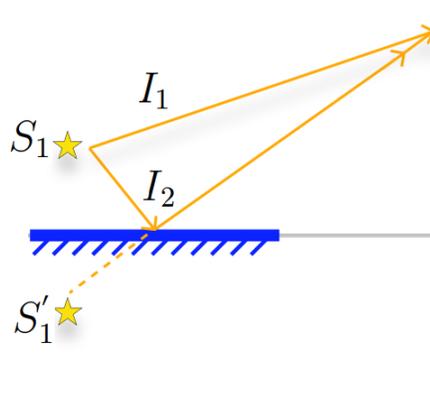


Рис. 80. Использование мнимого источника для получения интерференции

В этом случае удобно рассмотреть не монохроматический источник, а источник, излучающий узкий спектр, симметричный относительно ω_0 . Поскольку источники, излучающие на различных частотах, не могут быть когерентными один относительно другого, разность фаз между ними меняется с течением времени, такой немонохроматический источник можно представить себе как непрерывное распределение монохроматических источников, которые некогерентны между собой.

Естественно, интенсивность излучения такого источника можно записать в виде функции прямоугольника:

$$I(\omega) = I_\omega \operatorname{rect} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\delta\omega} \right).$$

И теперь при расчете интерференционной картины достаточно рассмотреть интерференционную картину от каждого из источников, входящих в излучающую спектральную полосу, на экране наблюдения, рассчитать интенсивность от каждого такого источника, после чего эти интенсивности сложить, как и положено делать при вычислении картины, создаваемой системой некогерентных источников:

$$I_\Sigma = \int_0^\infty d\omega I_\omega(x) \sim \int_0^\infty d\omega \cos^2 \left(\omega \frac{x_A}{cl} \right).$$

При больших по сравнению с длиной волнового цуга разностях хода видность интерференционной картины быстро убывает. Это связано с тем, что если разность

хода больше длины цуга, то в таком случае свет, прошедший по первому пути никак не провзаимодействует со светом, прошедшим по второму пути, так как окажется в той же точке значительно позже.

 **Определение 7.4. Временная когерентность** - способность световых колебаний в данной точке пространства к интерференции после разделения исходного пучка на два и последующего их соединения с некоторой разностью хода.

7.5 Интерференция методом деления волнового фронта

Рассмотрим некоторые эксперименты по наблюдению интерференции *методом деления волнового фронта*.

Пусть источник света создает волновой фронт, на пути которого в разных точках пространства располагаются оптические устройства (линзы, щели, призмы и т.д.). Они создают вторичные световые пучки, являясь вторичными источниками света, в результате чего полученные пучки интерферируют между собой. В зависимости от того, какова степень пространственной когерентности исходного волнового фронта, вторичные источники оказываются либо когерентными, либо частично когерентными, в худшем случае некогерентными (интерференционная картина не наблюдается).

Сперва рассмотрим схему опыта по наблюдению интерференции с помощью бипризмы Френеля - треугольной призмы, составленной из двух меньших призм с очень малым углом при вершине.

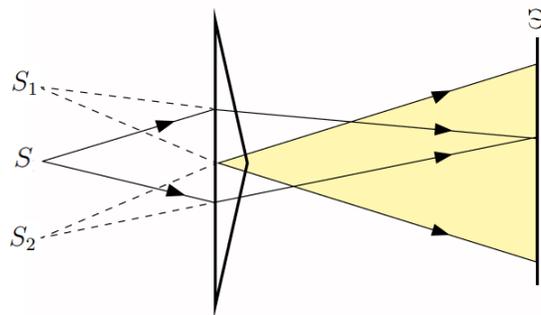


Рис. 81. Интерференция с помощью бипризмы Френеля

Световой пучок отклоняется каждой призмой, в результате чего лучи распространяются так, будто бы их испускает не источник S , а мнимые источники S_1 и S_2 . Они когерентны, так как колебания в них определяются колебаниями истинного источника света S . Поэтому в области, где перекрываются пучки первого и второго мнимого источника, возникает интерференционная картина на экране.

Затем рассмотрим схему опыта по наблюдению интерференции с помощью билинзы Бийе - тонкой линзы, разделенной пополам.

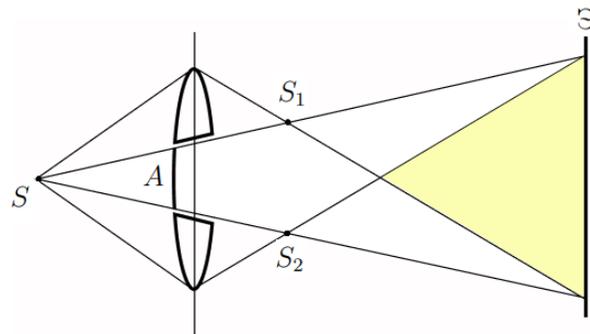


Рис. 82. Интерференция с помощью билинзы Бийе

Целая тонкая линза в случае, если источник света находится на ее оптической оси на расстоянии к линзе меньшем, чем фокусное, создает мнимое изображение точечного источника. Однако при делении такой линзы на две половины и их разнесении в пространстве каждая из половин будет создавать своё мнимое изображение, которое будет располагаться не на оптической оси, а смещено вверх или вниз в зависимости от величины смещения половинок.

Если же точечный источник расположить за первым фокусным расстоянием, то каждая из таких линз будет создавать вторичное действительное изображение в точках по другую ее сторону, в точках S_1 и S_2 , как показано на рисунке 82.

Как и в случае с бипризмой Френеля, область перекрывания пучков от вторичных источников является областью возникновения интерференции, а на экране появляются интерференционные полосы. Важно отметить, что для увеличения качества наблюдаемой интерференционной картины промежутки между половинками линз обычно закрывают, чтобы не пропускать свет от точечного источника.

Также существует схема, предложенная Ллойдом, где наблюдается интерференция света от реального источника S и его мнимого изображения в плоском зеркале, расположенном перпендикулярно экрану, на котором происходит наблюдение интерференционной картины.

7.6 Интерференция методом деления амплитуды

Ранее вторичные источники света возникали в результате взаимодействия различных участков волнового фронта с теми или иными оптическими объектами и деталями. Теперь рассмотрим ситуацию, когда используется один и тот же участок волнового фронта. Деление одного пучка или одной волны на две будет

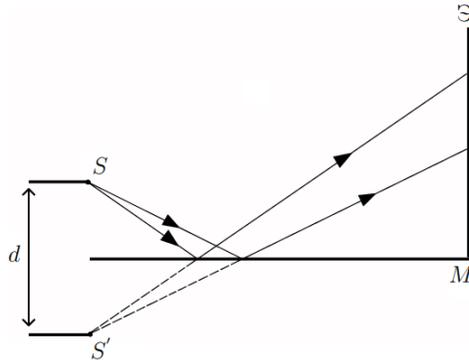


Рис. 83. Интерференция в схеме, предложенной Ллойдом

осуществляться за счёт явления частичного отражения и частичного пропускания света на границе раздела двух прозрачных сред.

Таким образом, попав на полупрозрачную пластинку волновой фронт частично отражается, создавая один пучок света и частично проходит внутрь, создавая второй пучок. Далее эти пучки каким-то образом надо свести вместе, чтобы смочь пронаблюдать интерференционную картину.

Сделать это можно следующим образом: при падении плоской монохроматической волны на плоскопараллельную пластинку возникает как минимум два отражения - от верхней и нижней границы. Затем, при выходе из пластины, эти две волны могут быть соединены, например, с помощью тонкой линзы в одну точку на экране наблюдения.

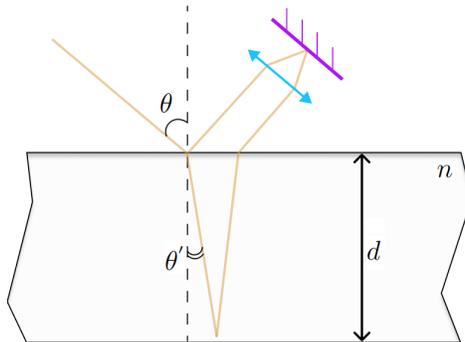


Рис. 84. Схема реализации метода деления амплитуды

Естественно, если имеется два различных пути для когерентных между собой колебаний, то в точке наблюдения обязана возникать интерференция. При расчёте разности хода между двумя интерферирующими пучками необходимо учесть следующие эффекты:

1. Второй из пучков прошёл в двух направлениях в плоскопараллельную стеклянную пластину. Относительно первого пучка существует определенная разность хода:

$$\delta S = 2n \frac{d}{\cos \theta'} - 2d \operatorname{tg} \theta' \sin \theta = 2nd \cos \theta' \implies \delta \varphi = \frac{4\pi nd}{\lambda} \cos \alpha + \pi. \quad (7.8)$$

2. Расстояние от поверхности пластины до линзы оказались различными.

Фазовый набег π в выражении (7.8) возникает при отражении света от оптически более плотной среды (потеря полуволны). Если для обоих пучков оказывается, что отражение происходит от более плотной среды, то учитывать фазовый набег не нужно. Такая интерференция может наблюдаться на тонком клине, как показано на рисунке 85.

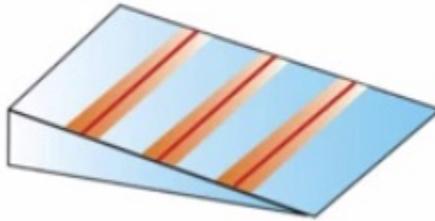


Рис. 85. Пример интерференции с помощью метода деления амплитуд на поверхности тонкого клина

Если стеклянный клин осветить монохроматическим излучением, то в зависимости от толщины клина будет происходить либо усиление, либо гашение волн, отражающихся от его поверхности и проходящих внутрь. В результате на поверхности клина будут получаться полосы, положение которых задаётся толщиной клина. Такие полосы называют *полосами равной толщины*.

Другим способом по наблюдению интерференции методом деления амплитуды есть опыт Ньютона, изображенный на рисунке 86.

Для проведения опыта необходимо положить на плоскую подложку линзу с большим радиусом кривизны. Расстояние между нижней гранью линзы и нижним краем подложки должно возрастать медленно с увеличением расстояния от центра. В результате от количества полуволн, помещающихся в этом зазоре, будет получаться усиление или гашение света. При облучении такой системы плоским монохроматическим светом на поверхности линзы будут возникать концентрические кольца.

Если же освещать тонкую плёнку не монохроматическим светом, а белым, то для каждой длины волны появится своя интерференционная картинка. В результате полосы окажутся смазаны, и каждая из таких полос будет представлять собой радужную картинку.

Именно такой механизм "окрашивает" крылья бабочки в разные цвета. Дело в том, что в крыльях бабочки есть тонкие чешуйки, толщина которых почти равна половине длины волны из видимого диапазона. В зависимости от толщины чешуйки свет, отражаясь от верхней и нижней грани чешуек, интерферирует, придавая им ту или иную окраску.

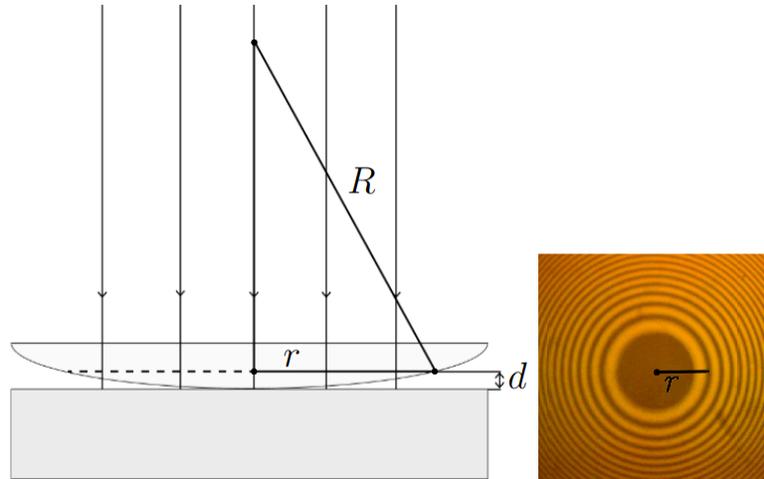


Рис. 86. Опыт Ньютона - получение интерференционных колец

7.7 Интерферометр Фабри-Перо. Многолучевая интерференция

В схему интерферометра Фабри-Перо входят два зеркала с коэффициентом отражения $R \simeq 99.9\%$, которые расположены параллельно друг другу на расстоянии d . Пусть на первое зеркало падает свет, практически полностью отражаясь, так что лишь малая часть света проходит.

Это процесс повторяется при взаимодействии со вторым зеркалом, затем с первым и так далее, то есть получается бесконечная последовательность пучков.

