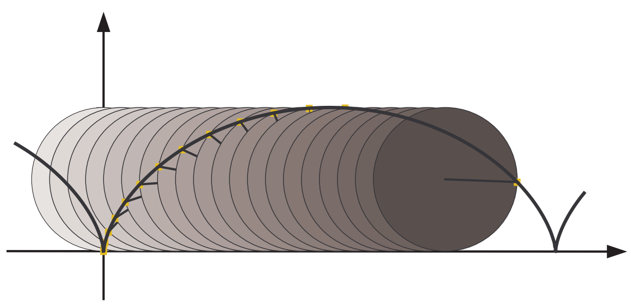
И. А. ЛАПИН

Л. С. РАТАФЬЕВА

В. М. ФРОЛОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ I

Учебное пособие



Санкт-Петербург
2008

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ПРИОРИТЕТНЫЕ НАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКТЫ «Образование»

ПОБЕДИТЕЛЬ КОНКУРСА ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВУЗОВ

И. А. ЛАПИН

Л. С. РАТАФЬЕВА

В. М. ФРОЛОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ I

Учебное пособие

ИТМО
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Санкт-Петербург
2008

Коллектив авторов:
И.А. Лапин, Л.С. Ратафьева, В.М. Фролов

Математический анализ I
Под общей редакцией Л.С. Ратафьевой
Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2008 год, 128 с.

Предлагаемое учебное пособие представляет собой базовый конспект лекций по высшей математике для студентов 1-го курса (1 семестр) дневного и вечернего отделения общеинженерных специальностей. В нем рассмотрены следующие темы: «Предел и непрерывность функции одной переменной», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его приложения», «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных и его приложения». Содержание пособия соответствует образовательным стандартам и программе дисциплины «математика» для направления 550000 — Технические науки. Основное назначение пособия — помочь студентам в самостоятельном изучении данных разделов курса в условиях сокращенного количества аудиторных занятий.

При написании пособия использовались учебные пособия по высшей математике таких авторов как Л.А. Кальниций, А.А. Потапенко и др., изданных в разное время в СЗЗПИ, а также материалы других изданий, которые приводятся в списке литературы без дополнительных ссылок.

ПРИОРИТЕТНЫЕ НАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКТЫ «Образование»

Рекомендовано к печати Ученым Советом естественнонаучного факультета СПбГУ ИТМО (протокол № 8 от 22 апреля 2008 года)

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007-2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

Оглавление

Глава 1

Предел и непрерывность

Quidquid praecepies, esto brevis.
Чему бы ты ни учил, будь краток.

Заповедь Горация

§ 1 Элементы теории множеств

1 Логические символы и логические операции

В математических рассуждениях, при доказательствах теорем часто встречаются стандартные выражения «существует элемент», «любой элемент» и т.п.. Для компактной записи математических текстов, содержащих подобные выражения, используются особые логические символы (кванторы). Остановимся на некоторых из них.

1. $\Rightarrow$ — *символ следования*. Запись $\alpha \Rightarrow \beta$ читается так: «из утверждения α следует утверждение β» или так: «условие α достаточно для выполнения условия β».

2. $\Leftrightarrow$ — *символ эквивалентности*. Запись $\alpha \Leftrightarrow \beta$ читается так: «утверждение β имеет место тогда и только тогда, когда имеет место утверждение α» или так: «условие α необходимо и достаточно для выполнения условия β».

3. $\exists$ — *квантор существования*. Запись $\exists x\ :\ \alpha$ читается так: «существует по крайней мере один x, для которого имеет место утверждение α».

4. $\forall$ — *квантор общности*. Запись $\forall x\ :\ \alpha$ читается так: «для всех x имеет место утверждение α».

5. $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ и $\overset{def}{=}$ — обозначения, которые употребляется для того, чтобы отметить, что данное утверждение справедливо *по определению*. Запись $\alpha \overset{def}{\Leftrightarrow} \beta$ или $\alpha \overset{def}{=} \beta$ означает, что α по определению равно β.

Рассмотрим подробнее понятия *необходимо* и *достаточно*.

Определение 1. Говорят, что *условие P достаточно для условия Q*, если из выполнения условия P вытекает выполнение условия Q.

Пример 1. Если число оканчивается нулем (P), то оно четное (Q).

Определение 2. Говорят, что *условие P необходимо для условия Q*, если выполнение условия Q влечет за собой выполнение условия P.

Пример 2. Число делится на три (P), поскольку сумма цифр числа делится на 3 (Q).

Заметим, что если условие P достаточно для условия Q, то условие Q необходимо для условия P, а если условие P необходимо для условия Q, то условие Q достаточно для условия P.

Кроме того, остановимся на некоторых логических операциях.

1. $\vee$ — *дизъюнкция (логическое сложение)*. Выражение $\alpha \vee \beta$ читается: «α или β» и по определению истинно в том и только том случае, когда по крайней мере одно из высказываний α или β является истинным.

2. $\wedge$ — *конъюнкция (логическое умножение)*. Выражение $\alpha \wedge \beta$ читается: «α и β» и по определению истинно в том и только том случае, когда оба высказывания α и β истинны.

3. $\neg$ — *отрицание*. Выражение $\neg\alpha$ читается: «не α» и по определению истинно, если α ложно, и ложно, если α истинно.

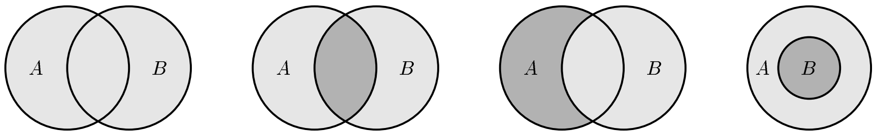
2 Понятие множества

Понятие *множества* в математике изначальное, неопределяемое. Интуитивно множество — это совокупность объектов любой природы, объединенных некоторым характерным свойством. Объекты, из которых составлено множество, называют его *элементами*. Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$, если элемент a не принадлежит множеству A, то пишут $a \notin A$. Итак, отметим, что $\in$ — знак включения для элементов множества.

Мы чаще всего будем рассматривать *числовые множества*, т.е. множества, элементами которых являются числа. Множества, содержащие конечное число элементов, называются *конечными*. Множества не являющиеся конечными, называются *бесконечными*. Конечное множество обычно задают, объединяя входящие в него элементы фигурной скобкой, например $A = \{1, 3, 5\}$ — множество содержащее числа 1, 2, 3. Множество не содержащее ни одного элемента называется *пустым множеством*, которое обозначается символом $\varnothing$.

Если некоторая величина x принимает значения из некоторого числового множества X, т.е. $x \in X$ так, что каждый элемент множества X является некоторым значением этой величины, то x называется *переменной*, изменяющейся на множестве X. Если множество X состоит из одного единственного элемента, то x называется *постоянной величиной* или *константой*. При этом пишут $x = \mathrm{const}$.

Определение 3. Множество B называется *подмножеством* множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A. При этом пишут $B \subset A$ (рис. 1 d)).



a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A \setminus B$ d) $B \subset A$

Рис. 1.

Тот факт, что множество B является подмножеством множества A, с помощью логических символов можно записать так

$$B \subset A \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \forall x \in B \quad \Rightarrow \quad x \in A\,.$$

Из определения подмножества следует, что $A \subset A$, каково бы ни было множество A. Кроме того, по определению считаем, что пустое множество $\varnothing$ является подмножеством любого множества A, т.е. $\varnothing \subset A$.

Определение 4. Два множества A и B называются *равными*, если они содержат одни и те же элементы, иначе

$$A = B \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad (\forall x \in B \Rightarrow x \in A) \wedge (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)\,.$$

Определение 5. *Объединением* или *суммой* $A \cup B$ двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B (рис. 1 a)). Иначе

$$x \in A \cup B \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad (x \in A) \vee (x \in B)\,.$$

Определение 6. *Пересечением* или *произведением* $A \cap B$ двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B (рис. 1 b)). Иначе

$$x \in A \cap B \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad (x \in A) \wedge (x \in B)\,.$$

Определение 7. *Разностью* $A \setminus B$ двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B (рис. 1 c)). То есть

$$x \in A \setminus B \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad (x \in A) \wedge (x \notin B)\,.$$

В том случае, если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называется *дополнением* множества B до множества A или *дополнением* B в A (рис. 1 d)).

Остановимся теперь на принятых обозначениях для числовых множеств и рассмотрим подробно некоторые из них.

Множество $\mathbb{N}$ — целых положительных чисел, называется множеством натуральных чисел

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}\,.$$

Множество всех целых чисел обычно обозначают $\mathbb{Z}$, т.е.

$$\mathbb{Z} = \{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots\}\,.$$

Множество чисел, которые можно представить в виде дроби $\pm m/n$, где $m,\ n \in \mathbb{N}$, а также число 0 образуют множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Если к множеству $\mathbb{Q}$ добавить множество всех иррациональных чисел, т.е. чисел, не представимых в виде $\pm m/n$, где $m, n \in \mathbb{N}$ (например, это числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π и т.д.), то получим множество всех вещественных или действительных чисел, которое обозначают буквой $\mathbb{R}$. И, наконец, буквой $\mathbb{C}$ обозначается множество комплексных чисел. Об этом множестве мы поговорим немного подробнее дальше.

Определение 8. Два множества A и B называются *эквивалентными*, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие. При этом пишут $A \sim B$.

Если A и B два эквивалентных между собой множества, то говорят, что они имеют одинаковую *мощность*, т.е. можно сказать, что мощность — это то общее, что есть у всех эквивалентных между собой множеств.

Понятие эквивалентности применимо к любым множествам, как конечным, так и бесконечным. Ясно, что два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они состоят из одинакового числа элементов. Таким образом, у конечных множеств понятие мощности совпадает просто с понятием числа элементов. Мощность множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ обозначается символом $\aleph_0$ (читается «алеф нуль»). Мощность множества всех действительных чисел между 0 и 1 обозначается символом $\mathcal{C}$.

Определение 9.

1) Множество A называется *счетным*, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел, т.е. $A \sim \mathbb{N}$.

2) Говорят, что множество A имеет *мощность континуума*, если оно эквивалентно множеству всех действительных чисел между 0 и 1, т.е. $A \sim (0,\ 1)$.

Как правило, все бесконечные множества, с которыми приходится встречаться в математическом анализе, или счетные, или имеют мощность континуума.

3 Вещественные числа (множество $\mathbb{R}$)

Рассмотрим множество вещественных (действительных чисел) $\mathbb{R}$. Очевидно, что множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ являются его подмножествами. Вещественные числа изображаются точками на числовой оси. В свою очередь каждой точке на числовой оси соответствует некоторое вещественное число. Такое взаимно-однозначное соответствие между вещественными числами и точками на числовой оси позволяет в дальнейшем любое вещественное число называть точкой. Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ дополняется элементами, обозначенными $-\infty$ и $+\infty$, которые называются соответственно *минус бесконечностью* и *плюс бесконечностью*, причем, по определению считаем, что $-\infty < +\infty$, а также для любого числа $a \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства $-\infty < a < +\infty$. Бесконечности $-\infty$ и $+\infty$ иногда называют бесконечными числами. Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$, дополненное элементами $-\infty$ и $+\infty$, называется *расширенным множеством вещественных чисел* или *расширенной числовой прямой* и обозначается $\overline{\mathbb{R}}$. Элементы $-\infty$ и $+\infty$ называются *бесконечно удаленными точками* расширенной числовой прямой.

Напомним теперь важное для нас определение абсолютной величины вещественного числа, или его модуля, и рассмотрим его свойства.

Определение 10. *Абсолютной величиной* числа a, или его *модулем*, называется неотрицательное число, которое обозначается $|a|$ и определяется так

$$|a| = \begin{cases} a & \text{если} \quad a \geqslant 0 \\ -a & \text{если} \quad a < 0\,. \end{cases}$$

Заметим, что в силу сделанного определения $|a|$ можно записать так $|a| = a \cdot \operatorname{sign}(a)$, где

$$\operatorname{sign}(a) = \begin{cases} +1 & \text{если} \quad a > 0 \\ 0 & \text{если} \quad a = 0 \\ -1 & \text{если} \quad a < 0\,. \end{cases}$$

С точки зрения геометрии, $|a|$ равно расстоянию от точки, изображающей число a, до начала координат.

Свойства абсолютных величин

1. Для любого числа a выполняются неравенства

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|\,. \qquad (1)$$

Действительно, в силу определения, если $a \geqslant 0$, то $-|a| \leqslant a = |a|$, а если $a < 0$, то $-|a| = a \leqslant |a|$. Объединив эти неравенства, получим (1).

2. Для чисел a и d эквивалентны следующие неравенства

$$|a| \leqslant d \quad \Leftrightarrow \quad -d \leqslant a \leqslant d\,. \qquad (2)$$

Действительно, в силу свойства (1) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$, но $|a| \leqslant d \Leftrightarrow -d \leqslant -|a|$. Итак, $-d \leqslant -|a| \leqslant a \leqslant |a| \leqslant d$ т.е. выполнено (2).

3. Для любых двух чисел a и b выполняется *неравенство треугольника*

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|\,.$$

Для доказательства снова воспользуемся свойством (1), из которого следует, что $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$, $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$. Неравенства одного знака можно почленно складывать, следовательно

$$-\left(|a| + |b|\right) \leqslant a + b \leqslant \left(|a| + |b|\right)\,.$$

И неравенство треугольника следует отсюда, в силу свойства (2).

4. Для любых двух чисел a и b выполняется неравенство

$$|a| - |b| \leqslant |a - b|\,.$$

Для доказательства обозначим $a - b = c \;\Rightarrow\; a = b + c$, но $|b + c| \leqslant |b| + |c|$ $\Rightarrow |a| \leqslant |b| + |a - b| \Rightarrow |a - b| \geqslant |a| - |b|$.

5. Для чисел a и b выполнены очевидные равенства

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|\,, \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}\,, \quad (b \neq 0)\,.$$

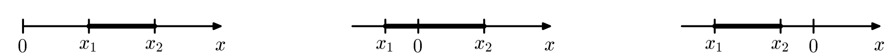


Рис. 2.

Отметим в заключение, что при любом расположении точек x_1 и x_2 на числовой прямой $|x_1 - x_2|$ или $|x_2 - x_1|$ дает расстояние между точками x_1 и x_2. В этом нетрудно убедиться, если принять во внимание определение модуля вещественного числа (рис. 2).

Промежутки вещественных чисел. Окрестности

Рассмотрим некоторые основные подмножества множества вещественных чисел, которые нам будут часто встречаться в дальнейшем.

Пусть a, $b \in \mathbb{R}$. Введем следующие обозначения для перечисленных ниже множеств

$$
\begin{aligned}
[a,\,b] &= \{x\in\mathbb{R}:\ a\leqslant x\leqslant b\} && \text{— отрезок}\\
(a,\,b) &= \{x\in\mathbb{R}:\ a< x< b\} && \text{— интервал}\\
[a,\,b) &= \{x\in\mathbb{R}:\ a\leqslant x< b\} && \text{— полуинтервал}\\
(a,\,b] &= \{x\in\mathbb{R}:\ a< x\leqslant b\} && \text{— полуинтервал}\,.
\end{aligned}
$$

Определение 11. Отрезки, интервалы и полуинтервалы называются *числовыми промежутками* или просто *промежутками*.

Определение 12. Множества

$$
\begin{aligned}
[a,\,+\infty) &= \{x\in\mathbb{R}:\ a\leqslant x\}\,, & (a,\,+\infty) &= \{x\in\mathbb{R}:\ a< x\}\,,\\
(-\infty,\,b] &= \{x\in\mathbb{R}:\ x\leqslant b\}\,, & (-\infty,\,b) &= \{x\in\mathbb{R}:\ x< b\}\,,\\
[-\infty,\,+\infty] &= \overline{\mathbb{R}}\,, & (-\infty,\,+\infty) &= \mathbb{R}\,.
\end{aligned}
$$

называются *неограниченными промежутками*.

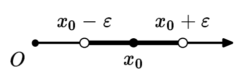


Рис. 3.

Определение 13. Интервал, содержащий точку $x_0\in\mathbb{R}$, будем называть *окрестностью* этой точки. В частности, при $\varepsilon>0$ интервал

$$U(x_0,\,\varepsilon)\overset{def}{=}(x_0-\varepsilon,\,x_0+\varepsilon)$$

называется ε-*окрестностью* точки x_0 (рис. 3).

Определение 14. Пусть $\varepsilon>0$, тогда ε-*окрестности несобственных точек* $+\infty,\,-\infty,\,\infty$ определяются следующим образом

$$U(+\infty,\,\varepsilon)\overset{def}{=}\left(\frac{1}{\varepsilon},\,+\infty\right)\,,\quad U(-\infty,\,\varepsilon)\overset{def}{=}\left(-\infty,\,-\frac{1}{\varepsilon}\right)\,,$$

$$U(\infty,\,\varepsilon)\overset{def}{=}U(-\infty,\,\varepsilon)\cup U(+\infty,\,\varepsilon)\,.$$

Рассмотрим теперь некоторое подмножество множества вещественных чисел $X\subset\mathbb{R}$.

Определение 15.

1) Точка $x\in X$ называется *внутренней точкой множества* X, если она принадлежит этому множеству вместе с некоторой своей окрестностью.

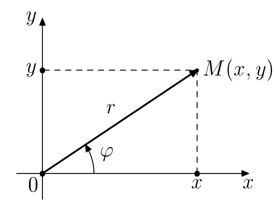


Рис. 4.

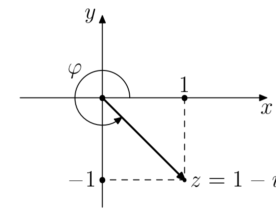


Рис. 5.

2) Точка x называется *граничной точкой множества* X, если любая окрестность этой точки содержит как точки, принадлежащие множеству X, так и точки, ему не принадлежащие.

Определение 16. Если для подмножества X существует такое число b, что оно не меньше любого числа $x\in X$, т.е. для любого $x\in X$ имеем $x\leqslant b$, то множество X называется *ограниченным сверху*, а число b — числом, ограничивающим множество X сверху.

Аналогично определяется подмножество чисел, ограниченное снизу.

Например, рассмотрим множество $X=U(x_0,\varepsilon)=(x_0-\varepsilon,\,x_0+\varepsilon)$. Это множество имеет две граничные точки $x_1=x_0-\varepsilon$ и $x_2=x_0+\varepsilon$. Любая окрестность этих точек содержит как точки, принадлежащие интервалу $(x_0-\varepsilon,\,x_0+\varepsilon)$, так и точки, ему не принадлежащие. Заметим, что каждая из граничных точек x_1 и x_2 множеству X не принадлежит. Очевидно также, что множество X ограничено как сверху, так и снизу (рис. 3).

Среди всех чисел, ограничивающих сверху (снизу) данное множество, наименьшее (наибольшее) из них имеет специальное название.

Определение 17.

1) Наименьшее из всех чисел, ограничивающих сверху множество $X\subset\mathbb{R}$, называется его *верхней гранью* и обозначается $\sup X$ (sup — от латинского supremum — наибольший).

2) Наибольшее из всех чисел, ограничивающих снизу множество $X\subset\mathbb{R}$, называется его нижней гранью и обозначается $\inf X$ (inf — от латинского infimum — наименьший).

4 Комплексные числа (множество $\mathbb{C}$)

Определение 18. *Комплексным числом* z называется выражение вида $z=x+iy$, где x, y — вещественные числа, а i — так называемая мнимая единица, причем по определению полагают $i^2=-1$.

Число x называется *вещественной частью* комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Re} z$, т. е. $\operatorname{Re} z = x$. Число y называется *мнимой частью* комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Im} z$, т. е. $\operatorname{Im} z = y$.

Множество всех комплексных чисел обозначается через $\mathbb{C}$. Если мнимая часть комплексного числа равна нулю, т. е. $y = 0$, то мы имеем $z = x$ — вещественное число. Отсюда нетрудно сделать вывод, что $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, т.е. множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ является подмножеством множества комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Комплексное число $z = x + iy$ на координатной плоскости Oxy изображается точкой $M(x, y)$ с координатами x, y. Координатная плоскость Oxy называется *комплексной плоскостью*, ось Ox — *вещественной осью*, ось Oy — *мнимой осью*. Модуль радиус-вектора $\mathbf{r}$, проведенного из начала координат в точку $M(x, y)$, называется *модулем комплексного числа* z и обозначается r или $|z|$. Ясно (см. рис. 4), что

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Комплексное число z можно интерпретировать не только как точку $M(x, y)$, но и как вектор $\mathbf{r} = (x, y)$. Поэтому иногда комплексное число z называют вектором, подразумевая, что этот вектор имеет координаты x и y.

Угол, отсчитываемый от вещественной оси Ox до радиус-вектора $\mathbf{r}$ против часовой стрелки, называется *аргументом комплексного числа* z и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Очевидно, что $\operatorname{Arg} z$ имеет бесчисленное множество значений. Угол $\varphi = \arg z$, удовлетворяющий неравенству $0 \leqslant \arg z < 2\pi$, называется *главным значением аргумента*. Ясно, что $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. В дальнейшем мы под аргументом комплексного числа будем понимать его главное значение. Из рис. 4 ясно, что

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}\,.$$

Отсюда следует, что комплексное число $z = x + iy$ можно записать в виде

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\,.$$

Эта форма записи называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа, в то время как $z = x + iy$ называется его *алгебраической формой*.

Пример 3. Комплексное число $z = 1 - i$ изобразить на комплексной плоскости и записать в тригонометрической форме (рис. 5).

Решение. Ясно, что $r = \sqrt{2}$, $\varphi = 7\pi/4$. Следовательно,

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi k\right)\right)\,, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

— тригонометрическая форма данного комплексного числа.

Пример 4. Изобразить на комплексной плоскости множество чисел, удовлетворяющее неравенству $\operatorname{Im} z > 0$.

Решение. Поскольку $\operatorname{Im} z = y$, то неравенству $y > 0$ соответствует множество точек, лежащих в верхней полуплоскости (рис. 6).

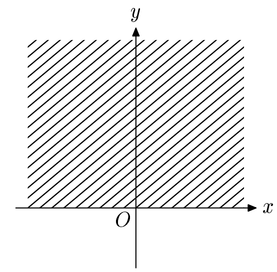


Рис. 6.

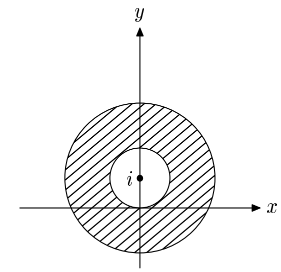


Рис. 7.

Пример 5. Изобразить на комплексной плоскости множество чисел, удовлетворяющих неравенствам $1 < |z - i| < 2$.

Решение. Найдем

$$|z - i| = |x + iy - i| = |x + i(y - 1)| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}\,.$$

Исходное неравенство эквивалентно такой системе неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + (y - 1)^2 < 2^2 \\ x^2 + (y - 1)^2 > 1^2\,. \end{array}\right.$$

Очевидно, что такой системе неравенств удовлетворяют точки, лежащие внутри кольца, ограниченного окружностями $x^2 + (y-1)^2 = 4$ и $x^2 + (y-1)^2 = 1$ (рис. 7).

5 Действия над комплексными числами

1) Равенство. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются равными, если равны их вещественные и мнимые части, т. е.

$$z_1 = z_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 = x_2\,, \quad y_1 = y_2\,.$$

Пример 6. Найти x и y из уравнения $x + iy = 2$.

Решение. Имеем $x + iy = 2 + i0$. Приравнивая вещественные и мнимые части, получим: $x = 2$, $y = 0$.

2) Сложение. Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$z_3 = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)\,,$$

т. е. при сложении комплексных чисел складываются соответственно их вещественные и мнимые части.

3) Вычитание. Вычитание определяется как действие, обратное сложению, т. е. $z_3 = z_1 - z_2$, если $z_1 = z_2 + z_3$. Итак, если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то $x_1 = x_2 + x_3$, $y_1 = y_2 + y_3$, откуда следует, что $x_3 = x_1 - x_2$, $y_3 = y_1 - y_2$, т. е.

$$z_3 = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)\,.$$

4) Умножение. Произведением двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)\,.$$

Выполнить умножение комплексных чисел можно, записав их предварительно в тригонометрической форме. Пусть

$$z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\,, \qquad z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)\,,$$

тогда

$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)\,.$$

Таким образом, очевидно, что при умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Забегая вперед, отметим, что комплексное число z можно записать в так называемой *показательной форме*, т.е. представить в виде $z = re^{i\varphi}$, тогда очевидно, что

$$z_1 \cdot z_2 = r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}\,,$$

что совпадает с полученным выше результатом.

5) Степень комплексного числа. По определению, если $n \in \mathbb{N}$, то

$$z^n = z \cdot z \cdot z \ldots \cdot z \quad (n \text{ сомножителей})\,.$$

Применив метод математической индукции, нетрудно доказать *формулу Муавра*

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)\,.$$

Пример 7. Найти выражение для $\sin 3\varphi$ и $\cos 3\varphi$, пользуясь формулой Муавра.

Решение. Очевидно, что

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi\,,$$

с другой стороны

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi\,.$$

Приравнивая вещественные и мнимые части найденных выражений, получим

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi\,, \qquad \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\,.$$

Отметим далее, что $i^2 = -1$. Поэтому легко вычислить любую степень комплексной единицы. Например, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$, $i^{28} = \left(i^2\right)^{14} = 1$, $i^{35} = \left(i^2\right)^{17} \cdot i = -i$.

6) Комплексное сопряжение.

Рассмотрим наряду с комплексным числом $z = x + iy$ комплексное число $\overline{z} = x - iy$, которое называется *сопряженным комплексным числом* по отношению к z. Ясно, что

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}\,, \quad z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{z \cdot \overline{z}}\,.$$

На комплексной плоскости сопряженные комплексные числа z и $\overline{z}$ располагаются симметрично относительно вещественной оси Ox (рис. 8).

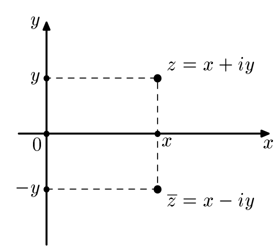


Рис. 8.

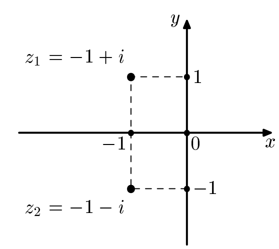


Рис. 9.

Пример 8. Найти корни квадратного уравнения $z^2 + 2z + 2 = 0$ и построить их на комплексной плоскости.

Решение. Корни данного квадратного уравнения

$$z_1 = -1 + \sqrt{-1} = -1 + i\,, \qquad z_2 = -1 - \sqrt{-1} = -1 - i$$

представляют собою два комплексных сопряженных числа, расположенных симметрично относительно вещественной оси Ox (рис. 9).

7) Деление. Деление двух комплексных чисел определяется как действие обратное умножению, а именно: $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = z_3 \cdot z_2$. Очевидно

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2}\,,$$

т. е. для нахождения частного $\dfrac{z_1}{z_2}$ следует числитель и знаменатель умножить на комплексное число, сопряженное знаменателю.

В показательной форме

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}\,,$$

т. е. при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Пример 9. Вычислить $\dfrac{1+i}{1-2i}$.

Решение.

$$\frac{1+i}{1-2i} = \frac{(1+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-1+3i}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5} i\,.$$

Пример 10. Вычислить $\dfrac{(1+i)^5 \cdot i^{15}}{\overline{1-i}}$.

Решение. Вычислим $(1+i)^5$. Для этого перейдем к тригонометрической форме комплексного числа $1+i$, тогда получим

$$(1+i)^5 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^5 = 2^{5/2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -4(1+i)\,.$$

Итак

$$\frac{(1+i)^5 \cdot i^{15}}{\overline{1-i}} = \frac{-4(1+i)\left(i^2\right)^7 i}{1+i} = 4i\,.$$

8) Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа. Извлечение корня n-ой степени определяется как действие, обратное возведению в n-ую степень

$$w = \sqrt[n]{z} \qquad \Leftrightarrow \qquad w^n = z\,.$$

Комплексное число $z \neq 0$, можно записать в тригонометрической форме

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.$$

Найдем w. Будем искать w в тригонометрической форме

$$w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)\,.$$

Тогда

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.$$

Отсюда

$$\rho = \sqrt[n]{r}\,, \qquad n\psi = \varphi + 2\pi k\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Таким образом,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

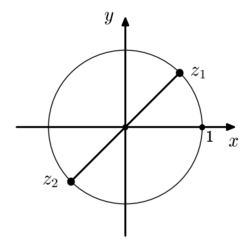


Рис. 10.

Положив $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, мы получим n различных значений корня n-ой степени из комплексного числа, аргументы которых вычисляются по формулам $\psi_k = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$. Модуль каждого значения корня равен $\sqrt[n]{r}$. Таким образом, очевидно, что все значения корня лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$.

Пример 11. Вычислить все значения $\sqrt{i}$ и изобразить их на комплексной плоскости.

Решение.

$$\sqrt{i} = \cos\frac{\pi/2 + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi/2+2\pi k}{2}\,, \qquad k = 0, 1\,.$$

Значения корня (рис. 10)

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\,, \qquad z_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\,.$$

§ 2 Функция

1 Определение функции

Рассмотрим два непустых множества X и Y (не обязательно числовых).

Определение 1. Если в силу некоторого правила f каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана *функция* f и при этом пишут $f : X \to Y$.

В том случае, если множества X и Y являются подмножествами множества вещественных чисел, т. е. $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$, то функция f называется *числовой* и при этом принята такая форма записи $y = f(x)$ или $y = y(x)$, где x — аргумент, y — значение функции. Множество X в этом случае называют *множеством определения* функции, а множество соответствующих значений $\{f(X)\}$ — *множеством значений* функции. Значение функции в точке x_0 обозначается $f(x_0)$. Если $f(x) = \text{const}$ для любого $x \in X$, то функция $f(x)$ называется *постоянной* на множестве X и при этом пишут: $f(x) = \text{const}$ или $y = c$.

2 Способы задания функции

Аналитический способ задания

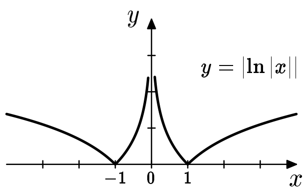


Рис. 11.

Числовые функции могут задаваться формулами на различных промежутках или интервалах, принадлежащих множеству определения функции. Такой способ задания называется *аналитическим*. При этом могут встретиться следующие ситуации:

1) Если функция такова, что ее удается выразить в виде $y = f(x)$, то говорят о *явном аналитическом* способе задания.

