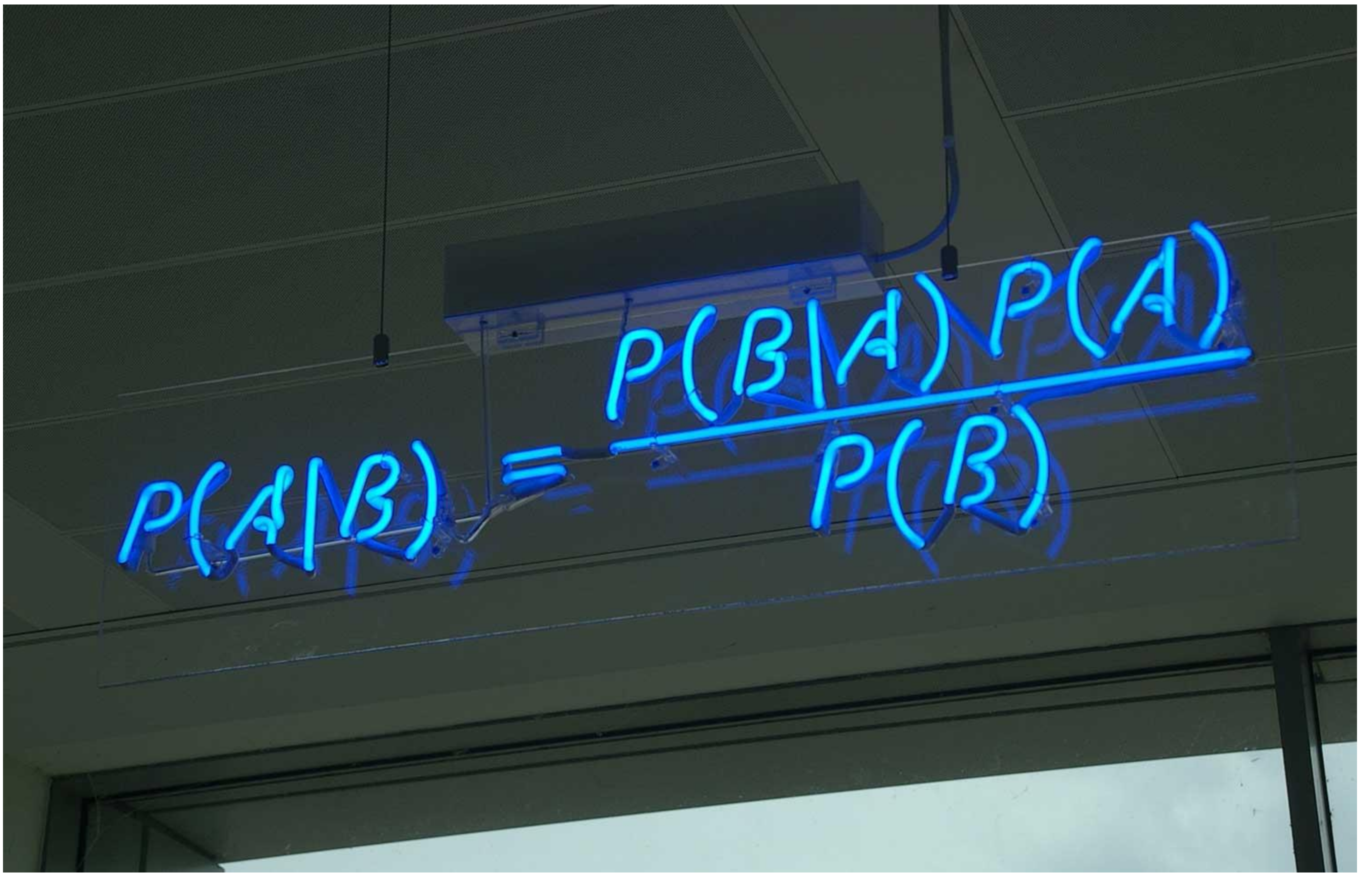
А.В. Блаженов, Л.И. Брылевская, О.П. Далевская,
Е.В. Милованович, Ю.Б. Ржонсницкая

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



Санкт-Петербург
2024

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.В. Блаженов, Л.И. Брылевская, О.П. Далевская, Е.В. Милованович, Ю.Б. Ржонсницкая

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 01.03.02, 09.03.02
в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования бакалавриата

ИТМО

Санкт-Петербург
2024

Блаженов А.В., Брылевская Л.И., Далевская О.П., Милованович Е.В., Ржонсницкая Ю.Б., Сборник задач по теории вероятностей– СПб: Университет ИТМО, 2024. – 51 с.

Рецензент:
Тертычный Владимир Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, доцент (квалификационная категория "ординарный доцент") факультета информационных технологий и программирования, Университета ИТМО.

Сборник задач составлен в помощь студентам и преподавателям на практических занятиях по курсу «Теория вероятностей». Задачи разбиты по темам в полном соответствии с учебной программой. Темы начинаются с краткой теоретической справки. Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по программе бакалавриата: 09.03.02 – «Информационные системы и технологии», 01.03.02 – «Прикладная математика и информатика». Сборник задач может быть полезен студентам, изучающим теорию вероятностей в рамках других направлений подготовки.

ИТМО (Санкт-Петербург) — национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: IT и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication.
Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализовывается программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития — научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента.
ИТМО пять лет подряд — в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере IT. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ-5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ... 4
1. Классическая и геометрическая вероятности ... 6
2. Операции над событиями ... 9
3. Условная вероятность. Формулы полной вероятности и Байеса ... 12
4. Схема Бернулли ... 15
5. Дискретные случайные величины ... 19
6. Абсолютно непрерывные случайные величины ... 23
7. Стандартные абсолютно непрерывные распределения ... 26
8. Преобразования случайных величин ... 29
9. Сходимость случайных величин. Неравенства и предельные теоремы ... 32
10. Многомерные распределения ... 35
11. Зависимость случайных величин ... 41
12. Характеристические функции ... 44
Приложение 1 ... 46
Приложение 2 ... 48
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ... 50

ВВЕДЕНИЕ

Управление случайными и массовыми процессами сегодня является задачей многих наук, в том числе технических и компьютерных. При исследовании и моделировании таких процессов используются методы вероятностного и статистического анализа. Основы этих методов изучаются в рамках дисциплин математического блока “Теория вероятностей” и “Математическая статистика”. Данное пособие представляет собой сборник задач по курсу “Теория вероятностей” для направлений 09.03.02 – «Информационные системы и технологии» и 01.03.02 – «Прикладная математика и информатика». Дисциплина направлена на формирование следующих компетенций выпускника: способность применять математические, естественнонаучные и общепрофессиональные знания для понимания окружающего мира и для решения задач профессиональной деятельности (ОПК-1), способность формулировать, строить и применять модели для управления достижением планируемых результатов процессов и объектов профессиональной деятельности на базе знаний математики, программирования и программного обеспечения (ОПК-3). Использование данного пособия на практических занятиях и в самостоятельной работе позволит студентам усвоить основные понятия и законы теории вероятностей, научиться выполнять операции над случайными событиями и их вероятностями, исследовать законы распределения различных случайных величин, производить аналитические действия со случайными величинами и их числовыми характеристиками, интерпретировать аналитические результаты вероятностного анализа в терминах качественного поведения случайных величин, овладеть основными аналитическими приемами вероятностного анализа, методиками проведения расчетов, включая применение асимптотических методов, навыками численного расчета основных характеристик, возникающих при проведении вероятностного анализа в задачах профессиональной деятельности.

Задачи пособия разбиты по темам в соответствии с учебной программой. Темы начинаются с краткой теоретической справки, которая, однако, не является достаточной для успешного решения задач. Поэтому перед практической работой студенту рекомендуется изучить теоретические основы данной темы по конспекту или видеозаписям лекций, или же по источникам, рекомендованным преподавателем, например, [5]. Каждая тема включает три раздела с задачами разного уровня сложности. Раздел А содержит типовые задачи, при решении которых приобретается знание основных понятий и методов дисциплины, вырабатываются навыки решения стандартных задач. Выполнение заданий этого уровня является обязательным при освоении дисциплины. Раздел В включает задачи среднего уровня, требующие более сложной техники и анализа, и нацеленные на углубление знаний по дисциплине и освоение специальных методов решения. Такие задания можно рекомендовать студентам для выполнения в рамках самостоятельной работы, снабдив их указаниями к решению. Раздел C состоит из задач повышенной сложности, при решении которых может понадобиться исследование либо эвристика. Задачи этого раздела рекомендованы студентам, проявляющим глубокий интерес к дисциплине и желающим освоить ее на высоком уровне. Больший объем задач для приобретения прочных навыков их решения студент может найти в задачниках [1], [2], [3]. Для углубленного понимания предмета полезно изучить классический двухтомник Феллера [4]. Наконец, лучше прочувствовать суть и внутреннюю логику данного предмета поможет замечательная научно-популярная книга Элленберга [6].

Большая часть задач первых двух разделов были придуманы авторами пособия или являются общеизвестными, некоторые задачи раздела B были взяты из источников [1], [2], [3], [4], [5]. Раздел C содержит ряд авторских задач, задачи из упомянутых источников, а также задачи, используемые в работе и обучении современными научными и педагогическими коллективами (в научных интернет-форумах, в зачетах по теории вероятности в МГУ и ВШЭ, на собеседованиях при приеме на работу в компанию Huawei, на вступительных экзаменах в вузы Южной Кореи). К сожалению, точное их авторство установить практически невозможно, однако авторы пособия выражают благодарность своим коллегам за оригинальные и актуальные задачи.

Материал данного сборника соответствует содержанию и уровню читаемого в Университете ИТМО курса по теории вероятностей. Пособие может быть также использовано для обучения по другим направлениям подготовки, так как включает задачи всех основных разделов теории вероятностей и задачи, которые могут служить моделями явлений, изучаемых в естественных и социальных науках.

Пособие отличает разнообразие задач, оно также содержит задачи всех типов стандартного курса. Небольшой объем и компактная структура задачника делает его электронную версию удобной в использовании в аудиторной и самостоятельной работе.

1. КЛАССИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Если пространство элементарных исходов содержит конечное число n равновозможных исходов, то вероятность каждого исхода полагаем равной $\frac{1}{n}$, и в этом случае применима формула классической вероятности:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{m}{n}$$

где $m -$ число элементарных исходов, благоприятных событию A.
Настоятельно рекомендуется начинать вычисления со знаменателя.

Если пространство элементарных исходов можно изобразить областью в $\mathbb{R}^n$ конечной меры $\mu(\Omega)$ (длина отрезка, площадь плоской фигуры, объем тела и т.д.) и вероятность события $\mathrm{P}(A)$ зависит лишь от ее меры $\mu(A)$, то применима формула геометрической вероятности:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

А

1. В коробке 8 красных и 4 синих карандаша. Вынули один карандаш. Какова вероятность того, что он красный?
2. В урне 5 белых и 2 черных шара. Вынули два шара. Какова вероятность того, что они оба белые?
3. В урне 5 белых и 3 черных шара. Вынули три шара. Какова вероятность того, из них два белых и один черный?
4. Студент выучил 20 вопросов из 25. Какова вероятность того, что он сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить на оба вопроса?
5. На проводе сидели 2 вороны, 3 синицы и четыре воробья. Шесть птиц улетели. Найти вероятность того, что одна синица и два воробья остались.
6. В коробке 3 синих, 3 красных и 4 желтых карандаша. Вынули 6 карандашей. Найти вероятность того, что среди них будет поровну красных и желтых.
7. В лес отправились два охотника, три грибника и пять школьников. Половина из них не вернулась. Какова вероятность того, что среди них один охотник, два грибника и два школьника?

8. На четырех карточках написаны буквы “И”, “А”, “Л”, “П”. Они раскладываются в ряд.
   Какова вероятность получить осмысленное слово (существительное)?
9. Интервал движения трамвая строго 15 минут.
   Какова вероятность того, что его понадобится ждать не более 5 минут, случайно придя на остановку?
10. Точка (p, q) случайным образом выбирается в квадрате $[0; 1] \times [0; 1]$.
    Найти вероятность того, что уравнение $x^2 + px + q$ имеет вещественные корни. Какова вероятность того, что оно имеет кратные корни?