Можно определить условие, когда в области за интерферометром возникнет усиление света. Падающее излучение обозначим E_0 , а амплитудный коэффициент пропускания у зеркал t , отражения - r . Если они вещественны, то $r^2 = R$ (энергетический коэффициент отражения), а $t^2 = T$ (энергетический коэффициент пропускания). Тогда после прохождения первого зеркала излучение будет иметь значение $E_0 t$, после второго зеркала - $E_0 t^2$. В области между зеркал сперва отразится излучение $E_0 t r$, затем $E_0 t r^2$ (выйдет из второго зеркала $E_0 t^2 r^2$). Однако на выходе между лучами будет возникать разность фаз. Нулевая фаза выбрана произвольно и отмечена красной точкой на рисунке 87. Следовательно, второй вышедший луч можно записать в виде $E_0 t^2 r^2 e^{i\delta\varphi}$, третий - $E_0 t^2 r^4 e^{2i\delta\varphi}$ и так далее.

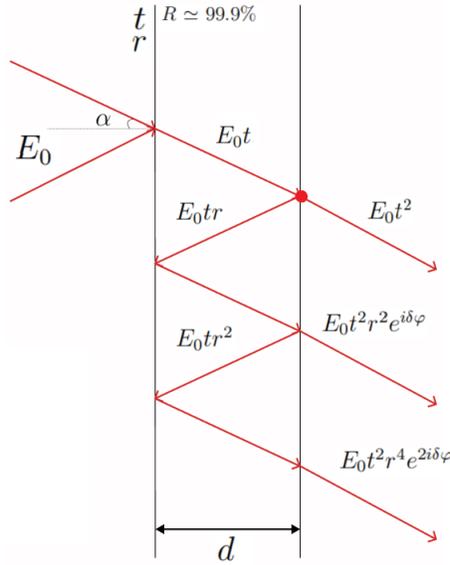


Рис. 87. Схема интерферометра Фабри-Перо

Таким образом, суммарное поле на выходе будет равно

$$E_{\Sigma} = E_0 t^2 (1 + r^2 e^{i\delta\varphi} + r^4 e^{2i\delta\varphi} + \dots) = \frac{E_0 t^2}{1 - r^2 e^{i\delta\varphi}}. \quad (7.9)$$

В скобках выражения (7.9) стоит убывающая геометрическая прогрессия. Запишем выражение для интенсивности суммарного поля на выходе интерферометра:

$$I = E_{\Sigma} E_{\Sigma}^* = \frac{E_0 t^2}{1 - r^2 e^{i\delta\varphi}} \cdot \frac{E_0 t^2}{1 - r^2 e^{-i\delta\varphi}} = \frac{I_0 t^4}{1 + r^4 - 2r^2 \cos \delta\varphi}, \quad (7.10)$$

где I_0 - интенсивность падающего света.

Достроим в знаменатель выражения (7.10) до полного квадрата - добавим и вычтем $2r^2$. Тогда с учетом закона сохранения энергии $R^2 + T^2 = 1$ получим:

$$\begin{aligned} I &= \frac{I_0 t^4}{(1 - r^2)^2 + 2r^2(1 - \cos \delta\varphi)} = \frac{I_0(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 4R^2 \sin^2 \frac{\delta\varphi}{2}} = \\ &= \frac{I_0}{1 + 4 \frac{R^2}{1 - R^2} \sin^2 \frac{\delta\varphi}{2}}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Так как R - практически 1, то второе слагаемое в знаменателе выражения (7.11) является бесконечным, следовательно, интенсивность везде кроме точек, где $\sin^2(\delta\varphi/2)$ обращается в нуль, а это происходит, когда:

$$\frac{\delta\varphi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} n \cos(\alpha) d = m\pi, \text{ где } m \in \mathbb{Z}. \quad (7.12)$$

На практике обычно делают так: ставят интерферометр и протяженный источник света в фокусе линзы, тогда из фокальной плоскости свет идет параллельным пучком. Однако от смещенных точек лучи идут под некоторыми углами, то есть не параллельно. Поэтому на интерферометр падает большое количество пучков света, которые идут под непрерывно меняющимися углами. Так, для некоторых углов свет будет проходить, а для других - нет.

Затем на выходе после второго зеркала ставят собирающую линзу, которая параллельные пучки собирает в точку, тогда в фокальной плоскости собирающей линзы появляются две яркие точки, а вся система симметрична относительно вращения, следовательно, в фокальной плоскости появится кольцо. В результате для углов, удовлетворяющих условию из формулы (7.12), получаются узкие, но очень яркие кольца (при условии если первичное излучение является монохроматическим). Если же имеются разные длины волн, то кольца различных цветов будут видны под разными углами, то есть кольца разложатся в спектр.

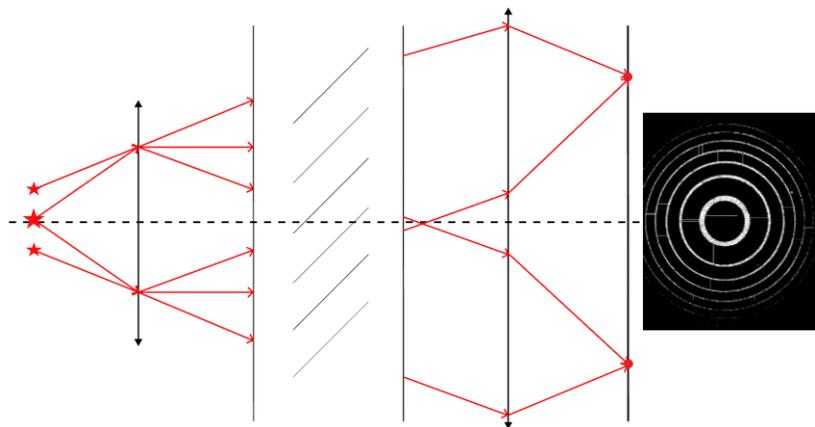


Рис. 88. Наблюдение интерференционных колец с помощью интерферометра Фабри-Перо

Стоит отметить, что чем больше радиус кольца, тем меньше порядок интерференции m , так как $\cos \alpha$ в выражении (7.12) является убывающей функцией.

Смещение спектральных линий из-за эффекта Зеемана можно с высокой точностью наблюдать с помощью интерферометра Фабри-Перо.

7.8 Интерферометр Майкельсона. Экспериментальное определение скорости света

Наиболее известным опытом Альберта Майкельсона является эксперимент по измерению скорости света, а также опыты по интерференции света, проведенные

на специально созданном им приборе. В дальнейшем этот прибор получил название *интерферометр Майкельсона*.

Принцип работы такого интерферометра заключается в следующем: от источника S свет попадает на светоделительную пластинку BS , после чего первая часть луча идет на зеркало M_1 , а вторая - на зеркало M_2 . После отражения от зеркал и обратного прохода через светоделительную пластинку лучи интерферируют. Результат интерференции можно наблюдать на экране или при помощи детектора.

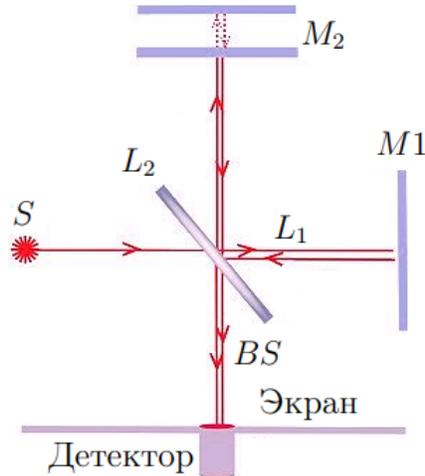


Рис. 89. Схема интерферометра Майкельсона

Расстояния от светоделительной пластинки до зеркал называются *плечами интерферометра*. Как видно из схемы интерферометра на рисунке 89, деление волны на две составляющие происходит методом деления амплитуды, а не методом деления волнового фронта, как в классической схеме Юнга.

Для проверки теории относительности можно поставить следующий опыт: интерферометр устанавливается на землю и приобретает скорость V относительно земли. Если оба пути прохождения света одинаковы, то будет усиление света. Если скорость света складывается со скоростью движения земли, то в одну сторону получим $V + c$, а в другую $V - c$. То есть свет распространяется то с увеличенной, то с уменьшенной скоростью. Чтобы не было задержки в передаче сигнала, нужно, чтобы плечи интерферометра были чуть-чуть разные. Если плечи расположены таким образом, что задержки стали одинаковыми, следует повернуть интерферометр на 90 градусов. При этом асимметрия переместится в другое плечо и интерференционные полосы должны сдвинуться, но данный эффект не был выявлен даже при очень точной постановке эксперимента.

После опыта Майкельсона стало понятно, что скорость света относительно поверхности земли одинакова в направлении движения Земли по ее орбите и в перпендикулярном направлении. Другими словами: скорость света одинакова во

всех направлениях и не зависит от движения источника. На основании этого принципа Альберт Эйнштейн создал теорию относительности.

7.9 Голография. Схема работы голографической установки

Когда мы видим какой-то объект, наш глаз распознает лишь вторичные волны, которые переизлучил этот объект от источника света. Если мы сможем восстановить электромагнитное поле, рассеянное объектом, мы сможем воспроизвести полное ощущение того, что мы видим этот объект.

Особенность технологии *голографии* состоит в том, что с помощью нее можно восстановить волновой фронт полностью - как яркость, так и глубину картины. Информация о яркости дается в амплитуде волны, а глубина характеризуется фазой волны - чем с большего расстояния бежит волна, тем больше у нее набег фазы. Обычная же фотография дает информацию только о яркости объекта, никак не затрагивая его глубину.

Для записи голограммы нужен лазер - устройство, где есть активная среда, как показано на рисунке 90. Обычно такая среда настраивается под углами Брюстера. Сделано это для того, чтобы не терять свет одной из поляризаций при отражении от призмы. Также активная среда помещается в зазор между двумя сферическими зеркалами, отражаясь от которых, свет с каждым разом все больше и больше усиливается (при этом небольшая часть света выходит из резонатора). В резонаторе возникает гауссов пучок - волна, которая на больших расстояниях похожа на сферическую волну, а в районе активной среды является почти плоской.

После резонатора слабо расходящаяся волна попадает на собирающую короткофокусную линзу. Далее свет попадает на длиннофокусную собирающую линзу. Расположим ее так, чтобы один из фокусов линзы совпадал с одним из фокусов первой короткофокусной линзы. При таком расположении свет пойдет параллельным пучком. На пути у плоской волны ставится полупрозрачное зеркало (50% света оно пропускает и 50% света отражает).

Дальше необходимо на пути отраженного света поставить голографируемый объект. Тогда электроны в атомах объекта начинают совершать вынужденные колебания, при этом сами атомы переизлучают монохроматическую волну на такой же частоте, как частота падающего света. В результате отраженная волна складывается с волной переизлученной, и получается суммарная волна, которая несет информацию о объекте. Такую волну называют *предметной волной*.

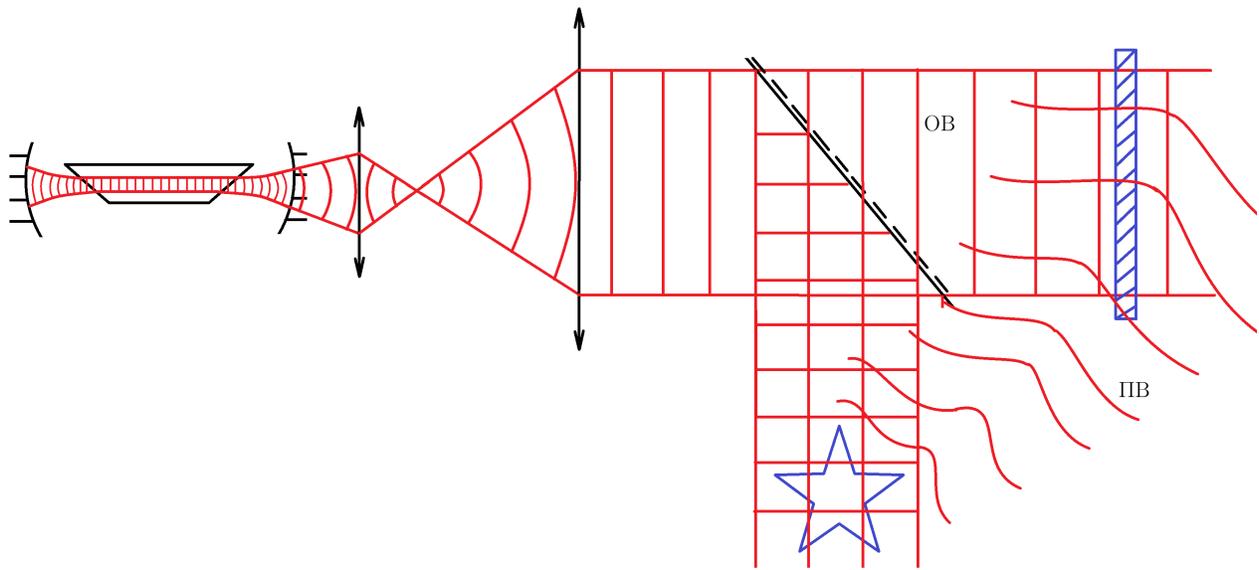


Рис. 90. Схема установки по записи голограммы



Определение 7.4. *Предметная волна* - излучение, складывающееся из волны, переизлученной голографируемым объектом, и волны, отражённой от светоделителя.

