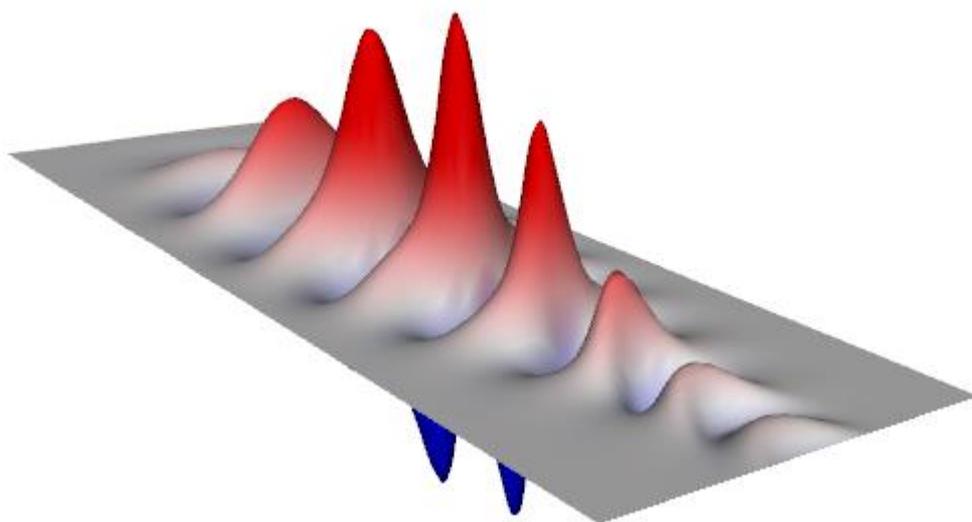


**ІІТМО**

**И.Р. Арцер, А.А. Дроздов, С.А. Козлов**

**ОПТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА. ЧАСТЬ 1.  
КЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ  
ЯВЛЕНИЙ ОПТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**



**Санкт-Петербург  
2024**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**И.Р. Арцер, А.А. Дроздов, С.А. Козлов**  
**ОПТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА. ЧАСТЬ 1.**  
**КЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ**  
**ЯВЛЕНИЙ ОПТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО  
по направлению подготовки 12.03.03 Фотоника и оптоинформатика  
в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных  
образовательных программ высшего образования бакалавриата

**ИТМО**

Санкт-Петербург  
2024

Арцер И.Р., Дроздов А.А., Козлов С.А., Оптическая физика. Часть 1. Классический подход к описанию явлений оптической физики– СПб: Университет ИТМО, 2024. – 59 с.

Рецензент(ы):

Цыпкин Антон Николаевич, доктор физико-математических наук, доцент, доцент (квалификационная категория "ординарный доцент") научно-образовательного центра фотоники и оптоинформатики, Университета ИТМО.

Данное учебное пособие предназначено для студентов третьего курса бакалавриата Университета ИТМО, обучающихся по образовательному направлению 12.03.03 «Фотоника и оптоинформатика» на одноименной образовательной программе по дисциплине «Оптическая физика». В первой части пособия для описания явлений оптической физики использован классический подход: динамика поля электромагнитных волн изучается на основе уравнений Максвелла, а взаимодействие излучения с веществом рассматривается в рамках классической теории дисперсии света. Методами теории волн рассмотрены явления дифракции, дисперсии, нелинейной оптики. При этом подробно обсуждаются методы описания и закономерности этих явлений как для квазимонохроматических и параксиальных волн, так затрагиваются и их особенности для непараксиального излучения и волн из малого числа колебаний. Привлечено внимание читателя к до сих пор мало обсуждаемому в учебной литературе вопросу о различии решений уравнений Максвелла и выводимых из них волновых уравнений при решении задач дифракции непараксиального излучения. Во второй части пособия рассмотрена квантовая теория резонансного взаимодействия света с веществом.

**ИТМО**

**Университет ИТМО** – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2024

© Арцер И.Р., Дроздов А.А., Козлов С.А., 2024

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
ЛЕКЦИЯ 1. Уравнения Максвелла и волновое уравнение .....	5
ЛЕКЦИЯ 2. Спектральный подход к решению уравнений Максвелла и волновых уравнений. Явление дифракции света .....	11
ЛЕКЦИЯ 3. Дифракция непараксиальных и параксиальных световых пучков. Укороченное волновое уравнение .....	17
Параксиальные оптические пучки. Дифракция Френеля .....	18
Укороченное волновое уравнение в теории дифракции .....	20
ЛЕКЦИЯ 4. Дифракция гауссовых пучков. Итоги обсуждения методов анализа дифракции излучения .....	24
Методы анализа дифракции излучения .....	26
ЛЕКЦИЯ 5. Распространение световых импульсов в оптических средах. Явление дисперсии света.....	31
ЛЕКЦИЯ 6. Групповая скорость. Дисперсионное расплывание световых импульсов.....	36
Дисперсионное расплывание световых импульсов .....	38
Укороченное волновое уравнение в теории дисперсии .....	40
ЛЕКЦИЯ 7. Понятия и термины теории дисперсии .....	41
Нормировка укороченного волнового уравнения .....	46
ЛЕКЦИЯ 8. Нелинейная теория дисперсии света. Явления нелинейной оптики .....	48
Укороченное волновое уравнение в нелинейной оптике.....	53
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Дифракция пучка фемтосекундного излучения в воздухе....	55
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Дисперсия фемтосекундного импульса в линейной диэлектрической среде.....	56
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	58

## ВВЕДЕНИЕ

**Уважаемые студенты!** Настоящее пособие написано по материалам лекционного курса по дисциплине «Оптическая физика», который читается доктором физико-математических наук, профессором С.А. Козловым в рамках образовательной программы «Фотоника и оптоинформатика» на третьем курсе. В физической лаборатории занятия ведет кандидат физико-математических наук, ассистент А.А. Дроздов, на практических занятиях и в лаборатории им ассистировал аспирант И.Р. Арцер.

Явления оптической физики можно изучать, используя различные методы анализа. Во-первых, основываясь на *методе классической оптики*. В этом случае динамика и поля, и вещества описывается классически. Именно этот подход использован в настоящей части учебного пособия. Во-вторых, для описания ряда явлений наиболее эффективен *полуклассический метод*, когда динамика поля описывается, по-прежнему, классически, а вещество – законами квантовой механики. Этому подходу мы посвятим вторую часть пособия. И, в-третьих, есть *методы квантовой электродинамики*. И поле, и вещество при таком подходе описываются законами квантовой физики. Такой метод Вы изучите в рамках дисциплины «Квантовая оптика».

При обсуждении ниже особенностей тех или иных оптических явлений мы полагаем, что курс «Оптика» в рамках курса «Общая физика» Вами внимательно прослушан. Поэтому в этом курсе мы будем обращать больше внимание на строгость решения задач и на использование более сложных теоретических техник, которые в рамках курса «Общая физика» обычно не используются. Методами теории волн рассмотрены явления дифракции, дисперсии, нелинейной оптики. При этом подробно обсуждаются методы описания и закономерности этих явлений как для квазимонохроматических и параксиальных волн, так затрагиваются и их особенности для непараксиального излучения и волн из малого числа колебаний. Привлечено внимание читателя к до сих пор мало обсуждаемому в учебной литературе вопросу о различии решений уравнений Максвелла и выводимых из них волновых уравнений при решении задач дифракции непараксиального излучения. Надеемся, что это позволит Вам увидеть новые особенности в уже известных явлениях оптической физики. Кроме данного учебного пособия в этом Вам также могут помочь замечательный учебник [1] и научные монографии учебного характера [2, 3].

## ЛЕКЦИЯ 1. Уравнения Максвелла и волновое уравнение

В основе классического подхода к изучению явлений оптической физики лежат уравнения Максвелла, которые были получены обобщением эмпирических законов электричества и магнетизма еще во второй половине позапрошлого века. В СИ они имеют наиболее простой (отсутствуют коэффициенты) вид:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho, \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

здесь  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  – напряженности электрического и магнитного поля электромагнитной волны,  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$  – электрическая и магнитная индукция,  $\rho$  – плотность свободных зарядов,  $\vec{j}$  – плотность тока.

Напомним, что первое уравнение системы (1.1) описывает закон электромагнитной индукции Фарадея, второе – закон о возбуждении магнитного поля токами, третье – закон Кулона, а последнее – опытный факт отсутствия свободных магнитных зарядов.

Обратим внимание читателя на то, что система уравнений Максвелла не полна. В неё входит 16 неизвестных величин ( $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{j}$  – векторные величины, каждая из которых характеризуется тремя скалярными величинами, и один скаляр  $\rho$ ), а уравнений всего 8 (два векторных, каждому из которых соответствует три скалярных уравнения, и два скалярных уравнения). Поэтому система уравнений Максвелла (1.1), чтобы иметь однозначное физическое решение, должна быть дополнена материальными уравнениями, которые устанавливают связь физических величин  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{j}$ , характеризующих отклик вещества на электрическое и магнитное поля излучения, с характеристиками этих силовых полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Это ещё 9 уравнений.

Курьезно, что  $8 + 9 = 17$  уравнений. А это уже больше, чем 16 неизвестных в этих уравнениях. Поэтому заметим, что скалярное уравнение  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  в системе (1.1), строго говоря, не является независимым. Покажем это.

Применим к первому уравнению системы (1.1)  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  дифференциальную операцию  $\nabla$ . Тогда левая часть этого уравнения станет тождественно равной нулю  $0 \equiv \nabla(\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{B}$  и, следовательно,  $\nabla \cdot \vec{B} = const$ . Учитывая, что до включения источника поля этого поля нет, то  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ . Таким образом, четвертое уравнение из системы уравнений Максвелла (1.1) можно считать следствием первого уравнения из (1.1).

Дадим достаточно простой, но соответствующий многим практическим задачам, пример материальных уравнений. Так, для диэлектрической среды их часто можно записать в виде:

$$\rho = 0, \vec{j} = 0, \quad 1.2(a)$$

т.е. полагая, что свободных электрических зарядов в среде нет;

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad 1.2(б)$$

полагая также, что среда немагнитная;

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}), \quad 1.2(в)$$

дополнительно предполагая, что электрическая индукция среды зависит только от электрического поля волны и не определяется магнитным полем.

Распространённым методом решения уравнений Максвелла является их редукция к волновому уравнению и решение именно его. Мы этот метод продемонстрируем для простоты при материальных уравнениях (1.2). Но, разумеется, метод применим и в случае более сложных материальных уравнений.

Прежде, чем обсудить технику такой редукции для уравнений в частных производных обратимся к ее аналогу при решении более простых обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Математическое приложение:** о методе решения системы дифференциальных уравнений.

Пусть необходимо решить систему уравнений для двух неизвестных  $y$  и  $x$ :

$$\begin{cases} \dot{y} + x = 0, \\ \dot{x} - \omega^2 y = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

где введены обозначения  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$  и  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\omega^2$  – константа.

Один из распространенных методов решения системы (1.3) заключается во взятии производной от первого уравнения этой системы, получая уравнение  $\ddot{y} + \dot{x} = 0$ , и подстановки выражения для одной из переменных через вторую из второго уравнения системы. В результате решение системы двух дифференциальных уравнений первого порядка (1.3) сводится к решению одного дифференциального уравнения, но второго порядка:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0. \quad (1.4)$$

Решение данного уравнения хорошо известно. Именно решение (1.4), в зависимости от начального условия, по определению называют функцией  $y = \sin(t)$  или  $y = \cos(t)$  [4].

Это тривиальное приложение мы привели в данном разделе, чтобы показать, что в приведенном методе редукции системы двух уравнений с двумя неизвестными функцией (1.3) к одному уравнению с одной неизвестной (1.4) появились лишние решения, которые принадлежат уравнению  $\dot{y} + x + const = 0$ .

Редукция уравнений Максвелла (рассматриваем ее на рассмотренном выше примере простого, но распространенного на практике случая немагнитных диэлектриков)

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{D} = 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad (1.5)$$

к волновому уравнению осуществляется по той же методике, что и рассмотренная в приложении редукция системы (1.3) к уравнению (1.4). Берем первую производную по пространственным координатам (точнее определенному их набору) вида  $\nabla \times$  от левой и правой частей первого уравнения системы (1.5),

получая уравнение  $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H}$ . Выражение для  $\nabla \times \vec{H}$  определяем из

второго уравнения системы (1.5), получая искомое волновое уравнение вида

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.6)$$

Таким образом, вместо двух уравнений в частных производных первого порядка для двух неизвестных функций  $E$  и  $H$  системы (1.5) получили одно уравнение в частных производных (1.6), но с одной искомой величиной  $E$ .

В СГС волновое уравнение при рассмотренных материальных уравнениях принимает вид

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.7)$$

Первое слагаемое в (1.6) и (1.7) описывает дифракцию излучения, а второе – отклик вещества на силовое воздействие электрического поля волны.

Напомним, что отклик вещества для электрической индукции часто удобнее представлять в виде

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{СИ}), \\ \vec{D} &= \vec{E} + 4\pi \vec{P} \quad (\text{СГС}), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где введен более наглядный отклик среды – ее поляризованность  $\vec{P}$ , представляющая собой усредненный по объему индуцированный излучением дипольный момент структурной единицы вещества (атома, молекулы, элементарной ячейки твердого тела).

В частном, но тоже часто анализируемом на практике, случае динамики излучения в вакууме (воздухе)  $\vec{P} = 0$ , и волновое уравнение еще более упрощается

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.9)$$

$$\text{где } \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (1.10)$$

Соотношение (1.10), в свое время, стало убедительным доказательством того, что свет – это электромагнитные волны.

Вспомнив из векторного анализа соотношение  $\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$  и применив его к дифференциальным операциям в уравнении (1.9), получаем  $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - (\nabla \cdot \nabla) \vec{E}$ . Учтем также, что для вакуума еще одно уравнение Максвелла упрощается к виду  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ . Тогда уравнение динамики поля в вакууме (1.9) сведется к хорошо известному из многих учебников физики и математики волновому уравнению:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.11)$$

Перед тем, как в следующей Лекции перейти к анализу решений этого уравнения, еще раз обратим внимание, что манипуляции с уравнениями Максвелла при редукции к волновому уравнению и дальнейшему их упрощению, как выше уже отмечалось, могут привести к появлению «лишних» решений, которые не будут решениями исходных уравнений Максвелла. Рассмотрим пример таких лишних решений.

Векторное волновое уравнение (1.11) представимо в виде трех независимых скалярных уравнений

$$\Delta E_{x,y,z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_{x,y,z}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.12)$$

Решения этих уравнений определяются краевыми условиями. Предположим, что волна линейно поляризована и при  $z = 0$  имеет отличными от нуля (некоторыми функциями времени) только  $x$  компоненту поля и ее производные, а  $y$  и  $z$  компоненты поля и их производные равны нулю (смотри рисунок 1.1):

$$E_{y,z} = 0, \quad E_x \neq 0, \quad \frac{\partial^3 E_{y,z}}{\partial x \partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} \neq 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} \neq 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} \neq 0.$$

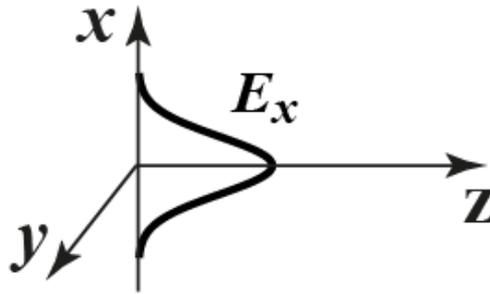


Рисунок 1.1 – Иллюстрация граничного условия для линейно поляризованной вдоль оси  $x$  волны, которая распространяется вдоль оси  $z$ .

Тогда в силу независимости для разных декартовых компонент поля излучения скалярных волновых уравнений проекции поля на оси  $y$  и  $z$  остаются нулевыми  $E_{y,z} = 0$  и при  $z > 0$ , а эволюционирует согласно волновому уравнению при  $z > 0$  только  $x$  компонента поля. Излучение остается линейно поляризованным.