Например, функция $y = |\ln|x||$ определена на множестве $(-\infty,\, 0) \cup (0,\, +\infty)$ (рис. 11). Множество ее значений $0 \leqslant y < +\infty$.

2) В том случае, если не удается явно выразить y через x, а удается только указать зависимость между значением функции и аргументом в виде $F(x, y) = 0$, то такой способ задания функции называется *неявным аналитическим*.

Например, рассмотрим функцию $x - y - 5 = 0$. Здесь y как функция x связан с ним неявной аналитической зависимостью, правда, в данном случае нетрудно перейти к явному аналитическому способу задания, выразив из этого уравнения y: $y = x - 5$. Но на практике чаще всего

встречаются функции, не допускающие такого перехода. О неявных функциях будем говорить подробнее дальше.

3) Иногда при аналитическом способе задания функции бывает удобно ввести в рассмотрение промежуточный аргумент t (так называемый параметр) и выразить x и y как функции этого промежуточного аргумента, изменяющегося на некотором числовом подмножестве $T \subset \mathbb{R}$.

Например, если материальная точка перемещается в плоскости декартовой системы координат Oxy, то, взяв в качестве параметра время t, указывают закон движения в виде

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [t_1,\, t_2]\,.$$

Исключив параметр t, можно перейти к явному или неявному аналитическому способу задания рассматриваемой функции.

Пример 1. Нарисовать график функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \qquad t \in [0, +\infty)\,.$$

Решение. Примем во внимание, что $\cos t$ — 2π-периодическая функция. Следовательно, после того, как параметр t, пробежав полный период $[0,\, 2\pi]$, продолжает расти, значения y будут повторяться. Составим таблицу

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
x	0	0,02	0,08	0,18	0,57	1,65	3,14	4,63	5,71	6,2	6,28
y	0	0,15	0,3	0,5	1,0	1,7	2,0	1,7	1,0	0,3	0

Теперь остается только построить кривую, которая называется *циклоидой* и представляет собой траекторию точки, закрепленной на катящейся окружности и находящейся в начальный момент времени $t = 0$ в начале координат при условии, что окружность катится по прямой линии без скольжения (рис. 12).

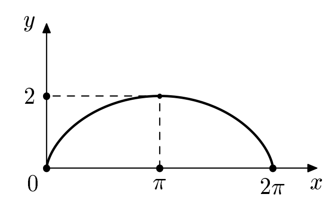


Рис. 12.

Табличный способ

Иногда некоторому множеству значений аргумента из множества определения функции удается поставить в соответствие множество значений функции с помощью каких-либо измерений, тогда результаты этих измерений можно свести в таблицу. В этом случае говорят о табличном способе задания функции. По этой таблице можно построить график функции или попытаться представить эту функцию аналитически.

Графический способ

Функция задается в виде графика, построенного в некоторой системе координат. Анализируя особенности этого графика, делают выводы о свойствах функции.

3 Классификация функций

Явные алгебраические функции — это такие функции, которые получаются в результате конечного числа алгебраических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возвышение в степень с рациональным показателем) над аргументом x и постоянными. К явным алгебраическим функциям относятся целая рациональная функция (алгебраический многочлен), дробная рациональная функция, т. е.

$$y=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}\,,\qquad a_i\,,b_j\in\mathbb{R}\,,\quad m\,,n\in\mathbb{Q}\,.$$

и иррациональная функция, т. е. явная алгебраическая функция, содержащая операции извлечения корня, например

$$y=\frac{1+x}{\sqrt[3]{x+2}}\,.$$

Трансцендентной функцией называется всякая явная аналитическая функция, не являющаяся алгебраической: x^a ($x>0$, a – иррациональное число), $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$), $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg}x$, $y=\operatorname{ctg}x$, $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg}x$, $y=\operatorname{arcctg}x$.

Все явные алгебраические функции, простейшие трансцендентные и, кроме того, функции, которые получаются из них с помощью четырех арифметических действий (сложение, вычитание, умножение и деление), а также с помощью операции взятия функции от функции, примененной конечное число раз, называются *элементарными функциями*.

Функции, которые нельзя задать в виде единого и конечного аналитического выражения, называются *неэлементарными*. Например, функция

$$y=|x|=\begin{cases}\ \ x\,, & x\geqslant 0\\ -x\,, & x<0\,.\end{cases}$$

не является элементарной.

4 Свойства рациональных функций

Основные элементарные функции и их свойства известны из курса средней школы. Рассмотрим подробнее свойства рациональных функций, которыми мы в дальнейшем будем широко пользоваться. Итак, возьмем многочлен степени n

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\,,\qquad a_i\in\mathbb{R}\,,\quad a_n\neq 0\,,\quad n\in\mathbb{N}\,.$$

Теорема 1 (основная теорема алгебры). *Всякий многочлен степени $n\geqslant 1$ имеет хотя бы один корень — вещественный или комплексный.*

(Без доказательства).

Теорема 2 (Безу). *При делении многочлена $P_n(x)$ ($n\geqslant 1$) на разность $(x-c)$, где c — произвольное число (вещественное или комплексное), получается остаток, равный значению многочлена, которое он имеет при $x=c$, т. е. любой многочлен может быть представлен в виде*

$$P_n(x)=(x-c)Q_{n-1}(x)+P_n(c)\,,$$

где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $(n-1)$.

Доказательство. При делении многочлена на разность $(x-c)$ мы получаем частное $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $(n-1)$ и остаток R, т. е.

$$\frac{P_n(x)}{x-c}=Q_{n-1}(x)+\frac{R}{x-c}\quad\Rightarrow\quad P_n(x)=(x-c)Q_{n-1}(x)+R\,.$$

Положим в последнем равенстве $x=c$, получим $R=P_n(c)$. ■

Следствие 1. *Для того, чтобы многочлен $P_n(x)$ делился без остатка на разность $(x-c)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $P_n(c)=0$.*

Следствие 2. *Если в разложении многочлена $P_n(x)$ с вещественными коэффициентами комплексное число $a+ib$ является корнем кратности k, то и сопряженное комплексное число $a-ib$ является корнем той же кратности.*

Объединим множители, соответствующие попарно сопряженным комплексным корням

$$(x-(a+ib))\cdot(x-(a-ib))=x^2+px+q\,,$$

где $p=-2a$, $q=a^2+b^2$ — вещественные числа.

Итак, всякий многочлен степени n с вещественными коэффициентами может быть представлен в виде произведения вещественных линейных и квадратичных множителей вида

$$P_n(x)=a_n(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\cdots(x-c_r)^{k_r}\cdot$$
$$\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{l_2}\cdots\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}\,,$$

причем $k_1+k_2+\ldots+k_r+2(l_1+l_2+\ldots+l_s)=n$.

Пример 2. Многочлен x^4-1 разложить на множители с вещественными коэффициентами.

Решение. Многочлен x^4-1 представляет собою разность квадратов, следовательно

$$x^4-1=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)\,.$$

В свою очередь $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Окончательно имеем

$$x^4-1=(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\,.$$

Пример 3. Многочлен x^4-x^3-x+1 разложить на множители с вещественными коэффициентами.

Решение. Очевидно, что

$$x^4-x^3-x+1=x^3(x-1)-(x-1)=(x-1)\left(x^3-1\right)=(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)\,.$$

Пример 4. Многочлен $x^5-5x^4+12x^3-24x^2+32x-16$ разложить на множители с вещественными коэффициентами.

Решение. Нетрудно заметить, что при $x=1$ данный многочлен обращается в ноль. Следовательно, он без остатка делится на разность $(x-1)$. Выполним это деление

$$\begin{array}{l|l}
x^5-5x^4+12x^3-24x^2+32x-16 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^5-x^4} & x^4-4x^3+8x^2-16x+16 \\
\quad -4x^4+12x^3 & \\
\quad \underline{-4x^4+4x^3} & \\
\qquad\quad 8x^3-24x^2 & \\
\qquad\quad \underline{8x^3-8x^2} & \\
\qquad\qquad -16x^2+32x & \\
\qquad\qquad \underline{-16x^2+16x} & \\
\qquad\qquad\qquad 16x-16 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{16x-16} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Таким образом

$$x^5-5x^4+12x^3-24x^2+32x-16=(x-1)\left(x^4-4x^3+8x^2-16x+16\right)\,.$$

Далее, обратим внимание на то, что многочлен $x^4-4x^3+8x^2-16x+16$ обращается в ноль при $x=2$, следовательно, он делится на разность $(x-2)$

$$\begin{array}{l|l}
x^4-4x^3+8x^2-16x+16 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4-2x^3} & x^3-2x^2+4x-8 \\
\quad -2x^3+8x^2 & \\
\quad \underline{-2x^3+4x^2} & \\
\qquad\quad 4x^2-16x & \\
\qquad\quad \underline{4x^2-8x} & \\
\qquad\qquad -8x+16 & \\
\qquad\qquad \underline{-8x+16} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

В свою очередь получившийся многочлен x^3-2x^2+4x-8 также делится на $(x-2)$, т. е. $x=2$ является корнем кратности 2 для исходного многочлена. Действительно

$$\begin{array}{l|l}
x^3-2x^2+4x-8 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-2x^2} & x^2+4 \\
\qquad 4x-8 & \\
\qquad \underline{4x-8} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Окончательно имеем

$$x^5-5x^4+12x^3-24x^2+32x-16=(x-1)(x-2)^2\left(x^2+4\right)\,.$$

§ 3 Предел функции. Единственность предела

1 Определение предела функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0\in\mathbb{R}$, т.е. x_0 — некоторое конечное число. Нас будет интересовать вопрос, как ведет себя функция по мере приближения x к точке x_0.

Определение 1 (предела функции по Коши)**.** Говорят, что число A является *пределом функции $y=f(x)$ в точке x_0*, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех x из области определения функции, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, $(x\neq x_0)$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

При этом пишут

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\qquad\text{или}\qquad f(x)\to A\quad\text{при}\quad x\to x_0\,.$$

Замечание. Заметим, что δ-окрестность $U(x_0,\delta)$ точки x_0, из которой удалена точка x_0, называется проколотой δ-окрестностью точки x_0; она обозначается $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$, т.е.

$$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)=U(x_0,\delta)\diagdown\{x_0\}\,.$$

Тогда с помощью логических символов сформулированное определение можно записать так

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\quad\overset{def}{\Leftrightarrow}\quad\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\quad\forall x\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta):\quad|f(x)-A|<\varepsilon\,.$$

В том случае, когда $A=+\infty$, x_0 — конечное число, определение предела функции $y=f(x)$ в точке x_0 можно записать следующим образом.

Определение 2. Говорят, что $+\infty$ является *пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, $(x \neq x_0)$ выполняется неравенство $f(x) > 1/\varepsilon$.

При этом пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad \text{или} \qquad f(x) \to +\infty \quad \text{при} \quad x \to x_0 .$$

Или с помощью логических символов

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta) : \quad f(x) > \frac{1}{\varepsilon} .$$

Если теперь рассмотреть случай, когда A — конечное число, $x_0 = +\infty$, то определение предела функции $y = f(x)$ в точке x_0 выглядит так

Определение 3. Говорят, что число A является *пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* $x_0 = +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x > 1/\delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

При этом пишут

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \qquad \text{или} \qquad f(x) \to A \quad \text{при} \quad x \to +\infty .$$

Очевидно, что аналогичные определения можно сформулировать, если A — конечное число, а x_0 — одна из бесконечностей; или x_0 — конечное число, а A — бесконечное.

Отметим, что если A — конечное число, то предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ называется *конечным*, если же A — одна из бесконечностей, то предел называется *бесконечным или несобственным*.

В заключение отметим, что из определения предела следует $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, а также $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$, где C — константа.

2 Односторонние пределы функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Наложим ограничения на способ приближения аргумента функции x к точке x_0, а именно: будем рассматривать случаи, когда x приближается к x_0, оставаясь больше x_0, т.е. $x > x_0$, тогда говорят, что x приближается к точке x_0 справа; если x приближается к x_0, оставаясь меньше x_0, т.е. $x < x_0$, тогда говорят, что x приближается к точке x_0 слева.

Определение 4 (правостороннего предела)**.** Говорят, что число A является *правосторонним пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0 < x < x_0 + \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Правосторонний предел обозначают через $f(x_0 + 0)$ и при этом пишут

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) .$$

Определение 5 (левостороннего предела)**.** Говорят, что число A является *левосторонним пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0 - \delta < x < x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Левосторонний предел обозначают через $f(x_0 - 0)$ и при этом пишут

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) .$$

Можно доказать, что если в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ у функции $y = f(x)$ существует конечный предел, то в этой же точке существуют и равные между собою односторонние пределы этой функции и наоборот, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A .$$

3 Единственность конечного предела

Выше мы рассмотрели различные определения предела функции. Возникает вопрос: всегда ли существует предел у данной функции $y = f(x)$, а если существует, то единственный ли он?

Теорема 1 (о единственности конечного предела)**.** *Если в точке* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *данная функция* $y = f(x)$ *имеет конечный предел, то он единственный.*

Доказательство. Допустим, что в данной точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ существуют два различных предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A_2$ $(A_1 \neq A_2)$.

Это означает, что $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta_1) : \quad |f(x) - A_1| < \frac{\varepsilon}{2} , \tag{1}$$

$$\exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta_2) : \quad |f(x) - A_2| < \frac{\varepsilon}{2} . \tag{2}$$

Очевидно, что утверждения (1) и (2) тем более будут иметь место, если заменить в них δ_1 и δ_2 на $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, а тогда оказывается, что

$$\forall \varepsilon \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta) : \quad |A_2 - A_1| \leqslant |A_2 - f(x)| + |A_1 - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

С другой стороны, число ε выбирается произвольно и мы можем взять его, удовлетворяющим неравенствам $0 < \varepsilon < |A_2 - A_1|$. Полученное противоречие и доказывает теорему. ∎

§ 4 Существование предела. Первый замечательный предел

1 Достаточный признак существования конечного предела

Теорема 1. *Если функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x)$ определены в $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$, причем, в этой окрестности выполняются неравенства $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ и, кроме того, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \psi(x) = A$, то и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.*

Доказательство. По условию теоремы $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \psi(x) = A$. В силу определения предела это означает, что $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta_1) : \quad A-\varepsilon < \varphi(x) < A+\varepsilon\,, \tag{1}$$

$$\exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta_2) : \quad A-\varepsilon < \psi(x) < A+\varepsilon\,. \tag{2}$$

Утверждения (1) и (2) тем более будут иметь место, если заменить в них δ_1 и δ_2 на $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$. Тогда

$$A-\varepsilon < \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x) < A+\varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon\,,$$

а это и означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. ■

2 Первый замечательный предел

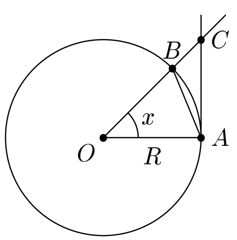


Рис. 13.

Допустим, что x — некоторый острый угол (рис. 13). Пусть $S_{\triangle OAB}$, $S_{\triangle OAC}$ — площади треугольников OAB, OAC и $S_{\sphericalangle OAB}$ — площадь сектора OAB. Из рисунка ясно, что

$$S_{\triangle OAB} < S_{\sphericalangle OAB} < S_{\triangle OAC}\,,$$

то есть

$$\frac{1}{2}R^2\sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2\operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad \sin x < x < \operatorname{tg} x\,.$$

Мы предположили, что x — острый угол, значит, $\sin x > 0$, а тогда имеем

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \qquad \Rightarrow \qquad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1\,.$$

Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. В силу определения предела для $\forall \varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, а именно такое $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$, что если положить $|x| < \sqrt{2\varepsilon}$, то тогда

$$|1-\cos x| = 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{2} < \varepsilon\,,$$

а это и означает, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

Следовательно, можно сделать вывод, что в силу доказанной выше теоремы

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Допустим теперь, что $x < 0$ и найдем $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{\sin x}{x}$. Положим $x = -y$, тогда $\sin x = \sin(-y) = -\sin y$. Имеем

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{y\to+0}\frac{-\sin y}{-y} = \lim_{y\to+0}\frac{\sin y}{y} = 1\,.$$

Итак, окончательно получим предел, который называется *первым замечательным пределом*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\,. \tag{3}$$

Отметим, что выражение $\varphi(x)/\psi(x)$, в котором $\varphi(x)\to 0$, $\psi(x)\to 0$ при $x\to x_0$, называется неопределенностью вида $\dfrac{0}{0}$. Очевидно, что рассмотренный выше первый замечательный предел (3) в точке $x_0 = 0$ представляет собою неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Нахождение предела этого выражения называется раскрытием этой неопределенности.

Совершенно аналогично можно ввести в рассмотрение неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ и т. д.

3 Существование предела у монотонной функции

Остановимся еще на одном признаке существования предела у так называемых монотонных функций. Предварительно дадим следующие важные определения.

Определение 1.

1) Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной снизу* на множестве X, если существует такое число $m \in \mathbb{R}$, что $\forall x \in X \,:\, m \leqslant f(x)$.

2) Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху* на множестве X, если существует такое число $M \in \mathbb{R}$, что $\forall x \in X \,:\, f(x) \leqslant M$.

3) Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на множестве X, если существуют такие числа m, $M \in \mathbb{R}$, что $\forall x \in X \,:\, m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Определение 2.

1) Функция $y = f(x)$ называется *неубывающей* на промежутке X (конечном или бесконечном), если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ справедливо условие $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Если $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется *строго возрастающей*.

2) Функция $y = f(x)$ называется *невозрастающей* на промежутке X (конечном или бесконечном), если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ справедливо условие $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geqslant f(x_1)$. Если $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$, то $f(x)$ называется *строго убывающей*.

3) Функции невозрастающие, строго убывающие, неубывающие и строго возрастающие называются *монотонными* на промежутке X.

Теорема 2. *Если функция $y = f(x)$ монотонна и ограничена в $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$, то тогда существуют конечные левосторонний и правосторонний пределы функции $y = f(x)$ в точке x_0.*

(Без доказательства).

Теорема 3. *Если функция $y = f(x)$ не убывает (не возрастает) на бесконечном промежутке X и ограничена сверху (снизу), то она имеет конечный предел.*

(Без доказательства).

§ 5 Предел последовательности. Второй замечательный предел

1 Предел последовательности

Рассмотрим бесконечную числовую *последовательность* a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Например, это может быть арифметическая или геометрическая прогрессия, или, скажем, последовательности

$$a_n = \frac{1}{n}\,, \quad \text{и} \quad b_n = (-1)^n\,,$$

которые принимают значения

$$1\,, \frac{1}{2}\,, \frac{1}{3}\,, \ldots\,, \frac{1}{n}\,, \ldots\,, \quad \text{и} \quad -1\,, 1\,, -1\,, \ldots\,, (-1)^n\,, \ldots\,.$$

Последовательность считается заданной, если указано правило, по которому вычисляется значение его общего члена a_n по его порядковому номеру n.

Очевидно, что на a_n можно смотреть как на функцию его порядкового номера, т. е. $a_n = f(n)$. Иногда последовательность называют *вариантой*.

Определение 1. Говорят, что число A является *пределом последовательности (варианты)* a_n, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех n, для которых имеет место неравенство $n > N(\varepsilon)$, следует $|A - a_n| < \varepsilon$. При этом пишут

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \text{или} \qquad a_n \to A \quad \text{при} \quad n \to \infty\,.$$

Поскольку последовательность является частным случаем функции, то достаточно очевидно, что для предела последовательности имеют место основные теоремы, справедливые для предела функции.

2 Второй замечательный предел

Докажем, что последовательность

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,. \tag{1}$$

имеет конечный предел. Для этого достаточно доказать, что она строго возрастает и ограничена сверху.

На основании формулы *бинома Ньютона*

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}b^n$$

имеем

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots \tag{2}$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\,.$$

Из полученного равенства следует, что $u_n \geqslant 2$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, нетрудно заметить, что при переходе от n к $n+1$ каждое слагаемое в правой части равенства (2) увеличивается и, кроме того, добавляется новое положительное слагаемое. Поэтому $u_n < u_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Оценим теперь u_n сверху. Очевидно, что

$$u_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3\,.$$

Итак, мы доказали, что последовательность (1) монотонно возрастает и ограничена, т. е. $2 \leqslant u_n < u_{n+1} < 3$. Следовательно, последовательность (1) сходится. Обозначим ее предел буквой e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\,. \tag{3}$$

Число $e = 2.718281828\ldots$ есть иррациональное число, называемое *числом Непера*.

Предел (3) называется *вторым замечательным пределом*. Кроме того, можно доказать также, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e\,.$$

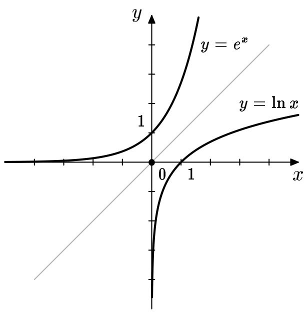


Рис. 14.

Число e положено в основание логарифмов, которые называются *натуральными логарифмами* и обозначаются так: $\log_e a = \ln a$. Ясно, что если $\ln a = b$, то $e^b = a$.

В математике часто встречается функция $y = e^x$, которая называется экспонентой и иногда обозначается $y = \exp(x)$, а также функция $y = \ln x$. Эти функции взаимно обратны, возрастают и графики их симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатного угла. Приведем их графики (рис. 14).

§ 6 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 1.

1) Функция $\varphi(x)$ называется бесконечно малой в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, если

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0\,.$$

2) Функция $\psi(x)$ называется бесконечно большой в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, если

$$\lim_{x\to x_0} |\psi(x)| = +\infty\,.$$

Теорема 1.

1) Если $\varphi(x)$ есть бесконечно малая функция в точке x_0, то $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ есть бесконечно большая функция в этой точке при условии, что $\varphi(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0.

2) Если $\psi(x)$ есть бесконечно большая функция в точке x_0, то $\dfrac{1}{\psi(x)}$ есть бесконечно малая функция в точке x_0.

Доказательство. Докажем теорему для случая, когда x_0 — конечное вещественное число. Возьмем любое число $K > 0$. Пусть $\varphi(x)$ является бесконечно малой функцией в точке x_0. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)\ : \qquad |\varphi(x)| < \varepsilon\,.$$

Возьмем в качестве ε такое число, чтобы $K = \dfrac{1}{\varepsilon}$, тогда

$$\left|\frac{1}{\varphi(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{т.е.} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{1}{|\varphi(x)|} = +\infty\,,$$

а это и означает, что $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ — бесконечно большая функция.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично. ■

Теорема 2. *Следующие два утверждения эквивалентны.*

1) Функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

2) Функция $\varphi(x) = f(x) - A$ является бесконечно малой в точке x_0.

Доказательство.

1) Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, где $x_0 \in \mathbb{R}$, A — конечное число. Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)\ : \qquad |\varphi(x)| < \varepsilon\,,$$

где $\varphi(x) = f(x) - A$, т.е. $\varphi(x)$ есть бесконечно малая в точке x_0.

2) Пусть теперь $\varphi(x) = f(x) - A$ есть бесконечно малая в точке x_0, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)\ : \qquad |\varphi(x)| < \varepsilon\,,$$

т.е. $|f(x) - A| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Теорема доказана.

■

Замечание. Очевидно, что если бы удалось определить бесконечно малую функцию, не используя понятия «предел», то определение предела функции было бы можно дать по-другому (см. ниже).

Определение 2. Пределом функции $y = f(x)$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ называется такое постоянное число A, разность между которым и функцией $y = f(x)$ есть бесконечно малая функция.

Бесконечно малые функции играют существенную роль в математическом анализе, и в дальнейшем при доказательстве различных теорем мы будем переходить от рассмотрения предела функции к рассмотрению бесконечно малой функции $\varphi(x) = f(x) - A$ в точке x_0. Очевидно, что в силу доказанной выше теоремы такой переход закономерен.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки x_0, а функция $\varphi(x)$ — бесконечно малая в точке x_0, то их произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$ есть функция бесконечно малая в этой точке.*

Доказательство. Функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки x_0, значит, существует такое число $K>0$, что $\forall x \in U(x_0,\delta): \quad |f(x)|<K$.

Функция $\varphi(x)$ бесконечно малая в точке x_0, значит

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta): \qquad |\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{K}.$$

Тогда оказывается

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta): \qquad |f(x)\cdot\varphi(x)|<\varepsilon,$$

а это и означает, что $f(x)\cdot\varphi(x)$ есть бесконечно малая функция в точке x_0. ■

Следствие 3. *Произведение $C\cdot\varphi(x)$ постоянной C на бесконечно малую функцию $\varphi(x)$ в точке x_0 есть бесконечно малая функция в этой точке.*

Следствие 4. *Произведение $\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)$ бесконечно малых функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ в точке x_0 есть бесконечно малая функция в этой точке.*

Доказательство. Действительно, поскольку $\varphi_1(x)$ — бесконечно малая в точке x_0, то

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta): \qquad |\varphi_1(x)|<\varepsilon,$$

т.е. $-\varepsilon<\varphi(x)<\varepsilon$, а это означает, что $\varphi_1(x)$ ограничена в окрестности точки x_0. Тогда на произведение функций $\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)$ можно смотреть как на произведение бесконечно малой и ограниченной функции. ■

Теорема 4. *Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечный предел, отличный от нуля, а функция $g(x)$ — бесконечно большая в этой точке, то их произведение $f(x)\cdot g(x)$ есть функция, бесконечно большая в точке x_0.*

(Без доказательства)

§ 7 Теоремы о конечных пределах

Теорема 1 (ограниченность функции, имеющей конечный предел)**.** *Если в точке $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ функция $f(x)$ имеет конечный предел, то в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ функция $f(x)$ ограничена.*

Доказательство. По условию теоремы, в точке x_0 функция $f(x)$ имеет конечный предел. Это означает

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta): \qquad |f(x)-A|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon,$$

т.е. функция $y=f(x)$ ограничена в проколотой окрестности точки x_0. ■

Теорема 2. *Если в окрестности точки x_0 имеет место неравенство $\varphi(x)\leqslant\psi(x)$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=B$, то $A\leqslant B$.*

(Без доказательства)

Если в точке $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют конечные пределы

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)=A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} f_2(x)=B,$$

то имеют место следующие теоремы.

Теорема 3.

$$\lim_{x\to x_0}\,(f_1(x)+f_2(x))=\lim_{x\to x_0} f_1(x)+\lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

Доказательство. Докажем теорему для случая, когда $x_0\in\mathbb{R}$, т.е. x_0 является конечным вещественным числом.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=B$. Тогда $\forall\varepsilon>0$

$$\exists \delta_1>0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta_1): \qquad A-\frac{\varepsilon}{2}<f_1(x)<A+\frac{\varepsilon}{2}, \tag{1}$$

$$\exists \delta_2>0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta_2): \qquad B-\frac{\varepsilon}{2}<f_2(x)<B+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Возьмем $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, тогда оба утверждения (1) и (2) останутся в силе, а тогда, приняв во внимание, что неравенства, имеющие одинаковый знак, можно почленно складывать, получим

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta): \quad (A+B)-\varepsilon<f_1(x)+f_2(x)<(A+B)+\varepsilon,$$

а это и означает, что $\lim\limits_{x\to x_0}\,(f_1(x)+f_2(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)+\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$. ■

Теорема 4.

$$\lim_{x\to x_0}\,(f_1(x)-f_2(x))=\lim_{x\to x_0} f_1(x)-\lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

Доказательство. Достаточно положить $f_2^*(x)=-f_2(x)$ и доказательство сведется к доказательству предыдущей теоремы. ■

Теорема 5.

$$\lim_{x\to x_0}\,(f_1(x)\cdot f_2(x))=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\cdot\lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = B$, тогда $f_1(x) = A+\alpha(x)$ и $f_2(x) = B+\beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции в точке x_0. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x)\cdot f_2(x)) = \lim_{x\to x_0}(A+\alpha(x))\cdot(B+\beta(x)) =$$
$$= \lim_{x\to x_0} A\cdot B + B\lim_{x\to x_0}\alpha(x) + A\lim_{x\to x_0}\beta(x) + \lim_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\beta(x) = A\cdot B\,.$$

■

Теорема 6.

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)} \quad \textit{при условии, что} \quad \lim_{x\to x_0} f_2(x)\neq 0\,.$$

(Без доказательства)

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x-1}$.

Решение. Заметим, что в точке $x=0$ данное выражение принимает значение равное 0. При $x=0$ здесь нет неопределенности, таким образом

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x-1} = 0\,.$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}$.

Решение. Примем во внимание связь между бесконечно малой и бесконечно большой функцией. Очевидно, что

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1} = \infty\,.$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$.

Решение. Очевидно, что мы имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Разложим числитель и знаменатель на множители

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}\,.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+x^2}{x^3+x^2+x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2}{x^3+x^2+x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(x+1)}{x\left(x^2+x+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x^2+x+1} = 0\,.$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-x}{x-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\sqrt{x}-x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}\,.$$

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1\,.$$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+2x^4-x^3+2}{2x^5-x^4+x-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+2x^4-x^3+2}{2x^5-x^4+x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^5}\right)}{x^5\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}\right)} = \frac{1}{2}\,.$$

Заметим, что поведение многочлена на бесконечности определяется поведением его старшей степени. Поэтому при решении данного примера можно было числитель и знаменатель заменить на эквивалентные им старшие степени, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+2x^4-x^3+2}{2x^5-x^4+x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{2x^5} = \frac{1}{2}\,.$$

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^3+x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x^2+x-1}}$.

Решение. Заменяя многочлены, стоящие под корнем, на эквивалентные им старшие степени, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^3+x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x^2+x-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3/4}-x^{1/3}}{x^{2/3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3/4}}{x^{2/3}} = +\infty\,.$$

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

Решение. Принимая во внимание первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, запишем данный предел так

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3x\cdot\sin 3x}{3x}}{\dfrac{5x\cdot\sin 5x}{5x}} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}\,.$$

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right)^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=2\,.$$

Заметим, что при вычислении данного предела мы учли, что $\cos 0=1$.

Пример 11. Вычислить $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^x$.

Решение. Заметим, что мы имеем неопределенность 1^∞. Примем во внимание второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$. Тогда данное выражение можно преобразовать так

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+2-1}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+2)}\right)^{\frac{-(x+2)x}{-(x+2)}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{-(x+2)}\right)^{-(x+2)}}_{\downarrow\atop e}\right]^{\overbrace{\frac{x}{-(x+2)}}^{}\underset{-1}{\downarrow}}=e^{-1}\,.$$

§ 8 Сравнение бесконечно малых функций

Рассмотрим в точке x_0 бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

Определение 1.