Волна, прошедшая через светоделитель, называется *опорной волной*.



Определение 7.5. *Опорная волна* - излучение, созданное лазером, не взаимодействующее напрямую с голографируемым объектом.

Важно отметить, что если расположить наблюдателя (в нашем случае фотопластинку) на месте перекрытия опорной и предметной волны, на фотопластинке мы увидим интерференционную картину. Если же каким-то образом сохранить предметную волну (при этом убрав сам объект), мы будем видеть изображение этого объекта на фотопластинке и дальше.

7.10 Запись голограмм

В предыдущем пункте была описана схема работы установки по записи голограммы. Теперь же рассмотрим на количественном уровне то, как происходит запись голограммы.

При этом важно отметить ряд требований, которые должны выполняться для успешной записи голограммы. В первую очередь, вся система должна быть неподвижна. А именно: важно сделать так, чтобы все расстояния изменялись не более чем на половину длины волны (в противном случае - светлая часть перейдет в

темную, и ничего не запишется). Также можно потребовать малое время экспонирования, что влечет за собой применение больших интенсивностей света (или же можно оставить интенсивность на небольшом уровне, однако необходимо будет использовать крайне чувствительные фотопластинки).

Теперь, если произвести запись голограммы на фотопластинку, после чего убрать объект, то при прохождении света через пластинку возникнет дифракция. При этом появится три волны - опорная, которая не вносит вклада в проявление голограммы; расходящаяся волна, продолжение которой будет сходиться к точкам голографируемого объекта и давать мнимое изображение объемного объекта; симметричная относительно пластинки к опорной волне - эта волна дает маленькое инвертированное изображение объекта (которое тяжело интерпретируется глазом, поэтому эту мешающую волну обычно гасят).

У голограммы есть ряд интересных свойств:

1. Если разбить фотопластинку, на которой вы наблюдаете голограмму, то на каждой осколке вы увидите маленькую часть изображения объекта, однако при вращении этой части, нетрудно будет увидеть и все изображение.

2. Если запись голограммы производилась при длине волны λ_0 , то при освещении этой фотопластинки светом с длиной волны λ' изображение видимого объекта изменится как отношение длин волн:

$$\frac{\lambda'}{\lambda_0} = \frac{L_0}{L'}$$

где L_0 и L' - размеры изображения при облучении светом с длиной волны λ_0 и λ' .

Из второго свойства голограмм возникает множество практических идей. Например, при записи голограммы облучить атом сильным гамма излучением, а потом при проявлении осветить атом светом из видимого диапазона частот. Тогда размер изображения атома будет значительно больше самого атома. В дальнейшем мы разберемся, почему такой проект неосуществим.

Теперь же перейдем к количественному описанию процесса записи голограмм. Расположим центр начала системы координат на фотопластинке. Будем считать, что толщина нашей голограммы (то есть фотопластинки) много меньше длины волны излучения.

Падающую на фотопластинку опорную волну будем характеризовать модулем вектора напряженности электрического поля $E_{оп}$, который равен:

$$E_{оп}(\vec{r}) = E_0 e^{ik_{оп}z}, \text{ где } \vec{k}_{оп} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \vec{e}_z.$$

Сложную предметную волну можно характеризовать величиной $E_{пр}$, которую

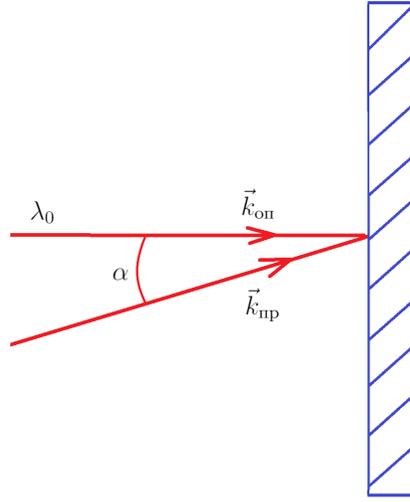


Рис. 91. Волновые вектора опорной и предметной волны

мы представим в виде разложения в ряд Фурье по плоским волнам:

$$E_{\text{пр}}(\vec{r}) = \int_{R^3} d\vec{k} E_{\text{пр}}(\vec{k}_{\text{пр}}) e^{i\vec{k}_{\text{пр}} \cdot \vec{r}} = \int_{R^3} d\vec{k} \cdot a(\vec{k}_{\text{пр}}) e^{i\delta(\vec{k}_{\text{пр}})} e^{i\vec{k}_{\text{пр}} \cdot \vec{r}}. \quad (7.13)$$

В формуле (7.13) амплитуду $E_{\text{пр}}(\vec{k})$ мы представили в экспоненциальном виде (произведение модуля комплексного числа $a(\vec{k}_{\text{пр}})$ на его фазу $e^{i\delta(\vec{k}_{\text{пр}})}$).

Из всего множества предметных волн выберем одну и проследим за записью от этой волны. Пусть эта волна распространяется так, как показано на рисунке 91. Тогда ее волновой вектор равен

$$\vec{k}_{\text{пр}} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\lambda_0} \sin \alpha \\ 0 \\ \frac{2\pi}{\lambda_0} \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Если отклик фотопластинки будет линеен по предметной волне (отклик на сумму волн будет равен сумме откликов), то, умея воспроизводить одну из волн, можно воспроизвести любую другую и, в конечном счете, их линейную комбинацию. Это позволяет восстановить весь волновой фронт.

Полное поле по принципу суперпозиции равно:

$$E_{\Sigma} = E_{\text{оп}} + E_{\text{пр}} = E_0 e^{ik_{\text{оп}}z} + a(\vec{k}_{\text{пр}}) e^{i\delta(\vec{k}_{\text{пр}})} e^{i\vec{k}_{\text{пр}} \cdot \vec{r}}.$$

Сосчитаем интенсивность света на фотопластинке:

$$\begin{aligned} I(x, y, z = 0) &= E_{\Sigma} \cdot E_{\Sigma}^* = \left(E_0 e^{ik_{\text{оп}}z} + a e^{i\delta} e^{i\vec{k}_{\text{пр}} \cdot \vec{r}} \right) \cdot \left(E_0 e^{-ik_{\text{оп}}z} + a e^{-i\delta} e^{-i\vec{k}_{\text{пр}} \cdot \vec{r}} \right) = \\ &= E_0^2 + a^2 + E_0 a e^{-i\delta} e^{-i([\vec{k}_{\text{пр}} - \vec{k}_{\text{оп}}] \cdot \vec{r})} + E_0 a e^{i\delta} e^{i([\vec{k}_{\text{пр}} - \vec{k}_{\text{оп}}] \cdot \vec{r})} = \end{aligned}$$

$$= E_0^2 + a^2 + 2E_0a \cos \left([\vec{k}_{\text{пр}} - \vec{k}_{\text{оп}}] \cdot \vec{r} + \delta \right) = E_0^2 + a^2 + 2E_0a \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \alpha + \delta \right).$$

После процесса записи голограммы необходимо ее обработать. На этом вопросе мы не будем заострять внимание. Скажем лишь то, что после обработки фотопластинки последняя становится похожей на слайд - появляются темные и светлые полосы. Значит, фотопластинке мы можем приписать некоторую функцию пропускания. Опыт показывает, что эта функция зависит от интенсивности пластинки следующим образом:

$$t(x,y) = I^\gamma(x,y) = \left\{ E_0^2 + a^2 + 2E_0a \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \alpha + \delta \right) \right\}^\gamma. \quad (7.14)$$

Причем параметр γ постоянен по всей площади пластинки. Этот параметр зависит от множества других параметров, таких как время экспонирования, химический состав пластинки, химический состав проявителя, длина волны излучения и т.д.

Важно отметить, что в большинстве случаев справедливо следующие соотношение для амплитуд опорной и предметной волны:

$$E_0 \gg a.$$

Значит, выражение (7.14) примет вид

$$\begin{aligned} t(x,y) &= E_0^{2\gamma} \left\{ 1 + \frac{a^2}{E_0^2} + 2\frac{a}{E_0} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \alpha + \delta \right) \right\}^\gamma \approx \\ &\approx E_0^{2\gamma} \left\{ 1 + 2\frac{a}{E_0} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \alpha + \delta \right) \right\}^\gamma \approx \\ &\approx E_0^{2\gamma} \left\{ 1 + 2\gamma\frac{a}{E_0} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \alpha + \delta \right) \right\} = t_0 + t_1 a \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \alpha + \delta \right). \end{aligned} \quad (7.15)$$

В точках, где функция пропускания принимает максимальное значение, будут наблюдаться почернение пластинки. Эти точки удовлетворяют следующим условиям:

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \alpha + \delta = 2\pi n \implies x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda_0}{\sin \alpha}. \quad (7.16)$$

Из формулы (7.16) видно, что расстояние между темными линиями пропорционально длине волны излучения, а также обратно пропорционально синусу угла падения. Это крайне важно, так как фотопластинка состоит из молекул, которые могут либо среагировать на свет, либо нет. Значит, расстояние между темными полосками должно быть больше, чем размеры молекул (нельзя на одной молекуле фотоэмульсии нарисовать несколько темных полосок). В нашем случае проблем

не возникает, так как длина волны излучения видимого диапазона порядка 10^{-7} м, а размер атома порядка 10^{-10} м.

Возвращаясь к вопросу о том, можно ли записать голограмму атома в гамма излучении, а потом проявить в видимом диапазоне, нам становится понятно, что такое сделать нельзя. У гамма излучения длина волны порядка 10^{-11} м, значит нам будет не подобрать пластинку для записи голограммы.

7.11 Синусоидальная решётка

Можно заметить, что фотопластинка чем-то похожа на дифракционную решетку. Только это не обычная дифракционная решетка, а дифракционная решетка с синусоидальным пропусканием, как показано на рисунке 92. То есть темные полосы не резкие, а размытые, ввиду наличия косинуса в формуле (7.15).

Значит, нам придется решать задачу о дифракции света на синусоидальной решетке. Эта задача является крайне важной, так как по теореме Фурье функцию пропускания любой реальной решетки можно представить как суперпозицию функций пропускания синусоидальных решеток. То есть любую другую задачу о дифракции света на дифракционной решетке можно свести к суперпозиции таких решеток.

Рассмотрим нашу задачу в приближении дифракции Фраунгофера и будем следить за изменением величин только вдоль оси x . Тогда поле после прохождения фотопластинки равно

$$E(\alpha'_x) = E' \int_{-\infty}^{\infty} t(x) e^{-ik'x \sin \alpha'_x} dx. \quad (7.17)$$

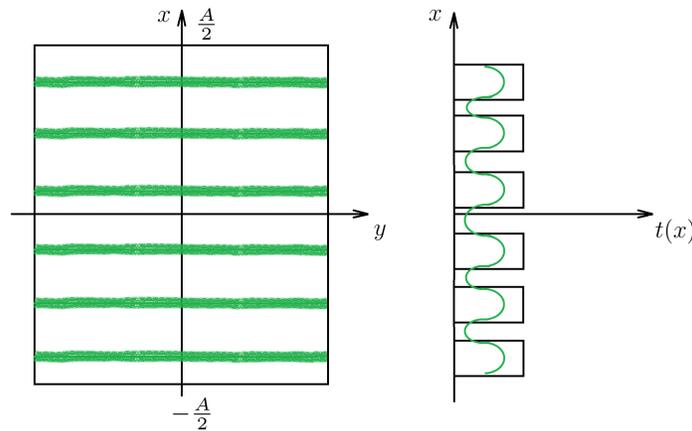


Рис. 92. Фотопластинка и ее функция пропускания

В формуле (7.17) α' - угол под которым наблюдаем дифракцию, k' - волновое число записывающего излучения на длине волны λ' , а E' - амплитуда поля лазера, считывающего голограмму.

