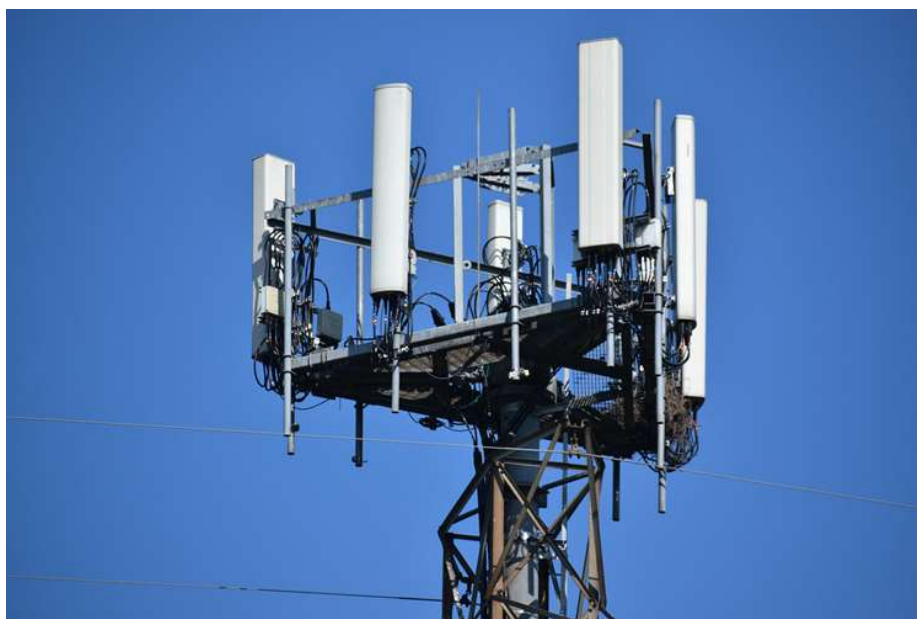


ІІТМО

М.М. Попов, З.А. Яковлев

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И
РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН.
МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО КУРСУ
ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**



Источник: <https://habr.com/ru/news/591123/>

**Санкт-Петербург
2025**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

М.М. Попов, З.А. Яковлев
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И
РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН.
МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО КУРСУ
ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 03.03.02, 16.03.01
в качестве учебно-методического пособия для реализации основных
профессиональных образовательных программ высшего образования
бакалавриата

ИТМО

Санкт-Петербург
2025

Попов М.М., Яковлев З.А., "Электродинамика и распространение радиоволн", методическое пособие по курсу практических занятий– СПб: Университет ИТМО, 2025. – 193 с.

Рецензент(ы):

Горлач Максим Александрович, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник физического факультета, Университета ИТМО.

Методическое пособие представляет собой обзор ключевых разделов первой части курса практических занятий по дисциплине «Электродинамика и распространение радиоволн» и предназначено для студентов бакалавриата, обучающихся по направлениям «Физика» и «Техническая физика». Последовательность изложения в основном совпадает с первой частью лекционного курса.



ИТМО (Санкт-Петербург) — национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: IT и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication. Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализуется программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития — научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента.

ИТМО пять лет подряд — в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере IT. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ-5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

© Университет ИТМО, 2025
© Попов М.М., Яковлев З.А., 2025

Оглавление

1	Векторный анализ. Дифференциальные операторы	10
1.1	Пример 1. Операции с векторами	10
1.2	Пример 2. Формула «бац минус цаб»	14
1.3	Пример 3. Координатный и символьный метод	15
1.4	Пример 4. Силовые линии векторного поля	17
1.5	Пример 5. Формула Остроградского-Гаусса	19
1.6	Пример 6. Формула Стокса	21
1.7	Задачи для самостоятельного решения	23
1.8	Вопросы для самопроверки	26
2	Свойства системы уравнений Максвелла	30
2.1	Пример 1. Переход между СИ и СГС	30
2.2	Пример 2. Комплексные амплитуды	33
2.3	Пример 3. Волновое уравнение на вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$	35
2.4	Пример 4. Определения полей через потенциалы	37
2.5	Пример 5. Калибровки векторного потенциала	39
2.6	Пример 6. Калибровка Лоренца	40
2.7	Задачи для самостоятельного решения	43
2.8	Вопросы для самопроверки	48

3	Электростатика в вакууме	50
3.1	Пример 1. Третья формула Грина	51
3.2	Пример 2. Функция Грина трехмерного уравнения Пуассона	54
3.3	Пример 3. Общее решение уравнения Пуассона на примере поля плоскости с выступом	57
3.4	Пример 4. Мультипольное разложение в декартовых коор- динатах	60
3.5	Пример 5. Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферических координатах	66
3.6	Пример 6. Разделение переменных в уравнении Пуассона в сферических координатах	70
3.7	Задачи для самостоятельного решения	74
3.8	Вопросы для самопроверки	77
4	Электростатика диэлектриков и проводников	82
4.1	Пример 1. Микроскопическая модель диэлектрика	83
4.2	Пример 2. Поле заряда на границе раздела диэлектриков .	87
4.3	Пример 3. Метод изображений в диэлектрике	89
4.4	Пример 4. Изображение точечного заряда в сфере из про- водника	93
4.5	Пример 5. Проводящая сфера во внешнем поле	99
4.6	Пример 6. Метод конформных отображений в электростатике	102
4.7	Задачи для самостоятельного решения	107
4.8	Вопросы для самопроверки	110
5	Плоские волны	114
5.1	Пример 1. Поляризация электромагнитных волн	115
5.2	Пример 2. Правые и левые среды	118
5.3	Пример 3. Эволюция волнового пакета в диспергирующей среде с линейным законом дисперсии	126

5.4	Пример 4. Эволюция волнового пакета в диспергирующей среде с квадратичным законом дисперсии	128
5.5	Пример 5. Матрица рассеяния стыка линий передачи . . .	130
5.6	Пример 6. Рассеяние на метаповерхности в приближении усредненных граничных условий	134
5.7	Задачи для самостоятельного решения	139
5.8	Вопросы для самопроверки	143
6	Задача излучения	150
6.1	Пример 1. Волновые уравнения на векторные потенциалы	151
6.2	Пример 2. Функция Грина одномерного уравнения Гельмгольца	156
6.3	Пример 3. Поле плоского листа электрического тока	161
6.4	Пример 4. Поле нити магнитного тока	165
6.5	Пример 5. Диаграмма направленности прямоугольного распределения электрического тока над идеальным магнетиком	169
6.6	Пример 6. Диаграмма направленности одномерной антенной решетки из коллинеарных диполей	176
6.7	Задачи для самостоятельного решения	180
6.8	Вопросы для самопроверки	182
	Список литературы	186

Введение

Методическое пособие представляет собой обзор ключевых разделов первой части курса практических занятий по дисциплине «Электродинамика и распространение радиоволн» и предназначено для студентов бакалавриата, обучающихся по направлениям «Физика» и «Техническая физика». Последовательность изложения в основном совпадает с первой частью лекционного курса.

Несколько первых практических занятий отводится на обсуждение математического введения. Среди рассматриваемых тем – координатная запись алгебраических операций с векторами, использование оператора набла в координатном и символьном методах при упрощении выражений и вычислении роторов, градиентов и дивергенций, изменение размерности интегралов с помощью теорем Остроградского-Гаусса и Стокса. Затем обсуждаются основные свойства системы уравнений Максвелла и некоторые технические детали, такие как метод комплексных амплитуд и переход между системами единиц СИ и СГС. Среди свойств уравнений Максвелла основной интерес представляют способы сведения системы к волновым уравнениям на векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, использование векторного и скалярного потенциалов, калибровки Кулона и Лоренца. Математическое введение и часть, посвященная свойствам уравнений Максвелла, не являются самостоятельными темами: это инструменты, необходимые для решения задач из следующих разделов, поэтому их стоит воспринимать только как вспомогательные.

В общем случае в задачах электродинамики все искомые величины зависят от координат и времени. Применение технических приемов, освоенных в предыдущих разделах, сперва подробно рассматривается на примере более простых задач, когда решения не зависят от времени, но зависят сложным образом от координат (электростатика) или зависят от

координат самым простым образом (плоские волны). В разделе курса, посвященном электростатике, разбираются основные способы решения граничных задач, такие как решение с помощью функции Грина, мультипольное разложение, разложение по собственным функциям, получаемым разделением переменных, метод изображений и другие. В качестве иллюстрации одного из специальных подходов к решению электростатических задач рассматривается метод конформных отображений. В разделе про плоские волны помимо видов поляризации, а также задач дифракции плоских волн на границе раздела, показан способ разложения волнового пакета по базису плоских монохроматических волн. В конце раздела вводится определение S-параметров и матрицы рассеяния, разбираются задачи про эквивалентные длинные линии, не затрагивая специальные вопросы из курса цепей СВЧ.

Раздел о задаче излучения – это первый раздел, в котором обсуждается постановка задач, свойственная теории антенн и другим специальным курсам, базирующимся на курсе электродинамики. В этом разделе вводится общая постановка задачи излучения и обсуждается способ нахождения полей заданной конфигурации электрических и магнитных источников с помощью функции Грина, записанной в разных представлениях. Помимо нескольких базовых задач по нахождению поля излучения элементарных источников разобраны возможные применения к теории антенн: расчет диаграммы направленности распределения тока по проволочной антенне, теорема перемножения.

В тексте приведены подробные решения некоторых упражнений, демонстрирующие основные подходы к решению задач. Каждое решение снабжено общим комментарием, кратко характеризующим последовательность действий. Там, где это требуется, в тексты разборов добавлены ссылки на статьи и монографии, демонстрирующие практическую значимость обсуждаемых идей. В конце решений окончательный ответ или

завершение доказательства помечены символом ■. Для лучшего освоения материала все разделы снабжены дополнительными задачами, а также вопросами для самопроверки. Дополнительные задачи представляют собой полноценные упражнения, равные по уровню сложности разобранным. Вопросы для самопроверки – это теоретический минимум, нужный для усвоения основных идей и отработки простых технических приемов. Пособие составлено на основе курса упражнений, читаемого авторами в течение нескольких лет на Физическом факультете Университета ИТМО для студентов второго и третьего курсов. Помимо авторских задач в методическое пособие в большом количестве включены упражнения из сборников [1, 2, 3, 4].

Обозначения

- $\Re$ – вещественная часть
- $\Im$ – мнимая часть
- $\otimes$ – диадное (тензорное) произведение
- $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел
- c – скорость света в вакууме
- μ_0 – магнитная постоянная в системе СИ
- ε_0 – электрическая постоянная в системе СИ
- $\theta(x)$ – функция Хевисайда переменной x

Глава 1

Векторный анализ. Дифференциальные операторы

Первая тема, предлагаемая к рассмотрению – краткое математическое введение, включающее напоминание правил обращения с векторными функциями, дифференциальными операторами, а также теоремами Остроградского-Гаусса и Стокса. Данный раздел призван напомнить некоторые подробности операций с векторами и дифференциальными операторами, детально изученные ранее в курсе математического анализа. Для углубления в материал заинтересованный читатель может обратиться к монографии [5], а также задачникам [6, 7]. Краткое математическое введение также можно найти в учебнике [8].

1.1 Пример 1. Операции с векторами

Даны векторы $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{c} = (0, 1, 1)$. Вычислите:

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$;
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$;
- $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c}$;
- $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$.

Общий комментарий

Здесь и далее по умолчанию будет предполагаться, что все векторы трехмерные. Мы не будем в курсе различать векторы-столбцы (векторы) и векторы-строки (ко-векторы), равно как и нижние и верхние индексы. При записи сумм для краткости будем пользоваться упрощенным правилом Эйнштейна: если индекс встречается в общем члене суммы дважды, по нему предполагается суммирование. Все векторы записаны жирным шрифтом.

Напомним правила умножения векторов, представленных в декартовой системе координат. Скалярное произведение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i \equiv a_i b_i, \quad (1.1)$$

где a_i, b_i – компоненты векторов в декартовой системе координат. Орты декартовой системы координат будем обозначать $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^3$. Векторное произведение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в сокращенном варианте записи

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k, \quad (1.2)$$

где ε_{ijk} – это полностью антисимметричный символ или символ Леви-Чивиты. Его значение для любого набора индексов (i, j, k) определено

следующим образом:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j, k) \text{ — циклический сдвиг } (1, 2, 3), \\ -1, & \text{если } (i, j, k) \text{ — циклический сдвиг } (2, 1, 3), \\ 0, & \text{если в наборе } (i, j, k) \text{ есть повторяющиеся индексы.} \end{cases} \quad (1.3)$$

Эквивалентное определение символа Леви-Чивиты — -1 в степени числа инверсий в наборе индексов (i, j, k) (инверсия в перестановке индексов — пара индексов (i, j) такая, что $i < j$, но при этом элемент на позиции i в перестановке больше элемента на позиции j). Результат векторного произведения двух векторов также можно вычислить как символический определитель матрицы, первая строка которой состоит из ортов $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$, а вторая и третья — из компонент векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_x(a_2b_3 - a_3b_2) + \mathbf{e}_y(a_3b_1 - a_1b_3) + \mathbf{e}_z(a_1b_2 - a_2b_1). \quad (1.4)$$

Смешанное произведение трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, как следует из определений скалярного и векторного произведений,

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k, \quad (1.5)$$

или, что то же самое, равно определителю матрицы, строками которой являются векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, образованного векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Смешанное произведение равно нулю, когда векторы линейно зависимы (компланарны).

Тензорное (или диадное, или прямое) произведение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равно матрице, элементы которой представляют собой попарные произведения компонент векторов a_i и b_j :

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \{a_i b_j\}_{i,j=1}^3 = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Решение задачи

Воспользуемся определениями векторных операций, введенными выше, и вычислим требуемые произведения векторов $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, 0)$ и $\mathbf{c} = (0, 1, 1)$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -1, \quad \blacksquare$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_z - \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \blacksquare$$

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \blacksquare$$

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Отметим, что смешанное произведение равно нулю, поскольку $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

1.2 Пример 2. Формула «бац минус цаб»

Докажите тождество:

$$[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Общий комментарий

Докажем тождество, записав его в координатной форме. При доказательстве воспользуемся формулой для свертки двух символов Леви-Чивиты по повторяющемуся индексу [9]

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kml} = \delta_{im}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jm}, \quad (1.8)$$

где $\delta_{i_1 i_2}$ – дельта-символ Кронекера, равный единице, если $i_1 = i_2$, и равный нулю в противном случае.

Решение задачи

Перепишем левую часть тождества с двойным векторным произведением. Введем обозначение

$$\mathbf{d} \equiv \mathbf{b} \times \mathbf{c}. \quad (1.9)$$

Тогда

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \mathbf{a} \times \mathbf{d} = \varepsilon_{lkm} a_l d_k \mathbf{e}_m = \varepsilon_{lkm} a_l (b_i c_j \varepsilon_{ijk}) \mathbf{e}_m. \quad (1.10)$$

С учетом свойства (1.8) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] &= a_l b_i c_j \delta_{im} \delta_{jl} \mathbf{e}_m - a_l b_i c_j \delta_{il} \delta_{jm} \mathbf{e}_m = \\ &= b_i \mathbf{e}_i a_j c_j - c_j \mathbf{e}_j a_i b_i = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.3 Пример 3. Координатный и символьный метод

Докажите тождество:

$$(\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}).$$

Общий комментарий

Докажем приведенное равенство двумя способами: координатным и символьным. Для того, чтобы уяснить идею координатного метода, важно понимать, что вектор – это абстрактный математический объект, существующий независимо от того, введена система координат или нет. В тот момент, когда вектор раскладывается по конкретному выбранному базису, например, по декартовому, его форма представления начинает определяться этим конкретным выбранным базисом. Однако, если разложить вектор по определенному базису, провести преобразования, воспользовавшись этим разложением, а затем свернуть результат обратно в форму, инвариантную относительно выбора базиса, вся цепочка равенств будет строгой. Суть координатного способа заключается в разложении всех векторов по конкретному базису, вычислении производных и свертке результата обратно в запись, инвариантную относительно выбора базиса.

Символьный способ – это более короткая форма записи координатного способа. Его основной принцип заключается в том, чтобы рассматривать любую комбинацию частных производных как дифференциальный оператор, действующий **на все, что стоит правее него**, а затем в пределах каждого слагаемого переставить все сомножители, включая дифференциальные операторы, так, как будто это векторы. Если после пере-

становки сомножителей правее дифференциального оператора оказались только те векторы, на которые он действует, преобразование считается завершенным.

Решение задачи

Начнем с координатного способа. Разложим $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ по декартовому базису и подставим в левую часть тождества. Получим

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} &= (\partial_k \mathbf{e}_k \cdot b_j \mathbf{e}_j) a_i \mathbf{e}_i = (\partial_k b_j \delta_{kj}) a_i \mathbf{e}_i = \\ &= \partial_j b_j a_i \mathbf{e}_i = a_i \mathbf{e}_i \partial_j b_j + b_j \partial_j a_i \mathbf{e}_i = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a}, \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (1.12)$$

где введено обозначение частной производной по i -й координате $\partial_i = \partial/\partial x_i$.

Теперь получим то же самое с помощью символьного способа. Для этого будем каждый раз показывать надписанным черным треугольником, на какой сомножитель из произведения действует дифференциальный оператор. Аналогично правилу взятия производной от произведения в случае скалярных функций, оператор сначала действует на первый сомножитель, а затем - на второй. Тогда

$$(\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} = (\nabla \cdot \overset{\blacktriangledown}{\mathbf{b}})\mathbf{a} + (\nabla \cdot \mathbf{b})\overset{\blacktriangledown}{\mathbf{a}}. \quad (1.13)$$

В каждом из слагаемых треугольник указывает на тот сомножитель, на который действует дифференциальный оператор, в то время как второй сомножитель не подвержен дифференцированию. Поэтому со вторыми сомножителями можно делать любые операции как с постоянными векторами. Учитывая это, преобразуем выражение таким образом, чтобы

правее операторов стояли только элементы с надписанными треугольниками:

$$(\nabla \cdot \overset{\nabla}{b})\mathbf{a} + (\nabla \cdot \mathbf{b})\overset{\nabla}{a} = \mathbf{a}(\nabla \cdot \overset{\nabla}{b}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\overset{\nabla}{a}. \quad (1.14)$$

Действительно, в первом слагаемом скаляр $\nabla \cdot \mathbf{b}$ и вектор $\mathbf{a}$ были поменяны местами, а во втором был изменен порядок сомножителей в скалярном произведении, благодаря чему результат выражения остался прежним. Теперь треугольники можно убрать, так как по умолчанию дифференциальный оператор действует на все, что стоит правее него, а в новой форме записи правее стоят только элементы с треугольниками. Таким образом,

$$(\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} = \mathbf{a}(\nabla \cdot \overset{\nabla}{b}) + (\mathbf{b}\nabla)\overset{\nabla}{a} = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a}. \quad \blacksquare \quad (1.15)$$

Для обозначения элемента, на который действует оператор, в символьном методе нет общепринятого обозначения: в разных источниках используют подчеркивание, надчеркивание, стрелку, индекс (c) (constant) для второго сомножителя и другие разнообразные обозначения.