В

11. В урне лежали шары, черные и белые. Вероятность вынуть из урны белый шар была равна 2/5. После того, как из урны вынули один белый шар, эта вероятность стала равна 1/3.
    Определить, сколько шаров каждого цвета было в урне.
12. На полке расставлены 8 книг. Найти вероятность того, что три конкретные книги будут стоять рядом.
13. За круглым столом рассаживаются 5 человек. Найти вероятность того, что два конкретных из них будут сидеть рядом.
14. На первом этаже в лифт шестиэтажного дома зашли трое человек.
    Какова вероятность того, что они выйдут на разных этажах?
15. Какова вероятность того, что в группе из 25 студентов хотя у двух день рожденья в один день?
16. Восемь команд разбиваются на две подгрупп по четыре.
    Найти вероятность того, что две сильнейшие команды окажутся в разных подгруппах.
17. В шкафу находятся 10 разных пар ботинок. Случайно взяли 4 ботинка.
    Какова вероятность, что среди них окажется хотя бы одна пара?
18. Из колоды в 52 игральных карты наудачу берут 6 карт.
    Найти вероятность того, что среди этих карт:
    а) окажутся представители всех мастей;
    б) будет ровно 5 карт одной масти.
19. В преферансе у трех игроков 8 козырей. При этом у одного из них оказалось на руках половина козырей. Найти вероятность того, что оставшиеся 4 козыря у остальных двух игроков лягут в соотношении:
    a). 4:0; b). 3:1; c). 2:2.

20. В студенческом общежитии живут $n+1$ человек. Вася случайным образом выбрал одного соседа и подарил ему интересную книгу. Сосед прочитал книгу и поступил, как Вася.
    С какой вероятностью книга вернется к Васе на k –м шаге?
21. На шахматную доску поставили наугад белую и черную ладьи.
    Найти вероятность того, что они не бьют друг друга.
22. Кубик, все грани которого окрашены, распилен на 64 одинаковых кубика. Найти вероятность того, что хотя бы одна грань наугад выбранного кубика окрашена.
23. Найти вероятность того, что при броске двух кубиков в сумме выпадет не менее 9 очков.
24. Студент добирается до факультета с пересадкой. Сначала он ждет на остановке трамвай, затем на другой остановке ждет автобус. Интервал движения трамвая составляет 12 минут, интервал движения автобуса – 8 минут. Найти вероятность того, что студенту придется ждать на остановках в сумме не более 10 минут.
25. Две точки случайным образом выбираются на окружности.
    Какова вероятность того, что расстояние между ними окажется меньше радиуса окружности?

С

26. Из точки $(0,0,0)$ с шагом $+1$ по одной осей строится путь к точке $(n,2n,3n)$.
    Найти вероятность того, что ломаная пути будет состоять из трех отрезков.
27. Из занумерованных от 1 до 45 шаров выбрали пять. Найти вероятность того, что максимальный номер выбранных шаров равен k.
28. Из n предметов выбирают n раз по одному с возвращением.
    Найти вероятность того, что некоторый конкретный предмет выбран не будет. Найти также предел этой вероятности при $n \to \infty$.
29. Двое человек договорились встретиться между 12.00 и 13.00.
    Найти вероятность того, что время ожидания их друг друга будет не более 15 минут.
30. Стержень длины l наугад разламывается на три части. Найти вероятность того, что из них можно будет составить треугольник.

2. ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ

Суммой событий $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ называется их объединение $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ или событие, состоящее в том, что произошло **хотя бы** одно из данных событий.

Произведением событий $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ называется пересечение $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ или событие, состоящее в том, что произошли **все** данные события.

Противоположным к событию A называется событие $\bar{A}$, состоящее в том, что событие A **не** произошло. Данные события связаны формулой обратной вероятности: $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\bar{A})$.

События A и B называются несовместными, если $A \cdot B = \emptyset$, то есть данные события не могут произойти одновременно.
Если события A и B несовместны, то $\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.
Если нет, то используем формулу: $\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - P(AB)$.
В случае большего числа слагаемых получаем формулу "включений-исключений":

$$\mathrm{P}(A_1 + \cdots + A_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathrm{P}(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} \mathrm{P}(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} \mathrm{P}(A_i A_j \ldots A_n)$$

События A и B называются *независимыми*, если $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$, то есть данные события никак не связаны, факт наступления одного из них не влияет на оценку вероятности наступления другого.

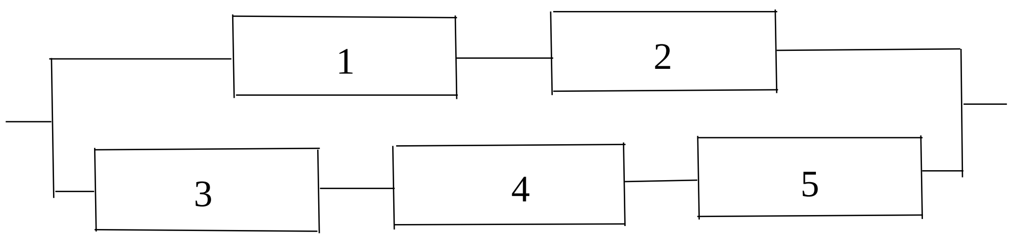
А

31. Монету подбросили дважды. Какова вероятность того, что герб выпадет один раз?
32. Монету подбросили 10 раз.
    Найти вероятность того, что выпадет хотя бы один герб.
    Куда стремится данная вероятность при увеличении числа бросков?
33. (Шевалье де Мере, 1650г.) Какова вероятность того, что при четырех бросаниях кости выпадет хотя бы одна шестерка?
34. Два стрелка по разу выстрелили по мишени. Вероятность попадания первого стрелка в цель равна 0,8, а второго 0,6.
    Найти вероятность того, что: а). оба попали в цель; б). один попал в цель; в). хотя бы один попал в цель.

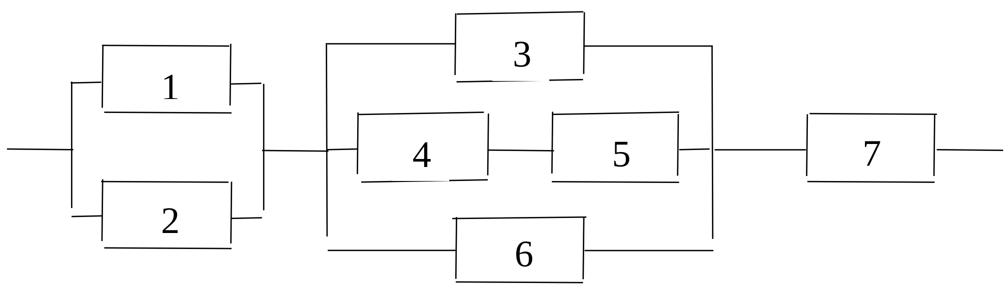
35. Брак в первой партии микросхем составляет 5%, во второй – 10%, в третьей – 20%. Из каждой партии взяли по одной микросхеме.
Найти вероятность того, что: а). все микросхемы исправны; б). две исправны; в). хотя бы одна исправна.
36. В первой урне 2 белых и 5 черных шаров, во второй 5 белых и 2 черных. Из каждой урны взяли по четыре шара.
Найти вероятность того, что в сумме было вынуто 4 белых шара.

В

37. Электрическая цепь состоит из 5 независимых элементов, вероятности исправной работы которых равны $p_1 = 0{,}9;\ p_2 = 0{,}7;\ p_3 = 0{,}8;\ p_4 = 0{,}5;\ p_5 = 0{,}6$. Найти вероятность того, что ток пройдет по цепи.



38. Электрическая цепь состоит из 7 независимых элементов, вероятности исправной работы которых равны $p_1 = p_2 = 0{,}8;\ p_3 = p_6 = 0{,}6;\ p_4 = 0{,}5;\ p_5 = 0{,}8;\ p_7 = 0{,}9$. Найти вероятность того, что ток пройдет по цепи.



39. Вероятность сдать студентом экзамен с первой попытки 1/2, со второй 1/3, с третьей 1/4 и т.д. Всего не более 30 попыток.
Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен?
40. Двое поочередно извлекают карты из колоды в 52 карты, выкладывая их на стол. Побеждает тот, после чьего хода на столе окажутся две карты одной масти. Найти вероятность победы второго игрока.
41. Доказать, что если события A и В несовместны и не являются невозможными, то они зависимы.

C

42. Два игрока, A и B, бросили по n монет. Затем игрок A еще раз бросил монету.
    Какова вероятность того, что у A выпадет больше гербов, чем у B?
43. После выпивки n человек случайным образом надевают n шляп. Вероятность потерять шляпу по дороге равна p. Какова вероятность того, что никто не придет домой в своей шляпе?
    Куда стремится данная вероятность при $n \to \infty$?
44. Имеются города A, B, C, D. Вероятность того, что между двумя городами имеется дорога, равна p.
    Найти вероятность того, что из города A можно проехать в D.
    Чему равна данная вероятность при $p = 0{,}5$?
45. В самолете на n мест садятся n пассажиров. Первой заходит старушка, которая садится на произвольное место. Каждый следующий пассажир садится на свое место, если оно свободно, и на произвольное, если оно занято.
    Какова вероятность того, что последний пассажир сядет на свое место?
46. Найти вероятность того, что в записи k-значного 5-ричного числа не будет двух нулей подряд.

3. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ФОРМУЛЫ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И БАЙЕСА

Через $\mathrm{P}(B|A)$ обозначается вероятность наступления события В при условии, что имело место событие А. Пусть имеется информация, что событие А произошло. Тогда вероятность наступления события В переоцениваем по *формуле условной вероятности*:

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(A)}$$

Отсюда получаются *формулы умножения вероятностей:* $P(AB) = P(A) \cdot \mathrm{P}(B|A)$ и

$\mathrm{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(A_n|\, A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$ в общем случае.

События $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ образуют полную группу событий, если они попарно несовместны и исчерпывают все элементарные исходы.

Если вероятность наступления события А зависит от предшествующего события H_i либо от ситуации, в которой оно происходит, то применяем *формулу полной вероятности:*

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

Часто возникает обратная задача. Известно, что событие А уже произошло, и требуется дать переоценку вероятности ситуации H_k, в которой оно произошло. Тогда используем *формулу Байеса:*

$$\mathrm{P}(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) \cdot P(A|H_i)}$$

А

47. В коробке 3 красных карандаша и два синих. Вынули три карандаша. Найти вероятность того, что первые два красные, а третий синий.
48. В группе 2 отличника, 5 хорошистов и 3 троечника. Вероятность решить задачу для отличника равна 0,9, для хорошиста 0,7, для троечника 0,4. Найти вероятность того, что наугад вызванный студент решит задачу.

49. Вероятность попадания в цель первого стрелка 0,9, а второго 0,3. Случайно выбранный стрелок попал в цель.
Какова вероятность того, что это был первый стрелок?
50. В первой коробке 4 белых и 2 черных шара, во второй 1 белый и 2 черных. Из первой коробки во вторую переложили два шара, затем из второй достали шар. Какова вероятность того, что он оказался белым?
51. В первой коробке 2 белых и 4 черных шара, во второй 3 белых и 1 черный. Из первой коробки во вторую переложили один шар, затем из второй достали шар. Он оказался черным.
Какова вероятность того, что переложили белый шар?
52. Первый цех произвел в два раза больше деталей, чем второй. Брак в первом цехе составляет 3%, а во втором 2%. Детали поступили на склад. Найти вероятность того, что наугад взятая со склада деталь является стандартной.
53. Корабль идет через минное поле, состоящее из трех участков разной плотности, длины которых 2,5 км, 3,5 км и 4 км. Вероятности подорваться на данных участках равны соответственно 0,4; 0,3; 0,5. Корабль затонул. Какова вероятность того, что он шел через второй участок?

B

54. На группу из n человек имеется n экзаменационных билетов. Студент выучил один билет. Каким по очереди ему следует идти на экзамен, чтобы вероятность сдать его была наибольшей?
55. На шахматную доску наугад поставили белого короля и черного коня. Какова вероятность того, что король будет под шахом?
56. По статистике раком болен 1% населения. Анализ дает правильный результат в 99% случаев. Тест оказался положительным.
Найти вероятность того, что человек болен.
А какова вероятность этого, если и второй анализ, независимый с первым, также оказался положительным?
57. В первом ящике 4 белых и 1 черный шар, во втором и третьем по 3 белых и 2 черных, в четвертом 1 белый и 4 черных. Из наугад выбранного ящика достали два шара. Оба оказались белыми.
Какова вероятность того, что они из первого ящика?
58. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0,8. Стрелок подбросил две монеты и сделал столько выстрелов, сколько выпало гербов. Найти вероятность поражения цели.

