1 Дифференциальные уравнения первого порядка

1.1 Основные понятия

Уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка.

Уравнение вида

$$y' = f(x, y) \tag{1.2}$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной. Это частный случай уравнения (1.1).

Любая функция $\varphi(x)$, непрерывно дифференцируемая на интервале (a, b), называется решением (частным решением) дифференциального уравнения (1.1), если на этом интервале выполняется тождество $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$.

Пример 1. Проверим, что функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ является решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = -\frac{x}{y}$ на интервале $(-1; 1)$.

Решение. Подставив $y = \sqrt{1 - x^2}$ и $y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ в данное дифференциальное уравнение, получим тождество $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, справедливое для любого x из интервала $(-1; 1)$.

График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой этого уравнения.

Уравнение $\Phi(x, y) = 0$, задающее неявно решение дифференциального уравнения (1.1) или (1.2), называется интегралом (частным интегралом) этого уравнения.

Пример 2. Покажем, что $y^3 - 3x^2 + 3y - 3x - 1 = 0$ является интегралом дифференциального уравнения $y'(1 + y^2) - 2x - 1 = 0$.

Решение. Дифференцируя уравнение $y^3 - 3x^2 + 3y - 3x - 1 = 0$, задающее неявно функцию $y(x)$, получим $3y^2 \cdot y' - 6x + 3y' - 3 = 0$, откуда $y'(1 + y^2) - 2x - 1 = 0$.

Равенство

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{1.3}$$

где C — параметр, называется общим интегралом дифференциального уравнения (1.1) или (1.2), если это равенство определяет множество решений дифференциального уравнения. Соотношение (1.3) неявно задает семейство функций

$$y = \varphi(x, C), \tag{1.4}$$

которое называется общим решением дифференциального уравнения первого порядка (1.1) или (1.2).

Отыскание решений (частного или общего) дифференциального уравнения называется интегрированием этого дифференциального уравнения.

Пример 3. Решить уравнение $y' = \cos x$.

Решение. Множество всех решений этого уравнения есть множество первообразных функции $\cos x$, т.е. $y = \int \cos x \, dx$. Таким образом, $y = \sin x + C$, где C — произвольная постоянная, есть общее решение дифференциального уравнения $y' = \cos x$.

Задача, в которой требуется найти решение дифференциального уравнения (1.2), удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0, \tag{1.5}$$

где x_0, y_0 — заданные числа, называется задачей Коши для дифференциального уравнения (1.2).

Пример 4. Найти решение дифференциального уравнения $y' = \cos x$, удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Решение. Данное дифференциальное уравнение имеет общее решение $y = \sin x + C$ (см. пример 3). Подставляя в это равенство значения $x = \frac{\pi}{2}$ и $y = 2$, получим $sin\frac{\pi}{2} + C = 2$, откуда $C = 1$. Итак, решением данной задачи Коши является функция $y = \sin x + 1$.

1.2 Дифференциальные уравнения с разделенными переменными

Уравнение вида
$$P(x) + Q(y)y' = 0 \tag{1.6}$$
называется дифференциальным уравнением с разделенными переменными.

С учетом того, что $y' = \frac{dy}{dx}$, уравнение (1.6) может быть записано в виде
$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0. \tag{1.7}$$
Общим интегралом уравнения (1.7) является равенство
$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = 0 \tag{1.8}$$

Пример 5. Найти общий интеграл уравнения $x^3\,dx + y^2\,dy = 0$.

Решение. Согласно (1.8), общим интегралом данного уравнения является равенство $\int x^3\,dx + \int y^2\,dy = 0$, т.е. $\frac{x^4}{4} + \frac{y^3}{3} + C = 0$, где C — произвольная постоянная.

Пример 6. Найти общий интеграл уравнения $\sin y \cdot y' = e^{2x}$.

Решение. Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, уравнение приводится к виду $\sin y\,dy - e^{2x}\,dx = 0$. Согласно (1.8), его общий интеграл имеет вид $\int \sin y\,dy - \int e^{2x}\,dx = 0$, т.е. $-\cos x - \frac{1}{2}e^{2x} + C_1 = 0$ или $2\cos y + e^{2x} = C$ (здесь мы заменили $2C_1$ на C, где C — произвольная постоянная).

1.3 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида
$$y' = P(x)Q(y) \tag{1.9}$$
называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Домножив обе части уравнения (1.9) на dx и разделив на $Q(y)$, при условии, что $Q(y) \neq 0$, получим уравнение с разделенными переменными
$$\frac{dy}{Q(y)} = P(x)\,dx. \tag{1.10}$$

Общим интегралом уравнения (1.10), а следовательно, и (1.9) является равенство

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)\,dx \tag{1.11}$$

Если $Q(y) = 0$ при $y = y_0$, то постоянная функция $y(x) = y_0$ тоже является решением дифференциального уравнения (1.9).

Пример 7. Решить уравнение $y' - x(y^2+1) = 0$.

Решение. Домножив обе части данного уравнения на dx и разделив на y^2+1, получим уравнение с разделенными переменными $\frac{dy}{y^2+1} - x\,dx = 0$, откуда $\int \frac{dy}{y^2+1} - \int x\,dx = 0$. Таким образом, общий интеграл данного дифференциального уравнения имеет вид $\operatorname{arctg} y - \frac{x^2}{2} + C = 0$, где C — произвольная постоянная.

Пример 8. Решить уравнение $y' = x\sqrt{y-1}$.

Решение. Перепишем это уравнение в виде $dy = x\sqrt{y-1}\,dx$. Разделив переменные, считая, что $y \neq 1$, получим $\frac{dy}{\sqrt{y-1}} = x\,dx$, откуда $\int \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = \int x\,dx$, т.е. $2\sqrt{y-1} = \frac{x^2}{2} + C_1$. Положив $\frac{C_1}{2} = C$, где C — произвольная постоянная, получим, что $\sqrt{y-1} = \frac{x^2}{4} + C$ или $y = \left(\frac{x^2}{4} + C\right)^2 + 1$. Функция $y = 1$ также является решением исходного уравнения. Итак, в качестве множества решений данного дифференциального уравнения получаем семейство функций $y = \left(\frac{x^2}{4} + C\right)^2 + 1$, где C — произвольная постоянная, и функцию $y = 1$.

Пример 9. Решить уравнение $y' = -2y$.

Решение. Запишем уравнение в виде $dy = -2y\,dx$. Разделяя переменные при условии, что $y \neq 0$, получим уравнение $\frac{dy}{y} = -2\,dx$, откуда $\int \frac{dy}{y} = -2\int dx$, т.е. $\ln|y| = -2x + C_1$. Для удобства положим $C_1 = \ln|C|$, где C — произвольная постоянная, не равная нулю. Тогда имеем $\ln|y| = -2x + \ln|C|$, откуда, потенцируя, получим $|y| = |C|e^{-2x}$, т.е. $y = Ce^{-2x}$, где C — неравная нулю произвольная постоянная. Кроме того, функция $y = 0$ также является решением исходного уравнения. Таким образом, в качестве множества решений данного дифференциального уравнения получаем семейство функций $y = Ce^{-2x}$, где $C \neq 0$, и функцию $y = 0$. Очевидно, что это множество решений можно записать в виде $y = Ce^{-2x}$, где C — произвольная постоянная.

Пример 10. Решить уравнение $(xy^2 + y^2)\,dx + (x^2y - x^2)\,dy = 0$.

Решение. Отметим, что данное уравнение можно рассматривать как дифференциальное относительно функции $y(x)$ либо относительно функции $x(y)$.

Преобразуем левую часть уравнения: $y^2(x+1)\,dx + x^2(y-1)\,dy = 0$. Разделяя переменные при условии, что $x \neq 0$, $y \neq 0$, получим $\frac{x+1}{x^2}\,dx + \frac{y-1}{y^2}\,dy = 0$, откуда $\int \frac{x+1}{x^2}\,dx + \int \frac{y-1}{y^2}\,dy = 0$ или $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx + \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\right) dy = 0$. Следовательно, $\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|y| + \frac{1}{y} = C$, т.е. $\ln|xy| - \frac{y-x}{xy} = C$, где C — произвольная постоянная.

Кроме решений, определяемых полученным уравнением, исходное дифференциальное уравнение имеет еще два решения: $x = 0$ и $y = 0$.

Пример 11. Найти частное решение уравнения $xy' + y = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(-2) = 3$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $x\,dy + y\,dx = 0$. Далее, разделяя переменные, получим $\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$, откуда $\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} = 0$, т.е. $\ln|y| + \ln|x| = \ln C$. Следовательно, $xy = C$. Используя начальное условие, получим $(-2)\cdot 3 = C$, т.е. $C = -6$. Итак, искомое решение задачи Коши имеет вид $y = -\frac{6}{x}$.

Упражнения для самостоятельной работы

Решить дифференциальные уравнения:

1.1. $y'\cos x - (1 + y^2)\sin x = 0$.

1.2. $xy\,dy - (1 + y^2)\,dx = 0$.

1.3. $\operatorname{tg} y \cdot y' + \frac{\cos y}{x} = 0$.

1.4. $y' + \frac{xe^y}{y} = 0$.

1.5. $y' = \frac{1+2x}{y^2}$.

1.6. $\frac{x}{y}\,dy - (x^3 + 1)\ln y\,dx = 0$.

1.7. $y' = \frac{2xy\sin x}{1+y^2}$.

Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

1.8. $y\,dy + (1 - y^2)\sin x\,dx = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

1.9. $y' = x \ln x e^y, \quad y(1) = -2.$

1.10. $y^3 y' + x e^x = 0, \quad y(1) = 2.$

1.11. $y' \operatorname{tg} x - y = 3, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$

1.4 Однородные дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{1.12}$$

где $f\left(\frac{y}{x}\right)$ — заданная функция, называется однородным. В результате замены $\frac{y}{x} = u$, дифференциальное уравнение (1.12) приводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно новой искомой функции $u(x)$. Действительно, положив $\frac{y}{x} = u$, имеем $y = ux$ и $y' = u'x + u$; тогда (1.12) принимает вид $u'x + u = f(u)$, а это уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 12. Решить уравнение $y' = \frac{y}{x} + \left(\sin\frac{y}{x}\right)^{-1}$.

Решение. Введем новую искомую функцию $u = \frac{y}{x}$. Тогда, подставив в исходное уравнение $y = ux$ и $y' = u'x + u$, получим уравнение с разделяющимися переменными: $u'x + u = u + (\sin u)^{-1}$ или $u'x = \frac{1}{\sin u}$. Заменив u' на $\frac{du}{dx}$, разделим переменные: $\sin u\,du = \frac{dx}{x}$. Отсюда $\int \sin u\,du = \int \frac{dx}{x}$, т.е. $-\cos u = \ln|x| + \ln|C|$ или $\cos u = -\ln|Cx|$. Вернемся к исходной функции y, подставив в последнее равенство $u = \frac{y}{x}$. Таким образом, общий интеграл исходного уравнения $\cos\frac{y}{x} = -\ln|Cx|$.