1.4 Пример 4. Силовые линии векторного поля

Опишите семейство силовых линий векторного поля:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Общий комментарий

Силовые линии векторного поля представляют собой интегральные кривые, чья касательная в любой точке пространства коллинеарна вектору поля в этой точке, причём ориентация касательной совпадает с на-

правлением векторного поля. Густота силовых линий (число линий, проходящих через единичную площадь) показывает абсолютную величину векторного поля. Уравнение силовых линий векторного поля $\mathbf{A}$ записывается в виде

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}. \quad (1.16)$$

Решение задачи

Так как $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$, уравнение силовых линий (1.16) примет вид

$$\frac{dx_1}{x_1/r^3} = \frac{dx_2}{x_2/r^3} = \frac{dx_3}{x_3/r^3}. \quad (1.17)$$

Разобьем (1.17) на два уравнения и решим полученную систему

$$\begin{cases} dx_2/x_2 = dx_1/x_1 \\ dx_3/x_3 = dx_2/x_2, \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\begin{cases} \ln |x_2| = \ln |x_1| + c'_1 \\ \ln |x_3| = \ln |x_2| + c'_2, \end{cases} \quad (1.19)$$

$$\begin{cases} x_2 = c_1 \cdot x_1 \\ x_3 = c_2 \cdot x_2, \end{cases} \quad (1.20)$$

где c_1, c_2 – некоторые константы. Семейство кривых, задаваемых системой (1.20), – прямые, проходящие через начало координат. Число силовых линий определяется телесным углом, а величина телесного угла, опирающегося на площадь S , спадает обратно пропорционально квадрату расстояния r ($\Omega = S/r^2$). Таким образом, число линий, проходящих через единичную площадь, спадает обратно пропорционально квадрату расстояния, что согласуется с выражением для $\mathbf{A}$ ($|\mathbf{A}| \propto 1/r^2$). Силовые линии

направлены от начала координат, а поверхности постоянного значения модуля $\mathbf{A}$ – сферы с центром в начале координат.

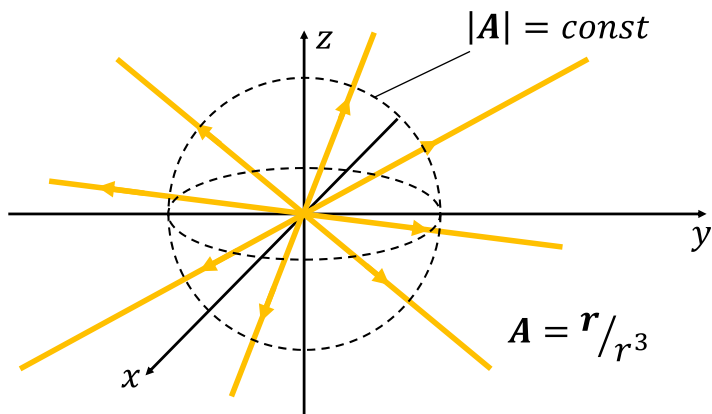


Рис. 1.1: Силовые линии векторного поля

1.5 Пример 5. Формула Остроградского-Гаусса

С помощью формулы Остроградского-Гаусса сведите объемный интеграл I к поверхностному:

$$I = \int_{\Omega} (\nabla \varphi) \cdot [\nabla \times \mathbf{a}] dV.$$

Общий комментарий

Напомним формулу Остроградского-Гаусса

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{A} dV, \quad (1.21)$$

где Ω – трехмерная объемная область, $\partial\Omega$ – ее двумерная замкнутая граница, а $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль (Рис. 1.2). Можно представлять, что Ω – это объем внутри надутого мыльного пузыря, а $\partial\Omega$ – его оболочка.

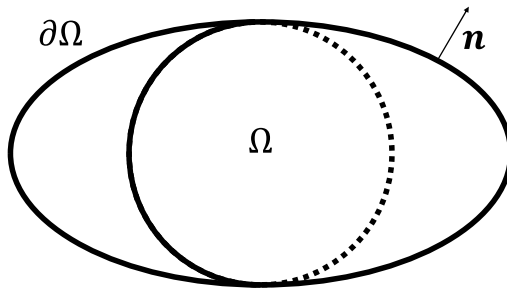


Рис. 1.2: Пояснение к формуле Остроградского-Гаусса. Ω – объем, $\partial\Omega$ – поверхность, $\mathbf{n}$ – нормаль

Решение задачи

Преобразуем интеграл I к такому виду, чтобы иметь возможность воспользоваться формулой Остроградского-Гаусса. Для этого введем обозначение $\mathbf{b} \equiv \nabla\varphi$. Дополнительно воспользуемся равенством

$$\mathbf{b} \cdot [\nabla \times \mathbf{a}] = \nabla \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] + \mathbf{a} \cdot [\nabla \times \mathbf{b}], \quad (1.22)$$

доказательство которого предложено в качестве одного из упражнений для самостоятельного решения и может быть проведено как символьным, так и координатным методом. Тогда

$$\int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot [\nabla \times \mathbf{a}] dV = \int_{\Omega} (\nabla \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] + \mathbf{a} \cdot [\nabla \times \mathbf{b}]) dV. \quad (1.23)$$

Однако $\mathbf{b} = \nabla\varphi$, поэтому $\nabla \times \mathbf{b} = 0$. С учетом того, что второе слагаемое в скобках обратится в 0, применим теорему Остроградского-Гаусса и получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot [\nabla \times \mathbf{a}] dV &= \int_{\Omega} (\nabla \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] + \mathbf{a} \cdot \mathbf{0}) dV = \int_{\Omega} \nabla \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] dV = \\ &= \oint_{\partial\Omega} [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{n} ds. = \oint_{\partial\Omega} [\mathbf{a} \times \nabla\varphi] \cdot \mathbf{n} ds. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (1.24)$$

1.6 Пример 6. Формула Стокса

С помощью формулы Стокса сведите контурный интеграл I к поверхностному:

$$I = \oint_{\partial\Omega} \varphi d\psi.$$

Общий комментарий

Напомним формулу Стокса

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Omega} [\nabla \times \mathbf{A}] \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad (1.25)$$

где Ω – это двумерная незамкнутая поверхность, «натяннутая» на одномерный замкнутый контур $\partial\Omega$ (Рис. 1.3). Направления элемента обхода $d\mathbf{l}$ и вектора нормали $\mathbf{n}$ выбраны по правилу правого винта. Можно представлять, что Ω – это колпак, натянутый на проволочный контур $\partial\Omega$.

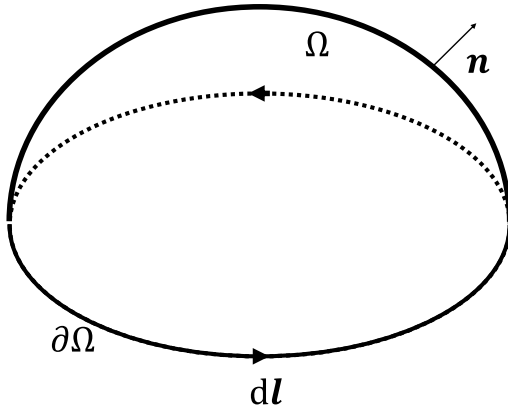


Рис. 1.3: Пояснение к формуле Стокса. Ω – поверхность, $\partial\Omega$ – контур, $d\mathbf{l}$ – элемент обхода, $\mathbf{n}$ – вектор нормали

Решение задачи

Преобразуем интеграл I к такому виду, чтобы иметь возможность воспользоваться формулой Стокса. Для этого перепишем дифференциал в виде

$$d\psi = \nabla\psi \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.26)$$

Тогда исходный интеграл примет вид

$$\oint_{\partial\Omega} \varphi d\psi = \oint_{\partial\Omega} \varphi \nabla\psi \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Omega} [\nabla \times [\varphi \nabla\psi]] \cdot \mathbf{n} ds. \quad \blacksquare \quad (1.27)$$

1.7 Задачи для самостоятельного решения

1. Даны векторы $\mathbf{a} = (3, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (-2, 1, 5)$, $\mathbf{c} = (-3, 0, 2)$. Вычислите:

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$;
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$;
- $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c}$;
- $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$.

2. Докажите равенства:

- (a) $[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] + [\mathbf{c} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]] + [\mathbf{b} \times [\mathbf{c} \times \mathbf{a}]] = \mathbf{0}$;
- (b) $[[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times [\mathbf{c} \times \mathbf{d}]] = \mathbf{b}(\mathbf{d} \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{c}]) - \mathbf{a}(\mathbf{d} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}])$;
- (c) $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot [\mathbf{c} \times \mathbf{d}] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$;
- (d) $\mathbf{a} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a})\mathbf{e} + \mathbf{e} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{e}]$, если $|\mathbf{e}| = 1$;
- (e) $\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times [\mathbf{c} \times \mathbf{d}]] = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})[\mathbf{a} \times \mathbf{c}] - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})[\mathbf{a} \times \mathbf{d}]$.

3. Докажите равенства:

- $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km};$
- $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{klm} = 2\delta_{im}.$

Указание: воспользуйтесь тождеством

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det \begin{vmatrix} \delta^{il} & \delta^{im} & \delta^{in} \\ \delta^{jl} & \delta^{jm} & \delta^{jn} \\ \delta^{kl} & \delta^{km} & \delta^{kn} \end{vmatrix}.$$

4. Вычислите, перейдя к проекциям ($\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$):

- $\nabla|\mathbf{r}|;$
- $\nabla \cdot \mathbf{r};$
- $\nabla \otimes \mathbf{r};$
- $\nabla \times \mathbf{r}.$

5. Вычислите, перейдя к проекциям:

$$\nabla(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}), \text{ если } \mathbf{c} - \text{постоянный вектор, } \mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i.$$

6. Вычислите, перейдя к проекциям: $\nabla|\mathbf{c} \times \mathbf{r}|^2$ ($\mathbf{c}$ - постоянный вектор, $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$).

7. Докажите формулу, перейдя к проекциям:

$$\nabla\varphi(u(\mathbf{r}), v(\mathbf{r})) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\nabla u(\mathbf{r}) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\nabla v(\mathbf{r}),$$

где $u(\mathbf{r}), v(\mathbf{r})$ - скалярные поля, $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$.

8. Вычислите, перейдя к проекциям ($\mathbf{c}$ - постоянный вектор, α - константа, $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$):

- $\nabla(|\mathbf{r} - \mathbf{c}|^{-n});$

- $\nabla(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}/r^3)$;
- $\nabla \cdot (\alpha \mathbf{r})$;
- $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r)$.

9. Докажите равенства координатным и символьным методами ($\mathbf{a}, \mathbf{b}$ - векторные поля, φ - скалярное поле):

- (a) $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \varphi$;
- (b) $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \varphi$;
- (c) $\nabla \times (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times (\nabla \varphi)$;
- (d) $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$;
- (e) $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}$;
- (f) $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b})$.

10. С помощью формулы Остроградского-Гаусса сведите поверхностный интеграл $\mathbf{I}$ к объемному:

$$\mathbf{I} = \oint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{a}] dS.$$

11. С помощью формулы Остроградского-Гаусса сведите поверхностный интеграл $\mathbf{I}$ к объемному:

$$\mathbf{I} = \oint_S \varphi \mathbf{n} dS.$$

12. С помощью формулы Стокса сведите контурный интеграл $\mathbf{I}$ к поверхностному:

$$\mathbf{I} = \oint_L \varphi d\mathbf{r}.$$

13. Получите выражение для силы Архимеда, действующей на небольшое тело, погруженное в однородную жидкость путем интегрирования силы давления по всей поверхности тела.

1.8 Вопросы для самопроверки

1. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы в декартовой системе координат

$$\mathbf{a} = (1, 0, 1), \quad \mathbf{b} = (-1, 0, 0).$$

Вычислите $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z$.

2. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы в декартовой системе координат

$$\mathbf{a} = (-1, 1, 0), \quad \mathbf{b} = (1, 0, 1).$$

Вычислите $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_y$.

3. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы в декартовой системе координат

$$\mathbf{a} = (0, -1, 0), \quad \mathbf{b} = (0, 1, 1).$$

Вычислите $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_x$.

4. Вектор $\mathbf{r}$ – радиус-вектор в декартовой системе координат

$$\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i.$$

Вычислите:

- (a) $(\nabla \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}$;
- (b) $\mathbf{r}(\nabla \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{r}$;
- (c) $[\nabla \times [\mathbf{c} \times \mathbf{r}]] - 2\mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ – постоянный вектор;
- (d) $(\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{r}$;
- (e) $\mathbf{r}(\nabla \cdot \mathbf{r})$;
- (f) $\nabla|\mathbf{r}|$;

(g) $\nabla \cdot \mathbf{r}$;

(h) $\nabla \otimes \mathbf{r}$;

(i) $\nabla \times \mathbf{r}$.

5. Приведите пример такого векторного поля $\mathbf{A}$, что $\Delta \mathbf{A} \neq 0$, а $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0$.

6. Докажите утверждение в декартовых координатах:

$$\text{если } \mathbf{B} = \nabla \phi, \text{ то } \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

7. Докажите тождества координатным и символьным методами:

(a) $\nabla \times (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times (\nabla \varphi)$;

(b) $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \varphi$;

(c) $(\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b})$.

8. Запишите формулировку теоремы Остроградского-Гаусса.

9. Запишите формулировку теоремы Стокса.

10. Запишите выражения, связывающие цилиндрические координаты с декартовыми.

11. Запишите выражения, связывающие сферические координаты с декартовыми.

12. Запишите выражения, связывающие компоненты двумерного вектора в полярной системе координат с компонентами двумерного вектора в декартовой системе координат.

13. Запишите выражение для якобиана перехода от декартовых координат к цилиндрическим.

14. Запишите выражение для якобиана перехода от декартовых координат к сферическим.
15. Запишите выражение для элементарного приращения площади в цилиндрических координатах при малом смещении радиус-вектора в плоскости $z = \text{const}$.
16. Запишите выражение для элементарного приращения площади в цилиндрических координатах при малом смещении радиус-вектора в плоскости $\varphi = \text{const}$.
17. Запишите выражение для элементарного приращения площади в сферических координатах при малом смещении радиус-вектора в плоскости $r = \text{const}$.
18. Запишите выражение для элементарного приращения площади в сферических координатах при малом смещении радиус-вектора на поверхности $\vartheta = \text{const}$.
19. Запишите выражение для элементарного приращения объема в цилиндрических координатах.
20. Запишите выражение для элементарного приращения объема в декартовых координатах.
21. Запишите выражение для элементарного приращения объема в сферических координатах.
22. Запишите выражение для оператора градиента в декартовых координатах.
23. Запишите выражение для ротора в декартовых координатах.
24. Запишите выражение для оператора дивергенции в декартовых координатах.

25. Запишите выражение для оператора Лапласа в декартовых координатах.
26. Получите выражение для оператора градиента в цилиндрических координатах.
27. Получите выражение для ротора в цилиндрических координатах.
28. Получите выражение для оператора дивергенции в цилиндрических координатах.
29. Получите выражение для оператора Лапласа в цилиндрических координатах.
30. Получите выражение для оператора градиента в сферических координатах.
31. Получите выражение для ротора в сферических координатах.
32. Получите выражение для оператора дивергенции в сферических координатах.
33. Получите выражение для оператора Лапласа в сферических координатах.
34. Изобразите на плоскости силовые линии векторного поля

$$\mathbf{A} = A_0 \mathbf{e}_x.$$

35. Изобразите на плоскости силовые линии векторного поля

$$\mathbf{A} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y.$$

36. Изобразите на плоскости силовые линии векторного поля

$$\mathbf{A} = y\mathbf{e}_x - x\mathbf{e}_y.$$

Глава 2

Свойства системы уравнений Максвелла

Второй раздел посвящен общим свойствам системы уравнений Максвелла. В начале раздела описывается техника перехода между системами физических единиц СИ и СГС, а также метод комплексных амплитуд. На примере нескольких упражнений показано удобство использования скалярного и векторного потенциалов. Дано общее определение калибровочного преобразования, показана сокращенная формы записи калибровки Лоренца. Соответствующий теоретический материал приведен в учебниках [8, 10, 11, 12].

2.1 Пример 1. Переход между СИ и СГС

Осуществите переход между системами единиц:

- переведите уравнение из СГС в СИ

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

- переведите уравнение из СГС в СИ

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho.$$

Общий комментарий

Переход между системами единиц удобно производить [13] с помощью таблицы 2.1, приведенной ниже. В таблицу сведены элементы, подлежащие взаимной замене, $\varepsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м - электрическая и магнитная постоянные.

Решение задачи

Осуществим переход между системами единиц для каждого из записанных уравнений Максвелла. Начнем с перехода из СГС в СИ. Исходное уравнение в СГС

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.1)$$

Согласно таблице, выполним замены

$$\mathbf{E} \longrightarrow \sqrt{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{E},$$

$$\mathbf{B} \longrightarrow \sqrt{4\pi/\mu_0} \mathbf{B},$$

$$c \longrightarrow 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0},$$

Величина	СГС	СИ
Скорость света	с	$(\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2}$
Напряженность электрического поля (потенциал, напряжение)	$\mathbf{E}(\varphi, U)$	$\sqrt{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{E}(\varphi, U)$
Электрическая индукция	$\mathbf{D}$	$\sqrt{4\pi/\varepsilon_0} \mathbf{D}$
Плотность заряда (заряд, плотность тока, сила тока, поляризация)	$\rho(q, \mathbf{j}, I, \mathbf{P})$	$1/\sqrt{4\pi\varepsilon_0} \rho(q, \mathbf{j}, I, \mathbf{P})$
Магнитная индукция	$\mathbf{B}$	$\sqrt{4\pi/\mu_0} \mathbf{B}$
Напряженность магнитного поля	$\mathbf{H}$	$\sqrt{4\pi\mu_0} \mathbf{H}$
Намагниченность	$\mathbf{M}$	$\sqrt{\mu_0/4\pi} \mathbf{M}$
Проводимость	σ	$\sigma/4\pi\varepsilon_0$
Диэлектрическая проницаемость	ε	$\varepsilon/\varepsilon_0$
Магнитная проницаемость	μ	μ/μ_0
Сопротивление (импеданс)	$R(Z)$	$4\pi\varepsilon_0 R(Z)$
Индуктивность	L	$4\pi\varepsilon_0 L$
Емкость	C	$1/4\pi\varepsilon_0 C$

Таблица 2.1: Физические величины в разных системах единиц, подлежащие взаимной замене

получим

$$\nabla \times (\sqrt{4\pi\varepsilon_0} \cdot \mathbf{E}) = -\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial(\sqrt{4\pi/\mu_0} \cdot \mathbf{B})}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad \blacksquare \quad (2.3)$$

Теперь выполним переход для второго примера. Уравнение в СГС

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho. \quad (2.4)$$

Согласно таблице, замены

$$\mathbf{D} \longrightarrow \sqrt{4\pi/\varepsilon_0} \mathbf{D},$$

$$\rho \longrightarrow 1/\sqrt{4\pi/\varepsilon_0} \rho,$$

в результате получим

$$\nabla \cdot (\sqrt{4\pi/\varepsilon_0} \mathbf{D}) = 4\pi \cdot (1/\sqrt{4\pi\varepsilon_0} \rho), \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho. \quad \blacksquare \quad (2.6)$$

2.2 Пример 2. Комплексные амплитуды

Временные зависимости имеют вид $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$, $v(t) = -v_0 \sin(\omega t)$. Запишите комплексные амплитуды $\dot{u}$, $\dot{v}$ и вычислите $\langle u(t)v(t) \rangle_t$.