59. Вероятность попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно 4/5, 3/4 и 2/3. При их одновременном выстреле произошло два попадания. Какова вероятность того, что промахнулся третий стрелок?
60. Семьи из двух детей разбили четыре группы с учетом пола и порядка рождения детей. Из произвольной группы случайно выбрали семью и ребенка из нее. Он оказался мальчиком.
Какова вероятность того, что второй ребенок также мальчик?

С

61. Среди населения 1% воров. У хозяина в комнате, где находилось десять гостей, пропал кошелек.
Какова вероятность того, что наугад выбранный гость является вором?
62. Теща Кисы Воробьянинова зашила бриллианты в одном из 12 стульев с вероятностью 0,9, а с вероятностью 0,1 зло подшутила над ним. В первых 11 стульях бриллиантов не оказалось.
Какова вероятность того, что они в последнем стуле?
63. Имеются n урн, в каждой n шаров. В 1-й урне 1 черный, остальные белые, во 2-й – 2 черных, …., в n–й все черные. Из наугад выбранной урны достали шар, который оказался черным. Какова вероятность того, что второй шар из этой же урны также будет черным?
64. На окружности $x^2 + y^2 = 1$ наугад выбирается точка B, а точка C в круге $x^2 + y^2 \leq 1$. Строится прямоугольник с диагональю BC и сторонами, параллельными осям координат.
Какова вероятность того, что данный прямоугольник лежит в круге? Обосновать корректность решения.
65. Вероятность того, что в семье с детьми ровно k детей, равна $\frac{1}{2^k}$, $k = 1,2, \ldots$
Какова вероятность того, что в семье один мальчик, если известно, что нет девочки? Рождения мальчиков и девочек равновероятны.
66. Каким соотношением связаны вероятности $P(A|\bar{B})$ и $P(\bar{A}|B)$?
67. Парадокс Монти-Холла. В телевизионной студии три двери, за одной из них находится приз. Игрок указывает на одну из дверей. После этого ведущий открывает одну из оставшихся дверей, показывает, что там нет приза, и предлагает игроку поменять свой выбор. Стоит ли игроку соглашаться?
А если в студии n дверей? А если вариант “адского монти-холла”?

4. СХЕМА БЕРНУЛЛИ

Схемой Бернулли называется серия одинаковых независимых испытаний, в которых рассматриваем лишь два исхода эксперимента - произошло интересующее нас событие либо нет.

Обозначения: p – вероятность успеха при одном испытании, $q = 1 - p$ – вероятность неудачи, ν_n – число успехов в серии из n испытаний, для краткости $P_n(k) = P(\nu_n = k)$.

Вероятность того, что при n испытаниях произойдет ровно k успехов, вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

При большом числе испытаний (обычно $n \geq 100$) применяем приближенные формулы.

Если требуется найти вероятность точного числа успехов, то локальную формулу Муавра-Лапласа:

$$P_n(\nu_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \qquad \text{где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

Если требуется найти вероятность того, что число успехов находится в данном диапазоне, то интегральную формулу Муавра-Лапласа:

$$P_n(k_1 \leq \nu_n \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Данные формулы отлично работают, если p и q близки к друг другу. Однако при увеличении разницы между ними скорость сходимости замедляется. Поэтому при малых p или q применяется формула Пуассона (или формула редких событий).

$$P_n(\nu_n = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \qquad \text{где } \lambda = np$$

Погрешность вычислений по данной формуле будет не более, чем $\min(p, p\lambda)$.

Обобщением схемы Бернулли является *полиномиальная схема*.
Пусть при n независимых испытаниях могут произойти m несовместных исходов, p_i — вероятность $i^{\text{го}}$ исхода при одном отдельном испытании, $1 \leq i \leq n$.
Тогда вероятность того, что при n испытаниях $i^{\text{й}}$ исход появится n_i раз, $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$, равна:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_m) \approx \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_m!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_m^{n_m}$$

А

68. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0,8. Найти вероятность того, что их пяти выстрелов три будут точными.
69. Какова вероятность того, что при четырех бросаниях кости шестерка выпадет дважды?
70. На производстве брак составляет 15%. Какова вероятность того, что из 7 проверенных деталей 5 оказались стандартными?
71. Найти вероятность того, что при восьми бросаниях монеты герб выпал не менее трех и не более шести раз.
72. Вероятность правильного ответа на вопрос 0,8. Какова вероятность того, что в тесте из 10 вопросов будет не более 8 правильных ответов?
73. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0,8. Стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того, произошло ровно 330 попаданий.
74. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле 0,8. Стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того, произошло от 312 до 336 попаданий.
75. Кубик подбросили 180 раз. Какова вероятность того, что единица выпала 27 раз?
76. Монета подброшена 10000 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет от 4900 до 5100 раз?
77. Прибор состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа каждого из них равна 0,001. Какова вероятность отказа больше двух элементов?
78. Вероятность клика по баннеру на одной веб-странице равна 0,0025. Какова вероятность того, что при показе 600 страниц будет 3 просмотра рекламы?
79. Вероятность попадания зенитки в цель равна 0,005. Самолет будет сбит, если получит две пробоины. Зенитка произвела 200 выстрелов. Найти вероятность того, что самолет уцелел.
80. Какова вероятность того, что из 500 человек двое родились 1 января? В году 365 дней.

81. В службу спасения поступает в среднем 0,5 звонков в час. Найти вероятность того, что за смену продолжительностью четыре часа поступит не более трех заявок.
82. Лифт останавливается на пяти этажах. В лифт село шесть пассажиров. Найти вероятность того, что половина из них выйдет на последнем этаже.
83. Вероятность попадания баскетболиста из трехочковой зоны равна 0,7. Найти наиболее вероятное число попаданий при:
а). 100 бросках, б). 85 бросках, в). 99 бросках.
84. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника:
а) три партии из четырех или пять из восьми?
б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти из восьми?
85. Два одинаковых по силе шахматиста играют матч из шести партий. Какова вероятность того, что второй шахматист выиграет две партии, а еще три сведет к ничьей?
86. Какова вероятность того, что при бросании 12 костей каждая грань выпадет дважды?
87. Брак при изготовлении деталей составляет 20%. На выборочный контроль деталь попадает с вероятностью 1/2. Какова вероятность того, что при проверке партии из 10 деталей нашли две бракованных, а половина деталей осталась непроверенной?

В

88. Вероятность успеха при одном испытании равна 0,01.
Сколько требуется провести испытаний, чтобы вероятность хотя бы одного успеха была не менее 0,5?
89. Какое минимальное число детей должна планировать молодожены Жанна и Афанасий, чтобы вероятность иметь хотя бы одного мальчика была выше 95%? Найти вероятность того, что в семье с таким количеством детей будет по крайней мере два мальчика.
90. Студента-практиканта учили стрелять из ружья по банке. Вероятность попадания в банку при одном выстреле 0,03. Сколько надо приготовить патронов, чтобы с вероятностью 0,94 банка была бы сбита на землю?
91. Вероятность выхода из строя одного мотора самолета равна q. Самолет может продолжать полет, если исправна хотя бы половина моторов. Для каких значений q двухмоторный самолет следует предпочесть четырехмоторному?
92. (Задача Ньютона-Пипса). Самэль Пипс, президент Лондонского королевского общества поставил следующую задачу, а Исаак Ньютон решил ее: одинаковы ли шансы на успех у трех человек, если первому надо

получить хотя бы одну шестерку при бросании кости 6 раз, второму не менее двух шестерок при 12 бросаниях, а третьему не менее трех шестерок при 18 бросаниях.

93. При фиксированных значениях k и n величина $P_n(k)$ является функцией p. В какой точке она достигает максимума?

С

94. Для оценки доли p курящих людей берется выборка объема n и делается оценка по формуле статистической вероятности $p^* = \frac{n_k}{n}$, где n_k – число курящих людей в выборке. Каким следует взять этот объем n, чтобы с вероятностью $\gamma = 0{,}95$ данная оценка отличалась от истинного значения не более чем на $\varepsilon = 0{,}01$?
95. (Задача Стефана Банаха). Некий курящий человек носит с собой две коробки спичек. Каждый раз при прикуривании он наугад достает одну из них. Найти вероятность того, что когда он вынет в первый раз пустую коробку, в другой коробке останется k спичек, $0 < k \leq m,$ где $m -$ число спичек, бывших изначально в каждой из коробок.
96. В квадрат вписан другой квадрат так, что его вершины являются серединами сторон данного квадрата. В большой квадрат бросают шесть точек. Найти вероятность случайных событий: а). Три точки попадут в малый квадрат; б). Две точки – в малый квадрат, а остальные – по одной в каждый образовавшийся треугольник.
97. Три орудия ведут стрельбу по трем целям. Каждое орудие случайно выбирает себе цель. Вероятность поражения цели орудием при одном выстреле равна $p.$
    Найти вероятность того, что из трех целей будут поражены ровно две.

5. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайную величину называем *дискретной*, если она принимает не более чем счетное число значений. Такая случайная величина задается законом распределения:

ξ	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

Здесь элементы первой строки x_i – значения, которые может принять данная случайная величины, а элементы второй строки p_i – вероятности этих значений, причем $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Важнейшими числовыми характеристиками случайной величины являются *математическое ожидание* (среднее значение) $E\xi$, *дисперсия* $D\xi$ и *среднее квадратическое отклонение* σ_ξ, которые вычисляются по формулам:

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i; \qquad D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - (E\xi)^2; \qquad \sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$$

На практике чаще всего возникают дискретные случайные величины со следующими стандартными распределениями:

Распределение Бернулли B_p: случайная величина ξ – число успехов при одном испытании, где p – вероятность успеха.
Это распределение имеет индикатор события А: $I_A = \begin{cases} 0, \text{если событие } A \text{ не произошло;} \\ 1, \quad \text{если событие } A \text{ наступило.} \end{cases}$ Математическое ожидание и дисперсия: $E\xi = p, \quad D\xi = pq.$

Биномиальное распределение $B_{n,p}$: случайная величина ξ – число успехов в серии из n независимых испытаний, где p – вероятность успеха при одном испытании.
Ее закон распределения: $P(\xi = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad 0 \le k \le n.$
Математическое ожидание и дисперсия: $E\xi = np, \quad D\xi = npq.$

Геометрическое распределение G_p: случайная величина ξ – номер первого успешного испытания, где p – вероятность успеха при одном испытании.
Ее закон распределения: $P(\xi = k) = q^{k-1} \cdot p, \quad k \ge 1.$
Математическое ожидание и дисперсия: $E\xi = \frac{1}{p}, \quad D\xi = \frac{q}{p^2}.$

Распределение Пуассона Π_λ: Закон распределения: $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \geq 0.$
Математическое ожидание и дисперсия: $E\xi = \lambda, \quad D\xi = \lambda.$

A

98. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины, заданной законом распределения:

ξ	-1	0	1	2
P	0,3	0,4	0,2	0,1

99. Найти p_4, числовые характеристики дискретной случайной величины и $P(0 \leq \xi < 2)$. Найти функцию распределения и построить ее график.

ξ	-2	-1	0	1	3
P	0,4	0,2	0,1	p_4	0,2

100. Найти p_3, числовые характеристики дискретной случайной величины и $P(1 < \xi \leq 6)$. Найти функцию распределения и построить ее график.