1) Говорят, что $\alpha(x)$ есть бесконечно малая *более высокого порядка малости*, чем $\beta(x)$ в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$. При этом пишут $\alpha(x)=o\left(\beta(x)\right)$ при $x\to x_0$.

2) Говорят, что бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют *одинаковый порядок малости* в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k$, где k - конечное число, $k\neq 0$.

3) Говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентные бесконечно малые в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. При этом пишут $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$.

Теорема 1. *Произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем каждый из сомножителей.*

Доказательство. Пусть $\alpha(x)\to 0$ и $\beta(x)\to 0$ при $x\to x_0$, тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)\cdot\beta(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0\quad\text{и}\quad\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)\cdot\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to x_0}\beta(x)=0\,.$$

■

Теорема 2. *Для того, чтобы бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их разность была бесконечно малой более высокого порядка малости, чем каждая из них.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$, тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=1-\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1-1=0\,.$$

Достаточность. Пусть в точке x_0 разность $\alpha(x)-\beta(x)$ есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $\alpha(x)$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=0$, тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1-\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=1-0=1\,.$$

■

Теорема 3 (принцип замены на эквивалентную). *Если* $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ *в точке* x_0, *то*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\,.$$

Доказательство. По условию теоремы,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}=1\,,$$

следовательно,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\,.$$

■

Мы доказали ранее замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Отсюда можно сделать вывод, что $\sin x\sim x$ при $x\to 0$.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

Решение. Сделаем замену $\arcsin x=t$, тогда $x=\sin t$. Очевидно, что $t\to 0$ при $x\to 0$. Тогда имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1\,.$$

Заметим, что мы попутно установили, что $\arcsin x\sim x$ при $x\to 0$. При решении примеров в дальнейшем этим фактом можно пользоваться как очевидным. Совершенно аналогично можно доказать, что $\operatorname{tg}x\sim x$ и $\operatorname{arctg}x\sim x$ при $x\to 0$.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\arcsin 3x}$.

Решение. Примем во внимание формулу удвоения углов $1-\cos 2x=2\sin^2 x$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\arcsin 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{\arcsin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{3x}=0\,.$$

§ 9 Непрерывность функции в точке

1 Различные формулировки определения непрерывности функции в точке

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\,.$$

Рассмотрим функцию $f(x)$ и допустим, что она непрерывна в точке x_0, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\qquad\Rightarrow\qquad \lim_{x\to x_0}\big(f(x)-f(x_0)\big)=\lim_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=0\,.$$

Обозначим $\Delta f(x,x_0)=f(x)-f(x_0)$ и назовем эту разность приращением функции $f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента $\Delta x=x-x_0$. Ясно, что $\Delta x\to 0$, если $x\to x_0$. Таким образом,

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\qquad\Rightarrow\qquad \lim_{x\to x_0}\Delta f(x,x_0)=0\,.$$

Очевидно и обратное соотношение

$$\lim_{x\to x_0}\Delta f(x,x_0)=0\qquad\Rightarrow\qquad \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\,,$$

то есть

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\qquad\Leftrightarrow\qquad \lim_{x\to x_0}\Delta f(x,x_0)=0\,.$$

Приняв во внимание вышесказанное, можно дать другое определение непрерывности функции в точке x_0.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е. если $\lim\limits_{x\to x_0}\Delta f(x,x_0)=0$.

Если вспомнить определение конечного предела функции в точке x_0, то очевидно, что непрерывность функции в точке можно определить иначе.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если всякому $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что из неравенства $|x-x_0|<\delta$ следует неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

В заключение заметим, что приведенные определения непрерывности функции в точке x_0 эквивалентны, т.е. из одного определения вытекают другие.

2 Односторонняя непрерывность функции в точке

Определение 4. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0 справа*, если

1) существует конечное значение $f(x_0)$,
2) существует конечный правосторонний предел $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)$,
3) выполняется условие $f(x_0)=f(x_0+0)$.

Определение 5. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0 слева*, если

1) существует конечное значение $f(x_0)$,
2) существует конечный левосторонний предел $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)$,
3) выполняется условие $f(x_0)=f(x_0-0)$.

В заключение приведем еще одно определение непрерывности функции в точке x_0.

Определение 6. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она в этой точке непрерывна и слева, и справа.

3 Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существует некоторая окрестность $U(x_0, \delta)$, в которой функция имеет такой же знак, что и в точке x_0.*

Доказательство. Пусть для определенности $f(x_0) > 0$. Поскольку $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in U(x_0, \delta) : \qquad f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon .$$

Так как ε можно выбрать любым, то положим $\varepsilon = f(x_0)/2$. Тогда будет в силу последних неравенств $f(x) > f(x_0)/2$, т.е. $f(x) > 0$ для $\forall x \in U(x_0, \delta)$. ■

Теорема 2. *Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0, то справедливы следующие утверждения*

1) функция $c \cdot f_1(x)$ непрерывна в точке x_0 ($c = const$),

2) функция $f_1(x) \pm f_2(x)$ непрерывна в точке x_0,

3) функция $f_1(x) \cdot f_2(x)$ непрерывна в точке x_0,

4) функция $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ($f_2(x_0) \neq 0$) непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Докажем одно из этих утверждений (остальные доказываются аналогично), а именно: произведение $f_1(x) \cdot f_2(x)$ непрерывно в точке x_0. Действительно, поскольку существуют конечные значения $f_1(x_0)$ и $f_2(x_0)$, следовательно, существует и конечное значение $f_1(x_0) \cdot f_2(x_0)$. Кроме того, существуют

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = f_1(x_0) , \qquad \lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_2(x_0) .$$

Значит существует

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_1(x_0) \cdot f_2(x_0) .$$

А это и говорит о том, что произведение $f_1(x) \cdot f_2(x)$ непрерывно в точке x_0. ■

Теорема 3 (непрерывность сложной функции)**.** *Если функция $t = g(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(t)$ непрерывна в точке t_0, где $t_0 = g(x_0)$, то функция $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0, т.е. суперпозиция непрерывных функций непрерывна в данной точке.*

(Без доказательства).

Теорема 4 (непрерывность обратной функции)**.** *Если функция $y = y(x)$ строго возрастает (строго убывает) на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$, то у нее существует обратная функция $x = x(y)$, которая строго возрастает (строго убывает) на отрезке $[p, q]$, где $p = y(a)$, $q = y(b)$ и непрерывна в точке $y_0 = y(x_0)$.*

(Без доказательства).

Теорема 5 (непрерывность элементарных функций)**.** *Любая элементарная функция непрерывна в каждой точке ее области определения.*

(Без доказательства).

4 Вычисление пределов от непрерывных функций

В силу теоремы о непрерывности элементарных функций следует, что для каждой элементарной функции имеет место соотношение

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0) ,$$

это обстоятельство упрощает подход к вычислению многих пределов от элементарных функций.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln\left(\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}\right) = \ln e = 1 .$$

Кроме того, мы попутно показали, что $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

Решение. Заменяя числитель на эквивалентную величину, получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(e^x - 1 + 1\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln e^x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \ln e}{x} = 1 .$$

Отсюда, $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$.

Решение. Заменяя числитель на эквивалентную величину, получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(a^x - 1 + 1\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln a^x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \ln a}{x} = \ln a .$$

То есть, $a^x - 1 \sim x \ln a$ при $x \to 0$.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}$.

Решение. Заменяя числитель на эквивалентную величину, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left((1+x)^\alpha-1+1\right)}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)^\alpha}{x}=\alpha\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\alpha\,.$$

Следовательно, $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ при $x\to 0$.

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\arcsin x)^8-1}{\ln(1+\operatorname{tg} x)}$.

Решение. Заменяя числитель и знаменатель на эквивалентные бесконечно малые, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\arcsin x)^8-1}{\ln(1+\operatorname{tg} x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{8\arcsin x}{\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x}{x}=8\,.$$

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{4^x-5^x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{4^x-5^x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3^x\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x-1\right]}{5^x\left[\left(\frac{4}{5}\right)^x-1\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x\ln\frac{2}{3}}{5^x\ln\frac{4}{5}}=\frac{\ln 3-\ln 2}{\ln 5-\ln 4}\,.$$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{1}{x}}$.

Решение. Напомним, что

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

и, кроме того, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$. Преобразуем числитель

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}\right)-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{x+1}{x+2}-1}{1+\frac{x+1}{x+2}}=-\frac{1}{2x+3}\,.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{2x+3}}{\frac{1}{x}}=-\frac{1}{2}\,.$$

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+2\sin 3x)^{1/\arcsin x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+2\sin 3x)^{1/\arcsin x}=[1^\infty]=\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\ln(\cos x+2\sin 3x)}{\arcsin x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\cos x+2\sin 3x-1}{\arcsin x}\right)=\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{2\sin 3x}{\arcsin x}\right)=\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{6x}{x}\right)=e^6\,.$$

5 Непрерывность функции на замкнутом промежутке

Определение 7. Функция $f(x)$, непрерывная в каждой точке отрезка $[a,\,b]$, называется *непрерывной на этом отрезке*.

Заметим, что под непрерывностью функции на концах отрезка понимается ее односторонняя непрерывность.

Заметим также, что графиком функции, непрерывной на отрезке, служит сплошная (непрерывная) линия на этом отрезке, которую можно вычертить одним движением карандаша, не отрывая его от бумаги.

Сформулируем теперь достаточно очевидные с геометрической точки зрения теоремы, дающие нам свойства функций, непрерывных на отрезке.

Теорема 6 (1-я теорема Вейерштрасса). *Если функция непрерывна на отрезке $[a,\,b]$, то на этом отрезке она и ограничена.*

Теорема 7 (2-я теорема Вейерштрасса). *Если функция непрерывна на отрезке $[a,\,b]$, то среди ее значений на этом отрезке имеется наименьшее и наибольшее значение.*

Теорема 8 (1-я теорема Больцано-Коши). *Если функция непрерывна на отрезке $[a,\,b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка найдется хотя бы одна точка, в которой функция обращается в ноль.*

Теорема 9 (2-я теорема Больцано-Коши). *Если функция непрерывна на отрезке $[a,\,b]$, то, принимая любые два значения на $[a,\,b]$, функция принимает и всякое промежуточное значение.*

§ 10 Разрыв функции в точке. Классификация разрывов

Определение 1. Точка x_0, принадлежащая множеству определения функции $f(x)$ или являющаяся его граничной точкой, называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не является непрерывной.

Пример 1. Исследовать непрерывность функции $y=x^2$ на отрезке $[0,\,2]$.

Решение. Функция является элементарной на этом промежутке, следовательно, она на нем и непрерывна.

Пример 2. Исследовать непрерывность функции

$$y = \begin{cases} x\,, & x \in (-\infty,\, 1] \\ x^2\,, & x \in (1,\, +\infty) \end{cases}$$

в точке $x_0 = 1$.

Решение.

1) В точке $x_0 = 1$ функция определена: $y(1) = 1$.

2) Правосторонний предел в точке x_0: $y(1+0) = \lim\limits_{x \to 1+0} x^2 = 1$.

3) Левосторонний предел в точке x_0: $y(1-0) = \lim\limits_{x \to 1-0} x = 1$.

4) Очевидно, что $y(1) = y(1+0) = y(1-0) = 1$.

Вывод: функция в точке $x_0 = 1$ непрерывна.

Пример 3. Исследовать непрерывность функции $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Функция $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ в точке $x_0 = 0$ не определена. Действительно, в точке $x_0 = 0$ имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Вывод: функция $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ в точке $x_0 = 0$ разрывна.

Установлена нижеследующая классификация точек разрыва.

Определение 2. Точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода*, или *точкой конечного разрыва* функции $f(x)$, если в этой точке, односторонние пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ конечны, но не равны между собой.

Число $\omega = f(x_0+0) - f(x_0-0)$ называется *скачком функции $f(x)$ в точке x_0*.

Определение 3. Точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода*, или *точкой бесконечного разрыва* функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в точке x_0 обращается в бесконечность или не существует.

Определение 4. Точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции $f(x)$, если в точке x_0 функция $f(x)$ не определена, а односторонние пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ конечны и равны между собой, т.е. $f(x_0+0) = f(x_0-0)$.

При этом говорят, что разрыв в точке x_0 *можно устранить*, если доопределить функцию $f(x)$ в точке x_0, положив $f(x_0) = f(x_0+0) = f(x_0-0)$.

Пример 4. Исследовать непрерывность функции $y = e^{1/x}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение.

1) В точке $x_0 = 0$ функция не определена.

2) $y(+0) = \lim\limits_{x \to +0} e^{1/x} = e^{+\infty} = +\infty$.

3) $y(-0) = \lim\limits_{x \to -0} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0$.

Вывод: функция $y = e^{1/x}$ в точке $x_0 = 0$ претерпевает разрыв 2-го рода (бесконечный разрыв).

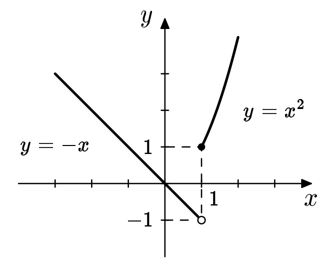


Рис. 15.

Пример 5. Исследовать непрерывность функции

$$y = \begin{cases} -x\,, & x \in (-\infty,\, 1) \\ x^2\,, & x \in [1,\, +\infty) \end{cases} \tag{1}$$

в точке $x_0 = 1$.

Решение.

1) В точке $x_0 = 1$ функция определена: $y(1) = 1$.

2) Правосторонний предел в точке x_0: $y(1+0) = \lim\limits_{x \to 1+0} x^2 = 1$.

3) Левосторонний предел в точке x_0: $y(1-0) = \lim\limits_{x \to 1-0} (-x) = -1$.

Вывод: в точке $x_0 = 1$ функция (1) претерпевает конечный разрыв (разрыв 1-го рода), функция в точке $x_0 = 1$ непрерывна справа (рис. 15).

Скачок функции в точке $x_0 = 1$: $\omega = y(1+0) - y(1-0) = 1 - (-1) = 2$.

Глава 2

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

§ 1 Производная функции. Механический и геометрический смысл производной

1 Определение производной

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на множестве X. Возьмем некоторое фиксированное значение $x \in X$ и столь малое приращение независимой переменной Δx, что точка $(x + \Delta x) \in X$, причем приращение Δx - положительное или отрицательное число. Выражение $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ является приращением функции, соответствующим указанному приращению Δx. Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\,.$$

Это отношение определено при всех $\Delta x \neq 0$, достаточно малых по абсолютной величине. Поскольку x фиксировано, отношение является функцией только Δx.

Определение 1. *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x называется предел отношения приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю.

Производную функции $y = f(x)$ в точке x будем обозначать символом $f'(x)$ или $y'(x)$. Итак

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\,.$$

Очевидно, что производная $f'(x)$ представляет собою функцию, определенную на некотором множестве $X_1 \subset X$.

2 Механический смысл производной

Допустим, что некоторая материальная точка M перемещается прямолинейно, а путь, пройденный этой точкой за время t, изменяется по закону $s = s(t)$. Очевидно, что отношение $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ определяет среднюю скорость точки за время Δt, а производная

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

есть ни что иное, как мгновенная скорость точки в момент t.

Итак, производная от функции, описывающей закон движения материальной точки, перемещающейся прямолинейно, определяет мгновенную скорость этой точки.

Заметим, что производная может иметь смысл скорости и в том случае, когда функция не определяет закона механического движения. Например, если функция $q = q(t)$ определяет количество вещества, уже вступившего в химическую реакцию к моменту t, то тогда производная $q'(t)$ определяет скорость химической реакции в данный момент времени t.

3 Геометрический смысл производной

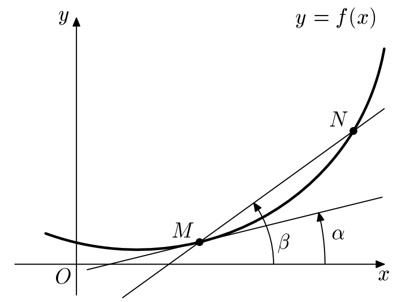


Рис. 1.

Для выяснения геометрического смысла производной обратимся к графику функции $y = f(x)$ (рис.1). Возьмем на нем точку $M(x, y)$, где $y = f(x)$, и близкую к ней, тоже лежащую на графике точку $N(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Очевидно, что $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, где β — угол, образованный секущей MN с положительным направлением оси Ox. При стремлении Δx к нулю точка N, оставаясь на графике, будет неограниченно приближаться к точке M, а секущая MN будет разворачиваться и займет предельное положение — станет касательной MK, которая образует угол α с осью Ox. Таким образом, ясно, что производная $f'(x)$ равна тангенсу угла α, образованного касательной к графику функции $f(x)$ в точке $M\,(x, f(x))$ с положительным направлением оси Ox.

Следовательно, существование производной связано с существованием касательной к графику функции $y = f(x)$, причем угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$ должен быть конечен (касательная не должна быть параллельна оси Oy: в этом случае $\alpha = \pi/2$ или $\alpha = 3\pi/2$, а тангенс такого угла равен бесконечности и при соответствующих x функция $f(x)$ не имеет производной).

4 Односторонние производные

Введем теперь понятие правосторонней и левосторонней производной. Допустим, что приращение независимой переменной Δx стремится к нулю не произвольным образом, а со стороны отрицательных значений или со стороны положительных значений, т. е. $\Delta x \to -0$ или $\Delta x \to +0$.

Определение 2. Пусть X — область определения функции $y = f(x)$.

1) *Левосторонней производной* функции $y = f(x)$ в точке $x \in X$, называется

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

2) *Правосторонней производной* функции $y = f(x)$ в точке $x \in X$, называется

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

Иногда левосторонняя производная обозначается $f'(x-0)$, а правосторонняя — $f'(x+0)$. Заметим, что при определении производной функции $y = f(x)$ в точке x способ стремления приращения Δx к нулю предполагается произвольным. Поэтому ясно, что если у функции $y = f(x)$ существует производная, то $f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$.

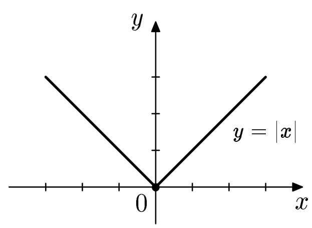


Рис. 2.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = |x|$ (рис. 2) и вычислим ее односторонние производные в точке $x_0 = 0$.

По определению

$$|x| = \begin{cases} x\,, & x \geqslant 0 \\ -x\,, & x < 0\,. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{(0+\Delta x) - 0}{\Delta x} = 1\,,$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-(0+\Delta x) - 0}{\Delta x} = -1\,.$$

Односторонние производные функции в точке $x_0 = 0$ существуют, но не совпадают, значит, в нуле у данной функции производная не существует. Заметим, кроме того, что данная функция непрерывна в начале координат.

Отсюда можно сделать вывод, что из непрерывности функции $f(x)$ в некоторой точке x_0 еще не следует, что в этой точке у функции $f(x)$ существует производная (рис. 2).

5 Дифференцируемость функции

Определение 3. Функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x, называется *дифференцируемой в этой точке*, если существует конечная производная $f'(x)$.

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке)**.** *Для того, что бы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x, необходимо и достаточно, чтобы полное приращение функции $y = f(x)$ в точке x, соответствующее приращению Δx, можно было представить в виде*

$$\Delta y = A\,(x) \cdot \Delta x + o\,(\Delta x) \quad \textit{при} \quad \Delta x \to 0\,, \tag{1}$$

где $A\,(x)$ не зависит от Δx, а $o\,(\Delta x)$ — бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, тогда

$$f'\,(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'\,(x) = o\,(1)\,, \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0\,,$$

где $o(1)$ — бесконечно малая функция, т.е. $o(1) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда следует (1) если обозначить $A\,(x) = f'\,(x)$ и учесть, что $\Delta x \cdot o(1) = o\,(\Delta x)$.

Достаточность. Допустим, что полное приращение функции можно представить в виде (1). Предположив, что $\Delta x \neq 0$, получим отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A\,(x) + o(1) \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0\,.$$

Перейдя к пределу, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A\,(x)\,,$$

а это и означает, что функция $y = f(x)$ в точке x имеет конечную производную $A(x)$, т.е. $f'(x) = A(x)$. ∎

Замечание. Отметим, что иногда функцию, дифференцируемую в точке, определяют как функцию, полное приращение которой в точке x можно представить в виде (1). В силу доказанной теоремы очевидно, что оба эти определения эквивалентны.

Операцию нахождения производной от функции в дальнейшем будем называть *дифференцированием* этой функции.

6 Непрерывность дифференцируемой функции

Теорема 2. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то в этой точке она и непрерывна.*

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, тогда полное приращение функции $y = f(x)$ в этой точке

$$\Delta y = A(x)\cdot\Delta x + o\,(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0\,,$$

а это означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x. ■

Мы отметили выше, что обратное утверждение неверно, т.е. из непрерывности функции в данной точке x не следует ее дифференцируемость в этой точке. (Это было показано при рассмотрении вопроса о дифференцируемости функции $y = |x|$ в начале координат).

Если функция дифференцируема в каждой точке интервала $(a,\, b)$, то ее называют *дифференцируемой на этом интервале.* О дифференцируемости функции на концах интервала, т.е. в точках $x = a$ и $x = b$ говорить нельзя, так как в этих точках могут существовать только правосторонняя и левосторонняя производные соответственно.

§ 2 Правила дифференцирования. Таблица производных

1 Дифференцирование постоянной функции

Рассмотрим функцию $y = c$, где $c = \text{const}$ для $\forall x \in \mathbb{R}$. По определению

$$c' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x} = 0\,.$$

Итак, $c' = 0$.

2 Дифференцирование степенной функции

Найдем производную степенной функции $y = x^\alpha$, где α — любое вещественное число. По определению производной

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^\alpha\left[\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1\right]}{\Delta x}\,.$$

Напомним, что $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, если $x \to 0$. Значит,

$$\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1 \sim \alpha\cdot\frac{\Delta x}{x}\,.$$

Следовательно,

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^\alpha\cdot\alpha\cdot\dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \alpha x^{\alpha-1}\,.$$

Итак, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Пример 1. Найти $\left(\dfrac{1}{x}\right)'$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1\cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}\,.$$

Пример 2. Найти $(\sqrt{x})'$.

Решение.

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

3 Дифференцирование показательной функции

Продифференцируем показательную функцию $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}\,.$$

Воспользуемся тем, что $a^x - 1 \sim x\ln a$ при $x \to 0$. Значит

$$a^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x\cdot\ln a\,.$$

Тогда

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\cdot\Delta x\cdot\ln a}{\Delta x} = a^x\ln a\,.$$

В частности $(e^x)' = e^x$.

4 Дифференцирование логарифмической функции

Найдем производную логарифмической функции

$$y = \log_a x \qquad a > 0\,, \quad a \neq 1\,.$$

Если $x > 0$ и $|\Delta x| < x$, то при $\Delta x \neq 0$ имеем

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{x\cdot\dfrac{\Delta x}{x}} =$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}\,.$$

Итак, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$. В частности $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

5 Правила дифференцирования

Теорема 1. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в данной точке x, то тогда имеют место следующие правила дифференцирования.*

1)
$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)\,,$$

2)
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,,$$

3)
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0)\,.$$

Доказательство. Предлагаем читателю самостоятельно доказать пункты 1) и 2) теоремы. Докажем пункт 3). Итак, рассмотрим частное $f(x)/g(x)$. По условию теоремы предполагается, что $g(x) \neq 0$, пусть для определенности $g(x) > 0$. Поскольку функция $g(x)$ дифференцируема в точке x, следовательно, она и непрерывна в этой точке, а значит в силу теоремы о сохранении знака непрерывной функции, можно указать такую окрестность точки x, в которой $g(x + \Delta x) > 0$. Тогда получим

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x)g(x+\Delta x)\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x)g(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x+\Delta x)\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}g(x) - f(x)\dfrac{\Delta g(x)}{\Delta x}}{g(x)g(x+\Delta x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\,.$$

■

Пример 3. Найти $\left(\sqrt[3]{x^2} + \ln x\right)'$.

Решение.
$$\left(\sqrt[3]{x^2} + \ln x\right)' = \left(x^{2/3}\right)' + (\ln x)' = \frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{1}{x} = \frac{2\sqrt[3]{x^2} + 3}{3x}\,.$$

Пример 4. Найти $\left(x^2 e^x\right)'$.

Решение.
$$\left(x^2 e^x\right)' = \left(x^2\right)' e^x + x^2\left(e^x\right)' = 2xe^x + x^2 e^x = x\,(x+2)\,e^x\,.$$

Пример 5. Найти $\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)'$.

Решение.
$$\left(\frac{x^2+1}{x}\right)' = \frac{\left(x^2+1\right)' x - \left(x^2+1\right) x'}{x^2} = \frac{2x\cdot x - \left(x^2+1\right)}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}\,.$$

6 Дифференцирование тригонометрических функций

1) Найдем производную функции $y = \sin x$.

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\sin\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)\cdot\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x\cdot\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x\,.$$

2) Аналогично можно доказать, что $(\cos x)' = -\sin x$.

3) Найдем производную функции $y = \operatorname{tg} x$. Если $x \neq \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

4) Аналогично можно показать, что

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\,, \qquad (x \neq \pi n\,, n \in \mathbb{Z})\,.$$

7 Правило дифференцирования сложной функции

Рассмотрим функцию $y = f(u)$, определенную на множестве U, и пусть, в свою очередь, $u = g(x)$ определена на множестве X. Тогда можно говорить о *сложной функции* переменной x: $y = f\,(g(x))$, определенной на множестве $X^* \subset X$, которое состоит только из тех элементов $x \in X$, для которых соответствующие значения $u = g(x) \in U$. При этом u называется *промежуточным аргументом сложной функции*, а сама сложная функция $y = f\,(g(x))$ называется также *суперпозицией функций* f и g.

Теорема 2. *Если функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $u = g(x)$, тогда сложная функция $y = f(g(x))$ дифференцируема в точке x, причем*

$$(f(g(x)))' = f'(u)\big|_{u=g(x)}\cdot g'(x) \qquad (\textit{правило цепочки})\,.$$

Доказательство. Функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке x, значит

$$\Delta u = g'(x)\Delta x + o(\Delta x) \qquad \text{при} \qquad \Delta x \to 0\,.$$

В свою очередь, функция $y = f(u)$ дифференцируема по u, тогда

$$\Delta y = f'(u)\Delta u + o(\Delta u) \qquad \text{при} \qquad \Delta u \to 0\,,$$

значит

$$\Delta y = f'(u)\left(g'(x)\Delta x + o(\Delta x)\right) + o(\Delta u) \qquad \text{при} \qquad \Delta u \to 0\,.$$

Пусть $\Delta x \to 0$, тогда в силу непрерывности дифференцируемой функции $u = g(x)$ окажется, что также и $\Delta u \to 0$, следовательно

$$(f(g(x)))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(f'(u)\left(g'(x) + o(1)\right) + o(1)\frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = f'(u) \cdot g'(x)\,.$$

■

Заметим, что правило цепочки можно обобщить на большее число промежуточных аргументов, если все функции дифференцируемы в соответствующих точках. Например, если $y = f(u)$, $u = g(v)$, $v = h(x)$ — дифференцируемые функции, то

$$(f\left(g\left(h(x)\right)\right))' = f'(u)\big|_{u=g(v)} \cdot g'(v)\big|_{v=h(x)} \cdot h'(x)\,.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = \sqrt{1 + \dfrac{1}{1+\sin x}}$.

Решение.

$$y' = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{1+\sin x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1 + \dfrac{1}{1+\sin x}}} \cdot \left(-\frac{1}{(1+\sin x)^2}\right) \cdot \cos x\,.$$

Пример 7. Найти производную функции $y = \log_2 \log_3 x$.

Решение.

$$y' = (\log_2 \log_3 x)' = \frac{1}{(\log_3 x)\cdot \ln 2} \cdot \frac{1}{x \ln 3}\,.$$

Пример 8. Найти производную функции $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$.

Решение.

$$y' = \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\,.$$

Пример 9. Найти производную функции $y = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$.

Решение.

$$y' = \left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

Пример 10. Найти производную функции $y = 3^{\sin(3x+\pi/4)}$.

Решение.

$$y' = \left(3^{\sin(3x+\pi/4)}\right)' = 3^{\sin(3x+\pi/4)} \cdot \ln 3 \cdot \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot 3\,.$$

Пример 11. Найти производную функции $y = e^{\dfrac{1}{1+\ln\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}$.

Решение.

$$y' = e^{\dfrac{1}{1+\ln\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}} \cdot \left(-\frac{1}{\left(1+\ln\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^2} \right) \cdot \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\,.$$

Пример 12. Найти производную функции $y = 5^{\operatorname{tg} 2^{\cos^2 x}}$.

Решение.

$$y' = 5^{\operatorname{tg} 2^{\cos^2 x}} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{\cos^2 2^{\cos^2 x}} \cdot 2^{\cos^2 x} \cdot \ln 2 \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x)\,.$$

Пример 13. Найти производную функции $y = \log_5 3^{\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x+\pi/3}\right)}$.

Решение.

$$y' = \frac{1}{3^{\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x+\pi/3}\right)} \cdot \ln 5} \cdot 3^{\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x+\pi/3}\right)} \cdot \ln 3 \cdot \frac{-1}{\sin^2\left(\frac{1}{x+\pi/3}\right)} \cdot \frac{-1}{(x+\pi/3)^2}\,.$$

Пример 14. Найти производную функции $y = e^{\sqrt[3]{x}} \cos\left(2x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение.

$$y' = e^{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{x^{-2/3}}{3} \cdot \cos\left(2x^2 + \frac{\pi}{4}\right) - e^{\sqrt[3]{x}} \cdot \sin\left(2x^2 + \frac{\pi}{4}\right) \cdot 4x\,.$$

8 Правило дифференцирования обратной функции

Рассмотрим функцию $y = y(x)$, определенную на множестве X, и пусть Y — множество ее значений. Допустим, что эта функция строго возрастает или строго убывает на множестве X, тогда каждому значению $x \in X$ отвечает единственное значение $y \in Y$ и наоборот, т.е. на множестве Y определена функция $x = x(y)$ такая, что множество X является множеством ее значений. Эту функцию называют *обратной по отношению к функции* $y = y(x)$. Если функция $y = y(x)$ задана аналитически, то обратную функцию можно получить, разрешив это соотношение относительно x.