Общий комментарий

Рассмотрим скалярную величину, меняющуюся во времени по гармоническому закону. Пусть

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (2.7)$$

Воспользуемся формулой Эйлера и перепишем эту зависимость в виде

$$u(t) = \Re(u_0 e^{i\varphi_0} \cdot e^{i\omega t}). \quad (2.8)$$

Будем называть $u_0 e^{i\varphi}$ **комплексной амплитудой** величины $u(t)$ и обозначать $\dot{u}$. Таким образом,

$$u(t) = \Re(\dot{u} \cdot e^{i\omega t}). \quad (2.9)$$

Прямым вычислением интеграла по периоду $T = 2\pi/\omega$ покажем, как связаны между собой среднее по времени от произведения $\langle u(t)v(t) \rangle_t$ и

комплексные амплитуды $\dot{u}, \dot{v}$:

$$\begin{aligned}
 \langle u(t)v(t) \rangle_t &\equiv \frac{1}{T} \int_0^T u(t)v(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T u_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \cdot v_0 \cos(\omega t + \psi_0)dt = \\
 &= \frac{u_0 v_0}{2T} \int_0^T \left(\cos(2\omega t + \varphi_0 + \psi_0) + \cos(\varphi_0 - \psi_0) \right) dt = \\
 &= \frac{u_0 v_0 \cos(\varphi_0 - \psi_0)}{2} = \Re\left(\frac{\dot{u}\dot{v}^*}{2}\right), \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

где $\dot{u}, \dot{v}$ - комплексные амплитуды гармонически изменяющихся величин $u(t), v(t)$.

Решение задачи

По условию задачи, исходные временные зависимости имеют вид

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t) = \Re\left(u_0 e^{i\omega t - i\pi/2}\right), \tag{2.11}$$

$$v(t) = -v_0 \sin(\omega t) = \Re\left(v_0 e^{i\omega t + i\pi/2}\right), \tag{2.12}$$

поэтому

$$\dot{u} = u_0 e^{-i\pi/2}, \quad \blacksquare \tag{2.13}$$

$$\dot{v} = v_0 e^{i\pi/2}. \quad \blacksquare \tag{2.14}$$

Для вычисления среднего значения произведения двух величин не будем прибегать к непосредственному интегрированию по периоду, а воспользуемся формулой (2.10). Получим

$$\langle u(t)v(t) \rangle_t = \Re\left(\frac{\dot{u}\dot{v}^*}{2}\right) = \Re\left(\frac{u_0 v_0}{2} e^{-i\pi}\right) = -\frac{u_0 v_0}{2}. \quad \blacksquare \tag{2.15}$$

2.3 Пример 3. Волновое уравнение на вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$

Получите волновое уравнение (Д'Аламбера) на вектор $\mathbf{H}$ для случая однородной непроводящей среды с источниками ($\varepsilon, \mu = \text{const}$, $\sigma = 0$, $\mathbf{j} \neq 0$, $\rho \neq 0$). Рассмотрите случай монохроматической зависимости (уравнение Гельмгольца). Чему равен показатель преломления такой среды?

Общий комментарий

Во многих задачах электродинамики постановка формулируется следующим образом: по заданной конфигурации источников (токов и зарядов) требуется определить выражения для полей. Сначала попробуем приступить к решению такой задачи формально. Уравнения Максвелла – это система дифференциальных уравнений в частных производных, отдельные уравнения которой «сцеплены» друг с другом, поэтому для решения «расцепим» строчки системы, сведя ее к уравнению с одной неизвестной функцией напряженности магнитного поля.

Для вывода волнового уравнения на вектор $\mathbf{H}$ воспользуемся системой уравнений Максвелла в дифференциальной форме. В случае однородной непроводящей среды она примет форму

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t + \mathbf{j}, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_r \mu_0 \partial \mathbf{H} / \partial t, \\ \nabla \cdot (\varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho, \\ \nabla \cdot (\mu_r \mu_0 \mathbf{H}) = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Воспользуемся первыми двумя уравнениями и преобразуем полученную

систему таким образом, чтобы получить одно уравнение, содержащее только неизвестную векторную функцию $\mathbf{H}$.

Решение задачи

Продифференцируем по времени второе уравнение системы (2.16)

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \quad (2.17)$$

вычислим ротор от первого уравнения системы (2.16) и разделим обе части равенства на $\varepsilon_r \varepsilon_0$

$$\frac{\nabla \times [\nabla \times \mathbf{H}]}{\varepsilon_r \varepsilon_0} - \frac{\nabla \times \mathbf{j}}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.18)$$

Объединяя уравнения (2.17), (2.18), получим

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{H}] - \nabla \times \mathbf{j} = -\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \quad (2.19)$$

учтем, что $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, и раскроем двойное векторное произведение по формуле «бац минус цаб», тогда

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \Delta \mathbf{H} - \nabla \times \mathbf{j} = -\frac{\mu_r \varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (2.20)$$

Воспользуемся четвертым уравнением системы (2.16), откуда $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, поэтому

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{\mu_r \varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \mathbf{j}. \quad \blacksquare \quad (2.21)$$

Полученное уравнение называется волновым уравнением или уравнением Д'Аламбера. В нем предполагается произвольная зависимость векторной функции $\mathbf{H}$ от времени. В случае монохроматической зависимости, когда $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$, уравнение Д'Аламбера преобразуется в уравнение Гельмгольца

$$\Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{j}, \quad \blacksquare \quad (2.22)$$

где $k = n\omega/c$ – волновое число, $n = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$ – показатель преломления однородной непроводящей среды. Напомним, что, как известно из курса общей физики [14], показатель преломления равен отношению скорости распространения электромагнитной волны в свободном пространстве к скорости распространения электромагнитной волны в среде.

Правая часть неоднородного уравнения содержит ротор от объемной плотности тока. Важно отметить, что при решении такого уравнения для конкретной функции $\mathbf{j}$, вид правой части может получиться достаточно сложным. Тогда прямое решение волнового уравнения на вектор $\mathbf{H}$ представляется затруднительным, поэтому ниже будет предложен способ обойти эту проблему.

2.4 Пример 4. Определения полей через потенциалы

Пусть известно, что вектор индукции магнитного поля $\mathbf{B}$ определен через некоторое векторное поле $\mathbf{A}$ (векторный потенциал) в виде

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Покажите, что в этом случае вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ может быть определен как

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi,$$

где φ – скалярное поле (скалярный потенциал).

Общий комментарий

Предложенное определение вектора индукции магнитного поля выглядит естественно, так как, согласно одному из уравнений Максвелла,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.23)$$

Из равенства нулю дивергенции можно предположить, что векторное поле $\mathbf{B}$ является соленоидальным, т.е. равно ротору от другого векторного поля $\mathbf{A}$. В [15] строго доказано, что любое поле, дивергенция которого равна нулю, можно представить в таком виде.

Решение задачи

Подставим в одно из уравнений Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.24)$$

предложенное определение вектора индукции магнитного поля и представим пространственные и временную производные. Тогда

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (2.25)$$

или, перенося все в левую сторону,

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.26)$$

Из равенства нулю ротора от векторного поля следует, что оно является потенциальным, т.е. может быть представлено в виде градиента от некоторого скалярного поля $-\varphi$. Тогда

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi. \quad \blacksquare \quad (2.28)$$

Далее будем называть $\mathbf{A}$ векторным потенциалом, а φ – скалярным.

2.5 Пример 5. Калибровки векторного потенциала

Покажите, что определения полей через потенциалы, введенные в предыдущем пункте, инвариантны относительно замены (калибровки)

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla \psi, \quad \varphi \mapsto \varphi - \partial \psi / \partial t,$$

где ψ – некоторая скалярная функция, определяющая калибровочное преобразование потенциалов.

Общий комментарий

Как следует из определений полей, введенных в предыдущем примере, скалярный и векторный потенциалы определены неоднозначно. Это не противоречит здравому смыслу, так как, измеримыми величинами являются векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, входящие в выражение для силы Лоренца, а они связаны с потенциалами соотношениями, содержащими пространственные и временную производные. Преобразования, меняющие вид потенциалов, но сохраняющие вид векторных полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, называются **калибровочными**. Убедимся, что калибровка самого общего вида, указанная в условии, не меняет выражений для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

Решение задачи

Определения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ через потенциалы

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.29)$$

Из определения вектора индукции магнитного поля следует, что добавка к векторному потенциалу некоторой потенциальной функции, т.е. равной градиенту от скалярного поля, не изменит результат, так как ротор от градиента любой скалярной функции равен нулю

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \mapsto \mathbf{B}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\psi) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\psi = \nabla \times \mathbf{A}. \quad \blacksquare \quad (2.30)$$

Для того, чтобы убедиться, что вектор $\mathbf{E}$ не изменится, подставим калибровочное преобразование в определение (2.29)

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \mapsto \mathbf{E}' = -\nabla\varphi + \nabla \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla\psi = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad \blacksquare \quad (2.31)$$

2.6 Пример 6. Калибровка Лоренца

Получите волновое уравнение на векторный потенциал $\mathbf{A}$ для случая однородной среды с источниками в условиях калибровки Лоренца

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\mu_r \varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Как связаны между собой калибровка в смысле, указанном в предыдущем пункте, и калибровка Лоренца?

Общий комментарий

Несмотря на данное в предыдущем упражнении общее определение калибровочного преобразования, чаще прибегают к сокращенной записи. Покажем, чем это удобно и зачем вообще были введены потенциалы.

Решение задачи

Снова получим уравнение, содержащее одну неизвестную функцию, на этот раз – векторный потенциал. Для этого подставим в уравнение Максвелла с источниками

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \quad (2.32)$$

определения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ (2.29)). После раскрытия двойного векторного произведения по формуле «бац минус цаб» и алгебраических преобразований получим

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\mu_r \varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\mu_r \varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mu_r \mathbf{j}. \quad (2.33)$$

Выражение в круглых скобках равно нулю в силу рассматриваемой калибровки Лоренца. Итак, полученное уравнение – уравнение Д’Аламбера на векторный потенциал $\mathbf{A}$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\mu_r \varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mu_r \mathbf{j}. \quad \blacksquare \quad (2.34)$$

Главное достоинство полученного уравнения – простота правой части. Как было показано в примере 3 из этого параграфа, правая часть неоднородного волнового уравнения на вектор $\mathbf{H}$ содержит ротор от функции

плотности тока, что существенно усложняет процесс решения по сравнению с решением уравнения (2.34). Как и ранее, в случае гармонической зависимости от времени уравнение Д'Аламбера сводится к уравнению Гельмгольца на векторный потенциал

$$\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mu_r \mathbf{j}, \quad \blacksquare \quad (2.35)$$

где $k = n\omega/c$ – волновое число, а $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ – показатель преломления. Обсудим, как связаны между собой калибровка Лоренца и калибровка в смысле, введенном в предыдущем пункте. Пусть до калибровочного преобразования для потенциалов $\mathbf{A}', \varphi'$ выполнялось

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{\mu_r \epsilon_r}{c^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = f(\mathbf{r}, t), \quad (2.36)$$

где $f(\mathbf{r}, t)$ – функция, не равная тождественно нулю, так как в противном случае калибровочное преобразование бы не потребовалось. Произведем калибровку общего вида

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (2.37)$$

где $\mathbf{A}$ и φ – потенциалы, для которых выполняется калибровка Лоренца, т.е.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\mu_r \epsilon_r}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (2.38)$$

Подставим (2.37) в (2.36) и учтем, что для $\mathbf{A}, \varphi$ выполняется калибровка Лоренца (2.38). В результате получим уравнение

$$\Delta \psi - \frac{\mu_r \epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = f(\mathbf{r}, t). \quad (2.39)$$

Из проделанных выкладок становится понятно, почему прямую форму записи калибровочного преобразования через функцию ψ

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla \psi, \quad \varphi \mapsto \varphi - \partial \psi / \partial t. \quad (2.40)$$

используют редко. Ведь в этом случае для применения калибровки Лоренца следовало бы:

- вычислить по имеющимся потенциалам $\mathbf{A}', \varphi'$ функцию $f(\mathbf{r}, t)$;
- решить уравнение (2.39) относительно функции $\psi(\mathbf{r}, t)$;
- подставить найденную функцию $\psi(\mathbf{r}, t)$ в (2.40) и найти новые выражения для потенциалов $\mathbf{A}, \varphi$.

Очевидно, что в большинстве задач такой алгоритм калибровки представляется гораздо более сложным по сравнению с наложением на потенциалы связи вида

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\varepsilon_r \mu_r}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (2.41)$$

2.7 Задачи для самостоятельного решения

1. Осуществите переход между системами единиц:

- переведите уравнение из СИ в СГС

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j};$$

- переведите уравнение из СГС в СИ

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0;$$

- переведите уравнение из СИ в СГС мощность излучения диполя (p_0 – дипольный момент)

$$P = \frac{\omega^4 |p_0|^2}{12\pi \varepsilon_0 c^3}.$$

2. Переведите из СИ в СГС выражение для емкости конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d}, \quad (2.42)$$

где S – площадь обкладок конденсатора, d – расстояние между обкладками.

Какую размерность имеет C в системе СГС?

3. Переведите из СИ в СГС выражение для индуктивности катушки

$$L = \frac{N^2 \mu_r \mu_0 S}{l}, \quad (2.43)$$

где S – площадь сечения катушки, l – длина катушки, N – количество витков провода.

Какую размерность имеет L в системе СГС?

4. Переведите из СГС в СИ выражение для компоненты напряженности электрического поля (p_0 – дипольный момент, a – расстояние до идеально проводящей плоскости)

$$E_\varphi = \frac{\omega^3 p_0 a}{2c^3 r} \cos(2\vartheta) \cos \varphi \cos(\omega t).$$

5. Докажите граничное условие (граничные условия электродинамики)

$$\mathbf{n}_{21} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma,$$

где σ – поверхностная плотность электрического заряда, $\mathbf{n}_{21}$ – единичный вектор нормали к границе раздела сред, проведенный во вторую среду со стороны первой.

6. Докажите граничное условие (граничные условия электродинамики)

$$\mathbf{n}_{21} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0,$$

где $\mathbf{n}_{21}$ – единичный вектор нормали к границе раздела сред, проведенный во вторую среду со стороны первой.

7. Докажите граничное условие (граничные условия электродинамики)

$$\mathbf{n}_{21} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0,$$

где $\mathbf{n}_{21}$ - единичный вектор нормали к границе раздела сред, проведенный во вторую среду со стороны первой.

8. Докажите граничное условие (граничные условия электродинамики)

$$\mathbf{n}_{21} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{i},$$

где $\mathbf{i}$ - поверхностная плотность электрического тока, $\mathbf{n}_{21}$ - единичный вектор нормали к границе раздела сред, проведенный во вторую среду со стороны первой.

9. Докажите, что вблизи искривленной поверхности с радиусами кривизны в перпендикулярных плоскостях R_1, R_2 для нормальной компоненты напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ выполняется граничное условие вида

$$\frac{\partial E_r}{\partial r} = -E_r \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

10. Докажите утверждения:

- $\langle \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{U}(t) \rangle_t = \dot{\mathbf{U}} \cdot \dot{\mathbf{U}}^*/2;$
- $\langle \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{V}(t) \rangle_t = \Re(\dot{\mathbf{U}} \cdot \dot{\mathbf{V}}^*)/2;$
- $\langle \mathbf{U}(t) \times \mathbf{V}(t) \rangle_t = \Re(\dot{\mathbf{U}} \times \dot{\mathbf{V}}^*)/2.$

11. Получите волновое уравнение (Д'Аламбера) на вектор $\mathbf{E}$ для случая однородной проводящей среды с источниками ($\varepsilon, \mu = \text{const}, \sigma = 0, \mathbf{j} \neq 0, \rho \neq 0$). Рассмотрите случай монохроматической зависимости (уравнение Гельмгольца).

12. Какой вид будет иметь решение однородного уравнения Гельмгольца, если предположить, что плоская монохроматическая волна распространяется вдоль оси z в декартовых координатах?
13. Какой вид будет иметь решение однородного уравнения Гельмгольца в цилиндрической системе координат, если предположить, что распространяется волна, расходящаяся от оси системы координат на бесконечность? Как полученный результат согласуется с законом сохранения энергии?
14. Какой вид будет иметь решение однородного уравнения Гельмгольца в сферической системе координат, если предположить, что распространяется волна, расходящаяся от центра в сферических координатах? Как полученный результат согласуется с законом сохранения энергии?
15. Какой вид будет иметь решение однородного уравнения Гельмгольца, если предположить, что плоская монохроматическая волна распространяется вдоль оси z в декартовых координатах, при этом экспоненциально спадает вдоль оси x : $\mathbf{E} \propto \exp(-\kappa x)$? В каком направлении распространяется такая волна?
16. Получите волновое уравнение (Д'Аламбера) на вектор $\mathbf{E}$ для случая однородной проводящей среды без источников ($\varepsilon, \mu = \text{const}$, $\sigma \neq 0$, $\mathbf{j} = \mathbf{0}$, $\rho = 0$). Рассмотрите случай монохроматической зависимости (уравнение Гельмгольца). Чему равен показатель преломления такой среды?
17. Получите волновое уравнение на вектор $\mathbf{H}$ для случая среды без источников с магнитоэлектрической связью (молекулы намагничиваются под действием электрического поля или поляризуются под

действием магнитного), т.е. для материальных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E} + \bar{\bar{\alpha}} \cdot \mathbf{H} \\ \mathbf{B} = \bar{\bar{\beta}} \cdot \mathbf{E} + \bar{\bar{\mu}} \cdot \mathbf{H}, \end{cases}$$

где $\bar{\bar{\varepsilon}}, \bar{\bar{\mu}}$ – тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей, $\bar{\bar{\alpha}}, \bar{\bar{\beta}}$ – тензоры магнитоэлектрической связи. Покажите, что уравнение может быть сведено к виду

$$\bar{\bar{W}}_m \cdot \mathbf{H} = \mathbf{0},$$

где $\bar{\bar{W}}_m$ – волновой оператор магнитного поля

$$\bar{\bar{W}}_m = - \left(\nabla \times \bar{\mathbf{1}} + \bar{\bar{\beta}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \bar{\bar{\varepsilon}}^{-1} \cdot \left(\nabla \times \bar{\mathbf{1}} - \bar{\bar{\alpha}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) - \bar{\bar{\mu}} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

где $\bar{\mathbf{1}}$ – единичная матрица. Прделайте аналогичные действия для волнового уравнения на вектор $\mathbf{E}$. Какой вид имеет волновой оператор электрического поля $\bar{\bar{W}}_e$?

18. Получите волновое уравнение на скалярный потенциал φ для случая однородной среды с источниками в условиях калибровки Лоренца

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\varepsilon_r \mu_r}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Воспользуйтесь определением поля $\mathbf{E}$.

19. Как изменится уравнение на $\mathbf{A}$ в условиях калибровки Кулона

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0?$$

Почему в задачах с ненулевой производной по времени чаще используют калибровку Лоренца, а не Кулона? Как связаны между собой калибровка в самом общем виде (пример 5) и калибровка Кулона?

2.8 Вопросы для самопроверки

1. Запишите систему дифференциальных уравнений Максвелла в однородной среде в СИ.
2. Запишите систему дифференциальных уравнений Максвелла в однородной среде в СГС.
3. Получите систему интегральных уравнений Максвелла из системы дифференциальных уравнений Максвелла в СИ.
4. Получите систему интегральных уравнений Максвелла из системы дифференциальных уравнений Максвелла в СГС.
5. Запишите граничные условия электродинамики в СИ.
6. Запишите граничные условия электродинамики в СГС.
7. В пространстве задали сторонний электрический ток $\mathbf{j} = j_0 \mathbf{e}_x$. Перечислите все ненулевые компоненты векторного потенциала.
8. Получите волновые уравнения на векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ для случая однородной непроводящей среды без источников.
9. Получите волновые уравнения на векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ для случая однородной непроводящей среды с источниками.
10. Покажите, что определения полей через потенциалы инвариантны относительно калибровки

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla\psi, \quad \varphi \mapsto \varphi - \partial\psi/\partial t.$$

11. Запишите выражение для калибровки Лоренца.