Однако это противоречит одному из уравнений Максвелла  $\nabla \vec{E} = 0$ , согласно которому для декартовых компонент поля должно выполняться

соотношение  $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ . Т.е. при  $\frac{\partial E_x}{\partial x} \neq 0$  в плоскости  $z=0$  при  $z>0$  появится не нулевая величина продольной компоненты поля  $E_z$ .

**Вывод:** Волновое уравнение (1.11) имеет лишние по сравнению с уравнениями Максвелла решения. Получаемые решения волнового уравнения следует дополнительно проверять на соленоидальность  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ .

### Упражнения и вопросы для самоконтроля

**Упражнение 1.** Получить волновое уравнение для проводящих сред (следует дополнительно учесть материальное уравнение  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  – закон Ома).

Ответ:  $\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0$ .

**Упражнение 2.** Получить волновое уравнение для квазистатических полей в однородном изотропном проводнике, полагая, что материальные уравнения имеют вид

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E},$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H},$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Ответ:  $\Delta \vec{E} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, V = c / \sqrt{\epsilon \mu}$ .

**Вопрос 1.** Какие материальные уравнения характерны для диэлектрических сред?

**Вопрос 2.** Какова методика редукции уравнений Максвелла к волновому уравнению?

**Вопрос 3.** Одинаковы ли решения уравнений Максвелла и волнового уравнения?

## ЛЕКЦИЯ 2. Спектральный подход к решению уравнений Максвелла и волновых уравнений. Явление дифракции света

В настоящей Лекции рассмотрим один из наиболее плодотворных методов решения уравнений Максвелла и вытекающего из них волнового уравнения, который заключается в анализе решений не уравнений динамики электромагнитных полей, а их временных и пространственных спектров.

Такой подход проиллюстрируем при анализе закономерностей распространения в вакууме монохроматического излучения

$$\begin{aligned}\vec{E}'(\vec{r}, t) &= \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi(\vec{r})) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \exp(i\omega t) + \text{к.с.}, \\ \vec{H}'(\vec{r}, t) &= \vec{\mathfrak{N}}(\vec{r}) \cos(\omega t + \psi(\vec{r})) = \frac{1}{2} \vec{H}(\vec{r}) \exp(i\omega t) + \text{к.с.}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Здесь  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$  и  $\vec{\mathfrak{N}}(\vec{r})$  – действительные амплитуды электрического и магнитного полей монохроматического излучения частоты  $\omega$ ,  $\varphi(\vec{r})$  и  $\psi(\vec{r})$  – фазы излучения,  $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \exp(i\varphi(\vec{r}))$  и  $\vec{H}(\vec{r}) = \vec{\mathfrak{N}}(\vec{r}) \exp(i\psi(\vec{r}))$  – комплексные амплитуды электрического и магнитного полей, к.с. – означает комплексно сопряженную величину.

Рассматривая динамику полей излучения в вакууме, мы, по физической сути, переходим к обсуждению явления *дифракции* света. При этом мы не усложняем анализ явления учетом особенностей *взаимодействия излучения с веществом*. Эти особенности станут предметом нашего рассмотрения в ходе последующих Лекций.

Анализ явления дифракции мы проводим сначала для простейшего излучения – монохроматических волн. Понятно, что такое излучение, существующее «вечно» и обладающее бесконечной энергией, – это лишь абстрактная математическая модель. Но реальные – ограниченные по времени и энергии – оптические импульсы, как напомним дополнительно ниже в этой Лекции в Приложении, могут быть «собраны» из монохроматических волн, дифракцию которых мы сейчас рассмотрим. Анализ особенностей динамики не модельных монохроматических волн, а ограниченных во времени реальных оптических импульсов будет приведен в дальнейших Лекциях.

Уравнения Максвелла (1.1) для монохроматического излучения (2.1) в вакууме ( $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ) упрощаются до вида (смотри упражнение 1)

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu_0\vec{H}, \\ \nabla \times \vec{H} = i\omega\varepsilon_0\vec{E}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Важно отметить, что решения двух других уравнений системы уравнений Максвелла (1.1), для случая вакуума принимающих вид

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0, \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

содержатся среди решений уравнений системы (2.2). Это несложно показать, применив дифференциальную операцию  $\nabla \cdot$  к обеим частям первого и второго уравнения и учитывая, что для любого вектора выполняется равенство  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ . Тогда из первого уравнения системы (2.2) следует второе уравнение системы (2.3)  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -i\omega\mu_0\nabla \cdot \vec{H} = 0$ , и наоборот.

Решение системы двух уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями ( $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ ) (2.2) удобно искать изложенным в Лекции 1 методом, сведя их к одному уравнению в частных производных второго порядка, но с одной неизвестной (ниже получим уравнение только для  $\vec{E}$ ). Применив операцию  $\nabla \times$  к левой и правой частям первого уравнения системы (2.2)  $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu_0\nabla \times \vec{H} = \omega^2\mu_0\varepsilon_0\vec{E}$ , а также учитывая векторное тождество  $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta\vec{E}$  и первое уравнение системы (2.3), получаем для  $\vec{E}$  уравнение Гельмгольца [2-4]:

$$\Delta\vec{E} + k^2\vec{E} = 0, \quad (2.4)$$

где  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{(2\pi)^2}{T^2c^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$  – волновое число.

Уравнение Гельмгольца (2.4) описывает пространственное распределение комплексной амплитуды электрического поля монохроматической волны при различных граничных условиях. Решения этого уравнения удобно находить, используя спектральный подход. Сначала из уравнения (2.4) получим уравнение динамики пространственного спектра поля излучения

$$\vec{g}(k_x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(x, y, z) \exp(-i[k_x x + k_y y]) dx dy. \quad (2.5)$$

Здесь  $k_x$  и  $k_y$  – пространственные частоты (проекции волнового вектора  $\vec{k}$  на оси  $x$  и  $y$ ). Потом найдем решения выведенного уравнения динамики спектра, а

затем уже определим искомое распределение поля излучения в пространстве, используя формулу обратного преобразования Фурье

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{g}(k_x, k_y, z) \exp(i[k_x x + k_y y]) dk_x dk_y. \quad (2.6)$$

**Математическое приложение:** о наглядной интерпретации пространственных и временных спектров оптических волн.

Представление поля монохроматического излучения в виде интеграла Фурье (2.6) физически можно трактовать, как представление светового пучка в виде совокупности плоских волн, распространяющихся под разными углами к оси пучка (смотри рисунок 2.1).

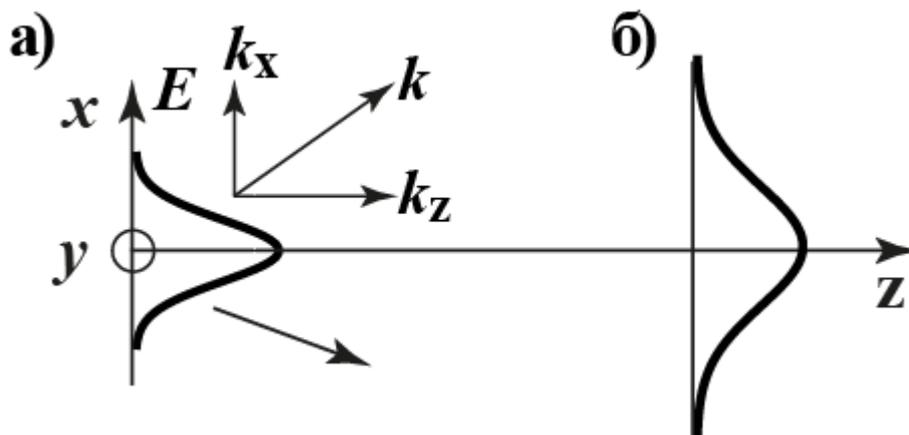


Рисунок 2.1 – а) Пучок света, как совокупность плоских волн, распространяющихся под разными углами к оси его распространения.

б) Дифракционное расплывание пучка, как изменение картины интерференции плоских волн с расстоянием

Точно так же поле светового импульса произвольной временной структуры можно представить в виде преобразования Фурье

$$E(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega, z) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (2.7)$$

Здесь  $g$  – спектральная плотность поля импульса,  $\omega$  – частота (временная частота) света. Соотношение (2.7) можно интерпретировать как представление импульса в виде набора монохроматических волн с амплитудой

$$g(\omega, z) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t, z) \exp(-i\omega t) dt. \quad (2.8)$$

Чтобы получить уравнение динамики пространственного спектра из уравнения динамики поля излучения (2.4), домножим уравнение Гельмгольца на  $\exp(-i[k_x x + k_y y])$  и проинтегрируем по  $k_x$  и  $k_y$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E}) \cdot \exp(-i[k_x x + k_y y]) dx dy = 0.$$

Заметим, что напрямую подставлять поле  $E$  в виде (2.6) в уравнение (2.4) нельзя, поскольку в общем случае интеграл (2.6) не дифференцируем.

Несложно видеть, что интегралы от второй производной поля по  $z$  в операторе Лапласа принимают простой вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \vec{E}}{dz^2} \exp(-i[k_x x + k_y y]) dx dy = \frac{d^2 \vec{g}}{dz^2}.$$

Интегралы от второй производной по  $x$  тоже находятся не сложно, но после большего числа выкладок. Приведем их.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \vec{E}}{dx^2} \exp(-i[k_x x + k_y y]) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d \left( \frac{d \vec{E}}{dx} \right) \exp(-i[k_x x + k_y y]) dy.$$

Далее используем интегрирование по частям

$$d(uv) = u dv + v du, \quad \int_{-\infty}^{\infty} u dv = uv \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} v du,$$

полагая, что поле и его производные на  $\pm\infty$  пренебрежимо малы. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d \vec{E}}{dx} \cdot \exp(-ik_x x) \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik_y y) dy - \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \vec{E}}{dx} \cdot (-ik_x) \exp(-ik_x x) dx \exp(-ik_y y) dy = \\ & = - \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(-ik_x) \exp(-ik_x x) \Big|_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik_y y) dy + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(-ik_x)^2 \exp(-ik_x x) dx \exp(-ik_y y) dy = -k_x^2 \vec{g}. \end{aligned}$$

Интегралы от второй производной по  $y$  находятся аналогично (смотри упражнение 2).

В итоге из уравнения в частных производных (2.4), описывающих эволюцию векторного поля монохроматической волны, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение динамики вектора пространственного спектра вида

$$\frac{d^2 \vec{g}}{dz^2} + (k^2 - k_x^2 - k_y^2) \vec{g} = 0. \quad (2.9)$$

Общее решение векторного уравнения (2.9) находится просто и имеет вид:

$$\vec{g}(k_x, k_y, z) = \vec{C}_1(k_x, k_y) \exp\left(-i\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \cdot z\right) + \vec{C}_2(k_x, k_y) \exp\left(i\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \cdot z\right), \quad (2.10)$$

где постоянные величины  $\vec{C}_1$  и  $\vec{C}_2$  определяются из граничных условий.

Если знания изменений с расстоянием  $z$  в пространственном спектре недостаточно, то, зная спектр, распределение поля на различных расстояниях можно определить по формуле (2.6). Так, можно показать [3, 6], что полевой аналог скалярного уравнения (2.10) при  $\vec{C}_2 = 0$  имеет вид

$$E(x, y, z) = -i \frac{kz}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x', y', 0) \frac{\exp\left(ik\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}\right)}{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} \times \left(1 - \frac{1}{ik\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}}\right) dx' dy'. \quad (2.11)$$

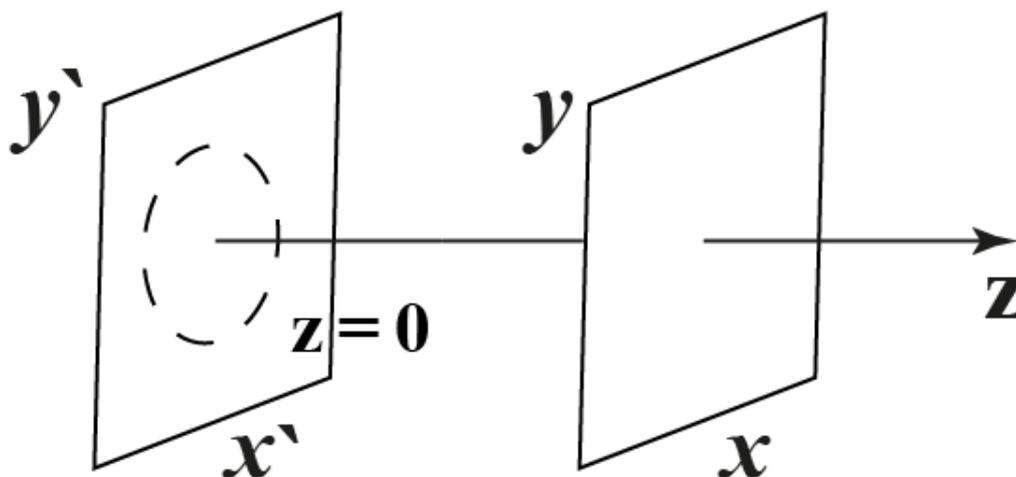


Рисунок 2.2 – Иллюстрация скалярной дифракционной задачи нахождения поля  $E$  в плоскостях  $(x, y)$  на различных расстояниях  $z$  при известном распределении поля в плоскости  $(x', y')$  для  $z = 0$

Выражение (2.11) описывает распределение скалярного поля в зависимости от координат  $x$  и  $y$  на различных расстояниях  $z$  по известному распределению поля от координат  $x'$  и  $y'$  в плоскости  $z = 0$  (смотри рисунок 2.2). Это хорошо известный из раздела оптика курса общей физики интеграл Френеля-Кирхгофа, полученный, как решение уравнения Гельмгольца (2.4) еще в 1882 году. При  $k\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} \gg 1$  интеграл (2.11) перейдет в математическое выражение эвристического принципа Гюйгенса – Френеля [6].

В заключение этой Лекции отметим, что практические задачи дифракции можно решать, используя общее решение в виде сложного для программирования интеграла (2.11). Но полезно помнить, что та же задача может быть решена сначала очень просто для спектра (в элементарных функциях) (2.10), а затем с помощью одного из самых совершенных на сегодня программных продуктов – взятия преобразования Фурье – определено распределение поля. Еще более важно помнить, что поле – это векторная величина. Решение задачи скалярного уравнения Гельмгольца вида (2.11) не дает ответ на то, как меняется векторный характер поля излучения в процессе дифракции. Остановимся на этом подробнее в следующей Лекции.

### Упражнения и вопросы для самоконтроля

**Упражнение 1.** Вывести уравнения Максвелла для монохроматического излучения  $\vec{E}' = \vec{E} \cos(\omega t + \varphi)$  в вакууме ( $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ).

Ответ:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu_0 \vec{H}, \\ \nabla \times \vec{H} = i\omega\epsilon_0 \vec{E}. \end{cases}$$

**Упражнение 2.** Вывести соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \vec{E}}{dy^2} \exp(-i[k_x x + k_y y]) dx dy = -k_y^2 \vec{g}.$$

**Вопрос 1.** Напряженности электрического и магнитного полей электромагнитных волн – это действительные физические величины. Как вводятся понятия «комплексное» электрическое и магнитное поле?

**Вопрос 2.** Почему при анализе электромагнитных волновых процессов в вакууме можно ограничиться рассмотрением только двух из четырех уравнений Максвелла?

**Вопрос 3.** Какую наглядную интерпретацию можно дать пространственному спектру монохроматического излучения?

**Вопрос 4.** Какое приближение допускает применение при анализе задач дифракции эвристического принципа Гюйгенса?

### ЛЕКЦИЯ 3. Дифракция непараксиальных и параксиальных световых пучков. Укороченное волновое уравнение

В Лекции 2 мы обсудили метод решения уравнения Гельмгольца (2.4) на основе спектрального подхода, нашли общее решение вида (2.10) для спектра дифрагирующего излучения, а затем привели полевой аналог этого решения в виде хорошо известного интеграла Френеля-Кирхгофа (2.11). Полученные зависимости (2.10) и (2.11) описывают дифракционную эволюцию спектра и поля монохроматической волны в пустом пространстве (вакууме).