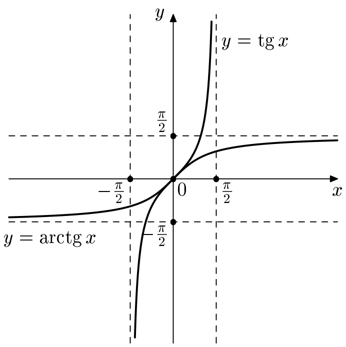


Рис. 3.

Итак, отметим, без доказательства, что если некоторая функция $y = y(x)$ определена и строго возрастает на множестве X, то у нее существует обратная функция $x = x(y)$, которая определена и строго возрастает на множестве Y, которое является множеством значений прямой функции $y = y(x)$. Если обозначить аргумент обратной функции через x, а саму функцию через y, то из курса математики средней школы известно, что графики прямой и обратной функции располагаются симметрично относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Например, функция $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $x \in (-\pi/2,\ \pi/2)$ строгого возрастает. При этом $y \in (-\infty,\ +\infty)$. Очевидно, что обратная функция $y = \operatorname{arctg} x$ строго возрастает на всей числовой оси, и при этом $\operatorname{arctg} x \in (-\pi/2,\ \pi/2)$. (см. рис. 3).

Теорема 3. *Если функция $y = y(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x обратную функцию $x = x(y)$ и функция $y = y(x)$ дифференцируема в точке x, тогда обратная функция $x = x(y)$ также дифференцируема в соответствующей точке $y = y(x)$ и имеет место соотношение*

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)}\,.$$

Доказательство. Функция $y = y(x)$ по условию теоремы дифференцируема в точке x, значит в этой точке она и непрерывна, т.е. если функция, например, возрастает (убывает) и $\Delta x \neq 0$, то и $\Delta y \neq 0$, причем $\Delta y \to 0$ тогда и только тогда, когда $\Delta x \to 0$. Следовательно,

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{x'(y)}\,.$$

■

9 Дифференцирование обратных тригонометрических функций

Доказанная теорема о дифференцировании обратной функции позволяет легко получить формулы для вычисления производных от обратных тригонометрических функций.

Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$. Она определена и строго возрастает на интервале $(-1,\ 1)$. Она служит обратной для функции $x = \sin y$, определенной на интервале $(-\pi/2,\ \pi/2)$. Следовательно

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad \forall x \in (-1,\ 1)\,.$$

Аналогично

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad \forall x \in (-1,\ 1)\,.$$

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ определена на интервале $(-\infty,\ +\infty)$ и служит обратной для функции $y = \operatorname{tg} x$, определенной на интервале $(-\pi/2,\ \pi/2)$, значит

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad \forall x \in (-\infty,\ +\infty)\,.$$

Аналогично

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}\,, \qquad \forall x \in (-\infty,\ +\infty)\,.$$

Пример 15. Найти производную функции $y = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$.

Решение.

$$y' = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

Пример 16. Найти производную функции $y = \dfrac{\arcsin x}{\operatorname{arctg} x}$.

Решение.

$$y' = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \operatorname{arctg} x - \arcsin x \left(-\dfrac{1}{1+x^2}\right)}{(\operatorname{arctg} x)^2}\,.$$

Теперь остается полученные формулы и правила дифференцирования записать в таблицу, которую необходимо выучить наизусть.

Таблица производных

$$
\begin{array}{ll}
c' = 0\,, & (\cos x)' = -\sin x\,, \\
(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}\,, & (\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,, \\
(a^x)' = a^x \ln a\,, & (\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}\,, \\
(e^x)' = e^x\,, & (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \\
(\ln x)' = \dfrac{1}{x}\,, & (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \\
(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}\,, & (\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}\,, \\
(\sin x)' = \cos x\,, & (\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}\,.
\end{array}
$$

Правила дифференцирования

$$
\begin{array}{ll}
(cf(x))' = cf'(x)\,, & (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)\,, \\
(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,, & \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\,, \\
(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)\,, & y'(x) = \dfrac{1}{x'(y)}\,.
\end{array}
$$

10 Логарифмическое дифференцирование

Для нахождения производных некоторых функций, в том числе так называемых сложно-показательных, т.е. функций вида $u(x)^{v(x)}$, полезно применять прием, который заключается в том, что функцию, которую нужно продифференцировать, предварительно логарифмируют (предполагается при этом, что логарифм от этой функции существует).

Итак, пусть $y(x) = u(x)^{v(x)}$, тогда $\ln y(x) = v(x)\ln u(x)$. Продифференцируем левую и правую часть этого равенства по x

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)} \quad \Rightarrow$$

$$y'(x) = u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

Пример 17. Найти производную функции $y = x^x$ при $x > 0$.

Решение.

$$\ln y = x\ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \quad \Rightarrow \quad (x^x)' = x^x(\ln x + 1)\,.$$

Пример 18. Найти производную функции $y = \sqrt{\dfrac{(x+1)(x+2)}{x(x+4)}}$.

Решение.

$$\ln y = \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) + \ln(x+2) - \ln x - \ln(x+4)\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+4}\right) \quad \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x+1)(x+2)}{x(x+4)}}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+4}\right).$$

11 Производные высших порядков

Производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$, определенной и дифференцируемой на интервале (a, b), представляет собой функцию, также определенную на интервале (a, b). Если эта функция $f'(x)$ сама является дифференцируемой в некоторой точке $x \in (a, b)$, то ее производную называют *второй производной (или производной второго порядка) функции* $y = f(x)$ и обозначают $f''(x)$, или $f^{(2)}(x)$. После того, как введено понятие второй производной, можно последовательно ввести понятие третьей производной, затем четвертой и т.д.

Таким образом, понятие *n-ой производной* вводится индуктивно, при переходе от первой производной к последующим из рекуррентного соотношения $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Функцию, имеющую на данном множестве конечную производную n-го порядка, называют *n раз дифференцируемой* на этом множестве.

Пример 19. Найти $y'''(x)$, если $y = xe^x$.

Решение.

$$
\begin{aligned}
y' &= e^x + xe^x = (x+1)e^x\,, \\
y'' &= e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x\,, \\
y''' &= e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x\,.
\end{aligned}
$$

§ 3 Дифференциал функции

1 Дифференциал функции, его геометрический смысл

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. приращение этой функции в точке x может быть представлено в виде

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0\,.$$

Очевидно, что приращение функции $y = f(x)$ представляет собой сумму двух слагаемых: слагаемое $f'(x)\Delta x$ является линейной относительно Δx частью приращения функции. Это слагаемое является бесконечно малой того же порядка малости, что и Δx. Второе слагаемое $o(\Delta x)$ — представляет собой бесконечно малую более высокого порядка малости, чем Δx, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} o(\Delta x)/\Delta x = 0$. Слагаемое $f'(x)\Delta x$, называется также *главной частью приращения дифференцируемой функции.*

Определение 1. Линейная относительно Δx часть приращения дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *дифференциалом* этой функции и обозначается dy, т.е.

$$dy = f'(x)\Delta x\,.$$

Заметим, что дифференциал данной функции dy зависит от того, какая точка закреплена, т.е. он зависит от x и, кроме того, он является функцией приращения независимой переменной Δx.

Если мы будем искать дифференциал функции $y = x$, то ясно, что $dx = x'\Delta x = \Delta x$, т.е. дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением $dx = \Delta x$. Следовательно, дифференциал можно записать так

$$dy = f'(x)\,dx\,.$$

Отсюда следует *обозначение Лейбница* для производной

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}\,.$$

Поскольку дифференциал функции пропорционален ее производной, то для дифференциала справедливы те же правила вычисления, что и для производной. Например, если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то

$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{df(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot dg(x)}{g^2(x)}\,.$$

Дифференциал функции dy в точке x, вообще говоря, не равен приращению y в этой точке. Это особенно хорошо видно при рассмотрении графика функции $y = f(x)$. Замена приращения функции ее дифференциалом означает замену участка графика функции на отрезке $[x,\, x + \Delta x]$ участком касательной к графику функции, проведенной через точку $M(x, y)$ (рис. 4).

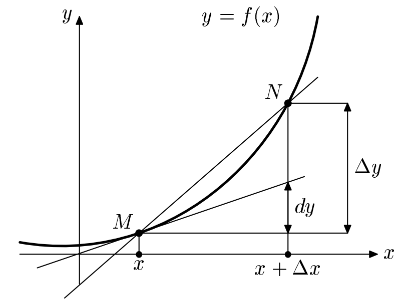


Рис. 4.

2 Инвариантность формы первого дифференциала

Итак, если x — независимая переменная, а $y = f(x)$ — дифференцируемая функция, то $dy = f'(x)\,dx$. Покажем, что если x является функцией другой независимой переменной, то дифференциал сохраняет свою форму. Пусть $x = g(t)$ — дифференцируемая функция переменной t. Следовательно, $y = f(g(t))$ — сложная функция переменной t, а тогда

$$dy = (f(g(t)))'\;dt = f'(g(t))g'(t)\,dt = f'(x)\,dx\,.$$

Такое свойство первого дифференциала функции $y = f(x)$ называется свойством *инвариантности формы первого дифференциала.*

3 Приложение теории дифференциала к приближенным вычислениям. Линеаризация функций

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x и Δx — приращение аргумента в этой точке, а $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ — соответствующее приращение функции. Тогда

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \qquad \text{при} \qquad \Delta x \to 0\,.$$

Отсюда получим приближенное равенство

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \quad \text{или} \quad \Delta y \approx dy\,.$$

Обычно дифференциал вычислить проще, чем приращение функции, поэтому полученное приближенное равенство играет большую роль в приближенных вычислениях. Оценка абсолютной и относительной погрешностей приближенных вычислений по этой формуле требует особого рассмотрения. На этом вопросе мы остановимся при изучении формулы Тейлора.

Пример 1. Плоский металлический диск имеет радиус $R = 1$м.. После нагревания диска его радиус увеличился на 1см. Вычислить площадь диска после нагревания.

Решение. Площадь диска до нагревания $S(R) = \pi R^2 = \pi\,\text{м}^2$. После нагревания

$$S(R+\Delta R) = \pi(R+\Delta R)^2 = \pi(1+0,01)^2 = 1,0201\cdot\pi\,\text{м}^2\,.$$

Приращение площади

$$\Delta S = S(R+\Delta R) - S(R) = 0,0201\cdot\pi\,\text{м}^2\,.$$

Если заменить приращение площади дифференциалом, то получим

$$\Delta S \approx dS = S'(R)\Delta R = 2\pi R\Delta R = 2\pi\cdot 0,01\,\text{м}^2 = 0,02\cdot\pi\,\text{м}^2\,.$$

Итак, заменив приращение площади ее дифференциалом, имеем приближенное значение площади диска после нагревания: $S(1+0,01)\approx 1,02\cdot\pi\,\text{м}^2$ точное значение $S(1+0,01) = 1,0201\cdot\pi\,\text{м}^2$. Нетрудно теперь вычислить абсолютную погрешность этих приближенных вычислений

$$|\Delta S - dS| = |0,0201\cdot\pi - 0,02\cdot\pi| = 0,0001\cdot\pi\,\text{м}^2\,.$$

Относительная погрешность

$$\frac{|\Delta S - dS|}{dS} = 0,005 = 0,5\%\,.$$

В заключение заметим, что заменяя приращение Δy функции в точке x для малых приращений Δx ее дифференциалом dy, мы тем самым на отрезке $[x,\,x+\Delta x]$ заменяем функцию $y=f(x)$ линейной функцией. Поэтому такая приближенная замена называется *линеаризацией функции*.

4 Дифференциалы высших порядков. Неинвариантность их формы

Введем теперь понятие о дифференциалах высших порядков функции $y=f(x)$. Если $y=f(x)$ дифференцируема, то $dy=f'(x)dx$. Пусть x — независимая переменная, тогда dx от x не зависит и при дальнейшем дифференцировании выносится за знак производной как постоянная. Учитывая это, мы можем рассматривать dy как функцию от x. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема, то можно найти дифференциал от dy, он называется *дифференциалом второго порядка* первоначальной функции $f(x)$ и обозначается d^2y

$$d^2y = d\,(dy) = \left(f'(x)\,dx\right)'\,dx = f''(x)\,dx^2\,. \tag{1}$$

И вообще, предположив, что функция $y=f(x)$ — n раз дифференцируема, последовательно, по индукции, придем к понятию дифференциала n-го порядка

$$d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n\,.$$

Отсюда, кстати, следует, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}\,.$$

Выясним теперь, обладают ли дифференциалы высших порядков свойством инвариантности. Мы выяснили ранее, что для дифференциала первого порядка $dy=f'(x)\,dx$, где x — независимая переменная, форма дифференциала сохраняется и для случая, когда x — функция какого-то другого аргумента. Рассматривать будем дифференциал второго порядка. Итак, пусть $y=f(x)$ и, в свою очередь, $x=x(t)$, причем функции $f(x)$ и $x(t)$ дважды дифференцируемы. Тогда

$$\begin{aligned} d^2y = (f(x(t))''\;dt^2 &= \Big(f''(x(t))\left(x'(t)\right)^2 + f'(x(t))x''(t)\Big)\;dt^2 = \\ &= f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x\,, \end{aligned}$$

что не совпадает с (1), т.е. форма второго дифференциала свойством инвариантности не обладает. Точно так же можно показать, что свойством инвариантности не обладает и форма дифференциала любого порядка выше первого.

§ 4 Дифференцирование функций, заданных параметрически. Векторная функция скалярного аргумента

1 Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть x и y заданы как функции некоторого параметра t: $x=x(t)$, $y=y(t)$. Предположим, что функции $x(t)$ и $y(t)$ дважды дифференцируемы по переменной t на множестве, где эти функции определены. Тогда

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t\cdot\Delta t}{x'_t\cdot\Delta t} = \frac{y'_t}{x'_t} \qquad \left(x'(t)\neq 0\right)\,.$$

Вычисленная производная является функцией аргумента t, т.е. $y'_x = y'_x(t)$. Тогда можно ставить вопрос об отыскании второй производной y''_{xx}. Ясно, что

$$y''_{xx} = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{(y'_x)'_t\cdot\Delta t}{x'_t\cdot\Delta t} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}\,.$$

Пример 1. Вычислить y'_x и y''_{xx} для функции $y(x)$, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad -\infty < t < +\infty\,.$$

Напомним, что рассматриваемая кривая называется циклоидой.

Решение. Ясно, что

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,, \qquad (\, t \ne 2\pi k\,)\,.$$

Отсюда

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}\right)'}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}\,.$$

2 Векторная функция скалярного аргумента, ее производная. Геометрический и механический смысл производной

Если каждому значению переменной t из некоторого множества T ставится в соответствие по известному закону определенный вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, то говорят, что на множестве T задана векторная функция $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$. Поскольку каждый вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ в прямоугольной системе координат однозначно определяется тремя координатами a_x, a_y, a_z, то задание векторной функции $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ эквивалентно заданию трех скалярных функций $a_x = a_x(t)$, $a_y = a_y(t)$, $a_z = a_z(t)$.

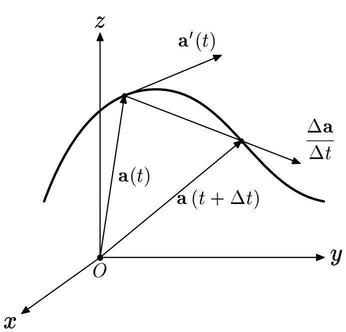


Рис. 5.

Определение 1. *Годографом* вектора $\mathbf{a}(t)$ называют кривую, которую вычерчивает конец вектора $\mathbf{a}(t)$ при перемещении с изменением параметра t при условии, что начало вектора $\mathbf{a}(t)$ находится в начале координат (рис. 5).

Введем понятие производной векторной функции $\mathbf{a}(t)$ в данной фиксированной точке t. Дадим t приращение $\Delta t \ne 0$ и рассмотрим вектор

$$\Delta\mathbf{a} = \mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{a}(t)\,.$$

Умножив этот вектор на число $1/\Delta t$, получим новый вектор, коллинеарный вектору $\Delta\mathbf{a}$

$$\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t}\,.$$

Вектор $\Delta\mathbf{a}/\Delta t$ представляет собой *среднюю скорость* изменения векторной функции $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ на отрезке $[t,\, t+\Delta t]$. *Производной векторной функции* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ в данной фиксированной точке t называется предел

$$\mathbf{a}'(t) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t}\,.$$

С геометрической точки зрения ясно, что производная $\mathbf{a}'(t)$ представляет собой вектор, касательный к годографу функции $\mathbf{a}(t)$ в точке t. Ясно также, что координаты производной $\mathbf{a}'(t)$ равны $a'_x(t)$, $a'_y(t)$, $a'_z(t)$. Таким образом, вычисление производной векторной функции сводится к вычислению производных от ее координат.

Замечание 1. Если векторная функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ определяет закон движения материальной точки по кривой, то $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ — скорость движения точки.

Замечание 2. Отметим, что правила дифференцирования произведения двух векторных функций будут такими же, как и для произведения двух скалярных функций, а именно

$$[\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}(t)]' = \mathbf{a}'(t)\cdot\mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}'(t)\,,$$
$$[\mathbf{a}(t)\times\mathbf{b}(t)]' = \mathbf{a}'(t)\times\mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t)\times\mathbf{b}'(t)\,.$$

3 Касательная прямая и нормальная плоскость к кривой, заданной параметрическими уравнениями

Пусть некоторая пространственная кривая γ определена как годограф вектора

$$\mathbf{a}(t) = a_x(t)\,\mathbf{i} + a_y(t)\,\mathbf{j} + a_z(t)\,\mathbf{k}\,.$$

Тогда очевидно, что эта кривая имеет такие параметрические уравнения $x = a_x(t)$, $y = a_y(t)$, $z = a_z(t)$, где t изменяется на некотором множестве T.

Пример 2. Нарисовать кривую γ, определенную как годограф вектора

$$\mathbf{a}(t) = r\cos t\,\cdot\mathbf{i} + r\sin t\,\cdot\mathbf{j} + ht\,\cdot\mathbf{k}\,, \qquad 0 \leqslant t < 2\pi\,, \quad r > 0\,, \quad h > 0\,.$$

Решение. Перейдя к параметрическим уравнениям

$$x = r\cos t\,, \qquad y = r\sin t\,, \qquad z = ht\,,$$

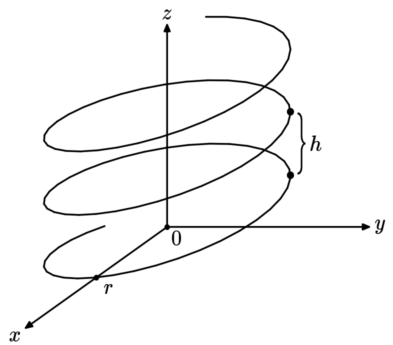


Рис. 6.

нетрудно нарисовать кривую ($0 \leqslant t < 2\pi$), которая называется *винтовой линией* (рис. 6).

Рассмотрим кривую γ, определенную как годограф вектора

$$\mathbf{a}(t) = a_x(t)\,\mathbf{i} + a_y(t)\,\mathbf{j} + a_z(t)\,\mathbf{k}\,,$$

и пусть на множестве T функции $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ дифференцируемы. При некотором фиксированном значении параметра $t_0 \in T$ на кривой γ получим точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $x_0 = a_x(t_0)$, $y_0 = a_y(t_0)$, $z_0 = a_z(t_0)$. Мы установили, что вектор лежит на касательной к годографу вектора $\mathbf{a}(t)$ в точке t_0, следовательно, его можно принять за направляющий вектор касательной, а тогда уравнение касательной будет иметь вид

$$\frac{x - x_0}{\left.\dfrac{da_x}{dt}\right|_{t=t_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\dfrac{da_y}{dt}\right|_{t=t_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\dfrac{da_z}{dt}\right|_{t=t_0}}\,.$$

Плоскость, перпендикулярная к касательной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, называется нормальной плоскостью к пространственной кривой и, очевидно, имеет такое уравнение

$$\left.\frac{da_x}{dt}\right|_{t=t_0}(x - x_0) + \left.\frac{da_y}{dt}\right|_{t=t_0}(y - y_0) + \left.\frac{da_z}{dt}\right|_{t=t_0}(z - z_0) = 0\,.$$

Здесь вектор

$$\mathbf{n} = \left(\left.\frac{da_x}{dt}\right|_{t=t_0},\ \left.\frac{da_y}{dt}\right|_{t=t_0},\ \left.\frac{da_z}{dt}\right|_{t=t_0}\right)$$

является нормалью к нормальной плоскости.

Пример 3. Написать уравнение касательной к винтовой линии

$$\mathbf{a}(t) = 2\cos t\ \cdot \mathbf{i} + 2\sin t\ \cdot \mathbf{j} + 3t\ \cdot \mathbf{k}$$

в точке $t_0 = \pi/4$.

Решение.

$$\frac{da_x}{dt} = -2\sin t\,, \qquad \frac{da_y}{dt} = 2\cos t\,, \qquad \frac{da_z}{dt} = 3\,,$$

$$\left.\frac{da_x}{dt}\right|_{t=\pi/4} = -\sqrt{2}\,, \qquad \left.\frac{da_y}{dt}\right|_{t=\pi/4} = \sqrt{2}\,, \qquad \left.\frac{da_z}{dt}\right|_{t=\pi/4} = 3\,.$$

Точка M_0 имеет координаты $M_0\left(\sqrt{2},\, \sqrt{2},\, 3\pi/4\right)$. Касательная

$$\frac{x - \sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{y - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{z - \dfrac{3\pi}{4}}{3}\,.$$

Нормальная плоскость

$$-\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + \sqrt{2}(y - \sqrt{2}) + 3\left(z - \frac{3\pi}{4}\right) = 0\,.$$

§ 5 Теоремы о дифференцируемых функциях

1 Теорема Ролля

Теорема 1 (Ролль). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\,b]$, в каждой точке интервала $(a,\,b)$ существует конечная производная $f'(x)$ и, кроме того, $f(a) = f(b)$, то тогда между точками a и b найдется хотя бы одна точка c $(a < c < b)$ такая, что $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\,b]$, следовательно, на этом отрезке она принимает наименьшее значение m и наибольшее значение M.

Если окажется, что $m = M$, то $f(x)$ постоянна на отрезке $[a,\,b]$, т.е. $f(x) = \text{const}$, следовательно, $f'(x) = 0$, $\forall x \in [a,\,b]$, в частности и в некоторой точке $c \in (a,\,b)$.

Если $m < M$, то существует точки x_1 и x_2 такие, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причем, если бы оказалось, что точки x_1 и x_2 находятся на концах отрезка $[a,\,b]$, то мы пришли бы к первому случаю, поэтому хотя бы одна из точек x_1 или x_2 лежит внутри отрезка $[a,\,b]$. Пусть для определенности $a < x_1 < b$ и $f(x_1) = m$. Тогда при любом достаточно малом по модулю Δx будет $f(x_1) \leqslant f(x_1 + \Delta x)$, откуда следует, что

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \geqslant 0 \qquad \text{при} \qquad \Delta x > 0\,,$$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \leqslant 0 \qquad \text{при} \qquad \Delta x < 0\,.$$

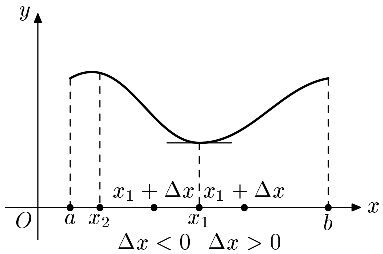


Рис. 7.

Устремим теперь Δx к нулю. Так как функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_1, то это значит, что предел первой дроби должен быть равен пределу второй дроби, а это может быть только 0.

Итак, нашлась точка $c = x_1$ такая, что $f'(c) = 0$ (рис. 7). Для точки x_2, в которой функция достигает наибольшего значения, доказательство аналогично. ■

Геометрический смысл теоремы Ролля

Если выполнены условия теоремы Ролля, то $f'(c) = 0$ в некоторой точке $x = c$, а это означает, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = c$ параллельна оси Ox.

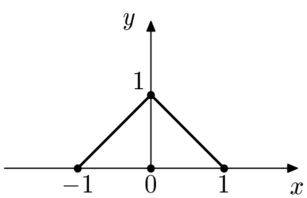


Рис. 8.

Заметим, что если хотя бы в одной точке отрезка $[a,\, b]$ функция не дифференцируема, то производная функции $f(x)$ может в нуль и не обратиться (см. рис. 8). Например, функция $y = 1 - |x|$ непрерывна на отрезке $[-1,\, 1]$, дифференцируема на $(-1,\, 1)$ за исключением точки $x_0 = 0$, причем $f(-1) = f(1) = 0$, т.е. условие теоремы Ролля нарушено в единственной точке $x_0 = 0$ (в ней функция не дифференцируема). Очевидно, что ни в одной точке графика функции на отрезка $[-1,\, 1]$ касательная к графику не параллельна оси Ox.

2 Теорема Лагранжа

Теорема 2 (Лагранж)**.** *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\, b]$ и дифференцируема на интервале $(a,\, b)$, то внутри отрезка $[a,\, b]$ найдется хотя бы одна точка c $(a < c < b)$ такая, что будет иметь место равенство*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \tag{1}$$

— формула конечных приращений Лагранжа.

Доказательство. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\Phi(x) = (f(x) - f(a))\,(b - a) - (f(b) - f(a))\,(x - a)\,.$$

Функция $\Phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\, b]$ как сложная функция непрерывных функций. Кроме того, она дифференцируема на интервале $(a,\, b)$, причем, $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$. Следовательно, функция $\Phi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Значит, найдется точка c, лежащая внутри отрезка $[a,\, b]$ такая, что $\Phi'(c) = 0$. Поскольку

$$\Phi'(x) = f'(x)(b - a) - (f(b) - f(a))\ ,$$

то положив здесь $x = c$, получим

$$\Phi'(c) = f'(c)(b - a) - (f(b) - f(a)) = 0\,.$$

Отсюда следует формула (1). ■

Формулу конечных приращений Лагранжа можно записать несколько иначе, если положить $b = x + \Delta x$, $a = x$ и обозначить $c = x + \theta\Delta x$, где θ - некоторое число, удовлетворяющее неравенству $0 < \theta < 1$. При этом формула Лагранжа будет иметь вид

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x) \cdot \Delta x \qquad (0 < \theta < 1)\,.$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа

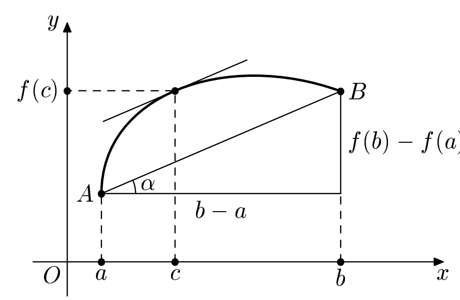


Рис. 9.

Итак, пусть выполнены условия теоремы Лагранжа, тогда справедлива формула конечных приращений Лагранжа. Пусть точки A и B, лежащие на графике функции $y = f(x)$, имеют координаты $A\,(a,\ f(a))$, $B\,(b,\ f(b))$, тогда очевидно (рис. 9), что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,,$$

где α — угол наклона хорды AB к оси Ox.

С другой стороны, $f'(c) = \operatorname{tg}\alpha$. Значит, в точке $x = c$ касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна хорде, стягивающей дугу кривой AB. В этом и заключается геометрический смысл теоремы Лагранжа.

3 Теорема Коши

Теорема 3 (Коши)**.** *Если на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в каждой точке интервала (a, b), причем $g'(x) \neq 0$ во всех точках этого интервала, то тогда между точками a и b существует такая точка c $(a < c < b)$, что имеет место равенство*

$$\frac{f(b) - f(b)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \textit{(формула Коши)}. \tag{2}$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что $g(b) \neq g(a)$, так как иначе в силу теоремы Ролля нашлась бы точка c такая, что было бы $g'(c) = 0$. Введем вспомогательную функцию

$$\Phi(x) = (f(x) - f(a))\,(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))\,(g(x) - g(a))\ .$$

Ясно, что функция $\Phi(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ как сложная функция непрерывных функций, кроме того, она дифференцируема на интервале (a, b). Заметим, что $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$, т.е. $\Phi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля.

Итак, найдется точка c такая, что будет $\Phi'(c) = 0$. Так как

$$\Phi'(x) = f'(x)\,(g(b) - g(a)) - g'(x)\,(f(b) - f(a))\ ,$$

то положив здесь $x = c$, получим

$$\Phi(c) = f'(c)\,(g(b) - g(a)) - g'(c)\,(f(b) - f(a)) = 0\,,$$

откуда следует формула (2). ■

Геометрический смысл теоремы Коши

Нетрудно убедиться в том, что геометрический смысл теоремы Коши совпадает с геометрическим смыслом теоремы Лагранжа. Действительно, рассмотрим кривую (рис.10), заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t)\,, \end{cases} \tag{3}$$

причем функции $f(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши.

Пусть параметр $t \in [a, b]$, тогда $A\,(g(a),\ f(a))$, $B\,(g(b),\ f(b))$. Угловой коэффициент касательной к графику кривой в некоторой точке $C\,(g(c),\ f(c))$

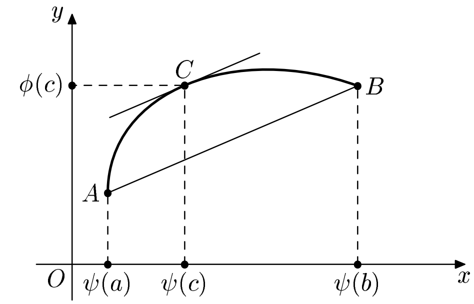


Рис. 10.

равен $f'(c)/g'(c)$, в силу теоремы Коши он совпадает с угловым коэффициентом секущей, проходящей через точки A и B.

Итак, если выполнены условия теоремы Коши, то на графике кривой, заданной параметрическими уравнениями (3) найдется хотя бы одна точка C, такая, что касательная к графику этой кривой параллельна хорде, проведенной через точки A и B.

4 Правило Лопиталя

Теорема 4. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки x_0 и, кроме того, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, причем $g'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0, то тогда*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

при условии, что второй предел существует (здесь x_0 - конечное число, либо $x_0 = -\infty$, либо $x_0 = +\infty$, либо $x_0 = \infty$).

Доказательство. Докажем теорему для случая, когда x_0 — конечное число. По условию теоремы функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности этой точки, а следовательно и непрерывны в точке x_0, это означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = 0$.

Пусть x - точка, принадлежащая окрестности точки x_0, тогда выполнены условия теоремы Коши и имеет место формула

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,,$$

где c лежит между x_0 и x. Если $x \to x_0$, то и $c \to x_0$, тогда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{c\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

$\blacksquare$

Замечание. Теорема остается в силе и в том случае, когда в точке x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$ обращаются в бесконечность.