12. Запишите выражение для калибровки Кулона.
13. Как связаны между собой калибровка Лоренца и функция ψ из определения калибровки?
14. Как связаны между собой калибровка Кулона и функция ψ из определения калибровки?
15. Запишите определения полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ через векторный и скалярный потенциалы.
16. Докажите утверждения:

$$(a) \langle u(t)u(t) \rangle_t = \dot{u}\dot{u}^*/2;$$

$$(b) \langle u(t)v(t) \rangle_t = \Re(\dot{u}\dot{v}^*)/2;$$

$$(c) \langle \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{U}(t) \rangle_t = \dot{\mathbf{U}} \cdot \dot{\mathbf{U}}^*/2;$$

$$(d) \langle \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{V}(t) \rangle_t = \Re(\dot{\mathbf{U}} \cdot \dot{\mathbf{V}}^*)/2;$$

$$(e) \langle \mathbf{U}(t) \times \mathbf{V}(t) \rangle_t = \Re(\dot{\mathbf{U}} \times \dot{\mathbf{V}}^*)/2.$$

17. Что можно сказать про гармонические величины $u(t), v(t)$, если произведение $\dot{u}\dot{v}^*$ вещественное? Если оно мнимое?
18. Для указанных временных зависимостей $u(t), v(t)$ запишите комплексные амплитуды $\dot{u}, \dot{v}$ и вычислите $\langle u(t)v(t) \rangle_t$:
 - (a) $u(t) = u_0 \sin(\omega t), v(t) = -v_0 \sin(\omega t);$
 - (b) $u(t) = u_0 \sin(\omega t - \pi/4), v(t) = v_0 \cos(\omega t);$
 - (c) $u(t) = u_0 \cos(\omega t - \pi/4), v(t) = v_0 \sin(\omega t - \pi/4).$
19. Применим ли метод комплексных амплитуд для расчета распределения токов по цепи, содержащей резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности?

Глава 3

Электростатика в вакууме

Третий раздел посвящен обзору основных методов решения электростатических задач в вакууме. Среди разобранных методов строгое решение с использованием третьей формулы Грина, а также мультипольные разложения в декартовых и сферических координатах. Примеры снабжены поясняющими комментариями, касающимися разложения в степенной ряд скалярной функции многих переменных и собственных функций оператора Лапласа: сферических гармоник, полиномов Лежандра. Рассматриваемые методы решения краевых задач последовательно изложены в [16, 17], большое количество упражнений можно найти в [18]. Краткие методические рекомендации по поводу решения уравнений Лапласа и Пуассона методом разделения переменных в сферических координатах приведены в [19]. В качестве справочников по математике рекомендуется использовать [20, 21]. При возникновении затруднений с решением задач по теории функций комплексного переменного рекомендуется обратиться к задачку [22].

3.1 Пример 1. Третья формула Грина

Покажите, что электростатический скалярный потенциал внутри области Ω определяется функцией плотности стороннего электрического заряда внутри области, а также значениями потенциала и его нормальной производной на границе области $\partial\Omega$ в трехмерном случае.

Общий комментарий

В процессе решения этого упражнения будет получено общее выражение, которое далее будет использоваться для нахождения скалярного потенциала в электростатических задачах. Это выражение принято называть третьей формулой Грина, а ее частный случай – общим решением уравнения Пуассона.

Решение задачи

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса для произвольного векторного поля $\mathbf{A}$, определенного в области Ω с границей $\partial\Omega$

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{A} dV, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к области Ω . Подставим на место векторного поля $\mathbf{A}$ комбинацию двух скалярных полей $\varphi \nabla \psi$ и получим

$$\oint_{\partial\Omega} \varphi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) dV. \quad (3.2)$$

Левую часть равенства перепишем так, чтобы в подынтегральное выражение вошла производная по направлению $\mathbf{n}$

$$\oint_{\partial\Omega} \varphi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} ds = \oint_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} ds. \quad (3.3)$$

Преобразуем подынтегральное выражение правой части исходного равенства, переписав его в координатной форме,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) &= \partial_j \mathbf{e}_j \cdot (\varphi \partial_i \mathbf{e}_i \psi) = \delta_{ij} (\partial_j \varphi \partial_i \psi + \varphi \partial_i \partial_j \psi) = \\ &= \partial_i \varphi \partial_i \psi + \varphi \partial_i^2 \psi = \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \Delta \psi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

С учетом (3.3), (3.4) выражение (3.2) примет вид

$$\oint_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} ds = \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi dV + \int_{\Omega} \varphi \Delta \psi dV. \quad (3.5)$$

Соотношение (3.5) представляет собой **первую формулу Грина**. Запишем ее второй раз, переставив местами ψ и φ , тогда

$$\oint_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} ds = \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \varphi dV + \int_{\Omega} \psi \Delta \varphi dV. \quad (3.6)$$

Теперь, вычтя почленно уравнение (3.5) из уравнения (3.6), получим **вторую формулу Грина**

$$\int_{\Omega} (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dV = \oint_{\partial\Omega} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \right) ds. \quad (3.7)$$

Для того, чтобы получить искомое тождество, подставим в (3.7) на место функции φ электростатический потенциал, удовлетворяющий уравнению Пуассона,

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}, \quad (3.8)$$

на место функции ψ – функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ уравнения Пуассона

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}, \quad (3.9)$$

а также перейдем к интегрированию по штрихованным координатам. Тогда тождество (3.7) примет вид

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left(-\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \right) - \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left(-\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \right) \right] dV' = \\ = \oint_{\partial\Omega} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} - \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} \right] ds'. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Учтем свойство нормировки δ -функции и выразим потенциал $\varphi(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV' + \varepsilon_0 \varepsilon_r \oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} ds' - \\ - \varepsilon_0 \varepsilon_r \oint_{\partial\Omega} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} ds'. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (3.11)$$

Уравнение (3.11) является выражением **третьей формулы Грина**. Из него следует, что электростатический потенциал внутри замкнутой области полностью определяется объемной плотностью электростатических зарядов, а также значением потенциала и его нормальной производной на границе области (граничными условиями). В случае свободного пространства, когда все источники электростатического поля сосредоточены в области вблизи начала системы координат, можно показать, что поверхностные интегралы стремятся к нулю и третья формула Грина сводится к виду

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV'. \quad (3.12)$$

Потенциал $\varphi(\mathbf{r})$, записанный в форме (3.12), будем называть **общим решением уравнения Пуассона**.

3.2 Пример 2. Функция Грина трехмерного уравнения Пуассона

Покажите, что функция Грина уравнения Пуассона в свободном трехмерном пространстве

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}.$$

имеет вид

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Общий комментарий

По определению, функция Грина – отклик на δ -образное возбуждение системы. В случае уравнения Пуассона δ -образное возбуждение – это точечный заряд. Как известно из курса общей физики, потенциал, создаваемый точечным электростатическим зарядом, определяется законом Кулона. Теперь покажем это строго, решив дифференциальное уравнение в частных производных. Для этого будем следовать стандартному алгоритму:

1. представим искомую функцию $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ в виде интеграла от ее Фурье-образа;
2. подставим интегральное представление в исходное уравнение, перейдем к алгебраическому уравнению на Фурье-образ функции Грина;
3. решим алгебраическое уравнение, найдем Фурье-образ;

4. выполним обратное преобразование Фурье от Фурье-образа функции Грина, чтобы получить ответ.

Везде далее дифференцирование будет производиться по координатам точки наблюдения $(\mathbf{r})$.

Решение задачи

Запишем функцию Грина уравнения Пуассона в виде интеграла от ее Фурье-образа

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{K}^3} \tilde{G}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}. \quad (3.13)$$

Как известно, Фурье-образ δ -функции – комплексная экспонента [23]

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{K}^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d\mathbf{k}. \quad (3.14)$$

Подставим записанные Фурье-образы (3.13), (3.14) в уравнение (3.9), применим оператор Лапласа, после чего отбросим интегралы, общую константу $1/(2\pi)^3$ и комплексные экспоненты от обратного преобразования Фурье, получим алгебраическое уравнение на Фурье-образ функции Грина в виде

$$k^2 \tilde{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}, \quad (3.15)$$

откуда

$$\tilde{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}}{k^2}. \quad (3.16)$$

Выражение (3.16) определяет Фурье-образ функции Грина, поэтому функция Грина может быть вычислена как

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3 \varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_{\mathbb{K}^3} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{k^2} d\mathbf{k}. \quad (3.17)$$

Перейдем к самой технически сложной части задачи и выполним обратное преобразование Фурье. Для этого возьмем интеграл в сферической системе координат в $\mathbb{K}$ -пространстве:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{K}^3} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{k^2} d\mathbf{k} &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{k=0}^{\infty} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{e^{ik \cos \vartheta |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{k^2} k^2 \sin \vartheta d\vartheta dk d\phi = \\ &= 2\pi \int_{k=0}^{\infty} dk \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \cdot e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos \vartheta} = 4\pi \int_0^{\infty} \frac{\sin(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dk = \quad (3.18) \\ &= \frac{4\pi}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int_0^{\infty} \text{sinc}(t) dt = \frac{4\pi}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned}$$

В процессе расчета был использован интеграл от функции $\text{sinc}(x) = \sin x/x$ по полубесконечным пределам. Как известно, такой интеграл равен $\pi/2$ [24]. Окончательно, подставляя вычисленный интеграл в (3.17), имеем

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad \blacksquare \quad (3.19)$$

Теперь, когда получено выражение для функции Грина уравнения Пуассона, для случая неограниченного свободного пространства запишем общее решение из предыдущего примера в форме

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (3.20)$$

Выражение (3.20) представляет собой обобщение закона Кулона на случай непрерывного распределения зарядов. Действительно, в случае набора точечных зарядов плотность электрических зарядов равна сумме δ -функций

$$\rho(\mathbf{r}') = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_{0i}), \quad (3.21)$$

поэтому, с учетом свойства нормировки δ -функции,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_{\Omega} \frac{\sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_{0i})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0i}|}. \quad (3.22)$$

3.3 Пример 3. Общее решение уравнения Пуассона на примере поля плоскости с выступом

Неограниченная плоскость с выступом в виде полусферы радиуса R равномерно заряжена с поверхностной плотностью σ и находится в вакууме. Определите потенциал электрического поля $\varphi(z)$ на оси z , совпадающей с осью симметрии системы.

Общий комментарий

Воспользуемся выражением (3.20), чтобы определить потенциал, создаваемый источниками, распределенными по поверхности заряженной плоскости со сферическим выступом (см. Рис. 3.1).

Решение задачи

Разобьем область, где расположены электрические заряды, на две части: часть плоскости $z = 0$ (область S_1) и полусферу (область S_2). Запишем потенциал на оси в точке z_0 в виде

$$\varphi(z = z_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{S_1} \frac{\rho(\mathbf{r}') ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_{S_2} \frac{\rho(\mathbf{r}') ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (I_1 + I_2) \quad (3.23)$$

и отдельно вычислим интегралы I_1 и I_2 . I_1 – интеграл по плоскости $z = 0$ за вычетом круга с центром в начале системы координат радиуса R (см. Рис. 3.2). Перепишем элементарное приращение заряда на плоскости в

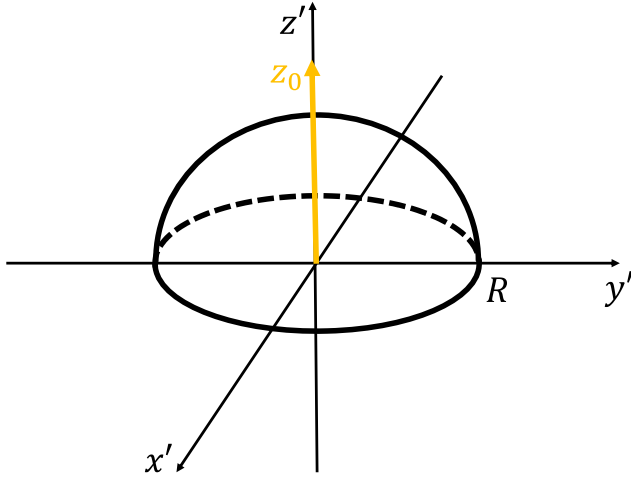


Рис. 3.1: Равномерно заряженная плоскость со сферическим выступом

виде $\rho(\mathbf{r}')ds' = \sigma \rho' d\rho' d\phi'$. По теореме Пифагора расстояние от точки расположения элементарного заряда до точки на оси симметрии с координатой z_0 равно $\sqrt{z_0^2 + \rho'^2}$. Тогда I_1 примет форму

$$I_1 = \int_{\phi'=0}^{2\pi} d\phi' \int_{\rho'=R}^{\infty} \rho' \frac{\sigma d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + z_0^2}} = -2\pi\sigma\sqrt{R^2 + z_0^2} + \text{const.} \quad (3.24)$$

Теперь вычислим интеграл I_2 по полусфере радиуса R . Для этого перейдем в сферическую систему координат (см. Рис. 3.3). Элементарное приращение заряда на сфере равно $\rho(\mathbf{r}')ds' = 2\pi\sigma R^2 \sin\vartheta' d\vartheta' d\phi'$. С учетом переписанного элементарного приращения заряда интеграл I_2

$$I_2 = \sigma \int_{\phi'=0}^{2\pi} \int_{\vartheta'=0}^{\pi/2} \frac{R^2 \sin\vartheta' d\vartheta' d\phi'}{|\mathbf{R} - z_0 \mathbf{e}_z|}. \quad (3.25)$$

По теореме косинусов $|\mathbf{R} - z_0 \mathbf{e}_z| = \sqrt{R^2 + z_0^2 - 2Rz_0 \cos\vartheta'}$. Тогда

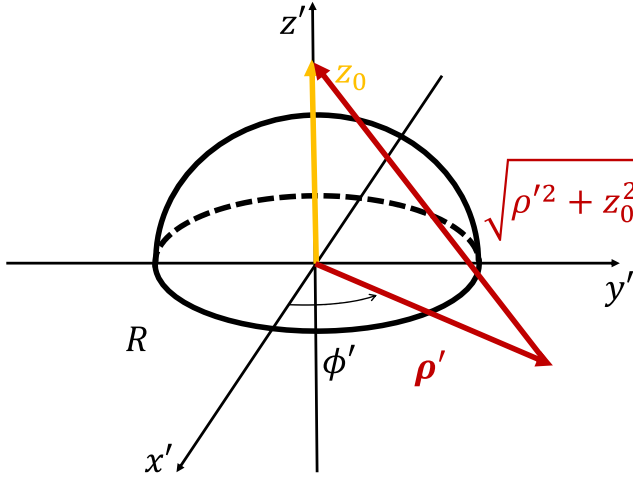


Рис. 3.2: Пояснение к вычислению интеграла I_1

$$I_2 = 2\pi\sigma R^2 \int_{\cos \vartheta'=0}^1 \frac{d(\cos \vartheta')}{\sqrt{R^2 + z_0^2 - 2Rz_0 \cos \vartheta'}} = \frac{2\pi\sigma R}{z_0} \left(\sqrt{R^2 + z_0^2} - |R - z_0| \right). \quad (3.26)$$

С учетом выражений (3.24), (3.26) выражение для потенциала в точке z_0 на оси симметрии

$$\varphi(z_0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + z_0^2} \left(1 - \frac{R}{z_0} \right) + |R - z_0| \frac{R}{z_0} \right] + \text{const.} \quad \blacksquare \quad (3.27)$$

Рассмотрим предельный случай $|z_0|/R \rightarrow \infty$. Радиус R становится пренебрежимо малым по сравнению с расстоянием до точки наблюдения, как и сама неоднородность в виде сферического выступа, поэтому выражение (3.27) переходит в известный ответ для потенциала равномерно заряженной плоскости [14]

$$\varphi(z_0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} |z_0| + \text{const.} \quad (3.28)$$

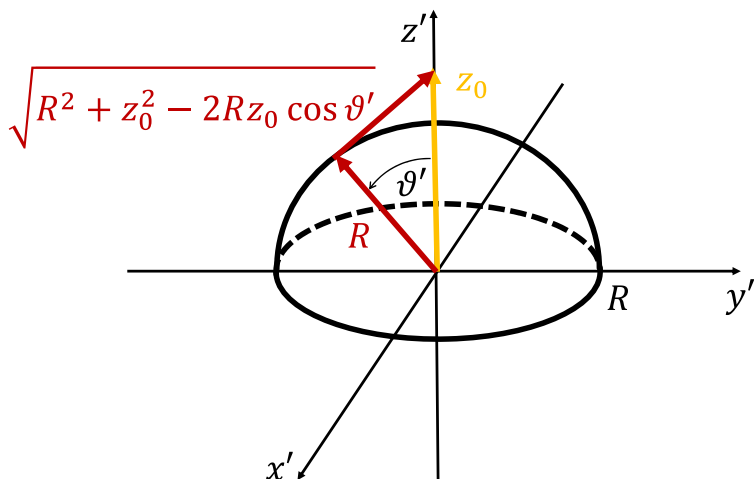


Рис. 3.3: Пояснение к вычислению интеграла I_2

3.4 Пример 4. Мультипольное разложение в декартовых координатах

Найдите потенциал φ электрического поля на больших расстояниях от системы зарядов q , $-2q$ и q , расположенных вдоль оси z на расстоянии a друг от друга (линейный квадруполь).

Общий комментарий

Как было показано выше, формула (3.20) позволяет найти распределение электростатического потенциала $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ по заданной функции объемной плотности заряда $\rho(\mathbf{r}')$. Однако непосредственное применение

этого выражения для нахождения потенциала в произвольной точке пространства часто представляется затруднительным. Для того, чтобы охарактеризовать потенциал системы электростатических зарядов вдалеке от источников, используют **мультипольное разложение** в удобной системе координат. В этом примере показано, как оно проводится в декартовой системе координат, а в двух заключительных примерах этого раздела приведены выкладки для сферической системы координат.

Предположим, что все заряды сосредоточены в области вблизи начала системы координат. Определим приближенное выражение для потенциала в точке наблюдения, расположенной вдалеке от этой области. Разложим функцию $f(\mathbf{r}) = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ в ряд Тейлора по $\mathbf{r}'$. Для функции нескольких переменных $f(\mathbf{r})$ разложение в окрестности точки $\mathbf{r}_0$ в ряд Тейлора [25]

$$f(\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\delta\mathbf{r} \cdot \nabla)^j f(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\delta x_i \partial_i)^j f(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}. \quad (3.29)$$

Для раскладываемой в ряд функции получим

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (-x'_i \partial_i)^j \frac{1}{r} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} (x'_i \partial_i)^j \frac{1}{r}. \quad (3.30)$$

Запишем несколько первых членов в явном виде и подставим разложение

(3.30) в выражение (3.20):

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} (x'_i \partial_i)^j \frac{1}{r} \right) dV' = \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') (x'_i \partial_i)^j dV' \frac{1}{r} \approx \\
&\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') dV' \frac{1}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') x'_i dV' \partial_i \frac{1}{r} + \\
&\quad + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{1}{2!} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') x'_i x'_k dV' \partial_i \partial_k \frac{1}{r}. \quad (3.31)
\end{aligned}$$

В (3.31) присутствуют комбинации частных производных функции $1/r$. Если учесть, что $r = \sqrt{x_i x_i}$, получим

$$-\partial_i \frac{1}{r} = \frac{x_i}{r^3}, \quad (3.32)$$

$$\partial_i \partial_j \frac{1}{r} = \frac{1}{r^5} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}). \quad (3.33)$$

С учетом вычисленного разложение (3.31) запишем в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{Q_{\Sigma}}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{d_i x_i}{r^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{x_i Q_{ij} x_j}{2r^5}, \quad (3.34)$$

где полный заряд системы

$$Q_{\Sigma} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') dV', \quad (3.35)$$

компоненты вектора дипольного момента

$$d_i = \int_{\Omega} x'_i \rho(\mathbf{r}') dV', \quad (3.36)$$

компоненты тензора квадрупольного момента

$$Q_{ij} = \int_{\Omega} (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}') dV'. \quad (3.37)$$

Нетрудно показать, что след тензора квадрупольного момента равен нулю

$$Q_{ij}\delta_{ij} = 0. \quad (3.38)$$

Для этого воспользуемся определением компонент тензора квадрупольного момента (3.37)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}') dV' \cdot \delta_{ij} &= 3 \int_{\Omega} x'_i x'_j \delta_{ij} \rho(\mathbf{r}') dV' - \\ - \int_{\Omega} r'^2 \delta_{ij} \delta_{ij} \rho(\mathbf{r}') dV' &= 3 \int_{\Omega} x'_i x'_i \rho(\mathbf{r}') dV' - \int_{\Omega} r'^2 \cdot 3 \rho(\mathbf{r}') dV' = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Этим свойством можно пользоваться при вычислении компонент тензора квадрупольного момента.