Однако, ранее в Лекции 1 мы отмечали, что волновые уравнения, получаемые редукцией первых двух уравнений системы уравнений Максвелла (1.1), могут иметь лишние решения и их надо дополнительно проверять на то, чтобы они удовлетворяли третьему (или четвертому, если редукция ведет к волновому уравнению для магнитного поля  $\vec{H}$ ) уравнению этой системы. Для случая распространения монохроматических волн в вакууме это означает, что волновое уравнение (2.4), получаемое редукцией первых двух уравнений Максвелла (2.2), должно удовлетворять и первому уравнению в системе (2.3). Т.е. поле  $\vec{E}$  должно не только удовлетворять уравнению Гельмгольца, но и быть соленоидальным (с нулевой дивергенцией) [8].

Такое решение можно получить, например, следующим образом [2, 3]: определив  $g_x$  и  $g_y$ , характеризующие поперечные компоненты поля, по общему решению (2.10), а для определения спектральной плотности продольной компоненты поля  $g_z$  – используя условие соленоидальности поля вида:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y}, \quad (3.1)$$

которое для пространственного спектра продольной компоненты поля принимает вид (смотри упражнение 1):

$$\frac{dg_z}{dz} = -ik_x g_x - ik_y g_y. \quad (3.2)$$

Решение спектрального уравнения (3.2) (для однонаправленной волны) имеет вид (смотри упражнение 2):

$$g_z = \frac{k_x}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} g_x + \frac{k_y}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} g_y. \quad (3.3)$$

### Параксиальные оптические пучки. Дифракция Френеля

Соотношения (2.10) и (3.3) описывают дифракцию монохроматических волн произвольной пространственной структуры и поляризации. Однако во многих практических случаях, когда, например, рассматриваются лазерные пучки, в их Фурье-представлении в виде совокупности плоских волн (2.5), распространяющихся под разными углами к оси распространения пучка, эти углы для основной части плоских волн являются весьма малыми. Т.е. проекции волновых векторов этих плоских волн, составляющих пучок, малы по отношению к величине волнового вектора

$$\{k_x^2, k_y^2\} \ll k^2 \quad (3.4)$$

(смотри рисунок 3.1). В таком случае говорят, что пространственный спектр излучения узкий. Световые пучки, у которых пространственный

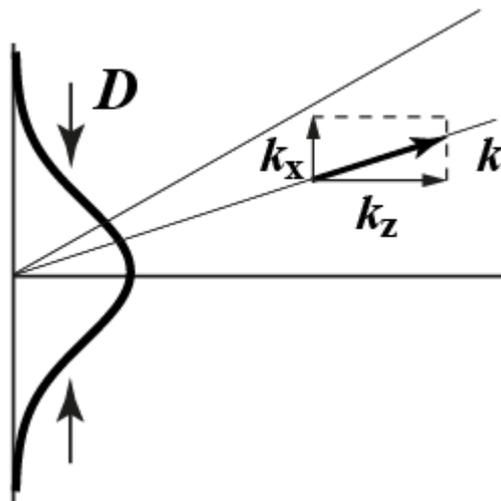


Рисунок 3.1 – Иллюстрация светового пучка с узким пространственным спектром

спектр узок, называют *параксиальными пучками*.

В соответствии со свойствами преобразования Фурье узкому пространственному спектру (3.4) должен соответствовать широкий пучок излучения. Для вакуума  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{T \cdot c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ , поэтому согласно (3.4) для характерного поперечного размера (диаметра) параксиального пучка должно выполняться неравенство  $D \gg \lambda$  (смотри рисунок 3.1).

Если пространственный спектр излучения широкий, то пучки называют *непараксиальными*. Соотношения (2.10) и (3.3) описывают, в общем случае, дифракцию непараксиальных волн.

Рассмотрим, насколько упрощается описание дифракции (2.10) – (3.3) для параксиальных волн. В соответствии с неравенством (3.4) для них выполняется

$$\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = k \sqrt{1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2}} \approx k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}. \quad (3.5)$$

Тогда решения уравнения Гельмгольца для параксиальных волн (2.10), для которых справедливо приближение (3.5) принимают вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{x,y}(k_x, k_y, z) = C_{1x,y}(k_x, k_y) \cdot \exp\left(-i \left[ k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} \right] z\right) + \\ \quad + C_{2x,y}(k_x, k_y) \cdot \exp\left(i \left[ k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} \right] z\right), \\ g_z(k_x, k_y, z) = \frac{k_x}{k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}} g_x + \frac{k_y}{k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}} g_y \approx 0. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Первое слагаемое в правой части первого соотношения системы (3.6) описывает волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $z$  (прямую волну), а второе слагаемое этого уравнения – в отрицательном направлении этой оси (обратную волну). Во многих практических задачах ограничиваются анализом эволюции параметров однонаправленного излучения, и второе слагаемое полагают равным нулю. Что мы также будем полагать ниже. Второе соотношение, характеризующее спектр продольной компоненты поля, для параксиальной волны оказывается малым. Таким образом, параксиальный световой пучок можно рассматривать поляризованным ортогонально оси его

распространения. Для непараксиального излучения может оказаться значительной продольная компонента поля.

Полевой аналог соотношения системы (3.6), например, для  $g_x$  принимает вид [2, 3]

$$E_x(x, y, z) = -i \frac{k}{2\pi z} \cdot \exp(ikz) \times \times \iint_{z=0} E(x_0, y_0) \cdot \exp\left(\frac{ik}{2z} \left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right]\right) dx_0 dy_0. \quad (3.7)$$

Выражение (3.7) – это хорошо известное в математике и теории дифракции преобразование Френеля. Область пространства, в которой дифракционное распределение поля волны представляет собой двумерное преобразование Френеля, называется *областью дифракции Френеля*.

**Вывод:** Дифракция Френеля – это дифракция параксиального излучения.

### Укороченное волновое уравнение в теории дифракции

В Лекции 2 мы показали, что дифракцию монохроматического излучения в вакууме, а в общем случае, и в однородной изотропной среде описывает уравнение Гельмгольца (2.4). Выше в Лекции 2 и в настоящей Лекции 3 мы изложили спектральный метод решения этого уравнения. Привели полевой аналог спектрального решения. Выяснили, что в случае непараксиальных волн становится существенным их векторный характер и для определения продольной компоненты поля надо рассмотреть еще одно уравнение Максвелла. В случае параксиальных волн они рассматриваются, как поперечные, и для каждой из декартовых компонент поля можно записать его вид в виде интеграла Френеля (3.7).

Рассмотрим теперь еще один подход к анализу явления дифракции монохроматических волн: *метод укороченного волнового уравнения*. Будем искать решение уравнения Гельмгольца (2.4) для комплексной амплитуды электрического поля световой волны в виде

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{\mathcal{E}}(x, y, z) \cdot \exp(-ikz). \quad (3.8)$$

Т.е. будем рассматривать поле излучения в виде квазиплоской монохроматической волны, распространяющейся в положительном направлении

оси  $z$ ,  $\vec{E}'(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \cdot \exp(i(\omega t - kz)) + \text{к.с.}$  Заметим, что при  $\mathcal{E} = \text{const}$  – это будет простейшая плоская поперечно однородная однонаправленная монохроматическая волна.

Подстановка (3.8) приводит уравнение (2.4) к виду

$$\frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial z} = 0. \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9) полностью эквивалентно уравнению (2.4). Они имеют одинаковые решения.

Сделаем теперь **важное приближение**: будем полагать световой пучок параксиальным и считать его диаметр широким по сравнению с длиной волны излучения  $D \gg \lambda$  (смотри рисунок 3.2).

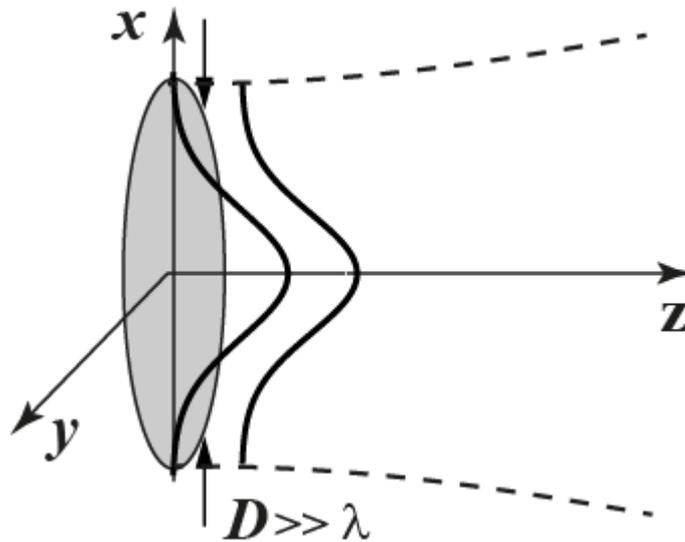


Рисунок 3.2 – Иллюстрация дифракционного расплывания параксиального светового пучка

Из рисунка (и, например, из доступной каждому практики использования лазерной указки) понятно, что изменение поля широкого пучка параксиального излучения с диаметром  $D \gg \lambda$  на расстояниях порядка длины волны  $\lambda$  весьма малы, и их можно оценить следующим образом:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \approx \left. \frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta z} \right|_{\Delta z \rightarrow 0} \approx \frac{\Delta \mathcal{E}}{\lambda} \ll \frac{\mathcal{E}}{\lambda} \sim k \mathcal{E}.$$

Т.е. для широких пучков имеем  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \ll k \mathcal{E}$ . Аналогично  $\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} \ll k \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}$ .

В этих соотношениях суть *приближения медленно меняющейся (на длине волны) амплитуды*. Они означают, что в уравнении (3.9) можно пренебречь третьим слагаемым по сравнению с четвертым и уравнение (3.9) примет более простой вид

$$-2ik \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial y^2} = 0. \quad (3.10)$$

Уравнение (3.10) называют *укороченным волновым уравнением*, а иногда *основным уравнением квазиоптики*. В этом уравнении обычно вводят так называемый поперечный лапласиан  $\Delta_{\perp} \vec{\mathcal{E}} = \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial y^2}$ . Решение (3.10) для каждой декартовой компоненты поля, что можно показать, например, используя спектральный подход, имеет вид (3.7) и описывает уже обсужденную нами дифракцию Френеля.

**Вывод:** Укороченное волновое уравнение описывает дифракцию однонаправленной параксиальной волны, которая является также дифракцией Френеля.

В заключении настоящей Лекции ответим на естественно возникающий вопрос: зачем вообще рассматривать некоторое приближенное уравнение в частных производных (3.10), если оно решается аналитически и это решение хорошо известно? Дело в том, что метод укороченного уравнения позволяет описывать не только дифракцию, но и дисперсию, и нелинейные эффекты. Уравнение динамики комплексного поля (3.10), как будет показано далее, может быть расширено на учет названных явлений [9, 10]. А это новое расширенное уравнение уже простых аналитических решений может и не допускать. Тогда надо его решать численно.

## Упражнения и вопросы для самоконтроля

**Упражнение 1.** Из уравнения Максвелла

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} \quad (3.1)$$

вывести уравнение для пространственного спектра продольной компоненты поля

$$\frac{dg_z}{dz} = -ik_x g_x - ik_y g_y. \quad (3.2)$$

**Упражнение 2.** Получить из уравнения эволюции пространственного спектра продольной компоненты поля

$$\frac{dg_z}{dz} = -ik_x g_x - ik_y g_y \quad (3.2)$$

для однонаправленной волны решение вида:

$$g_z = \frac{k_x}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} g_x + \frac{k_y}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} g_y. \quad (3.3)$$

**Упражнение 3.** Получить из уравнения Гельмгольца (2.4) подстановкой поля в виде  $\vec{E}(x, y, z) = \vec{\mathcal{E}}(x, y, z) \cdot \exp(-ikz)$  его математический аналог

$$\frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial z} = 0.$$

**Вопрос 1.** Какие пучки излучения называют параксиальными, а какие непараксиальными?

**Вопрос 2.** Какую дифракцию называют дифракцией Френеля?

**Вопрос 3.** В чем суть приближения медленно меняющихся амплитуд?

**Вопрос 4.** Как выглядит в теории дифракции укороченное волновое уравнение?

## ЛЕКЦИЯ 4. Дифракция гауссовых пучков. Итоги обсуждения методов анализа дифракции излучения

Рассмотрим теперь особенности дифракции параксиального светового пучка с некоторым конкретным исходным распределением поля. В лазерной и оптической физике самое широкое применение и в теоретическом моделировании, и в физических экспериментах имеют, так называемые, *гауссовы пучки*, граничное распределение которых (например, на выходном зеркале лазера) имеет вид функции Гаусса:

$$\mathcal{E}(x_0, y_0, 0) = \mathcal{E}_0 \cdot \exp\left(-\frac{x_0^2 + y_0^2}{a^2}\right), \quad (4.1)$$

где  $\mathcal{E}_0$  – это начальная амплитуда поля на оси пучка,  $x_0$  и  $y_0$  – координаты в плоскости  $z=0$  (смотри рисунок 2.2), параметр  $a$  характеризует исходный поперечный размер пучка (предполагается много большим длины волны излучения).

Тогда интеграл Френеля (3.7), описывающий дифракцию параксиального пучка с исходным распределением (4.1), можно привести к виду [1]

$$\mathcal{E}(x, y, z) = \frac{\mathcal{E}_0}{1 - iZ} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{a^2(1 - iZ)}\right), \quad (4.2)$$

где  $Z = \frac{2z}{ka^2}$  – безразмерная (нормированная на величину  $\frac{ka^2}{2}$ ) координата.

Заметим, что нормированную координату можно представить также в виде

$$Z = \frac{z}{\pi z_1}, \quad \text{где } z_1 \text{ – первая зона Френеля.}$$

Комплексную функцию (4.2) можно привести к тригонометрическому виду с действительными модулем и аргументом (смотри упражнение 3.1) [5]:

$$\mathcal{E}(x, y, z) = \mathcal{E}_0 \frac{1}{\sqrt{1 + Z^2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{a^2 \cdot (1 + Z^2)}\right) \exp\left(-i \frac{x^2 + y^2}{a^2} \cdot \frac{1}{Z + \frac{1}{Z}}\right) \times \quad (4.3)$$

$$\times \exp(i \arctan Z).$$

На рисунке (4.1) иллюстрировано решение (4.3).

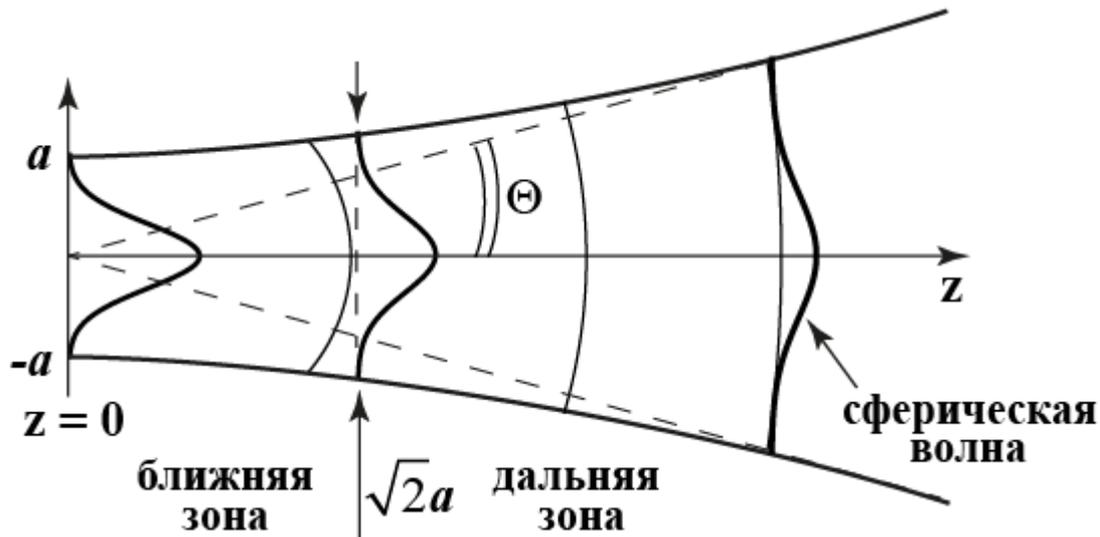


Рисунок 4.1 – Иллюстрация дифракции гауссова пучка

Как видно из формулы (4.3) и рисунка 4.1, пучок монохроматического излучения с исходно гауссовым распределением поля (4.1) и при распространении остается гауссовым, но его поперечный размер с расстоянием возрастает

$$\tilde{a}^2 = a^2(1 + Z^2). \quad (4.4)$$

Расстояние, соответствующее  $|Z| \leq 1$ , называют *перетяжкой пучка*. Соответственно, *длина перетяжки* рассчитывается по формуле

$$l_{пер} = \frac{ka^2}{2}. \quad (4.5)$$

Т.е.  $Z = \frac{z}{l_{пер}}$  нормирована на длину перетяжки. На границе перетяжки, как видно

из формулы (4.4) и рисунка 4.1, размер пучка увеличивается в  $\sqrt{2}$  раз.