ξ	1	4	5	6	8
P	0,2	0,1	p_3	0,3	0,3

101. Дискретная случайная величина может принимать два значения. Найти ее закон распределения, если известно, что $p_1 = 0{,}7$; $E\xi = 3{,}3$, $D\xi = 0{,}21$.
102. Случайные величины ξ и η независимы, $E\xi = -1$, $D\xi = 2$, $E\eta = 3$, $D\eta = 5$. Найти математическое ожидание и дисперсию $3\xi - 2\eta$.
103. $E\xi = 2$, $D\xi = 1$, $E\eta = 1$, $D\eta = 3$, $cov(\xi, \eta) = -1$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $4\xi - \eta$.
104. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле равна 0,6. Случайная величина ξ – число попаданий при 20 выстрелах. Найти ее математическое ожидание и дисперсию.
105. Игрок бросает кость до тех пор, пока не выпадет шестерка. Случайная величина ξ – число сделанных бросков. Найти ее математическое ожидание и дисперсию.
106. На оператора службы психологической поддержки приходится в среднем 1,25 звонка в час. Случайная величина ξ – число звонков за восьмичасовую смену. Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

B

107. В урне находятся 2 белых и 3 черных шара. Из урны извлекли три шара. Случайная величина ξ – число белых среди них. Составить ее закон распределения, найти математическое ожидание и дисперсию.
108. Вероятность попадания в цель при одном выстреле первого орудия равна 0,8, второго – 0,6, третьего – 0,5. Случайная величина ξ – число попаданий при залпе из всех орудий. Составить закон распределения, найти математическое ожидание и дисперсию.
109. Вероятность попадания биатлониста в цель при одном выстреле равна 0,5. У стрелка четыре патрона, он стреляет в цель до первого попадания. Случайная величина ξ – число сделанных выстрелов. Составить закон распределения, найти математическое ожидание и дисперсию.
110. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле равна 0,6. Случайная величина ξ – число попаданий при четырех выстрелах. Составить закон распределения, найти математическое ожидание и дисперсию.
111. Казино предлагает вам сыграть в игру: вы бросаете два игральных кубика, и получаете приз в зависимости от выпавшей на них суммы очков:
    12 очков - 100 рублей, 11 очков - 90 рублей, 10 очков - 80 рублей, 9 очков - 50 рублей, от 2 до 8 очков - 0 рублей.
    Какую сумму вы согласны заплатить за возможность сыграть в такую игру?

C

112. В урне один белый и один черный шар. Два игрока по очереди тянут один шар. Если шар оказался белым, то игра заканчивается, этот игрок побеждает и получает от проигравшего один биткоин. Если нет, то в урну возвращается уже два черных шара.
    Случайная величина ξ – выигрыш первого игрока (проигрыш – это отрицательный выигрыш). Составить закон распределения, сделать проверку, найти математическое ожидание и дисперсию.
    Сколько должен дать первый игрок второму за право первого хода, чтобы игра была справедливой?
113. Казино предлагает вам сыграть в игру: вы бросаете монету до первого герба и в зависимости от того, при каком броске это произошло, получаете приз: при первом – 1\$, при втором – 2\$, при третьем – 4\$, при четвертом – 8\$ и т.д.
    Какую сумму вы согласны заплатить за возможность сыграть в такую игру?

114. Игрок играет в орлянку с удвоением ставок, пока не выиграет. Первый раз ставит 1$, если проигрывает, то 2$, затем 4$ и т.д. Случайная величина ξ – его выигрыш. Найти $E\xi$ и $D\xi$. Насколько оправдана такая стратегия?
115. Сто куриц сидят в круг. Одномоментно каждая курица клюет одну из двух соседок. Случайная величина ξ – число не клюнутых куриц.
Найти ее математическое ожидание.
116. По n конвертам случайным образом раскладываются n писем.
Случайная величина ξ – число писем в своих конвертах.
Найти ее математическое ожидание и дисперсию.
117. На первом этаже десятиэтажного дома в лифт заходят 9 человек.
Найти математическое ожидание числа остановок лифта, если люди выходят из лифта независимо друг от друга.
118. В коробке находятся n занумерованных шаров. За одну операцию один шар вынимается и тут же возвращается обратно. Случайная величина ξ – число потребовавшихся операций, чтобы каждый шар был вынут хотя бы один раз. Найти ее математическое ожидание: а). при $\mathrm{n} = 2;$ б). в общем случае.
119. Паук сидит в центре паутины из 3×3 клеток. За один ход он с равной вероятностью переползает в одну из соседних клеток по вертикали или по горизонтали.
Найти среднее число ходов, за которое он выберется за пределы паутины.

6. АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайная величина ξ имеет *абсолютно непрерывное распределение*, если существует функция $f(x)$, такая что $P(\alpha < \xi < \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ для любых вещественных чисел a, b.

Данная функция $f(x)$ называется *функцией плотности распределения*.

Абсолютно непрерывная случайная величина задается функцией плотности либо, что чаще удобнее, *функцией распределения* $F(x) = P(\xi < x)$.

Основные свойства этих функций:

1). $f(x) \geq 0$ и выполнено условие нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

2). $F(x)$ – непрерывная неубывающая функция, $0 \leq F(x) \leq 1, F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1$

3). $f(x) = F'(x), \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$

4). $P(\alpha < \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

Числовые характеристики непрерывного распределения находим по формулам:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx\,; \qquad D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - (E\xi)^2; \qquad \sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$$

А

120. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ ax, & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Найти неизвестный параметр a, ее числовые характеристики, функцию распределения, вероятность попадания в интервал (0,5; 1,5), построить графики плотности и функции распределения.

121. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-\frac{\pi}{2};\\ a\cos x, & -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2};\\ 0, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

Найти неизвестный параметр a, ее числовые характеристики, функцию распределения, вероятность попадания в интервалы $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right),\left(-\pi;\frac{\pi}{2}\right),\left(-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$, построить графики плотности и функции распределения.

122. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ \frac{a}{x^4}, & x\ge 1\end{cases}$$

Найти неизвестный параметр a, ее числовые характеристики, функцию распределения, вероятность попадания в интервалы $(2;4),(0;3),(4;\infty)$, построить графики плотности и функции распределения.

123. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-2;\\ Ax+B, & -2\le x\le 4;\\ 1, & x>4\end{cases}$$

Найти неизвестные параметры A и B, плотность, ее числовые характеристики, вероятность попадания в интервал $(0;3)$, построить графики плотности и функции распределения.

124. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-4;\\ \frac{a}{\pi\sqrt{16-x^2}}, & -4\le x\le 4;\\ 0, & x>4\end{cases}$$

Найти неизвестный параметр a, ее числовые характеристики, функцию распределения, вероятность попадания в интервал $(0;2)$, построить графики плотности и функции распределения.

125. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ ax, & 0\le x\le 1;\\ \frac{a}{2}(3-x), & 1<x\le 3;\\ 0, & x>3\end{cases}$$

Найти неизвестный параметр a, ее числовые характеристики, функцию распределения, вероятность попадания в интервал $(0,5; 2)$, построить графики плотности и функции распределения.

126. Непрерывная случайная величина имеет распределение Лапласа с плотностью:

$$f(x) = ae^{-|x|}, x \in (-\infty;\ \infty).$$

Найти неизвестный параметр a, ее числовые характеристики, функцию распределения, вероятность попадания в интервал $(-1; 1)$, построить графики плотности и функции распределения.

B

127. Плотность распределения симметрична относительно начала координат. Доказать, что $P(|\xi| < t) = 2F(t) - 1$.
128. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \dfrac{A}{x^2} + \dfrac{B}{x} + C, & x \geq 1 \end{cases}$$

Найти неизвестные параметры, если известно, что $A \leq -1$.

129. Ножки циркуля, каждая из которых имеет длину 1, раздвинуты на случайный угол $\varphi \in [0;\ \pi]$.
Найти математическое ожидание расстояния между концами ножек.
130. На диаметре единичного круга случайным образом выбрана точка, через которую перпендикулярно к данному диаметру проведена хорда.
Найти математическое ожидание длины данной хорды.

C

131. Двое человек договорились встретиться между 12.00 и 13.00. Случайная величина ξ – время ожидания встречи. Найти ее числовые характеристики.
132. В точке (0,1) находится источник излучения, равномерно испускающий частицы во все стороны.
Случайная величина ξ – точка пересечения частицы с осью OX.
Найти ее функцию распределения, плотность и математическое ожидание.

7. СТАНДАРТНЫЕ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

На практике чаще всего возникают абсолютно непрерывные случайные величины со следующими стандартными распределениями:

Равномерное распределение $\boldsymbol{U_{a,b}}$ или $\boldsymbol{U(a,b)}$.

Случайная величина ξ *равномерно распределена на* $[a,b]$, если ее плотность на этом отрезке постоянна:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 0, & x>b\end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия: $E\xi=\frac{a+b}{2}$, $D\xi=\frac{(b-a)^2}{12}$.
Вероятность попадания в интервал находится по формуле:

$$P(\alpha<\xi<\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a};\ \ \alpha,\beta\in[a;b]$$

Показательное (экспоненциальное) распределение $\boldsymbol{E_\alpha}$:

Случайная величина ξ имеет *показательное распределение с параметром* $\alpha>0$, если ее плотность имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \alpha e^{-\alpha x}, & x\ge 0\end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия: $E\xi=\frac{1}{\alpha}$, $D\xi=\frac{1}{\alpha^2}$.
Вероятность попадания в интервал находится по формуле:

$$P(a<\xi<b)=e^{-a\alpha}-e^{-b\alpha}$$

Нормальное (гауссовское) распределение $\mathbf{N}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\sigma^2})$:

Случайная величина ξ имеет *нормальное распределение с параметрами* a и σ^2, если ее плотность имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}};\ \ -\infty<x<\infty$$

Математическое ожидание, дисперсия и смысл параметров: $E\xi=a$, $D\xi=\sigma^2$.

Стандартным нормальным распределением $\mathbf{N(0,1)}$ называется нормальное распределение с параметрами $\alpha = 0$ и $\sigma = 1$.

Его функция распределения: $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Вероятность попадания в интервал находится по формуле:

$$P(\alpha < \xi < \beta) = F_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - F_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

В случае интервала, симметричного относительно среднего, более удобна формула:

$$P(|\xi - a| < t) = 2F_0\left(\frac{t}{\sigma}\right) - 1$$

Вместо функции стандартного нормального распределения $F_0(x)$ можно использовать *функцию Лапласа* $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$, которая меньше ее на 0,5. Тогда первая формула остается неизменной, а вторая приобретает чуть более простую форму:

$$P(|\xi - a| < t) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

А

133. Трамвай ходит строго с интервалом 15 минут. Случайная величина ξ – время его ожидания. Найти ее числовые характеристики.
Чему равна вероятность того, что трамвай придется ждать не менее 4 и не более 10 минут?
134. Случайная величина $\xi \in E_{0.5}$. Указать ее плотность и функцию распределения. Найти ее числовые характеристики. Чему равна вероятность ее попадания в интервал (1;3)?
135. Средний срок службы микросхемы из данной партии 5 лет.
Какова вероятность того, что она проработает 10 лет?
136. Случайная величина $\xi \in N(1; 4)$. Чему равны ее математическое ожидание и дисперсия? Найти $P(-1 < \xi < 5)$.
137. Случайная величина $\xi \in N(2; 3)$. Найти $P(\xi > 0), P(|\xi - 2| < 3)$.
138. Измерительный прибор откалиброван. Стандартная ошибка измерения равна 0,5. Найти вероятность того, что ошибка измерения будет больше 1.

139. Рост женщины имеет нормальное распределение со средним значением 166 см и дисперсией 36 см^2. Найти вероятность того, что рост выбранной женщины больше 154 см.
140. Время ремонта смартфона – нормальная случайная величина. Известно, что 92% смартфонов ремонтируются с отклонением меньше 42 минут от установленного норматива.
Найти среднее квадратическое отклонение времени ремонта.
141. Случайная величина имеет нормальное распределение. Ее среднее значение равно 100 и известно, что $P(88 < \xi < 112) = 0{,}9973$.
Найти $P(95 < \xi < 107)$.
142. Номинальные размеры детали 20×30 мм. При изготовлении отклонения размеров от номинальных – независимые нормальные величины со средними квадратическими отклонениями 1 мм и 2 мм соответственно. Деталь стандартна, если ширина лежит в пределах от 18 до 21 мм, а длина в пределах от 27 до 34 мм. Найти вероятность того, что из пяти взятых деталей бракованной оказалась одна.

B

143. Встречаются двое друзей. Один должен подойти между 12.00 и 12.30, а другой между 12.30 и 13.00. Случайная величина ξ – время ожидания. Найти ее математическое ожидание и дисперсию.
144. Вывести правило “трех сигм” для:
а). Равномерного распределения;
б). Показательного распределения.