Решение задачи

Рассматриваемая система точечных электростатических зарядов показана на Рис. 3.4. Такая система, обладающая нулевыми полным зарядом $Q_{\Sigma} = 0$ и вектором дипольного момента $d_i = 0$, состоящая из четырех зарядов, называется электростатическим квадруполем. Так как заряды расположены вдоль прямой, этот квадруполь – линейный. Запишем выражение для объемной плотности заряда

$$\rho(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r} - 0) - 2q\delta(\mathbf{r} - a\mathbf{e}_z) + q\delta(\mathbf{r}' - 2a\mathbf{e}_z). \quad (3.40)$$

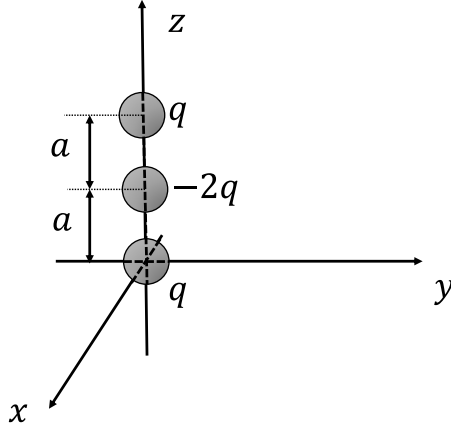


Рис. 3.4: Линейный квадруполь

Подставим функцию плотности (3.40) в определение компонент тензора квадрупольного момента (3.37) и получим

$$\begin{aligned}
 Q_{ij} &= \int_{\Omega} (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) [q\delta(\mathbf{r}' - 0) - 2q\delta(\mathbf{r}' - a\mathbf{e}_z) + q\delta(\mathbf{r}' - 2a\mathbf{e}_z)] dV' = \\
 &= q \int_{\Omega} (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \delta(\mathbf{r}' - 0) dV' - 2q \int_{\Omega} (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \delta(\mathbf{r}' - a\mathbf{e}_z) dV' + \\
 &\quad + q \int_{\Omega} (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \delta(\mathbf{r}' - 2a\mathbf{e}_z) dV'.
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Все три интеграла, входящие в выражение для компонент тензора квадрупольного момента считаются аналогично, подробно обсудим вычисление только одного из них. Трехмерная δ -функция – это произведе-

ние трех одномерных, поэтому

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \delta(\mathbf{r}' - a\mathbf{e}_z) dV' &= \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \delta(x'_1) \delta(x'_2) \delta(x'_3 - a) dx'_1 dx'_2 dx'_3 = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 3x'_i x'_j \delta(x'_1) \delta(x'_2) \delta(x'_3 - a) dx'_1 dx'_2 dx'_3 - \\
&- \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} r'^2 \delta_{ij} \delta(x'_1) \delta(x'_2) \delta(x'_3 - a) dx'_1 dx'_2 dx'_3 \equiv I_1 - I_2. \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Интегрируемая δ -функция обладает особенностью в точке $(0; 0; a)$, откуда

$$I_1 = 3a^2 \delta_{i3} \delta_{j3}. \quad (3.43)$$

Длина радиус вектора $\mathbf{r}'$, проведенного в точку расположения заряда, равна a , тогда

$$I_2 = a^2 \delta_{ij}. \quad (3.44)$$

Таким образом,

$$\int_{\Omega} (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \delta(\mathbf{r}' - a\mathbf{e}_z) dV' = 3a^2 \delta_{i3} \delta_{j3} - a^2 \delta_{ij}. \quad (3.45)$$

Выполняя аналогичные действия с двумя другими интегралами из выражения (3.41), получим

$$Q_{ij} = 6qa^2 \delta_{i3} \delta_{j3} - 2qa^2 \delta_{ij}. \quad (3.46)$$

Отметим, что след полученного тензора квадрупольного момента Q_{ii} равен нулю, как было показано ранее.

Подставим выражение для компонент тензора квадрупольного момента в формулу для потенциала квадрупольного момента (последнее слагаемое в разложении (3.34)):

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{x_i Q_{ij} x_j}{2r^5} = \frac{2qa^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{x_i (3\delta_{i3} \delta_{j3} - \delta_{ij}) x_j}{2r^5} = \\
&= \frac{qa^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{3z^2 - r^2}{r^5} = \frac{qa^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{3\cos^2\vartheta - 1}{r^3}, \quad \blacksquare
\end{aligned} \quad (3.47)$$

где $\cos \vartheta = z/r$ – косинус зенитного угла в сферической системе координат.

В случае системы точечных зарядов потенциал можно было найти и проще, записав выражение для него в виде суммы нескольких потенциалов точечных зарядов, после чего разложить ответ в ряд по степеням малого параметра. Однако такая техника неприменима для задач с непрерывным распределением зарядов, поэтому в примере был разобран более общий подход.

3.5 Пример 5. Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферических координатах

Сфера радиуса R заряжена по поверхности по закону $\sigma = \sigma_0 \cos \vartheta$. Найдите потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ во всем пространстве.

Общий комментарий

Уравнение Лапласа

$$\Delta \varphi = 0. \quad (3.48)$$

Решение в сферической системе координат будем искать в виде [19]

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\vartheta, \phi) \left(A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1} \right), \quad (3.49)$$

где A_{lm}, B_{lm} – коэффициенты разложения, постоянные в каждой области.

Порядок действий при решении уравнения Лапласа в сферических координатах:

1. разложить функцию поверхностной плотности заряда или заданного потенциала на границах областей по сферическим гармоникам;
2. записать общий вид функции потенциала в каждой области;
3. отбросить нефизичные решения (стремящиеся к бесконечности в тех точках, где отсутствуют источники);
4. составить систему уравнений, обеспечивающую удовлетворение всех граничных условий задачи;
5. решить полученную систему и определить соответствующие коэффициенты в общем решении;
6. аккуратно записать ответ в каждой из областей пространства.

При составлении системы уравнений учтем, что на границе раздела областей должны «сшиваться» потенциалы и нормальные производные. Если на поверхности есть заряды, нормальная производная по координате x_n «рвется» на величину, равную величине поверхностной плотности этого заряда (с точностью до диэлектрической постоянной), знак разрыва можно определить из граничного условия на вектор $\mathbf{D}$ и определения поля $\mathbf{E}$:

$$\begin{cases} \mathbf{n}_{21} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma, \\ \mathbf{E} = -\nabla\varphi \end{cases} \implies \varepsilon_{r2} \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} - \varepsilon_{r1} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (3.50)$$

Решение задачи

В задаче далее везде $\varepsilon_r = 1$. Выражение для сферической гармоники

$$Y_{10}(\vartheta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta. \quad (3.51)$$

Тогда выражение для поверхностной плотности заряда

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = C Y_{10}(\vartheta, \phi), \quad (3.52)$$

где постоянная C

$$C = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{4\pi}{3}}. \quad (3.53)$$

В этой задаче заряженная сфера делит все пространство на две области: $r \leq R$ и $r > R$. Решение в первой области

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\vartheta, \phi) \left(A_{lm}^{(1)} r^l + B_{lm}^{(1)} r^{-l-1} \right), \quad r \leq R, \quad (3.54)$$

решение во второй области

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\vartheta, \phi) \left(A_{lm}^{(2)} r^l + B_{lm}^{(2)} r^{-l-1} \right), \quad r > R. \quad (3.55)$$

Все сторонние заряды, присутствующие в задаче, распределены по поверхности сферы, поэтому потенциал не может обращаться в бесконечность в нуле или на бесконечности. Тогда потенциал в первой области

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\vartheta, \phi) A_{lm}^{(1)} r^l, \quad r \leq R, \quad (3.56)$$

потенциал во второй области

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\vartheta, \phi) B_{lm}^{(2)} r^{-l-1}, \quad r > R. \quad (3.57)$$

На границе областей потенциалы должны быть равны:

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r})\Big|_{r=R} = \varphi^{(2)}(\mathbf{r})\Big|_{r=R}. \quad (3.58)$$

Разрыв нормальной производной (производной по радиусу) пропорционален поверхностной плотности заряда на сфере:

$$\frac{\partial\varphi^{(2)}(\mathbf{r})}{\partial r}\Big|_{r=R} - \frac{\partial\varphi^{(1)}(\mathbf{r})}{\partial r}\Big|_{r=R} = -C Y_{10}(\mathbf{r}), \quad (3.59)$$

где константа C определяется выражением (3.53). Так как сферические гармоники ортогональны, все коэффициенты, кроме $A_{10}^{(1)}$, $B_{10}^{(2)}$, равны нулю. Полученная система уравнений:

$$\begin{cases} A_{10}^{(1)} R = B_{10}^{(2)} R^{-2}, \\ -2R^{-3} B_{10}^{(2)} - A_{10}^{(1)} = -C. \end{cases} \quad (3.60)$$

Решение системы (3.60)

$$\begin{cases} A_{10}^{(1)} = C/3, \\ B_{10}^{(2)} = CR^3/3. \end{cases} \quad (3.61)$$

В первой области электростатический потенциал задается выражением

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} r \cos \vartheta, \quad r \leq R, \quad \blacksquare \quad (3.62)$$

во второй области -

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} \frac{R^3 \cos \vartheta}{r^2}, \quad r > R. \quad \blacksquare \quad (3.63)$$

Обсудим физический смысл полученного результата. Потенциал внутри сферы $\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) \propto z$, что соответствует однородному полю вдоль оси системы. Снаружи сферы потенциал $\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) \propto z/r^3$ соответствует потенциалу диполя (см. уравнение (3.34)). Действительно, при данном распределении заряда присутствует дипольный момент и отсутствуют суммарный заряд и мультипольные моменты старших порядков.

3.6 Пример 6. Разделение переменных в уравнении Пуассона в сферических координатах

Вычислите распределение потенциала в пространстве, если функция плотности заряда задана в виде

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \frac{r}{R_1} \cos \vartheta, \text{ для } r < R_1$$

и известно, что заряженный шар радиуса R_1 находится внутри заземленной сферы радиуса R_2 .

Общий комментарий

Уравнение Пуассона

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (3.64)$$

Если уравнение требуется решить в сферической системе координат, решение нужно искать в виде [19]

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} Y_{lm}(\vartheta, \phi) \left(\frac{\int (r')^{l+2} \rho_{lm}(r') dr'}{r^{l+1}} - r^l \int \frac{\rho_{lm}(r')}{(r')^{l-1}} dr' \right), \quad (3.65)$$

где $\rho_{lm}(r)$ – коэффициенты разложения функции плотности заряда

$$\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon \varepsilon_0} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \rho_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \phi).$$

В выражении для общего вида потенциала стоят **неопределенные** интегралы, т.е. в результате интегрирования внутри скобок останутся константы интегрирования, зависящие от индексов l, m . В случае отсутствия заряда ($\rho_{lm} = 0$) эти константы дадут общий вид решения уравнения Лапласа (т.к. $\int 0 dr = \text{const}$).

Порядок действий при решении уравнения Пуассона примерно такой же, как при решении уравнения Лапласа:

1. разложить функцию плотности заряда по сферическим гармоникам, определить $\rho_{lm}(r)$;
2. записать общий вид функции потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ с учетом полученных выражений для $\rho_{lm}(r)$;
3. в каждой области пространства отбросить нефизичные решения (на бесконечности поля спадают, в нуле не должно быть бесконечных значений);
4. составить систему уравнений, обеспечивающую удовлетворение всем граничным условиям задачи;
5. решить полученную систему и определить соответствующие коэффициенты в общем решении;
6. аккуратно записать ответ в каждой из областей пространства.

Решение задачи

В задаче далее везде $\varepsilon_r = 1$. Выражение для сферической гармоники

$$Y_{10}(\vartheta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta. \quad (3.66)$$

Тогда правую часть можно записать в виде

$$\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{r}{R_1} Y_{10}(\vartheta, \phi) \equiv A r Y_{10}(\vartheta, \phi), \quad (3.67)$$

$$A = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{1}{R_1}. \quad (3.68)$$

В ряде по гармоникам не будет никаких слагаемых кроме слагаемого с индексами $(1, 0)$. После подстановки выражения для ρ_{lm} в выражение для пробного решения в первой области, где есть заряды ($r \leq R_1$):

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = Y_{10}(\vartheta, \phi) \frac{A}{3} \left(-\frac{3r^3}{10} - B_{10}r + \frac{C_{10}}{r^2} \right). \quad (3.69)$$

Во второй области, где нет зарядов ($R_1 \leq r \leq R_2$), общий вид решения – решение уравнения Лапласа. Для индексов $(1, 0)$:

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) = Y_{10}(\vartheta, \phi) \left(D_{10}r + \frac{E_{10}}{r^2} \right). \quad (3.70)$$

Первая область ($r \leq R_1$) содержит в себе точку $r = 0$, поэтому для того, чтобы избежать бесконечного значения потенциала в нуле, нужно занулить константу C_{10} . Вторая область ($R_1 \leq r \leq R_2$) не содержит особых точек, поэтому общий вид решения $\varphi^{(2)}(\mathbf{r})$ останется прежним. Таким образом, выражение для потенциала в разных областях пространства:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \begin{cases} Y_{10}(\vartheta, \phi) \frac{A}{3} \left(-\frac{3r^3}{10} - B_{10}r \right), & r \leq R_1, \\ Y_{10}(\vartheta, \phi) \left(D_{10}r + \frac{E_{10}}{r^2} \right), & R_1 \leq r \leq R_2. \end{cases} \quad (3.71)$$

В решение входят три неопределенные константы, значит, нужно записать линейную систему из трех уравнений, чтобы их однозначно определить.

Первое условие – равенство нулю потенциала $\varphi^{(2)}(\mathbf{r})$ на поверхности внешней заземленной сферы радиуса R_2 :

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) \Big|_{r=R_2} = 0 \iff D_{10}R_2 + \frac{E_{10}}{R_2^2} = 0. \quad (3.72)$$

Второе и третье условия – непрерывность потенциала и его нормальной производной на границе областей:

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) \Big|_{r=R_1} = \varphi^{(2)}(\mathbf{r}) \Big|_{r=R_1} \iff \frac{A}{3} \left(-\frac{3R_1^3}{10} - B_{10}R_1 \right) = \left(D_{10}R_1 + \frac{E_{10}}{R_1^2} \right), \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}(\mathbf{r})}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = \frac{\partial \varphi^{(2)}(\mathbf{r})}{\partial r} \Big|_{r=R_1} \iff \frac{A}{3} \left(-\frac{9R_1^2}{10} - B_{10} \right) = \left(D_{10} - 2\frac{E_{10}}{R_1^3} \right). \quad (3.74)$$

Решение системы, составленной из уравнений (3.72 - 3.74):

$$\begin{cases} D_{10} = -A \frac{R_1^2}{15} \frac{R_1^3}{R_2^3}, \\ E_{10} = A \frac{R_1^5}{15}, \\ B_{10} = \frac{R_1^2}{10} \left(-5 + 2\frac{R_1^3}{R_2^3} \right). \end{cases} \quad (3.75)$$

В первой области электростатический потенциал задается выражением

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = -\cos \vartheta \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{1}{30R_1} \left(3r^3 + \frac{rR_1^2}{R_2^3} (2R_1^3 - 5R_2^3) \right), \quad r \leq R_1, \quad \blacksquare \quad (3.76)$$

во второй области -

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) = -\cos \vartheta \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{R_1^4}{15R_2^3} \left(r - \frac{R_2^3}{r^2} \right), \quad R_1 \leq r \leq R_2. \quad \blacksquare \quad (3.77)$$

Отметим, что ответ также обладает цилиндрической симметрией (не зависит от угла ϕ).

3.7 Задачи для самостоятельного решения

1. Покажите, что для функции ψ , гармонической в области Ω , верно

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} dS = 0.$$

2. Выразите скалярный потенциал внутри области Ω через функцию плотности электрического заряда и значения потенциала и его нормальной производной на границе области Ω в двумерном случае (третья формула Грина).
3. Вычислите функцию Грина уравнения Пуассона в свободном пространстве для двумерного случая.
4. Покажите, что в произвольной системе координат (q_1, q_2, q_3) оператор Лапласа может быть записан в виде

$$\nabla \cdot (\nabla\varphi) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial\varphi}{\partial q_3} \right) \right\},$$

где $h_{1,2,3}$ – коэффициенты Ламэ. Для этого воспользуйтесь определением коэффициентов Ламэ и оператора дивергенции [5].

5. Найдите коэффициенты Ламэ и оператор Лапласа в цилиндрической системе координат. Убедитесь в ее ортогональности.
6. Найдите коэффициенты Ламэ и оператор Лапласа в сферической системе координат. Убедитесь в ее ортогональности.

7. Параболические координаты (σ, τ, z) связаны с декартовыми координатами соотношениями:

$$\begin{cases} x = \sigma\tau, \\ y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2), \\ z = z. \end{cases}$$

Найдите коэффициенты Ламэ и оператор Лапласа в параболической системе координат. Убедитесь в ее ортогональности.

8. Бисферические координаты (ξ, η, α) связаны с декартовыми координатами соотношениями:

$$\begin{cases} x = \frac{a \sin \eta \cos \alpha}{\cosh \xi - \cos \eta}, \\ y = \frac{a \sin \eta \sin \alpha}{\cosh \xi - \cos \eta}, \\ z = \frac{a \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta}, \end{cases}$$

где a – постоянный параметр, $-\infty < \xi < \infty$, $0 < \eta < \pi$, $0 < \alpha < 2\pi$.

Найдите коэффициенты Ламэ и оператор Лапласа в бисферической системе координат. Убедитесь в ее ортогональности.

9. Средняя плотность заряда электронного облака в атоме водорода равна

$$\rho_e = -\frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a},$$

где a – борковский радиус, r – расстояние до протона, имеющего заряд e . Определите напряженность электрического поля во всем пространстве, рассмотрите случаи $r/a \ll 1$, $r/a \gg 1$.

10. Найдите потенциал φ электрического поля равномерно заряженного прямолинейного отрезка длиной $2a$, занимающего часть оси z от $-a$ до a , если полный заряд отрезка равен Q .
11. Тонкое круглое кольцо радиуса R состоит из двух равномерно и противоположно заряженных полуколец с зарядами q и $-q$. Найдите электрический потенциал φ на оси кольца.
12. Найдите потенциал φ электрического поля на больших расстояниях от системы зарядов $\pm q$, расположенных в вершинах квадрата со стороной a так, что соседние заряды имеют разный знак, причем в начале координат находится заряд $+q$, а стороны квадрата параллельны осям x и y .
13. Найдите потенциал φ электрического поля на больших расстояниях от системы зарядов $\pm q$, расположенных в вершинах куба со стороной a так, что соседние заряды имеют разный знак, причем в начале координат находится заряд $+q$, а стороны куба параллельны осям координат.
14. Плотность заряда в одном из возбужденных состояний атома водорода в сферических координатах имеет вид

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 r^4 e^{-\lambda r} \sin^4 \vartheta.$$

Определите дипольный момент и тензор квадрупольного момента.