Пример 13. Найти частное решение уравнения $y \ln\frac{y}{x}\,dx = x\,dy$, удовлетворяющее начальному условию $y(-1) = -1$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$. Затем сделаем замену $\frac{y}{x} = u$, откуда $y = ux$ и $y' = u'x + u$. Тогда уравнение примет вид $u'x + u = u \ln u$ или $u'x = u(\ln u - 1)$. Разделяя переменные, получим $\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$. Тогда $\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x}$, т.е. $\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln|C|$. Потенцируя, имеем $\ln u - 1 = Cx$. Возвращаясь к прежней неизвестной функции, получим $\ln\frac{y}{x} - 1 = Cx$, откуда $\frac{y}{x} = e^{Cx+1}$ или $y = xe^{Cx+1}$. Подставляя начальные данные $x = -1$, $y = -1$, найдем, что $-e^{-C+1} = -1$, следовательно, $C = 1$. Итак, искомое частное решение $y = xe^{x+1}$.

Упражнения для самостоятельной работы

Решить дифференциальные уравнения:

1.12. $y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}e^{-\frac{y}{x}}$.

1.13. $(x + y)\,dx + (y - x)\,dy = 0$.

1.14. $dy + (\operatorname{ctg}\frac{y}{x} - \frac{y}{x})\,dx = 0$.

1.15. $(2\sqrt{xy} - x)\,dy + y\,dx = 0$.

1.16. $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$.

Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

1.17. $(y^2 - 3x^2)\,dx + 2xy\,dy = 0, \quad y(-1) = 2$.

1.18. $xy' = y\ln\frac{y}{x}, \quad y(1) = 1$.

1.19. $y' = \frac{xy+y^2}{x^2}, \quad y(1) = 1$.

1.20. $xy' + x\sqrt{\frac{y}{x} - 1} - y = 0, \quad y(-1) = -5$.

1.21. $xy^2\,dy = (x^3 + y^3)\,dx, \quad y(e) = e$.

1.22. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}, \quad y(4) = 5$.

1.5 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнения вида

$$y' + P(x)y = f(x), \tag{1.13}$$

где $P(x)$ и $f(x)$ — заданные функции, причем $f(x) \neq 0$, называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Уравнение вида

$$y' + P(x)y = 0 \tag{1.14}$$

называется линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Заметим, что уравнение (1.14) является уравнением с разделяющимися переменными.

Пример 14. Решить уравнение $y' - y\operatorname{tg} x = 0$.

Решение. В данном линейном однородном дифференциальном уравнении заменим y' на $\frac{dy}{dx}$. Тогда получим $\frac{dy}{dx} - y\operatorname{tg} x = 0$, откуда, разделив переменные, будем иметь $\frac{dy}{y} - \operatorname{tg} x\,dx = 0$. Следовательно, $\int \frac{dy}{y} - \int \operatorname{tg} x\,dx = 0$, т.е. $\ln|y| + \ln|\cos x| = \ln|C|$. Потенцируя, получим $y = \frac{C}{\cos x}$, где C — произвольная постоянная. Это и есть общее решение исходного дифференциального уравнения.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка может быть найдено методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа) или методом Бернулли.

Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа)

Ищем решение линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка (1.13) в виде

$$y = C(x)Z(x), \tag{1.15}$$

где $C(x)$ — новая неизвестная функция, а $Z(x)$ — какое-либо частное решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения $Z' + P(x)Z = 0$. Подставляя $y = C(x)Z(x)$ и $y' = C'(x)Z(x) + C(x)Z'(x)$ в уравнение (1.13), получим $C'(x)Z(x)+C(x)Z'(x)+P(x)C(x)Z(x) = f(x)$, или $C'(x)Z(x)+C(x)(Z'(x)+P(x)Z(x)) = f(x)$. Так как $Z(x)$ — решение линейного однородного дифференциального уравнения $Z' + P(x)Z = 0$, то функция $C(x)$ удовлетворяет простейшему дифференциальному уравнению $C'(x)Z(x) = f(x)$ или $C'(x) = \frac{f(x)}{Z(x)}$. Наконец, подставляя $C(x) = \int \frac{f(x)}{Z(x)}\,dx$ в уравнение (1.15), получим общее решение линейного неоднородного уравнения (1.13).

Пример 15. Решить уравнение $y' - y\operatorname{tg} x = \frac{3x^2}{\cos x}$.

Решение. Применим метод Лагранжа. Составим сначала линейное однородное дифференциальное уравнение $Z' - Z\operatorname{tg} x = 0$, соответствующее данному линейному неоднородному уравнению. Общее решение этого линейного однородного уравнения (см. пример 14) имеет вид $Z = \frac{C}{\cos x}$, где C — произвольная постоянная. Ищем решение исходного линейного неоднородного уравнения в виде $y = \frac{C(x)}{\cos x}$. Подставив $y = \frac{C(x)}{\cos x}$ и $y'(x) = C'(x)\frac{1}{\cos x} + C(x)\frac{\sin x}{\cos x}$ в неоднородное уравнение, получим $\frac{C'(x)}{\cos x} + C(x)\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)}{\cos x}\operatorname{tg} x = \frac{3x^2}{\cos x}$, т.е. $\frac{C'(x)}{\cos x} = \frac{3x^2}{\cos x}$, откуда $C'(x) = 3x^2$, следовательно, $C(x) = x^3 + C$, где C — произвольная постоянная. Итак, $y = \frac{x^3+C}{\cos x}$ — общее решение исходного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Метод Бернулли

Будем искать решение уравнения (1.13) в виде произведения двух функций, т.е. положим $y = u(x)v(x)$. Тогда $y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Подставляя y и y' в уравнение (1.13), получим $u'v + uv' + P(x)uv = f(x)$, т.е. $v(u' + P(x)u) + uv' = f(x)$. Так как y есть произведение двух функций, то одна из них может быть выбрана произвольно. Выберем функцию $u(x)$ так, чтобы она удовлетворяла линейному однородному уравнению $u' + P(x)u = 0$. Тогда функция $v(x)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению $uv' = f(x)$ или $v' = \frac{f(x)}{u(x)}$. Следовательно, $v = \int \frac{f(x)}{u(x)}\,dx$, где $u(x)$ — какое-либо частное решение уравнения $u' + P(x)u = 0$. Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид $y = u(x)\int \frac{f(x)}{u(x)}\,dx$.

Пример 16. Решить уравнение $y' - y\operatorname{tg} x = \frac{3x^2}{\cos x}$.

Решение. Применим метод Бернулли. Положим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$; данное уравнение приводится к виду $u'v + uv' - uv\operatorname{tg} x = \frac{3x^2}{\cos x}$ или $v(u' - u\operatorname{tg} x) + uv' = \frac{3x^2}{\cos x}$. Положим $u' - u\operatorname{tg} x = 0$. Найдем какое-либо отличное от нуля частное решение этого уравнения, например $u = \frac{1}{\cos x}$ (см. пример 14). Для отыскания другой неизвестной функции $v(x)$ имеем уравнение $uv' = \frac{3x^2}{\cos x}$, т.е. $\frac{1}{\cos x}v' = \frac{3x^2}{\cos x}$, отсюда $v' = 3x^2$ и поэтому $v = x^3 + C$, где C — произвольная постоянная. Таким образом, $y = \frac{x^3+C}{\cos x}$ — общее решение исходного уравнения.

Пример 17. Решить уравнение $y' + \frac{1}{y^2+x} = 0$.

Решение. Это уравнение не является линейным относительно функции $y(x)$, однако относительно функции $x(y)$ оно является линейным. В самом деле, $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y^2+x} = 0$, откуда $(y^2+x)\,dy + dx = 0$ или $\frac{dx}{dy} + x + y^2 = 0$, т.е. $x'_y + x = -y^2$. Решим это уравнение методом Бернулли, положив $x = u(y)v(y)$. Подставляя $x = uv$ и $x' = u'v + uv'$ в уравнение $x' + x = iy^2$, получим, что $u'v + uv' + uv = -y^2$ или $v(u' + u) + uv' = -y^2$.

Выберем функцию $u(y)$ так, чтобы $u' + u = 0$. Тогда функция $v(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $u(v') = -y^2$. Перепишем уравнение $u' + u = 0$ в виде $\frac{du}{dy} + u = 0$. Разделив переменные, получим $\frac{du}{u} + dy = 0$, откуда $\int \frac{du}{u} + \int dy = 0$, т.е. $\ln|u| + y = \ln|C|$. Таким образом, $u = Ce^{-y}$. Так как нас интересует какое-либо частное решение, положим $C = 1$. Тогда $u = e^{-y}$. Подставив $u = e^{-y}$ в уравнение $u(v') = -y^2$, получим $e^{-y}v' = -y^2$, т.е. $v' = -y^2 e^y$, откуда $v = -\int y^2 e^y \, dy = -e^y(y^2 - 2y + 2) + C$ (при нахождении последнего интеграла была дважды применена формула интегрирования по частям). Итак, имеем $u = e^{-y}$, $v = -e^y(y^2 - 2y + 2) + C$. Таким образом, общее решение исходного дифференциального уравнения $x = uv = e^{-y}(-e^y(y^2 - 2y + 2) + C)$, т.е. $x = -y^2 + 2y - 2 + Ce^{-y}$, где C — произвольная постоянная.

Упражнения для самостоятельной работы

Решить дифференциальные уравнения:

1.23. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{x^2}{\cos x}$.

1.24. $(x^2 + 3)y' + 2xy = x$.

1.25. $y' + \frac{2}{\sin 2x} y = \cos x$.

1.26. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x + 1)^3$.

1.27. $x^2 y' + 2xy = \ln x$.

1.28. $y' \sin x - y = 1 - \cos x$.

Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

1.29. $e^x(y + y') = 1, \quad y(0) = 0$.

1.30. $y' - \frac{3y}{x} = e^x x^3, \quad y(1) = e$.

1.31. $\cos x \, dy + y \sin x \, dx = 0, \quad y(0) = 1$.

1.32. $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}, \quad y(0) = 0$.

1.33. $y' + \frac{1}{x+y^2} = 0, \quad y(-1) = 0$.

2 Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

2.1 Основные понятия

Уравнение вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{2.1}$$

связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ до порядка n включительно, называется дифференциальным уравнением n-го порядка.

Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{2.2}$$

называется дифференциальным уравнением n-го порядка, разрешенным относительно старшей производной.

Любая функция $\varphi(x)$, n раз непрерывно дифференцируемая на интервале (a, b), называется решением (частным решением) дифференциального уравнения (2.1), если на этом интервале выполняется тождество $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$.

Уравнение $\Phi(x, y) = 0$, задающее неявно решение дифференциального уравнения (2.1) или(2.2), называется интегралом (частным интегралом) этого уравнения.

Равенство

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \tag{2.3}$$

где C_1, C_2, …, C_n — параметры, называется общим интегралом уравнения (2.1) или (2.2), если это равенство определяет все множество решений дифференциального уравнения.

Соотношение (2.3) неявно задает n -параметрическое семейство функций

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \tag{2.4}$$

которое называется общим решением дифференциального уравнения n-го порядка (2.1) или (2.2).

Задачей Коши для дифференциального уравнения n-го порядка (2.2) называется задача, в которой требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)}, \tag{2.5}$$

где x_0, y_0, y_1, y_2, $\ldots$, $y_{(n-1)}$ — заданные числа.

2.2 Дифференциальные уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$

Для нахождения общего решения уравнения вида

$$y^{(n)} = f(x) \tag{2.6}$$

достаточно проинтегрировать его последовательно n раз.

Пример 18. Решить уравнение $y''' = \cos 2x$.

Решение. Так как $y'' = \int y'''(x)\,dx$, то $y'' = \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1$. Далее, $y' = \int \frac{1}{2}\sin 2x + C_1\,dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1x + C_2$. И, наконец, $y = \int -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1x + C_2\,dx = -\frac{1}{8}\sin 2x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$, где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Заменив $\frac{C_1}{2}$ на C_1, запишем общее решение исходного уравнения в виде $y = -\frac{1}{8}\sin 2x + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

Пример 19. Найти решение уравнения $y'' = e^{-5x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = \frac{1}{25}$, $y'(0) = \frac{4}{5}$.

Решение. Так как $y' = \int y''(x)\,dx$, то $y' = \int e^{-5x}\,dx$, т.е. $y' = -\frac{1}{5}e^{-5x} + C_1$. Подставив в это равенство $x = 0$, $y' = \frac{4}{5}$, найдем, что $C_1 = 1$. Итак, имеем $y' = -\frac{1}{5}e^{-5x} + 1$, откуда $y = \int \left(-\frac{1}{5}e^{-5x} + 1\right) dx$, т.е. $y = \frac{1}{25}e^{-5x} + x + C_2$. Используя начальное условие $y(0) = \frac{1}{25}$, получим, что $C_2 = 0$. Итак, искомое решение задачи Коши имеет вид $y = \frac{1}{25}e^{-5x} + x$.

2.3 Дифференциальные уравнения вида $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$

Дифференциальное уравнение вида

$$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{2.7}$$

которое не содержит неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные до порядка $k-1$ включительно, где $1 \leqslant k \leqslant n$, допускает понижение порядка следующим образом. Введем новую неизвестную функцию

$$z(x) = y^{(k)}(x). \tag{2.8}$$

Тогда $z' = y^{(k+1)}(x)$, $z'' = y^{(k+2)}(x)$, ..., $z^{(n-k)} = y^{(n)}(x)$. В результате замены (2.6) уравнение (2.7) переходит в дифференциальное уравнение порядка $(n-k)$

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0 \tag{2.9}$$

относительно неизвестной функции $z(x)$.

Пусть $z = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$ — общее решение уравнения (2.9). Тогда, подставив это решение в уравнение (2.8), получим дифференциальное уравнение порядка k $y^{(k)}(x) = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$ рассмотренного в пункте 2.2 типа.

Пример 20. Решить уравнение $xy''' - y'' = 0$.

Решение. Данное уравнение не содержит искомую функцию y и ее первую производную y'. Примем y'' за новую неизвестную функцию, т.е. положим $y'' = z$, тогда $y''' = z'$, и уравнение примет вид $xz' - z = 0$. Получили дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Найдем его общее решение: $x\frac{dz}{dx} - z = 0$, $\frac{dz}{z} - \frac{dx}{x} = 0$, $\ln|z| - \ln|x| = \ln|C_1|$, $z = C_1 x$, где C_1 — произвольная постоянная. Так как $y'' = z$, то функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' = C_1 x$. Следовательно, $y' = \int C_1 x\,dx = C_1\frac{x^2}{2} + C_2$ и, наконец, $y = \int\left(\frac{C_1}{2}x^2 + C_2\right)dx = \frac{C_1}{6}x^3 + C_2 x + C_3$, где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Заменив $\frac{C_1}{6}$ на C_1, получим общее решение исходного дифференциального уравнения $y = C_1 x^3 + C_2 x + C_3$.

Пример 21. Найти решение уравнения $1 + (y')^2 = 2xy'y''$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = -83$, $y'(1) = -5$.

Решение. Данное уравнение не содержит искомую функцию y. Положим $y' = z$, тогда $y'' = z'$, и уравнение принимает вид $1 + z^2 = 2xzz'$. Разделяя переменные, получим $\frac{2z\,dz}{1+z^2} = \frac{dx}{x}$, тогда $\int\frac{2z\,dz}{1+z^2} = \int\frac{dx}{x}$, т.е. $\ln|1+z^2| = \ln|x| + \ln|C_1|$, откуда $1 + z^2 = C_1 x$, и поэтому $z = \pm\sqrt{C_1 x - 1}$. Учитывая далее, что $z = y'$, имеем $y' = \pm\sqrt{C_1 x - 1}$. Используя теперь начальное условие $y'(1) = -5$, получим $-\sqrt{C_1 - 1} = -5$, откуда $C_1 = 26$. Итак, имеем $y' = -\sqrt{26x - 1}$. Следовательно, $y = -\int\sqrt{26x-1}\,dx$, т.е. $y = -\frac{2}{3}(26x-1)^{\frac{3}{2}} + C_2$. Воспользовавшись начальным условием $y(1) = -83$, найдем, что $C_2 = \frac{1}{3}$. Итак, искомое решение задачи Коши имеет вид $y = -\frac{2}{3}(26x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}$.

2.4 Дифференциальные уравнения вида $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$

Дифференциальное уравнение вида

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{2.10}$$

не содержит явно независимую переменную x. Положим $y'_x = P(y)$. Тогда
$y''_{x^2} = (y'_x)'_x = (P(y))'_x = P'_y \cdot y'_x = P'_y \cdot P$;
$y'''_{x^3} = (y''_{x^2})'_x = (P'_y \cdot P)'_x = (P'_y \cdot P)'_y \cdot y'_x = (P''_{y^2} \cdot P + (P'_y)^2) \cdot P$ и т.д. Заменив в (2.10) y', y'', …, $y^{(n)}$ через функцию $P(y)$ и ее производные, получим относительно функции $P(y)$ дифференциальное уравнение порядка $n-1$

$$G(y, P, P', \ldots, P^{(n-1)}) = 0. \tag{2.11}$$

Пусть $P = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$ — общее решение уравнения (2.11). Используя тот факт, что $y'_x = P(y)$, получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$.

Пример 22. Решить уравнение $y \cdot y'' + (y')^2 = 0$.

Решение. Так как уравнение не содержит явно независимую переменную x, то удобно сделать замену $y' = P(y)$; тогда $y'' = P'_y \cdot P$, и уравнение примет вид $y \cdot P'_y \cdot P + P^2 = 0$, откуда $P = 0$ или $y \cdot P'_y + P = 0$. Если $P = 0$, т.е. $y' = 0$, то $y = C$. Проинтегрируем далее уравнение $y \cdot P'_y + P = 0$: $y\frac{dP}{dy} + P = 0$, откуда $\frac{dP}{P} + \frac{dy}{y} = 0$, поэтому $\int \frac{dP}{P} + \int \frac{dy}{y} = 0$, т.е. $\ln|P| + \ln|y| = \ln|C_1|$. Следовательно $P = \frac{C_1}{y}$, где C_1 — произвольная постоянная. Учитывая теперь, что $y' = P(y)$, получим $y' = \frac{C_1}{y}$, т.е. $y\,dy = C_1\,dx$, откуда $\int y\,dy = \int C_1\,dx$. Следовательно, $\frac{y^2}{2} = C_1 x + C_2$ — общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

Пример 23. Найти решение уравнения $y'' = e^{4y}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Положим $y' = P(y)$, тогда $y'' = P'_y \cdot P$, значит, данное уравнение приводится к виду $P'_y \cdot P = e^{4y}$. Разделяя переменные, получим $P \cdot dP = e^{4y}\,dy$, откуда $\int P\,dP = \int e^{4y}\,dy$, т.е. $\frac{P^2}{2} = \frac{1}{4}e^{4y} + \frac{1}{2}C_1$. Следовательно, функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(y')^2 = \frac{1}{2}e^{4y} + C_1$. Используя начальное условие $y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, найдем, что

$C_1 = 0$. Значит, $y' = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2y}$. Разделяя переменные в этом уравнении, получим $e^{-2y}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\, dx$, откуда $\int e^{-2y}\, dy = \int \frac{dx}{\sqrt{2}}$, т.е. $-\frac{1}{2} e^{-2y} = \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2$. Учитывая теперь, что $y(0) = 0$, найдем $C_2 = -\frac{1}{2}$. Итак, имеем $-\frac{1}{2} e^{-2y} = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$, откуда $y = -\frac{1}{2} \ln(1 - x\sqrt{2})$. Эта функция является искомым решением задачи Коши.

Упражнения для самостоятельной работы

Решить дифференциальные уравнения:

2.1. $y'' = e^x + 1$.

2.2. $y'' \cdot \operatorname{tg} x = y' + 1$.

2.3. $(1 + x^2) y'' + 2xy' = x^3$.

2.4. $y \cdot y'' = (y')^3$.

2.5. $1 + (y')^2 = 2y \cdot y''$.

2.6. $y' \cdot (1 + (y')^2) = y''$.

Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

2.7. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\ln 2}{2}, \quad y'(\frac{\pi}{4}) = 1$.

2.8. $y'' + y' \cdot \operatorname{tg} x = \sin 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.

2.9. $xy''' + y'' - x - 1 = 0, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad y'(1) = \frac{9}{4}, \quad y''(1) = \frac{5}{2}$.

2.10. $(1 + x^2) y'' + (y')^2 + 1 = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$.

2.11. $y^3 \cdot y'' = -1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$.

2.12. $y'' = (y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

2.13. $2(y')^2 = (y - 1) y'', \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$.