C

145. Независимые случайные величины $\xi_i \in U(0; 1)$.
Найти математическое ожидание случайной величины $\eta = \max_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$.
146. На необитаемом острове две пальмы. Одна роняет кокос строго раз в час, другая раз в два часа. После кораблекрушения на берег выбросило моряка. Пока моряк полчаса шел к пальмам, с одной из них упал кокос, который тут же утащила мартышка. Под какой пальмой моряку лучше караулить следующий кокос, если первый упал в начале движения?
И каково при этом будет среднее время его ожидания?

8. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Результат преобразования дискретных распределений обычно находим из общих соображений, так как при этом опять получаем дискретное распределение.

При преобразовании абсолютно непрерывных распределений полезны формулы:

При линейном преобразовании $\eta = a\xi + b$ случайной величины ξ с плотностью $f_\xi(x)$ получаем случайную величину η с плотностью $f_\eta(x) = \frac{1}{|a|} f_\xi(\frac{x-b}{a})$.

При монотонном преобразовании $\eta = g(\xi)$ случайной величины ξ с плотностью $f_\xi(x)$ получаем случайную величину η с плотностью $f_\eta(x) = |h'(x)| \cdot f_\xi(h(x))$, где функция $h(x) = g^{-1}(x) -$ обратная к $g(x)$.

В общем случае поступаем следующим образом. Разбиваем функцию $g(x)$ на интервалы монотонности. Для каждого интервала находим обратную к ней функцию $h_i(x), 1 \le i \le k$. Плотность случайной величины η находим по формуле Смирнова:

$$f_\eta(x) = \sum_{i=1}^{n} |h_i'(x)| \cdot f_\xi\big(h_i(x)\big)$$

Математическое ожидание преобразованной случайной величины $\eta = g(\xi)$:

а). $Eg(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_k) \cdot P(\xi = x_k)$ при дискретном распределении;

б). $Eg(\xi) = \int_{i=1}^{\infty} g(x) \cdot f_\xi(x)\, dx$ при абсолютно непрерывном распределении.

А

147. Даны независимые дискретные случайные величины ξ и η. Найти закон распределения случайной величины $\xi + \eta$ и ее математическое ожидание.

ξ	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

η	0	1	2	3
P	0,2	0,3	0,3	0,2

148. Дана дискретная случайная величина ξ. Найти закон распределения случайной величины ξ^4 и ее математическое ожидание (двумя способами).

ξ	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

149. Даны независимые дискретные случайные величины ξ и η. Найти закон распределения случайной величины $2\xi - \eta^2$ и ее математическое ожидание.

ξ	0	1	2
P	0,4	0,2	0,4

η	-2	0	2
P	0,3	0,4	0,3

150. Даны независимые дискретные случайные величины ξ и η. Найти математическое ожидание случайной величины $\frac{2\xi-3}{\eta}$.

ξ	-1	0	2	4
P	0,2	0,3	0,4	0,1

η	1	2	3	4
P	0,1	0,2	0,3	0,4

151. Случайная величина $\xi \in U(0;1)$. Какое распределение имеет случайная величина $a\xi + b$ при $a > 0$?
152. Случайная величина $\xi \in E_\alpha$. Какое распределение имеет случайная величина $\beta\xi$ при $\beta > 0$?
153. Случайная величина $\xi \in U(0;b)$. Найти плотность случайной величины $\sqrt{\xi}$.

B

154. Случайная величина ξ − число бросков монеты до первого выпадения герба. Найти закон распределения и математическое ожидание случайной величины $\eta = \sin\frac{\pi}{2}\xi$.
155. Случайная величина $\xi \in N(0;1)$. Найти плотность случайной величины ξ^2.

156. Дана случайная величина ξ. Найти плотность случайной величины $\eta = |\xi - 2|$.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \dfrac{4}{3x^2}, & 1 \le x \le 4; \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

157. Случайная величина $\xi \in N(0; 9)$.
Найти плотность случайной величины $\eta = (\xi - 2)^2$.

158. Ножки циркуля, каждая из которых имеет длину 1, раздвинуты на случайный угол $\varphi \in [0;\ \pi]$.
Найти математическое ожидание расстояния между концами ножек.

159. На диаметре единичного круга случайным образом выбрана точка, через которую перпендикулярно к данному диаметру проведена хорда.
Найти математическое ожидание длины данной хорды.

C

160. В точке (0,1) находится источник излучения, равномерно испускающий частицы во все стороны. Случайная величина ξ – точка пересечения частицы с осью OX. Найти ее плотность и математическое ожидание.

9. СХОДИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. НЕРАВЕНСТВА И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

В теории вероятности выделяют три основных вида сходимости:

а). Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится *почти наверное* к случайной величине ξ, если $P\left(\omega \in \Omega \,\middle|\, \xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi\right) = 1.$ Обозначается $\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\longrightarrow} \xi.$

б). Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится *по вероятности* к случайной величине ξ, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; P(|\xi_n - \xi| < \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$ Обозначается $\xi_n \overset{P}{\to} \xi.$

в). Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ *слабо сходится* к случайной величине ξ, если $F_{\xi_n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_\xi(x) \;\; \forall x,$ где функция $F_\xi(x)$ непрерывна. Обозначается $\xi_n \rightrightarrows \xi.$

Пусть $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ – сумма n независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_i,\ 1 \le i \le n,$ $\frac{S_n}{n}$ – их среднее арифметическое, a и σ^2 – математическое ожидание и дисперсия каждого отдельного слагаемого.
Тогда математическое ожидание среднего арифметического остается прежним: $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = a,$ дисперсия уменьшается в n раз: $D\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n},$ а среднее квадратическое отклонение в $\sqrt{n}$ раз: $\sigma\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}.$

Закон больших чисел Хинчина утверждает, что $\frac{S_n}{n} \overset{P}{\to} a$ при условии, что математическое ожидание существует (или конечен первый момент).

Усиленный закон больших чисел Колмогорова говорит о том, что в этом случае даже имеет место более сильный вид сходимости: $\frac{S_n}{n} \overset{\text{п.н.}}{\longrightarrow} a$.

Центральная предельная теорема Ляпунова утверждает, что если первый и второй момент конечны, то $\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \rightrightarrows N(0,1)$ – стандартному нормальному распределению.

Интегральная формула Муавра-Лапласа является частным случаем данной теоремы.

На практике часто возникает задача оценки вероятности отклонения случайной величины от своего математического ожидания. Простую, хотя и довольно грубую оценку можно сделать с помощью **неравенства Чебышева:** $P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$.

Правило трех сигм говорит о том, что по абсолютной величине такое отклонение как правило не превосходит трех средних квадратических отклонений:
$P(|\xi - E\xi| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9}$.

Если число слагаемых в сумме S_n достаточно велико, то при оценке вероятности отклонения среднего арифметического $\frac{S_n}{n}$ от своего математического ожидания, можно использовать центральную предельную теорему, переходя к стандартному нормальному распределению.

А

161. Монета подброшена 10000 раз. Оценить вероятность того, что что частота выпадения герба отличается от 0,5 не менее, чем на 0,01 двумя способами:
а). По неравенству Чебышева;
б). По формуле Муавра-Лапласа.
162. $\frac{S_n}{n}$ – среднее арифметическое n независимых случайных величин $\xi_i \in E_\alpha$.
Оценить вероятность $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{\alpha}\right| < \frac{2}{\alpha}\right)$ при $n = 10$.
163. Прибор калиброван, а стандартная ошибка при одном измерении равна 0,5. Делается серия из n измерений. За значение неизвестной величины a принимается среднее арифметическое результатов измерений. Сколько следует провести измерений, чтобы с вероятностью 0,99 эта оценка отличалась от истинного не более, чем на 1? Если:
а). Распределение ошибки измерения неизвестно;
б). Ошибка измерения имеет нормальное распределение.
Почему на практике таким способом невозможно получить сколь угодно большую точность измерений?
164. $\frac{S_n}{n}$ – среднее арифметическое независимых случайных величин $\xi_i \in U(0;1)$.
Оценить вероятность $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}1\right)$ при $n = 100$ двумя способами:
а). По неравенству Чебышева;
б). С помощью центральной предельной теоремы.
165. Известно, что $E\xi = 0$ и $\xi \geq 0$. Следует ли отсюда, что $\xi = 0$?

B

166. Случайные величины $\xi_i -$ независимые одинаково распределенные случайные величины, $E\xi_i = a > 0$, $D\xi_i = \sigma^2$. Куда и каким образом сходится последовательность случайных величин $\eta_n = \frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2}$?
167. Случайная величина $\xi \in [0;1]$. Найти верхнюю оценку дисперсии. При каком распределении она достигается?

C

168. Доказать неулучшаемость правила “трех сигм” $P(|\xi - E\xi| < 3\sigma) \geq \frac{8}{9}$.
169. Случайная величина $\xi \in N(m,1)$, $\frac{S_n}{n}$ – среднее арифметическое n независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_i \in N(m,1)$. Известно, что $P(\xi > 5) = P\left(\frac{S_n}{n} < 1\right)$ при $n = 16$. Найти m.
170. Случайная величина $\xi_n -$ число единиц при n бросках кубика, а $\eta_n -$ число шестерок. Куда слабо сходится случайная величина $\frac{\xi_n-\eta_n}{\sqrt{n}}$?
171. Независимые случайные величины $\xi_i \in U(0;2)$. Куда слабо сходится последовательность $n \min\limits_i(\xi_1,\dots,\xi_n)$ при $n \to \infty$?
172. У игрока есть сумма S_0. В каждом раунде игры он ставит половину имеющийся суммы. Если игрок проигрывает, то он теряет ставку, если выигрывает, то получает удвоенную ставку. Вероятность выигрыша в каждом раунде 0,6, а проигрыша 0,4.
Какая сумма будет у игрока при большом числе раундов?

10. МНОГОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Случайные величины ξ и η имеют дискретное совместное распределение, если случайная величина (ξ, η) принимает не более чем счетное число значений. Такая двумерная случайная величина задается законом распределения – таблицей вероятностей $p_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j)$ с условием нормировки $\sum p_{ij} = 1$:

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}

Из общего закона распределения можно найти частные (маргинальные) законы распределения случайных величин ξ и η по формулам: $p_i = P(\xi = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$ – сумма вероятностей в i-й строке, $q_j = P(\eta = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$ – сумма вероятностей в j-м столбце.

Дискретные случайные величины ξ и η *независимы*, если при любых i, j $p_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j) = p_i \cdot q_j$.

Один из методов изучения влияния случайных величины друг на друга состоит в следующем. Фиксируем значение одной случайной величины и смотрим, как при этом меняется распределение другой. Такое распределение называется *условным*, а его числовые характеристики — *условное математическое ожидание (УМО) и условная дисперсия*, которые обозначаются $E(\xi|\eta = y)$ и $D(\xi|\eta = y)$.

В случае дискретной системы вероятности условного распределения $\xi|\eta = y_j$ можно найти по формуле: $p_i = P(\xi = x_i|\eta = y_j) = \frac{P(\xi = x_i, \eta = y_j)}{P(\eta = y_j)} = \frac{p_{ij}}{q_j}$, а вероятности условного распределения $\eta|\xi = x_i$ по формуле: $p_i = P(\eta = y_j|\xi = x_i) = \frac{P(\xi = x_i, \eta = y_j)}{P(\xi = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_i}$.

Случайные величины ξ и η имеют абсолютно непрерывное совместное распределение, если существует функция $f_{\xi,\eta}(x, y)$, такая что для любого $B \subset \mathbb{R}^2$

$$P((\xi, \eta) \in B) = \iint_B f_{\xi,\eta}(x, y)\, dx\, dy$$

Эта функция $f_{\xi,\eta}(x,y)$ называется *плотностью совместного распределения* случайных величин ξ и η. Абсолютно непрерывная двумерная случайная величина задается плотностью либо *функцией распределения* $F_{\xi,\eta}(x,y) = P(\xi < x, \eta < y)$.