При  $Z \sim 1$  имеем *ближнюю зону дифракции* (для световых пучков это синоним зоны дифракции Френеля). При  $Z \gg 1$  имеем *дальнюю зону дифракции* (для световых пучков это синоним зоны дифракции Фраунгофера). Расходимость

излучения в дальней зоне составляет  $\Theta = \frac{\tilde{a}}{z} = a \frac{Z}{z} = \frac{2}{ka} = \frac{2\lambda}{2\pi a} = \frac{\lambda}{\pi a}$ .

Радиус кривизны волнового фронта при распространении пучка сначала уменьшается, а потом увеличивается. Это понятно из следующих соотношений

$$\exp\left(-i\frac{x^2+y^2}{a^2}\right) \cdot \frac{1}{Z+\frac{1}{Z}} = \exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{2R(Z)}\right), \text{ т.е.}$$

$$R = \frac{ka^2}{2} \left( Z + \frac{1}{Z} \right) = Z \left( 1 + \frac{1}{Z^2} \right). \quad (4.6)$$

Из формулы (4.6) видно, что минимальным радиус кривизны становится при  $Z = 1$  и равен  $R = 2l_{\text{пер}}$ .

Для оценки изменения характеристик пучка в различных практических ситуациях полезно просмотреть ПРИЛОЖЕНИЕ 1 и выполнить упражнение 2.

Завершая обсуждение явления дифракции света, еще раз кратко сформулируем основные рассмотренные методы анализа этого явления, используемые в оптической физике.

### Методы анализа дифракции излучения

Волновое уравнение динамики поля монохроматического электромагнитного излучения в пустом пространстве (в вакууме) имеет вид

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad (4.7)$$

где  $k = \frac{\omega}{c}$ .

Система уравнений

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

имеет те же решения, что и волновое уравнение (4.7).

При рассмотрении дифракции параксиальных оптических пучков можно ограничиться анализом решения Гельмгольца, т.е. только первого уравнения системы (4.8). Для параксиального излучения оно будет описывать динамику поперечных компонент поля пучка. Наличием продольных компонент поля в параксиальном излучении обычно пренебрегают.

При рассмотрении дифракции непараксиальных оптических пучков следует учитывать соленоидальность поля излучения, т.е. рассчитывать динамику поперечных компонент поля можно, по-прежнему, используя уравнение (4.8), а

при определении продольной компоненты поля пучка, использовать, например, второе уравнение системы (4.8).

Типичное граничное условие задачи (4.7) или (4.8) иллюстрировано на рисунке 4.2. Предполагается, что поле излучения в плоскости  $z=0$  известно, излучение распространяется в положительном направлении оси  $z$ , следует определить поле в плоскостях  $(x, y)$  на произвольном расстоянии  $z$ .

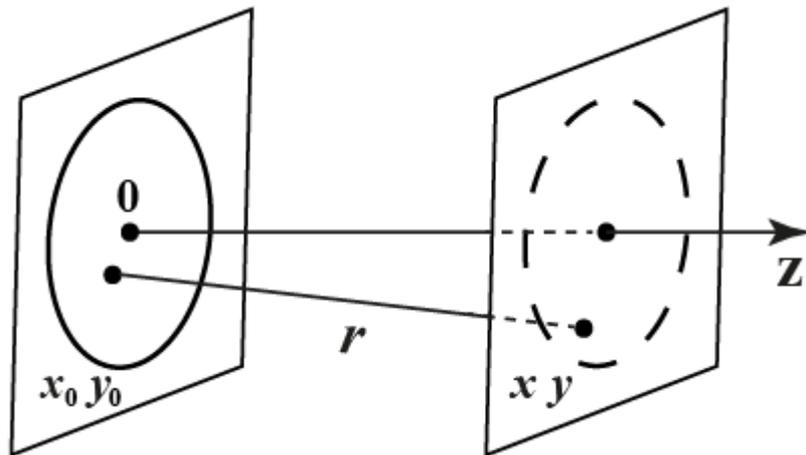


Рисунок 4.2 – Иллюстрация граничного условия дифракционной задачи

Еще раз вспомним рассмотренные ранее подходы к решению задачи дифракции, которая иллюстрирована на рисунке 4.2, и сами эти решения.

### I. Полевой подход (Кирхгофа)

Точное решение уравнения Гельмгольца для произвольной декартовой поперечной компоненты поля имеет хорошо известный вид интеграла Френеля-Кирхгофа:

$$E(x, y, z) = \frac{kz}{2\pi i} \iint E(x_0, y_0, 0) \frac{\exp(ikz)}{r^2} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) dx_0 dy_0, \quad (4.9)$$

где  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2}$ . На расстояниях, соответствующих  $kz \gg 1$ , как видно из формулы (4.9), справедлива интерпретация явления дифракции эвристическим принципом Гюйгенса-Френеля.

Для параксиальных пучков справедливо приближение Френеля, в рамках которого в соотношении (4.9) предполагается, что в знаменателе можно считать  $r \approx z$ , а в числителе

$$r \approx z \left( 1 + \frac{(x-x_0)^2}{2r^2} + \frac{(y-y_0)^2}{2r^2} \right).$$

Тогда интеграл Френеля-Кирхгофа (4.9) принимает более простой вид преобразования Френеля

$$E(x, y, z) = -i \frac{k}{2\pi z} \cdot \exp(ikz) \times \times \iint_{z=0} E(x_0, y_0) \cdot \exp\left(\frac{ik}{2z} \left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right]\right) dx_0 dy_0. \quad (4.10)$$

В приближении дифракции Фраунгофера  $z \gg k \cdot (x_0^2 + y_0^2)$  преобразование Френеля (4.10) сводится к преобразованию Фурье

$$E(x, y, z) = -i \frac{k}{2\pi z} \cdot \exp(ikz) \cdot \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \times \times \iint_{z=0} E(x_0, y_0) \cdot \exp\left(-ik \frac{xx_0 + yy_0}{z}\right) dx_0 dy_0. \quad (4.11)$$

Отметим важный факт, что оптические системы, в данном случае пустое пространство, реализует сложные математические операции, такие как преобразования Френеля и Фурье. Это позволяет их использовать как элементы вычислительных систем практически мгновенного действия.

## II. Спектральный подход (Рэлея)

В рамках этого подхода определяется спектральный аналог уравнения Гельмгольца, и находится его общее решение, которое для однонаправленной волны имеет вид

$$\vec{g}(k_x, k_y, z) = \vec{C}(k_x, k_y) \exp\left(-i\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \cdot z\right), \quad (4.12)$$

где постоянная  $\vec{C}$  определяется из граничных условий. Соотношения (4.12) и (4.9) связаны преобразованиями Фурье. То, что дифракционное изменение спектра поля излучения описывается выражением в элементарных функциях (4.12), а само поле при этом описывается нетривиальным интегралом (4.9), демонстрирует значимые преимущества спектрального подхода.

Особенно удобен этот подход при обсуждении дифракции непараксиального излучения. Так, динамика спектра продольной компоненты поля  $g_z$  непараксиальной волны может быть, например, определена соотношением

$$g_z = \frac{k_x}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} g_x + \frac{k_y}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} g_y. \quad (4.13)$$

где  $g_x$  и  $g_y$  описываются соотношением (4.12).

Отметим, что в соответствии с (4.13) спектр продольной компоненты поля, т.е. и сама эта компонента поля не являются произвольными, а связаны со значениями поперечных компонент поля и его спектра. Это справедливо и для граничных условий, которые тоже не могут быть независимыми для всех трех компонент поля и спектра.

Наличие значимой продольной компоненты поля излучения является ключевым признаком непараксиальности излучения. Но важно также знать, что для очень узких (сильно непараксиальных) волновых пучков, для некоторых компонент пространственных спектров которых выполняется неравенство  $k_\lambda > k$ , для этих компонент справедливы равенства

$$\exp(i\sqrt{k^2 - k_\lambda^2} z) = \exp(i\sqrt{-1}\sqrt{k_\lambda^2 - k^2} z) = \exp(-\sqrt{k_\lambda^2 - k^2} z). \quad (4.14)$$

Это означает, что решение (4.12) описывает не только распространяющиеся волны, но и, так называемые *эванесцентные* волны, которые с расстоянием затухают [4].

### III. Метод укороченных уравнений

Для анализа задач дифракции параксиальных волн в различных, в том числе нелинейных средах, используют также метод укороченных волновых уравнений [9, 10]. Для линейной однородной изотропной среды такое уравнение принимает вид

$$-2ik \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \Delta_\perp \mathcal{E} = 0. \quad (4.15)$$

Решение уравнения (4.15) для вакуума имеет вид (4.10).

Эффективность метода укороченного уравнения заключается в том, что оно, будучи расширенным, позволяет описывать не только дифракцию, но и дисперсию, и нелинейные эффекты. Укороченное волновое уравнение,

учитывающее весь этот круг явлений, уже простых аналитических решений может и не допускать. Его решают численно.

### Упражнения и вопросы для самоконтроля

#### Упражнение 1.

Из комплексной функции

$$\mathcal{E}(x, y, z) = \frac{\mathcal{E}_0}{1 - iZ} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{a^2(1 - iZ)}\right), \quad (4.2)$$

где  $Z = \frac{2z}{ka^2}$ , описывающей дифракцию гауссова пучка, вывести другой ее вид

$$\mathcal{E}(x, y, z) = \mathcal{E}_0 \frac{1}{\sqrt{1 + Z^2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{a^2 \cdot (1 + Z^2)}\right) \exp\left(-i \frac{x^2 + y^2}{a^2} \cdot \frac{1}{Z + \frac{1}{Z}}\right) \times \exp(i \arctan Z). \quad (4.3)$$

#### Упражнение 2.

Пусть имеем исходный размер гауссова пучка  $a = 1$  мм излучения с длиной волны  $\lambda = 0.53$  мкм. Определить длину перетяжки и диаметр пучка на расстояниях 10 м и 400 км (орбита международной космической станции).

Ответы:  $l = \frac{2\pi \cdot (10^{-3} \text{ м})^2}{0.53 \cdot 10^{-6} \text{ м}} = \frac{2\pi}{0.53} \text{ м} \approx 12 \text{ м}.$

$$\tilde{a} = a \sqrt{1 + z^2} = 10^{-3} \text{ м} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{12}{10}\right)^2} \approx 10^{-3} \cdot 1.6 \text{ м} = 1.6 \text{ мм}.$$

$$\tilde{a} = 10^{-3} \text{ м} \cdot \tilde{Z} = 10^{-3} \text{ м} \cdot \frac{4 \cdot 10^5 \text{ м}}{12 \text{ м}} = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \text{ м} \approx 30 \text{ м}.$$

**Вопрос 1.** Какие пучки излучения называют гауссовыми?

**Вопрос 2.** Что такое длина перетяжки пучка излучения?

**Вопрос 3.** Что называют ближней и дальней зонами дифракции пучков излучения?

**Вопрос 4.** Что такое эванесцентные волны?

## ЛЕКЦИЯ 5. Распространение световых импульсов в оптических средах. Явление дисперсии света

В первой Лекции мы рассмотрели метод решения уравнений Максвелла путем их редукции к волновому уравнению. Например, для чаще всего изучаемых в оптической физике явлений в диэлектрических средах это уравнение принимает вид

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \quad (5.1)$$

В последующих второй, третьей и четвертой Лекциях мы рассматривали методы анализа и решения волнового уравнения вида

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (5.2)$$

которое следует из (5.1) в пренебрежении взаимодействием излучения с веществом и описывает распространение света в пустом пространстве. Подробное описание основных методов анализа и решений уравнения (5.2) позволило ознакомиться с особенностями явления дифракции света.

Теперь сделаем обратное приближение. Обсудим ситуацию, когда можно пренебречь дифракцией и акцентировать внимание на особенностях распространения света в оптических средах.

Рассмотрим распространение плоских поперечно однородных линейно поляризованных волн, бегущих вдоль оси  $z$ , в линейной изотропной однородной среде. Для этого случая волновое уравнение (5.1) сведется к виду:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (5.3)$$

где поляризованность оптической среды может быть записана как [1]:

$$P = \int_0^\infty \int_0^\infty \chi(\tau, \vec{R}) \cdot E(t - \tau, \vec{r} - \vec{R}) d\vec{R} d\tau, \quad (5.4)$$

здесь  $\chi$  – восприимчивость среды,

$$\begin{cases} \tau = t - t' \\ \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \end{cases} \quad (5.5)$$

Как видно из (5.4), отклик среды, в общем случае, может зависеть от поля, действующего как в данный, так и в предыдущий моменты времени, в данной точке пространства, а также в других его точках. Интегрирование в (5.4) ведется

от нуля в силу принципа причинности: отклик среды не появляется ранее начала силового воздействия со стороны электрического поля волны на среду.

Во многих практических ситуациях можно пренебречь зависимостью поляризованного отклика в данной точке пространства от величины поля в других точках пространства (такую зависимость называют *пространственной дисперсией*). Ниже будем пренебрегать пространственной дисперсией и мы.

Применим для нахождения общего решения волнового уравнения (5.3) с зависимостью поляризованного отклика среды от поля общего вида (5.4) спектральный подход, введя спектральную плотность излучения

$$G(\omega, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t, z) \cdot \exp(i\omega t) dt, \quad (5.6)$$

т.е. рассматривая поле светового импульса в виде

$$E(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega, z) \cdot \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (5.7)$$

Характерные математические преобразования в рамках спектрального подхода мы подробно обсудили при решении задач дифракции. Поэтому решение уравнения (5.3) на основе этого подхода выносим в упражнение 1. Полевое уравнение (5.3) для спектра поля (5.6) принимает вид (смотри упражнение)

$$\frac{d^2 G}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} G = \frac{4\pi\omega^2 \chi(\omega)}{c^2} G, \quad (5.8)$$

где  $\chi(\omega) = \int_0^{\infty} \chi(\tau) \cdot \exp(i\omega\tau) d\tau$

или

$$\frac{d^2 G}{dz^2} + \frac{\omega^2 n^2(\omega)}{c^2} G = 0, \quad (5.9)$$

где  $n(\omega) \equiv 1 + 4\pi\chi(\omega)$  – показатель преломления среды на частоте  $\omega$ .

Как видим, спектральный подход опять позволил перейти от задачи решения дифференциального уравнения в частных производных к значительно более простой задаче решения обыкновенного дифференциального уравнения (5.9), общее решение которого имеет вид

$$G(\omega, z) = D_1(\omega) \exp\left(-i \frac{\omega n(\omega)}{c} z\right) + D_2(\omega) \exp\left(i \frac{\omega n(\omega)}{c} z\right), \quad (5.10)$$

где  $\frac{\omega n(\omega)}{c} = k(\omega)$ , постоянные интегрирования  $D_1$  и  $D_2$  определяются из граничных условий.

Первое слагаемое в правой части соотношения (5.10) описывает волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $z$ , а второе – обратную волну.

**Вывод:** задача о динамике спектра светового импульса в оптической среде решена.

Как видно из решения (5.10), временной спектр поля светового импульса в оптической среде меняется. Это связано с зависимостью от частоты  $\omega$  волнового числа  $k$ , а, следовательно, и фазовой скорости волны  $v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k}$ . Меняется при этом и форма поля светового импульса в соответствии с соотношением (5.7).