2.14. $y \cdot y'' = (y')^2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$.

3 Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка

3.1 Основные понятия

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = f(x), \quad (3.1)$$

где $y(x)$ — неизвестная функция; $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_n(x)$, $f(x)$ — заданные функции.

Если в уравнении (3.1) правая часть $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение называется линейным неоднородным, если же $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется линейным однородным.

3.2 Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка:

$$z^{(n)} + P_1(x)z^{(n-1)} + P_2(x)z^{(n-2)} + \ldots + P_{n-1}(x)z' + P_n(x)z = 0. \quad (3.2)$$

Если функции $z_1(x)$, $z_2(x)$, …, $z_m(x)$ — решения уравнения (3.2), то их линейная комбинация с произвольными постоянными C_1, C_2, …, C_m, т.е. выражение $C_1z_1(x) + C_2z_2(x) + \ldots + C_mz_m(x)$, также является решением этого уравнения. Функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_k(x)$ называются линейно независимыми на интервале (a, b), если из того, что их линейная комбинация тождественно равна нулю, т.е. $\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_k\varphi_k(x) \equiv 0$, следует, что $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, …, $\alpha_k = 0$.

Совокупность n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка называется фундаментальной системой решений этого уравнения.

Общее решение $z(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка (3.2) имеет вид

$$z = C_1z_1(x) + C_2z_2(x) + \ldots + C_nz_n(x), \quad (3.3)$$

где $z_1(x)$, $z_2(x)$, …, $z_n(x)$ — фундаментальная система решений уравнения (3.2), C_1, C_2, …, C_n — произвольные постоянные.

3.3 Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + a_2 z^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} z' + a_n z = 0, \tag{3.4}$$

где a_1, a_2, …, a_n — заданные числа, называется линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим сначала линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$z'' + a_1 z' + a_2 z = 0. \tag{3.5}$$

Алгебраическое уравнение второй степени

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \tag{3.6}$$

называется характеристическим уравнением для дифференциального уравнения (3.5).

Найдем корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (3.6). При этом возможны три случая:

а) корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения (3.6) — различные действительные числа.

Тогда функции $e^{\lambda_1 x}$ и $e^{\lambda_2 x}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.5), и потому общее решение этого уравнения имеет вид

$$z = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \tag{3.7}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Пример 24. Решить уравнение $z'' - 5z' + 6z = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Это уравнение имеет два различных действительных корня $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Следовательно, функции e^{2x} и e^{3x} образуют фундаментальную систему решений данного дифференциального уравнения, и поэтому, в силу (3.7), $z = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ — общее решение исходного уравнения.

Пример 25. Найти решение уравнения $z'' + 5z' = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $z(0) = 6$, $z'(0) = -10$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 5\lambda = 0$. Оно имеет два различных действительных корня $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 0$, и поэтому функции e^{-5x} и 1 составляют фундаментальную систему решений данного дифференциального уравнения. Тогда $z = C_1 e^{-5x} + C_2$ — общее решение этого уравнения. Найдем $z' = -5C_1 e^{-5x}$. Используя начальные условия, составим систему уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 6 \\ -5C_1 = -10, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 2$, $C_2 = 4$.

Итак, $z = 2e^{-5x} + 4$ — искомое решение задачи Коши.

б) корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения (3.6) — равные действительные числа.

Тогда функции $xe^{\lambda_1 x}$ и $e^{\lambda_1 x}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.5). Следовательно, общее решение этого уравнения имеет вид

$$z = e^{\lambda_1 x}(C_1 x + C_2), \tag{3.8}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Пример 26. Решить уравнение $z'' + 4z' + 4z = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ имеет два равных действительных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Тогда функции $x \cdot e^{-2x}$ и e^{-2x} образуют фундаментальную систему решений данного дифференциального уравнения. В силу (3.8), $z = e^{-2x}(C_1 x + C_2)$ — общее решение исходного уравнения.

в) корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения (3.6) — комплексно-сопряженные числа (предполагается, что коэффициенты a_1 и a_2 уравнения (3.5) являются действительными числами). Пусть $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. В этом случае функции $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.5), и потому общее решение этого уравнения

$$z = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x), \tag{3.9}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Пример 27. Решить уравнение $z'' + 4z' + 20z = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 20 = 0$ имеет комплексно-сопряженные корни $\lambda_1 = -2 + 4i$, $\lambda_2 = -2 - 4i$. Тогда функции $e^{-2x}\cos 4x$ и $e^{-2x}\sin 4x$ образуют фундаментальную систему решений данного дифференциального уравнения; согласно (3.9), $z = e^{-2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)$ — общее решение исходного уравнения.

Пример 28. Найти решение уравнения $z'' + 9z = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $z(\frac{\pi}{3}) = 4$, $z'(\frac{\pi}{3}) = -3$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 9 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 3i$, $\lambda_2 = -3i$. Тогда функции $\cos 3x$ и $\sin 3x$ образуют фундаментальную систему решений, а общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид $z = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$. Найдем $z' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x$ и, воспользовавшись начальными данными, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi = 4 \\ -2C_1 \sin \pi + 3C_2 \cos \pi = -3 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} -C_1 = 4 \\ -3C_2 = -3 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} C_1 = -4 \\ C_2 = 1 \end{cases}.$$

Итак, $z = -4 \cos 3x + \sin 3x$ — искомое решение задачи Коши.

Рассмотрим теперь линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами (3.4).

Алгебраическое уравнение n-й степени

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{3.10}$$

называется характеристическим уравнением для дифференциального уравнения (3.4). Уравнение (3.10) имеет с учетом кратности n корней. При этом возможны следующие случаи:

а) все корни λ_1, λ_2, …, λ_n характеристического уравнения (3.10) — различные действительные числа.

Тогда функции $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$, …, $e^{\lambda_n x}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.4), и потому его общее решение имеет вид $z = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$, где C_1, C_2, …, C_n — произвольные постоянные.

б) характеристическое уравнение (3.10) имеет кратные действительные корни. Пусть λ_1, λ_2, …, λ_m, где $m < n$, — различные корни уравнения (3.10) кратности k_1, k_2, …, k_m соответственно ($\sum_{i=1}^{m} k_i = n$). Тогда каждому корнюλ_i, где $i = 1, 2, \ldots, m$, соответствует k_i линейно независимых решений

$$e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, \ldots, x^{k_i - 1}e^{\lambda_i x} \tag{3.11}$$

уравнения (3.4). Функции вида (3.11), где $i = 1, 2, \ldots, m$, образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.4).

в) среди корней характеристического уравнения (3.10) имеются комплексно-сопряженные. При этом если $\alpha \pm i\beta$ — комплексно-сопряженные корни кратности $k = 1$, то им соответствуют два линейно независимых решения $e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $e^{\alpha x} \sin \beta x$. Если же $\alpha \pm i\beta$ — комплексно-сопряженные корни кратности $k > 1$, то им соответствуют $2k$ линейно независимых решений

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, x^2e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{3.12}$$

дифференциального уравнения (3.4).

Пример 29. Решить уравнение $z^{(4)} - 5z'' + 4z = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0$. Для решения этого биквадратного уравнения сделаем замену $\lambda^2 = \mu$. Тогда получим квадратное уравнение $\mu^2 - 5\mu + 4 = 0$, корни которого $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 4$. Значит, корнями характеристического уравнения являются различные действительные числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = -2$. Следовательно, функции e^x, e^{-x}, e^{2x}, e^{-2x} составляют фундаментальную систему решений данного дифференциального уравнения, и поэтому $z = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$ — общее решение исходного уравнения.

Пример 30. Найти решение уравнения $z''' - 6z'' + 8z' = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $z(0) = 2$, $z'(0) = -2$, $z''(0) = 4$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 8\lambda = 0$ или $\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0$. Оно имеет различные действительные корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$. Следовательно, функции 1, e^{2x}, e^{4x} образуют фундаментальную систему решений данного дифференциального уравнения. Таким образом, $z = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{4x}$ — общее решение исходного уравнения.

Найдем $z' = 2C_2e^{2x} + 4C_3e^{4x}$ и $z'' = 4C_2e^{2x} + 16C_3e^{4x}$. Используя начальные условия, составим систему уравнений относительно чисел C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 2 \\ 2C_2 + 4C_3 = -2 \\ 4C_2 + 16C_3 = 4, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 4$, $C_2 = -3$, $C_3 = 1$. Следовательно, $z = 4 - 3e^{2x} + e^{4x}$ — искомое решение задачи Коши.

Пример 31. Решить уравнение $z^{(4)} - 3z''' + 3z'' - z' = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = 0$. Разложив левую часть этого уравнения на множители, получим $\lambda(\lambda - 1)^3 = 0$. Следовательно, $\lambda = 0$ — однократный корень характеристического уравнения, а $\lambda = 1$ — корень кратности 3 этого уравнения, поэтому функции 1, e^x, xe^x, x^2e^x образуют фундаментальную систему решений, а $z = C_1 + C_2e^x + C_3xe^x + C_4x^2e^x$ — общее решение исходного дифференциального уравнения.

Пример 32. Решить уравнение $z^{(4)} + 4z''' + 9z'' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^4+4\lambda^3+9\lambda^2 = 0$ или $\lambda^2(\lambda^2+ + 4\lambda + 9) = 0$ имеет действительный корень $\lambda = 0$ кратности 2 и комплексно-сопряженные корни $\lambda = -2 \pm i\sqrt{5}$. Этим корням соответствуют линейно независимые решения 1, x, $e^{-2x}\cos x\sqrt{5}$, $e^{-2x}\sin x\sqrt{5}$. Следовательно, $z = C_1 + C_2x + e^{-2x}(C_3\cos x\sqrt{5} + C_4\sin x\sqrt{5})$ — общее решение дифференциального уравнения.

Пример 33. Решить уравнение $z^{(4)} + 8z'' + 16z = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0$ или $\lambda^2(\lambda^2+4)^2 = 0$. Это уравнение имеет комплексно-сопряженные корни $\lambda = \pm 2i$ кратности 2. Согласно (3.12) функции $\cos 2x$, $x\cos 2x$, $\sin 2x$, $x\sin 2x$ образуют фундаментальную систему решений, а $z = C_1\cos 2x + + C_2x\cos 2x + C_3\sin 2x + C_4x\sin 2x$ — общее решение исходного дифференциального уравнения.

Упражнения для самостоятельной работы

Решить дифференциальные уравнения:

3.1. $y'' - 2y' - 3y = 0$.

3.2. $2y'' + 3y' - 2y = 0$.

3.3. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

3.4. $4y'' + 4y' + y = 0$.

3.5. $y'' + 4y = 0$.