Принимая во внимание доказанную теорему, сформулируем следующее *правило Лопиталя*: для раскрытия неопределенностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ надо заменить предел отношения двух функций пределом отношения их производных. Если окажется, что отношение производных имеет конечный предел, то к этому же пределу стремится и отношение данных функций.

Для раскрытия других неопределенностей $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0 и т. п. эти неопределенности следует предварительно преобразовать к неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, для чего их предварительно иногда приходится прологарифмировать.

Если неопределенность не раскрылась после применения правила Лопиталя, это правило можно применить еще раз, но уже к отношению производных (при условии, что отношение производных порождает неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$).

Примеры.

1)

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}3x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(\operatorname{tg}3x)'}{x'}=\lim_{x\to0}\frac{3}{\cos^2 x}=3\,.$$

2)

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}\,.$$

3)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_5 x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\ln 5}}{1}=0\,.$$

4)

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}}=\frac{1}{2}\,.$$

5)

$$\lim_{x\to0}(1+3x)^{1/\sin x}=[1^\infty]=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin x}\right)=$$
$$=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{\frac{3}{1+3x}}{\cos x}\right)=e^3\,.$$

§ 6 Формулы Тейлора и Маклорена

1 Формула Тейлора

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, определенную на отрезке $[a,b]$. Допустим, что на этом отрезке $f(x)$ дифференцируема n раз. Докажем, что $f(x)$ может быть представлена в виде

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n$$

– *формула Тейлора*.

Последнее слагаемое в формуле Тейлора называется *остаточным членом*. О нем мы поговорим особо. Если отбросить остаточный член, то получим приближенное равенство

$$f(x)\approx f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\,.$$

Многочлен, стоящий справа, называется *многочленом Тейлора*. Заметим, что коэффициенты многочлена Тейлора вычисляются без труда: для этого достаточно вычислить значения функции $f(x)$ и ее производных $f'(x)$, $f''(x)$, …, $f^{(n-1)}(x)$ в точке $x=a$.

Заменив функцию ее многочленом Тейлора, мы совершим ошибку, равную отброшенному остаточному члену R_n в формуле Тейлора. При решении практических задач эту ошибку точно указать, как правило, нельзя, однако всегда можно ее оценить, т.е. можно указать такое положительное число, которого не превосходит модуль отброшенного остаточного члена.

Выведем формулу Тейлора. Для этого прибегнем к такому искусственному приему: допустим, что некоторое неизвестное число T определено равенством

$$f(b)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(b-a)-\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2-\ldots$$
$$\ldots-\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}-\frac{T}{n!}(b-a)^n=0 \quad (1)$$

и введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\Phi(x) = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \ldots$$
$$\ldots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{T}{n!}(b-x)^n\,. \quad (2)$$

В силу равенства (1) $\Phi(a) = 0$. Очевидно, что $\Phi(b) = 0$. Кроме того, $\Phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\,b]$ и дифференцируема на интервале $(a,\,b)$. Следовательно, $\Phi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Значит, между точками a и b существует некоторая точка c такая, что $\Phi'(c) = 0$.

Продифференцируем равенство (2) почленно

$$\Phi'(x) = -f'(x) - \left(\frac{f''(x)}{1!}(b-x) - \frac{f'(x)}{1!}\right) - \left(\frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2 - \frac{f''(x)}{2!}2(b-x)\right) - \ldots$$
$$-\left(\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(n-1)(b-x)^{n-2}\right) + \frac{T}{n!}n(b-x)^{n-1} =$$
$$= -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + \frac{T}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\,.$$

Отсюда следует

$$\Phi'(c) = -\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1} + \frac{T}{(n-1)!}(b-c)^{n-1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T = f^{(n)}(c)\,.$$

Подставим найденное значение T в формулу (1) и заменим в ней b на x, тогда получим

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n\,. \quad (3)$$

Здесь c лежит между a и x, поэтому $c = a + \theta x$, $0 < \theta < 1$

Формула (3) называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*.

Если в формуле Тейлора положить $a = 0$, то получим частный случай формулы Тейлора — так называемую *формулу Маклорена*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n\,.$$

Отметим некоторые частные случаи формулы Тейлора.

Положим в формуле Тейлора $n = 1$

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$$

— это полученная ранее формула Лагранжа.

Положим теперь в формуле Тейлора $n = 2$.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$$

и заменим в этом выражении x на $x + \Delta x$, а точку a на x, тогда получим

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(c)}{2!}\,(\Delta x)^2\,.$$

Отбросим последнее слагаемое, тогда $f(x+\Delta x) \approx f(x) + df(x)$. Этой формулой часто пользуются в приближенных вычислениях, заменяя полное приращение функции ее дифференциалом. Погрешность таких приближенных вычислений нетрудно оценить, рассмотрев отброшенный остаточный член $\frac{f''(c)}{2!}\,(\Delta x)^2$.

Заметим, что формула Тейлора имеет очень широкое применение, поскольку позволяет любую функцию (лишь бы она была нужное число раз дифференцируема!) заменить многочленом с любой степенью точности.

2 Представление функций e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ формулой Маклорена

1) Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. Очевидно, что эта функция дифференцируема сколько угодно раз на всей числовой оси. Найдем ее разложение по формуле Маклорена. Поскольку

$$f^{(k)}(x) = e^x\,, \quad f^{(k)}(0) = 1\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

то, подставляя найденные значения производных в формулу Маклорена, получим

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!}x^n\,,$$

где c лежит между 0 и x.

2) Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Функция $f(x) = \sin x$ сколько угодно раз дифференцируема на всей числовой оси. Легко проверить, что

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\,, \quad f^{(k)}(0) = \sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Подставим найденные значения производных в формулу Маклорена, получим

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{\sin\left(c + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{n!}x^n\,.$$

3) Рассмотрим теперь функцию $f(x) = \cos x$. Поскольку

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(k)}(0) = \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

то разложение функции $f(x) = \cos x$ по формуле Маклорена имеет вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{\cos(n-1)\dfrac{\pi}{2}}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{\cos\left(c + n\dfrac{\pi}{2}\right)}{n!}x^n .$$

4) Функция $f(x) = \ln(1+x)$ определена и дифференцируема при $x > -1$. Очевидно, что

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!, \qquad k = 1, 2, 3, \dots .$$

Таким образом, имеем разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{n-1}x^{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+c)^n}x^n .$$

5) Рассмотрим функцию $f(x) = (1+x)^\alpha$, где α — любое число и $x \neq -1$. Поскольку

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$
$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1) \quad \text{при} \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

то, разложение функции $f(x) = (1+x)^\alpha$ по формуле Маклорена имеет вид

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)2\dots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + $$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}(1+c)^{\alpha-n}x^n .$$

3 Применение формулы Тейлора к приближенным вычислениям

Если функцию можно представить формулой Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n,$$

то, отбросив последнее слагаемое (остаточный член), получим приближенное равенство

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} .$$

Таким образом, если нужно вычислить приближенное значение функции $f(x)$ в точке x_0, то мы получим

$$f(x_0) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x_0-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x_0-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x_0-a)^{n-1} .$$

Если указано, сколько членов разложения следует взять, то погрешность вычислений нетрудно оценить, оценив модуль отброшенного остаточного члена. Иногда в приближенных вычислениях требуется выполнить вычисления с заданной точностью, т.е. указывается число, которого не должен превосходить модуль отброшенного члена; число слагаемых, которое следует взять в формуле Тейлора при этих вычислениях, определяется с учетом заранее заданной точности.

Пример 1. Вычислить $\sqrt{e}$, разложив функцию e^x по формуле Маклорена. Взять шесть членов разложения. Оценить погрешность вычислений.

Решение. Разложение функции e^x по формуле Маклорена имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{e^c}{6!}x^6,$$

где c лежит между 0 и x.

Тогда, отбросив остаточный член и положив $x = 1/2$, получим

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2^4} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{2^5} .$$

Прежде чем подсчитать приближенное значение суммы слагаемых, стоящих справа, оценим погрешность

$$|R_6| = \frac{e^c}{6!}\cdot\frac{1}{2^6} < \frac{e^{1/2}}{2^6 6!} < \frac{\sqrt{3}}{2^6 6!} < \frac{1,8}{2^6 6!} < 0,00004 .$$

Сделанная оценка погрешности гарантирует нам, что в приближенном вычислении $\sqrt{e}$ четыре знака после запятой будут вычислены правильно. Подсчитываем

$$\sqrt{e} \approx 1 + 0,5 + 0,125 + 0,020833 + 0,0026042 + 0,00026042 \approx 1,6487 .$$

Пример 2. Вычислить приближенное значение $\sqrt[5]{33}$, разложив $\sqrt[5]{x}$ по степеням $(x-32)$. Вычисление выполнить с точностью до $0,0001$.

Решение. Разложим функцию $y = \sqrt[5]{x}$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 32$.

$$y(x) = x^{1/5}, \qquad y(32) = 2,$$
$$y'(x) = \frac{1}{5}x^{-4/5}, \qquad y'(32) = \frac{1}{5\cdot 2^4},$$
$$y''(x) = \frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)x^{-9/5}, \qquad y''(32) = -\frac{4}{5^2\cdot 2^9},$$
$$\ldots \qquad \ldots$$
$$y^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{4\cdot 9\cdot 14\ldots(5n-6)}{5^n}x^{1/5-n}.$$

Итак, разложение функции $y = \sqrt[5]{x}$ в окрестности точки $x_0 = 32$ будет иметь следующий вид

$$\sqrt[5]{x} = 2 + \frac{1}{5\cdot 2^4}(x-32) - \frac{4}{5^2\cdot 2^9\cdot 2!}(x-32)^2 + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1}\frac{4\cdot 9\ldots(5n-6)}{5^n\cdot n!}c^{1/5-n}(x-32)^n,$$

где c лежит между 32 и x.

Положим теперь в этом разложении $x = 33$. Тогда получим

$$\sqrt[5]{33} = 2 + \frac{1}{5\cdot 2^4} - \frac{4}{5^2\cdot 2^9\cdot 2!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{4\cdot 9\cdot 14\ldots(5n-6)}{5^n\cdot n!}c^{1/5-n},$$

здесь $32 < c < 33$.

Нужно подобрать такое наименьшее число слагаемых в правой части, чтобы отброшенный остаточный член был меньше $0,0001$. При $n = 2$ имеем

$$|R_2| = \frac{4}{5^2\cdot 2!\cdot c^{9/5}} < \frac{4}{5^2\cdot 2!\cdot (32)^{9/5}} = \frac{4}{5^2\cdot 2!\cdot 2^9} \approx 0,000156 > 0,0001.$$

Следовательно, чтобы выполнить вычисления с заданной точностью, недостаточно взять два члена разложения, так как точность вычислений не гарантирована.

Возьмем $n = 3$. Получим

$$|R_3| = \frac{4\cdot 9}{5^3\cdot 3!\cdot c^{14/5}} < \frac{4\cdot 9}{5^3\cdot 3!\cdot (32)^{14/5}} = \frac{4\cdot 9}{5^3\cdot 2\cdot 3\cdot 2^{14}} \ll 0,0001.$$

Очевидно, что три члена, взятые в разложении в силу сделанной оценки, гарантируют необходимую точность вычислений. Подсчитываем

$$\sqrt[5]{33} \approx 2 + 0,0125 - 0,00015625 \approx 2,0122.$$

§ 7 Исследование функций с помощью первой производной

1 Признак постоянства функции

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Для того, чтобы $f(x)$ была постоянна на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in (a, b)$ выполнялось условие $f'(x) = 0$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $f'(x) = 0$ для любого $x \in (a, b)$. Возьмем любые две точки x_1 и x_2, принадлежащие отрезку $[a, b]$. По теореме Лагранжа найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

но $f'(c) = 0$, следовательно $f(x_2) = f(x_1)$ для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$, а это означает, что $f(x)$ — постоянная функция на отрезке $[a, b]$.

Необходимость. Пусть $f(x)$ — постоянная функция на отрезке $[a, b]$. Тогда $f'(x) = 0$ для любого $x \in (a, b)$. ■

2 Признаки возрастания и убывания функции

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Для того, чтобы $f(x)$ не убывала на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, что бы при любом $x \in (a, b)$ выполнялось условие $f'(x) \geqslant 0$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x)$ не убывает на отрезке $[a, b]$. И пусть $x \in (a, b)$. Возьмем приращение $\Delta x > 0$ столь малое, чтобы было $(x + \Delta x) \in (a, b)$.

Так как $\Delta x > 0$, то $x < x + \Delta x$, а так как $f(x)$ не убывает, то очевидно, что $f(x) \leqslant f(x + \Delta x)$. Следовательно,

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0.$$

Устремим теперь Δx к нулю, тогда в силу определения правосторонней производной, получим $f'_+(x) \geqslant 0$ для любого $x \in (a, b)$.

Поскольку $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), то на этом интервале $f'(x) = f'_+(x)$. Значит $f'(x) \geqslant 0$ для любого $x \in (a, b)$.

Достаточность. Пусть для любого x из интервала (a, b) выполняется условие $f'(x) \geqslant 0$. Возьмем любые две точки x_1 и x_2 из отрезка $[a, b]$, причем $x_1 < x_2$. Тогда по теореме Лагранжа найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

а так как $x_2 - x_1 > 0$ и $f'(c) \geqslant 0$, то ясно, что $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, а это и означает, что $f(x)$ не убывает на отрезке $[a, b]$. ■

Теорема 3. *Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Для того, чтобы $f(x)$ не возрастала на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, что бы при любом $x \in (a, b)$ выполнялось условие $f'(x) \leqslant 0$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к не убывающей функции $g(x) = -f(x)$. ■

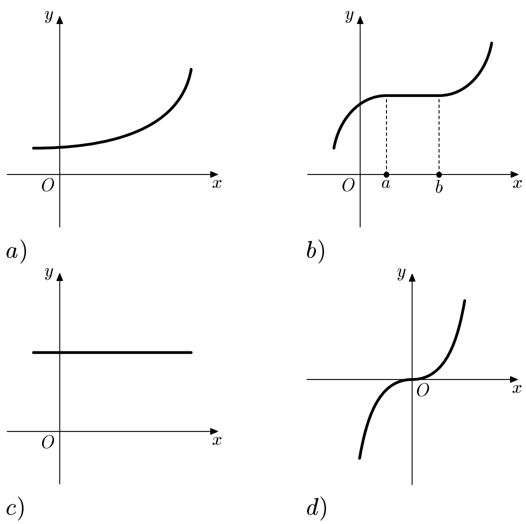


Рис. 11.

На рис. 11 даны геометрические пояснения к доказанным выше теоремам. На рис. 11 c) изображен график постоянной функции $f(x)$. Ясно, что это есть прямая, параллельная оси Ox. Касательная к графику этой функции параллельно оси Ox, в любой точке, следовательно $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha = 0$, где α — угол наклона касательной к графику функции. На рис. 11 a) изображена строго возрастающая функция $f(x)$. Касательная к графику этой функции в любой точке образует острый угол с осью Ox, следовательно $\operatorname{tg}\alpha \geqslant 0$. Заметим, что у строго возрастающей функции могут найтись точки, в которых будет $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha = 0$. Действительно, на рис. 11 d) изображен график строго возрастающей функции $y = x^3$. Ясно, что $f'(0) = 0$. На рис. 11 b) изображена не убывающая, но не строго возрастающая функция. Очевидно, что на интервале (a, b) функция постоянна. В каждой точке этого интервала $f'(x) = 0$.

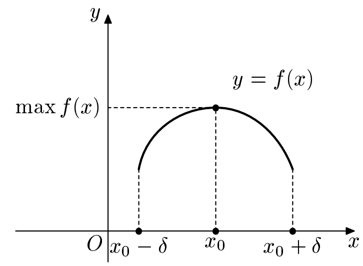


Рис. 12.

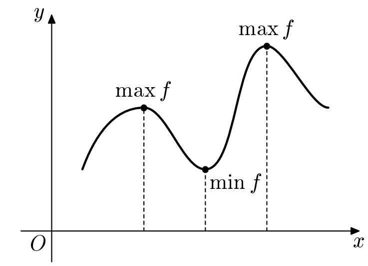


Рис. 13.

3 Экстремумы функции

Определение 1.

1) Говорят, что функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет в этой точке *максимум*, если существует такое $\delta > 0$, что для любого $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ (рис. 12). При этом пишут $\max f(x) = f(x_0)$.

2) Говорят, что функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет в этой точке *минимум*, если существует такое $\delta > 0$, что для любого $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$, выполняется неравенство $f(x_0) < f(x)$. При этом пишут $\min f(x) = f(x_0)$.

3) Максимумы или минимумы функции называются *экстремумами* функции.

Заметим, что функция на некотором интервале может иметь несколько максимумов или минимумов, причем, не обязательно максимальное значение является наибольшим, точно так же, как и минимальное — наименьшим. Это видно из рис. 13.

4 Необходимые условия экстремума

Теорема 4. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0, принадлежащей интервалу $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и имеет в этой точке экстремум, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть для определенности в точке x_0 функция имеет максимум. Тогда

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}<0\,,\qquad \text{если}\quad \Delta x>0\,,$$
$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0\,,\qquad \text{если}\quad \Delta x<0\,.$$

Устремим Δx к нулю, тогда получим $f'_+(x_0)\leqslant 0$ и $f'_-(x_0)\geqslant 0$. Так как функция в точке x_0 дифференцируема, то должно быть $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$, а это возможно, только когда $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=0$, следовательно $f'(x_0)=0$. ■

Из рис. 13 ясно, что касательная к графику дифференцируемой функции в точке экстремуму параллельна оси Ox. Заметим, что в рассмотренном выше случае точка x_0 называется *точкой гладкого экстремума*.

Экстремум у функции может существовать и в точках, в которых функция не имеет производной или производная обращается в бесконечность, т.е. в точках, в которых функция не дифференцируема. Тогда говорят, что в этих точках функция имеет *острый экстремум*.

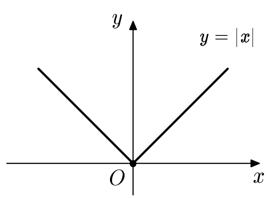


Рис. 14.

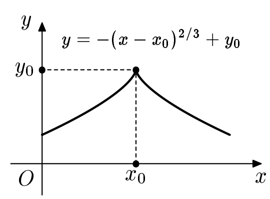


Рис. 15.

Например, на рис. 14 изображен график функции $f(x)=|x|$. Ясно, что в точке $x_0=0$ эта функция не дифференцируемая, т.е. у нее в этой точке не существует производная. Однако, очевидно, что в точке $x_0=0$ функция имеет минимум (острый экстремум).

На рис. 15 изображен график функции $y=-(x-x_0)^{2/3}+y_0$, у которой в точке x_0 производная обращается в бесконечность (функция в этой точке также не дифференцируемая). Ясно, что в точке x_0 функция имеет острый максимум.

Если $f'(x_0)=0$, то точка x_0 называется *стационарной точкой*. Очевидно, что точки гладкого экстремума являются стационарными точками, причем ясно, что обратное не верно.

Например, функция $f(x)=x^3$ в точке $x_0=0$ имеет $f'(0)=0$, однако понятно, что в точке $x_0=0$ функция экстремума не имеет. Итак, точки, в

которых производная обращается в ноль, в бесконечность или не существует, могут оказаться точками экстремума. Эти точки называются *критическими* или *подозрительными на экстремум*.

Точки, подозрительные на экстремум, подвергаются дополнительному исследованию с целью выяснения, имеется ли в них максимум или минимум.

5 Исследование критических точек с помощью первой производной

Теорема 5. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0-\delta,\,x_0+\delta)$ точки x_0 и $f'(x_0)=0$, то, если при прохождении через точку x_0 производная меняет знак «плюс» на «минус», то в точке x_0 функция имеет максимум, если при прохождении через точку x_0 производная меняет знак «минус» на «плюс», то в точке x_0 функция имеет минимум.*

Доказательство. Докажем первую половину теоремы. Допустим, что проходя через точку x_0, производная $f'(x)$ меняет знак с «плюса» на «минус», причем $f'(x_0)=0$. Будем рассматривать различные $x\in(x_0-\delta,\,x_0+\delta)$. Так как выполнены условия теоремы Лагранжа, то между точек x_0 и x найдется точка c такая, что

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)\,,$$

причем, если $x<x_0$, то $f'(c)>0$ и $f(x)-f(x_0)<0$, если $x_0<x$, то $f'(c)<0$ и снова $f(x)-f(x_0)<0$, а это и означает, что в точке x_0 функция имеет максимум (рис. 16).

Вторая половина теоремы доказывается аналогично. ■

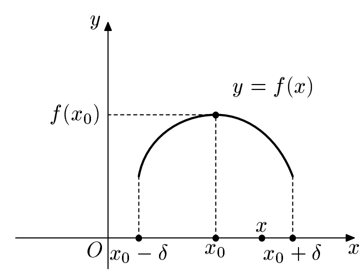


Рис. 16.

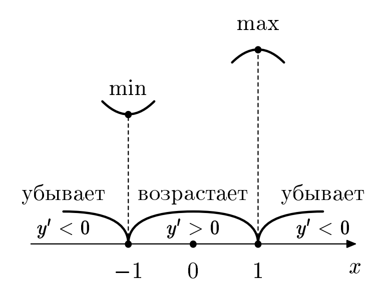


Рис. 17.

Заметим, что теорема остается в силе, если в критических точках производная не существует или обращается в бесконечность, лишь бы только в самой критической точке функция имела конечное значение.

Отметим, кроме того, что при решении примеров полезно делать схему, которая позволяет свести воедино получаемые результаты и сделать соответствующие выводы, а именно: на ось Ox наносят критические точки, указывают интервалы возрастания и убывания функции, а также характер критических точек. Эта схема выглядит примерно так, как показано на рис. 17.

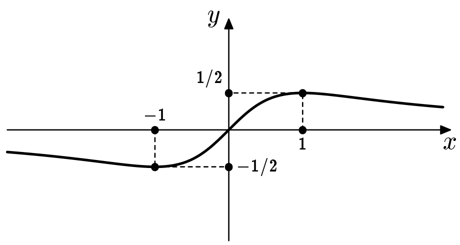


Рис. 18.

Пример 1. Найти экстремумы функции $y = \dfrac{x}{1+x^2}$, интервалы возрастания и убывания функции и сделать ее рисунок.

Решение. Прежде всего заметим, что функция определена на всей числовой оси. Найдем точки, подозрительные на экстремум. Для этого вычислим производную

$$y' = \frac{\left(1+x^2\right) - x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\,.$$

Производная обращается в ноль в критических точках $x_{1,2} = \pm 1$. Очевидно, что $y' < 0$ левее точки $x_1 = -1$ и $y' > 0$ правее $x_1 = -1$, значит самой точке $x_1 = -1$ функция имеет минимум. Ясно, что в точке $x_2 = 1$ функция имеет максимум.

Нетрудно вычислить $y_{min} = \min y$ и $y_{max} = \max y$. Действительно, $y_{min} = y(-1) = -1/2$, $y_{max} = y(1) = 1/2$. Если учесть, что $y(0) = 0$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 0$, то легко нарисовать график этой функции (рис. 18).

Пример 2. Из листа картона размерами 15×8 вырезать уголки, такие, чтобы после загибания краев получилась коробка наибольшего объема (рис. 19).

Решение. Ясно, что искомый объем $V(x) = x(15-2x)(8-2x)$.Приравняв производную $V'(x) = 12x^2 - 92x + 120$ к нулю, получим квадратное уравнение $12x^2 - 92x + 120 = 0$. Его корни $x_1 = 6$, $x_2 = 5/3$. Очевидно, что $x_1 = 6$ следует исключить из рассмотрения. Ясно, что при прохождении через точку $x_2 = 5/3$ производная меняет знак «плюс» на знак «минус», значит, если вырезать уголки с размерами $(5/3)\times(5/3)$, то коробка будет иметь наибольший объем $V_{max} = (5/3)\cdot(35/3)\cdot(14/3) = 2450/27$ куб.ед..

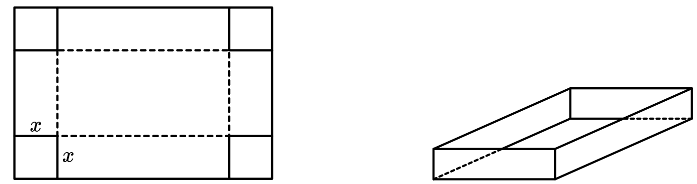


Рис. 19.

§ 8 Исследование функций с помощью второй производной

Теорема 1. *Если в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ непрерывна и дважды дифференцируема, причем в этой окрестности $f''(x)$ непрерывна, а в точке x_0 первая производная обращается в нуль, то если $f''(x_0) < 0$, в точке x_0 функция имеет максимум, а если $f''(x_0) > 0$, в точке x_0 функция имеет минимум.*

Доказательство. Докажем первую половину теоремы. Напишем формулу Тейлора второго порядка для данной функции $f(x)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2\,,$$

где точка c лежит между x и x_0. По условию теоремы, $f'(x_0) = 0$, значит

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2\,.$$

Допустим, что $f''(x_0) < 0$, тогда по теореме о сохранение знака непрерывной функции существует окрестность точки x_0 такая, что знак второй производной будет тот же, что и в точке x_0, т.е. в точке c вторая производная будет иметь тот же знак, что и в точке x_0, т.е. $f''(c) < 0$. А тогда окажется, что $f(x) - f(x_0) < 0$ для всех $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$, т.е. в точке x_0 функция имеет максимум (рис. 20).

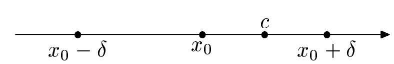


Рис. 20.

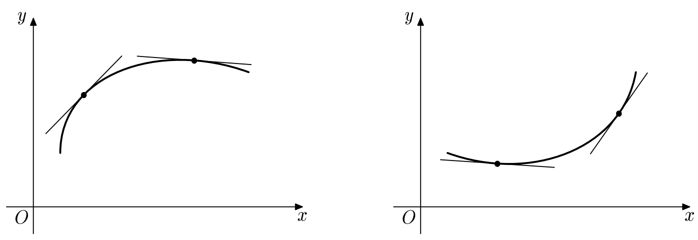
■

1 Выпуклость и вогнутость кривых

Определение 1.

1) Будем говорить, что непрерывная кривая на отрезке $[a, b]$, *выпукла вверх*, или просто *выпукла*, если эта кривая располагается ниже касательной к кривой, проведенной через любую точку кривой (рис. 21 a)).

2) Будем говорить, что непрерывная кривая на отрезке $[a, b]$, *выпукла вниз*, или *вогнута*, если эта кривая располагается выше касательной к кривой, проведенной через любую точку кривой (рис. 21 b)).



a) b)

Рис. 21.

Из рис. 21 очевидно, что если выпуклая кривая является графиком функции $y = f(x)$, то $\Delta y < dy$, т.е.

$$f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x < 0\,,$$

а если кривая вогнута, то $dy < \Delta y$, т.е.

$$f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x > 0\,.$$

Теорема 2. *Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем $f''(x) < 0$ на интервале (a, b), то на отрезке $[a, b]$, график функции выпуклый, а если $f''(x) > 0$, то на отрезке $[a, b]$, график функции вогнутый.*

Доказательство. Пусть $f''(x) < 0$ на интервале (a, b). Возьмем точки $x \in [a, b]$ и $(x + \Delta x) \in [a, b]$, тогда имеем разложение Тейлора

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(c)}{2}(\Delta x)^2\,,$$

где точка c лежит между x и $x + \Delta x$. Следовательно,

$$f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x = \frac{f''(c)}{2}(\Delta x)^2 < 0\,,$$

т.е. $\Delta y - dy < 0$, а это и означает, что график функции $y = f(x)$ — выпуклая кривая (рис. 22).

Вторая половина теоремы доказывается аналогично. ■

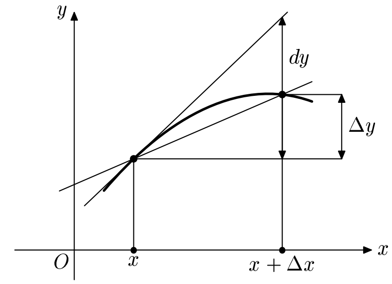


Рис. 22.

2 Точки перегиба

Определение 2. Точка на графике функции $y = f(x)$, отделяющая выпуклую часть графика от вогнутой, называется *точкой перегиба*.

Из определения следует, что при прохождении через точку перегиба вторая производная меняет знак. Если x_0 — абсцисса точки перегиба, то $f''(x_0) = 0$, или $f''(x_0) = \infty$, или $f''(x_0)$ не существует.

3 Наибольшее и наименьшее значение функции

Допустим, что некоторая функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда на этом отрезке она имеет наибольшее и наименьшее значения. Чтобы их найти, нужно отыскать все максимумы и минимумы функции, вычислить ее значения на концах отрезка, а затем сравнить их между собой и выбрать наименьшее и наибольшее. На рис. 23 функция $y = f(x)$ имеет наибольшее значение в точке $x = a$, которое больше $y_{max} = f(x_2)$, а наименьшим значением является $f(b)$, которое меньше минимального значения функции $y_{min} = f(x_1)$.

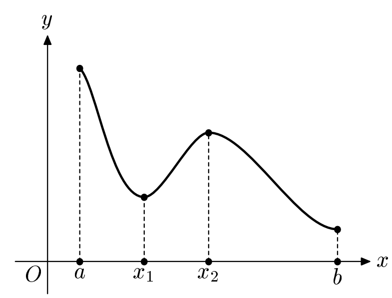


Рис. 23.

4 Четность и нечетность функции

При исследовании функции всегда нелишне проверить, является ли данная функция четной или нечетной, так как в таком случае достаточно исследовать функцию только для $x \geqslant 0$, а затем отобразить ее график для отрицательных x симметрично относительно оси Oy или симметрично относительно начала координат.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$ для любой точки x из области определения функции.

Например, функция $f(x) = \cos x$ — четная функция. Действительно, $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$. Ясно, что график четной функции симметричен относительно оси Oy.

Определение 4. Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$ для любой точки x из области определения функции.

Например, функция $f(x) = x^3$ нечетная функция, так как $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Ясно, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

5 Асимптоты кривых

Определение 5. Прямая линия называется *асимптотой графика функции* $y = f(x)$, если расстояние между текущей точкой графика и этой прямой стремится к нулю по мере удаления точки от начала координат (рис. 24).