Круг явлений, обусловленных зависимостью фазовой скорости света в среде от его частоты, называют *дисперсией света*.

Поскольку показатель преломления по определению  $n(\omega) \equiv \frac{c}{v_{\text{фаз}}(\omega)}$ , то часто также говорят, что *дисперсией света* называется круг явлений, обусловленных зависимостью показателя преломления среды от частоты света.

Приступим к изучению явления дисперсии, т.е. проанализируем особенности изменения формы световых импульсов в оптических средах, принимая во внимание, что их показатель преломления зависит от частоты.

Будем полагать, что на входе в оптическую среду (на ее границе  $z = 0$ ) временная зависимость светового импульса имеет вид, представленный на рисунке 5.1. Под огибающей импульса  $\mathcal{E}(t)$  с длительностью  $\tau_{\text{и}}$  имеем гармоническую составляющую поля, характеризуемую периодом  $T_0$ .

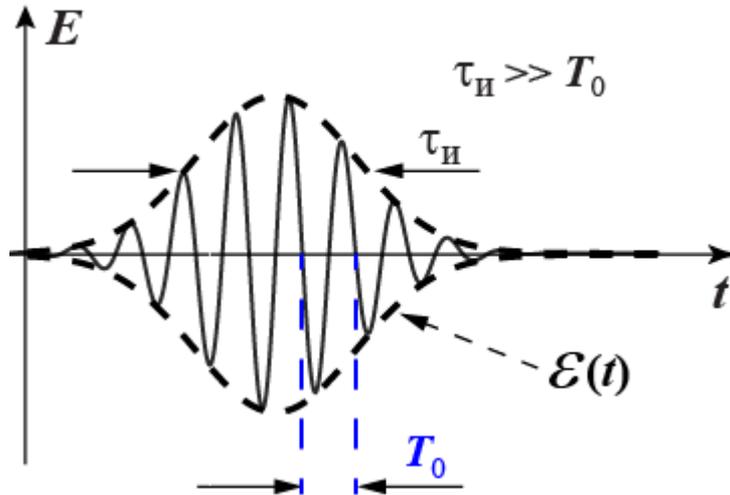


Рисунок 5.1 – Вид светового импульса на входе в оптическую среду

Зависимость от времени поля импульса  $E(z,t)$  при  $z > 0$ , зная его динамику спектра (5.10), несложно определить по формуле (5.7). Она имеет вид

$$E(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) \exp(i[k(\omega)z - \omega t]) d\omega, \quad (5.11)$$

где

$$G_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(0,t') \exp(i\omega t') dt' \quad (5.12)$$

– спектр импульса на входе в среду (при  $z=0$ ),  $k(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c}$  – зависимость волнового числа от частоты  $\omega$ .

Обсудим решение (5.11) для часто встречающегося на практике случая, когда  $\tau_H \gg T_0$ . Тогда, в соответствии со свойствами преобразования Фурье, ширина спектра излучения  $\Delta\omega$  связана с его центральной частотой  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  неравенством  $\Delta\omega \ll \omega_0$ . Такое с узким временным спектром излучение называют *квазимонохроматическим*, а сам импульс – *волновым пакетом*.

Для квазимонохроматического излучения с, в общем случае, сложной зависимостью волнового числа  $k$  от частоты  $\omega$  ее можно представить в виде разложения в ряд Тейлора

$$k(\omega) \approx k(\omega_0) + \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (5.13)$$

В зависимости (5.13) часто вводят обозначения  $\left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega_0} = \beta_1$ ,  $\left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right)_{\omega_0} = \beta_2$ .

Если в решении (5.11) в зависимости (5.13) учитываются только первые два слагаемых, то говорят о решении в первом приближении теории дисперсии. Если учитывается и третье слагаемое, то – о втором приближении теории дисперсии. И т.д. Третье и более высокие приближения используются в фемтосекундной оптике.

В низшем первом приближении теории дисперсии поле (5.11) можно привести (смотри упражнение 2) к виду

$$E(z, t) = \exp(i[k_0 z - \omega_0 t]) \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(t') dt' \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ixy) dy, \quad (5.14)$$

где  $y = \omega - \omega_0$ ,  $x = (t' - t) + \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega_0} z$ .

### Упражнения и вопросы для самоконтроля

**Упражнение 1.** Показать, что полевое уравнение

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (5.3)$$

где поляризованность оптической среды

$$P = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \chi(\tau, \vec{R}) \cdot E(t - \tau, \vec{r} - \vec{R}) d\vec{R} d\tau \quad (5.4)$$

для спектра (5.6) поля излучения приводится к виду

$$\frac{d^2 G}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} G = \frac{4\pi\omega^2 \chi(\omega)}{c^2} G \quad (5.8)$$

или

$$\frac{d^2 G}{dz^2} + \frac{\omega^2 n^2(\omega)}{c^2} G = 0, \quad (5.9)$$

где  $n(\omega) \equiv 1 + 4\pi\chi(\omega)$ .

**Указание:** учесть определение  $P(\omega) = \chi(\omega)G(\omega)$ , где

$$\chi(\omega) = \int_0^{\infty} \chi(\tau) \cdot \exp(i\omega\tau) d\tau.$$

**Упражнение 2.** Показать, что поле светового импульса в оптической среде

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) \exp(i[k(\omega)z - \omega t]) d\omega, \quad (5.11)$$

где

$$G_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(0, t') \exp(i\omega t') dt' \quad (5.12)$$

– спектр импульса на входе в среду (при  $z=0$ ),  $k(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c}$ , в первом приближении теории дисперсии может быть записано в виде

$$E(z, t) = \exp(i[k_0 z - \omega_0 t]) \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(t') dt' \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ixy) dy, \quad (5.14)$$

где  $y = \omega - \omega_0$ ,  $x = (t' - t) + \left( \frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} z$ .

**Вопрос 1.** Какие явления называют пространственной дисперсией света?

**Вопрос 2.** Круг каких явлений называют дисперсией света?

**Вопрос 3.** Какое излучение называют квазимонохроматическим?

## ЛЕКЦИЯ 6. Групповая скорость.

### Дисперсионное расплывание световых импульсов

В первом приближении теории дисперсии, как было показано в предыдущей Лекции, изменение поля светового импульса при его распространении в оптической среде описывается выражением (5.14). Дальнейшее преобразование этого выражения требует вспомнить об обобщенных функциях. Дадим сведения о дельта-функции в математическом приложении.

### Математическое приложение

*Дельта-функция.* Эта функция не является аналитической и относится к обобщённым функциям.

*Определение дельта-функции:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \quad (6.1)$$

– линейный функционал, ставящий в соответствии каждой функции её значение в фиксированной точке.

*Свойства дельта-функции:*

$$\delta(x) = 0 \text{ при } x \neq 0. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1. \quad (6.2)$$

*Интегральное представление дельта-функции:*

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ixy)dy. \quad (6.3)$$

Представление (6.3) часто используют в преобразовании Фурье ступенчатых функций. Используем его и мы.

К дельта-функции можно прийти, рассматривая предельные формы некоторых аналитических функций (смотри также рисунок 6.1). Например:

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + x^2}. \quad (6.4)$$

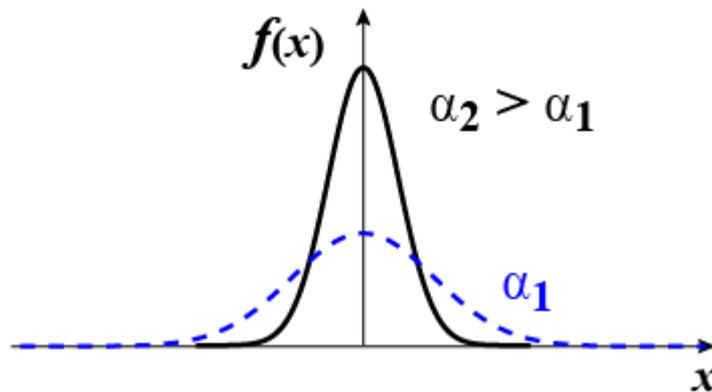


Рисунок 6.1 – Иллюстрация предельного перехода к дельта-функции зависимости (6.4)

С учетом интегрального представления дельта-функции (6.3) выражение (5.14) приводится к виду

$$\begin{aligned} E(z,t) &= \exp(i[k_0 z - \omega_0 t]) \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(t') \delta\left(t - t' + \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega_0} z\right) = \\ &= \mathcal{E}\left(t - \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega_0} z\right) \exp(i[k_0 z - \omega_0 t]). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Из выражения (6.5) видно, что в первом приближении теории дисперсии огибающая светового импульса  $\mathcal{E}$  распространяется в среде без изменения своей формы. Скорость ее распространения называют *групповой скоростью*. Понятие групповой скорости иллюстрировано на рисунке 6.2. Для понимания отличия групповой скорости от фазовой на этом рисунке иллюстрирована и *фазовая скорость* импульса, т.е. скорость распространения поверхности равной фазы волны.

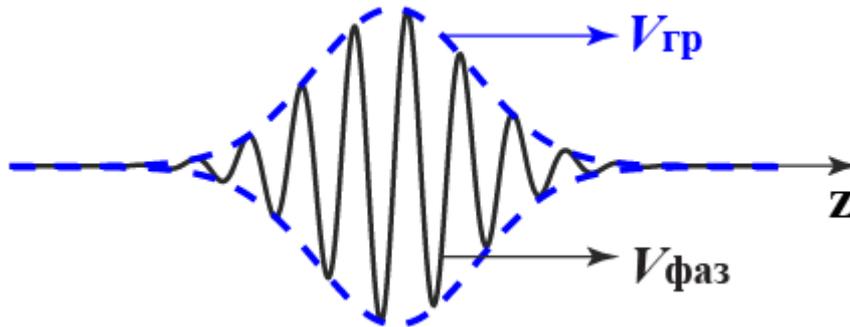


Рисунок 6.2 – Иллюстрация определений групповой и фазовой скоростей

### Дисперсионное расплывание световых импульсов

Во втором приближении теории дисперсии, как можно показать [1], эволюция поля импульса в среде описывается уже более сложным выражением:

$$E(t, z) = \mathcal{E}(t, z) \cdot \exp(i[k_0 z - \omega_0 t]), \quad (6.6)$$

где

$$\mathcal{E}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi i \left( \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_0} z}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(\tau') \exp \left( -i \frac{(\tau - \tau')^2}{2 \left( \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_0} z} \right) d\tau' \quad (6.7)$$

есть преобразование Френеля (смотри Лекции 3 и 4, в которых обсуждается дифракция Френеля). В (6.7)  $\tau = t - \left( \frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} \cdot z$ .

Из выражений (6.6) и (6.7) следует, что во втором приближении теории дисперсии описание явления дисперсии светового импульса математически эквивалентно описанию явления дифракции Френеля светового пучка. Это

означает, что математический анализ, который мы использовали ранее при рассмотрении дифракции Френеля, например, для описания дифракции параксиальных гауссовых пучков, применим и в теории дисперсии, например, при анализе дисперсионного расплывания гауссовых импульсов в оптической среде. Сммотри иллюстрацию этого на рисунке 6.3.

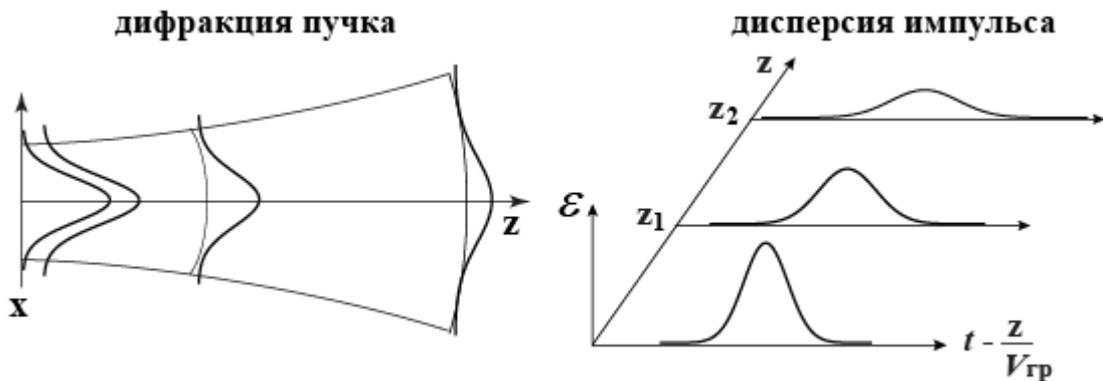


Рисунок 6.3 – Иллюстрация аналогии расплывания гауссовых пучков из-за дифракции и гауссовых импульсов из-за дисперсии

Во втором приближении теории дисперсии огибающая импульса деформируется. Обычно, как видно из рисунка, расплывается (смотри также ПРИЛОЖЕНИЕ 2). Это расплывание является, например, основной причиной ограничения скорости передачи информации по оптическому волокну (смотри рисунок 6.4).

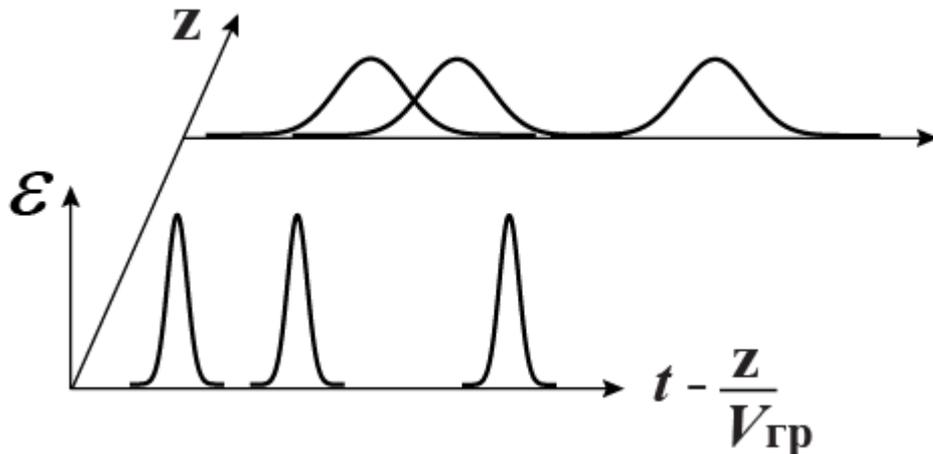


Рисунок 6.4 – Иллюстрация ограничения скорости передачи информации световыми импульсами по оптическому волокну из-за их дисперсионного расплывания

## Укороченное волновое уравнение в теории дисперсии

Выше отметили, что дифракция параксиальных пучков и дисперсия квазимонохроматического излучения описываются преобразованиями Френеля. Рассмотрим аналогии в описании явлений дифракции и дисперсии при использовании метода их анализа на основе укороченных волновых уравнений.

Методом медленно меняющейся огибающей, подробно проанализированном в Лекции 3, для описания динамики огибающей импульса в оптической среде можно получить уравнение [1]

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - \left[ \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 \mathcal{E}}{\partial t^3} - \sum_{n=4} \beta_n \frac{i^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n \mathcal{E}}{\partial t^n} \right] = 0. \quad (6.8)$$

Здесь  $\beta_n = \left( \frac{\partial^n k}{\partial \omega^n} \right)_{\omega_0}$ ,  $k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega)$ .

Три первых слагаемых получаем во втором приближении теории дисперсии, остальные – в более высоких порядках дисперсии.

Удобно (6.8) переписать в новых переменных:  $z' = z$ ,  $\tau = t - \left( \frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} \cdot z$ .

Тогда уравнение (6.8) приводится к виду (смотри упражнение 2)

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \tau^2} = 0. \quad (6.9)$$

Видно, что уравнение (6.9) эквивалентно укороченному волновому уравнению в теории дифракции (3.10), но имеет меньшую размерность.

### Упражнения и вопросы для самоконтроля

**Упражнение 1.** Чему равняется групповая скорость  $v_{гр}$ ? Чему равняется фазовая скорость  $v_{фаз}$ ?

**Ответ:**  $v_{гр} = \left( \frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0}^{-1}$ ,  $v_{фаз} = \frac{\omega_0}{k_0}$ .