3.6. $y'' + 2y' + 2y = 0$.

3.7. $y'' - 2y' + y = 0$.

3.8. $y'' + 4y' - 5y = 0$.

3.9. $4y'' - 12y' + 9y = 0$.

3.10. $4y'' + 25y = 0$.

3.11. $y'' - 4y' + 5y = 0$.

3.12. $y'' + 3y' = 0$.

3.13. $25y'' + y = 0.$

3.14. $2y'' + y' - 3y = 0.$

3.15. $y'' + 10y' + 25y = 0.$

3.16. $y''' - 3y'' + 2y' = 0.$

3.17. $4y''' + 4y'' + y' = 0.$

3.18. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

3.19. $y^{(4)} - y'' = 0.$

3.20. $y''' + y' = 0.$

3.21. $y''' + y'' = 0.$

3.22. $y^{(4)} - y = 0.$

3.23. $y''' - 2y'' + y' = 0.$

3.24. $y^{(4)} - y''' = 0.$

3.25. $y^{(4)} - y' = 0.$

3.26. $y^{(4)} + 16y = 0.$

3.27. $y^{(6)} + y'' = 0.$

3.28. $y^{(6)} - y = 0.$

3.29. $y^{(7)} - 3y^{(6)} + 2y^{(5)} = 0.$

3.30. $y^{(8)} - 5y^{(6)} + 4y^{(4)} = 0.$

3.31. $y^{(12)} - 2y^{(8)} + y^{(4)} = 0.$

3.32. $y^{(10)} + 2y^{(6)} + y'' = 0.$

Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

3.33. $y'' + 3y' - 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3.$

3.34. $2y'' - y' = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$

3.35. $y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

3.36. $y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3.$

3.37. $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(1) = \frac{3}{e}, \quad y'(1) = -\frac{1}{e}.$

3.38. $4y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

3.39. $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$

3.40. $9y'' + 4y = 0, \quad y(\frac{3\pi}{2}) = -1, \quad y'(\frac{3\pi}{2}) = -2.$

3.41. $y'' + 3y' - 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2.$

3.42. $4y'' - 4y' + y = 0, \quad y(2) = 2e, \quad y'(2) = 2e.$

3.43. $2y'' + y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

3.44. $y'' + 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -8.$

3.45. $y''' - 5y'' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4, \quad y''(0) = 25.$

3.46. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 0.$

3.47. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 2.$

4 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка

4.1 Основные понятия

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = f(x), \quad (4.1)$$

где $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_n(x)$, $f(x)$ — заданные функции, причем $f(x) \not\equiv 0$.

Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка, соответствующее неоднородному уравнению (4.1), имеет вид

$$z^{(n)} + P_1(x)z^{(n-1)} + P_2(x)z^{(n-2)} + \ldots + P_{n-1}(x)z' + P_n(x)z = 0. \quad (4.2)$$

4.2 Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

Общее решение $y(x)$ линейного неоднородного дифференциального уравнения (4.1) равно сумме какого-либо частного решения $\widetilde{y}(x)$ этого уравнения и общего решения $z(x)$ соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения (4.2), т.е.

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + z(x). \quad (4.3)$$

4.3 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x), \quad (4.4)$$

где a_1, a_2, …, a_n — заданные числа, называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение уравнения (4.4) имеет вид (4.3), т.е. для нахождения общего решения этого уравнения достаточно определить общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения и какое-либо частное решение данного линейного неоднородного уравнения (4.4).

Отметим, что нахождение общего решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами рассмотрено в разделе 3. Рассмотрим методы нахождения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.

4.4 Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Пусть функции $z_1(x)$, $z_2(x)$, ..., $z_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения (4.2).

Частное решение $\tilde{y}(x)$ линейного неоднородного дифференциального уравнения (4.1) может быть найдено в виде

$$\tilde{y}(x) = C_1(x)z_1(x) + C_2(x)z_2(x) + \ldots + C_n(x)z_n(x), \tag{4.5}$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ — некоторые функции, производные которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)z_1(x) + C_2'(x)z_2(x) + \ldots + C_n'(x)z_n(x) = 0 \\ C_1'(x)z_1'(x) + C_2'(x)z_2'(x) + \ldots + C_n'(x)z_n'(x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)z_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)z_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)z_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases} \tag{4.6}$$

Подчеркнем, что функции $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, ..., $C_n'(x)$ определяются из системы (4.6) единственным образом. В частности, для линейного уравнения второго порядка система (4.6) имеет вид

$$\begin{cases} C_1'(x)z_1(x) + C_2'(x)z_2(x) = 0 \\ C_1'(x)z_1'(x) + C_2'(x)z_2'(x) = f(x) \end{cases} \tag{4.7}$$

Пример 34. Решить уравнение $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

Решение. Составим соответствующее линейное однородное уравнение $z'' + z = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$; значит, функции $z_1 = \cos x$ и $z_2 = \sin x$ образуют фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения, и потому $z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные, — общее решение линейного однородного уравнения $z'' + z = 0$.

Частное решение $\tilde{y}(x)$ исходного неоднородного уравнения ищем в виде $\tilde{y}(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$, где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — неизвестные функции, производные которых согласно (4.7) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $C_1'(x) = -\operatorname{tg} x$, $C_2'(x) = 1$. Выбрав первообразные $C_1(x) = \ln|\cos x|$ и $C_2(x) = x$, получим частное решение неоднородного уравнения $\widetilde{y}(x) = \ln|\cos x| \cdot \cos x + x\sin x$. В силу (4.3) $y(x) = \ln|\cos x| \cdot \cos x + x\sin x + (C_1\cos x + C_2\sin x)$ — общее решение исходного линейного неоднородного уравнения.

Пример 35. Найти решение уравнения $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$.

Решение. Составим соответствующее однородное уравнение $z''+4z'+ +4z = 0$. Отвечающее ему характеристическое уравнение $\lambda^2+4\lambda+4 = 0$ имеет равные корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, следовательно, функции $z_1(x) = = e^{-2x}$ и $z_2(x) = xe^{-2x}$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения. Частное решение $\widetilde{y}(x)$ исходного неоднородного дифференциального уравнения ищем в виде $\widetilde{y}(x) = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x) \cdot \cdot xe^{-2x}$. Производные $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x) \cdot xe^{-2x} = 0 \\ C_1'(x)(-2e^{-2x}) + C_2'(x) \cdot \left(e^{-2x} - 2xe^{-2x}\right) = e^{-2x}\ln x, \end{cases}$$

или, что то же самое, системе

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) \cdot x = 0 \\ -2C_1'(x) + C_2'(x) \cdot (1 - 2x) = \ln x, \end{cases}$$

откуда $C_1'(x) = -x\ln x$, $C_2'(x) = \ln x$. Тогда $C_1(x) = \int -x\ln x\,dx$ и $C_2(x) = \int \ln x\,dx$. Интегрируя по частям, имеем $C_1(x) = -\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+ +\widetilde{C_1}$ и $C_2(x) = x\ln x - x + \widetilde{C_2}$. Выбрав $\widetilde{C_1} = \widetilde{C_2} = 0$, получим частное решение неоднородного уравнения $\widetilde{y}(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2\right)e^{-2x} + (x\ln x - - x)xe^{-2x}$. В силу (4.3) общее решение исходного уравнения имеет вид $y(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2\right)e^{-2x} + (x\ln x - x)xe^{-2x} + C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Для отыскания решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, найдем $y' = \left[(x - x^2)\ln x - x(1 + 2C_2) + \frac{3}{2}x^2 - 2C_1 + C_2\right]e^{-2x}$. Используя начальные данные $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$, получим относительно постоянных C_1 и C_2 алгебраическую систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{4} - 1 + C_1 + C_2\right)e^{-2} = 0 \\ \left[-(1 + 2C_2) + \frac{3}{2} - 2C_1 + C_2\right]e^{-2} = 0 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{3}{4} \\ -2C_1 - C_2 = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

откуда $C_1 = -\frac{1}{4}$, $C_2 = 1$. Следовательно, $y = \frac{1}{4}e^{-2x}(2x^2\ln x - 3x^2 + 4x - - 1)$ — искомое решение задачи Коши.

4.5 Метод неопределенных коэффициентов

Этот метод применим для нахождения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (4.4), правая часть которого $f(x)$ имеет специальный вид:

$$f(x) = e^{\alpha x} P_e(x) \tag{4.8}$$

или

$$f(x) = e^{\alpha x} \left[P_l(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x \right], \tag{4.9}$$

где α, β — действительные числа, а $P_l(x)$ и $Q_m(x)$ — некоторые многочлены степени l и m соответственно.

Рассмотрим следующие случаи:

а) пусть правая часть дифференциального уравнения имеет вид (4.8), причем число α не является корнем характеристического уравнения (3.10).

Тогда неоднородное уравнение (4.4) имеет частное решение вида

$$\widetilde{y}(x) = e^{\alpha x} \cdot M_l(x). \tag{4.10}$$

где $M_l(x)$ — некоторый многочлен степени l.

Пример 36. Решить уравнение $y'' + 5y' + 6y = e^x(12x - 5)$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2+5\lambda+6 = 0$, корни которого суть $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$, поэтому соответствующее однородное уравнение $z''+5z'+6z = 0$ имеет общее решение $z = C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Так как правая часть исходного неоднородного уравнения имеет вид (4.8), и число $\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения, то, согласно (4.10), данное уравнение имеет решение $\widetilde{y} = e^x(Ax + B)$, где A и B — неопределенные коэффициенты. Для нахождения чисел A и B подставим $\widetilde{y} = e^x(Ax+B)$, $\widetilde{y}' = e^x(Ax + A + B)$ и $\widetilde{y}'' = e^x(Ax + 2A + B)$ в данное уравнение. Тогда получим $e^x(Ax + 2A + B) + 5e^x(Ax + A + B) + 6e^x(Ax + B) = e^x(12x - 5)$, или после сокращения на e^x и приведения подобных членов будем иметь $12Ax + (7A + 12B) = 12x - 5$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получим линейную относительно A и B систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 12A = 12 \\ 7A + 12B = -5, \end{cases}$$

откуда $A = 1$, $B = -1$. Значит, частное решение $\widetilde{y} = e^x(x - 1)$. Наконец, в силу (4.3), $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$ — общее решение исходного неоднородного уравнения.

Пример 37. Решить уравнение $y''' - 6y'' + 8y' = 3e^{\frac{3}{2}x}$.