С учетом конечных размеров голограммы, поле после дифракции равно

$$E(\alpha'_x) = E' \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \left(t_0 + t_1 a \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \alpha + \delta \right) \right) e^{-ik'x \sin \alpha'_x} dx. \quad (7.18)$$

В формуле (7.18) представим косинус угла по формуле Эйлера. Тогда поле будет равно

$$E(\alpha'_x) = E' \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} t_0 e^{-ik'x \sin \alpha'_x} dx + \frac{E'}{2} \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} t_1 a \left(e^{i\frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \alpha + i\delta} + e^{-i\frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \alpha - i\delta} \right) e^{-ik'x \sin \alpha'_x} dx.$$

Проводя элементарное интегрирование, получаем:

$$E(\alpha'_x) = t_0 E' \frac{\sin \left[\frac{\pi A}{\lambda'} \sin \alpha'_x \right]}{\frac{\pi A}{\lambda'} \sin \alpha'_x} + \frac{t_1}{2} E' a \frac{\sin \left[\pi A \left(\frac{\sin \alpha_x}{\lambda_0} - \frac{\sin \alpha_x}{\lambda'} \right) \right]}{\pi A \left(\frac{\sin \alpha_x}{\lambda_0} - \frac{\sin \alpha_x}{\lambda'} \right)} e^{i\delta} - \frac{t_1}{2} E' a \frac{\sin \left[\pi A \left(\frac{\sin \alpha_x}{\lambda_0} + \frac{\sin \alpha'_x}{\lambda'} \right) \right]}{\pi A \left(\frac{\sin \alpha_x}{\lambda_0} + \frac{\sin \alpha'_x}{\lambda'} \right)} e^{-i\delta}. \quad (7.19)$$

Первое слагаемое в формуле (7.19) ответственно за обычную дифракцию на тонкой пластинке. Второе слагаемое в том же выражении принимает максимальное значение при условии

$$\frac{\sin \alpha_x}{\lambda_0} = \frac{\sin \alpha'_x}{\lambda'} \implies \sin \alpha'_x = \sin \alpha_x \frac{\lambda'}{\lambda_0}. \quad (7.20)$$

Максимум поля волны будет в направлении угла α'_x , где α'_x удовлетворяет условию (7.20).

Аналогичным образом третье слагаемое в выражении (7.19) будет давать максимум поля при отрицательном угле. В этом слагаемом вся информация о волне перевернутая, за счет этого изображение, которое дает это слагаемое, будет инвертированным.

После прохождения света через голограмму из-за явления дифракции плоская волна становится немного "скошенной" по краям. Причем чем меньше размер

голограммы, тем этот эффект сильнее, поэтому при записи малых голограмм их качество ухудшается.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается опыт Юнга?
2. Какой формулой определяется интенсивность в точке на экране наблюдения в реальном опыте Юнга?
3. Покажите графически, как зависит интенсивность от x координаты точки на экране в реальном опыте Юнга от различных значений ширины щелей.
4. Каким выражением определяется функция видности?
5. Что такое временная когерентность?
6. Какие оптические схемы можно реализовать для наблюдения интерференции методом деления волнового фронта?
7. Какие эффекты учитываются при расчёте разности хода между двумя интерферирующими пучками при рассмотрении метода деления амплитуды?
8. В чем заключается опыт Ньютона?
9. Чем объясняется зависимость радиуса колец от порядка интерференции в интерферометре Фабри-Перо?
10. Каким образом с помощью интерферометра Майкельсона можно проверить положения теории относительности?
11. Чем объясняется отсутствие возможности записи голограммы атома?

8 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

К концу 19 века казалось, что весь окружающий нас мир описывается классической физикой, которая строится на фундаментальных принципах, таких как Ньютоновский формализм, тесно сопряженный с детерминизмом Лапласа, и специальная теория относительности Эйнштейна.

Однако даже в то время существовал ряд проблем, полное описание которых классическая физика дать не могла. Например, было известно, что теплоемкость газов пропорциональна числу степеней свободы частиц. С некоторой точностью этот факт согласовался с экспериментом. Но когда выяснилось, что в атомах есть электроны, а в ядрах протоны и нейтроны, число степеней свободы в системе стало намного больше. Возникает вопрос: почему степени свободы электронов, протонов и нейтронов не участвуют в теплоемкости газа? На этот вопрос классическая физика давала неоднозначный ответ. Также ряд проблем возникал при теоретическом описании опыта Резерфорда. Эти проблемы изложены в параграфе 8.1.

Но одной из главных проблем физики был вопрос излучения нагретых тел. Опыт показывал, что нагретые тела излучают свет, который можно разложить в спектр с помощью дифракционной решетки. В результате на эксперименте получался спектр излучения, который сильно отличался от теоретической зависимости интенсивности от частоты. Решение этой проблемы, о которой мы подробно поговорим в параграфах 8.2 - 8.4, не смогли найти в классической физике. Речь идет про *ультрафиолетовую катастрофу*, которая стоит у истоков квантовой физики.

8.1 Ультрафиолетовая катастрофа. Опыт Резерфорда

Изучая рассеяние альфа-частиц через тонкую фольгу, Резерфорд ожидал, что альфа-частицы, пролетающие через тонкий слой, должны вести себя одинаково. Такого результата Резерфорд ожидал, так как сделал предположение, что атомы фольги являются сплошными.

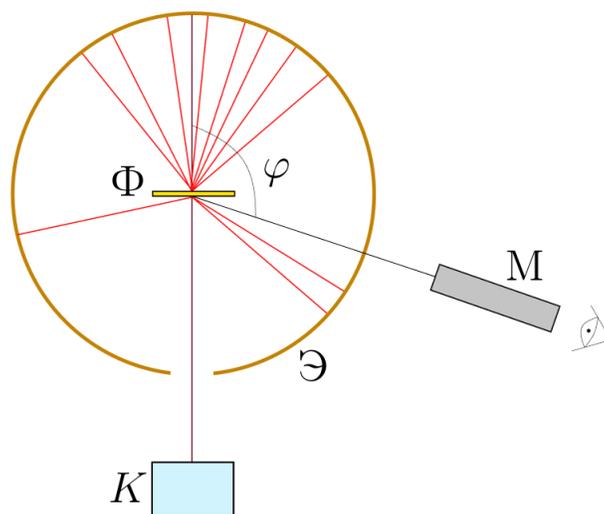


Рис. 93. Схема опыта Резерфорда

Однако опыт показал следующее: несмотря на то, что почти все альфа-частицы пролетели насквозь, некоторые из них все же отклонялись от заданного направления. По характеру рассеяния альфа-частиц Резерфорд сделал вывод, что рассеяние происходит на положительных частицах. Логично предположить, что объект, рассеивающий альфа-частицы, во столько раз отличается от размера атома, во сколько раз число рассеянных частиц отличается от числа частиц, пролетевших прямо. Из этих соображений был оценен размер ядра.

Оказалось, что размер ядра намного меньше всего атома. Тогда возникает вопрос: а что именно определяет размер атома? По аналогии с солнечной системой была предложена модель атома Резерфорда. Данная модель имеет принципиальное противоречие: электроны имеют заряд и движутся с центростремительным ускорением. Классическая электродинамика показывает, что такая система излучает электромагнитные волны, теряя энергию, что должно опровергать стабильность атома. Электрон должен упасть на ядро за время 10^{-8} с. К тому же, по мере потери энергии радиус орбиты электрона уменьшается, а момент импульса должен сохраняться, так как движение происходит в центральном поле. Значит, он должен крутиться с возрастающей частотой. В таком случае увеличится и частота излучения, переходя в область ультрафиолета и рентгеновского излучения - это противоречие получило название ультрафиолетовой катастрофы. Для качественного рассмотрения этой проблемы рассмотрим модель *абсолютно черного тела*.

8.2 Абсолютно чёрное тело

Из школьной физики известно, что разные тела поглощают свет по-разному. Отсюда возникает идея рассмотреть модель тела, которое при абсолютном нуле по

шкале Кельвина, поглощает все падающее на него излучение. Так, при поглощении тело должно начать излучать тепло, причем интенсивность этого излучения напрямую зависит от величины интенсивности поглощаемого излучения телом. Объяснить это можно тем, что абсолютно черное тело находится в термодинамическом равновесии с объемом, в котором оно локализовано. Таким образом, модель абсолютно черного тела является не только идеальным поглотителем, но и самым ярким излучателем.

Конкретизируем нашу модель: рассмотрим замкнутую полость, в которой сделано небольшое отверстие, причем последнее не сильно изменит условия, в которых находится излучение внутри полости (отверстие можно считать физически бесконечно малым). Так, при малых размерах отверстия, можно сказать, что вероятность выхода излучения за пределы объема черного пренебрежена мала. Тогда, со временем в объеме полости устанавливается термодинамическое равновесие, и отверстие в полости поглощает столько же излучения, сколько излучает.

В итоге, можно сказать, что само отверстие в полости является абсолютно черным телом, излучение которого в свою очередь обладает рядом свойств (полученных из эксперимента):

1. Излучение однородно и изотропно;
2. Излучение отверстия не несет информации о том, что располагается внутри полости;
3. Излучение черного тела не поляризовано.

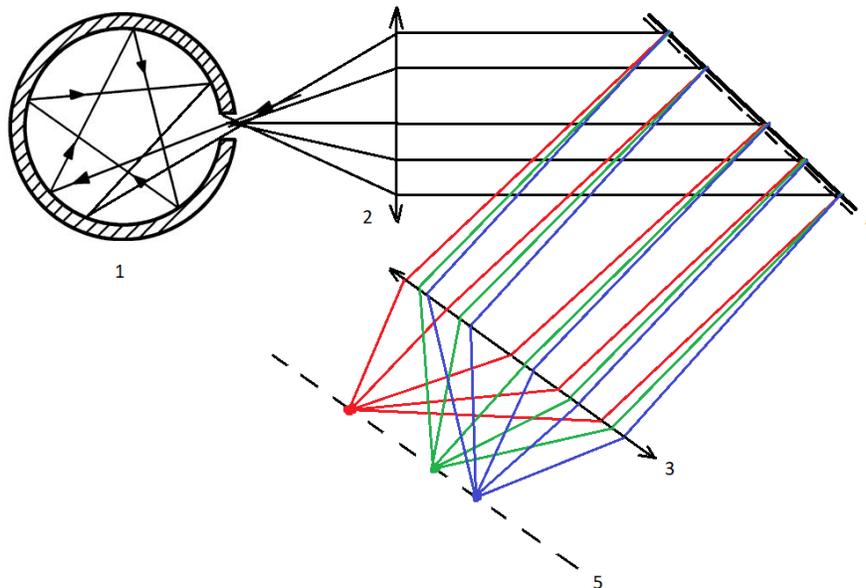


Рис. 94. Опыт с черным телом и дифракционной решеткой

Зададимся вопросом о спектральных свойствах излучения абсолютно черного тела. Для этого пропустим испускаемый черным телом свет через спектральный прибор (дифракционную решетку). Для этого необходимо отверстие расположить в фокусе собирающей линзы. Полученный параллельный пучок излучения всех длин волн попадет на дифракционную решетку, где свет каждой длины волны отклонится на разный угол. Тогда, собрав все излучение на экране, можно получить распределение интенсивности излучения в зависимости от частоты.

Полученная зависимость приведена на рисунке 95.



Физический закон 8.1. Закон смещения Вина

Опыт показывает, что при увеличении температуры излучающего тела, максимум интенсивности будет сдвигаться во столько же раз, во сколько была увеличена температура тела:

$$\boxed{\frac{\omega_{max}}{T} = \text{const}.} \quad (8.1)$$

Вторым эмпирическим соотношением можно назвать *закон Стефана-Больцмана*.



Физический закон 8.2. Закон Стефана-Больцмана

Площадь под графиком зависимости объемной плотности энергии излучения $\mathcal{W}_E(\omega)$ от частоты ω пропорциональна 4 степень температуры излучающего тела:

$$\boxed{\int_0^{\infty} \mathcal{W}_E(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} \frac{|E(\omega)|^2}{8\pi} d\omega = \sigma T^4.}$$

Важно отметить, что абсолютно черное тело - в первую очередь абстрактная модель, которая в реальности неосуществима. В действительности мы можем создать условия для почти полностью поглощающих тел - их принято называть серыми телами. Такие реальные тела принято характеризовать коэффициентом серости.

Итак, мы сформулировали два эмпирических закона, которые никак не могла объяснить классическая физика. Помимо описанных законов, на практике наблюдались еще более странные эффекты. Например, в случае излучения газа из молекул водорода его спектр был дискретным, причем частоты, на которых излучал газ, задавались формулой:

$$\omega = \text{const} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right),$$

где n_1 и n_2 были последовательные натуральные числа.