Основные свойства данных функций:

1. $f_{\xi,\eta}(x,y) \geq 0$ с условием нормировки $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy = 1$
2. $0 \leq F_{\xi,\eta}(x,y) \leq 1$; $F_{\xi,\eta}(-\infty,y) = F_{\xi,\eta}(x,-\infty) = 0$; $F_{\xi,\eta}(+\infty,+\infty) = 1$
3. $F_{\xi,\eta}(x,+\infty) = F_{\xi}(x)$; $F_{\xi,\eta}(+\infty,y) = F_{\eta}(y)$
4. $P(x_1 \leq \xi < x_2, y_1 \leq \eta < y_2) =$
   $= F_{\xi,\eta}(x_2,y_2) - F_{\xi,\eta}(x_1,y_2) F_{\xi,\eta}(x_2,y_1) + F_{\xi,\eta}(x_1,y_1)$
5. $F_{\xi,\eta}(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy$; $f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{\xi,\eta}(x,y)}{\partial x \partial y}$
6. $f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dy$; $f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dx$

Непрерывные случайные величины ξ и η *независимы*, если $F_{\xi,\eta}(x,y) = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y)$, или, что равносильно, $f_{\xi,\eta}(x,y) = f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y)$.

Условная плотность распределения $\xi|\eta = y$ равна:

$$f(x|y) = \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_{\eta}(y)}$$

а условное математическое ожидание:

$$E(\xi|\eta = y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x|y)\,dx$$

Распределение функции $\eta = g(\xi_1, \xi_2)$ двух непрерывных случайных величин ξ_1 и ξ_2 находим по формуле:

$$F_{\eta}(z) = \iint\limits_{D_z} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy, \quad \text{где} \quad D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | g(x,y) < z\}$$

Плотность суммы двух независимых непрерывных случайных величин ξ_1 и ξ_2 можно найти по **формуле свертки:**

$$f_{\xi_1 + \xi_2}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(t - x)\,dx$$

А

173. Дана дискретная система случайных величин:

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
0	0,2	0,1	0
2	0,1	0,3	0,1
4	0	0	0,2

Найти:

а). Маргинальные распределения и их числовые характеристики;

б). условные распределения и соответствующие условные математические ожидания $\eta \mid \xi = 2$ и $\xi \mid \eta = 0$;

в). проверить независимость случайных величин;

г). коэффициент линейной корреляции.

174. Дана дискретная система случайных величин:

$\xi \backslash \eta$	1	2	3
-1	0	0,1	0,2
1	0,1	0,2	0,1
3	0,2		0

Найти:

а). неизвестную вероятность;

б). маргинальные распределения и их числовые характеристики;

в). условные распределения и соответствующие условные математические ожидания $\eta \mid \xi = 3$ и $\xi \mid \eta = 2$;

г). проверить независимость случайных величин;

д). коэффициент линейной корреляции.

175. Дана дискретная система случайных величин:

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1	2
0	0,05	0,1	0,1	0,05
3	0,05	0,05	0,1	0,1
6	0,1	0,05	0,1	

Найти:

а). неизвестную вероятность;

б). маргинальные распределения и их числовые характеристики;

в). условные распределения и соответствующие условные математические ожидания $\eta \mid \xi = 0$ и $\xi \mid \eta = 1$;

г). проверить независимость случайных величин;

д). коэффициент линейной корреляции;

е). вероятность попадания в область $\left\{(x, y) \middle| \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$.

176. Дана функция совместного распределения абсолютно непрерывной системы случайных величин (ξ, η):

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2y^2}, & \text{если } x \geq 1 \text{ и } y \geq 1; \\ 0, & \text{в остальной области} \end{cases}$$

Найти:

а). Плотность совместного распределения;

б). плотности и числовые характеристики маргинальных распределений;

в). функции маргинальных распределений;

г). проверить независимость случайных величин;

д). $P(1 < \xi < 2,\ 2 < \eta < 4)$

177. Дана плотность совместного распределения абсолютно непрерывной системы случайных величин (ξ, η):

$$f(x,y) = \begin{cases} ae^{-2x-3y}, & \text{если } x \geq 0 \text{ и } y \geq 0; \\ 0, & \text{в остальной области} \end{cases}$$

Найти:

а). плотности и числовые характеристики маргинальных распределений;

б). функции маргинальных распределений;

в). Функцию совместного распределения;

г). проверить независимость случайных величин;

д). $P\left(0 < \xi < \frac{\ln 2}{2},\ 0 < \eta < \frac{\ln 2}{3}\right)$

B

178. Плотность совместного распределения случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ имеет вид $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)\right)$. Найти распределения и числовые характеристики данных случайных величин. Являются ли они независимыми?

179. Точка наугад бросается в треугольник с вершинами O(0; 0), A(0; 1), B(2; 0). Случайная величина (ξ, η) – координаты данной точки. Найти:

а). Плотность совместного распределения;

б). плотности и числовые характеристики маргинальных распределений;

в). функции маргинальных распределений;

г). проверить независимость случайных величин;

д). условные математические ожидания $E(\eta|\xi)$ и $E(\eta|\xi = 1)$;

е). $E\eta$ по формуле полного математического ожидания;

ж). условную дисперсию $D(\eta|\xi)$. Проверить закон полной дисперсии.

З). коэффициент линейной корреляции.

180. Случайная величина (ξ, η) распределена в единичном квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ с плотностью $f_{\xi,\eta}(x, y) = a(x + y)$. Найти:

а). Неизвестную константу a;

б). плотности и числовые характеристики маргинальных распределений;

в). функции маргинальных распределений;

г). функцию совместного распределения;

д). проверить независимость случайных величин;

е). вероятность попадания в область $[0, 0{,}5] \times [0{,}5, 1]$;

ж). коэффициент линейной корреляции.

181. Дана плотность совместного распределения абсолютно непрерывной системы случайных величин (ξ, η):

$$f(x, y) = \begin{cases} a\left(9 - \sqrt{x^2 + y^2}\right), \text{если } x^2 + y^2 \leq 9; \\ 0, \ \text{в остальной области} \end{cases}$$

а). Найти неизвестную константу a;

б). найти математическое ожидание случайного вектора;

в). являются ли данные случайные величины независимыми?

г). являются ли независимыми случайные величины φ и ρ, где $(\varphi, \rho) -$ полярные координаты точки (x, y)? Найти их плотности.

д). найти вероятности $P(x < 0,\ y < 0)$ и $P(x^2 + y^2 \leq 1)$.

182. Точка наугад брошена в верхнюю половину единичного круга с центром в начале координат. Случайные величины ξ и $\eta -$ соответствующие координаты данной точки. Найти уравнение регрессии случайной величины η на ξ.

183. Проверить устойчивость относительно суммирования показательного распределения E_1.

184. Независимые случайные величины ξ и η имеют распределение E_1. Найти распределение случайной величины $\frac{\eta}{\xi}$ и ее числовые характеристики.

185. Независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 имеют стандартное нормальное распределение.
Найти распределение случайной величины $\xi_1^2 + \xi_2^2$ и ее числовые характеристики.

С

186. Независимые случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n \in \Pi_{\lambda,}$ $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Найти условное математическое ожидание $E(\xi_1 | S_n = m)$.

11. ЗАВИСИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Ковариацией $cov(\xi,\eta)$ случайных величин ξ и η называется величина
$cov(\xi,\eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta$.
Она является индикатором наличия связи, показывает ее направление, но не силу.

Коэффициентом линейной корреляции $r_{\xi,\eta}$ случайных величин ξ и η называется величина

$$r_{\xi,\eta} = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta} = \frac{E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$$

Его свойства:

1. Если случайные величины ξ и η независимы, то $r_{\xi,\eta} = 0$. Обратное неверно.
2. $|r_{\xi,\eta}| \le 1$
3. $|r_{\xi,\eta}| = 1,$ если имеется линейная функциональная зависимость $\eta = a\xi + b$
4. Если то $r_{\xi,\eta} > 0,$ то корреляция прямая, если то $r_{\xi,\eta} < 0,$ то обратная.

Условное математическое ожидание $E(\xi|\eta = y)$ случайной величины ξ при фиксированном значении y случайной величины η является константой.
Однако, если считать y переменной, то $E(\xi|\eta = y)$ является функцией, которая называется *регрессией* ξ на η. При этом условное математическое ожидание можно рассматривать как новую случайную величину, обозначаемую $E(\xi|\eta)$ или $\hat{\xi}$ для краткости. Для нее есть крайне полезная **формула полного математического ожидания**,

$$E\xi = E\big(E(\xi|\eta)\big) \text{ или } E\xi = E\hat{\xi}$$

Аналогично, условную дисперсию $D(\xi|\eta)$ также можно полагать случайной величиной, причем имеет место **теорема о разложении дисперсии:**

$$D\xi = E\big(D(\xi|\eta)\big) + D\big(E(\xi|\eta)\big)$$

A

187. Найти коэффициент линейной корреляции в задаче 173 предыдущего раздела.
188. Найти коэффициент линейной корреляции в задаче 174 предыдущего раздела.
189. Найти коэффициент линейной корреляции в задаче 175 предыдущего раздела.
190. Найти коэффициент линейной корреляции в задаче 179 предыдущего раздела.
191. В задаче 179 предыдущего раздела найти $E\eta$ по формуле полного математического ожидания, условную дисперсию $D(\eta|\xi)$, проверить теорему о разложении дисперсии.
192. Найти коэффициент линейной корреляции в задаче 180 предыдущего раздела.

B

193. Двое человек договорились встретиться между 12.00 и 13.00.
   Случайная величина ξ – время ожидания встречи.
   Найти $E\xi$ по формуле полного математического ожидания.
194. Стрелок подбрасывает два кубика и делает число выстрелов, равное абсолютной разности очков. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8. Найти математическое ожидание числа попаданий.
195. Независимые случайные величины ξ и η имеют одинаковые распределения с конечным вторым моментом. Найти коэффициент линейной корреляции случайных величин $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$.
196. Являются ли случайные величины независимыми, если их коэффициент линейной корреляции равен нулю? Привести пример.
197. Найти коэффициент линейной корреляции случайных величин ξ и ξ^2, если: а). $\xi \in N(0,1)$; б). $\xi \in U(0,1)$.

C

198. Независимые случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_{2n-1}$ имеют одинаковые распределения с конечным вторым моментом.
   Найти коэффициент линейной корреляции $\xi_1 + \cdots + \xi_n$ и $\xi_n + \cdots + \xi_{2n-1}$.

199. Игральную кость бросили n раз. Случайная величина ξ – число выпавших единиц, а $\eta -$ число шестерок. Найти их коэффициент линейной корреляции.

Найти уравнение регрессии (не используя коэффициент корреляции).

200. На окружности $x^2 + y^2 = 1$ наугад выбирается точка B, а в круге $x^2 + y^2 \leq 1$ наугад точка C. Строится прямоугольник с диагональю BC и сторонами, параллельными осям координат. Какова вероятность того, что данный прямоугольник лежит в круге?

12. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Характеристической функцией случайной величины ξ называется функция

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi}, \ \ t \in \mathbb{R}$$

Ее основные свойства:

1. Для любой случайной величины $\varphi_\xi(t)$ существует, причем $\left|\varphi_\xi(t)\right| \le 1$
2. При линейном преобразовании $\eta = a + b\xi$ характеристическая функция изменяется по формуле: $\varphi_{a+b\xi}(t) = e^{ita} \cdot \varphi_\xi(tb)$
3. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению их характеристических функций: $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t)$
4. Если момент к-го порядка конечен, то
$$\varphi_\xi(t) = 1 + itE\xi - \frac{t^2}{2}E\xi^2 + \cdots + \frac{i^k t^k}{k!}E\xi^k + o\left(\left|t^k\right|\right)$$
5. Если момент к-го порядка конечен, то $\varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k E\xi^k$
6. Соответствие между распределениями и их характеристическими функциями является взаимно-однозначным.
7. Теорема о непрерывном соответствии: последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ слабо сходится к случайной величине ξ тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность характеристических функций $\varphi_{\xi_n}(t)$ поточечно сходится к характеристической функции $\varphi_\xi(t)$:
$\xi_n \rightrightarrows \xi \ \Leftrightarrow \ \varphi_{\xi_n}(t) \to \varphi_\xi(t)$

Характеристические функции основных распределений:

1. Если $\xi \in B_p$, то $\varphi_\xi(t) = 1 - p + pe^{it}$
2. Если $\xi \in B_{n,p}$, то $\varphi_\xi(t) = \left(1 - p + pe^{it}\right)^n$
3. Если $\xi \in \Pi_\lambda$, то $\varphi_\xi(t) = exp\left(\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right)$
4. Если $\xi \in N(0;1)$, то $\varphi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

A

201. Найти характеристическую функцию дискретной случайной величины:

ξ	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

202. Найти характеристическую функцию случайной величины $\xi \in U(a,b)$. Проверить устойчивость относительно суммирования данного распределения.
203. Найти характеристическую функцию случайной величины $\xi \in E_{\propto}$. Проверить устойчивость относительно суммирования данного распределения.
204. Монета подброшена 10000 раз. Дать верхнюю оценку вероятности того, что что частота выпадения герба отличается от 0,5 не менее, чем на 0,01.