15. Найдите потенциал φ электрического поля на больших расстояниях от заряженной системы, если распределение объемной плотности заряда выражается функцией декартовых координат

$$\rho(\mathbf{r}) = Q \delta(x^2 + y^2 - R^2) \delta(z).$$

16. Полусфера радиуса R заряжена с постоянной объемной плотностью ρ . Определите дипольный момент и тензор квадрупольного момента.
17. В пространстве расположены две сферы радиусами R_1, R_2 с общим центром в начале координат. На внутренней сфере задано распределение потенциала $\Phi_1 \cos \vartheta$, а на внешней – $\Phi_2 \sin^2 \vartheta \sin(2\phi)$. Найдите распределение потенциала во всем пространстве.
18. Вычислите распределение потенциала в пространстве, если функция плотности заряда задана в виде

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \frac{r^2}{R_1^2} \cos \vartheta, \text{ для } r < R_1.$$

3.8 Вопросы для самопроверки

1. Запишите определение функции Грина уравнения Пуассона в двумерном свободном пространстве, выражение для нее и общее решение указанного уравнения. Сделайте поясняющий чертеж.
2. Запишите определение функции Грина уравнения Пуассона в трехмерном свободном пространстве, выражение для нее и общее решение указанного уравнения. Сделайте поясняющий чертеж.
3. Запишите общее решение уравнения Лапласа в свободном пространстве в сферических координатах, если рассматриваемая область пространства содержит точку $r = 0$.
4. Запишите общее решение уравнения Лапласа в свободном пространстве в сферических координатах, если рассматриваемая область пространства содержит точку $r = \infty$.

5. Запишите общее решение уравнения Лапласа в свободном пространстве в сферических координатах.

6. Какой зависимостью от углов ϑ, ϕ обладает сферическая гармоника:

(a) $Y_{0,0}(\vartheta, \phi)$;

(b) $Y_{1,0}(\vartheta, \phi)$;

(c) $Y_{1,1}(\vartheta, \phi)$;

(d) $Y_{1,-1}(\vartheta, \phi)$?

7. Какой зависимостью от угла ϕ обладает сферическая гармоника $Y_{100,50}(\vartheta, \phi)$?

8. Определите напряженность поля $\mathbf{E}$, создаваемого системой электростатических зарядов, электростатический потенциал которой задан выражением

$$\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{r}],$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – постоянные векторы.

9. Определите напряженность поля $\mathbf{E}$, создаваемого системой электростатических зарядов, электростатический потенциал которой задан выражением

$$\varphi(\mathbf{r}) = [\mathbf{a} \times \mathbf{r}] \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{r}],$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – постоянные векторы.

10. Определите напряженность поля $\mathbf{E}$, создаваемого системой электростатических зарядов, электростатический потенциал которой задан выражением

$$\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}),$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{k}$ – постоянные векторы.

11. Определите напряженность поля $\mathbf{E}$, создаваемого системой электростатических зарядов, электростатический потенциал которой задан выражением

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r^3},$$

где $\mathbf{d}$ – постоянный вектор.

12. Запишите выражение для потенциала монополя.
13. Запишите выражение для потенциала диполя.
14. Запишите выражение для потенциала квадрупольного момента.
15. Запишите определение полного заряда.
16. Запишите определение вектора дипольного момента.
17. Запишите определение тензора квадрупольного момента.
18. Покажите, что дипольный момент системы с нулевым полным зарядом не зависит от выбора начала системы координат.
19. Зависит ли от выбора начала системы координат тензор квадрупольного момента?
20. Покажите, что след тензора квадрупольного момента равен нулю

$$Q_{ij}\delta_{ij} = 0.$$

21. Какой наименьший ненулевой мультипольный момент будет у системы точечных зарядов равной абсолютной величины, расположенных в вершинах квадрата так, что соседние заряды имеют противоположные знаки?

22. Какой наименьший ненулевой мультипольный момент будет у системы точечных зарядов равной абсолютной величины, расположенных в вершинах куба так, что соседние заряды имеют противоположные знаки?
23. Бесконечная плоскость равномерно заряжена с поверхностной плотностью заряда σ_{ext} . Определите напряженность электрического поля и потенциал во всем пространстве.
24. Бесконечная плоскость толщины d равномерно заряжена с объемной плотностью заряда ρ_{ext} . Определите напряженность электрического поля и потенциал во всем пространстве.
25. Бесконечная нить заряжена с линейной плотностью заряда τ_{ext} . Определите напряженность электрического поля и потенциал во всем пространстве.
26. Равномерно заряженная сфера с поверхностной плотностью заряда σ_{ext} радиуса R расположена в начале сферической системы координат. Определите напряженность электрического поля и потенциал во всем пространстве.
27. Равномерно заряженный шар с объемной плотностью заряда ρ_{ext} радиуса R расположен в начале сферической системы координат. Определите напряженность электрического поля и потенциал во всем пространстве.
28. Равномерно заряженный шар с объемной плотностью заряда ρ_{ext} радиуса R расположен в начале сферической системы координат и имеет концентрическую полость радиуса r . Определите напряженность электрического поля и потенциал во всем пространстве.

29. Равномерно заряженный бесконечный цилиндр с поверхностной плотностью заряда σ_{ext} радиуса R расположен в начале цилиндрической системы координат. Определите напряженность электрического поля во всем пространстве.
30. Равномерно заряженный бесконечный цилиндр с объемной плотностью заряда ρ_{ext} радиуса R расположен в начале цилиндрической системы координат. Определите напряженность электрического поля во всем пространстве.

Глава 4

Электростатика диэлектриков и проводников

Четвертый раздел посвящен обсуждению некоторых методов решения электростатических задач в присутствии проводников и диэлектриков. На примере простейшей микроскопической модели газа из дипольных молекул показано, как диэлектрическая проницаемость связана с микроскопическими параметрами вещества. Разобраны математические основы метода изображений в проводнике и диэлектрике, показан пример решения граничной задачи электростатики путем определения постоянных модельного решения из граничных условий, изложена идея метода конформных отображений [26, 27] на примере задачи нахождения распределения поля в цилиндрическом конденсаторе. Указание на более специфические подходы к решению граничных задач электростатики, такие как метод криволинейных координат, метод интегральных преобразований, метод инверсии, можно найти в [1].

4.1 Пример 1. Микроскопическая модель диэлектрика

Разреженный статистически равновесный газ состоит из одинаковых дипольных молекул с дипольными моментами p и имеет концентрацию n . Пренебрегая взаимодействием молекул и деформацией их электронных оболочек, вычислите зависимость вектора поляризации $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ от внешнего электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Когда зависимость становится линейной?

Общий комментарий

На примере этой задачи обсудим, как происходит поляризация диэлектрика в случае газа, состоящего из диполей. Как будет видно из решения, линейная модель, когда относительную диэлектрическую проницаемость ϵ_r можно считать постоянной, применима только в случае малых полей.

Напомним, в чем состоит отличие между электростатической теоремой Гаусса в вакууме и в диэлектрике. В случае, когда рассматриваются заряды, помещенные в свободное пространство, электростатическая теорема Гаусса

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho^{\text{ext}}}{\epsilon_0}, \quad (4.1)$$

где ρ^{ext} – объемная плотность сторонних, т.е. внешних по отношению к системе, зарядов. Как известно из школьного курса электромагнетизма, под действием внешнего поля электрически нейтральный диэлектрик поляризуется, в результате чего в нем появляются связанные (наведенные, индуцированные) заряды. Эти заряды являются внутренними по отношению к системе, так как они присутствовали в диэлектрике до действия

внешних сил. Тогда запишем теорему Гаусса в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho^{\text{ext}} + \rho^{\text{int}}}{\varepsilon_0}, \quad (4.2)$$

где ρ^{int} – плотность описанных наведенных зарядов. Можно показать [14], что уравнение (4.2) сводится к виду

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho^{\text{ext}}, \quad (4.3)$$

где $\mathbf{D}$ – вектор электростатической индукции

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \frac{1}{V_\Omega} \int_\Omega \mathbf{p}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (4.4)$$

Второе слагаемое в выражении (4.4) имеет смысл усредненного по объему материала электростатического дипольного момента. Объем V_Ω , по которому производится усреднение, должен быть велик по сравнению с масштабами изменения атомных полей, т.е. по сравнению с межатомными расстояниями. При этом этот объем должен быть мал по сравнению с характерными масштабами изменения самого поля – пространственными неоднородностями материала или длиной электромагнитной волны. Часто для решения задачи бывает достаточно макроскопического описания материала, тогда вводят относительную диэлектрическую проницаемость ε_r и определяют вектор индукции в виде

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}. \quad (4.5)$$

Решение задачи

По условию газ является статистически равновесным. Предположим, что энергия диполей во внешнем поле, являющаяся случайной величиной в силу статистического способа описания, распределена по закону

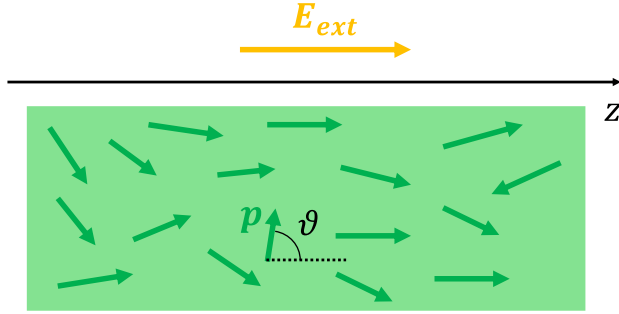


Рис. 4.1: Микроскопическая модель диэлектрика в виде статистически равновесного газа из диполей

Больцмана

$$f(W) = f_0 \cdot e^{-W/kT}, \quad (4.6)$$

где W – энергия дипольной молекулы, kT – квант тепловой энергии, f_0 – нормировочная константа функции плотности вероятности. Тогда среднее значение дипольного момента

$$\mathbf{P} = \frac{N}{V_\Omega} \int_\Omega \mathbf{p} f(W) d^3\mathbf{r}, \quad (4.7)$$

где N – общее число частиц, содержащееся в области Ω , V_Ω – ее объем. Вычислим проекцию $\mathbf{P}$ на ось, вдоль которой направлен вектор напряженности внешнего электрического поля $\mathbf{E}^{\text{ext}}$ (см. Рис. 4.1). Предполагая материал однородным и бесконечным, имеем

$$P_z = n \int_\Omega p \cos \vartheta f_0 e^{-W/kT} d^3\mathbf{r} = np f_0 \int_\Omega \cos \vartheta e^{pE \cos \vartheta / kT} d^3\mathbf{r}, \quad (4.8)$$

где n – концентрация дипольного газа. Из условия нормировки следует, что

$$f_0 = \left(\int_{\Omega} e^{pE \cos \vartheta / kT} d^3 \mathbf{r} \right)^{-1}, \quad (4.9)$$

поэтому

$$P_z = pn \frac{\int_{\Omega} \cos \vartheta e^{pE \cos \vartheta / kT} d^3 \mathbf{r}}{\int_{\Omega} e^{pE \cos \vartheta / kT} d^3 \mathbf{r}}. \quad (4.10)$$

Перейдем к интегрированию по объему в сферических координатах ($d^3 \mathbf{r} = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\phi dr$), учтем отсутствие зависимости от некоторых пространственных координат (r, ϕ), а также введем безразмерный параметр $\alpha = pE/kT$

$$P_z = pn \frac{\int_0^\pi \cos \vartheta \sin \vartheta e^{\alpha \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta}{\int_0^\pi e^{pE \cos \vartheta / kT} \sin \vartheta d\vartheta} = pn \frac{\int_{-1}^1 x e^{\alpha x} dx}{\int_{-1}^1 e^{\alpha x} dx}. \quad (4.11)$$

В интеграле введена замена $\cos \vartheta \equiv x$. Заметим, что интеграл, входящий в P_z , можно взять, выполнив дифференцирование и интегрирование по параметру α

$$P_z = pn \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \int_{-1}^1 e^{\alpha x} dx = np \left(\coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right). \quad (4.12)$$

Вводя обратную замену, получим ответ

$$P_z = np \left(\coth \left(\frac{pE}{kT} \right) - \frac{kT}{pE} \right). \quad \blacksquare \quad (4.13)$$

Рассмотрим случай слабого внешнего поля: $pE/kT \ll 1$. Разложим (4.13) в ряд до линейного члена

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \sim \frac{1}{x} + \frac{x}{3}, \quad (4.14)$$

$$P_z \sim np \frac{pE}{3kT}, \quad (4.15)$$

откуда

$$D_z = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{np^2}{3kT\varepsilon_0} \right) E_z \quad (4.16)$$

или

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{np^2}{3kT\varepsilon_0}. \quad (4.17)$$

В случае малых напряженностей поля вектор D_z пропорционален E_z , относительная диэлектрическая проницаемость – константа. При увеличении поля E_z зависимость постепенно выходит на насыщение: P_z сходится к np , все диполи выстраиваются вдоль вектора напряженности внешнего поля и зависимость пропадает.

4.2 Пример 2. Поле заряда на границе раздела диэлектриков

Точечный заряд q расположен на плоской границе раздела двух однородных бесконечных диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_{r1} и ε_{r2} . Найдите потенциал φ , напряженность $\mathbf{E}$ и индукцию $\mathbf{D}$.

Общий комментарий

Один из возможных способов решения – угадать его общий вид, а затем определить константы из граничных условий. Такой метод является строгим методом решения задачи, так как известно, что решение электростатической задачи, удовлетворяющее всем граничным условиям, единственно в силу теоремы единственности (см. [13]). При угадывании вида решения можно руководствоваться, например, соображениями о мультипольных моментах, описанными в предыдущем разделе.

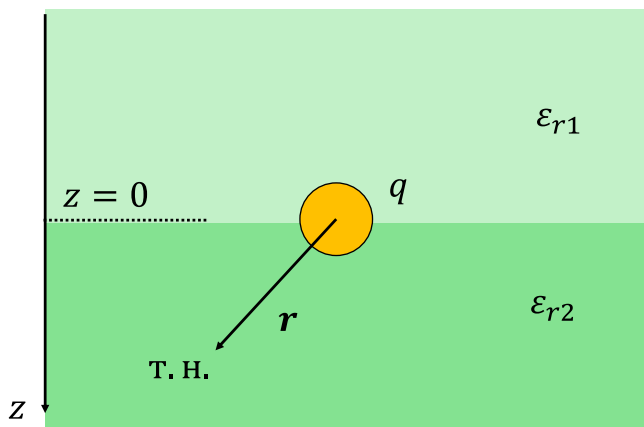


Рис. 4.2: Точечный заряд, расположенный на границе раздела двух диэлектриков

Решение задачи

Будем искать решение задачи в виде

$$\varphi = \frac{q}{r} \cdot \begin{cases} a_1, & z < 0; \\ a_2, & z \geq 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

Такой вид решения выглядит естественным, так как в случае одной среды переходит в закон Кулона, но в это же время допускает разные значения для потенциалов в каждой из двух сред. Определим постоянные a_1, a_2 из граничных условий.

Во-первых, потенциал предложенного вида (4.18) спадает до нуля на бесконечности, как и должно быть для системы зарядов, сосредоточен-

ной в ограниченной области около начала системы координат. Во-вторых, на границе раздела двух сред $z = 0$ потенциал должен быть непрерывен, отсюда $a_1 = a_2$. В-третьих, на границе двух сред производная потенциала по координате, нормальной к границе раздела двух сред, должна быть также непрерывна везде кроме точки расположения заряда. Легко убедиться, что это условие автоматически выполняется, если $a_1 = a_2$.

Наконец, воспользуемся теоремой Гаусса в интегральной форме для определения нормировочной константы a . Окружим заряд сферой Ω радиуса r , тогда теорема Гаусса в интегральной форме примет вид

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_r ds = q \implies \oint_{\partial\Omega} (-\varepsilon_0 \varepsilon_r \nabla \varphi) \cdot \mathbf{e}_r ds = q, \quad (4.19)$$

$$2\pi r^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}) \frac{aq}{r^2} = q, \quad (4.20)$$

откуда

$$a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})/2}, \quad (4.21)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})/2} \frac{q}{r}. \quad \blacksquare \quad (4.22)$$

Из (4.22) можно получить выражения для вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, а также для вектора индукции электрического поля $\mathbf{D} = -\varepsilon_0\varepsilon_r \nabla\varphi$.

4.3 Пример 3. Метод изображений в диэлектрике

Точечный заряд q находится на расстоянии a от плоской границы раздела двух бесконечно протяженных однородных диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_{r1} и ε_{r2} . Найдите потенциал электрического поля методом изображений. Рассмотрите частный случай, когда вторая среда заполнена проводником.

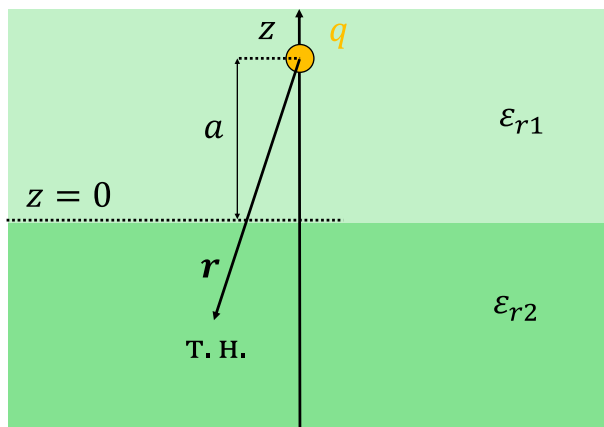


Рис. 4.3: Точечный заряд, расположенный над границей раздела двух диэлектриков

Общий комментарий

Суть метода изображений аналогична изложенной в разборе предыдущей задачи: угадаем удачный вид решения и определим все константы из граничных условий. Такой метод является строгим, так как найденное решение единственно.

В случае границ раздела областей с простой геометрией, таких как плоскость и сфера, вид решения имеет наглядное геометрическое представление, поэтому носит название метода изображений.

Решение задачи

Будем искать решение в виде (см. Рис. 4.4)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_{r1}r_1} + \frac{q'}{\epsilon_{r1}r_2}, & z > 0, \\ \frac{q''}{\epsilon_{r2}r_1}, & z \leq 0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Заряды q' , q'' и расстояния r_1, r_2 введены на рисунке 4.4. Таким образом, в первой среде потенциал создается зарядом-источником q и зарядом-изображением q' из второй среды, в то время как во второй среде – зарядом-изображением q'' , расположенным в той же точке, что и исходный заряд-источник. В таком виде решения есть два неизвестных параметра – величины зарядов-изображений q' и q'' . Вычислим их из граничных условий на границе раздела сред.