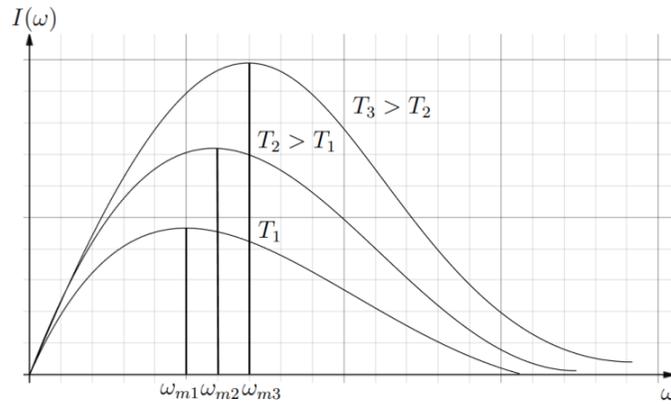


Рис. 95. Физический спектр для черного тела

Посмотрим, как именно классическая физика пыталась дать обоснование этим законам.

8.3 Плотность энергии излучения черного тела

Для начала расположим внутри объема полости гармонический осциллятор с собственной частотой колебаний ω_0 . Через некоторый промежуток времени осциллятор придет в термодинамическое равновесие с излучением внутри полости. Значит, условие равновесия можно записать как равенство средних мощностей поглощения и излучения:

$$\langle N_{\text{изл}} \rangle = \langle N_{\text{погл}} \rangle.$$

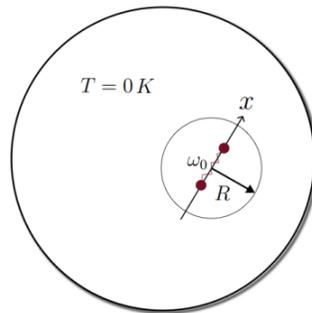


Рис. 96. Осциллятор в черном теле

Мощность излучения будем искать через 2 закон Ньютона, причем ось Ox будет направлена вдоль оси колебания осциллятора:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{q}{m} E(t) = \frac{q}{m} E(\omega) e^{-i\omega t}, \quad (8.2)$$

где β - коэффициент затухания движения, $E(\omega)$ - поле, излучаемое осциллятором.

Чтобы представить поле, излучаемое осциллятором, воспользуемся ранее упомянутым приближением колебания осциллятора только на собственной частоте. Тогда получим:

$$E(\omega) \approx E(\omega_0) = \frac{\ddot{d}_x \sin \theta}{Rc^2}.$$

С учетом нашего приближения запишем выражение для дипольного момента осциллятора, зная которое, нетрудно конкретизировать поле, излучаемое осциллятором:

$$d_x(t) = d_0 e^{-i\omega_0 t} \implies E(\omega_0) = -\omega_0^2 \frac{d_0 \sin \theta}{Rc^2} e^{-i\omega_0 t}. \quad (8.3)$$

Для нахождения мощности излучения осциллятора нам необходимо знать, чему равен вектор Пойтинга (интеграл по поверхности от которого даст искомую мощность). Посчитаем его, подставив выражение (8.3) в формулу (2.8):

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} |E(\omega_0)|^2 = \frac{c}{8\pi} \cdot \frac{\omega_0^4 d_0^2 \sin^2 \theta}{R^2 c^4} = \frac{\omega_0^4 d_0^2 \sin^2 \theta}{8\pi R^2 c^3}.$$

Посчитанный вектор Пойтинга характеризует излучаемую осциллятором энергию в единицу времени через единичную площадку.

Посчитаем поток вектора Пойтинга через сферу сколь угодно большого радиуса. Удобнее всего это сделать, вводя сферические координаты:

$$\begin{aligned} \langle N_{\text{изл}} \rangle &= \oint_S (\langle \vec{S} \rangle; d\vec{s}) = \frac{\omega_0^4 d_0^2}{8\pi c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{R^2} \cdot R^2 \sin \theta d\theta = \frac{\omega_0^4 d_0^2}{8\pi c^3} \cdot 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \\ &= \frac{\omega_0^4 d_0^2}{4c^3} \int_\pi^0 (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) = \frac{\omega_0^4 d_0^2}{4c^3} \left(\cos 0^\circ - \frac{\cos^3 0^\circ}{3} - \cos \pi + \frac{\cos^3 \pi}{3} \right) = \frac{\omega_0^4 d_0^2}{3c^3}. \end{aligned}$$

Посчитаем энергию, запасенную в осцилляторе, и выразим через неё дипольный момент осциллятора d_0 :

$$W_{\text{осц}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 d_0^2}{2q^2} \implies d_0^2 = \frac{2q^2 W_{\text{осц}}}{m\omega_0^2}.$$

Таким образом, мощность, излучаемая осциллятором, равна

$$\langle N_{\text{изл}} \rangle = \oint_S (\langle \vec{S} \rangle; d\vec{s}) = \frac{\omega_0^4 d_0^2}{3c^3} = \frac{2\omega_0^2 q^2}{3mc^3} W_{\text{осц}}. \quad (8.4)$$

Посчитаем мощность, поглощающуюся осциллятором. Для этого вспомним, что осциллятор находится в термодинамическом равновесии с черным телом. Тогда можно утверждать, что работа силы упругости в среднем равна работе диссипативной силы:

$$F_x = 2\beta m V_x.$$

Теперь выразим среднюю мощность, поглощаемую осциллятором:

$$\langle N_{\text{погл}} \rangle = \langle F_x V_x \rangle = \langle 2\beta m V_x^2 \rangle.$$

Для того, чтобы найти квадрат x проекции скорости частицы, необходимо решить дифференциальное уравнение (8.2) 2-го порядка относительно координаты. Решение такого уравнение нам уже встречалось в параграфе 4.4. Рассмотрение задачи будем вести после характерного времени затухания однородного решения:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-i\omega t} \implies x(t) = \frac{E_x(\omega)q}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega)} e^{-i\omega t}.$$

$$V_x(t) = \frac{(-i\omega)q}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega)} E_x(\omega) e^{-i\omega t}.$$

Для того, чтобы найти квадрат x компоненты скорости, необходимо сначала найти действительную часть от полученного выражения, так как возведение в квадрат - операция нелинейная, а комплексные числа были введены нами исключительно для удобства:

$$\text{Re}[V_x(t)] = \text{Re} \left[\frac{\omega q E(\omega)}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2)} \{(-i)(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega)(\cos \omega t - i \sin \omega t)\} \right]$$

$$\text{Re}[V_x(t)] = \frac{\omega q E(\omega)}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2)} \{-(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \omega t + 2\beta\omega \cos \omega t\} \implies$$

$$\langle V_x(t) \rangle^2 = \frac{\omega^2 q^2 E^2(\omega)}{m^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2)^2} \{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \langle \sin^2 \omega t \rangle + 4\beta^2 \omega^2 \langle \cos \omega t \rangle\} =$$

$$= \frac{\omega^2 q^2 E^2(\omega)}{m^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2)^2} \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 \cdot \frac{1}{2} + 4\beta^2 \omega^2 \cdot \frac{1}{2} \right\} = \frac{\omega^2 q^2 E^2(\omega)}{2m^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2)}.$$

По итогу, выражение для средней мощности, которую поглощает диполь, примет вид

$$\begin{aligned} \langle N_{\text{погл}} \rangle &= \langle 2\beta m V_x^2 \rangle = \frac{\omega^2 q^2 E^2(\omega)}{2m^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2)} \cdot 2\beta m = \\ &= \frac{\beta \omega^2 q^2 E^2(\omega)}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2)}. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Как можно заметить, средняя мощность, поглощаемая осциллятором, явно зависит от частоты излучения, поэтому нам необходимо проинтегрировать наш результат по всем частотам. Прежде этого следует воспользоваться одним из свойств абсолютно черного тела: интенсивность излучения одинакова по величине во всех трех направлениях. Таким образом:

$$I_x(\omega) = E_x^2(\omega) = \frac{1}{3}E^2(\omega) \implies \mathcal{W}_E(\omega) = \frac{E^2(\omega)}{8\pi} = \frac{3E_x^2(\omega)}{8\pi}. \quad (8.6)$$

Заменяв квадрат x компоненты напряженности согласно формулам (8.5) и (8.6), мы получим выражение для поглощаемой мощности:

$$\langle N_{\text{погл}}^\Sigma \rangle = \int_0^\infty d\omega \frac{\beta\omega^2 q^2 E^2(\omega)}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2)} = \int_0^\infty d\omega \frac{\beta\omega^2 q^2 \mathcal{W}_E(\omega) \cdot 8\pi}{3m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2)}. \quad (8.7)$$

Заметим, что резонансный знаменатель в формуле (8.7) представляет собой резкую функцию, которая равна нулю на частотой области, кроме точки $\omega = \omega_0$. Поэтому сделаем приближение и вынесем $\mathcal{W}_E(\omega)$ за знак интеграла. При этом $\mathcal{W}_E(\omega)$ будет взята в точке $\omega = \omega_0$. Кроме того, для упрощения заменим нижний предел на $-\infty$:

$$\begin{aligned} \langle N_{\text{погл}}^\Sigma \rangle &= 8\pi \frac{\beta q^2}{3m} \mathcal{W}_E(\omega_0) \int_{-\infty}^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} = \\ &= \frac{2\pi\beta q^2}{3m} \mathcal{W}_E(\omega_0) \int_{-\infty}^\infty \frac{\omega^2 d(\omega - \omega_0)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}. \end{aligned}$$

Далее представим $\omega_0^2 - \omega^2$ как $(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)$. Причем $\omega_0 + \omega \approx 2\omega$, так как вклад вносят частоты, находящиеся в окрестности резонансной частоты. Заметим, что функция $(\omega_0 - \omega)$ является быстро меняющейся в окрестности точки ω_0 . В итоге мы получим:

$$\langle N_{\text{погл}}^\Sigma \rangle = \frac{2}{3}\pi \frac{\beta}{\beta^2} \frac{q^2}{m} \mathcal{W}_E(\omega_0) \beta \int_{-\infty}^\infty \frac{\frac{d(\omega_0 - \omega)}{\beta}}{\frac{(\omega_0 - \omega)^2}{\beta^2} + 1} = \frac{2}{3}\pi \frac{q^2}{m} \mathcal{W}_E(\omega_0) \pi = \frac{2}{3} \frac{\pi^2 q^2}{m} \mathcal{W}_E(\omega_0). \quad (8.8)$$

Из условия равенства поглощаемой и излучаемой мощности можно найти плотность электрической энергии на частоте ω_0 , согласно формулам (8.4) и (8.8):

$$\langle N_{\text{погл}}^\Sigma \rangle = \langle N_{\text{изл}} \rangle \implies \frac{2}{3} \frac{\pi^2 q^2}{m} \mathcal{W}_E(\omega_0) = \frac{2\omega_0^2 q^2}{3mc^3} W_{\text{осц}} \implies$$

$$\mathcal{W}_E(\omega_0) = \frac{\omega_0^2}{\pi^2 c^3} W_{\text{осц}}(\omega_0). \quad (8.9)$$

Полученное выражение (8.9) для плотности электрической энергии осциллятора можно обобщить для любой частоты излучения, так как осциллятор можно выбрать произвольный.

Теперь мы можем найти среднюю энергию осциллятора. Сделать это можно с помощью статистики Максвелла - Больцмана.

 **Определение 8.1. Статистика Максвелла-Больцмана - статистический метод описания физических систем, содержащих большое число невзаимодействующих частиц, движущихся по законам идеального газа.**

$$\langle W_{\text{осц}} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W \cdot \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) dW.$$

Вычислим константу, используя условие нормировки, изменяя нижний предел на 0 ввиду того, что отрицательные частоты нам неинтересны:

$$1 = \int_0^{\infty} \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) dW \implies \text{const} = \frac{1}{\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) dW}.$$

Тогда средняя энергия осциллятора равна

$$\begin{aligned} \langle W_{\text{осц}} \rangle &= \frac{\int_0^{\infty} W \cdot \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) dW}{\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) dW} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial\left(-\frac{1}{kT}\right)} \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) dW}{\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) dW} = \\ &= \frac{\frac{d}{d\left(-\frac{1}{kT}\right)} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) dW}{\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) dW} = \frac{d}{d\left(-\frac{1}{kT}\right)} \ln\left(\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) dW\right) = \\ &= \frac{d}{d\left(-\frac{1}{kT}\right)} \ln\left(\frac{1}{1/kT}\right) = kT. \end{aligned}$$

Таким образом, можем заключить:

$$\langle W_{\text{осц}} \rangle = kT. \quad (8.10)$$

Полученный нами результат (8.10) несколько не удивительный. Из классической статистики мы помним, что для одной степени свободы кинетическая энергия равна $\frac{1}{2}kT$, а с учетом того, что потенциальная энергия в нашем случае равна кинетической, получаем, что полная энергия равна kT .