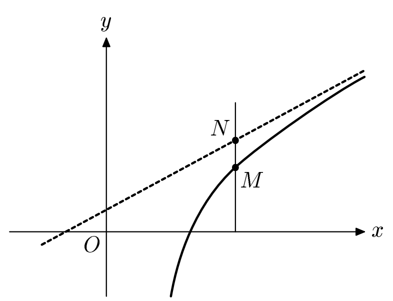


Рис. 24.

Итак, предположим, что график функции имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ ($k \neq \pm\infty$), тогда очевидно, что

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx - b) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(\left[\frac{f(x)}{x} - k\right] - \frac{b}{x}\right) = 0$$

Вследствие того, что $b/x \to 0$, при $x \to \pm\infty$, то ясно, что последнее предельное равенство может иметь место, лишь когда выражение в квадратной скобке стремится к нулю, а тогда имеем

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\,.$$

Если k найдено, то нетрудно найти и b

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx)\ .$$

В частности, если окажется, что $k = 0$, то мы будем иметь частный случай наклонной асимптоты — горизонтальную асимптоту. С другой стороны, прямая $x = a$ будет являться вертикальной асимптотой, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

§ 9 Общая схема исследования функции

Принимая во внимание все вышесказанное, можем привести такой план исследования дифференцируемой функции.

1) Определить область определения функции.
2) Выяснить, является данная функция четной или нечетной.
3) Найти точки, подозрительные на экстремум и выяснить характер экстремумов с помощью первой или второй производной, а также вычислить y_{min} и y_{max}.
4) Определить интервалы возрастания и убывания функции.
5) Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции.
6) Найти точки перегиба.
7) Найти асимптоты графика функции.
8) Вычислить значение функции в некоторых контрольных точках и найти точки пересечения графика функции с координатными осями.
9) Нарисовать график функции.

Пример 1. Исследовать функцию $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x|}$ и нарисовать ее график.

Решение.

1) Область определения функции $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2) Функция четная, так как

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{|-x|} = \frac{x^2 - 1}{|x|} = f(x)\,.$$

3)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x}, & x > 0 \\[2ex] \dfrac{1 - x^2}{x}, & x < 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 1}{x^2}, & x > 0 \\[2ex] -\dfrac{x^2 + 1}{x^2}, & x < 0\,. \end{cases}$$

Функция имеет критическую точку $x_0 = 0$, в которой производная не существует, но в этой точке функция стремится к $-\infty$, следовательно, функция не имеет ни максимумов, ни минимумов.

4) Функция убывает, когда $x \in (-\infty,\, 0)$ и возрастает, если $x \in (0,\, +\infty)$.

5)

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x^3}, & x > 0 \\[2ex] \dfrac{2}{x^3}, & x < 0\,. \end{cases}$$

Поскольку $f''(x) < 0$ в области определения функции, то кривая везде выпукла.

6) Точка $x_0 = 0$ не является точкой перегиба, так как мы установили ранее, что в этой точке функция не определена.

7) Очевидно, что $x = 0$ является вертикальной асимптотой. Действительно,

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \frac{x^2 - 1}{x} = -\infty\,, \qquad \lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} \frac{1 - x^2}{x} = -\infty\,.$$

Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$, причем отдельно рассмотрим случай, когда $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

a)

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1\,,$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - x \right) = 0\,.$$

Итак, $y = x$ — наклонная асимптота при $x \to +\infty$.

b)

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - x^2}{x^2} = -1\,,$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1 - x^2}{x} + x \right) = 0\,.$$

Таким образом, $y = -x$ является наклонной асимптотой при $x \to -\infty$.

8) Вычислим те значения x, при которых $f(x) = 0$. Ясно, что это $x = \pm 1$.

9) Построим, наконец, график функции (рис. 25).

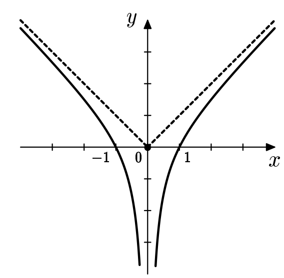


Рис. 25.

§ 10 Дифференциал дуги плоской кривой

Пусть на плоскости задана некоторая кривая AB (рис.26). Разобьем кривую точками $M_0 = A$, M_1, M_2, …, M_{n-1}, $M_n = B$ следующими друг за другом, произвольным образом на n частей. Соединим последовательно эти точки прямолинейными отрезками. Получим ломаную $M_0 M_1 \ldots M_n$, вписанную в кривую AB (рис. 26). Обозначим длину этой ломаной линии S_n. Обозначим λ — наибольшую из длин отрезков этой ломаной.

Определение 1. Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{\lambda \to 0} S_n$, не зависящий от выбора точек M_k, то число S называется *длиной кривой* AB, а сама кривая AB называется *спрямляемой*.

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha,\, \beta]$ так, что $A\,(x(\alpha),\, y(\alpha))$, $B\,(x(\beta),\, y(\beta))$ (рис. 27).

Пусть функция $x = x(t)$ и $y = y(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\, \beta]$ и имеют на интервале $(\alpha,\, \beta)$ непрерывные производные $x'(t)$, $y'(t)$, одновременно не обращающиеся в нуль. При этих условиях кривая AB спрямляема, и предел

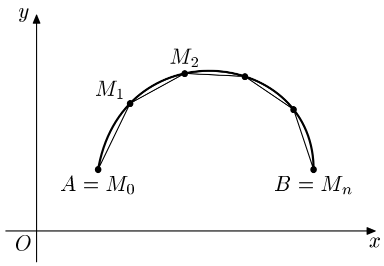


Рис. 26.

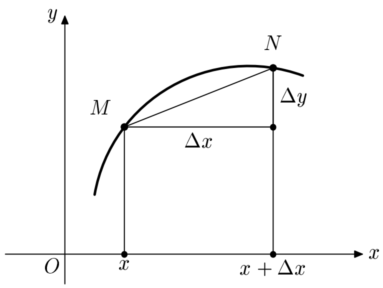


Рис. 27.

отношения длины любой дуги на участке AB к длине хорды, стягивающей эту дугу, равен единице при стремлении длины дуги к нулю.

Возьмем на кривой AB точку $M(x,\,y)$, которой соответствует значение t параметра. Длина S дуги AM является функцией параметра t: $S = S(t)$. Покажем, что дифференциал функции $S(t)$ равен

$$dS = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt\,. \tag{1}$$

Дадим параметру t приращении Δt (для определенности считаем, что $\Delta t > 0$), тогда переменные x и y получат соответственно приращения Δx и Δy, длина дуги $S(t)$ получит приращение ΔS, а точка M перейдет в точку N.

Длина хорды MN связана с Δx и Δy равенством $MN = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Разделим обе части этого равенства на Δt

$$\frac{MN}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\,.$$

Умножим и разделим левую часть этого равенства на длину ΔS дуги MN

$$\frac{MN}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\,.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta S \to 0$. Так как при этом $N \to M$, то длина дуги $\Delta S \to 0$, в силу сказанного выше $MN/\Delta S \to 1$. Таким образом, при $\Delta t \to 0$ получаем

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,,$$

откуда и следует равенство (1).

Формулу (1) можно записать в виде

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\,.$$

Как видно из этого равенства, dS — длина гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами dx и dy, т.е., dS — длина отрезка касательной к кривой в точке с абсциссой x, который соответствует отрезку $[x,\,x+dx]$.

Если роль параметра t играет переменная x, т.е. кривая AB является графиком непрерывно-дифференцируемой функции $y = f(x)$, $x \in [a,\,b]$, то

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + (y'_x)^2}\,dx\,.$$

Аналогично, в случае пространственной кривой, имеем

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}\,.$$

При параметрическом задании пространственной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Это равенство можно переписать в следующем виде

$$dS = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}\;dt\,.$$

Пример 1. Найти дифференциал длины дуги винтовой линии

$$x = r\cos t\,, \qquad y = r\sin t\,, \qquad z = \frac{h}{2\pi}t\,.$$

Решение. Поскольку $x'_t = -r\sin t$, $y'_t = r\cos t$, $z'_t = \dfrac{h}{2\pi}$, то

$$dS = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2}}\;dt = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\;dt\,.$$

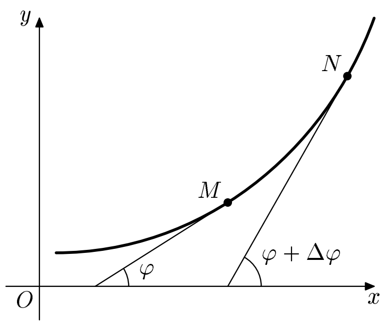


Рис. 28.

§ 11 Кривизна плоской и пространственной кривой

Рассмотрим дугу MN спрямляемой плоской кривой γ, имеющей касательную в каждой своей точке (рис. 28).

Обозначим длину дуги MN через ΔS. Пусть касательная к кривой в точке M образует с осью абсцисс угол φ, а в точке N — угол $\varphi + \Delta\varphi$. Тогда угол $\Delta\varphi$ является углом между касательными в крайних точках дуги MN. Угол $\Delta\varphi$ называется *углом смежности* дуги MN.

Определение 1. *Средней кривизной* K_{cp} дуги называется модуль отношения угла смежности дуги к ее длине

$$K_{cp} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta S}\right| .$$

Определение 2. *Кривизной* K кривой в точке M называется предел средней кривизны дуги MN этой кривой при $N \to M$ (если этот предел существует)

$$K = \lim_{N\to M} K_{cp} = \lim_{\Delta S\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta S}\right| = \left|\frac{d\varphi}{dS}\right| .$$

Определение 3. *Радиусом кривизны* R кривой в данной точке называется величина, обратная кривизне кривой в этой точке $R = \dfrac{1}{K}$. При $K = 0$ полагают $R = \infty$, а при $K = \infty$, $R = 0$.

Пример 1. Найти кривизну и радиус кривизны окружности радиуса r.

Решение. Длину дуги MN этой окружности обозначим через ΔS и обозначим угол смежности дуги MN через $\Delta\varphi$ (рис. 29). Центральный угол, опирающийся на дугу MN, также равен $\Delta\varphi$, поэтому $\Delta S = r\Delta\varphi$ и

$$K = \lim_{\Delta S\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta S}\right| = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\left|\frac{1}{r}\frac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi}\right| = \frac{1}{r} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{1}{K} = r\,.$$

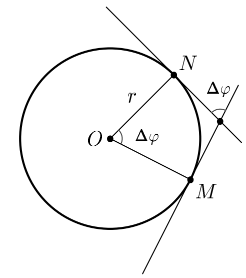


Рис. 29.

Таким образом, кривизна и радиус кривизны окружности являются величинами постоянными, не зависящими от точки окружности, в которой они вычисляются, причем радиус кривизны окружности равен радиусу этой окружности.

Если кривая γ задана уравнением $y = f(x)$, где функция $f(x)$ дважды дифференцируема, то $y' = \operatorname{tg}\varphi$, откуда $\varphi = \operatorname{arctg}(y')$ и

$$d\varphi = \frac{d\,(y')}{1 + (y')^2} = \frac{y''\,dx}{1 + (y')^2}\,.$$

Следовательно, поскольку $dS = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$, то имеем

$$K = \left|\frac{d\varphi}{dS}\right| = \frac{|y''|}{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{1}{K} = \frac{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}}{|y''|}\,.$$

Пример 2. Найти кривизну и радиус кривизны прямой.

Решение. Пусть прямая задана уравнением $y = kx + b$. Тогда $y' = k$, $y'' = 0$, следовательно, в любой точке прямой $K = 0$, $R = \infty$.

При параметрическом задании кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ из полученных выше формул вытекают следующие выражения для кривизны и радиуса кривизны

$$K = \frac{|x'y'' - x''y'|}{\left((x')^2 + (y')^2\right)^{3/2}}\,, \qquad R = \frac{\left((x')^2 + (y')^2\right)^{3/2}}{|x'y'' - x''y'|}\,.$$

Возьмем точку M на плоской кривой γ, проведем через эту точку нормаль к кривой γ и на этой нормали в сторону вогнутости отложим отрезок MC, равный радиусу кривизны R кривой γ в точке M: $MC = R$. Точка C называется *центром кривизны кривой* γ в точке M, а окружность радиуса R с центром в точке C называется *окружностью кривизны кривой* γ в точке M. Множество всех центров кривизны кривой называется *эволютой* этой кривой. Сама кривая по отношению к своей эволюте называется *эвольвентой*.

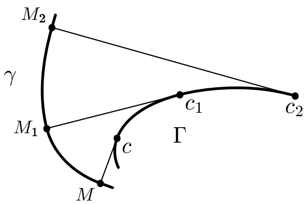


Рис. 30.

На рис. 30 эволюта кривой γ обозначается через Γ.

Определение кривизны пространственной кривой такое же, как и в случае с плоской кривой. Можно показать, что кривизна K пространственной кривой, заданной векторно-параметрическим уравнением

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}\,,$$

дается формулой

$$K = \sqrt{\frac{(\mathbf{r}')^2\,(\mathbf{r}'')^2 - (\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'')^2}{\left((\mathbf{r}')^2\right)^3}}\,.$$

здесь

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}\,, \qquad \mathbf{r}''(t) = x''(t)\,\mathbf{i} + y''(t)\,\mathbf{j} + z''(t)\,\mathbf{k}\,.$$

Следовательно,

$$\left(\mathbf{r}'\right)^2 = \left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2 + \left(z'\right)^2\,, \qquad \left(\mathbf{r}''\right)^2 = \left(x''\right)^2 + \left(y''\right)^2 + \left(z''\right)^2$$

и

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'' = x'\cdot x'' + y'\cdot y'' + z'\cdot z''\,.$$

Пример 3. Найти кривизну винтовой линии

$$\mathbf{r}(t) = r\cos t\,\mathbf{i} + r\sin t\,\mathbf{j} + ht\,\mathbf{k}\,.$$

Решение. Поскольку

$$\mathbf{r}'(t) = -r\sin t\,\mathbf{i} + r\cos t\,\mathbf{j} + h\,\mathbf{k}\,, \qquad \mathbf{r}''(t) = -r\cos t\,\mathbf{i} - r\sin t\,\mathbf{j}\,,$$

$$\left(\mathbf{r}'\right)^2 = r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + h^2 = r^2 + h^2\,, \qquad \left(\mathbf{r}''\right)^2 = r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t = r^2\,,$$

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'' = r^2\sin t\cos t - r^2\cos t\sin t = 0\,,$$

то

$$K = \sqrt{\frac{(r^2+h^2)\cdot r^2}{(r^2+h^2)^3}} = \frac{r}{r^2+h^2}\,.$$

Глава 3

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

§ 1 Функции нескольких переменных. Основные понятия

Рассмотрим $(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)$ множество упорядоченных наборов из n вещественных чисел вида, которые мы назовем *n — мерным декартовым пространством* и обозначим через $\mathbb{R}^n$, а каждый такой набор чисел будем называть *точкой этого пространства* и будем обозначать его $M\,(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)$. Числа $x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n$ называются *координатами точки* M. Точку $O(0,0,\ldots,0)$ будем называть *нулевой точкой* пространства $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим две различные точки $M_1\,(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)$ и $M_2\,(y_1,\,y_2,\,\ldots,\,y_n)$. Выражение

$$\rho\,(M_2, M_2) = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + \ldots + (y_n-x_n)^2}$$

будем называть *расстоянием между точками* M_1 и M_2.

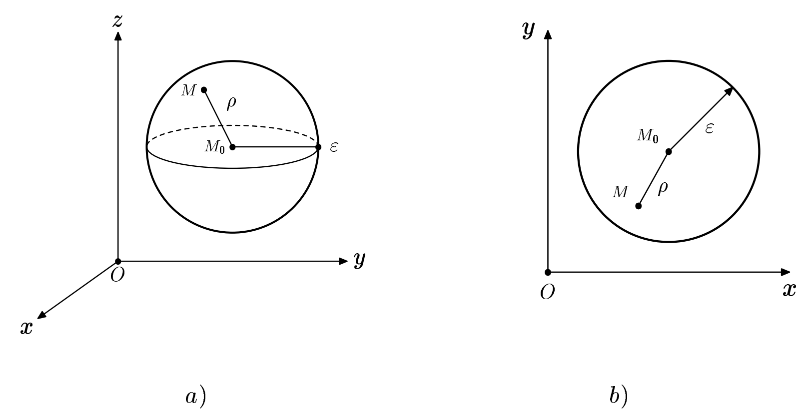


Рис. 1.

Рассмотрим некоторую фиксированную точку $M_0\left(x_1^0,\,x_2^0,\,\ldots,\,x_n^0\right)$. Множество точек, удаленных от точки M_0 менее, чем на ε, где $\varepsilon > 0$, называется *ε–окрестностью точки* M_0 и обозначается $U_\varepsilon(M_0)$. В частности, в трехмерном декартовом пространстве $\mathbb{R}^3$ ε–окрестность точки $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ представляет собою множество точек, лежащих внутри шара радиуса ε с центром в точке M_0 (рис. 1 a)), а в двухмерном пространстве $\mathbb{R}^2$ ε–окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$ — множество точек, лежащих внутри круга радиуса ε с центром в точке M_0 (рис. 1 b)).

Таким образом,

$$M \in U(M_0, \varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad \rho(M_0, M) < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - x_k^0\right)^2 < \varepsilon^2 .$$

Введем теперь важное для нас понятие области n-мерного пространства. Определения дадим для $n = 2$. Однако их можно обобщить и для $n > 2$.

Определение 1. Множество точек $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$, обладающее свойствами открытости и связности, будем называть *областью*. При этом:

1. Свойство *открытости* означает, что любая точка, принадлежащая области, принадлежит ей вместе с некоторой своей ε–окрестностью.

2. Свойство *связности* означает, что любые две точки, принадлежащие области, можно соединить непрерывной кривой, состоящей из точек, целиком принадлежащих области.

В дальнейшем мы будем обозначать области буквами Ω, D и т.п.. Примером области может служить ε–окрестность точки $M_0\,(x_0, y_0)$.

Определение 2.

1) *Граничной точкой области* называется такая точка, что любая ее ε–окрестность содержит, как точки, принадлежащие области, так и точки, ей не принадлежащие.

2) Множество всех граничных точек области называется *границей* этой области.

3) Замкнутой областью называется множество точек, которое получается в результате присоединения к открытой области Ω всей ее границы.

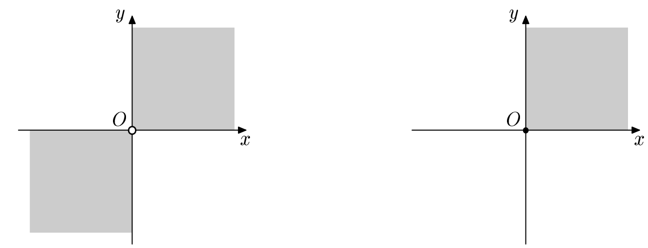
Замкнутые области принято обозначать $\overline{\Omega}$, $\overline{D}$ и т.п..

Определение 3. Область называется *ограниченной*, если ее можно поместить внутрь некоторого круга конечного радиуса R.

Пример 1. Рассмотрим множество точек $M(x, y)$, для которых а) $x \cdot y > 0$, б) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Являются ли эти множества областью?

а) Множество $x \cdot y > 0$ областью не является, так как в точке $O(0, 0)$ нарушается условие связности (рис. 2 *a*)).

б) Множество $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ представляет собою неограниченную замкнутую область (рис. 2 *b*)).



a) *b*)

Рис. 2.

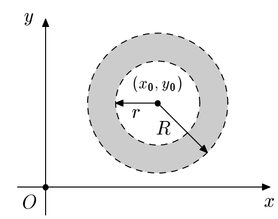


Рис. 3.

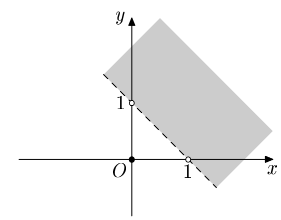


Рис. 4.

Число не связанных друг с другом частей, из которых состоит вся граница области, называется *порядком связности области*, например, область, ограниченная окружностями радиусов r и R с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ представляет собой двухсвязную область (рис. 3).

Понятие функции нескольких переменных можно ввести аналогично соответствующему понятию для одной переменной. А именно: говорят, что задана функция n переменных (аргументов) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в некоторой n-мерной области, если в силу некоторого закона f каждой точке $M\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из этой области поставлено в соответствие определенное число u. При этом пишут: $u = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Область, в каждой точке которой определена данная функция, называется множеством определения функции. В случае $n = 1$ имеем функцию одного аргумента $u = f(x)$, при $n = 2$ имеем $u = f(x, y)$, при $n = 3$ будет $u = f(x, y, z)$ и т.д..

Пример 2. Функция $z = \ln(x + y - 1)$ определена, если аргумент логарифма положителен, т.е. $x + y - 1 > 0$. Множество точек, удовлетворяющих этому неравенству, представляет собою область определения данной функции (рис. 4). Это есть точки, расположенные правее и выше прямой $x + y - 1 = 0$.

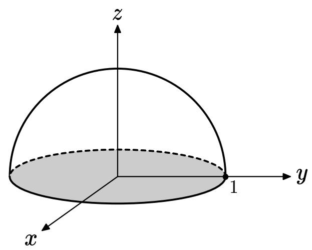


Рис. 5.

Функции $z = f(x,y)$ можно дать простую геометрическую интерпретацию.

Пример 3. Функция $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ дает нам множество точек, расположенных на верхней половине сферы $x^2+y^2+z^2=1$. Областью определения этой функции является круг $x^2+y^2 \leqslant 1$ (рис. 5).

1 Предел функции

Дадим теперь определение предела функции нескольких переменных. Пусть функция $f(M)$, где $M = M\,(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$, определена в некоторой окрестности точки $M_0\left(x_1^0,\, x_2^0,\, \ldots,\, x_n^0\right)$, причем в самой точке M_0 функция может быть и не определена.

Определение 4. Если для всякого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что из условия $M \in U(M_0,\delta)$, $M \neq M_0$ следует условие $f(M) \in U(A,\varepsilon)$, то A называется *пределом функции* $f(M)$ в точке M_0, и при этом пишут

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = A \qquad \text{или} \qquad f(M) \to A \quad \text{при} \quad M \to M_0\,.$$

Заметим, что аналогичные определения предела можно дать и для случая, когда M_0 — бесконечно удаленная точка, а A — имеет конечное или бесконечное значение.

Эти различные формулировки определения конечного или бесконечного предела в конечной или бесконечной точке можно записать лаконично с помощью введенных ранее логических символов. Например, если M_0 — конечная точка, $A = +\infty$, то

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = +\infty \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 : \quad 0 < \rho\,(M, M_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad f(M) > \frac{1}{\varepsilon}$$

или допустим, что $M(x,y,z) \to \infty$, $A = -\infty$, тогда

$$\lim_{M\to\infty} f(M) = -\infty \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 : \quad x^2+y^2+z^2 > \frac{1}{\delta^2} \;\Rightarrow\; f(M) < -\frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Напомним, что если A — число, то предел называется *конечным*, если же A равно ∞, $+\infty$ или $-\infty$, то предел называется *бесконечным* или *несобственным*.

Нетрудно заметить, что определение предела функции нескольких переменных аналогично соответствующему определению предела для функции одной переменной.

Нетрудно показать, что имеют место также и многие теоремы о пределах, сформулированные и доказанные для функции одной переменной $f(x)$, в частности, теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций нескольких переменных.

$$\lim_{M\to M_0} \left(f(M) \pm g(M)\right) = \lim_{M\to M_0} f(M) \pm \lim_{M\to M_0} g(M)\,,$$
$$\lim_{M\to M_0} f(M)\cdot g(M) = \lim_{M\to M_0} f(M)\cdot \lim_{M\to M_0} g(M)\,,$$
$$\lim_{M\to M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{\lim\limits_{M\to M_0} f(M)}{\lim\limits_{M\to M_0} g(M)}\,, \qquad \left(\lim_{M\to M_0} g(M) \neq 0\right)\,.$$

2 Непрерывность функции

Понятие непрерывности, подробно рассмотренное ранее для функции одной переменной, можно обобщить также и для функции нескольких переменных, причем, как и ранее, понятие непрерывности тесно связано с понятием предела функции в точке. Приведем несколько различных определений непрерывности функции в точке, которые эквивалентны между собой.

Определение 5. Функция $f(M)$ называется *непрерывной в точке* M_0, если

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$$

Если воспользоваться определением предела функции в точке, то можно дать такое, более развернутое определение. Сформулируем его для функции двух переменных $f(x,y)$.

Определение 6. Функция $f(x,y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0,y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ всегда можно указать такое число $\delta > 0$, что для всех точек $M(x,y)$, попадающих в δ–окрестность точки $M_0(x_0,y_0)$, будет выполняться неравенство $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$

Это определение достаточно наглядно: действительно, из него следует, что если функция $f(x,y)$ непрерывна в некоторой точке $M_0(x_0,y_0)$, то достаточно малым изменениям координат этой точки соответствуют малые изменения значения самой функции.

Производя дальнейшие аналогии, будем называть функцию $f\,(x,y)$ *непрерывной в некоторой области* Ω, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Если в некоторой точке функция не является непрерывной, то она называется *разрывной в этой точке*. Функция нескольких переменных может претерпевать разрыв не только в точке, но и на некоторой кривой и т.п. Для функций, непрерывных в точке, можно сформулировать несколько теорем, аналогичных соответствующим теоремам, рассмотренным ранее для функции одной переменной. Рассмотрим некоторые из них.

Теорема 1. *Если функции $f(M)$ и $g(M)$ непрерывны в точке M_0, то в этой точке*

1) непрерывно произведение $c \cdot f(M)$, где $c = const$,

2) непрерывны сумма и разность $f(M) \pm g(M)$,

3) непрерывно произведение $f(M) \cdot g(M)$,

4) непрерывно частное $\dfrac{f(M)}{g(M)}$, $(g(M_0) \neq 0)$.

Функции нескольких переменных, непрерывные в замкнутой ограниченной области, обладают такими же свойствами, что и функции одной переменной, непрерывные на отрезке. Сформулируем эти свойства в виде теорем, которые мы приведем без доказательств.

Теорема 2. *Если функция $f(M)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, то в этой области она принимает наименьшее значение k и наибольшее значение K, т.е. существуют точки $M_1 \in \overline{\Omega}$ и $M_2 \in \overline{\Omega}$ такие, что $f(M_1) = k$, $f(M_2) = K$ и при этом для всех точек $M \in \overline{\Omega}$: $k \leqslant f(M) \leqslant K$.*

Теорема 3. *Если функция $f(M)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, то в $\overline{\Omega}$ она принимает по крайне мере хотя бы один раз любое значение, заключенное между ее наименьшим значением k и наибольшим значение K.*

Теорема 4. *Если функция $f(M)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, то она в этой области ограничена, т.е. существует $R > 0$ такое, что $|f(M)| \leqslant R$ для любого $M \in \overline{\Omega}$.*

§ 2 Дифференцируемость функции нескольких переменных

1 Частные производные

Рассмотрим функцию $z = z(x, y)$, определенную в области Ω. Приращение $\Delta_x z$, называемое *частным приращением функции $z = z(x, y)$ по переменной x*, определяется равенством

$$\Delta_x z = z(x + \Delta x, y) - z(x, y)\,.$$

Аналогично

$$\Delta_y z = z(x, y + \Delta y) - z(x, y)\,.$$

Полное приращение функции $z = z(x, y)$ определяется равенством

$$\Delta z = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y)\,.$$

Определение 1. *Частной производной функции $z = z(x, y)$ по переменной x* называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_x z$ к вызвавшему его приращению аргумента Δx при условии, что последнее стремится к нулю.

Обозначается такая частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ или z'_x. Итак,

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x + \Delta x, y) - z(x, y)}{\Delta x}\,.$$

Совершенно аналогично определяется частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ или z'_y, т.е.

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}\,.$$

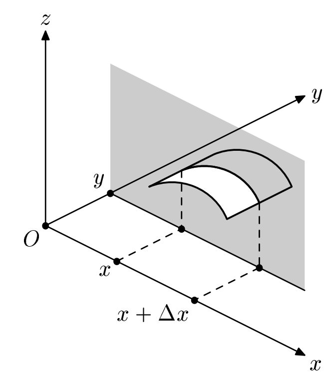


Рис. 6.

Выясним теперь геометрический смысл частных производных. Допустим, что в области Ω функция $z = z(x, y)$ положительна. Этой функции соответствует некоторая поверхность S, расположенная над областью Ω (рис. 6).

Принимая во внимание геометрический смысл обыкновенной производной, нетрудно заметить, что значение частной производной z'_x в точке $M(x, y)$ дает нам тангенс угла наклона касательной к линии пересечения поверхности S и плоскости $y = \text{const}$ с положительным направлением оси Ox. Аналогично, значение частной производной z'_y в точке $M(x, y)$ соответственно равно тангенсу угла наклона касательной к линии пересечения поверхности S и плоскости $x = \text{const}$ с положительным направлением оси Oy.

Отметим, что произведение частных производных z'_x и z'_y на приращения независимых переменных Δx и Δy называются *частными дифференциалами* и обозначаются соответственно $d_x z$ и $d_y z$, т.е.

$$d_x z = z'_x \cdot \Delta x\,, \qquad d_y z = z'_y \cdot \Delta y\,.$$

Заметим, что аналогично определяются и частные производные от функций, зависящих от трех и более независимых переменных. При отыскании частной производной по x на все прочие переменные, входящие в выражение функции, следует смотреть как на постоянные. Поэтому остается в силе таблица производных и правила дифференцирования, рассмотренные подробно при изучении производных функции одной переменной.

Пример 1. Пусть $u(x,y,z,t) = xyt^2 - \sqrt{1+x^2z}$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yt^2 - \frac{xz}{\sqrt{1+x^2z}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = xt^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2z}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = 2xyt.$$

2 Дифференцируемость функции нескольких переменных. Полный дифференциал

Рассмотрим функцию двух независимых переменных $z = z(x,y)$, определенную в некоторой области Ω плоскости Oxy. Зафиксируем точку $M(x,y) \in \Omega$ и рассмотрим переменную точку $N(x+\Delta x, y+\Delta y) \in \Omega$. Расстояние между точками M и N равно $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Определение 2. Если полное приращение функции $z = z(x,y)$ в точке $M(x,y)$ можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o\,(\rho) \quad \text{при} \quad \rho \to 0\,, \tag{1}$$

где A и B — выражения, не зависящие от Δx и Δy, $o(\rho)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем ρ, то функция $x = z(x,y)$ называется *дифференцируемой в точке* $M(x,y)$.