Решение. Общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения $z''' - 6z'' + 8z' = 0$ имеет вид $z = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{4x}$ (см. пример 30). Правая часть данного линейного неоднородного уравнения имеет вид (4.8), где $l = 0$ и $\alpha = \frac{3}{2}$ не является корнем характеристического уравнения. Согласно (4.10), частное решение исходного уравнения будем искать в виде $\widetilde{y} = Ae^{\frac{3}{2}x}$, где A — некоторая постоянная. Подставляя в данное уравнение $\widetilde{y} = Ae^{\frac{3}{2}x}$, $\widetilde{y}' = \frac{3}{2}Ae^{\frac{3}{2}x}$, $\widetilde{y}'' = \frac{9}{4}Ae^{\frac{3}{2}x}$, $\widetilde{y}''' = \frac{27}{8}Ae^{\frac{3}{2}x}$, получим $Ae^{\frac{3}{2}x}\left(\frac{27}{8} - 6\cdot\frac{9}{4} + 8\cdot\frac{3}{2}\right) = 3e^{\frac{3}{2}x}$, т.е. $\frac{15}{8}A = 3$, откуда $A = \frac{8}{5}$. Значит, линейное неоднородное уравнение имеет частное решение $\widetilde{y} = \frac{8}{5}e^{\frac{3}{2}x}$, а $y = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{4x} + \frac{8}{5}e^{\frac{3}{2}x}$ — общее решение исходного уравнения.

б) пусть правая часть дифференциального уравнения (4.4) имеет вид (4.8), причем число α является корнем кратности k характеристического уравнения (3.10).

Тогда неоднородное уравнение (4.4) имеет частное решение вида

$$\widetilde{y} = x^k e^{\alpha x} M_l(x), \tag{4.11}$$

где $M_l(x)$ — некоторый многочлен степени l.

Пример 38. Решить уравнение $y'' - y' - 2y = (9x^2 - 5)e^{-x}$.

Решение. Правая часть этого дифференциального уравнения имеет вид (4.8). Корнями характеристического уравнения $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ являются числа $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$. Таким образом, $\alpha = -1$ является корнем кратности $k = 1$ характеристического уравнения. Согласно (4.11), частное решение исходного уравнения можно найти в виде $\widetilde{y} = x(Ax^2 + Bx + C)e^{-x}$, где A, B, C — неопределенные коэффициенты. Подставив $\widetilde{y} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^{-x}$, $\widetilde{y}' = (-Ax^3 + (3A - B)x^2 + (2B - C)x + C)e^{-x}$ и $\widetilde{y}'' = (Ax^3 + (B - 6A)x^2 + (6A - 4B + C)x + (2B - 2C))e^{-x}$ в исходное дифференциальное уравнение, получим $(-9Ax^2 + (6A - 6B)x + (2B - 3C))e^{-x} = (9x^2 - 5)e^{-x}$, откуда, сократив на e^{-x} и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получим относительно неопределенных коэффициентов A, B, C систему уравнений

$$\begin{cases} -9A = 9 \\ 6A - 6B = 0 \\ 2B - 3C = -5. \end{cases}$$

Так как $A = -1$, $B = -1$, $C = 1$ — решение этой алгебраической системы, то $\widetilde{y} = x(x^2 - x + 1)e^{-x}$ — частное решение неоднородного дифференциального уравнения. Наконец, $y = x(-x^2 - x + 1)e^{-x} + C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$ — общее решение исходного неоднородного уравнения, ибо функции e^{2x} и e^{-x} образуют фундаментальную систему решений соответствующего однородного дифференциального уравнения.

Пример 39. Решить уравнение $y^{(4)} + 4y''' + 9y'' = -180x^3 - 24x^2 + 72x - 6$.

Решение. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $z = C_1 + C_2x + e^{-2x}(C_3 \cos x\sqrt{5} + C_4 \sin x\sqrt{5})$ (см. пример 32). Правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид (4.8), где $\alpha = 0$ является корнем кратности $k = 2$ характеристического уравнения. Согласно (4.11), частное решение неоднородного уравнения можно найти в виде $\widetilde{y} = x^2(Ax^3 + Bx^2 + Dx + \varepsilon)$. Найдем $\widetilde{y}' = 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Dx^2 + 2\varepsilon x$, $\widetilde{y}'' = 20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Dx + 2\varepsilon$, $\widetilde{y}''' = 60Ax^2 + 24Bx + 6D$ и, наконец, $\widetilde{y}^{(4)} = 120Ax + 24B$. Подставляя эти производные в данное уравнение, получим $(120Ax + 24B) + 4(60Ax^2 + 24Bx + 6D) + 9(20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Dx + 2\varepsilon) = -180x^3 - 24x^2 + 72x - 6$, или $180Ax^3 + (240A + 108B)x^2 + (120A + 96B + 54D)x + (24B + 24D + 18\varepsilon) = -180x^3 - 24x^2 + 72x - 6$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, составим систему уравнений

$$\begin{cases} 180A = -180 \\ 240A + 108B = -24 \\ 120A + 96B + 54D = 72 \\ 24B + 24D + 18\varepsilon = -6 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \\ D = 0 \\ \varepsilon = -3. \end{cases}$$

Тогда $\widetilde{y} = x^2(-x^3 + 2x^2 - 3)$ — частное решение неоднородного уравнения. Итак, $y = C_1 + C_2x + e^{-2x}(C_3 \cos x\sqrt{5} + C_4 \sin x\sqrt{5}) + (x^3 + 2x^2 - 3)x^2$ — общее решение исходного уравнения.

в) пусть правая часть дифференциального уравнения (4.4) имеет вид (4.9), причем комплексно-сопряженные числа $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения (3.10).

Тогда неоднородное уравнение (4.4) имеет частное решение вида

$$\widetilde{y} = e^{\alpha x}\left[M_r(x) \cos \beta x + N_r(x) \sin \beta x\right], \tag{4.12}$$

где $M_r(x)$ и $N_r(x)$ — некоторые многочлены степени $r = \max\{l; m\}$.

Пример 40. Решить уравнение $y'' - 5y' + 6y = 52\cos 2x$.

Решение. Соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение имеет общее решение $z = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$ (см. пример 24). Правая часть исходного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид (4.9), где $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $P_l(x) = 52$, $Q_m(x) = 0$, т.е. $l = m = 0$, причем числа $\alpha \pm \beta i = \pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения. Тогда, согласно (4.12), частное решение рассматриваемого уравнения следует искать в виде $\widetilde{y} = A\cos 2x + B\sin 2x$, где A, B — некоторые постоянные. Найдем $\widetilde{y}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$ и $\widetilde{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$. После подстановки $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}'$, $\widetilde{y}''$ в исходное уравнение получим тождество $-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 5(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + 6(A\cos 2x + B\sin 2x) = \cos 2x$, т.е. $(2A - 10B)\cos 2x + (10A + 2B)\sin 2x = 52\cos 2x$. Приравнивая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$, составим систему уравнений

$$\begin{cases} 2A - 10B = 52 \\ 10A - 2B = 0, \end{cases}$$

откуда $A = 1$, $B = -5$. Значит, частное решение данного неоднородного уравнения $\widetilde{y} = \cos 2x - 5\sin 2x$, а $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \cos 2x - 5\sin 2x$ — общее решение исходного уравнения.

Пример 41. Решить уравнение $y''' + 10y'' + 25y' = e^x(47\cos x + 23\sin x)$.

Решение. Так как характеристическое уравнение $\lambda^3 + 10\lambda^2 + 25\lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0$ кратности $k_1 = 1$ и $\lambda_2 = -5$ кратности $k_2 = 2$, то $z = C_1 + e^{-5x}(C_2x + C_3)$ — общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения. Правая часть исходного уравнения имеет вид (4.9), где $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $P_0(x) = 47$, $Q_0(x) = 23$, причем числа $\alpha \pm \beta i = 1 \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения. Согласно (4.12), частное решение неоднородного дифференциального уравнения следует искать в виде $\widetilde{y} = e^x(A\cos x + B\sin x)$. Тогда $\widetilde{y}' = e^x\,[(A + B)\cos x + (B - A)\sin x]$, $\widetilde{y}'' = e^x\,[2B\cos x - 2A\sin x]$ и $\widetilde{y}''' = e^x\,[(2B - 2A)\cos x - (2A + 2B)\sin x]$. Подставив $\widetilde{y}'$, $\widetilde{y}''$, $\widetilde{y}'''$ в исходное уравнение и сократив на e^x, получим $(23A + 47B)\cos x + (23B - 47A)\sin x = 47\cos x + 23\sin x$. Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, составим систему уравнений

$$\begin{cases} 23A + 47B = 47 \\ -47A + 23B = 23 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}.$$

Итак, $\widetilde{y} = e^x\sin x$ — частное решение, а $y = C_1 + e^{-5x}(C_2x + C_3) + e^x\sin x$ — общее решение исходного уравнения.

Пример 42. Решить уравнение $y'' + 4y' + 20y = 51\cos 3x + (265x + 80)\sin 3x$.

Решение. Соответствующее линейное однородное уравнение имеет общее решение $z = e^{-2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)$ (см. пример 27). Правая часть данного дифференциального уравнения имеет вид (4.9), где $\alpha = 0$, $\beta = 3$, $P_0(x) = 51$, $Q_1(x) = 256x + 80$, причем числа $\alpha \pm \beta i = \pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения. Согласно (4.12), частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $\widetilde{y} = (Ax + B)\cos 3x + (Dx + \varepsilon)\sin 3x$. Тогда $\widetilde{y}' = (3Dx + A + 3\varepsilon)\cos 3x + (-3Ax - 3B + D)\sin 3x$ и $\widetilde{y}'' = (-9Ax - 9B + 6D)\cos 3x + (-9Dx - 6A - 9\varepsilon)\sin 3x$. Подставив $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}'$, $\widetilde{y}''$ в исходные уравнения, получим $[(11A + 12D)x + (4A + 11B + 6D + 12\varepsilon)]\cos 3x + [(-12A + 11D)x + (-6A - 12B + 4D + 11\varepsilon)]\sin 3x = 51\cos 3x + (265x + 80)\sin 3x$. Приравнивая в обеих частях равенства коэффициенты при функциях $\cos x$, $\sin 3x$, $x\cos 3x$, $x\sin 3x$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 11A + 12D = 0 \\ 4A + 11B + 6D + 12\varepsilon = 51 \\ -12A + 11D = 265 \\ -6A - 12B + 4D + 11\varepsilon = 80, \end{cases}$$

откуда $A = -12$, $B = 3$, $D = 11$, $\varepsilon = 0$. Итак, $\widetilde{y} = (-12x + 3)\cos 3x + 11\sin 3x$ — частное решение, а $y = e^{-2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) + (-12x + 3)\cos 3x + 11\sin 3x$ — общее решение исходного уравнения.