B

205. Найти характеристическую функцию непрерывной случайной величины, имеющей плотность распределения $f_{\xi}(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.
206. Найти характеристическую функцию дискретной случайной величины, распределенной по закону: $P(\xi = k) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$, $a > 0,\ k = 0,1,2,\ldots$ Вычислить с ее помощью математическое ожидание и дисперсию.
207. Найти все моменты случайной величины $\xi \in N(0,1)$.

C

208. Случайная величина $\xi_\lambda \in \Pi_{\lambda}$. Доказать, что случайная величина $\eta_\lambda = \frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ слабо сходится к стандартному нормальному распределению при $\lambda \to \infty$.
209. Пусть $Eg(\xi) = Eg(\eta)$ для любой непрерывной ограниченной функции $g(x)$. Доказать, что их распределения совпадают.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Таблица значений функции Гаусса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0,00	0,3989	0,50	0,3521	1,00	0,2420	1,50	0,1295	2,00	0,0540
0,01	0,3989	0,51	0,3503	1,01	0,2396	1,51	0,1276	2,01	0,0529
0,02	0,3989	0,52	0,3485	1,02	0,2371	1,52	0,1257	2,02	0,0519
0,03	0,3988	0,53	0,3467	1,03	0,2347	1,53	0,1238	2,03	0,0508
0,04	0,3986	0,54	0,3448	1,04	0,2323	1,54	0,1219	2,04	0,0498
0,05	0,3984	0,55	0,3429	1,05	0,2299	1,55	0,1200	2,05	0,0488
0,06	0,3982	0,56	0,3410	1,06	0,2275	1,56	0,1182	2,06	0,0478
0,07	0,3980	0,57	0,3391	1,07	0,2251	1,57	0,1163	2,07	0,0468
0,08	0,3977	0,58	0,3372	1,08	0,2227	1,58	0,1145	2,08	0,0459
0,09	0,3973	0,59	0,3352	1,09	0,2203	1,59	0,1127	2,09	0,0449
0,10	0,3970	0,60	0,3332	1,1	0,2179	1,6	0,1109	2,1	0,0440
0,11	0,3965	0,61	0,3312	1,11	0,2155	1,61	0,1092	2,11	0,0431
0,12	0,3961	0,62	0,3292	1,12	0,2131	1,62	0,1074	2,12	0,0422
0,13	0,3956	0,63	0,3271	1,13	0,2107	1,63	0,1057	2,13	0,0413
0,14	0,3951	0,64	0,3251	1,14	0,2083	1,64	0,1040	2,14	0,0404
0,15	0,3945	0,65	0,3230	1,15	0,2059	1,65	0,1023	2,15	0,0396
0,16	0,3939	0,66	0,3209	1,16	0,2036	1,66	0,1006	2,16	0,0387
0,17	0,3932	0,67	0,3187	1,17	0,2012	1,67	0,0989	2,17	0,0379
0,18	0,3925	0,68	0,3166	1,18	0,1989	1,68	0,0973	2,18	0,0371
0,19	0,3918	0,69	0,3144	1,19	0,1965	1,69	0,0957	2,19	0,0363
0,20	0,3910	0,70	0,3123	1,2	0,1942	1,7	0,0940	2,2	0,0355
0,21	0,3902	0,71	0,3101	1,21	0,1919	1,71	0,0925	2,21	0,0347
0,22	0,3894	0,72	0,3079	1,22	0,1895	1,72	0,0909	2,22	0,0339
0,23	0,3885	0,73	0,3056	1,23	0,1872	1,73	0,0893	2,23	0,0332
0,24	0,3876	0,74	0,3034	1,24	0,1849	1,74	0,0878	2,24	0,0325
0,25	0,3867	0,75	0,3011	1,25	0,1826	1,75	0,0863	2,25	0,0317
0,26	0,3857	0,76	0,2989	1,26	0,1804	1,76	0,0848	2,26	0,0310
0,27	0,3847	0,77	0,2966	1,27	0,1781	1,77	0,0833	2,27	0,0303
0,28	0,3836	0,78	0,2943	1,28	0,1758	1,78	0,0818	2,28	0,0297
0,29	0,3825	0,79	0,2920	1,29	0,1736	1,79	0,0804	2,29	0,0290
0,3	0,3814	0,80	0,2897	1,3	0,1714	1,8	0,0790	2,3	0,0283
0,31	0,3802	0,81	0,2874	1,31	0,1691	1,81	0,0775	2,31	0,0277
0,32	0,3790	0,82	0,2850	1,32	0,1669	1,82	0,0761	2,32	0,0270
0,33	0,3778	0,83	0,2827	1,33	0,1647	1,83	0,0748	2,33	0,0264
0,34	0,3765	0,84	0,2803	1,34	0,1626	1,84	0,0734	2,34	0,0258
0,35	0,3752	0,85	0,2780	1,35	0,1604	1,85	0,0721	2,35	0,0252
0,36	0,3739	0,86	0,2756	1,36	0,1582	1,86	0,0707	2,36	0,0246
0,37	0,3725	0,87	0,2732	1,37	0,1561	1,87	0,0694	2,37	0,0241
0,38	0,3712	0,88	0,2709	1,38	0,1539	1,88	0,0681	2,38	0,0235
0,39	0,3697	0,89	0,2685	1,39	0,1518	1,89	0,0669	2,39	0,0229
0,4	0,3683	0,90	0,2661	1,4	0,1497	1,9	0,0656	2,4	0,0224
0,41	0,3668	0,91	0,2637	1,41	0,1476	1,91	0,0644	2,41	0,0219
0,42	0,3653	0,92	0,2613	1,42	0,1456	1,92	0,0632	2,42	0,0213
0,43	0,3637	0,93	0,2589	1,43	0,1435	1,93	0,0620	2,43	0,0208
0,44	0,3621	0,94	0,2565	1,44	0,1415	1,94	0,0608	2,44	0,0203
0,45	0,3605	0,95	0,2541	1,45	0,1394	1,95	0,0596	2,45	0,0198
0,46	0,3589	0,96	0,2516	1,46	0,1374	1,96	0,0584	2,46	0,0194
0,47	0,3572	0,97	0,2492	1,47	0,1354	1,97	0,0573	2,47	0,0189
0,48	0,3555	0,98	0,2468	1,48	0,1334	1,98	0,0562	2,48	0,0184
0,49	0,3538	0,99	0,2444	1,49	0,1315	1,99	0,0551	2,49	0,0180
0,50	0,3521	1,00	0,2420	1,50	0,1295	2,00	0,0540	2,50	0,0175

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
2,51	0,0171	3,01	0,0043	3,51	0,0008	4,01	0,0001	4,51	0,0000
2,52	0,0167	3,02	0,0042	3,52	0,0008	4,02	0,0001	4,52	0,0000
2,53	0,0163	3,03	0,0040	3,53	0,0008	4,03	0,0001	4,53	0,0000
2,54	0,0158	3,04	0,0039	3,54	0,0008	4,04	0,0001	4,54	0,0000
2,55	0,0154	3,05	0,0038	3,55	0,0007	4,05	0,0001	4,55	0,0000
2,56	0,0151	3,06	0,0037	3,56	0,0007	4,06	0,0001	4,56	0,0000
2,57	0,0147	3,07	0,0036	3,57	0,0007	4,07	0,0001	4,57	0,0000
2,58	0,0143	3,08	0,0035	3,58	0,0007	4,08	0,0001	4,58	0,0000
2,59	0,0139	3,09	0,0034	3,59	0,0006	4,09	0,0001	4,59	0,0000
2,60	0,0136	3,10	0,0033	3,60	0,0006	4,10	0,0001	4,60	0,0000
2,61	0,0132	3,11	0,0032	3,61	0,0006	4,11	0,0001	4,61	0,0000
2,62	0,0129	3,12	0,0031	3,62	0,0006	4,12	0,0001	4,62	0,0000
2,63	0,0126	3,13	0,0030	3,63	0,0005	4,13	0,0001	4,63	0,0000
2,64	0,0122	3,14	0,0029	3,64	0,0005	4,14	0,0001	4,64	0,0000
2,65	0,0119	3,15	0,0028	3,65	0,0005	4,15	0,0001	4,65	0,0000
2,66	0,0116	3,16	0,0027	3,66	0,0005	4,16	0,0001	4,66	0,0000
2,67	0,0113	3,17	0,0026	3,67	0,0005	4,17	0,0001	4,67	0,0000
2,68	0,0110	3,18	0,0025	3,68	0,0005	4,18	0,0001	4,68	0,0000
2,69	0,0107	3,19	0,0025	3,69	0,0004	4,19	0,0001	4,69	0,0000
2,70	0,0104	3,20	0,0024	3,70	0,0004	4,20	0,0001	4,70	0,0000
2,71	0,0101	3,21	0,0023	3,71	0,0004	4,21	0,0001	4,71	0,0000
2,72	0,0099	3,22	0,0022	3,72	0,0004	4,22	0,0001	4,72	0,0000
2,73	0,0096	3,23	0,0022	3,73	0,0004	4,23	0,0001	4,73	0,0000
2,74	0,0093	3,24	0,0021	3,74	0,0004	4,24	0,0000	4,74	0,0000
2,75	0,0091	3,25	0,0020	3,75	0,0004	4,25	0,0000	4,75	0,0000
2,76	0,0088	3,26	0,0020	3,76	0,0003	4,26	0,0000	4,76	0,0000
2,77	0,0086	3,27	0,0019	3,77	0,0003	4,27	0,0000	4,77	0,0000
2,78	0,0084	3,28	0,0018	3,78	0,0003	4,28	0,0000	4,78	0,0000
2,79	0,0081	3,29	0,0018	3,79	0,0003	4,29	0,0000	4,79	0,0000
2,80	0,0079	3,30	0,0017	3,80	0,0003	4,30	0,0000	4,80	0,0000
2,81	0,0077	3,31	0,0017	3,81	0,0003	4,31	0,0000	4,81	0,0000
2,82	0,0075	3,32	0,0016	3,82	0,0003	4,32	0,0000	4,82	0,0000
2,83	0,0073	3,33	0,0016	3,83	0,0003	4,33	0,0000	4,83	0,0000
2,84	0,0071	3,34	0,0015	3,84	0,0003	4,34	0,0000	4,84	0,0000
2,85	0,0069	3,35	0,0015	3,85	0,0002	4,35	0,0000	4,85	0,0000
2,86	0,0067	3,36	0,0014	3,86	0,0002	4,36	0,0000	4,86	0,0000
2,87	0,0065	3,37	0,0014	3,87	0,0002	4,37	0,0000	4,87	0,0000
2,88	0,0063	3,38	0,0013	3,88	0,0002	4,38	0,0000	4,88	0,0000
2,89	0,0061	3,39	0,0013	3,89	0,0002	4,39	0,0000	4,89	0,0000
2,90	0,0060	3,40	0,0012	3,90	0,0002	4,40	0,0000	4,90	0,0000
2,91	0,0058	3,41	0,0012	3,91	0,0002	4,41	0,0000	4,91	0,0000
2,92	0,0056	3,42	0,0012	3,92	0,0002	4,42	0,0000	4,92	0,0000
2,93	0,0055	3,43	0,0011	3,93	0,0002	4,43	0,0000	4,93	0,0000
2,94	0,0053	3,44	0,0011	3,94	0,0002	4,44	0,0000	4,94	0,0000
2,95	0,0051	3,45	0,0010	3,95	0,0002	4,45	0,0000	4,95	0,0000
2,96	0,0050	3,46	0,0010	3,96	0,0002	4,46	0,0000	4,96	0,0000
2,97	0,0048	3,47	0,0010	3,97	0,0002	4,47	0,0000	4,97	0,0000
2,98	0,0047	3,48	0,0009	3,98	0,0001	4,48	0,0000	4,98	0,0000
2,99	0,0046	3,49	0,0009	3,99	0,0001	4,49	0,0000	4,99	0,0000
3,00	0,0044	3,50	0,0009	4,00	0,0001	4,50	0,0000	5,00	0,0000