Финальный результат для плотности электрической энергии осциллятора, находящегося в термодинамическом равновесии с абсолютно черным телом, выглядит следующим образом:

$$\mathcal{W}_E(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT. \quad (8.11)$$

На рисунке 97 приведён график зависимости (8.11):

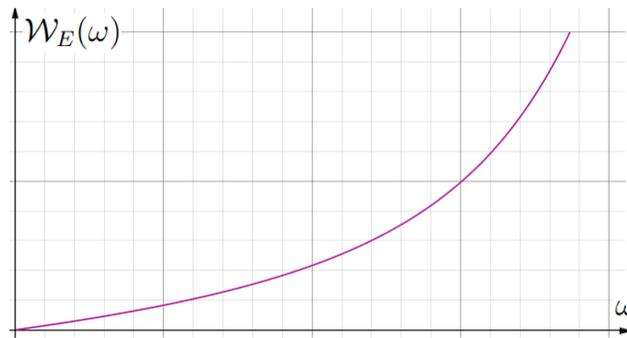


Рис. 97. Зависимость $\mathcal{W}_E(\omega)$ для черного тела с классической точки зрения

Заметим, что плотность энергии зависит квадратично от частоты колебаний осциллятора. Проинтегрировав по всем частотам плотность энергии (или же считав полную интегральную светимость черного тела), мы получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_E(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT d\omega = +\infty.$$

Данный результат свидетельствует о том, что абсолютно черное тело должно светиться интегрально бесконечно ярко, причем расходимость возникает в области высоких частот. Таким образом, мы опять пришли к *ультрафиолетовой катастрофе* - вещество передает всю свою энергию полю, как это было в случае электрона в модели атома Резерфорда.

Если в различных разделах физики мы сталкиваемся с одной и той же проблемой, это значит, что с нашей теорией что-то не так. Первым, кто предложил исправить имеющиеся представления о энергии и излучении был Макс Планк, гипотеза которого будет представлена в следующем параграфе.

8.4 Гипотеза Планка

Планк занимался вопросом решения УФ-катастрофы. Ключевым шагом в построении новой теории являлось предположение, что обмен энергиями между объектом и полем должен происходить не непрерывно, а дискретно. Планковский квант, то есть минимальная порция энергии, которая может передаться полю от вещества, представлена формулой (8.12):

$$\delta W = h\omega. \quad (8.12)$$

Таким образом, осциллятор на частоте ω с полем может меняться только такими порциями энергии. На рисунке 98 представлены возможные энергетические уровни электромагнитного поля.

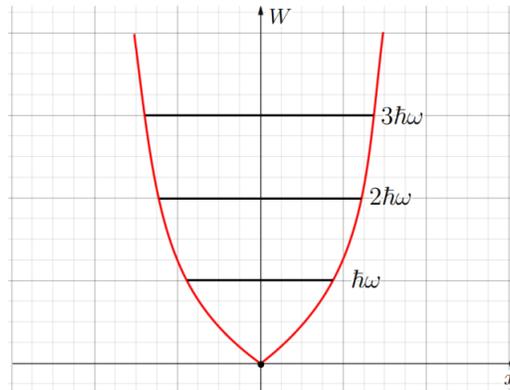


Рис. 98. Энергия электромагнитного поля

Энергия, которой может обладать осциллятор (n - целое число), выражается с помощью формулы (8.13), однако на самом деле Планк ошибся, так как выражение (8.13) необходимо умножить не на n , а на $n + 1/2$ - доказательство этого утверждения будет показано позже:

$$W_n = h\omega n. \quad (8.13)$$

Средняя энергия, следовательно, теперь выражается не через интегрирование, а с помощью суммирования:

$$\langle W \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} W_n \exp \frac{-W_n}{kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp \frac{-W_n}{kT}}.$$

А если W_n (расстояние между энергиями) гораздо меньше, чем kT , то слагаемые находятся очень близко друг к другу (предполагается, что это происходит на низких частотах), тогда полученный результат будет совпадать с классикой:

$$\begin{aligned}
\langle W \rangle &= \frac{\partial}{\partial(-\frac{1}{kT})} \sum_{n=0}^{\infty} \ln \left(\exp -\frac{h\omega}{kT} \right)^n = -\frac{\partial}{\partial(\frac{1}{kT})} \ln \frac{1}{1 - \left(\exp -\frac{h\omega}{kT} \right)^n} = \\
&= -\frac{\partial}{\partial\zeta} \ln (1 - \exp(-h\omega\zeta)) = \frac{-\exp(-h\omega\zeta)(-h\omega)}{1 - \exp(-h\omega\zeta)} = h\omega \frac{1}{\exp(\frac{h\omega}{kT}) - 1}. \quad (8.14)
\end{aligned}$$

Используя формулу (8.14), получаем выражение для объемной плотности энергии излучения чёрного тела (формула Планка):

$$\boxed{\mathcal{W}(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} h\omega \frac{1}{\exp(\frac{h\omega}{kT}) - 1}}. \quad (8.15)$$

В формуле (8.15) $h\omega$ - энергия одного фотона (будет показано далее), а множитель перед $h\omega$ - степень вырождения.

В случае, если частоты маленькие, то мы получим совпадение с классической теорией (выражение 8.11):

$$\mathcal{W}(\omega \rightarrow 0) \approx \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} (h\omega) \frac{1}{1 + (\frac{h\omega}{kT}) - 1}.$$

А если частоты имеют большие значения, то наблюдается экспоненциальный спад плотности энергии электромагнитного поля:

$$\mathcal{W}(\omega \rightarrow \infty) \approx \frac{h\omega^3}{\pi^2 c^3} \exp\left(-\frac{h\omega}{kT}\right).$$

Из формулы Планка (8.15) можно получить закон смещения Вина (8.16) с помощью нахождения максимума функции, приравнивая производную к нулю:

$$\frac{\omega_{max}}{T} = \text{const}. \quad (8.16)$$

8.5 Фотоны. Первое знакомство. Фотоэффект

Для реализации опыта по наблюдению фотоэффекта берётся конденсатор, одна обкладка которого имеют сетчатую структуры для пропускания света. Вся экспериментальная установка помещается в откачивающую колбу для создания вакуума. Опыт будет заключаться в снятии ВАХ и анализом ее изменений. При разрыве цепи ВАХ будет нулевым, однако при облучении конденсатора светом

будет возникать ток, даже если подаваемое внешнее напряжение на цепь будет нулевым. Это объясняется тем, что электронам при взаимодействии с облучаемым светом передается кинетическая энергия, которой хватает, чтобы выбиваемые электроны пробежали по цепи и замкнули цепь. Однако со временем значение тока перестает возрастать, так как он определяется количеством рожденных электронов в ходе взаимодействия со светом. Это явление называется током насыщения.

Ток насыщения даёт информацию о том, сколько электронов выбивается светом. Помимо этого существует понятие напряжения запираения. Чтобы объяснить это явление, необходимо рассмотреть, что происходит с системой, когда прикладывается отрицательный потенциал, равный кинетической энергии выбитого электрона. В этом случае электрону уже не хватает энергии, и ток прекращается:

$$qU_{\text{зап}} = \frac{mV^2}{2}.$$

Таким образом, можно сделать важный вывод, что, измеряя напряжение запираения, можно оценивать энергию выбитых электронов, а ток насыщения - количество электронов.

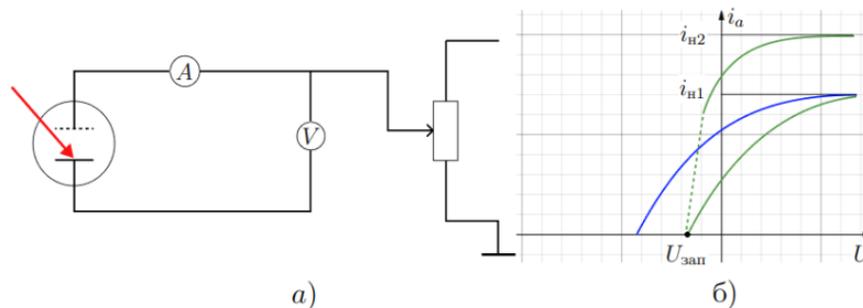


Рис. 99. Фотоэффект: а) экспериментальная установка, б) график зависимость тока от напряжения (вольт-амперная характеристика)

Из предыдущих полученных знаний из курса оптики было получено, что

$$\vec{S} \sim \mathcal{W} \sim I = |\vec{E}|^2.$$

Получается, что при увеличении интенсивности света должна увеличиваться энергия запираения. Однако на эксперименте видно, что при увеличении интенсивности света напряжение запираения не меняется, а изменяется только величина тока насыщения. Следовательно, интенсивность света приводит к увеличению числа выбитых электронов, но не к увеличению их энергии. Однако важно заметить, что если менять цвет излучения (частоту света), сохраняя интенсивность, значение тока насыщения остается таким же, а напряжение запираения изменяется. В свою очередь, при облучении красным цветом, который обладает маленькой энергией, можно добиться отсутствия фотоэффекта.

Эксперимент по наблюдению фотоэффекта позволил Эйнштейну предположить, что свет - это корпускулы, а у каждой корпускулы энергия является квантом. С этого момента интенсивность света - это количество падающих корпускул, а энергия - частота падения этих частиц.

Корпускулы - это, в привычном понимании для всех, фотоны.

Контрольные вопросы

1. Какими свойствами обладает абсолютно черное тело?
2. Какие эмпирические законы возникают при рассмотрении абсолютно черного тела?
3. Чему равна средняя энергия осциллятора? Как полученное значение объясняется классической статистикой?
4. Из каких соображений можно прийти к явлению ультрафиолетовой катастрофы? Какие математические результаты подтверждают это?
5. В чем состоит гипотеза Планка?
6. Как преобразуется формула Планка при маленьких и больших значениях частот?
7. Какую информацию дают нам ток насыщения и напряжение запираения при рассмотрении явления фотоэффекта?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Световое давление

Возвращаясь к 4-векторам и пространству Минковского, посчитаем скалярное произведение 4-вектора энергии-импульса самого на себя:

$$(\vec{P}, \vec{P}) = \frac{W^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2, \text{ где } \vec{p} = \frac{m_0 \vec{V}}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (1)$$

Из последнего соотношения (1) для частного случая, когда $V \approx c$, получаем: $m_0 = 0$. Следовательно, для фотонов:

$$\frac{W^2}{c^2} - p^2 = 0 \implies \left| \frac{W}{c} \right| = |p| \implies p = \frac{\hbar \omega}{c}. \quad (2)$$

Помним, что в вакууме: $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$, тогда из (2) следует: $|\vec{p}| = |\vec{k}| \hbar$. Наверное, направление распространения волны хотя бы в вакууме совпадает с направлением распространения фотонов: $\vec{p} = \vec{k} \hbar$. Таким образом, если у фотона есть импульс, то при взаимодействии света с веществом (например, при поглощении света), импульс может передаваться. Таким образом, свет должен оказывать давление.

К аналогичному результату можно прийти и на языке волновой оптики. Пусть есть атом Томсона, на который падает плоская монохроматическая волна. Найдём среднее значение силы, действующей на него. Запишем второй закон Ньютона:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + 2\beta \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{q \vec{E}(t)}{m} + \frac{q}{mc} \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{B} \right]. \quad (3)$$

Решение (3) без векторного произведения в правой части известно (формула 4.14):

$$\vec{r}_0(t) = \frac{q}{m \omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega} \vec{E}_0 e^{-i\omega_0 t}. \quad (4)$$

Будем решать данную задачу методом последовательных приближений. Метод заключается в следующем: пусть $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}_1(t)$, где $\vec{r}_0(t)$ - решение (4), а $\vec{r}_1(t)$ - по смыслу маленькая добавка, ведь магнитная часть силы Лоренца имеет множитель $1/c$, что значительно уменьшает влияние магнитного поля по сравнению с электрическим. Подставим данное представление в (3):

$$\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + 2\beta\frac{d\vec{r}_0}{dt} + \omega_0^2\vec{r}_0 + \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + 2\beta\frac{d\vec{r}_1}{dt} + \omega_0^2\vec{r}_1 = \frac{q\vec{E}(t)}{m} + \frac{q}{mc} \left[\frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{r}_0}{dt}, \vec{B} \right]$$

$$\left(\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + 2\beta\frac{d\vec{r}_0}{dt} + \omega_0^2\vec{r}_0 - \frac{q\vec{E}(t)}{m} \right) + \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + 2\beta\frac{d\vec{r}_1}{dt} + \omega_0^2\vec{r}_1 = \frac{q}{mc} \left[\frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{r}_0}{dt}, \vec{B} \right]. \quad (5)$$

Выражение в скобках в левой части (5) равно нулю, ведь $\vec{r}_0(t)$ - решение соответствующего уравнения. Вспоминая, что \vec{r}_1 - маленькая добавка, пренебрежём производной $\frac{d\vec{r}_1}{dt}$ в правой части равенства.