г) пусть правая часть дифференциального уравнения (4.4) имеет вид (4.9), причем комплексно-сопряженные числа $\alpha \pm i\beta$ являются корнями кратности k характеристического уравнения (3.10).

Тогда неоднородное уравнение (4.10) имеет частное решение вида

$$\widetilde{y} = x^k e^{\alpha x}\left[M_r(x)\cos\beta x + N_r(x)\sin\beta x\right], \tag{4.13}$$

где $M_r(x)$ и $N_r(x)$ — некоторые многочлены степени $r = \max\{l; m\}$.

Пример 43. Решить уравнение $y'' - 2y' + 2y = 4e^x\sin x$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1 + i$ и $\lambda_2 = 1 - i$ и потому $z = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$ — общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения. Правая часть исходного неоднородного уравнения имеет вид (4.9), причем числа $\alpha \pm \beta i = 1 \pm i$ являются корнями кратности $k = 1$ характеристического уравнения. Согласно (4.13), частное решение неоднородного дифференциального уравнения следует искать в виде $\widetilde{y} = xe^x(A\cos x + B\sin x)$. Тогда $\widetilde{y}' = e^x\left[(Ax + Bx + A)\cos x + (Bx - Ax + B)\sin x\right]$ и

$\widetilde{y}'' = 2e^x\,[(Bx + A + B)\cos x + (-Ax - A + B)\sin x]$. Подставив $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}'$, $\widetilde{y}''$ в исходное уравнение и сократив на e^x, получим, что $2B\cos x - 2A\sin x = 4\sin x$. Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, составим систему уравнений

$$\begin{cases} 2B = 0 \\ -2A = 4, \end{cases}$$

откуда $A = -2$, $B = 0$. Итак, $\widetilde{y} = -2xe^x\cos x$ — частное решение, а $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) - 2xe^x\cos x$ — общее решение исходного неоднородного уравнения.

Пример 44. Решить уравнение $y'' + 9y = (3x + 6)\cos 3x + \sin 3x$.

Решение. Функция $z = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$ является общим решением соответствующего однородного уравнения (см. пример 28). Правая часть исходного неоднородного уравнения имеет вид (4.9), причем числа $\alpha \pm \beta i = \pm 3i$ являются корнями кратности $k = 1$ характеристического уравнения. Согласно (4.13), частное решение данного неоднородного уравнения будем искать в виде $\widetilde{y} = x\,[(Ax + B)\cos 3x + (Cx + D)\sin 3x]$. Тогда $\widetilde{y}' = (3Cx^2 + 2Ax + 3Dx + B)\cos 3x + (-3Ax^2 - 3Bx + 2Cx + D)\sin 3x$ и $\widetilde{y}'' = (-9Ax^2 - 9Bx + 12Cx + 2A + 6D)\cos 3x + (-9Cx^2 - 12Ax - 9Dx - 6B + 2C)\sin 3x$. Подставив $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}'$, $\widetilde{y}''$ в исходное уравнение, получим $(12Cx + 2A + 6D)\cos 3x + (-12Ax - 6B + 2C)\sin 3x = (3x + 6)\cos 3x + \sin 3x$. Приравнивая далее коэффициенты при функциях $\cos 3x$, $x\cos 3x$, $\sin 3x$, $x\sin 3x$, составим систему уравнений

$$\begin{cases} 12C = 3 \\ -12A = 0 \\ 2A + 6D = 6 \\ 2C - 6B = 1 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{12} \\ C = \frac{1}{4} \\ D = 1 \end{cases}.$$

Итак, $\widetilde{y} = x\left[-\frac{1}{12}\cos 3x + \left(\frac{1}{4}x + 1\right)\sin 3x\right]$ — частное решение, а $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + x\left[-\frac{1}{12}\cos 3x + \left(\frac{1}{4}x + 1\right)\sin 3x\right]$ — общее решение исходного неоднородного уравнения.

4.6 Принцип суперпозиции (принцип наложения)

Если правая часть $f(x)$ линейного неоднородного дифференциального уравнения (4.1) есть сумма нескольких функций, т.е.

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x), \tag{4.14}$$

то уравнение имеет частное решение

$$\widetilde{y}(x) = \widetilde{y}_1(x) + \widetilde{y}_2(x) + \ldots + \widetilde{y}_m(x), \tag{4.15}$$

где $\widetilde{y}_i(x)$ — частное решение уравнения

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = f_i(x) \quad (4.16)$$

$(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Пример 45. Решить уравнение $y'' - 5y' = 10x + 41\cos 4x$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$. Следовательно, $z = C_1 + C_2e^{5x}$ — общее решение линейного однородного уравнения. Так как правая часть исходного уравнения есть сумма двух функций, то это уравнение имеет частное решение $\widetilde{y} = \widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2$, где $\widetilde{y}_1$ — частное решение уравнения $y'' - 5y' = 10x$, $\widetilde{y}_2$ — частное решение уравнения $y'' - 5y' = 41\cos 4x$. Найдем $\widetilde{y}_1$ и $\widetilde{y}_2$. Правая часть уравнения $y'' - 5y' = 10x$ имеет вид (4.8), причем число $\alpha = 0$ является корнем кратности $k = 1$ характеристического уравнения. Согласно (4.10), $\widetilde{y}_1$ следует искать в виде $\widetilde{y}_1 = x \cdot (Ax + B)$. Тогда $\widetilde{y}_1' = 2Ax + B$, $\widetilde{y}_1'' = 2A$. После подстановки $\widetilde{y}_1'$ и $\widetilde{y}_1''$ в уравнение $y'' - 5y' = 10x$ получим $2A - 5(2Ax + B) = 10x$. Составим систему

$$\begin{cases} -10A = 10 \\ 2A - 5B = 0, \end{cases}$$

откуда $A = -1$, $B = -\frac{2}{5}$. Итак, $\widetilde{y}_1 = -x^2 - \frac{2}{5}x$. Затем найдем решение $\widetilde{y}_2$ уравнения $y'' - 5y' = 41\cos 4x$. Правая часть этого уравнения имеет вид (4.9), причем числа $\alpha \pm \beta i = \pm 4i$ не являются корнями характеристического уравнения и потому, согласно (4.12), частное решение $\widetilde{y}_2$ следует искать в виде $\widetilde{y}_2 = A\cos 4x + B\sin 4x$. Тогда $\widetilde{y}_2' = -4A\sin 4x + 4B\cos 4x$, $\widetilde{y}_2'' = -16A\cos 4x - 16B\sin 4x$. Подставляя $\widetilde{y}_2'$ и $\widetilde{y}_2''$ в уравнение $y'' - 5y' = 41\cos 4x$, получаем $-16A\cos 4x - 16B\sin 4x - 5(-4A\sin 4xB\cos 4x) = 41\cos 4x$. Составим систему

$$\begin{cases} -16A - 20B = 41 \\ -16B + 20A = 0, \end{cases}$$

откуда $A = -1$, $B = -\frac{5}{4}$, значит, $\widetilde{y}_2 = -\cos 4x - \frac{5}{4}\sin 4x$.

Так как $\widetilde{y} = \widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2$, то $\widetilde{y} = -x^2 - \frac{2}{5}x - \cos 4x - \frac{5}{4}\sin 4x$. Итак, $y = C_1 + C_2e^{5x} - x^2 - \frac{2}{5}x - \cos 4x - \frac{5}{4}\sin 4x$ — общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Упражнения для самостоятельной работы

Решить дифференциальные уравнения методом вариации произвольных постоянных:

4.1. $y'' - y' = \frac{1}{1+e^x}$.

4.2. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$.

4.3. $y'' + y = \operatorname{ctg}^2 x$.

4.4. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

4.5. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.

4.6. $y'' - y' = e^{2x} \sin e^x$.

4.7. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$.

4.8. $y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{2x^3+x^2-4x-6}{x^4}$.

Решить дифференциальные уравнения методом неопределенных коэффициентов:

4.9. $y'' - 2y' + y = x^3$.

4.10. $2y'' - y' - y = 4e^{-x}$.

4.11. $y'' + 4y' + 13y = 3x + 1$.

4.12. $y'' - 6y' + 9y = x^2 + \frac{2}{9}$.

4.13. $y'' - y' = x$.

4.14. $y'' + 2y' + y = -2$.

4.15. $y''' + y'' = 1$.

4.16. $y'' - 2y' + 4y = (x + 2)e^{3x}$.

4.17. $y'' + 5y' + 6y = (1 - x)e^{-2x}$.

4.18. $2y'' + y' = 2x - 1$.

4.19. $y'' + y = 10e^{-2x}$.

4.20. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$.

4.21. $y'' + y' + y = (x^2 + x)e^x$.

4.22. $y''' + y = x^3$.

4.23. $y^{(4)} + y'' = x^2 + x$.

4.24. $y'' + y' = 5\cos 2x$.

4.25. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$.

4.26. $y'' + y = \sin 2x$.

4.27. $y'' + 4y = -\sin 2x$.

4.28. $y'' - y' = e^x \sin x$.

4.29. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$.

4.30. $y'' + 2y = x\cos x - 2\sin x$.

4.31. $y'' + 2y' + y = (2x + 2)\cos x + 2\sin x$.

4.32. $y'' + y = -2\sin x$.

4.33. $y'' + 9y = -6\sin 3x$.

4.34. $2y'' + 4y' = 5x\sin x$.

4.35. $y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x}\sin x$.

4.36. $y''' - y = \sin x$.

4.37. $y'' + y = \sin x - 2e^{-x}$.

4.38. $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}$.

4.39. $y'' - 3y' + 2y = 3x + 5\sin 2x$.

Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

4.40. $y'' + 2y = 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{2}$.

4.41. $y'' - y = 2\sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

4.42. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$.

4.43. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$.

4.44. $y''' - y' = -2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2$.

Ответы к упражнениям для самостоятельной работы

1.1. $y = \operatorname{tg} C - \ln|\cos x|$.

1.2. $y^2 - Cx^2 + 1 = 0$.

1.3. $\cos y \ln|Cx| + 1 = 0$.

1.4. $2e^{-y}(y+1) - x^2 = 0$.

1.5. $y = \sqrt[3]{3x^2 + 3x + C}$.

1.6. $C \ln y = Cxe^{\frac{x^3}{3}}$.

1.7. $\ln y^2 + y^2 + 4(x\cos x - \sin x) = C, \quad y = 0$.

1.8. $y = \sqrt{1 - e^{-2\cos x}}$.

1.9. $y = -\ln\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x + e^2 - \frac{1}{4}\right)$.

1.10. $y = (16 + 4e^x(1-x))^{\frac{1}{4}}$.