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,01	0,0040	0,51	0,1950	1,01	0,3438	1,51	0,4345	2,01	0,4778
0,02	0,0140	0,52	0,1985	1,02	0,3461	1,52	0,4357	2,02	0,4783
0,03	0,0240	0,53	0,2019	1,03	0,3485	1,53	0,4370	2,03	0,4788
0,04	0,0340	0,54	0,2054	1,04	0,3508	1,54	0,4382	2,04	0,4793
0,05	0,0440	0,55	0,2088	1,05	0,3531	1,55	0,4394	2,05	0,4798
0,06	0,0540	0,56	0,2123	1,06	0,3554	1,56	0,4406	2,06	0,4803
0,07	0,0640	0,57	0,2157	1,07	0,3577	1,57	0,4418	2,07	0,4808
0,08	0,0740	0,58	0,2190	1,08	0,3599	1,58	0,4429	2,08	0,4812
0,09	0,0840	0,59	0,2224	1,09	0,3621	1,59	0,4441	2,09	0,4817
0,10	0,0940	0,60	0,2257	1,10	0,3643	1,60	0,4452	2,10	0,4821
0,11	0,1040	0,61	0,2291	1,11	0,3665	1,61	0,4463	2,11	0,4826
0,12	0,1140	0,62	0,2324	1,12	0,3686	1,62	0,4474	2,12	0,4830
0,13	0,1240	0,63	0,2357	1,13	0,3708	1,63	0,4484	2,13	0,4834
0,14	0,1340	0,64	0,2389	1,14	0,3729	1,64	0,4495	2,14	0,4838
0,15	0,1440	0,65	0,2422	1,15	0,3749	1,65	0,4505	2,15	0,4842
0,16	0,1540	0,66	0,2454	1,16	0,3770	1,66	0,4515	2,16	0,4846
0,17	0,1640	0,67	0,2486	1,17	0,3790	1,67	0,4525	2,17	0,4850
0,18	0,1740	0,68	0,2517	1,18	0,3810	1,68	0,4535	2,18	0,4854
0,19	0,1840	0,69	0,2549	1,19	0,3830	1,69	0,4545	2,19	0,4857
0,20	0,1940	0,70	0,2580	1,20	0,3849	1,70	0,4554	2,20	0,4861
0,21	0,2040	0,71	0,2611	1,21	0,3869	1,71	0,4564	2,21	0,4864
0,22	0,2140	0,72	0,2642	1,22	0,3888	1,72	0,4573	2,22	0,4868
0,23	0,2240	0,73	0,2673	1,23	0,3907	1,73	0,4582	2,23	0,4871
0,24	0,2340	0,74	0,2704	1,24	0,3925	1,74	0,4591	2,24	0,4875
0,25	0,2440	0,75	0,2734	1,25	0,3944	1,75	0,4599	2,25	0,4878
0,26	0,2540	0,76	0,2764	1,26	0,3962	1,76	0,4608	2,26	0,4881
0,27	0,2640	0,77	0,2794	1,27	0,3980	1,77	0,4616	2,27	0,4884
0,28	0,2740	0,78	0,2823	1,28	0,3997	1,78	0,4625	2,28	0,4887
0,29	0,2840	0,79	0,2852	1,29	0,4015	1,79	0,4633	2,29	0,4890
0,30	0,2940	0,80	0,2881	1,30	0,4032	1,80	0,4641	2,30	0,4893
0,31	0,3040	0,81	0,2910	1,31	0,4049	1,81	0,4649	2,31	0,4896
0,32	0,3140	0,82	0,2939	1,32	0,4066	1,82	0,4656	2,32	0,4898
0,33	0,3240	0,83	0,2967	1,33	0,4082	1,83	0,4664	2,33	0,4901
0,34	0,3340	0,84	0,2995	1,34	0,4099	1,84	0,4671	2,34	0,4904
0,35	0,3440	0,85	0,3023	1,35	0,4115	1,85	0,4678	2,35	0,4906
0,36	0,3540	0,86	0,3051	1,36	0,4131	1,86	0,4686	2,36	0,4909
0,37	0,3640	0,87	0,3078	1,37	0,4147	1,87	0,4693	2,37	0,4911
0,38	0,3740	0,88	0,3106	1,38	0,4162	1,88	0,4699	2,38	0,4913
0,39	0,3840	0,89	0,3133	1,39	0,4177	1,89	0,4706	2,39	0,4916
0,40	0,3940	0,90	0,3159	1,40	0,4192	1,90	0,4713	2,40	0,4918
0,41	0,4040	0,91	0,3186	1,41	0,4207	1,91	0,4719	2,41	0,4920
0,42	0,4140	0,92	0,3212	1,42	0,4222	1,92	0,4726	2,42	0,4922
0,43	0,4240	0,93	0,3238	1,43	0,4236	1,93	0,4732	2,43	0,4925
0,44	0,4340	0,94	0,3264	1,44	0,4251	1,94	0,4738	2,44	0,4927
0,45	0,4440	0,95	0,3289	1,45	0,4265	1,95	0,4744	2,45	0,4929
0,46	0,4540	0,96	0,3315	1,46	0,4279	1,96	0,4750	2,46	0,4931
0,47	0,4640	0,97	0,3340	1,47	0,4292	1,97	0,4756	2,47	0,4932
0,48	0,4740	0,98	0,3365	1,48	0,4306	1,98	0,4761	2,48	0,4934
0,49	0,4840	0,99	0,3389	1,49	0,4319	1,99	0,4767	2,49	0,4936
0,50	0,4940	1,00	0,3413	1,50	0,4332	2,00	0,4772	2,50	0,4938

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,51	0,4940	3,01	0,4987	3,51	0,4998	4,01	0,5000	4,51	0,5000
2,52	0,4941	3,02	0,4987	3,52	0,4998	4,02	0,5000	4,52	0,5000
2,53	0,4943	3,03	0,4988	3,53	0,4998	4,03	0,5000	4,53	0,5000
2,54	0,4945	3,04	0,4988	3,54	0,4998	4,04	0,5000	4,54	0,5000
2,55	0,4946	3,05	0,4989	3,55	0,4998	4,05	0,5000	4,55	0,5000
2,56	0,4948	3,06	0,4989	3,56	0,4998	4,06	0,5000	4,56	0,5000
2,57	0,4949	3,07	0,4989	3,57	0,4998	4,07	0,5000	4,57	0,5000
2,58	0,4951	3,08	0,4990	3,58	0,4998	4,08	0,5000	4,58	0,5000
2,59	0,4952	3,09	0,4990	3,59	0,4998	4,09	0,5000	4,59	0,5000
2,60	0,4953	3,10	0,4990	3,60	0,4998	4,10	0,5000	4,60	0,5000
2,61	0,4955	3,11	0,4991	3,61	0,4998	4,11	0,5000	4,61	0,5000
2,62	0,4956	3,12	0,4991	3,62	0,4999	4,12	0,5000	4,62	0,5000
2,63	0,4957	3,13	0,4991	3,63	0,4999	4,13	0,5000	4,63	0,5000
2,64	0,4959	3,14	0,4992	3,64	0,4999	4,14	0,5000	4,64	0,5000
2,65	0,4960	3,15	0,4992	3,65	0,4999	4,15	0,5000	4,65	0,5000
2,66	0,4961	3,16	0,4992	3,66	0,4999	4,16	0,5000	4,66	0,5000
2,67	0,4962	3,17	0,4992	3,67	0,4999	4,17	0,5000	4,67	0,5000
2,68	0,4963	3,18	0,4993	3,68	0,4999	4,18	0,5000	4,68	0,5000
2,69	0,4964	3,19	0,4993	3,69	0,4999	4,19	0,5000	4,69	0,5000
2,70	0,4965	3,20	0,4993	3,70	0,4999	4,20	0,5000	4,70	0,5000
2,71	0,4966	3,21	0,4993	3,71	0,4999	4,21	0,5000	4,71	0,5000
2,72	0,4967	3,22	0,4994	3,72	0,4999	4,22	0,5000	4,72	0,5000
2,73	0,4968	3,23	0,4994	3,73	0,4999	4,23	0,5000	4,73	0,5000
2,74	0,4969	3,24	0,4994	3,74	0,4999	4,24	0,5000	4,74	0,5000
2,75	0,4970	3,25	0,4994	3,75	0,4999	4,25	0,5000	4,75	0,5000
2,76	0,4971	3,26	0,4994	3,76	0,4999	4,26	0,5000	4,76	0,5000
2,77	0,4972	3,27	0,4995	3,77	0,4999	4,27	0,5000	4,77	0,5000
2,78	0,4973	3,28	0,4995	3,78	0,4999	4,28	0,5000	4,78	0,5000
2,79	0,4974	3,29	0,4995	3,79	0,4999	4,29	0,5000	4,79	0,5000
2,80	0,4974	3,30	0,4995	3,80	0,4999	4,30	0,5000	4,80	0,5000
2,81	0,4975	3,31	0,4995	3,81	0,4999	4,31	0,5000	4,81	0,5000
2,82	0,4976	3,32	0,4995	3,82	0,4999	4,32	0,5000	4,82	0,5000
2,83	0,4977	3,33	0,4996	3,83	0,4999	4,33	0,5000	4,83	0,5000
2,84	0,4977	3,34	0,4996	3,84	0,4999	4,34	0,5000	4,84	0,5000
2,85	0,4978	3,35	0,4996	3,85	0,4999	4,35	0,5000	4,85	0,5000
2,86	0,4979	3,36	0,4996	3,86	0,4999	4,36	0,5000	4,86	0,5000
2,87	0,4979	3,37	0,4996	3,87	0,4999	4,37	0,5000	4,87	0,5000
2,88	0,4980	3,38	0,4996	3,88	0,4999	4,38	0,5000	4,88	0,5000
2,89	0,4981	3,39	0,4997	3,89	0,4999	4,39	0,5000	4,89	0,5000
2,90	0,4981	3,40	0,4997	3,90	0,5000	4,40	0,5000	4,90	0,5000
2,91	0,4982	3,41	0,4997	3,91	0,5000	4,41	0,5000	4,91	0,5000
2,92	0,4982	3,42	0,4997	3,92	0,5000	4,42	0,5000	4,92	0,5000
2,93	0,4983	3,43	0,4997	3,93	0,5000	4,43	0,5000	4,93	0,5000
2,94	0,4984	3,44	0,4997	3,94	0,5000	4,44	0,5000	4,94	0,5000
2,95	0,4984	3,45	0,4997	3,95	0,5000	4,45	0,5000	4,95	0,5000
2,96	0,4985	3,46	0,4997	3,96	0,5000	4,46	0,5000	4,96	0,5000
2,97	0,4985	3,47	0,4997	3,97	0,5000	4,47	0,5000	4,97	0,5000
2,98	0,4986	3,48	0,4997	3,98	0,5000	4,48	0,5000	4,98	0,5000
2,99	0,4986	3,49	0,4998	3,99	0,5000	4,49	0,5000	4,99	0,5000
3,00	**0,49865**	3,50	0,4998	4,00	0,49997	4,50	0,50000	5,00	0,50000

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богомолов Ю.В., Максименко А.Н., Морозов А.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Сборник задач. Ярославль, 2009. – 110 с.
2. Решетов С. В., Суслина И. А. Задачи для самостоятельного решения по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. Пособие / СПб.: НИУ ИТМО, 2014. – 58 с.
3. Свешников А. А. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных чисел. СПб.: изд. Лань, 2021. – 448 с.
4. Вильям Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения в 2т. М: Мир. 1984.
5. Чернова Н. И. Теория вероятностей. Новосибирск, 2007. – 160 с.
6. Джордан Элленберг. Как не ошибаться. Манн, Иванов и Фербер, 2017.

Блаженов Алексей Викторович
Милованович Екатерина Воиславовна
Брылевская Лариса Ивановна
Далевская Ольга Петровна
Ржонсницкая Юлия Борисовна

Сборник задач по теории вероятностей

Учебное пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А