Потенциал φ должен быть непрерывен на границе раздела, откуда

$$\left(\frac{q}{\epsilon_{r1}r_1} + \frac{q'}{\epsilon_{r1}r_2} \right) \Big|_{z=0} = \frac{q''}{\epsilon_{r2}r_1} \Big|_{z=0} \implies \frac{q + q'}{\epsilon_{r1}} = \frac{q''}{\epsilon_{r2}}. \quad (4.24)$$

Учтем условие непрерывности нормальной компоненты вектора $\mathbf{D}$ на границе раздела двух сред. Так как $\mathbf{D} = -\epsilon_0\epsilon_r\nabla\varphi$ и на границе нет сторонних зарядов,

$$\epsilon_{r1} \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \epsilon_{r2} \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (4.25)$$

Длины радиус-векторов, проведенных в точку на границе раздела сред,

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (z - a)^2}, \quad (4.26)$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + (z + a)^2}, \quad (4.27)$$

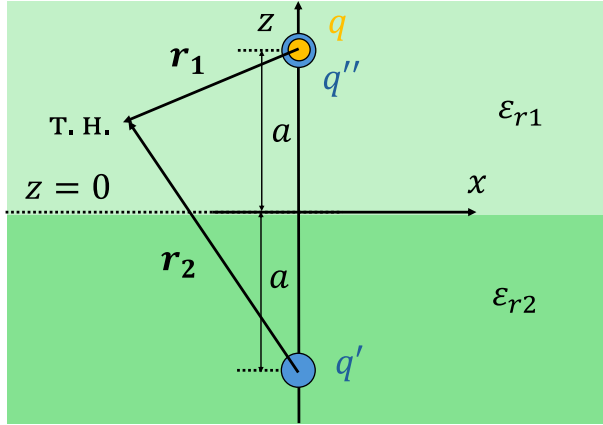


Рис. 4.4: Изображения точечного заряда в диэлектрике

поэтому уравнение (4.25) перепишем в виде

$$-\varepsilon_{r1} \frac{1}{\varepsilon_{r1}} \left(q \frac{z-a}{r_1^3} + q' \frac{z+a}{r_2^3} \right) \Big|_{z=0} = -\varepsilon_{r2} \frac{1}{\varepsilon_{r2}} q'' \frac{z-a}{r_1^3} \Big|_{z=0}. \quad (4.28)$$

Решая систему из уравнений (4.24), (4.28), находим выражения для величины неизвестных зарядов-изображений q', q''

$$q' = q \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}, \quad \blacksquare \quad (4.29)$$

$$q'' = q \frac{2\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}. \quad \blacksquare \quad (4.30)$$

Отметим, что сумма этих зарядов равна величине исходного заряда q .

Отдельно обсудим частный случай идеально проводящей второй среды. Если вторая среда является идеальным проводником, в ней поле равно нулю (иначе бы тёк бесконечный ток). С точки зрения формул это

эквивалентно тому, что $|\varepsilon_{r2}| \rightarrow \infty$, заряд-изображение q'' пропадает, а $q' \rightarrow -q$ и решение переходит в решение школьной задачи о точечном заряде, расположенном над заземленной плоскостью: под плоскостью поле отсутствует, а над плоскостью поле – суперпозиция поля исходного заряда и заряда-изображения противоположного знака.

4.4 Пример 4. Изображение точечного заряда в сфере из проводника

Проводящий шар радиуса R находится в поле точечного заряда q , отстоящего от центра шара на расстояние $a > R$. Система погружена в однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε_r . Найдите потенциал поля φ и распределение индуцированных зарядов на поверхности шара, если задан полный заряд шара Q . Воспользуйтесь разложением по мультиполям в сферической системе координат и представьте ответ в виде суммы полей исходного заряда и зарядов-изображений.

Общий комментарий

Ранее при решении уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$ в сферических координатах потенциал имел вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\vartheta, \phi) \left(a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}} \right).$$

Если в задаче требуется определить потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ в области $r > R$, которая содержит точку $r = +\infty$, все коэффициенты $a_{lm} = 0$, т.к. потенциал не может неограниченно возрастать на бесконечности. Кроме того,

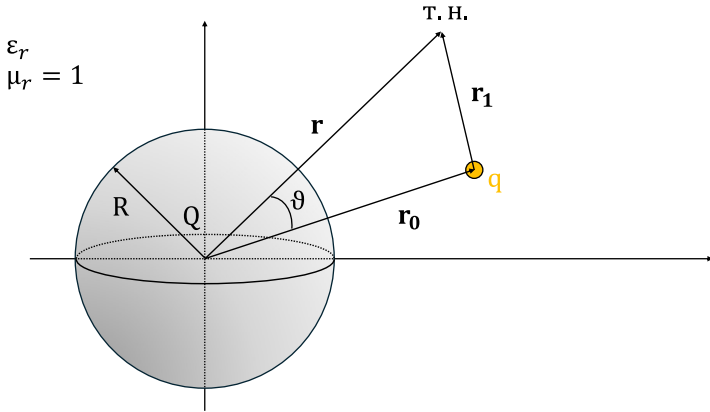


Рис. 4.5: Сфера из идеального проводника в поле точечного заряда

если геометрия задачи симметрична относительно поворота вокруг некоторой оси, в разложение входят только члены, не зависящие от угла ϕ ($m = 0$), и общее решение уравнения Лапласа имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} Y_{l0}(\vartheta) \frac{b_{l0}}{r^{l+1}}. \quad (4.31)$$

Перепишем решение (4.31) в виде [13]

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} P_l(\cos \vartheta) \frac{b_l}{r^{l+1}}, \quad (4.32)$$

где $P_l(x)$ – полиномы Лежандра. Перечислим их некоторые свойства [5]. Сферические гармоники $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ связаны с присоединенными полиномами Лежандра $P_{lm}(x)$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\varphi} P_{lm}(\cos \vartheta),$$

а те, в свою очередь, – с обыкновенными полиномами Лежандра

$$P_{lm}(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x).$$

Полином Лежандра с номером l может быть вычислен по формуле

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l. \quad (4.33)$$

Приведём первые несколько полиномов Лежандра:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

Полиномы Лежандра, заданные выражением (4.33) ортогональны друг другу на отрезке $[-1; 1]$, но не нормированы

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2k+1} \delta_{kl}. \quad (4.34)$$

Производящая функция полиномов Лежандра

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2x\alpha + \alpha^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l P_l(x), \quad (4.35)$$

где $|\alpha| < 1$.

С учетом перечисленных свойств решим поставленную задачу следующим образом:

1. запишем потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ как сумму потенциала точечного заряда q и вклада, создаваемого зарядами, перераспределенными на сфере, в виде (4.32);
2. удовлетворим граничному условию равенства потенциала некоторому значению V на сфере и определим неизвестные коэффициенты b_l ;

3. найдем функцию поверхностной плотности электрических зарядов $\sigma(\mathbf{r})$ на сфере и, проинтегрировав $\sigma(\mathbf{r})$, свяжем неизвестное значение потенциала V с известным полным зарядом сферы Q ;
4. запишем окончательный ответ, просуммировав ряды таким образом, чтобы увидеть вклад заряда q и его зарядов-изображений.

Решение задачи

В силу того, что рассматриваемая область уходит в бесконечность ($r = \infty$), а также в силу симметрии задачи относительно поворота вокруг радиус-вектора $\mathbf{r}_0$, запишем потенциал в виде

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q}{r_1} + \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{b_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \vartheta). \quad (4.36)$$

Воспользуемся выражением (4.35) и представим $1/r_1$ в виде

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \vartheta}} = \begin{cases} \frac{1}{r_0} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^l P_l(\cos \vartheta), & r < r_0, \\ \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^l P_l(\cos \vartheta), & r > r_0, \end{cases} \quad (4.37)$$

где разложение произведено с помощью производящей функции полиномов Лежандра. Тогда в области $r < r_0$ решение (4.36) примет вид

$$\varphi(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{kq}{\epsilon_r r_0^{l+1}} r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \vartheta), \quad (4.38)$$

где постоянная Кулона $k = 1/4\pi\epsilon_0$.

Потенциал в любой точке на поверхности сферы из идеального проводника равен неизвестному постоянному значению V , поэтому

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{kq}{\varepsilon_r r_0^{l+1}} R^l + \frac{b_l}{R^{l+1}} \right) P_l(\cos \vartheta) = V. \quad (4.39)$$

Так как полиномы Лежандра ортогональны, а в левой части выражения (4.39) от угла не зависит только слагаемое $l = 0$, запишем

$$\frac{kq}{\varepsilon_r r_0} + \frac{b_0}{R} = V, \quad (4.40)$$

откуда

$$b_0 = RV - \frac{kqR}{\varepsilon_r r_0}. \quad (4.41)$$

Все остальные слагаемые зависят от угла, поэтому выражение в скобках должно быть равно 0,

$$\frac{kq}{\varepsilon_r r_0^{l+1}} R^l + \frac{b_l}{R^{l+1}} = 0, \quad (4.42)$$

поэтому

$$b_l = -\frac{kq}{\varepsilon_r r_0^{l+1}} R^{2l+1}. \quad (4.43)$$

Выражения (4.38), (4.41), (4.43) и определяют потенциал $\varphi(\mathbf{r})$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{kq}{\varepsilon_r r_1} + \frac{VR}{r} - \frac{kqR}{\varepsilon_r r_0} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{R^2}{r_0} \right)^l \frac{P_l(\cos \vartheta)}{r^{l+1}}. \quad (4.44)$$

Так как электрическое поле внутри сферы из идеального проводника равно нулю, граничное условие на разрыв нормальной производной потенциала запишем в виде

$$\sigma(\mathbf{r}) = -\varepsilon_0 \varepsilon_r \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R}. \quad (4.45)$$

После подстановки (4.44) в (4.45) с учетом разложения $1/r_1$ по формуле (4.37) для области $r < r_0$ функция поверхностной плотности заряда

$$\sigma(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r V}{R} - kq\varepsilon_0 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{R^{l-1}}{r_0^{l+1}} P_l(\cos \vartheta). \quad (4.46)$$

Вычислим интеграл от функции поверхностной плотности заряда по сфере, приравняем его полному заряду сферы Q и выразим V через Q . Интеграл по площади сферы

$$2\pi R^2 \int_0^\pi \sigma(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = Q. \quad (4.47)$$

При взятии интеграла (4.47) возникнет интеграл от полинома Лежандра по отрезку $[-1; 1]$, который вычислим, воспользовавшись свойством (4.34),

$$\int_{-1}^1 P_l(x) dx = \int_{-1}^1 P_0(x) P_l(x) dx = 2\delta_{l0}. \quad (4.48)$$

В результате преобразований (4.47) примет вид

$$Q = \frac{\varepsilon_r V R}{k} - \frac{qR}{r_0},$$

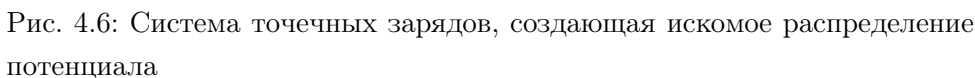
откуда

$$V = \frac{k}{\varepsilon_r R} \left(Q + q \frac{R}{r_0} \right). \quad (4.49)$$

С учетом (4.49) и производящей функции (4.37) выражение (4.44)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{kq}{\varepsilon_r r_1} + \frac{kQ}{\varepsilon_r r} + \frac{kq'}{\varepsilon_r r} - \frac{kq'}{\varepsilon_r r_2}, \quad \blacksquare \quad (4.50)$$

где $q' = qR/r_0$, радиус-вектор $\mathbf{r}_2$ показан на рисунке 4.6.



Незаряженный металлический шар радиуса R вносится в электрическое поле, которое в отсутствие шара было однородным и равным E_0 . Диэлектрическая проницаемость окружающей среды ϵ_r . Определите результирующее поле и плотность поверхностных зарядов на шаре.

В этой задаче идет речь о поляризации тела из идеального проводника под действием внешнего однородного электрического поля, соответствующего распределению потенциала $\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$. Будем искать решение

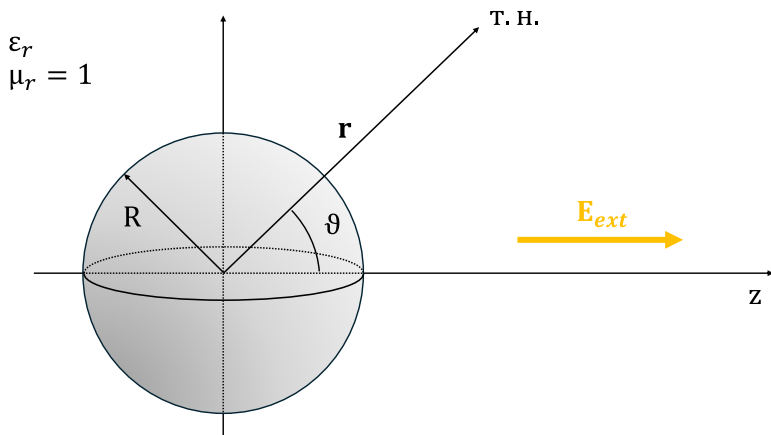


Рис. 4.7: Сфера из идеального проводника во внешнем постоянном электрическом поле

уравнения Лапласа в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) (1 + f(r)), \quad (4.51)$$

где $f(r)$ – это искомая неизвестная функция, зависящая только от длины радиус-вектора, проведенного в точку наблюдения. Если решение в специфическом виде (4.51) удастся отыскать, удовлетворив всем граничным условиям, согласно теореме единственности решения уравнения Лапласа оно и будет являться решением задачи. Отметим, что в подобном виде можно искать решения аналогичных задач про поляризацию тел во внешнем поле, например, идеально проводящего цилиндра или эллипсоида.

Порядок действий при решении:

1. подставим решение на потенциал в виде (4.51) в уравнение Лапласа и найдем функцию $f(r)$, разделив переменные;
2. определим неизвестные постоянные из граничных условий и аккуратно запишем ответ, выделив в нем слагаемые с прозрачным физи-

ческим смыслом.

Решение задачи

Потенциал φ_{ext} внешнего однородного поля

$$\varphi(\mathbf{r}) = -E_{\text{ext}} r \cos \vartheta.$$

Тогда общий вид решения

$$\varphi(\mathbf{r}) = -E_{\text{ext}} r \cos \vartheta (1 + f(r)). \quad (4.52)$$

Уравнение Лапласа в сферических координатах

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r})}{\partial \phi^2} = 0. \quad (4.53)$$

Зависимость от угла ϕ отсутствует, поэтому (4.53) примет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \vartheta} \right) = 0. \quad (4.54)$$

После подстановки (4.52) в (4.54) получим

$$-E_{\text{ext}} \cos \vartheta \left[\frac{2}{r} (1 + f(r)) + 4 \frac{\partial f(r)}{\partial r} + r \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} \right] + 2E_{\text{ext}} \cos \vartheta r (1 + f(r)) = 0. \quad (4.55)$$

Отметим, что угловая зависимость получилась одинаковая у каждого члена, поэтому наше исходное предположение про вид потенциала верно. Слагаемые, не содержащие производные $f(r)$ взаимно уничтожаются, и остается простое дифференциальное уравнение на $f(r)$

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial f(r)}{\partial r} = 0. \quad (4.56)$$

Оно решается заменой переменной на производную исходной функции. Общее решение дифференциального уравнения на $f(r)$ имеет вид

$$f(r) = C_0 - \frac{C_1}{r^3}, \quad (4.57)$$

где C_0, C_1 – неизвестные постоянные.

Вклад поляризованной сферы в потенциал на бесконечности должен обращаться в 0, поэтому $C_0 = 0$. На поверхности сферы потенциал должен быть постоянным и не зависеть от угла. Исходя из этого условия, $C_1 = R^3$, а сам потенциал на поверхности сферы обращается в 0.

Подставим функцию (4.57) с учетом определенных констант C_0, C_1 в (4.52), получим

$$\varphi(\mathbf{r}) = -E_{\text{ext}} r \cos \vartheta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right),$$

или

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad \blacksquare \quad (4.58)$$

где $\mathbf{d} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_{\text{ext}}$ – дипольный момент сферы. Таким образом, поле системы можно представить как суперпозицию внешнего поля и поля диполя, расположенного в центре сферы (см. Рис. 4.8).

4.6 Пример 6. Метод конформных отображений в электростатике

С помощью метода конформных отображений найдите потенциал φ , напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и поверхностную плотность электрического заряда σ цилиндрического конденсатора с радиусами обкладок r_1 и r_2 и воздушным заполнением. Разность потенциалов между обкладками задана и равна U .

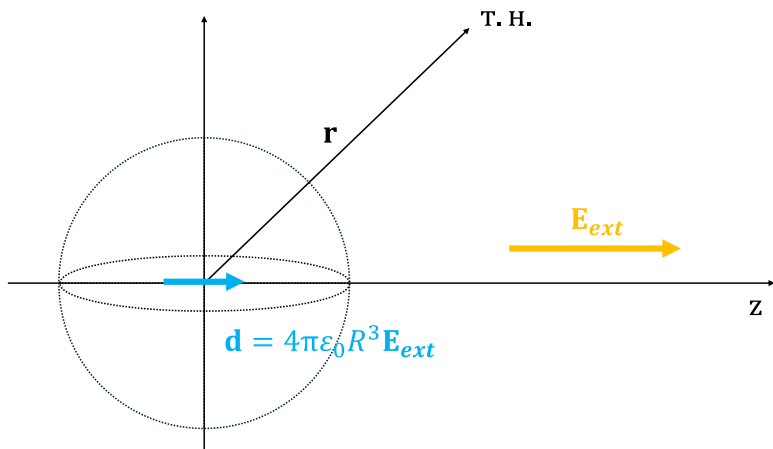


Рис. 4.8: Диполь во внешнем электрическом поле, создающий эквивалентное распределение потенциала

Общий комментарий

Метод конформных отображений – это один из специальных методов решения двумерных электростатических задач, заключающихся в нахождении потенциала во всем пространстве по заданному распределению потенциалов на множестве проводников. Обсудим его основную идею, не вдаваясь в подробности из области теории функций комплексного переменного, в то время как заинтересованный читатель может найти последовательное математически строгое изложение в монографии [27] и некоторое количество примеров в [26].

Рассмотрим конформное отображение $w = f(z)$, где $f(z)$ – аналитическая функция комплексной переменной. Пусть $z = x + iy$, $w = \Psi + i\Phi$. Функцию w называют функцией комплексного потенциала [27]. Тогда вещественная и мнимая части функции $f(z)$ удовлетворяют условиям

Коши-Римана [5]

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \end{cases} \quad (4.59)$$

откуда следует, что функция $\Phi(x, y)$ – гармоническая. Действительно, продифференцируем вторую строчку системы (4.59) по x ,

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (4.60)$$

а первую – по y

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (4.61)$$

сложим равенства почленно, получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0. \quad (4.62)$$

Таким образом, мнимая часть любой аналитичной функции, осуществляющей конформное отображение одной плоскости комплексного переменного на другую, является решением уравнения Лапласа.

Вернемся к рассмотрению двумерной электростатической задачи (см. Рис. 4.9). Пусть на множестве проводников, ограниченных поверхностями $\partial\Omega_n$ заданы величины электростатических потенциалов φ_n . Основываясь на утверждении о гармоничности мнимой части конформного отображения, сформулируем следующий алгоритм решения задачи по нахождению потенциала:

1. подберем такую функцию $f(x, y)$, которая бы переводила контуры проводников $\partial\Omega_n$ в горизонтальные прямые $\Im(f(z)) = \text{const}$;
2. распределение электростатического потенциала будет определяться мнимой частью от найденной функции комплексной переменной $f(z) = f(x, y)$;

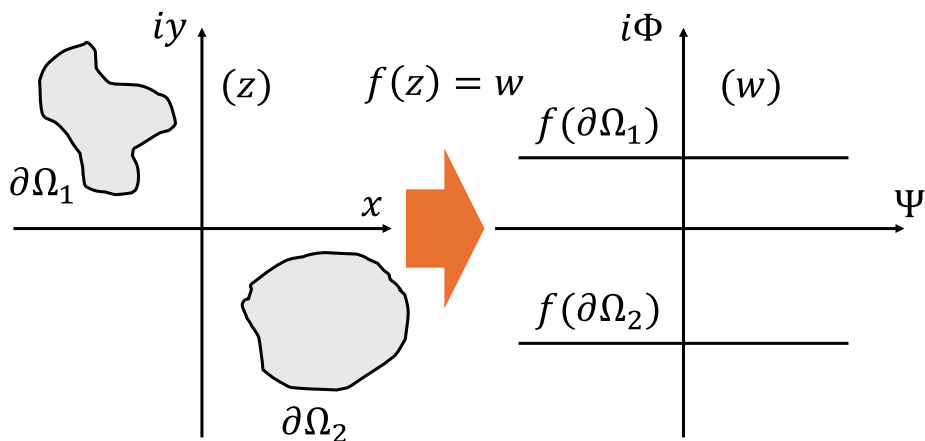


Рис. 4.9: Общий принцип метода конформных отображений

3. найдем константы, входящие в функцию $f(x, y)$ из заданных значений потенциалов на поверхностях проводников $\Im(f(\partial\Omega_n)) = \varphi_n$.