**Упражнение 2.** Привести уравнение  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} + \beta_1 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = 0$

в новых переменных  $z' = z$ ,  $\tau = t - \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega_0} \cdot z$  к виду

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \tau^2} = 0.$$

**Указание:** следует использовать преобразования типа

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} - \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega_0} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0 - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau}.$$

**Вопрос 1.** Что называют групповой и фазовой скоростями светового импульса?

**Вопрос 2.** Пояснить, почему уравнения (3.10) и (6.9) математически эквивалентны?

## ЛЕКЦИЯ 7. Понятия и термины теории дисперсии

В настоящей Лекции сформулируем, в том числе напомним из курса «Общей физики», некоторые понятия теории дисперсии, которые позволят читать специализированную литературу по этой тематике.

### 1. Нормальная и аномальная дисперсия

Если анализируют закономерности распространения оптических импульсов в среде, для которой в диапазоне спектра излучения выполняется  $\frac{dn(\omega)}{d\omega} > 0$ , то

говорят о нормальной дисперсии света; при  $\frac{dn(\omega)}{d\omega} < 0$  – об аномальной

дисперсии. Эти определения подробно обсуждаются еще в дисциплине «Общая физика» [7]. Напомним, что, например, для газов характерная зависимость от частоты  $\omega$  показателя преломления  $n$  и коэффициента поглощения  $K$  среды с линией поглощения на частоте  $\omega_0$  имеют вид, приведенный на рисунке 7.1.

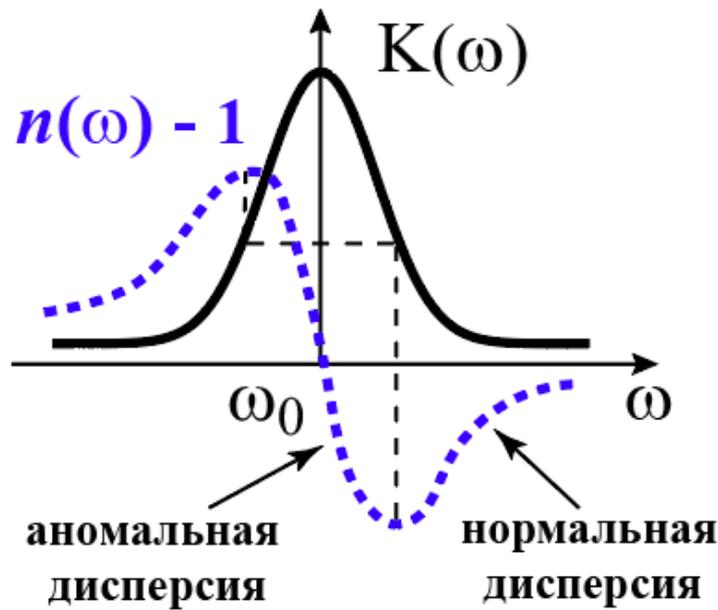


Рисунок 7.1 – Зависимость показателя преломления  $n$  и коэффициента поглощения  $K$  газа вблизи линии поглощения от частоты излучения  $\omega$

## 2. Нормальная и аномальная групповая дисперсия

Эти понятия широко применяются в волоконной оптике, особенно в ее нелинейном разделе [2, 3, 9, 10].

Ранее мы отметили, что дисперсия оптической среды, например, материальная дисперсия оптического волокна, в поле квазимонохроматических лазерных импульсов характеризуется зависимостью волнового числа от частоты, которая может быть представлена в виде разложения

$$k(\omega) = \frac{\omega n(\omega)}{c} \approx k(\omega_0) + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \dots, \quad (7.1)$$

где  $\beta_1 = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} = \frac{1}{v_{гр}}$ . А величина второго коэффициента

$$\beta_2 = \left(\frac{dk^2}{d\omega^2}\right)_{\omega_0} = \left(\frac{d}{d\omega} \frac{1}{v_{гр}}\right)_{\omega_0} = -\frac{1}{v_{гр}^2} \left(\frac{dv_{гр}}{d\omega}\right)_{\omega_0}.$$

Говорят, если  $\beta_2 > 0$ , то имеем *нормальную дисперсию групповой скорости*; если  $\beta_2 < 0$  – то *аномальную дисперсию групповой скорости*.

Можно показать, что  $\beta_2 \approx \frac{\omega_0}{c} \left(\frac{d^2n}{d\omega^2}\right)_{\omega_0} \approx \frac{\lambda_0^3}{2\pi c^2} \left(\frac{d^2n}{d\lambda^2}\right)_{\lambda_0}$ .

Типичная дисперсия прозрачной диэлектрической среды представлена на рисунке 7.2.

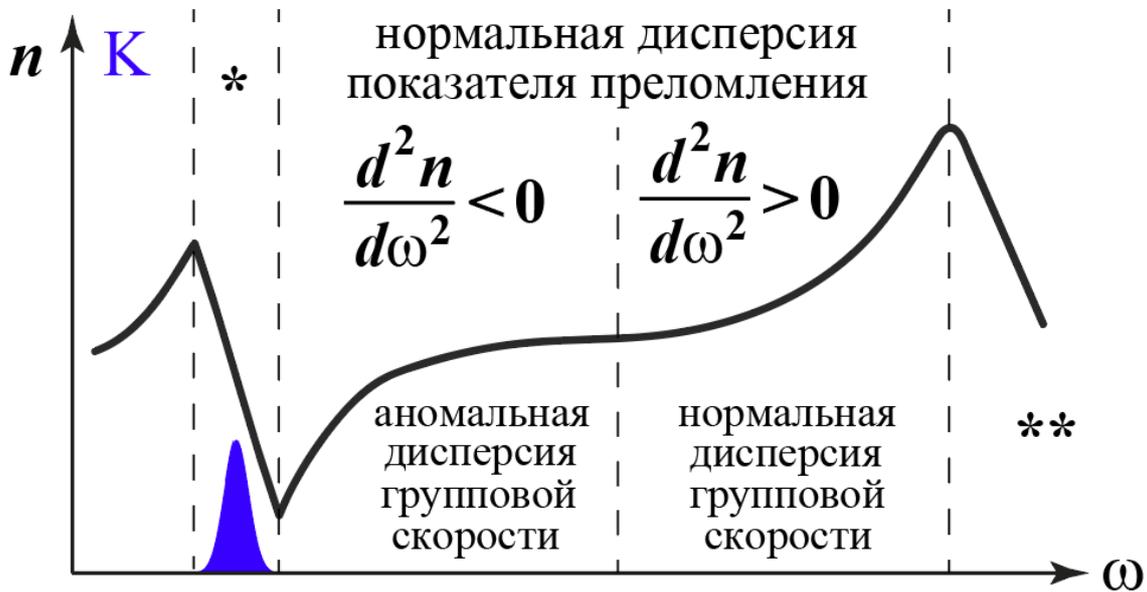


Рисунок 7.2 – Типичная дисперсия прозрачной диэлектрической среды. Синим цветом закрашен спектр ИК-поглощения (колебания ионов). Символом \* обозначена частотная область аномальной дисперсии показателя преломления, символами \*\* – область УФ-поглощения (электронные колебания)

На рисунке 7.3 приведена зависимость  $\beta_2$  от длины волны  $\lambda$  для наиболее широко используемого при изготовлении волоконных световодов кварцевого стекла. Длина волны, при которой  $\beta_2 = 0$ , называется *длиной волны нулевой групповой дисперсии*. Для кварцевого стекла, как видно из рисунка, она составляет 1,27 мкм.

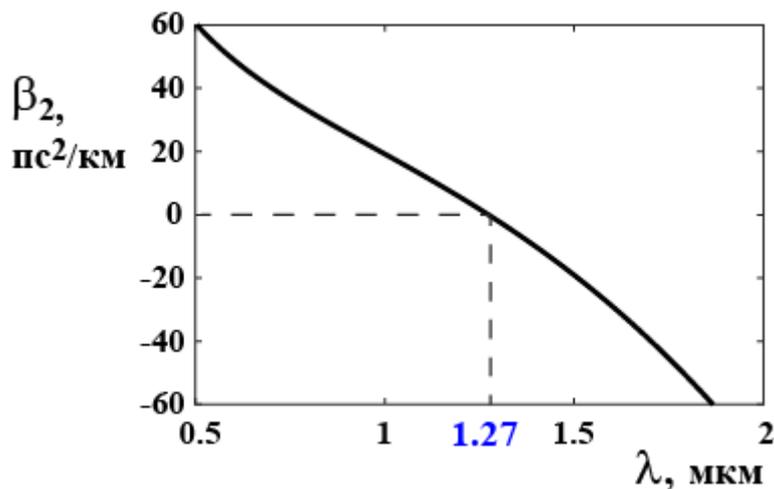


Рисунок 7.3 – Зависимость параметра  $\beta_2$  от длины волны для кварцевого стекла

Различия динамики поля импульса в области нормальной и аномальной групповой дисперсии иллюстрированы на рисунке 7.4. Из рисунка видно, что и при нормальной и аномальной групповой дисперсии длительность импульса увеличивается за счет появления новых колебаний в нем. Расстояния между нолями поля в импульсе становятся не равномерными, поскольку из-за дисперсии происходит не только удлинение импульса, но и его фазовая модуляция. При нормальной групповой дисперсии «синие» частоты (меньшее расстояние между нолями поля) видим в начале импульса, а «красные» (большее расстояние между нолями поля) – в его конце. При аномальной групповой дисперсии – наоборот.

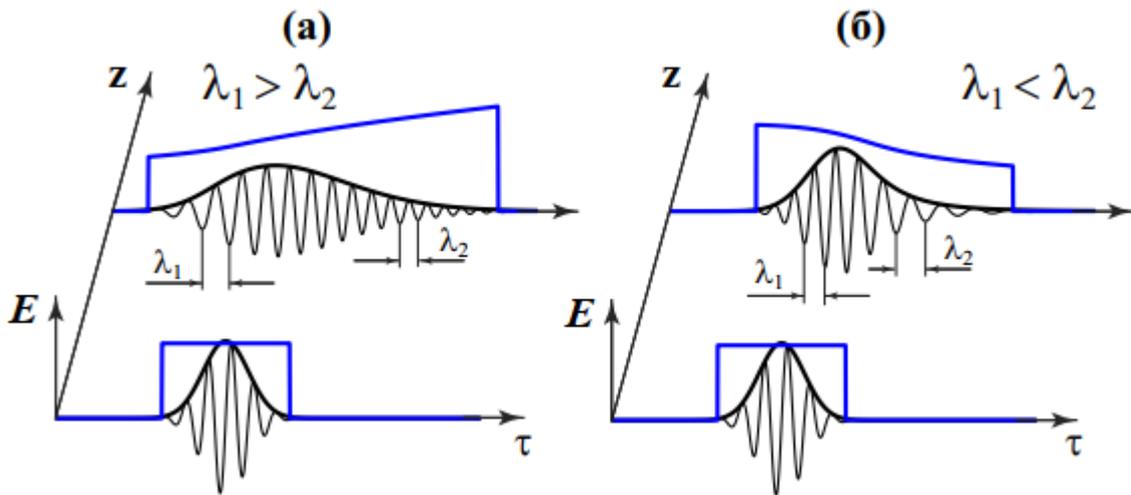


Рисунок 7.4 – Динамика электрического поля импульса  $E$  в области нормальной (а) и аномальной (б) групповой дисперсии среды. Синими линиями дополнительно показаны зависимости мгновенной частоты колебаний в импульсе от времени

При  $\beta_2 = 0$  надо анализировать дисперсию света уже не во втором, а в третьем приближении теории дисперсии и решать уравнение вида:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial t^3} = 0. \quad (7.2)$$

Обсуждая увеличение длительности импульса и его фазовую модуляцию из-за дисперсии, обратим внимание читателя на то, что спектр импульса при его распространении в линейной среде с произвольной зависимостью показателя преломления, а значит, и волнового числа от частоты имеет вид

$$G(\omega, z) = D_1(\omega) \exp\left(i \frac{\omega n(\omega)}{c} z\right). \quad (7.3)$$

Т.е. модуль спектра импульса  $|G(\omega, z)|$  в среде не меняется (не зависит от  $z$ ).

### 3. Модели световых импульсов

При изучении особенностей дисперсионной эволюции поля световых импульсов их форму на входе в среду (при  $z = 0$ ) рассматривают разных типов. Среди них

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(t) \cdot \exp(-t^2 / \tau_0^2) \quad (7.4)$$

– гауссов импульс.

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(t) \cdot \exp\left(-\left(1 + i\alpha\tau_0^{2m}\right) \cdot \left(t / \tau_0\right)^{2m}\right) \quad (7.5)$$

– супергауссов импульс, который близок к прямоугольной форме,  $m$  – порядок супергауссова импульса.

Фазово-модулированный импульс:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(t) \cdot \exp(i\varphi_0(t)). \quad (7.6)$$

Спектрально ограниченный импульс. Для него  $\tau_{\text{имп}} \cdot \Delta\omega_{\text{имп}} = K \geq 1/2$ . Для гауссова импульса  $K = 1/2$ .

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(t) \cdot \operatorname{sech}\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \quad (7.7)$$

– гиперболический секанс. Здесь  $\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ ,  $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

На рисунке 7.5 иллюстрированы эти типичные формы световых импульсов, особенности эволюции которых изучают в оптической физике.

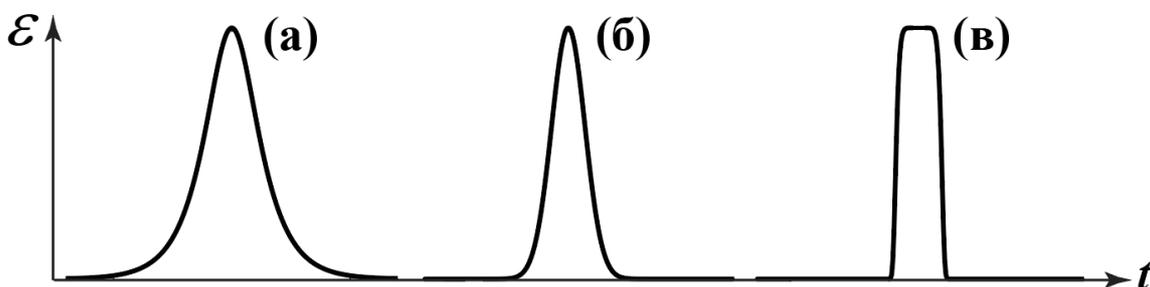


Рисунок 7.5 – Модели световых импульсов на входе в среду: гиперболический секанс (а), гауссов импульс (б), супергауссов импульс (в)

В заключении этой Лекции рассмотрим полезный метод анализа оптических явлений, который позволяет иногда без сложного решения волновых уравнений оценить, какой эффект доминирует в рассматриваемой задаче, и всегда полезен при численном решении волновых уравнений.

### Нормировка укороченного волнового уравнения

Мы уже рассмотрели метод укороченных волновых уравнений и в теории дифракции, и в теории дисперсии. Если эти оба эффекта проявляются одновременно, то их можно описать единым укороченным уравнением вида

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \tau^2} = \frac{i}{2k_0} \Delta_{\perp} \mathcal{E}. \quad (7.8)$$

Уравнение (7.8) описывает дисперсионно-дифракционную эволюцию поля квазимонохроматического параксиального светового пучка.

Пусть на границе раздела с оптической средой (при  $z=0$ ) волновой пакет является гауссовым и по временной форме, и по поперечному профилю пучка

$$\mathcal{E}(t)|_{z=0} = \mathcal{E}_0 \exp(-t^2 / \tau_0^2) \cdot \exp(-(x^2 + y^2) / a^2). \quad (7.9)$$

Введём безразмерные величины  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} / \mathcal{E}_0$ ,  $\tau' = \tau / \tau_0$ ,  $x' = x / a$ ,  $y' = y / a$ .