1.11. $y = \sin x - 3$.

1.12. $e^{\frac{y}{x}}\left(\frac{y}{x} - 1\right) + \ln|x| = C$.

1.13. $\ln(x^2 + y^2) - 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$.

1.14. $x = C\cos\frac{y}{x}$.

1.15. $ye^{\frac{\sqrt{x}}{y}} = C$.

1.16. $\sin yx + \ln|x| = C$.

1.17. $y = \sqrt{x^2 - \frac{3}{x}}$.

1.18. $y = xe^{1-x}$.

1.19. $y = \frac{x}{1 - \ln x}$.

1.20. $y = \frac{x^2 + 4}{x}$.

1.21. $y = x(2\ln|x| - 2)^{\frac{1}{3}}$.

1.22. $y + \sqrt{y^2 - x^2} = \frac{x^2}{2}$.

1.23. $y = \frac{x^3+C}{3\cos x}$.

1.24. $y = \frac{x^2+C}{2(x^2+3)}$.

1.25. $y = (C - \cos x)\operatorname{ctg} x$.

1.26. $y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$.

1.27. $y = \frac{x(\ln x - 1) + C}{x^2}$.

1.28. $y = (x + C)\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

1.29. $y = xe^{-x}$.

1.30. $y = x^3 e^x$.

1.31. $y = \sin x + \cos x$.

1.32. $y = \frac{2}{3}x^3 e^{-x^2}$.

1.33. $x = 2y - y^2 - 2 + e^{-y}$.

2.1. $y = e^x + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$.

2.2. $y = C_2 - C_1\cos x - x$.

2.3. $y = \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + C_1 \operatorname{arctg} x + C_2$.

2.4. $y\ln|y| + x + C_1 y + C_2 = 0$.

2.5. $2C_1 y = (\pm C_1 x + C_2)^2 + 1$.

2.6. $x - C_1 = ln|\sin(y - C_2)|$.

2.7. $y = -\ln|\cos x|$.

2.8. $y = 3\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x - x$.

2.9. $y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + x\ln x - \frac{1}{12}$.

2.10. $y = 2\ln(x+1) + 2 - x$.

2.11. $y = \sqrt{2x - x^2}$.

2.12. $y = 2 - \cos x$.

2.13. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

2.14. $y = 2e^x$.

3.1. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$.

3.2. $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-2x}$.

3.3. $y = (C_1 x + C_2) e^{3x}$.

3.4. $y = (C_1 x + C_2) e^{-\frac{x}{2}}$.

3.5. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

3.6. $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

3.7. $y = (C_1 x + C_2) e^x$.

3.8. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}$.

3.9. $y = (C_1 x + C_2) e^{\frac{3x}{2}}$.

3.10. $y = C_1 \cos \frac{5x}{2} + C_2 \sin \frac{5x}{2}$.

3.11. $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

3.12. $y = C_1 e^{-3x} + C_2$.

3.13. $y = C_1 \cos \frac{x}{5} + C_2 \sin \frac{x}{5}$.

3.14. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{3x}{2}}$.

3.15. $y = (C_1 x + C_2) e^{-5x}$.

3.16. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3$.

3.17. $y = (C_1 x + C_2) e^{-\frac{x}{2}} + C_3$.

3.18. $y = (C_1 x^2 + C_2 x + C_3) e^x$.

3.19. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x + C_4.$

3.20. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3.$

3.21. $y = C_1 e^{-x} + C_2 x + C_3.$

3.22. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$

3.23. $y = (C_1 x + C_2) e^x + C_3.$

3.24. $y = C_1 e^x + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$

3.25. $y = C_1 e^x + C_2 + e^{-\frac{x}{2}}(C_3 \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + C_4 \sin \frac{x\sqrt{3}}{2}).$

3.26. $$\begin{aligned} y &= \left(C_1 \cos x\sqrt{2} + C_2 \sin x\sqrt{2}\right) e^{x\sqrt{2}} + \\ &+ \left(C_3 \cos x\sqrt{2} + C_4 \sin x\sqrt{2}\right) e^{-x\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

3.27. $$\begin{aligned} y &= C_1 + C_2 x + \left(C_3 \cos x\tfrac{\sqrt{2}}{2} + C_4 \sin x\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{x\frac{\sqrt{2}}{2}} + \\ &+ \left(C_5 \cos x\tfrac{\sqrt{2}}{2} + C_6 \sin x\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{-x\frac{\sqrt{2}}{2}}. \end{aligned}$$

3.28. $$\begin{aligned} y &= C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \left(C_3 \cos x\tfrac{\sqrt{3}}{2} + C_4 \sin x\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) e^{\frac{x}{2}} + \\ &+ \left(C_5 \cos x\tfrac{\sqrt{3}}{2} + C_6 \sin x\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

3.29. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 x^4 + C_6 e^x + C_7 e^{2x}.$

3.30. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{-x} + C_6 e^x + C_7 e^{-2x} + C_8 e^{2x}.$

3.31. $$\begin{aligned} y = {} & C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + (C_5 + C_6 x)\, e^x + (C_7 + C_8 x)\, e^{-x} + \\ & + (C_9 + C_{10} x) \cos x + (C_{11} + C_{12} x) \sin x. \end{aligned}$$

3.32. $$\begin{aligned} y = {} & C_1 + C_2 x + \left((C_3 + C_4 x) \cos x\tfrac{\sqrt{2}}{2} + (C_5 + C_6 x) \sin x\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{x\frac{\sqrt{2}}{2}} + \\ & + \left((C_7 + C_8 x) \cos x\tfrac{\sqrt{2}}{2} + (C_9 + C_{10} x) \sin x\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{-x\frac{\sqrt{2}}{2}}. \end{aligned}$$

3.33. $y = e^x + e^{-4x}.$

3.34. $y = 2e^{\frac{x}{2}} + 1.$

3.35. $y = \cos 3x.$

3.36. $y = e^{-3x}.$

3.37. $y = e^{-x}(2x+1)$.

3.38. $y = \cos\frac{3x}{2} + \frac{2}{3}\sin\frac{3x}{2}$.

3.39. $y = e^{x} - e^{-2x}$.

3.40. $y = \cos\frac{2x}{3} + 3\sin\frac{2x}{3}$.

3.41. $y = 2e^{x} + e^{-4x}$.

3.42. $y = xe^{\frac{x}{2}}$.

3.43. $y = e^{x}$.

3.44. $y = e^{-2x}(\cos 3x - 2\sin 3x)$.

3.45. $y = e^{5x} - x$.

3.46. $y = e^{x} + e^{-x}$.

3.47. $y = xe^{x} - e^{-x}$.

4.1. $y = -x + e^{x}(C_2 - x) + (1+e^{x})\ln(1+e^{x}) + C_3$.

4.2. $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + xe^{-x}\ln|x|$.

4.3. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

4.4. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\cdot\ln|\cos 2x| + \frac{x}{2}\sin 2x$.

4.5. $y = \left(\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{3x^2}{4} + C_1 + C_2x\right)e^{-2x}$.

4.6. $y = C_1e^{x} + C_2 - \sin e^{x}$.

4.7. $y = \left(C_1 + C_2x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + x\operatorname{arctg}x\right)e^{x}$.

4.8. $y = \frac{1}{x} + C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}$.

4.9. $y = (C_1 + C_2x)e^{x} + x^3 + 6x^2 + 18x + 24$.

4.10. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-\frac{x}{2}} + 2e^{-x}$.

4.11. $y = (C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)e^{-2x} + \frac{3}{13}x + \frac{1}{169}$.

4.12. $y = (C_1x + C_2)e^{3x} + \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{27}x + \frac{8}{81}$.

4.13. $y = C_1 + C_2e^x - \frac{1}{2}x^2 - x.$

4.14. $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} - 2.$

4.15. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + \frac{1}{2}x^2.$

4.16. $y = e^x(C_1 \cos x\sqrt{3} + C_2 \sin x\sqrt{3}) + e^{3x}\left(\frac{1}{7}x + \frac{10}{49}\right).$

4.17. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x} + \left(\frac{1}{3}x - \frac{x^2}{2}\right)e^{-2x}.$

4.18. $y = C_1 + C_2e^{-\frac{x}{2}} + x^2 - 5x.$

4.19. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2e^{-2x}.$

4.20. $y = C_1 + C_2e^{-3x} - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x\right)e^{-3x}.$

4.21. $y = \left(C_1 \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + C_2 \sin \frac{x\sqrt{3}}{2}\right)e^{\frac{x}{2}} + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}\right)e^x.$

4.22. $y = C_1e^{-x} + \left(C_2 \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + C_3 \sin \frac{x\sqrt{3}}{2}\right)e^{\frac{x}{2}} + x^3 - 6.$

4.23. $y = C_1 + C_2x + C_3 \cos x + C_1 \sin x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - x^2.$

4.24. $y = C_1 + C_2e^{-x} - \cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x.$

4.25. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + \frac{5}{6}\cos 3x - \frac{1}{6}\sin 3x.$

4.26. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3}\sin 2x.$

4.27. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x \cos 2x.$

4.28. $y = C_1 + C_2e^x - \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x).$

4.29. $y = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{1}{5}e^x(6\sin x - 2\cos x).$

4.30. $y = C_1 \sin x\sqrt{2} + C_2 \cos x\sqrt{2} + x \cos x.$

4.31. $y = (C_1x + C_2)e^{-x} + x \sin x.$

4.32. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \cos x.$

4.33. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + (x - 1)\cos 3x + 4\sin 3x.$

4.34. $y = C_1 + C_2e^{-2x} - \left(\frac{x}{2} + \frac{9}{5}\right)\sin x - \left(x + \frac{33}{5}\right)\cos x.$

4.35. $y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{-x} - xe^{-x} \cos x.$

4.36. $y = C_1 e^x + \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}(\cos x - \sin x).$

4.37. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x - e^{-x}.$

4.38. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-x}.$

4.39. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + \frac{3}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x.$

4.40. $y = \frac{1}{2}(x - 1 + \cos x\sqrt{2}).$

4.41. $y = e^x - \sin x.$

4.42. $y = e^{2x} - e^x(x^2 + x - 1).$

4.43. $y = e^{2x}(\cos x - 2\sin x) + e^x(x + 1)^2.$

4.44. $y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} + x^2.$

Список литературы

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1986.

[2] Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2 — М.: Наука, 1985.

[3] Киселев А.И., Краснов М.Л., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Высшая школа, 1965.

[4] Сборник задач по курсу высшей математики для втузов. Под ред. П.Е.Дюбюка и Г.И.Кручковича. М.: Высшая школа, 1963.

[5] Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1975.

Содержание