Запишем выражение для среднего значения силы, действующей на атом Томсона:

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{q}{c} \left\langle \left[\text{Re} \frac{d\vec{r}_0}{dt}, \text{Re} \vec{B}(t) \right] \right\rangle, \quad (6)$$

где угловые скобки означают усреднение по времени. Найдём действительные части двух компонент векторного произведения по отдельности. В соответствии с (4) определим $\frac{d\vec{r}_0}{dt}$:

$$\begin{aligned} \text{Re} \frac{d\vec{r}_0}{dt} &= \text{Re} \frac{-i\omega \frac{q}{m} \vec{E}_0 (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t))}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} (\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega) = \\ &= \frac{\frac{q}{m} \vec{E}_0 \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} [-(\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\omega t) + 2\beta\omega \cos(\omega t)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Учтём связь векторов $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$ (формула 2.6):

$$[\vec{k}, \vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{B} \implies [\vec{e}_k, \vec{E}] = \vec{B}. \quad (8)$$

Теперь посчитаем действительную часть:

$$\text{Re} \vec{B} = [\vec{e}_k, \vec{E}_0] \cos(\omega t). \quad (9)$$

Подставим полученные результаты (7) и (9) в выражение (6), усреднив синусы и косинусы:

$$\langle \vec{F} \rangle = [\vec{E}_0, [\vec{e}_k, \vec{E}_0]] \frac{q^2 \omega^2 \beta}{mc((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2)}.$$

Теперь воспользуемся известной формулой раскрытия двойного векторного произведения:

$$\langle \vec{F} \rangle = (\vec{e}_k E_0^2 - \vec{E}_0(\vec{E}_0, \vec{e}_k)) \frac{q^2 \omega^2 \beta}{mc((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2)}.$$

Заметим, что второе слагаемое обращается в нуль ввиду поперечности плоской электромагнитной волны. Таким образом, получаем ответ:

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{q^2}{mc} \frac{\omega^2 \beta E_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2} \vec{e}_k. \quad (10)$$

Следовательно, сила давления направлена в сторону распространения волны, что совпадает с квантово-механическим объяснением явления.

Световое давление защищает, например, звёзды от гравитационного сжатия. Как только звезда начинает гравитационно сжиматься, интенсивность реакций горения водорода возрастает, так что фотонов становится больше.

Генерация второй гармоники

Попробуем в формуле (10) для силы, с которой свет действует на атом Томсона, не усреднять квадрат косинуса при векторном произведении, а представить его как:

$$\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\omega t)}{2}. \quad (11)$$

В формуле (11) первое слагаемое в дальнейшем при вычислении силы приведет к появлению светового давления (как было показано в предыдущем параграфе), а второе слагаемое будет ответственно за *генерацию второй гармоники*. Этот эффект считается одним из первых в нелинейной оптике, который был теоретически обоснован и экспериментально подтвержден.

 **Определение 8.2. Генерация второй гармоники - нелинейно-оптический процесс, в котором фотоны с одинаковой частотой, взаимодействуя с нелинейной средой, "объединяются" для формирования новых фотонов с удвоенной энергией, и, следовательно, с удвоенной частотой.**

Для теоретического описания этого эффекта необходимо вспомнить, что сила упругости, которая действует на электрон (в нашей модели он связан с ядром упругой силой), вообще говоря, нелинейна по смещению. Сила упругости может быть записана как

$$\vec{F}_{\text{упр}} = \omega_0^2 \vec{r} + \mu r \vec{r} + \nu r^2 \vec{r} + \dots \quad (12)$$

Как видно из формулы (12), каждый входящий в неё вектор коллинеарен с \vec{r} , что выполняется не всегда. В более общем случае эти векторы имеют довольно произвольное направление, так как обычно эффект генерации второй гармоники наблюдается в кристаллах, которые известны свойством анизотропности.

Теперь мы можем записать проекцию силы упругости на ось x :

$$F_{\text{упр}x} = \sum_{\xi} \omega_{0x\xi}^2 r_{\xi} + \sum_{\xi,\eta} \mu_{x\xi\eta} r_{\xi} r_{\eta} + \dots$$

Второй закон Ньютона для электрона в атоме Томсона в поле электромагнитной волны можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + 2\beta \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} + \mu r \vec{r} = \frac{q}{m} \vec{E}(t). \quad (13)$$

Как и в прошлом параграфе, добавки $\mu r \vec{r}$ в уравнении (13) будем считать много меньшими линейного по смещению слагаемого, тогда решение этого уравнения будем искать в виде суммы решения уравнения (13) и малой добавки:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1.$$

Тогда одно из слагаемых в выражении (13) после раскрытия скобок будет сильно упрощено ввиду малости добавки \vec{r}_1 :

$$\mu(r_0 + r_1)(\vec{r}_0 + \vec{r}_1) \approx \mu r_0 \vec{r}_0. \quad (14)$$

Значит, уравнение движения атома Томсона преобразуется к следующему виду:

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + 2\beta \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \omega_0^2 \vec{r}_1 = -\mu r_0 \vec{r}_0. \quad (15)$$

С учетом того, что $\vec{\mathfrak{D}} = \alpha_1(\omega) \vec{E}$, где α - поляризуемость атома Томсона, домножим уравнение (15) на заряд электрона. Получаем дифференциальное уравнение второго порядка на вектор дипольного момента, правую часть которого можно преобразовать:

$$\frac{d^2 \vec{\mathfrak{D}}}{dt^2} + 2\beta \frac{d\vec{\mathfrak{D}}}{dt} + \omega_0^2 \vec{\mathfrak{D}} = -\mu q r_0 \vec{r}_0 = -\mu \alpha_1^2(\omega) E_0^2 \cos^2(\omega t) \frac{\vec{r}_0}{q r_0}. \quad (16)$$

При учете формулы (11) правая часть выражения (16) будет пропорциональна $\cos(2\omega t)$. Также решение данного уравнения будет пропорционально квадрату амплитуды электрического поля. То есть поляризуемость (дипольный момент

единицы объема) больше не линейна по полю, что было известно еще из курса электричества, но подробно не рассматривалось:

$$\vec{P} = \chi_1 \vec{E} + \chi_2 E \vec{E} + \chi_3 E^2 \vec{E} + \dots = \vec{P}_{\text{л}} + \vec{P}_{\text{нл}},$$

где $\vec{P}_{\text{л}} = \chi_1 \vec{E}$ - линейная поляризуемость, а $\vec{P}_{\text{нл}}$ - нелинейная поляризуемость, равная сумме оставшихся добавок.

Для нахождения поля и интенсивности в нашем приближении воспользуемся уравнениями Максвелла в веществе без свободных зарядов и токов и уравнением для дивергенции поляризуемости:

$$\begin{cases} (\nabla, \vec{E}) = 4\pi\rho' \\ (\nabla, \vec{P}) = -\rho' \end{cases} \implies (\nabla, \vec{E}) = -4\pi(\nabla, \vec{P}_{\text{л}}) - 4\pi(\nabla, \vec{P}_{\text{нл}}).$$

С учетом определения вектора электрического смещения $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}_{\text{л}}$ получаем следующую систему уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} (\nabla, \vec{D}) = -4\pi(\nabla, \vec{P}_{\text{нл}}) \\ (\nabla, \vec{B}) = 0 \\ [\nabla, \vec{E}] + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ [\nabla, \vec{B}] - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \vec{P}_{\text{нл}}}{\partial t} \end{cases} . \quad (17)$$

Мы получили систему уравнений Максвелла для распространения света в нелинейной среде. Решение этой системы будем искать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{D} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_{\text{л}} \\ \vec{D}_{\text{л}} \\ \vec{B}_{\text{л}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{E}_{\text{нл}} \\ \vec{D}_{\text{нл}} \\ \vec{B}_{\text{нл}} \end{pmatrix}, \text{ где } \begin{pmatrix} \vec{E}_{\text{л}} \\ \vec{D}_{\text{л}} \\ \vec{B}_{\text{л}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{D}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} \cdot \exp[i(\vec{k}_{\text{л}}\vec{r} - \omega t)]. \quad (18)$$

В выражении (18) вектор $\vec{k}_{\text{л}}$ удовлетворяет дисперсионному соотношению для света в веществе. При этом мы рассматриваем случай, когда поглощение света в веществе мало, то есть вектор $\vec{k}_{\text{л}}$ - вещественен.

$$|\vec{k}_{\text{л}}|^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{E}(\omega).$$

Нелинейная поляризуемость может быть записана следующим образом:

$$\vec{P}_{\text{нл}} = \chi_2 E_0 \vec{E}_0 \cos[2(\vec{k}_{\text{л}}\vec{r} - \omega t)]. \quad (19)$$

Важно отметить, что $\cos^2(\omega t)$ упрощается по формуле (11), но в формуле (19) для нелинейной поляризуемости присутствует только $\cos(2\omega t)$. Это связано с тем,

что слагаемое с $1/2$ не вносит вклад в нелинейную поляризуемость, так как это слагаемое просто немного увеличивает вектор линейной поляризуемости.

Подставим выражение (19) для нелинейной поляризуемости в систему уравнений (17):

$$\begin{cases} (\nabla, \vec{D}) = -4\pi (\nabla, \chi_2 E_0 \vec{E}_0 e^{2i(\vec{k}_n \vec{r} - \omega t)}) = 0 \\ (\nabla, \vec{B}) = 0 \\ [\nabla, \vec{E}] + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ [\nabla, \vec{B}] - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\chi_2 E_0 \vec{E}_0 e^{2i(\vec{k}_n \vec{r} - \omega t)}) \end{cases} \quad (20)$$

Первое уравнение системы (20) равно нулю, так как при скалярном произведении вектора градиента на плоскую волну получаем: $\vec{k}_n \cdot \vec{E}_0 = 0$.

Перейдем к уравнению только на электрическое поле. Для этого продифференцируем по времени уравнение №4 системы (20) и подставим туда производную по времени от магнитного поля из уравнения №2 этой же системы:

$$- [\nabla, [\nabla, \vec{E}]] - \frac{1}{c^2} \mathcal{E}(2\omega) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \chi_2 \cdot (-4\omega^2) E_0 \vec{E}_0 e^{2i(\vec{k}_n \vec{r} - \omega t)}. \quad (21)$$

Поле \vec{E} можно представить как произведение функции, зависящей только от координат, на экспоненциальную функцию с показателем $-2i\omega t$:

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) e^{-2i\omega t}.$$

Значит, уравнение (21) примет следующий вид:

$$-\nabla(\nabla, \vec{\mathcal{E}}) + \Delta \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c^2} \mathcal{E}(2\omega) \cdot (-4\omega^2) \vec{\mathcal{E}} = -\frac{4\pi \chi_2}{c^2} \cdot (4\omega^2) E_0 \vec{E}_0 e^{2i\vec{k}_n \vec{r}}. \quad (22)$$

Теперь для упрощения задачи рассмотрим одномерный случай, когда волна бежит из вакуума вдоль оси z и нормально падает на поверхность нелинейного вещества. Тогда мы получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 \vec{\mathcal{E}}}{dz^2} + \left(\frac{2\omega}{c}\right)^2 \mathcal{E}(2\omega) \cdot \vec{\mathcal{E}} = -4\pi \chi_2 \left(\frac{2\omega}{c}\right)^2 E_0 \vec{E}_0 e^{2i\vec{k}_n \vec{r}}. \quad (23)$$

В результате мы получили неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка, которое решается стандартным методом. Для начала найдем общее решение однородного уравнения:

$$\vec{\mathcal{E}}_0^o(z) = \vec{C}_+ e^{ik_{нл}z} + \vec{C}_- e^{-ik_{нл}z}, \quad \text{где } k_{нл} = \frac{2\omega}{c} \sqrt{\mathcal{E}(2\omega)}. \quad (24)$$

Причем первое слагаемое в выражении (24) соответствует плоской волне, которая бежит слева направо, а второе слагаемое - волне, бегущей справа налево. Поэтому логично будет коэффициент \vec{C}_- принять равным нулю (будем считать, что отражением от поверхности нелинейной среды можно пренебречь).