Теорема 1. *Если функция $z = z(x,y)$ дифференцируема в точке $M(x,y)$, то у нее существуют частные производные z'_x и z'_y в этой точке.*

Доказательство. Итак, пусть функция $z = z(x,y)$ дифференцируема в точке $M(x,y)$, тогда выполнено (1). Если мы зафиксируем y, т.е. положим $\Delta y = 0$, то для частного приращения $\Delta_x z$, получим

$$\Delta_x z = A\Delta x + o\,(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0\,.$$

Отсюда следует, что существует частная производная z'_x. Действительно, поскольку A не зависит от Δx, то

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + o(1)) = A\,.$$

Совершенно аналогично можно показать, что существует $z'_y = B$. ■

Итак, если функция дифференцируема в точке $M(x,y)$, то ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y + o(\rho) \quad \text{при} \quad \rho \to 0\,.$$

Дадим еще одно очень важное определение: определение дифференциала функции нескольких переменных.

Определение 3. *Дифференциалом dz функции $z = z(x,y)$* называется линейная относительно Δx и Δy часть полного приращения дифференцируемой функции, т.е.

$$dz = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y\,. \tag{2}$$

Заметим, что если x и y — независимые переменные, то дифференциалы этих переменных совпадают с их приращениями, т.е. $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. А тогда формулу (2) можно переписать в виде

$$dz = z'_x\,dx + z'_y\,dy\,.$$

Отметим, что так же, как для функции одной переменной, из дифференцируемости $z = z(x,y)$ в точке $M(x,y)$ вытекает ее непрерывность в этой точке. Действительно, очевидно, что в этом случае полное приращение $\Delta z \to 0$ при $\rho \to 0$.

Рассмотрим теперь теорему, дающую достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных. Заметим, что функции, удовлетворяющие этим условиям, довольно часто встречаются на практике.

Теорема 2. *Если в некоторой точке $M(x,y)$, принадлежащей области Ω, функция $z = z(x,y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y, то она в этой точке дифференцируема.*

Доказательство. Рассмотрим полное приращение функции $z = z(x,y)$ и преобразуем его следующим образом

$$\Delta z = z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x,y) =$$
$$= [z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x, y+\Delta y)] + [z(x, y+\Delta y) - z(x,y)]\,.$$

К каждой из квадратных скобок можно применить теорему Лагранжа. При этом получим

$$\Delta z = z'_x\,(x+\theta_1\Delta x,\, y+\Delta y)\,\Delta x + z'_y\,(x,\, y+\theta_2\Delta y)\,\Delta y\,,$$

где θ_1 и θ_2 — некоторые константы, удовлетворяющие условиям $0 < \theta_{1,2} < 1$. По условию теоремы частные производные z'_x, z'_y непрерывны в точке $M(x,y)$. Это означает, что

$$\lim_{\rho \to 0} z'_x\,(x+\theta_1\Delta x,\, y+\Delta y) = z'_x(x,y) \quad \text{и} \quad \lim_{\rho \to 0} z'_y\,(x,\, y+\theta_2\Delta y) = z'_x(x,y)\,,$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Отсюда следует, что

$$z'_x\left(x + \theta_1 \Delta x,\, y + \Delta y\right) = z'_x(x,y) + o(1) \quad \text{и} \quad z'_y\left(x,\, y + \theta_2 \Delta y\right) = z'_x(x,y) + o(1)$$

где $o(1)$ — бесконечно малая величина при $\rho \to 0$, т.е. $o(1) \to 0$, когда $\rho \to 0$. С учетом этого обстоятельства полное приращение функции $z = z(x,y)$ можно записать так

$$\Delta z = z'_x(x,y)\,\Delta x + z'_y(x,y)\,\Delta y + o(\rho)\,.$$

А это и означает, что функция $z = z(x,y)$ дифференцируема в точке $M(x,y)$. ■

В заключение заметим, что функция $z = z(x,y)$ называется *дифференцируемой в некоторой области* Ω, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Отметим также, что все, сказанное выше, распространяется на функции, зависящие от любого числа независимых переменных.

Пример 2. Найти полный дифференциал функции

$$u(x,y,z) = \sqrt{x^2 + xy + xyz^2}\,.$$

Решение. Очевидно, что

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz\,,$$

при этом

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x + y + yz^2}{2\sqrt{x^2 + xy + xyz^2}}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x + xz^2}{2\sqrt{x^2 + xy + xyz^2}}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2xyz}{2\sqrt{x^2 + xy + xyz^2}}\,.$$

Следовательно,

$$du = \frac{\left(2x + y + yz^2\right)\,dx + \left(x + xz^2\right)\,dy + 2xyz\,dz}{2\sqrt{x^2 + xy + xyz^2}}\,.$$

§ 3 Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям и оценке погрешностей

Рассмотрим некоторую функцию $z = z(x,y)$, определенную в области Ω и дифференцируемую в точке $M(x,y)$. Тогда ее полное приращение можно записать так

$$\Delta z = z'_x\,\Delta x + z'_y\,\Delta y + o(\rho) = dz + o(\rho) \quad \text{при} \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0\,.$$

В приближенных вычислениях иногда заменяют полное приращение функции ее дифференциалом, т.е. полагают

$$\Delta z \approx dz \quad \text{или} \quad z\left(x + \Delta x,\, y + \Delta y\right) \approx z(x,y) + z'_x(x,y)\,\Delta x + z'_y(x,y)\,\Delta y\,.$$

Заметим, что это оправдано в большом числе случаев, т.к. связано с довольно простыми вычислениями дифференциала функции. Погрешность же таких вычислений можно оценить, оценив отброшенное слагаемое $o(\rho)$. Это мы сделаем немного погодя, когда будем рассматривать формулу Тейлора для функции нескольких переменных.

Пример 1. Вычислить приближенное значение $\sqrt{(1,01)^2 + (2,99)^2 + 6}$, заменив полное приращение функции $z(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 6}$ в точке $M(1,3)$ ее дифференциалом.

Решение. Итак, примем во внимание, что

$$z\left(x + \Delta x,\, y + \Delta y\right) \approx z(x,y) + z'_x(x,y)\,\Delta x + z'_y(x,y)\,\Delta y\,,$$

получим

$$\sqrt{\left(x + \Delta x\right)^2 + \left(y + \Delta y\right)^2 + 6} \approx \sqrt{x^2 + y^2 + 6} + \frac{x\,\Delta x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 6}} + \frac{y\,\Delta y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 6}}\,.$$

Положим здесь $x = 1$, $y = 3$, $\Delta x = 0,01$, $\Delta y = -0,01$, тогда будет

$$\sqrt{(1,01)^2 + (2,99)^2 + 6} \approx \sqrt{16} + \frac{0,01}{\sqrt{16}} + \frac{3(-0,01)}{\sqrt{16}} = 3,995\,.$$

1 Оценка погрешностей с помощью полного дифференциала

При выполнении различных экспериментов приходится снимать показания с приборов, а затем вычислять интересующую нас физическую величину по некоторой формуле. Естественно, что при этом экспериментатора интересуют погрешности таких измерений. Рассмотрение проведем для случая функции, зависящей от двух независимых переменных, т.е. $z = z(x,y)$. Пусть мы измеряем величины x и y с погрешностями Δx и Δy. Погрешности эти нам не известны, но мы можем оценить их сверху: $|\Delta x| \leqslant \Delta_1$, $|\Delta y| \leqslant \Delta_2$. Здесь положительные величины Δ_1 и Δ_2 дают нам абсолютные погрешности измерений величин x и y.

Допустим, что нам надо оценить абсолютную погрешность вычисления величины $z = z(x,y)$. Очевидно, что ошибка вычисления величины z

$$\Delta z = z\left(x + \Delta x,\, y + \Delta y\right) - z(x,y)\,.$$

Если приращения Δx и Δy малы по абсолютной величине, то, заменяя полное приращение функции ее дифференциалом, получим

$$\Delta z \approx dz = z'_x\,\Delta x + z'_y\,\Delta y\,.$$

Отсюда следует, что абсолютную погрешность измерений можно оценить так

$$|\Delta z| \approx \left|z_x' \, \Delta x + z_y' \, \Delta y\right| \leqslant |z_x'||\Delta x| + |z_y'||\Delta y| \leqslant |z_x'| \, \Delta_1 + |z_y'| \, \Delta_2 \, .$$

§ 4 Дифференцирование сложных функций нескольких переменных

1 Дифференцирование сложной функции одной переменной

Рассмотрим функцию двух аргументов $z = z(x, y)$. Пусть, в свою очередь аргументы x и y являются функциями некоторого аргумента t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда ясно, что z является сложной функцией аргумента t, причем x и y выступают здесь в качестве промежуточных аргументов, т.е. $z = z\,(x(t), y(t))$.

Предположим, что функция $z = z(x, y)$ дифференцируема в некоторой точке $M(x, y)$, а функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дифференцируемы по переменной t. Тогда ясно, что если переменная t получит приращение Δt, то переменные $x = x(t)$ и $y = y(t)$ получат приращения Δx и Δy, следовательно, функция $z = z\,(x(t), y(y))$ получит полное приращение

$$\Delta z = z_x' \, \Delta x + z_y' \, \Delta y + o\,(\rho) \quad \text{при} \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0 \, .$$

Разделим обе части этого равенства на Δt

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = z_x' \, \frac{\Delta x}{\Delta t} + z_y' \, \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\Delta t} \, .$$

Устремим теперь Δt к нулю, тогда и $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, причем

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt} \, , \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x_t' \, , \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y_t' \, ,$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\rho}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} \, .$$

Окончательно получим

$$\frac{dz}{dt} = z_x' \, x_t' + z_y' \, y_t' \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \, \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \, \frac{dy}{dt} \, .$$

Пример 1. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \sqrt{x^2 + y}$, $x = \cos t^2$, $y = \operatorname{tg} t$.

Решение. Имеем

$$x_t' = -2t \sin t^2 \, , \qquad y_t' = \frac{1}{\cos^2 t} \, ,$$

$$z_x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y}} \, , \qquad z_y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y}} \, ,$$

тогда

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y}} \left(-2t \sin t^2\right) + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y}} \frac{1}{\cos^2 t} = \frac{1 - 4t \cos^2 t^2 \sin t^2}{2 \cos^2 t \sqrt{\cos^2 t^2 + \operatorname{tg} t}} \, .$$

Нетрудно обобщить сказанное на случай $z = z\,(t, x(t), y(t))$. Получим

$$\frac{dz}{dt} = z_t' + z_x' \, x_t' + z_y' \, y_t' \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \, \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \, \frac{dy}{dt} \, .$$

Пример 2. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = xyt^2$, $x = \ln \sqrt{t}$, $y = e^{\operatorname{arctg} t}$.

Решение. Ясно, что

$$z_t' = 2xyt \, , \qquad z_x' = yt^2 \, , \qquad z_y' = xt^2 \, ,$$

$$x_t' = \frac{1}{2t} \, , \qquad y_t' = \frac{e^{\operatorname{arctg} t}}{1 + t^2} \, ,$$

получим

$$\frac{dz}{dt} = 2xyt + yt^2 \cdot \frac{1}{2t} + xt^2 \cdot \frac{e^{\operatorname{arctg} t}}{1 + t^2} = \frac{t}{2} e^{\operatorname{arctg} t} \left(2 \ln t + \frac{t \ln t}{1 + t^2} + 1\right) \, .$$

2 Дифференцирование сложной функции нескольких переменных

Рассмотрим теперь вопрос о дифференцировании функции $z = z(u, v)$, где в свою очередь, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, причем функция $z = z(u, v)$ дифференцируема по своим аргументам u и v, а функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, в свою очередь, дифференцируемы по переменным x и y. Дадим приращение переменной x, тогда функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ получают частные приращения $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$, функция $z(x, y)$ получит полное приращение, вызванное изменениями переменных u и v, но по отношению к переменной x это приращение будет частным, т.е. получим

$$\Delta_x z = z_u' \, \Delta_x u + z_v' \, \Delta_x v + o(\rho) \quad \text{при} \quad \rho = \sqrt{(\Delta_x u)^2 + (\Delta_y v)^2} \to 0 \, .$$

Разделим левую и правую часть этого равенства на Δx

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = z_u' \, \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + z_v' \, \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\Delta x} \, .$$

Устремляя Δx к нулю, получим

$$z_x' = z_u' \, u_x' + z_v' \, v_x' \quad \text{или} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \, \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \, \frac{\partial v}{\partial x} \, .$$

Аналогично

$$z_y' = z_u' \, u_y' + z_v' \, v_y' \quad \text{или} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \, \frac{\partial v}{\partial y} \, .$$

Пример 3. Вычислить $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\sqrt{u^2+uv}$, $u=\sin(3xy)$, $v=\cos\dfrac{y}{x}$.

Решение. Поскольку

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u+v}{2\sqrt{u^2+uv}}\,,\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u}{2\sqrt{u^2+uv}}\,,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=3y\cos(3xy)\,,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=3x\cos(3xy)\,,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\,,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}\,,$$

то

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u+v}{2\sqrt{u^2+uv}}\cdot 3y\cos(3xy)+\frac{u}{2\sqrt{u^2+uv}}\cdot\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}=$$
$$=\frac{3y\left(2\sin(3xy)+\cos\dfrac{y}{x}\right)\cos(3xy)+\dfrac{y}{x^2}\sin(3xy)\sin\dfrac{y}{x}}{2\sqrt{\sin^2(3xy)+\sin(3xy)\cos\dfrac{y}{x}}}\,.$$

Предоставим читателю возможность найти выражение для частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3 Дифференцирование неявных функций

Рассмотрим функцию аргумента x, заданную неявно, т.е. функцию $y=y(x)$, заданную соотношением вида $F(x,y)=0$. Очевидно, что это выражение задает функцию лишь в том случае, если каждому значению аргумента x в силу этого соотношения соответствует лишь единственное значение y. Очевидно, что не всегда из соотношения $F(x,y)=0$ удается найти y. Тем не менее, возникает необходимость находить производную y'_x неявно заданной функции. Очевидно, что операцию отыскания производной в данном случае не следует выполнять формально, т.е. нужно отдавать себе отчет в том, а задает ли вообще соотношение $F(x,y)=0$ функцию, единственная ли она и существует ли производная y'_x. Очевидно, например, что уравнение $x^2+y^2+1=0$ не определяет никакой функции.

Приведем без доказательства формулировку теоремы, дающей достаточные условия существования, единственности и дифференцируемости неявно заданной функции $y=y(x)$, определяемой соотношением $F(x,y)=0$.

Теорема 1. *Пусть функция $z=F(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям*

1) *$F(x,y)$ определена в окрестности точки (x_0,y_0), причем $F(x,y)$ и ее частные производные $F'_x(x,y)$ и $F'_y(x,y)$ непрерывны в указанной окрестности,*

2) *$F(x_0,y_0)=0$,*

3) *$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$.*

Тогда существует, и причем единственная, функция $y=y(x)$, которая определена в некоторой окрестности точки x_0 и обладает следующими свойствами

1) *функция $y=y(x)$ дифференцируема в окрестности точки x_0,*

2) *$y_0=y(x_0)$,*

3) *$F(x,y(x))\equiv 0$.*

Допустим теперь, что некоторая функция $z=F(x,y)$ удовлетворяет условиям, сформулированным в теореме. Найдем производную неявно заданной функции y'_x. Продифференцируем по x обе части тождества $F(x,y(x))\equiv 0$. Принимая во внимание полученное выше правило дифференцирования сложной функции, зависящей от нескольких переменных, получим

$$F'_x+F'_y\,y'_x=0\,,$$

откуда следует

$$y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}\quad\text{или}\quad\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\,.$$

Аналогичное рассмотрение можно провести и для функции $z=z(x,y)$, определяемой соотношением $F(x,y,z)=0$. Если функция $z=z(x,y)$ определяется этим соотношением, то $F(x,y,z(x,y))\equiv 0$. Выполняя частное дифференцирование, получим

$$F'_x+F'_z\,z'_x=0\,,\qquad F'_y+F'_z\,z'_y=0\,,$$

откуда следует

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}\,,\qquad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}\,.$$

Пример 4. Найти производную y'_x функции $y=y(x)$, заданной неявным уравнением $x^2+y^2-1=0$.

Решение. Заметим, что данное уравнение определяет окружность. Дифференцируем уравнение $x^2+y^2-1=0$ почленно по x как сложную функцию

$$2x+2y\cdot y'_x=0\,.$$

Отсюда следует $y'_x=-x/y$. Ясно, что в точках, где $y=0$, производная обращается в бесконечность (касательная перпендикулярна к оси Ox).

§ 5 Частные производные высших порядков

Рассмотрим дифференцируемую функцию $z = z(x, y)$. Очевидно, что выполнив частное дифференцирование, найдем $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f_1(x,y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f_2(x,y)$, где $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ — некоторые функции, и если они в свою очередь дифференцируемы, то можно найти, $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}$ а также $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}$. В этом случае говорят о *частных производных второго порядка* функции $z = z(x,y)$. Для частных производных второго порядка вводят следующие обозначения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}\,,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}\,.$$

Аналогично вводятся в рассмотрение частные производные более высокого порядка. Например,

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right)\,, \qquad \frac{\partial^n z}{\partial^{n-1} y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}}\right)$$

Скажем несколько слов о так называемых *смешанных производных*. Остановимся на смешанных производных второго порядка z''_{xy} и z''_{yx}. Очевидно, что эти смешанные производные отличаются только порядком выполнения операции дифференцирования. Возникает вопрос, при выполнении каких условий эти смешанные производные совпадают, т.е. не зависят от порядка дифференцирования. Приведем без доказательства следующую теорему о смешанных частных производных.

Теорема 1. *Если у функции $z = z(x,y)$ в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ существуют непрерывные смешанные производные z''_{xy} и z''_{yx}, то они совпадают в каждой точке этой области, т.е. $z''_{xy}(x,y) = z''_{yx}(x,y)$ для любой точки $(x,y) \in \Omega$.*

Пример 1. Убедиться, что у функции $z = \sin\left(xy^2\right)$ совпадают смешанные производные.

Решение.

$$z'_x = y^2 \cos\left(xy^2\right)\,, \qquad z''_{yx} = 2y\cos\left(xy^2\right) - 2xy^3 \sin\left(xy^2\right)\,,$$
$$z'_y = 2yx\cos\left(xy^2\right)\,, \qquad z''_{xy} = 2y\cos\left(xy^2\right) - 2xy^3 \sin\left(xy^2\right)\,.$$

Мы видим, что смешанные производные z''_{xy} и z''_{yx} совпадают. Их непрерывность на всей плоскости Oxy очевидна.

§ 6 Дифференциалы функции нескольких переменных. Исследование инвариантности их формы

Рассмотрим функцию $z = z(x,y)$. Если она дифференцируема, то, как мы это выяснили ранее, линейная относительно Δx и Δy часть полного приращения функции называется полным дифференциалом этой функции, т.е.

$$dz = z'_x\,\Delta x + z'_y\,\Delta y\,.$$

Заметим, что здесь Δx и Δy — приращения независимых переменных x и y соответственно. Напомним, что в случае дифференцируемой функции одной переменной $y = y(x)$ ее дифференциал определяется так

$$dy = y'_x\,\Delta x\,.$$

В частности, если $y = x$, то дифференциал этой функции $dx = \Delta x$. Отсюда следует, что дифференциал независимой переменной x совпадает с ее приращением. Совершенно аналогично $dy = \Delta y$. А тогда полный дифференциал функции $z = z(x,y)$ можно записать так

$$dz = z'_x\,dx + z'_y\,dy\,.$$

Покажем, что эта форма дифференциала обладает свойством инвариантности и на тот случай, когда переменные x и y не независимые, а являются функциями некоторого аргумента t, т.е. $z = z\left(x(t), y(t)\right)$. Действительно

$$dz = z'_t\,dt = \left(z'_x\,x'_t + z'_y\,y'_t\right)\,dt = z'_x\,dx + z'_y\,dy\,,$$

т.е

$$dz = z'_x\,dx + z'_y\,dy\,, \qquad \text{где} \quad x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,.$$

Теперь предположим, что x и y зависят не от одного, а от двух независимых аргументов, т.е. $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. Тогда $z = z\left(x(u,v), y(u,v)\right)$, причем функции $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ предполагаются дифференцируемыми по переменным u и v. Очевидно, что

$$dz = z'_u\,du + z'_v\,dv = \left(z'_x\,x'_u + z'_y\,y'_u\right)\,du + \left(z'_x\,x'_v + z'_y\,y'_v\right)\,dv =$$
$$= z'_x\left(x'_u\,du + x'_v\,dv\right) + z'_y\left(y'_u\,du + y'_v\,dv\right) = z'_x\,dx + z'_y\,dy\,,$$

т.е. окончательно

$$dz = z'_x\,dx + z'_y\,dy\,, \qquad \text{где} \quad x = x(u,v)\,, \quad y = y(u,v)\,,$$

т.е. форма полного дифференциала сохраняется и в том случае, если x и y зависят в свою очередь от двух независимых переменных u и v.

Сделаем теперь некоторые обобщения. Итак, рассмотрим дифференцируемую функцию двух независимых переменных $z = z(x,y)$. Тогда, как мы только что выяснили, ее полный дифференциал равен

$$dz = z'_x(x,y)\,\Delta x + z'_y(x,y)\,\Delta y\,.$$

Очевидно, что приращения независимых переменных Δx и Δy не зависят от того, в какой точке выполняется дифференцирование функции $z = z(x, y)$. Будем считать, что выбрав эти приращения, мы их зафиксировали. Тогда полный дифференциал dz может рассматриваться как некоторая функция независимых переменных x и y, а тогда можно ставить вопрос о ее дифференцировании, т.е. о существовании дифференциала от дифференциала, т.е. $d\,(dz)$. Если дифференцируема не только функция $z(x, y)$, но и ее частные производные $z'_x(x, y)$ и $z'_y(x, y)$, то тогда существует дифференциал от дифференциала, который называется *вторым дифференциалом функции* $z = z(x, y)$, и обозначается d^2z, т.е.

$$d^2z = d\,(dz)\ .$$

Очевидно, что

$$d^2z = \left(z'_x\,\Delta x + z'_y\,\Delta y\right)'_x\,\Delta x + \left(z'_x\,\Delta x + z'_y\,\Delta y\right)'_y\,\Delta y =$$
$$= z''_{xx}\,(\Delta x)^2 + 2z''_{xy}\,\Delta x\Delta y + z''_{yy}\,(\Delta y)^2\ .$$

Напомним, что здесь $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$. Обозначая их квадраты $(\Delta x)^2 = dx^2$, $(\Delta y)^2 = dy^2$, можем записать второй дифференциал так

$$d^2z = z''_{xx}\,dx^2 + 2z''_{xy}\,dxdy + z''_{yy}\,dy^2\,.$$

Напомним, что мы предполагали здесь, что x и y — независимые переменные. Совершенно аналогично, определяя полный дифференциал третьего порядка функции $z = z(x, y)$ как полный дифференциал от дифференциала второго порядка, т.е.

$$d^3z = d\left(d^2z\right)\ ,$$

выполнив аналогичные преобразования, получим

$$d^3z = z'''_{xxx}\,dx^3 + 3z'''_{xxy}\,dx^2dy + 3z'''_{xyy}\,dxdy^2 + z'''_{yyy}\,dy^3\,.$$

Для удобства записи полного дифференциала любого порядка вводят такую символическую запись

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^n z\,,$$

которую следует понимать как некий «оператор», применение которого к функции $z = z(x, y)$ предполагает выполнение частного дифференцирования функции $z = z(x, y)$, причем порядок этих частных производных определяется степенью соответствующего слагаемого в правой части, которая раскрывается как формула бинома Ньютона.

Нетрудно доказать, что если некоторая функция $u = u(x, y, z)$ зависит от трех независимых аргументов, то очевидно, что ее полный дифференциал равен

$$du = u'_x\,dx + u'_y\,dy + u'_z\,dz\,,$$

причем для обозначения полного дифференциала n-го порядка такой функции, если он существует, имеет место такая символическая запись

$$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy + \frac{\partial}{\partial z}\,dz\right)^n u\,.$$

Рассмотрим теперь полный дифференциал второго порядка

$$d^2z = z''_{xx}\,dx^2 + 2z''_{xy}\,dxdy + z''_{yy}\,dy^2\,.$$

Выясним, сохраняется ли форма второго полного дифференциала, если переменные x и y не независимые, а являются функциями некоторого аргумента t, т.е $x = x(t)$, $y = y(t)$. Другими словами, выясним, обладает ли полный дифференциал второго порядка свойством инвариантности своей формы?

Итак, полагаем $z = (x(t), y(t))$. Тогда

$$dz = z'_t\,dt = z'_x\,dx + z'_y\,dy\,,$$

т.е. первый дифференциал свойством инвариантности своей формы обладает. Далее

$$d^2z = d\,(dz) = \left(z'_x\,dx + z'_y\,dy\right)'_t\,dt = \left(z'_x\,x'_t + z'_y\,y'_t\right)'_t\,dt^2 =$$
$$= \left(z''_{xx}(x'_t)^2 + z''_{xy}x'_ty'_t + z'_xx''_{tt} + z''_{yx}y'_tx'_t + z''_{yy}(y'_t)^2 + z'_yy''_{tt}\right)\,dt^2 =$$
$$= \left(z''_{xx}\,dx^2 + 2z''_{xy}\,dxdy + z''_{yy}\,dy^2\right) + z'_x\,d^2x + z'_y\,d^2y = d^2z + z'_x\,d^2x + z'_y\,d^2y \neq d^2z\,.$$

Вывод: второй дифференциал не обладает свойством инвариантности своей формы. Аналогично не обладают такими свойствами и дифференциалы более высоких порядков.

Заметим, что исключение составляет тот случай, когда x и y являются линейными функциями аргумента t, т.е. $x = at + b$, $y = ct + d$. (Предоставляем возможность читателю убедиться в этом самостоятельно). Причем это остается в силе для сложной функции любого числа аргументов, т.е. полный дифференциал произвольного порядка функции нескольких переменных, обладает свойством инвариантности своей формы только в случае линейных замен переменных.

В заключение отметим, что наряду с понятием полного дифференциала функции нескольких независимых переменных dz существуют так называемые *частные дифференциалы функции* $z = z(x, y)$ по аргументам x и y, которые обозначаются соответственно d_xz и d_yz, т.е.

$$d_xz = z'_x\,dx\,, \qquad d_yz = z'_y\,dy\,.$$

Геометрически $d_x z$ означает приращение функции $z(x, y)$ в точке (x, y) вдоль касательной, проведенной в точке (x, y) к линии пересечения поверхности $z = z(x, y)$ с плоскостью $y = \text{const}$. Аналогичный геометрический смысл имеет и частный дифференциал $d_y z$. Нетрудно видеть, что полный дифференциал функции нескольких переменных — это есть сумма всех частных дифференциалов этой функции.

§ 7 Формула Тейлора

Ранее мы вывели формулу Тейлора для функции одного аргумента

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n ,$$

где c лежит между x и a.

Напомним, что для представимости функции $y = f(x)$ формулой Тейлора достаточно, чтобы в окрестности точки $x = a$ функция $y = f(x)$ была бы дифференцируема n раз.

Обобщим формулу Тейлора на случай функции, зависящей от нескольких независимых переменных. Доказательство проведем для функции $z = z(x, y)$. Допустим, что эта функция дифференцируема n раз по своим аргументам в окрестности $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0), принадлежащей некоторой области Ω плоскости Oxy. Пусть точка $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ принадлежит этой окрестности.

Зафиксируем Δx, Δy и введем в рассмотрение сложную функцию аргумента t, определенную следующим образом

$$f(t) = z\,(x(t), y(t)) , \qquad \text{где} \qquad x(t) = x_0+t\Delta x , \quad y(t) = y_0+t\Delta y , \qquad t \in [0, 1] .$$

Нетрудно видеть, что параметрические уравнения для $x(t)$ и $y(t)$ дают нам уравнения отрезка прямой, соединяющей точки (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ (рис. 7).

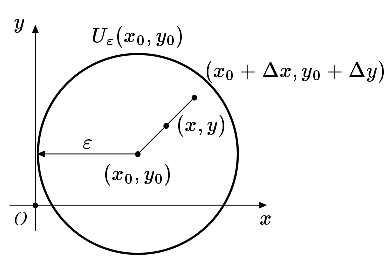


Рис. 7.

Напомним, что при такой зависимости переменных x и y от параметра t, обладает свойством инвариантности не только первый полный дифференциал функции $z = z(x, y)$, но и полные дифференциалы второго, третьего и более высоких порядков, т.е.

$$d^k f(t) = d^k z(x, y)\Big|_{x=x_0+t\Delta x,\; y=y_0+t\Delta y} =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^k z(x, y)\Big|_{x=x_0+t\Delta x,\; y=y_0+t\Delta y} . \qquad (1)$$

Ясно, что здесь $dx = \Delta x\,dt$, $dy = \Delta y\,dt$. Напишем формулу Тейлора для функции $f(t)$ заменив в ней a на t, а x на $t + \Delta t$. Тогда получим

$$f\,(t + \Delta t) = f(t)+f'(t)\Delta t+\frac{f''(t)}{2!}\,(\Delta t)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}\,(\Delta t)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\,(\Delta t)^n ,$$

где $c = t + \theta\Delta t$, $0 < \theta < 1$, т.е. c есть точка, лежащая между t и $t + \Delta t$. Эту формулу можно переписать так

$$f\,(t + \Delta t) - f(t) = df(t) + \frac{d^2 f(t)}{2!} + \ldots + \frac{d^{n-1} f(t)}{(n-1)!} + \frac{d^n f(t + \theta\Delta t)}{n!} , \quad 0 < \theta < 1 .$$

Положим теперь здесь $t = 0$, $\Delta t = 1$ и напомним, что при $t = 0$ мы имеем точку (x_0, y_0), а при $\Delta t = 1$ точку $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, кроме того $f(0) = f(x_0, y_0)$, $f(1) = f\,(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, тогда с учетом (1), получим

$$z\,(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = z(x_0, y_0) + dz(x_0, y_0) + \frac{d^2 z(x_0, y_0)}{2!} + \ldots$$
$$+ \frac{d^{n-1} z(x_0, y_0)}{(n-1)!} + \frac{d^n z\,(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{n!} , \qquad 0 < \theta < 1 ,$$

причем здесь следует положить $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, т.к. $\Delta t = dt$, а мы положили $\Delta t = 1$, следовательно, действительно из соотношений $dx = \Delta x\,dt$, $dy = \Delta y\,dt$ следует, что в данном случае $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$.