Поделим уравнение (7.8) на  $\mathcal{E}_0$  и получим:

$$\frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial z} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}'}{\partial \tau^2} = \frac{i}{2k_0} \Delta_{\perp} \mathcal{E}'.$$

Умножим второе слагаемое в левой части уравнения на  $\frac{\tau_0^2}{\tau_0^2} = 1$ , а выражение в

правой части – на  $\frac{a^2}{a^2} = 1$ . Тогда получим:

$$\frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial z} + i \frac{\beta_2}{2\tau_0^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}'}{\partial \tau'^2} = \frac{i}{2k_0 a^2} \Delta_{\perp} \mathcal{E}'. \quad (7.10)$$

Обозначим  $\frac{\beta_2}{2\tau_0^2} = \frac{1}{L_{\text{дисп}}}$ , где  $L_{\text{дисп}}$  – длина дисперсионного расплывания импульса.

$L_{\text{дифр}} = 2k_0 a^2$  – длина дифракционного расширения пучка.

В итоге получаем

$$\frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial z} + \frac{i}{L_{\text{дисп}}} \frac{\partial^2 \mathcal{E}'}{\partial \tau'^2} = \frac{i}{L_{\text{дифр}}} \Delta_{\perp} \mathcal{E}'. \quad (7.11)$$

**Вывод:** введены интегральные параметры, зависящие и от характеристик среды, и от параметров импульса. Они позволяют без расчёта оценить характер процесса:

1. Если  $z \ll L_{\text{дисп}}$  и  $z \ll L_{\text{дифр}}$ , то уравнение (7.11) принимает тривиальный вид

$$\frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial z} \approx 0. \quad (7.12)$$

Решение которого  $\mathcal{E}'(\tau) = \mathcal{E}(\tau)|_{z=0}$ . Т.е. изменением формы волнового пакета из-за дисперсии и дифракции на указанных расстояниях можно пренебречь. Таким образом, сопоставляя расстояние, пройденное волновым пакетом в среде с дисперсионной и дифракционной длинами, можем определить, на каких расстояниях можно обоими этими эффектами пренебречь.

2. Если  $z \geq L_{\text{дисп}}$  и  $z \leq L_{\text{дифр}}$  – идет дисперсионное уширение импульса, оно доминирует над явлением дифракции. И наоборот при обратных неравенствах.

**Пояснение:**  $\frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial \tau'} \approx \frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta \tau} \sim 1, \frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial x'} \approx \frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta x'} \sim 1.$

Аналогично  $\frac{\partial^2 \mathcal{E}'}{\partial \tau'^2} \sim 1, \frac{\partial^2 \mathcal{E}'}{\partial x'^2} \sim 1$ . Т.е. производные в нормированном уравнении (7.10) имеют порядок единицы. Поэтому соотношение влияния дисперсии или дифракции на характер эволюции волнового пакета полностью определяется значениями длин дисперсии и дифракции. Эти длины зависят от характеристик вещества и от параметров излучения.

## Упражнения и вопросы для самоконтроля

**Упражнение 1.** Пронормировать укороченное волновое уравнение, описывающее дисперсию в третьем порядке теории дисперсии и параксиальную дифракцию, вида:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + i \frac{\beta_2}{2\tau_0^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \tau^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 \mathcal{E}}{\partial \tau^3} = \frac{i}{2k_0} \Delta_{\perp} \mathcal{E} \quad (7.13)$$

с гауссовыми граничными условиями (7.9).

**Ответ:** 
$$\frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial z'} + i \frac{1}{L_{\text{дисп}_1}} \frac{\partial^2 \mathcal{E}'}{\partial \tau'^2} - \frac{1}{L_{\text{дисп}_2}} \frac{\partial^3 \mathcal{E}'}{\partial \tau'^3} = i \frac{1}{L_{\text{дифр}}} \Delta'_{\perp} \mathcal{E}' ,$$

где  $L_{\text{дисп}_1} = \frac{2\tau_p}{\beta_2}$ ,  $L_{\text{дисп}_2} = \frac{6\tau_p}{\beta_3}$ ,  $L_{\text{дифр}} = 2k_0 a^2$ .

**Вопрос 1.** Что называют нормальной и аномальной групповой дисперсией?

**Вопрос 2.** Какие импульсы называют гауссовыми и супергауссовыми?

**Вопрос 3.** Какие импульсы называют спектрально ограниченными?

## ЛЕКЦИЯ 8. Нелинейная теория дисперсии света.

### Явления нелинейной оптики

В поле интенсивного света уравнение движения оптического электрона в атоме оптической среды в рамках классической элементарной теории дисперсии принимает вид [7]:

$$m\ddot{r} = -kr - ar^2 - br^3 - g\dot{r} + eE, \quad (8.1)$$

где  $r$  – отклонение электрона в атоме от положения равновесия. Уравнение (8.1) – это, по сути, второй закон Ньютона  $ma = F$ , записанный для конкретной задачи движения электрона в атоме под воздействием совокупности разных сил. Т.е. в уравнении осциллятора (8.1)  $m$  – это масса электрона, первое слагаемое в правой части (8.1) описывает упругую силу, возвращающую электрон в положение равновесия, при больших отклонениях проявляется нелинейность возвращающей силы, соответственно, второе и третье слагаемые характеризуют ангармонизм осциллятора, четвертое слагаемое описывает потери

энергии осциллятором, пятое слагаемое – это сила, действующая на электрон, как заряженную частицу с зарядом  $e$ , со стороны электрического поля световой волны  $E$ . Для простоты поле излучения полагали линейно поляризованным.

Если световая волна малоинтенсивная, то в уравнении движения ангармонического осциллятора нелинейные слагаемые становятся пренебрежимо малыми и (8.1) линеаризуется и приобретает вид уравнения движения оптического электрона в силовом поле излучения, лежащего в основе элементарной линейной теории дисперсии света [7].

Материальное уравнение, описывающее поляризационный отклик диэлектрической среды, часто можно записать в виде:

$$P = Ner, \quad (8.2)$$

где  $N$  – концентрация атомов в веществе,  $er$  – дипольный момент атома. Тогда уравнение динамики поляризованности среды в поле интенсивного излучения примет вид

$$\ddot{P} + 2\gamma\dot{P} + \omega_0^2 P + \alpha P^2 + \beta P^3 + \dots = \frac{e^2}{m} NE. \quad (8.3)$$

В материальном уравнении (8.3) его параметры определяются через параметры уравнения (8.1) и соотношения (8.2), связи между которыми предлагается найти самостоятельно, выполнив упражнение 1.

Нелинейность поляризационного отклика среды  $P$  на силовое поле излучения  $E$  вида (8.3) может приводить к различным эффектам, которые перечислены в Таблице 1. Наличие квадратичной нелинейности, как видно из таблицы, приводит в поле монохроматической волны к генерации второй гармоники, кубичной нелинейности – к генерации третьей гармоники и зависящему от интенсивности изменению фазовой скорости волны. В поле двух монохроматических волн разной частоты из-за нелинейного отклика среды может появиться целая серия комбинационных частот.

Таблица 8.1 – Перечень эффектов генерации гармоник и комбинационных частот в нелинейных средах с квадратичной и кубичной нелинейностями в поле моно- и бихроматических волн



	<p>Генерация третьей гармоники, изменение фазовой скорости</p>
	<p>Генерация излучения на комбинационных частотах</p>

Явление генерации третьей гармоники и возникновение зависимости фазовой скорости монохроматической волны от интенсивности, т.е. появление зависимости показателя преломления среды от интенсивности излучения, рассмотрим в качестве примера более подробно. Материальное уравнение (8.3) рассмотрим для частного случая изотропной среды. В таких средах квадратичная нелинейность отсутствует [11], поэтому в (8.3) ее ниже рассматривать не будем.

Полагая излучение квазимонохроматическим, а взаимодействие света с веществом нерезонансным, рассмотрим уравнение для осциллятора (8.3) в виде:

$$P = \frac{e^2 N}{m \omega_0^2} E - \frac{1}{\omega_0^2} \ddot{P} - \frac{2\gamma}{\omega_0^2} \dot{P} - \frac{\beta}{\omega_0^2} P^3. \quad (8.4)$$

При нерезонансном взаимодействии, когда  $\omega^2 \ll \omega_0^2$ , второе и третье слагаемые можно считать малыми, поскольку их оценка тогда имеет вид

$$\frac{e^2 N}{m \omega_0^2} E \sim \frac{\omega^2}{\omega_0^2} P_{\max} \sim \frac{\gamma \omega}{\omega_0^2} P_{\max}.$$

Нелинейные слагаемые с  $P^2$  и  $P^3$  тоже на практике можно полагать малыми.

Решаем материальное уравнение (8.4), учитывая, что все слагаемые в правой части уравнения, кроме первого, являются малыми, методом итераций. В первой итерации решение (8.4) имеет самый простой вид

$$P^{(0)} = \frac{e^2 N}{m \omega_0^2} E. \quad (8.5)$$

Отклик среды мгновенный, дисперсией пренебрегаем.

В следующей итерации решение принимает более сложный вид:

$$P^{(1)} = \frac{e^2 N}{m \omega_0^2} E - \frac{e^2 N}{m \omega_0^4} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{2\gamma e^2 N}{m \omega_0^3} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\beta (e^2) N^3}{m^3 (\omega_0^2)^4} E^3. \quad (8.6)$$

Второе слагаемое в (8.6) учитывает дисперсию света, третье – поглощение в среде, четвертое – нелинейность отклика среды. Получаем

$$P^{(1)} = P_{\text{лин}} + P_{\text{нел}}, \quad (8.7)$$

где нелинейность отклика среды является кубичной по полю

$$P_{\text{нел}} = \chi^{(3)} E^3. \quad (8.8)$$

В поле квазимонохроматического импульса

$$E(t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(t) \cdot \exp(i\omega t) + c.c. \quad (8.9)$$

нелинейный поляризационный отклик (8.8) принимает вид

$$\begin{aligned} P_{\text{нел}}(t) &= \frac{1}{2} P_{\omega}(t) e^{i\omega t} + c.c. + \frac{1}{2} P_{3\omega_{\text{нел}}}(t) e^{3i\omega t} + c.c. = \\ &= \chi^{(3)} \left[ \frac{1}{8} \mathcal{E}_{\omega}^3 e^{3i\omega t} + \frac{3}{8} \mathcal{E}_{\omega}^2 \mathcal{E}_{\omega}^* e^{i\omega t} + \frac{3}{8} \mathcal{E}_{\omega} (\mathcal{E}_{\omega}^*)^2 e^{-i\omega t} + \frac{1}{8} (\mathcal{E}_{\omega}^*)^3 e^{-3i\omega t} \right]. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Это означает, что в оптической среде в поле интенсивного импульса возникают нелинейная добавка к поляризационному отклику среды на частоте  $3\omega$

$$P_{3\omega_{\text{нел}}} = \frac{1}{4} \chi_{3\omega}^{(3)} \mathcal{E}_{\omega}^3, \quad (8.11)$$

которая определяет эффект генерации третьей гармоники, и на частоте  $\omega$

$$P_{\omega_{\text{нел}}} = \frac{3}{4} \chi_{\omega}^{(3)} |\mathcal{E}_{\omega}|^2 \mathcal{E}_{\omega}, \quad (8.12)$$

которая определяет изменение восприимчивости среды.

Суммарная поляризованность среды на частоте  $\omega$  тогда равна

$$P_{\omega} = P_{\omega_{\text{лин}}} + P_{\omega_{\text{нел}}} = \chi_{\text{лин}} \mathcal{E}_{\omega} + \frac{3}{4} \chi^{(3)} |\mathcal{E}_{\omega}|^2 \mathcal{E}_{\omega} = \left( \chi_{\text{лин}} + \frac{3}{4} \chi^{(3)} |\mathcal{E}_{\omega}|^2 \right) \mathcal{E}_{\omega}, \quad (8.13)$$

здесь  $\frac{3}{4} \chi^{(3)} |\mathcal{E}_{\omega}|^2$  – индуцированное светом изменение восприимчивости среды,

$\chi_{\text{нел}} = \chi_{\text{лин}} + \frac{3}{4} \chi^{(3)} |\mathcal{E}_{\omega}|^2$  – ставшая нелинейной восприимчивость среды. Тогда

показатель преломления тоже становится нелинейным и для него справедливо

$$n_{\text{нел}}^2 = 1 + 4\pi\chi_{\text{нел}} = 1 + 4\pi\chi_{\text{лин}} + 3\pi\chi^{(3)} |\mathcal{E}|^2 = n_{\text{лин}}^2 + 3\pi\chi^{(3)} |\mathcal{E}|^2.$$

$$n_{\text{нел}} = \sqrt{n_{\text{лин}}^2 + 3\pi\chi^{(3)} |\mathcal{E}_{\omega}|^2} = n_{\text{лин}} \sqrt{1 + \frac{3\pi\chi^{(3)}}{n_{\text{лин}}^2} |\mathcal{E}_{\omega}|^2} \approx n_{\text{лин}} + \Delta n_{\text{нел}}, \quad (8.14)$$

где

$$\Delta n_{\text{нел}} = \frac{1}{2} n_2 |\mathcal{E}_\omega|^2 \quad (\text{СГС}) = n_2' I \quad (\text{СИ}). \quad (8.15)$$

индуцированное светом изменение показателя преломления среды,  $n_2'$  – коэффициент нелинейного показателя преломления.

**Вывод:** в изотропной среде наименьшая нелинейность поляризационного отклика среды – кубическая по полю. В поле интенсивного излучения она приводит к явлению генерации третьей гармоники и индуцированному светом нелинейному изменению показателя преломления среды

$$n_0 = n_2 + n_2' I. \quad (8.16)$$

Явления, обусловленные изменением показателя преломления среды под действием излучения, называют *самовоздействием света*.

Примеры проявления самовоздействия света:

### 1. Самофокусировка света

В поле пучка излучения с колоколообразным поперечным распределением поля (смотри рисунок 8.1) при  $n_2' > 0$  (обычно такие значения характерны диэлектрикам при нерезонансном взаимодействии с излучением) из-за большего значения показателя преломления среды на оси пучка, чем на его периферии,

согласно соотношению  $n_{\text{нел}} = n_{\text{лин}} + n_2' I$ , фазовая скорость волны  $v_{\text{фаз}} = \frac{c}{n_{\text{нел}}}$ ,

соответственно, на оси пучка становится меньше. Фазовый фронт пучка искривляется, однородная среда «становится неоднородной», формируется индуцированная светом «линза», пучок самофокусируется. Предельное самосжатие пучка ограничено дифракцией.

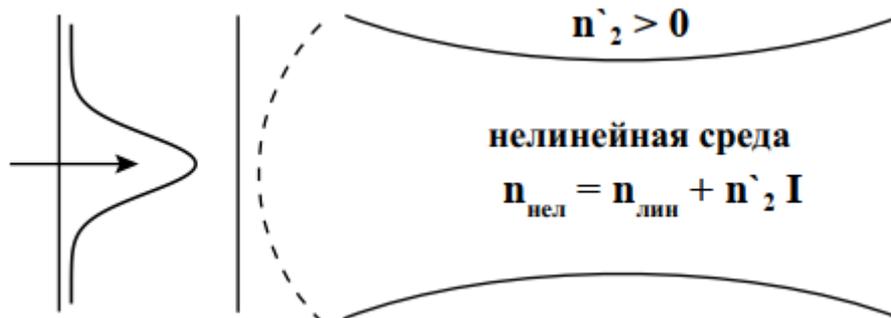


Рисунок 8.1 – Самофокусировка пучка излучения в нелинейной среде

Самофокусировка используется для сверхбыстрого управления параметрами пучка, поскольку время установления механизма нелинейности может быть очень малым и составлять  $\tau_{\text{нл}}^{\text{эл}} \sim 10^{-15}$  с. С другой стороны, это явление может приводить к разрушению оптических элементов мощных лазерных систем.

## 2. Самосжатие светового импульса

Поскольку мы ранее уже обращали внимание на аналогии в описании дифракции и дисперсии, то отметим, что такие аналогии есть и в нелинейной оптике. Аналогом пространственной самофокусировки пучка является временная самофокусировка импульса (смотри рисунок 8.2). В нелинейной среде формируется временная линза. Предельное самосжатие импульса ограничено дисперсией.