Частное решение уравнения (23) ищем в виде:

$$\vec{\mathcal{E}}_{\text{H}}^{\text{ч}}(z) = \vec{\mathcal{A}} \cdot e^{2ik_{\text{л}}z}. \quad (25)$$

Если мы подставим частное решение (25) в уравнение (23), то получим:

$$\begin{aligned} \left[-(2k_{\text{л}})^2 + \left(\frac{2\omega}{c} \right)^2 \mathcal{E}(2\omega) \right] \vec{\mathcal{A}} &= -4\pi\chi_2 \left(\frac{2\omega}{c} \right)^2 E_0 \vec{E}_0 \implies \\ \implies \vec{\mathcal{A}} &= -\frac{4\pi\chi_2 E_0 \vec{E}_0}{\left(\frac{2\omega}{c} \right)^2 [\mathcal{E}(2\omega) - \mathcal{E}(\omega)]} \implies \vec{\mathcal{E}}_{\text{H}}^{\text{ч}}(z) = -\frac{4\pi\chi_2 E_0 \vec{E}_0}{\left(\frac{2\omega}{c} \right)^2 [\mathcal{E}(2\omega) - \mathcal{E}(\omega)]} \cdot e^{2ik_{\text{л}}z}. \quad (26) \end{aligned}$$

В итоге общее решение неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка представляется суммой (24) и (26):

$$\vec{\mathcal{E}}(z) = \vec{\mathcal{E}}_0^{\text{о}}(z) + \vec{\mathcal{E}}_{\text{H}}^{\text{ч}}(z) = \vec{C}_+ e^{ik_{\text{нл}}z} - \frac{4\pi\chi_2 E_0 \vec{E}_0}{\left(\frac{2\omega}{c} \right)^2 [\mathcal{E}(2\omega) - \mathcal{E}(\omega)]} \cdot e^{2ik_{\text{л}}z}.$$

Теперь зададим начальные условия. Пусть поле, которое появилось из-за наличия нелинейной среды (наше поле \vec{E}), в точке $z = 0$ отсутствовало. Тогда это поле будет равно

$$\vec{\mathcal{E}}(z=0) = 0 \implies \vec{E}(z,t) = \frac{4\pi\chi_2 E_0 \vec{E}_0}{\left(\frac{2\omega}{c} \right)^2 [\mathcal{E}(2\omega) - \mathcal{E}(\omega)]} \cdot (e^{ik_{\text{нл}}z} - e^{2ik_{\text{л}}z}) \cdot e^{-2i\omega t}. \quad (27)$$

Проанализируем полученные результаты (27). Для начала вспомним, чему равны волновые числа $k_{\text{л}}$ и $k_{\text{нл}}$. Затем вынесем за скобки полусумму показателей экспонент, чтобы получить (с точностью до коэффициентов) синус. Возведя в квадрат по модулю, получим интенсивность света на удвоенной частоте 2ω :

$$\begin{aligned} \vec{E}(z,t) &= \text{const} \cdot \frac{E_0 \vec{E}_0 e^{i\frac{\omega}{c}[n(2\omega)+n(\omega)]z}}{\left(\frac{2\omega}{c} \right)^2 [n(2\omega) + n(\omega)]} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega}{c}[n(2\omega) - n(\omega)]\right)}{n(2\omega) - n(\omega)} \cdot e^{-2i\omega t} \implies \\ \implies I(2\omega) &\sim \frac{I^2(\omega)}{[n(2\omega) + n(\omega)]^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{c}[n(2\omega) - n(\omega)]\right)}{[n(2\omega) - n(\omega)]^2}. \quad (28) \end{aligned}$$

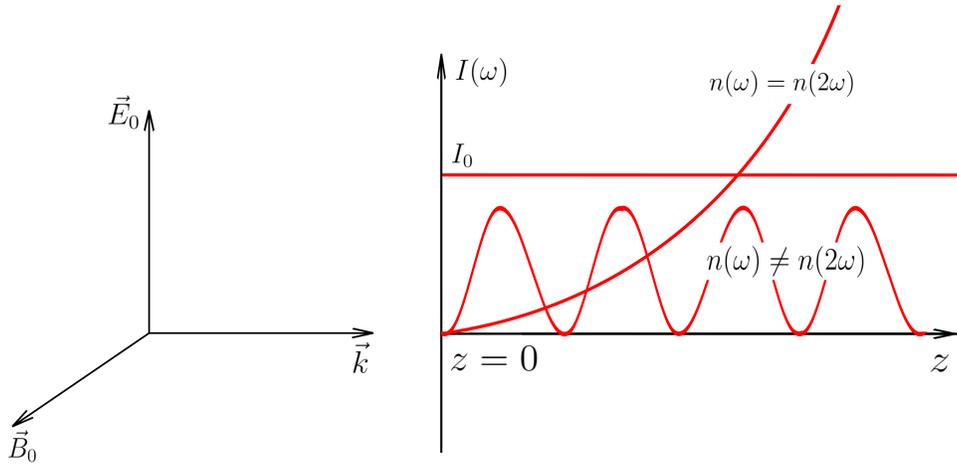


Рис. 100. Падение света на нелинейную среду

Если мы вспомним дисперсионную кривую, которая изображена на рисунке 36, то станет ясно, что можно подобрать такой кристалл (нелинейную среду), что свет на частоте ω и на частоте 2ω побегит с одинаковой скоростью. Или же, другими словами, $n(\omega) = n(2\omega)$.

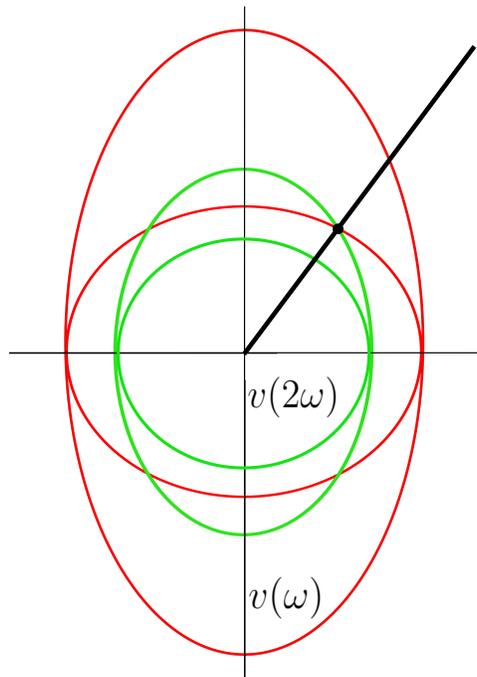


Рис. 101. Условие фазового синхронизма

При таком условии, интенсивность света второй гармоники будет квадратично возрастать по мере проникновения внутрь кристалла (без учета поглощения света).

Добиться того, чтобы $n(\omega) = n(2\omega)$, можно следующим способом. В кристалле для различных направлений будет различная скорость у обыкновенной и

необыкновенной волны. Обратимся к рисунку 101. Видно, что существует такое направление, когда скорость света на частоте ω необыкновенной волны совпадает со скоростью света на частоту 2ω обыкновенной волны. Это требование носит название условие *фазового синхронизма*.

Так, при падении инфракрасного света на нелинейный кристалл на выходе можно получить свет на удвоенной частоте (зеленый цвет). Именно на эффекте генерации второй гармоники работают небольшие лазеры, которые можно купить во множестве магазинов.

Самофокусировка и самоканализация

Теперь рассмотрим среды, которые обладают кубической нелинейностью. К таким средам обычно относятся центросимметричные кристаллы, жидкости и газы. В таком случае вектор поляризуемости среды можно записать так:

$$\vec{P} = \vec{P}_л + \chi_3 E^2 \vec{E} + \dots = \chi_1 \vec{E} + \chi_3 E^2 \vec{E} + \dots = (\chi_1 + \chi_3 I) \vec{E}. \quad (8.12)$$

В линейных средах диэлектрическая проницаемость выражалась как $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_1$. Теперь же ε стала функцией от интенсивности, что следует из формулы (8.12).

Так как показатель преломления - это корень из диэлектрической проницаемости, то он тоже становится функцией от интенсивности. А с учетом того, что χ_3 - малая величина, показатель преломления раскладывается в ряд. Итоговое выражение для показателя преломления примет вид

$$n = \sqrt{\varepsilon(I)} \implies n = n(I) = n_л + \eta I. \quad (8.13)$$

В выражении (8.13) η - малая поправка.

Рассмотрим два основных явления, которые происходят в средах с кубической нелинейностью. Начнем с эффекта *самофокусировки излучения*.

Как известно из формул Френеля, свет в среде с переменным показателем преломления "заворачивает" туда, где n больше. Если мы рассмотрим задачу о распространении гауссова пучка в среде с кубической нелинейностью, то он начнет заворачивать в сторону своего максимума. Это связано с тем, что вдоль направления распространения пучка располагается максимум интенсивности пучка, а значит, там показатель преломления больше, так как он зависит от интенсивности.

При работе с лазерным излучением большой мощности из-за эффекта самофокусировки в среде свет фокусируется в точку, где происходит *оптический пробой*. Представленный эффект вносит существенные ограничения на выбираемую мощность лазера.

Эффект *самоканализации излучения* возникает в том случае, когда через среду уже прошел высокоинтенсивный импульс и после него распространяется другие импульсы в разных направлениях. В такой ситуации для некоторых пучков будет наблюдаться эффект полного внутреннего отражения, как показано на рисунке 102. Таким образом, пучок распространяется в определенной области, выйти из которой он не может.

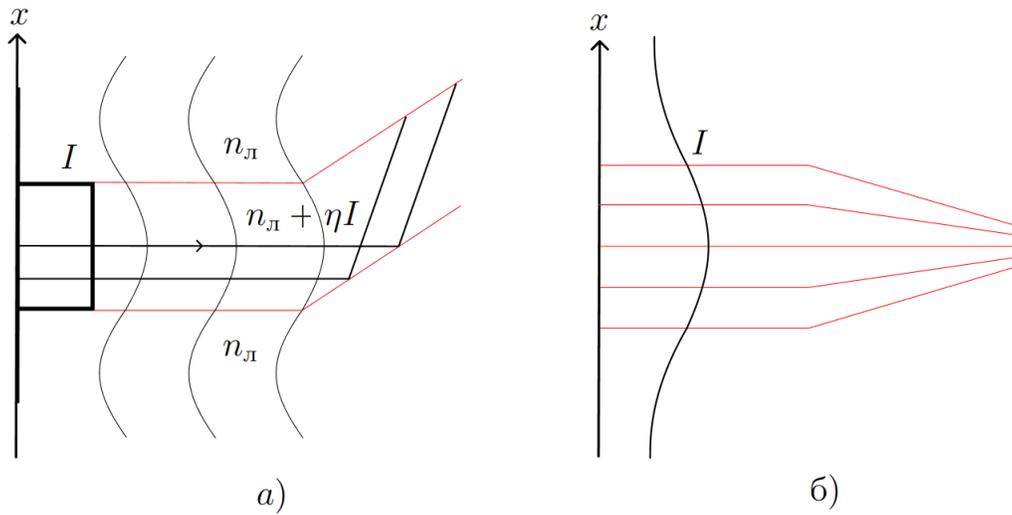


Рис. 102. Условие фазового синхронизма

Из формулы (8.12) также можно получить, что в среде с кубической нелинейностью будет генерироваться излучения на частоте втрое больше данной. Этот эффект носит название *генерация третьей гармоники*. Однако эффективность такого процесса редко превышает единицы процентов. На практике генерация третьей гармоники осуществляется в средах с квадратичной нелинейностью за счет эффекта генерации излучения на суммарной частоте. Однако эти эффекты будут рассмотрены в пособии, посвященном квантовому описанию света.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Фейнман, Р. Пейтон, М. Сэндс Фейнмановские лекции по физике. 1967. т.3 -234с.
- [2] Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. 1964. - 298с.
- [3] Бломберген. Н. Нелинейная оптика. М.:Мир, 1966. - 210с.
- [4] Бутиков Е. И. Оптика: Учебное пособие для вузов. М.: Высш. шк., 1986. -512с.
- [5] Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теоретическая физика. 1982. т.8 -620с.
- [6] Скалли М. О., Зубайри М. С. Квантовая Оптика. 2003. -512с.
- [7] Franken P. A., Hill A. E., Peters C. W., Weinreich G.// Phys.Rev.Lett. 1961. V.7, No.4. P. 118.
- [8] Ландсберг Г.С. Оптика, 6-е изд., стереот. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 848с.
- [9] Сивухин, Д.В. Общий курс физики. В 5 т. Том IV. Оптика. Сивухин Д.В. 3-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2005. - 792с.
- [10] Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики Учеб. пособие для вузов. 4-е изд., испр. - М.: Высш. шк. , 2002. - 718с.
- [11] Ахманов С.В., Хохлов Р.В. Физическая оптика. Учебник — М.: Изд-во Моск, ун-та, 1998. — 656 с
- [12] Дроздов А.А., Козлов С.А. Основы нелинейной оптики. учебное пособие. - Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2021. - 69 с.

Цветков Андрей Романович
Богданов Богдан Вячеславович
Шумигай Владимир Сергеевич
Баранов Константин Николаевич
Тучин Владислав Сергеевич
Чирцов Александр Сергеевич

Физическая оптика

Учебное пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати

Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А