Итак, здесь в правой части равенства дифференциалы dx и dy совпали с заранее взятыми приращениями Δx и Δy переменных x и y, т.е. в правой части стоят полные дифференциалы различных порядков функции $z = z(x, y)$ двух независимых переменных x и y. Введем полное приращение этой функции $\Delta z(x_0, y_0) = z\,(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0)$, тогда выведенную формулу можно переписать так

$$\Delta z(x_0, y_0) = dz(x_0, y_0) + \frac{d^2 z(x_0, y_0)}{2!} + \ldots$$
$$+ \frac{d^{n-1} z(x_0, y_0)}{(n-1)!} + \frac{d^n z\,(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{n!} , \qquad 0 < \theta < 1 .$$

Полученная формула называется *формулой Тейлора n-го порядка*. Последнее слагаемое, как и ранее, называется *остаточным членом в форме Лагранжа*. Отбрасывая остаточный член, мы получаем приближенное равенство, точность которого следует оценить, оценивая сверху модуль отброшенного остаточного члена. И в частности, заменяя полное приращение функции двух независимых переменных ее дифференциалом, мы можем оценить погрешность, оценивая модуль отброшенного остаточного члена

$$R_2 = \frac{1}{2!}\left(z''_{xx}(x,y)\,(\Delta x)^2 + 2z''_{xy}(x,y)\Delta x\Delta y + z''_{yy}(x,y)\,(\Delta y)^2\right)\Big|_{x=x_0+\theta\Delta x,\ y=y_0+\theta\Delta y}\,.$$

Заметим, что аналогичная формула Тейлора имеет место и для функции любого числа независимых переменных.

§ 8 Приложения дифференциального исчисления функций нескольких переменных

1 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

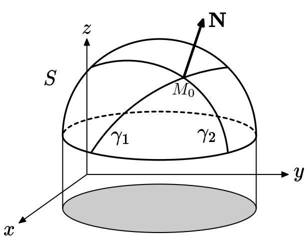


Рис. 8.

Рассмотрим некоторую поверхность S, заданную уравнением $F(x,y,z) = 0$ (рис. 8). Пусть функция $F(x,y,z)$ дифференцируема, и допустим также, что ни в одной точке этой поверхности все три частные производные F'_x, F'_y, F'_z в ноль не обращаются, т.е. будем считать, что на поверхности S нет *особых точек*. Зафиксируем на этой поверхности некоторую точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и проведем через нее различные кривые γ_k, $k = 1,2,\ldots,n$, лежащие на этой поверхности, задав их с помощью параметрических уравнений

$$x = x_k(t)\,, \quad y = y_k(t)\,, \quad z = z_k(t)\,, \qquad k = 1,\,2,\,\ldots,\,n\,.$$

Ясно, что т.к. кривые γ_k лежат на поверхности S, то имеют место соотношения

$$F\left(x_k(t), y_k(t), z_k(t)\right) = 0\,, \qquad k = 1,\,2,\,\ldots,\,n\,.$$

Продифференцируем левую часть этой формулы как сложную функцию по переменной t. Получим

$$F'_x\,x'_t + F'_y\,y'_t + F'_z\,z'_t = 0\,. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение два вектора

$$\mathbf{N}\left(F'_x,\,F'_y,\,F'_z\right)\,, \qquad \mathbf{T}\left(x'_t,\,y'_t,\,z'_t\right)\,.$$

Ясно, что вектор $\mathbf{T}$ есть касательный вектор к годографу вектора

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}\,,$$

т.е. вектор, касательный к кривой, лежащей на поверхности S. Множество таких касательных векторов к различным кривым, проходящим через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ на поверхности, лежит в плоскости, которая называется *касательной плоскостью* к поверхности S в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Из соотношения (1) ясно, что вектор $\mathbf{N}$ перпендикулярен к касательной плоскости в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Такой вектор называется *нормалью к поверхности S* в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Теперь нетрудно найти уравнение касательной плоскости к поверхности S в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, а также найти канонические уравнения прямой, на которой лежит нормаль к поверхности S. Действительно, касательная плоскость к поверхности S с уравнением $F(x,y,x) = 0$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет уравнение

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0\,.$$

Принимая за направляющий вектор прямой, перпендикулярной к поверхности в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, вектор $\mathbf{N}$, получим канонические уравнения этой нормали в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}\,.$$

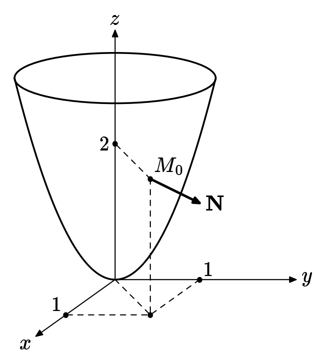


Рис. 9.

Пример 1. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности S в точке $M_0(1,1,2)$, если уравнение поверхности $z = x^2 + y^2$ (рис. 9).

Решение. Запишем уравнение поверхности (это параболоид вращения) так

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0\,.$$

Найдем $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$, $F'_z = -1$. Следовательно в точке $M_0(1,1,2)$ нормаль к поверхности $\mathbf{N} = (2,2,-1)$. Тогда касательная плоскость имеет уравнение

$$2(x-1) + 2(y-1) - (z-2) = 0\,,$$

т.е.

$$2x + 2y - z - 2 = 0\,.$$

Соответственно, прямая, на которой лежит нормальный вектор $\mathbf{N}$, такова

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}\,.$$

2 Экстремумы функции нескольких переменных

Аналогично тому, как это было сделано для функции одной переменной, вводятся определения экстремума функции нескольких переменных. Рассмотрение проведем для функции двух независимых переменных.

Итак, допустим, что некоторая функция $z = z(x, y)$ определена в некоторой области Ω плоскости Oxy, и пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ является внутренней точкой этой области. Дадим определение максимума и минимума функции $z = z(x, y)$, которые эта функция достигает в некоторой точке области Ω.

Определение 1.

1) Говорят, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z(x, y)$ имеет *максимум*, если существует ε-окрестность $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ точки M_0 такая, что для всех точек M из этой окрестности (причем $M \neq M_0$) имеет место неравенство $z(M) < z(M_0)$.

2) Говорят, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z(x, y)$ имеет *минимум*, если существует ε-окрестность $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ точки M_0 такая, что для всех точек M из этой окрестности имеет место неравенство $z(M_0) < z(M)$ $(M \neq M_0)$.

Максимальное и минимальное значение функции в точке M_0 называют просто *максимум и минимум функции* $z(x, y)$ и обозначают $\max z(x, y)$ и $\min z(x, y)$. Максимумы и минимумы, как и ранее, называют *экстремумами*.

Итак, с помощью логических символов приведенные определения можно записать так

$$\max z(x, y) = z(x_0, y_0) \quad \overset{def}{\Leftrightarrow}$$
$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall (x, y) \in U_\varepsilon(x_0, y_0),\ M \neq M_0\ :\ z(x, y) < z(x_0, y_0)\,,$$

$$\min z(x, y) = z(x_0, y_0) \quad \overset{def}{\Leftrightarrow}$$
$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall (x, y) \in U_\varepsilon(x_0, y_0),\ M \neq M_0\ :\ z(x_0, y_0) < z(x, y)\,.$$

Заметим, что не следует смешивать понятие максимума и минимума функции с ее наибольшим и наименьшим значением.

Допустим, что функция $z = z(x, y)$ дифференцируема в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и имеет в ней экстремум (максимум или минимум). Пусть для определенности в этой точке функция $z = z(x, y)$ имеет максимум. Это означает, что

$$\forall (x, y) \in U_\varepsilon(x_0, y_0) \setminus \{M_0\}\ :\ z(x, y) < z(x_0, y_0)\,,$$

и, в частности, $z(x, y_0) < z(x_0, y_0)$. Отсюда следует, что функция одной переменной $z(x, y_0)$ в точке x_0 имеет максимум. Но тогда в этой точке $z'_x(x_0, y_0) = 0$. Совершенно аналогично в этой точке $z'_y(x_0, y_0) = 0$.

Если бы мы положили, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция имеет минимум, то получили бы точно такой же вывод. Полученный результат можно оформить в виде теоремы.

Теорема 1 (Необходимые условия экстремума функции нескольких переменных)**.** *Если функция $z = z(x, y)$, определенная в области Ω плоскости Oxy, имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум, то ее частные производные первого порядка в этой точке обращаются в ноль, т.е.*

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = 0\,, \qquad \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = 0\,.$$

Или, что то же самое, в точке $M_0(x_0, y_0)$ обращается в ноль полный дифференциал первого порядка данной функции.

Замечание. Отметим, что не всякая точка, в которой обращаются в нуль все частные производные первого порядка данной функции, является точкой, в которой функция имеет экстремум. Иными словами, равенство нулю частных производных первого порядка в точке $M_0(x_0, y_0)$ есть необходимое, но не достаточное условие экстремума.

3 Достаточные условия экстремума

По-прежнему для большей компактности изложения будем рассматривать функцию двух переменных $z = z(x, y)$.

Итак, допустим, что мы нашли точку $M_0(x_0, y_0)$, в которой выполнены необходимые условия экстремума, т.е. точку, в которой обращаются в нуль частные производные $z'_x(x_0, y_0)$ и $z'_y(x_0, y_0)$. Как и ранее, точку $M_0(x_0, y_0)$ мы можем назвать *подозрительной на экстремум*. Выясним теперь, каковы же достаточные условия, при выполнении которых в этой точке функция будет иметь максимум или минимум.

Заметим, что дальнейшие рассуждения будут носить не слишком строгий характер.

Допустим, что функция $z(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ дифференцируема трижды. Напишем формулу Тейлора третьего порядка для этой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$

$$\Delta z(x_0, y_0) = dz(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 z(x_0, y_0) + \frac{1}{3!} d^3 z\left(x_0 + \theta_1 \Delta x,\ y_0 + \theta_2 \Delta y\right)\,,$$

где Δx и Δy — произвольные приращения, которые предполагаются достаточно малыми по абсолютной величине, $\Delta z(x_0, y_0) = z\left(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y\right) - z(x_0, y_0)$ — соответствующее приращение функции $z(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ и $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$.

В силу того, что необходимые условия экстремума выполнены, очевидно, что $dz(x_0, y_0) = 0$, а тогда

$$z\left(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y\right) - z(x_0, y_0) = \frac{1}{2!} d^2 z(x_0, y_0) + \frac{1}{3!} d^3 z\left(x_0 + \theta_1 \Delta x,\ y_0 + \theta_2 \Delta y\right)\,.$$

Ясно, что если Δx и Δy достаточно малы по модулю, то знак правой части этого равенства определяется знаком его первого слагаемого, т.е. знаком $d^2z(x_0, y_0)$, т.к. здесь в правой части стоят однородные многочлены относительно Δx и Δy соответственно второй и третьей степени.

Рассмотрим подробнее выражение для второго дифференциала

$$d^2z(x_0,y_0) = z''_{xx}(x_0,y_0)\,(\Delta x)^2 + 2z''_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + z''_{yy}(x_0,y_0)\,(\Delta y)^2 \ .$$

Итак, если $d^2z(x_0,y_0) > 0$, то в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция имеет минимум, т.к. в этом случае $z(x_0,y_0) < z\,(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$, если $d^2z(x_0,y_0) < 0$, то максимум, т.к. тогда $z\,(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) < z(x_0,y_0)$.

Может, однако, оказаться, что $d^2z(x_0,y_0) > 0$ при одних сочетаниях Δx и Δy, а при других $d^2z(x_0,y_0) < 0$. Это означает, что в точке $M_0(x_0,y_0)$ у функции $z(x,y)$ экстремума нет. Говорят, что в этом случае функция имеет *минимакс*. Если же это выражение знака не меняет, но может обращаться в нуль, то это означает лишь то, что по знаку $d^2z(x_0,y_0)$ нельзя судить о наличии экстремума у функции $z(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$. В этом случае следует рассмотреть формулу Тейлора четвертого порядка и провести аналогичные исследования. Аналогичные результаты справедливы для функции, зависящей от любого числа независимых переменных.

Попытаемся теперь получить простые и удобные в применении достаточные условия экстремума для функции $z(x,y)$, выраженные через значения частных производных второго порядка функции $z(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$. Для этого обозначим

$$z''_{xx}(x_0,y_0) = A\,, \qquad z''_{xy}(x_0,y_0) = B\,, \qquad z''_{yy}(x_0,y_0) = C\,, \qquad \frac{\Delta x}{\Delta y} = t$$

(для определенности считаем, что $\Delta y \neq 0$). Очевидно, что

$$d^2z(x_0,y_0) = \left(At^2 + 2Bt + C\right)(\Delta y)^2 \ .$$

Ясно, что знак этого выражения определяется знаком квадратного трехчлена $\varphi(t) = At^2 + 2Bt + C$. Его дискриминант $D = 4\left(B^2 - AC\right)$.

Следовательно, если $D < 0$, то график функции $\varphi(t)$ не пересекает ось Ot (корни комплексные), если $D > 0$, то график функции пересекает ось Ot в двух точках (корни вещественные), если $D = 0$, то график функции $\varphi(t)$ касается оси Ot (корни вещественные и равные).

Введем теперь в рассмотрение величину $\Delta = AC - B^2$. Принимая во внимание все вышесказанное, можем сделать следующие выводы

1) Если $\Delta > 0$, то Δz сохраняет знак для всех Δx и Δ. При этом, если $A > 0$, то и $\Delta z > 0$. Следовательно, в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $z(x,y)$ имеет минимум. Если же $A < 0$, то и $\Delta z < 0$, следовательно, в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $z(x,y)$ имеет максимум.

2) Если $\Delta < 0$, то для различных Δx и Δy функция $\varphi(t)$ имеет различные знаки, в силу чего Δz изменяет знак в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$. Следовательно, в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция экстремума не имеет.

3) Если $\Delta = 0$, то Δz знака не меняет, но может обращаться в нуль. Значит, вопрос о наличии экстремума в точке $M_0(x_0,y_0)$ остается открытым.

Заметим теперь, что функции нескольких переменных могут иметь экстремум не только в тех точках, где частные производные $z'_x(x,y)$ и $z'_y(x,y)$ обращаются в нуль, но и в точках, где функция недифференцируема, лишь бы только в этих точках она была непрерывна.

§ 9 Наибольшее и наименьшее значение функции

Пусть функция $z = z(x,y)$ определена и непрерывна в некоторой замкнутой ограниченной области Ω. Тогда заведомо функция в этой области имеет наибольшее и наименьшее значение. Для их отыскания нужно исследовать точки, подозрительные на экстремум и лежащие внутри области Ω. Затем нужно исследовать поведение функции на границе области, т.е. найти на границе наибольшее и наименьшее значение функции. И в заключение следует сравнить экстремальные значения, которые функция принимает в области Ω с ее значениями на границе.

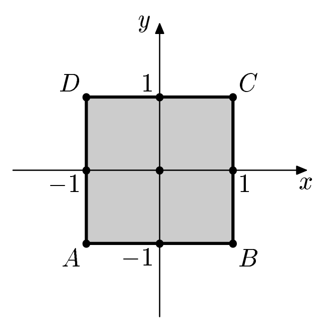


Рис. 10.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 3 - x^2 - y^2$ в области Ω, ограниченной прямыми $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.

Решение. Приравниваем к нулю частные производные $z'_x = -2x = 0$, $z'_y = -2y = 0$. Получаем точку $(0,0)$, подозрительную на экстремум. Вычисляем $z''_{xx} = -2$, $z''_{yy} = -2$, $z''_{xy} = 0$. Следовательно $\Delta = AC - B^2 = 4 > 0$, $A < 0$. Значит, в точке $(0,0)$ функция имеет максимум. Исследуем теперь поведение функции на границе области, т.е. на контуре $ABCD$, где $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$ (рис. 10).

1) На AB: $y = -1$, $z = 2 - x^2$, $x \in [-1, 1]$, $z'_x = -2x$. Точка $x = 0$ подозрительна на экстремум $z(0,-1) = 2$, $z(A) = z(B) = 1$.

2) На BC: $x = 1$, $z = 2 - y^2$, $y \in [-1, 1]$, $z'_y = -2y$. Точка $y = 0$ подозрительна на экстремум $z(1,0) = 2$, $z(B) = z(C) = 1$.

3) На DC: $y = 1$, $z = 2 - x^2$, $x \in [-1, 1]$, $z'_x = -2x$. Точка $x = 0$ подозрительна на экстремум $z(0, 1) = 2$, $z(D) = z(C) = 1$.

4) На AD: $x = -1$, $z = 2 - y^2$, $y \in [-1, 1]$, $z'_y = -2y$. Точка $y = 0$ подозрительна на экстремум $z(-1, 0) = 2$, $z(A) = z(D) = 1$.

Остается сделать вывод. Итак, внутри квадрата функция $z(x, y)$ имеет максимум в точке $(0, 0)$: $z_{max} = 3$. На границе области функция принимает наименьшее значение в точках A, B, C, D: $z(A) = z(B) = z(C) = z(D) = 1$, а наибольшее в точках $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, причем $z(0, -1) = z(1, 0) = z(0, 1) = z(-1, 0) = 2$.

Ответ: наибольшее значение функция принимает в точке $(0, 0)$, оно совпадает с максимальным значением функции $z_{max} = z(0, 0) = 3$, наименьшее значение $z_{min} = 1$ функция принимает в точках A, B, C, D.

§ 10 Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

Мы рассмотрели экстремумы функции нескольких переменных, считая только, что эти точки лежат внутри некоторой области Ω. Такие экстремумы называются *безусловными*.

Однако часто приходится отыскивать экстремумы функции $z = z(x, y)$ в области Ω в предположении, что кроме того выполняются условия вида

$$\varphi(x, y) = 0\,. \tag{1}$$

Экстремумы, удовлетворяющие таким условиям, называются *условными*. В этом случае аргументы x и y данной функции $z(x, y)$ нельзя считать независимыми переменными. Очевидно, что их связывает уравнение (1), которое называется *уравнением связи*. Геометрически это означает, что условный экстремум отыскивается не для всех точек (x, y), принадлежащих области Ω, а для точек, принадлежащих области Ω, и лежащих на некоторой кривой γ, уравнение которой $\varphi(x, y) = 0$.

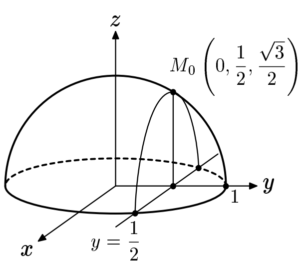


Рис. 11.

Например, очевидно, что функция

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \tag{2}$$

достигает безусловного максимума $z_{max} = 1$ в точке $O(0, 0)$ (рис. 11). Если же потребовать: найти условный экстремум функции (2) на прямой $y = 1/2$, то очевидно, что он достигается в точке $(0, 1/2)$ и равен $\sqrt{3}/2$. Отыскание условного экстремума функции можно свести к отысканию безусловного экстремума некоторой другой функции. Например, в данном случае достаточно исследовать функцию

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\Big|_{y=1/2} = \sqrt{\frac{3}{4} - x^2}\,.$$

Однако такой способ не всегда бывает удобен. Рассмотрим другой способ отыскания условного экстремума, который называется *методом множителей Лагранжа*.

Итак, допустим, что нам нужно найти условный экстремум функции $z = z(x, y)$, причем выполнено уравнение связи (1).

Допустим, что точка $M_0(x_0, y_0)$ — точка условного экстремума, значит, в этой точке производная по x от функции $z = z(x, y)$ с учетом уравнения связи должна быть равна нулю, что равносильно равенству нулю $dz(x, y)$ в точке M_0. Итак в точке M_0

$$dz(x, y) = z'_x(x, y)\,dx + z'_y(x, y)\,dy = 0\,. \tag{3}$$

С другой стороны, продифференцируем уравнение связи (1), получим

$$d\varphi(x, y) = \varphi'_x(x, y)\,dx + \varphi'_y(x, y)\,dy = 0\,. \tag{4}$$

Умножим соотношение (4) почленно на некоторый множитель λ и прибавим к соотношению (3)

$$\left(z'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y)\right)\,dx + \left(z'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y)\right)\,dy = 0\,.$$

Выберем теперь число λ так, чтобы выполнялось условие

$$z'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y) = 0\,. \tag{5}$$

Заметим, что это возможно, т. к. мы предполагаем, что выполняются условия теоремы существования неявно заданной функции в силу которой $\varphi'_y(x, y) \neq 0$. Тогда очевидно, что выполняется и второе условие

$$z'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y) = 0\,. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$F(x, y) = z(x, y) + \lambda\varphi(x, y)\,.$$

Очевидно, что условия (5) и (6) дают нам необходимые условия экстремума функции $F(x, y)$, которая называется *функцией Лагранжа*, параметр λ при этом называется *множителем Лагранжа*.

Итак, для того, чтобы найти точки, в которых данная функция $z = z(x, y)$ может иметь условный экстремум, определенный уравнением связи $\varphi(x, y) = 0$, необходимо решить систему трех уравнений

$$\begin{cases} F'_x(x, y) = z'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y) & = 0 \\ F'_y(x, y) = z'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y) & = 0 \\ \varphi(x, y) & = 0\,. \end{cases}$$

Найденные таким образом точки, естественно, подлежат дополнительному исследованию.

Пример 1. Найти наибольшее значение функции $u = \sqrt[3]{xyz}$ при условии, что $x + y + z = a$, $(a > 0)$.

Решение. Итак, необходимо найти условный максимум функции $u = \sqrt[3]{xyz}$, если уравнение связи $x + y + z - a = 0$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F = \sqrt[3]{xyz} + \lambda(x + y + z - a).$$

Найдем ее частные производные по x, y и z и приравняем их к нулю, а также добавим к ним уравнение связи

$$\begin{cases} F'_x = \dfrac{\sqrt[3]{xyz}}{3x} + \lambda & = 0 \\ F'_y = \dfrac{\sqrt[3]{xyz}}{3y} + \lambda & = 0 \\ F'_z = \dfrac{\sqrt[3]{xyz}}{3z} + \lambda & = 0 \\ x + y + z - a & = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему и исключая параметр λ, получим $x = y = z = a/3$. Следовательно, данная функция $u = \sqrt[3]{xyz}$ имеет условный экстремум в точке $(a/3, a/3, a/3)$. Можно проверить, что этот экстремум является максимумом и при этом $u_{max} = a/3$. Таким образом, для любых положительных чисел x, y, z связанных соотношением $x + y + z = a$, выполняется неравенство $\sqrt[3]{xyz} < a/3$, но $a = x + y + z$, следовательно, имеем

$$\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x + y + z}{3}.$$

Обобщая полученный результат на любое число переменных, можем сделать полезный вывод: среднее геометрическое нескольких чисел не превосходит их среднего арифметического.

§ 11 Метод наименьших квадратов

Допустим, что экспериментатор снимает показания некоторого прибора в определенные моменты времени или делает другие какие-то измерения, т.е. в данных точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ получает соответствующий набор значений функции $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Возникает необходимость нахождения аналитического выражения функции $y = f(x)$ или многочлена $y = P_m(x)$, достаточно точно представляющего искомую функцию $y = f(x)$ на данном отрезке $[a, b]$ (мы считаем, что $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$).

Интерполирование функции состоит в замене данной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ алгебраическим многочленом $P_m(x)$ степени m, значения которого в n данных точках x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ (*узлах интерполирования*) совпадают со значениями функции $y = f(x)$ в этих точках. Однако, в ряде задач такое приближенное представление функции $y = f(x)$ не является удобным и обоснованным, например, когда значения функции в узлах определены с погрешностями. В этом случае естественно прибегнуть к такому способу построения приближенного многочлена, при котором ошибки эксперимента не оказывали бы существенного влияния на результат. Таким способом является метод построения многочлена, приближающего функцию $y = f(x)$ в смысле *среднеквадратичного отклонения*. Такой метод называется *методом наименьших квадратов*.

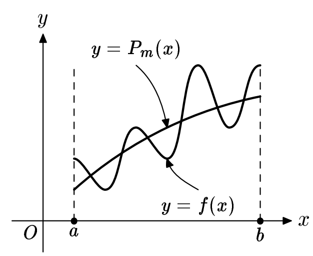


Рис. 12.

Поставим задачу об отыскании среди многочленов m-ой степени

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

такого многочлена, который реализует минимум величины

$$\delta_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (P(x_i) - f(x_i))^2},$$

называемой *среднеквадратичным отклонением* многочлена $P_m(x)$ от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Если выражение δ_n мало, то это означает, что в среднем на подавляющей части отрезка $[a, b]$ функция $P_m(x)$ близка к $f(x)$, хотя в отдельных точках $[a, b]$ или на протяжении очень малой части этого отрезка разность $f(x) - P_m(x)$ может быть достаточно большой (рис.12).

Выражение для δ_n будет иметь минимум, если будет иметь минимум подкоренное выражение

$$S = \sum_{i=1}^{n} (P(x_i) - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_m x_i^m - y_i)^2.$$

Таким образом, задача сводится к минимизации суммы квадратов отклонений значений многочлена $P_m(x)$ от значений $f(x)$ в узлах x_i. Отсюда и название метода — «метод наименьших квадратов».

Величину S будем рассматривать как функцию $S = S(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ коэффициентов a_k, $k = 0, 1, \ldots, m$ многочлена $P_m(x)$. Необходимое условие экстремума функции $S = S(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ состоит в равенстве нулю всех её частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_m x_i^m - y_i) \cdot x_i^k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, m. \quad (1)$$

Уравнения (1) образуют относительно искомых коэффициентов a_k систему $(m+1)$ линейных уравнений, которая, как можно доказать, всегда имеет единственное решение.

Поскольку функция $S = S(a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_m)$ является квадратичной функцией своих аргументов, то факт наличия экстремума у этой функции не вызывает сомнений, а поскольку очевидно, что функция $S = S(a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_m)$ максимума в принципе иметь не может, то упомянутый экстремум является минимумом.

Итак, определив из системы (1) значения коэффициентов a_k, $k = 0, 1, \ldots, m$, мы решим задачу об отыскании многочлена $P_m(x)$, наименее уклоняющегося в смысле среднеквадратичного от функции $f(x)$ на отрезке $[a,\, b]$.

Пример. Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей

x_i	$0,5$	$1,0$	$1,5$	$2,0$	$2,5$	$3,0$
$y_i = f(x_i)$	$0,31$	$0,82$	$1,29$	$1,85$	$2,51$	$3,02$

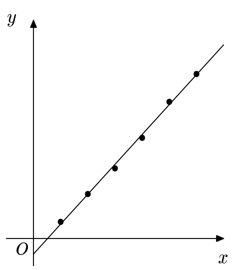


Рис. 13.

Требуется аппроксимировать эту функцию по методу наименьших квадратов линейным многочленом

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x\,.$$

Решение. Составим для нашего случая систему (1), сокращенную на 2

$$(a_0 + 0,5a_1 - 0,31) + (a_0 + a_1 - 0,82) + (a_0 + 1,5a_1 - 1,29) +$$
$$+ (a_0 + 2a_1 - 1,85) + (a_0 + 2,5a_1 - 2,51) + (a_0 + 3a_1 - 3,02) = 0\,,$$

$$(a_0 + 0,5a_1 - 0,31)\cdot 0,5 + (a_0 + a_1 - 0,82) + (a_0 + 1,5a_1 - 1,29)\cdot 1,5 +$$
$$+ (a_0 + 2a_1 - 1,85)\cdot 2 + (a_0 + 2,5a_1 - 2,51)\cdot 2,5 + (a_0 + 3a_1 - 3,02)\cdot 3 = 0\,,$$

или после упрощений

$$\begin{cases} 6\cdot a_0 & + & 10,5\cdot a_1 & = & 9,8 \\ 10,5\cdot a_0 & + & 22,75\cdot a_1 & = & 21,945\,. \end{cases}$$

Из этой системы находим $a_0 = -0,285$, $a_1 = 1,096$. Искомый многочлен

$$P_1(x) = 1,096x - 0,285\,.$$

На рис 13. изображены шесть данных точек и график полученного многочлена.

Литература

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика*. т. 1,2,3. -М. Дрофа. 2007г.

[2] Смирнов В.И. *Курс высшей математики*. т. 1,2. Физматгиз. 2006г.

[3] Фихтенгольц Г.М. *Основы математического анализа*. т. 1,2. Лань. 2008г.

[4] Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. *Лекции по математическому анализу*. Физматгиз. 2005г.

[5] Зорич В.А. *Математический анализ*. т. 1,2. -М. МЦНМО. 2007г.

[6] Кудрявцев Л.Д. *Краткий курс математического анализа*. т. 1,2. Физматгиз. 2005г.

[7] Файншмидт В.Л. *Дифференциальное и интегральное исчисление функций одного аргумента*. БХВ СПб. 2006г.

[8] Файншмидт В.Л. *Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких аргументов*. БХВ СПб. 2007г.

[9] *Сборник задач по математическому анализу для втузов*. под ред. Ефимова А.В. т. 1,2,3,4. 2004-2007гг.

[10] Кузнецов Л.А. *Сборник заданий по высшей математике*. Типовые расчеты. Лань. 2008г.

[11] Демидович Б.П.. *Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов*. 2001г.

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007-2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики - крупнейшая в Санкт-Петербургском государственном университете информационных технологий, механики и оптики. С момента основания на ней работали такие выдающиеся ученые, как И.П.Натансон, В.А.Тартаковский, В.Н.Попов, И.А.Молотков, А.Г.Аленицын, В.В.Жук и другие. Научные интересы сотрудников покрывают практически все разделы математики. На кафедре сложилась мощная научная школа по математическому моделированию сложных физических систем. В последнее время активно развивается направление, связанное с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовым компьютером и квантовыми коммуникациями. Сотрудники кафедры активно участвуют в международных научных конференциях, работают в рамках Российских и международных научных проектов. Сложилось тесное научное сотрудничество с Санкт-Петербургским государственным университетом, Петербургским отделением Математического института имени В.А.Стеклова РАН, лабораторией физикохимии наносистем Института химии силикатов РАН и другими научными центрами как в России, так и за рубежом: университетами Марселя и Тулона (Франция), Ювяскиля (Финляндия), Гумбольдтовским университетом Берлина (Германия).

Иван Александрович Лапин
Лариса Семеновна Ратафьева
Валентин Михайлович Фролов

Математический анализ I

Учебное пособие

Под общей редакцией Ларисы Семеновны Ратафьевой

В авторской редакции

Компьютерный набор и верстка	А.П. Танченко
Дизайн обложки	А.П. Танченко
Редакционно-издательский отдел СПбГУ ИТМО	
Зав. РИО	Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД №	
Подписано к печати	Заказ №
Тираж	Отп. на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского государственного
университета информационных
технологий, механики и оптики
197101, Санкт-Петербург,
пр. Кронверкский, д.49