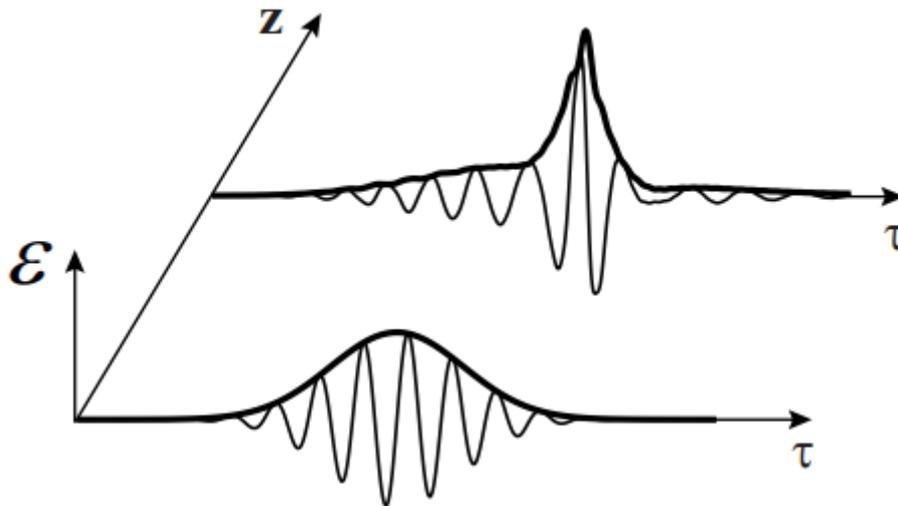


Рисунок 8.2 – Самосжатие светового импульса в нелинейной среде

### Укороченное волновое уравнение в нелинейной оптике

Распространение квазимонохроматических параксиальных линейно поляризованных оптических волн в однородных изотропных нелинейных диэлектрических средах часто можно описать уравнением

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - i\gamma |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = \frac{i}{2k_0} \Delta_{\perp} \mathcal{E}. \quad (8.17)$$

Это уравнение является обобщением укороченных уравнений в теории дифракции и в теории дисперсии на случай нелинейной оптики. Обычно укороченное волновое уравнение (8.17) решают численно, учитывая другие линейные (например, поглощение) и нелинейные (например, вынужденное рассеяние) эффекты. Для численных методов часто используют метод разделения по физическим факторам [9]. Прежде, чем приступить к численному решению уравнения (8.17), его полезно пронормировать и уточнить, все ли явления важны в вашей конкретной задаче.

Обсуждая вопросы дифракции, мы выяснили, что распространение пучков с узким пространственным спектром (параксиального излучения) и с широким спектром (непараксиального излучения) описывается существенно по разному. Обсуждая вопросы дисперсии, мы пока обсудили только методы анализа распространения импульсов с узким временным спектром (квазимонохроматических импульсов). А как рассчитывать динамику поля волн с широким временным спектром? Эти вопросы подробно рассмотрены в книгах [2, 3]. Однако идею таких методов легко понять, получив из, например, уравнения

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (8.18)$$

подстановкой в него выражения для поляризованности (8.6) уравнений динамики поля импульсов  $s$ , в общем случае, весьма широким временным спектром, которые учитывают и дисперсию, и поглощение излучения и нелинейность отклика среды. Именно такие уравнения использованы в ПРИЛОЖЕНИЯХ с иллюстрациями явления дифракции и дисперсии волн из малого числа колебаний.

### Упражнения и вопросы для самоконтроля

**Упражнение 1.** Найти коэффициенты материального уравнения

$$\ddot{P} + 2\gamma\dot{P} + \omega_0^2 P + \alpha P^2 + \beta P^3 + \dots = \frac{e^2}{m} NE, \quad (8.3)$$

$$P = Ner, \quad (8.2)$$

через параметры отдельного микроскопического электронного осциллятора

$$m\ddot{r} = -kr - ar^2 - br^3 - gr + eE, \quad (8.1)$$

**Ответ:**  $\gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{m}$ ,  $\alpha = \frac{a}{mNe}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,  $\beta = \frac{b}{mN^2e^2}$ .

**Упражнение 2.** Проиллюстрировать явление самодефокусировки при  $n_2' < 0$ .

**Вопрос 1.** Какой параметр нелинейной среды называют коэффициентом нелинейного показателя преломления?

**Вопрос 2.** Какие явления называют самовоздействием света?

**Вопрос 3.** В чем суть явления самофокусировки света?

### **ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Дифракция пучка фемтосекундного излучения в воздухе**

Данная лабораторная работа посвящена исследованию дифракционного уширения фемтосекундного параксиального пучка при его распространении в воздухе с помощью программного комплекса *Lbullet* [12]. На основе численных решений полевого уравнения [3] студенты могут пронаблюдать, как дифракция излучения влияет на поперечное уширение пучка на разных расстояниях в среде в зависимости от его начальной ширины.

На рисунке П1 проиллюстрирована дифракция параксиального фемтосекундного пучка излучения с центральной длиной волны  $\lambda_0 = 770$  нм, исходно состоящего из двух периодов колебаний поля, с типичной начальной поперечной шириной  $\rho_0 = 10\lambda_0$  (рисунок П1 а) и  $\rho_0 = 30\lambda_0$  (рисунок П1 в) в линейной диэлектрической среде на расстоянии 2 мм (рисунок П1 б, г). Красным участкам плоскостных изображений соответствуют максимальные положительные значения поля, а синим – максимальные отрицательные.

Из рисунка видно, что с увеличением начальной поперечной ширины пучка его дифракционное расплывание становится слабее. Таким образом, дифракция в виде поперечного уширения пучка и искривления его волнового фронта проявляется тем сильнее, чем меньший поперечный размер имеет исходное излучение.

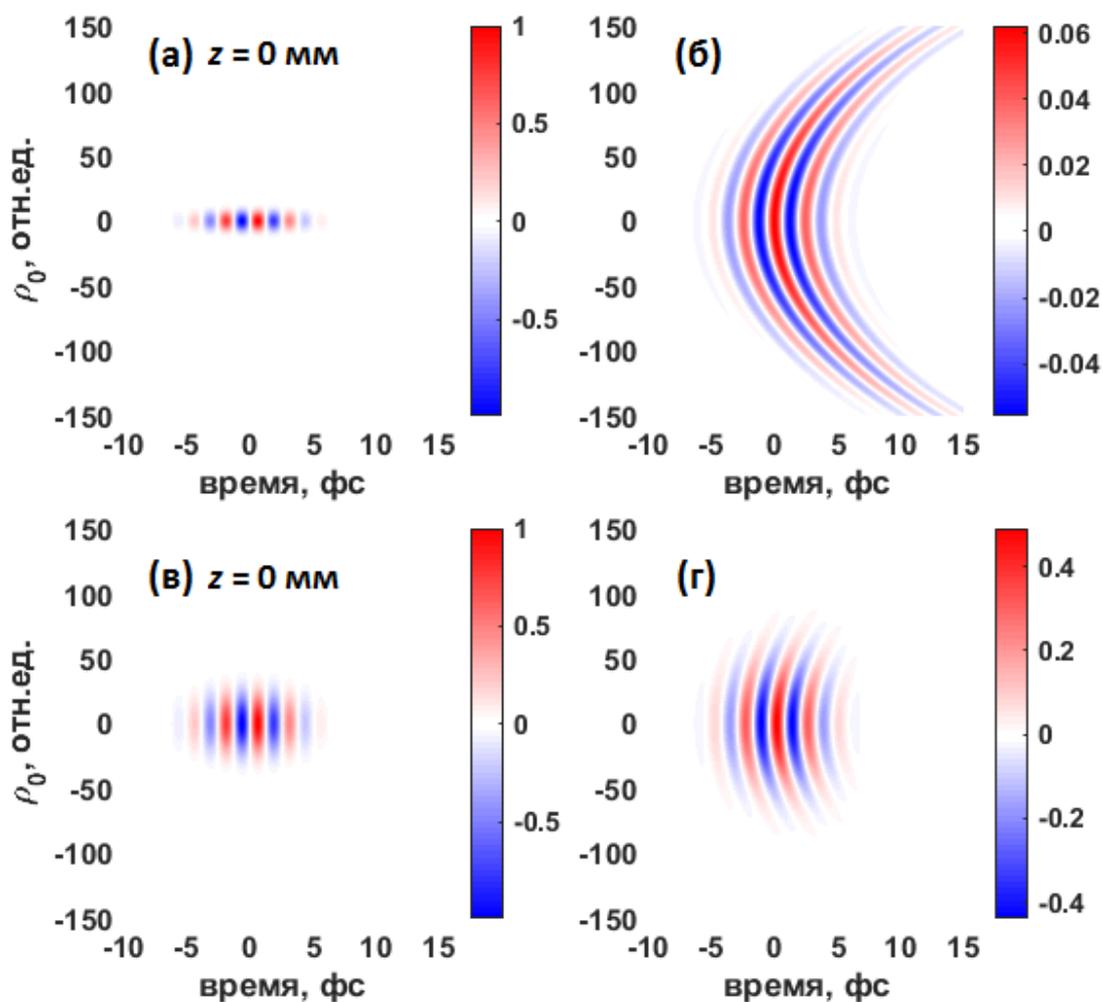


Рисунок П1 – Пространственно-временное распределение исходно двухпериодного параксиального пучка с начальной поперечной шириной  $\rho_0 = 10\lambda_0$  (а) и  $\rho_0 = 30\lambda_0$  (в) на расстоянии 2 мм (б, г)

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Дисперсия фемтосекундного импульса в линейной диэлектрической среде

В данной работе студенты методами численного моделирования исследуют временное уширение фемтосекундных импульсов из-за зависимости линейного показателя преломления среды от частоты при их распространении в прозрачной изотропной диэлектрической среде с помощью программного комплекса *Lbullet1D* [12].

На рисунке П2 проиллюстрировано типичное дисперсионное расплывание фемтосекундных импульсов с центральной длиной волны 770 нм, исходно состоящих из двух (рисунок П2 а) и десяти (рисунок П2 в) колебаний

электрического поля  $E$  в линейной диэлектрической среде на примере одномодового волокна из кварцевого стекла длиной 2 мм в обоих случаях.

Из рисунка видно, что с уменьшением исходного числа колебаний в импульсе его дисперсионное уширение протекает значительно сильнее (рисунок П2 б, г). Импульс из 10 колебаний практически не меняет свою временную форму на выходе из линейной среды (рисунок П2 г). Таким образом, дисперсия сильнее проявляется для оптических импульсов с меньшим числом колебаний.

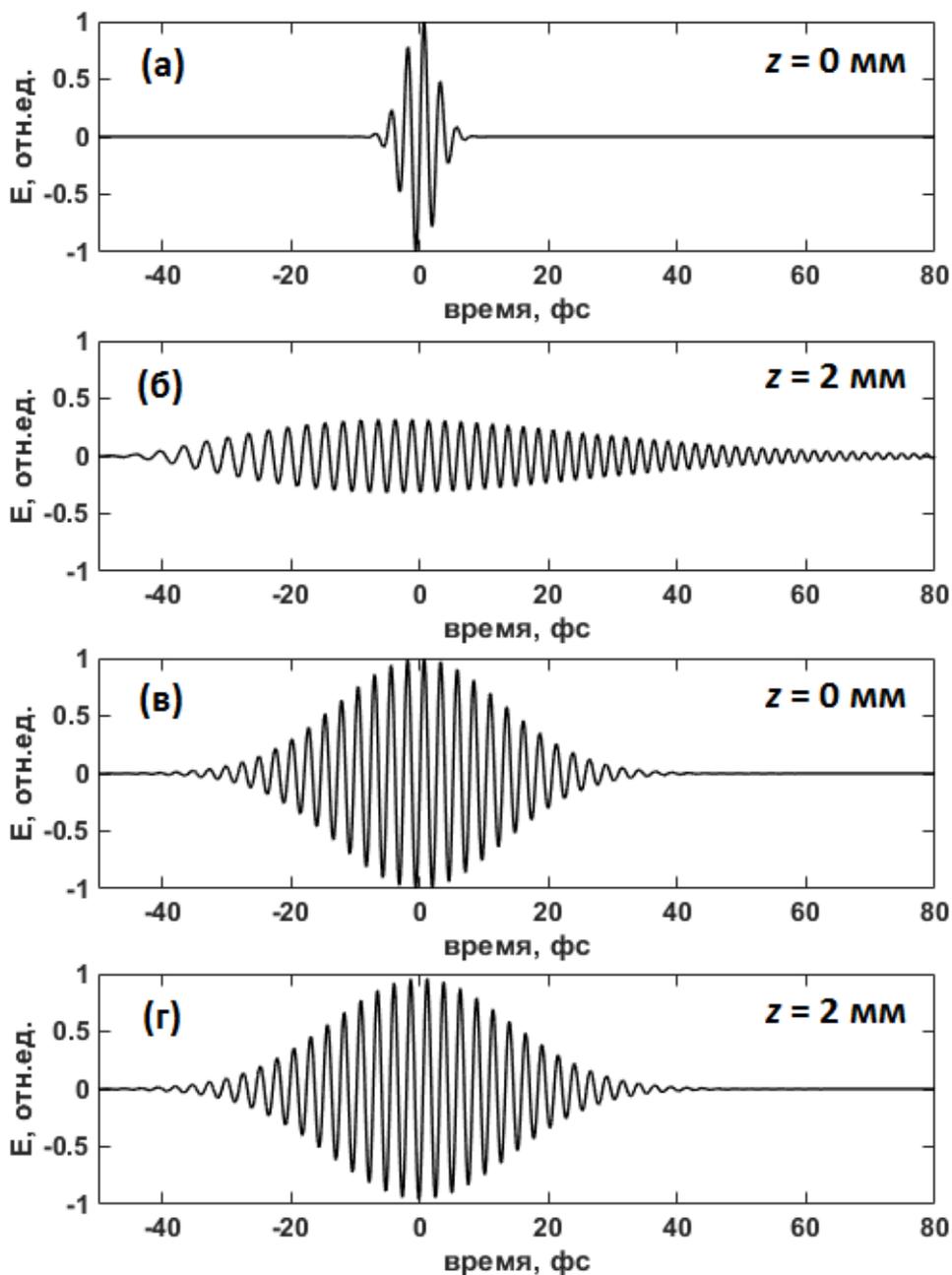


Рисунок П2 – Дисперсионное расплывание импульсов, исходно состоящих из 2 (а) и 10 (в) колебаний электрического поля в линейной диэлектрической среде на расстоянии 2 мм (б, г)

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков. Теория волн. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
2. С.А. Козлов, В.В. Самарцев. Оптика фемтосекундных лазеров. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2007. – 218 с.
3. С.А. Козлов, В.В. Самарцев. Основы фемтосекундной оптики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 292 с.
4. Л. Новотный, Б. Хехт. Основы нанооптики Пер. с англ. / Под ред. В.В. Самарцева. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 484 с.
5. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1977. – 832 с.
6. О.Н. Литвиненко. Основы радиооптики. – К.: Техника, 1974. – 206 с.
7. Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Оптика. – М.: Наука, 1980. – 751 с.
8. Г. Арфкен. Математические методы в физике. – М.: Атомиздат, 1970. – 712 с.
9. Г. Агравал. Нелинейная волоконная оптика. / Пер. с англ. М.: Мир, 1996. – 324 с.
10. С.А. Ахманов, В.А. Выслоух, А.С. Чиркин. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. – М.: Наука, 1988. – 312 с.
11. А.А. Дроздов, С.А. Козлов. Основы нелинейной оптики. – СПб.: Университет ИТМО, 2021. – 70 с.
12. Ю.А. Шполянский. Спектрально-временная эволюция предельно коротких импульсов света в прозрачных средах и оптических волноводах с дисперсией и кубической нелинейностью: дис.... докт. физ.-мат. наук, 2010. – 246 с.

Козлов Сергей Аркадьевич  
Дроздов Аркадий Анатольевич  
Арцер Илья Романович

**Оптическая физика. Часть 1. Классический подход к  
описанию явлений оптической физики**

**Учебное пособие**

В авторской редакции  
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО  
Зав. РИО  
Подписано к печати  
Заказ №  
Тираж  
Отпечатано на ризографе

**Редакционно-издательский отдел**  
**Университета ИТМО**  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А