Найденное решение, с одной стороны, удовлетворяет уравнению Лапласа, так как является мнимой частью аналитической функции, с другой стороны, удовлетворяет граничным условиям $\varphi(\partial\Omega_n) = \varphi_n$, значит, по теореме единственности других решений не существует.

Хотя область применения изложенного подхода может показаться достаточно узкой, двумерные задачи, схожие с электростатическими, возникают в разных областях физики, в силу чего метод конформных изображений применяется для определения параметров длинных линий [28], решения задач физики высоких энергий [29], оптики [30], гидродинамики [31] и др.

Решение задачи

В рассматриваемой задаче контурами проводников, на которых заданы фиксированные значения потенциала, являются окружности радиусов

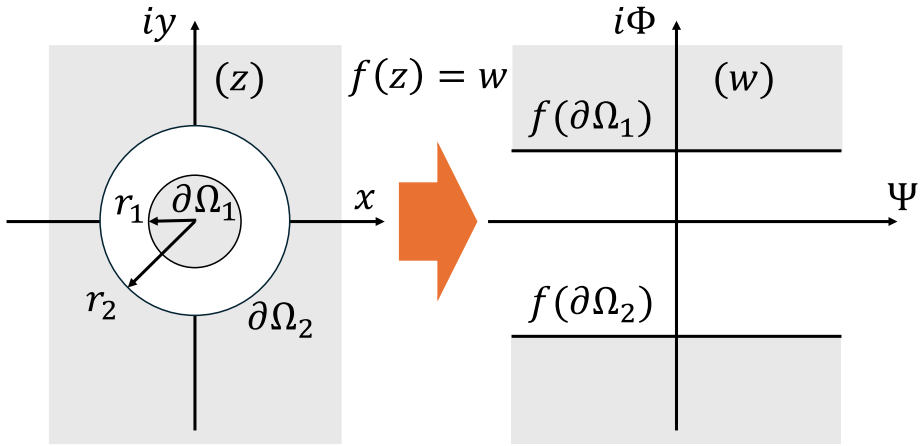


Рис. 4.10: Применение метода конформных изображений для задачи нахождения поля в цилиндрическом конденсаторе

r_1 и r_2 (см. Рис. 4.10). Подберем такое конформное отображение, которое бы переводило окружности в горизонтальные прямые. Как известно из курса теории функций комплексной переменной, функцией, осуществляющей указанное преобразование, является функция комплексного логарифма

$$f(z) = iB_1 \text{Ln} \left(\frac{z}{B_2} \right), \quad (4.63)$$

где B_1, B_2 – вещественные положительные константы. Подставим комплексное число z в полярной форме записи в отображение $f(z)$ и возьмем от результата мнимую часть

$$\Im \left(iB_1 \text{Ln} \left(r e^{i\phi} / B_2 \right) \right) = \Im (iB_1 \text{Ln} (r/B_2) - \phi B_1) = B_1 \text{Ln} (r/B_2). \quad (4.64)$$

Итак, электростатический потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ в этой задаче имеет вид, определяемый выражением (4.64). Найдём константы B_1 и B_2 из граничных условий

$$\varphi(r_1) = 0 \implies B_2 = r_1, \quad (4.65)$$

$$\varphi(r_2) = U \implies B_1 = U / \ln(r_2/r_1). \quad (4.66)$$

Окончательно получим

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{U}{\ln(r_2/r_1)} \ln(r/r_1). \quad \blacksquare \quad (4.67)$$

4.7 Задачи для самостоятельного решения

1. От некоторой прямой, на которой находится заряд q , расходятся веерообразно три полуплоскости, образующие три двугранных угла α , β , γ ($\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$). Пространство внутри каждого из углов заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε_1 , ε_2 , ε_3 , соответственно. Найдите потенциал φ , напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и индукцию электрического поля $\mathbf{D}$.
2. Центр проводящего шара с зарядом q находится на плоской границе раздела двух бесконечных однородных диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 , ε_2 . Найдите потенциал φ , напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и индукцию электрического поля $\mathbf{D}$.
3. Точечный заряд q находится в однородном диэлектрике на расстоянии a от плоской границы бесконечно протяженного проводника. Найдите потенциал электрического поля φ в диэлектрике и распределение индуцированных зарядов σ .
4. Двугранный угол между двумя заземленными проводящими плоскостями равен α_0 . Внутри угла находится точечный заряд q . Определите методом изображений распределение потенциала для случая углов $\alpha_0 = 90^\circ$, 60° и 45° .
5. Между двумя идеально проводящими бесконечными заземленными плоскостями расположен заряд q на расстоянии l_1 и l_2 от плоскостей, соответственно. Определите распределение потенциала во

всем пространстве.

Комментарий: для ответа в форме ряда покажите сходимость.

6. Проводящий шар радиуса R находится в поле точечного заряда q , отстоящего от центра шара на расстояние $a > R$. Система погружена в однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε_r . Найдите потенциал поля φ и распределение индуцированных зарядов на шаре, если задан потенциал шара V относительно бесконечности. Воспользуйтесь разложением по мультиполям в сферической системе координат и представьте ответ в виде суммы полей исходного заряда и зарядов-изображений.
7. Заземленный проводящий шар радиуса R находится в поле точечного заряда q , отстоящего от центра шара на расстояние $a > R$. Система погружена в однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε_r . Найдите потенциал поля φ и распределение индуцированных зарядов на шаре, если задан потенциал шара V относительно бесконечности. Воспользуйтесь разложением по мультиполям в сферической системе координат и представьте ответ в виде суммы полей исходного заряда и зарядов-изображений.
8. Заземленная проводящая плоскость имеет выступ в форме полусферы радиуса a . Центр сферы лежит на плоскости. На оси симметрии системы на расстоянии $b > a$ от плоскости находится точечный заряд q . Используя метод изображений, определите потенциал φ .
9. Проводящий эллипсоид с зарядом q и полуосями a , b и c помещен в однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε_r . Найдите потенциал φ и поверхностную плотность заряда.
10. Незаряженный металлический цилиндр радиуса R вносится в электрическое поле, которое в отсутствие цилиндра было однородным

и равным $\mathbf{E}_0$. Диэлектрическая проницаемость окружающей среды ε_r . Определите результирующее поле и плотность поверхностных зарядов на цилиндре.

11. Незаряженный металлический эллипсоид с полуосями a , b и c вносится в электрическое поле, которое в отсутствие эллипсоида было однородным и равным $\mathbf{E}_0$. Диэлектрическая проницаемость окружающей среды ε_r . Определите результирующее поле и плотность поверхностных зарядов на эллипсоиде.
12. Незаряженный диэлектрический цилиндр из материала с проницаемостью ε_r радиуса R вносится в электрическое поле, которое в отсутствие цилиндра было однородным и равным $\mathbf{E}_0$. Диэлектрическая проницаемость окружающей среды равна 1. Определите результирующее поле во всем пространстве.
13. Незаряженный диэлектрический шар из материала с проницаемостью ε_r радиуса R вносится в электрическое поле, которое в отсутствие шара было однородным и равным $\mathbf{E}_0$. Диэлектрическая проницаемость окружающей среды равна 1. Определите результирующее поле во всем пространстве.
14. Незаряженный диэлектрический эллипсоид из материала с проницаемостью ε_r с полуосями a , b и c вносится в электрическое поле, которое в отсутствие эллипсоида было однородным и равным $\mathbf{E}_0$. Диэлектрическая проницаемость окружающей среды равна 1. Определите результирующее поле во всем пространстве.
15. С помощью метода конформных отображений найдите потенциал φ , напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и поверхностную плотность электрического заряда σ во внутренней области двугранного угла величиной β , составленного из идеально проводящих плоскостей,

разделенных в вершине изолятором. Разность потенциалов между сторонами угла задана и равна U .

16. Оцените протяженность области на краю плоского конденсатора, где распределение напряженности поля существенно отличается от распределения напряженности вдали от краев обкладок. Для этого воспользуйтесь конформным отображением

$$g(w) = A(e^{aw} + aw), \quad A, a \in \mathbb{R}.$$

4.8 Вопросы для самопроверки

1. На расстоянии d от бесконечной идеально проводящей заземленной плоскости расположен точечный электрический заряд $+q$. Определите выражение для электростатического потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ во всем пространстве.
2. На расстоянии d от бесконечной идеально проводящей заземленной плоскости расположен точечный электрический заряд $+q$. Определите выражение для напряженности электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ во всем пространстве.
3. На расстоянии d от бесконечной идеально проводящей заземленной плоскости расположен точечный электрический заряд $+q$. Определите модуль силы, действующей на заряд со стороны плоскости.
4. На расстоянии d от бесконечной идеально проводящей заземленной плоскости расположен точечный электрический заряд $+q$. Определите выражение для распределения поверхностной плотности наведенных электрических зарядов $\sigma(\mathbf{r})$ по плоскости. Чему равен суммарный наведенный заряд?

5. Тонкая бесконечно длинная нить равномерно заряжена с линейной плотностью λ и расположена параллельно проводящей плоскости. Расстояние между нитью и плоскостью равно l . Вычислите модуль силы, действующей на единицу длины нити.
6. Тонкая бесконечно длинная нить равномерно заряжена с линейной плотностью λ и расположена параллельно проводящей плоскости. Расстояние между нитью и плоскостью равно l . Вычислите распределение поверхностной плотности заряда $\sigma(\mathbf{r})$ по плоскости. Чему равен суммарный наведенный заряд, приходящийся на единицу длины?
7. Тонкая бесконечно длинная нить равномерно заряжена с линейной плотностью λ и расположена параллельно проводящей плоскости. Расстояние между нитью и плоскостью равно l . Вычислите модуль силы, действующей на единицу длины нити. Определите выражение для напряженности электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ во всем пространстве.
8. Тонкая бесконечно длинная нить равномерно заряжена с линейной плотностью λ и расположена параллельно проводящей плоскости. Расстояние между нитью и плоскостью равно l . Вычислите модуль силы, действующей на единицу длины нити. Определите выражение для электростатического потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ во всем пространстве.
9. На расстоянии d друг от друга расположены две равномерно заряженные идеально проводящие пластины площадью S . Пространство между пластинами заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε_r , заряды на пластинах равны $\pm q$. Вычислите распределение поля $\mathbf{E}$ во всем пространстве. Считайте, что расстояние d намного меньше размеров пластин: $S \gg d^2$.

10. На расстоянии d друг от друга расположены две равномерно заряженные идеально проводящие пластины площадью S . Пространство между пластинами заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε_r , заряды на пластинах равны $\pm q$. Вычислите емкость C системы. Считайте, что расстояние d намного меньше размеров пластин: $S \gg d^2$.
11. Пространство разделено на две области, заполненные материалами с относительными диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 , соответственно. Сторонние заряды расположены во внутренней части первой области. Какие граничные условия на потенциал выполняются на границе раздела двух сред?
12. Пространство разделено на две области, заполненные материалами с относительными диэлектрическими проницаемостями 1 и ε_r , соответственно. Сторонние заряды распределены по границе раздела сред с известной поверхностной плотностью заряда σ^{ext} . Какие граничные условия на потенциал выполняются на границе раздела двух сред?
13. Точечный заряд q расположен на плоской границе раздела двух однородных бесконечных диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_{r1} и ε_{r2} . Найдите потенциал $\varphi(\mathbf{r})$.
14. Запишите условия Коши-Римана, которым подчиняется аналитическая функция $f(z)$.
15. Покажите, что из того, что функция комплексного переменного $f(z)$ – аналитическая, следует, что ее вещественная часть – гармоническая.
16. Покажите, что из того, что функция комплексного переменного

$f(z)$ – аналитическая, следует, что ее мнимая часть – гармоническая.

17. Отобразите область Ω_z на плоскости комплексного переменного z на плоскость комплексного переменного w с помощью функции $w = f(z)$, если:

- (a) $\Omega_z = \{z : 1 \leq |z| \leq 2, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$, $f(z) = z^2$;
- (b) $\Omega_z = \{z : 0 < \Re(z) < 1\}$, $f(z) = 1/z$;
- (c) $\Omega_z = \{z : 1 < |z| < 2\}$, $f(z) = (z + 1)/(z + 2)$;
- (d) $\Omega_z = \{z : |z| < 1, 0 < \arg z < \pi/2\}$, $f(z) = z^2 + 1$;

18. По заданным комплексным потенциалам $w(z)$ определите электростатический потенциал $\varphi(x, y)$, напряженность поля $\mathbf{E}(x, y)$, характер особенностей. Схематично изобразите семейства силовых линий и эквипотенциальных поверхностей.

- (a) $w(z) = c \cdot z$, $c \in \mathbb{C}$;
- (b) $w(z) = 2qi \cdot \ln\left(\frac{1}{z}\right)$, $q \in \mathbb{R}$;
- (c) $w(z) = 2qi \cdot \ln\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$, $a, b, q \in \mathbb{R}$;
- (d) $w(z) = ip \cdot \frac{1}{z}$, $p = |p|e^{i\alpha}$.

Глава 5

Плоские волны

Пятый раздел курса посвящен решению системы уравнений Максвелла в частном случае, когда зависимость от координат и времени имеет простой вид ($\propto e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\omega t}$), и все электромагнитные волны обладают плоскими фронтами. В других разделах физики также пользуются плоскими волнами в комплексно сопряженном виде ($\propto e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}$), но мы будем пользоваться договоренностями, принятыми в радиофизике. В разобранных упражнениях рассмотрены различные виды поляризации электромагнитных волн, решена задача дифракции плоской электромагнитной волны на границе раздела двух однородных изотропных диэлектриков, дано определение правым и левым средам [32]. Введены понятия фазовой и групповой скоростей, дисперсии, для сред с разными дисперсионными соотношениями описана эволюция волновых пакетов. Дано определение матрицы рассеяния многополюсника [33], для сеточного граничного условия [34] показан способ применения метода эквивалентных схем к решению задачи дифракции плоской электромагнитной волны на границе раздела двух сред.

5.1 Пример 1. Поляризация электромагнитных волн

Две плоские монохроматические линейно поляризованные волны одной частоты распространяются вдоль оси z . Первая волна поляризована по x и имеет амплитуду E_x , вторая поляризована по y , имеет амплитуду E_y и опережает первую по фазе на ϕ . Найдите поляризацию результирующей волны.

Общий комментарий

В условии упражнения указана общая постановка задачи, когда ортогональные компоненты напряженности электрического поля имеют произвольные амплитуды и разность фаз. Покажем, что в самом общем случае поляризация электромагнитной волны эллиптическая, т.е. всегда можно разложить колебание по двум ортогональным компонентам с произвольными амплитудами и разностью фаз в $\pi/2$. В частных случаях эллиптическая поляризация превращается в круговую (амплитуды колебаний ортогональных компонент равны) или линейную (разность фаз равна 0).

Иногда для описания поляризации электромагнитных волн используют параметры Стокса, однако такой способ не получил широкого распространения в радиофизике. Ознакомиться с определением параметров Стокса и примерами их расчета можно в [12, 19].

Решение задачи

Введем прямоугольную систему координат (см. Рис. 5.1) и запишем выражение для комплексной амплитуды вектора напряженности электрического поля

$$\mathbf{E} = \left(|E_x| \mathbf{e}_x + |E_y| e^{i\phi} \mathbf{e}_y \right) e^{-ik_z z}. \quad (5.1)$$

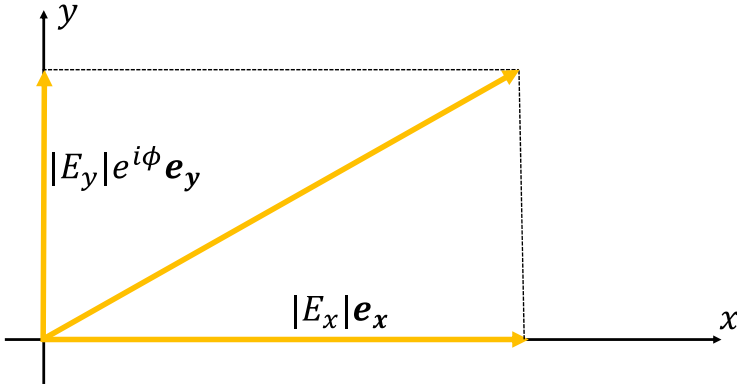


Рис. 5.1: Вектор напряженности поля $\mathbf{E}$ для волны произвольной поляризации

Далее для краткости введем переобозначения $|E_x|, |E_y| \mapsto a, b$. Определим поляризацию волны в точке $z = 0$, чтобы избавиться в выражениях от записи множителя бегущей волны: в произвольной точке все выражение получит дополнительный набег фазы, но поляризация не изменится. Для того, чтобы показать, что самый общий вид поляризации электромагнитной волны эллиптический, умножим выражение для комплексной

амплитуды на фазовый множитель (это не изменит поляризацию, так как множитель общий для вещественной и мнимой части) и выделим в нем вещественную и мнимую части

$$\mathbf{E}e^{i\alpha} = (ae_x + be^{i\phi}\mathbf{e}_y)e^{i\alpha} \equiv \mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2. \quad (5.2)$$

Умножение выражения на фазовый множитель эквивалентно сдвигу системы координат или момента отсчета времени, поэтому такая операция не повлияет на характер поляризации. Определим такое значение фазы α , при котором вещественная и мнимая части выражения (5.2) перпендикулярны друг другу. Если решение найдется для любых значений a , b и ϕ , это будет означать, что комплексную амплитуду самого общего вида всегда можно представить в виде суперпозиции двух перпендикулярных колебаний разной амплитуды, сдвинутых по фазе на $\pi/2$, т.е. самый общий вид поляризации – эллиптический.

Запишем условие перпендикулярности вещественной и мнимой компонент

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = 0. \quad (5.3)$$

Из (5.2) выделим вещественную и мнимую части

$$\mathbf{E}_1 = a \cos \alpha \mathbf{e}_x + b \cos (\phi + \alpha) \mathbf{e}_y, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{E}_2 = a \sin \alpha \mathbf{e}_x + b \sin (\phi + \alpha) \mathbf{e}_y, \quad (5.5)$$

тогда условие ортогональности примет вид

$$(a \cos \alpha \mathbf{e}_x + b \cos (\phi + \alpha) \mathbf{e}_y) \cdot (a \sin \alpha \mathbf{e}_x + b \sin (\phi + \alpha) \mathbf{e}_y) = 0. \quad (5.6)$$

Раскрывая скалярные произведения и преобразуя полученное тождество, получим

$$a^2 \sin(2\alpha) + b^2 \sin(2(\phi + \alpha)) = 0, \quad (5.7)$$

откуда

$$\tan(2\alpha) = -\frac{\sin(2\phi)}{\cos(2\phi) + a^2/b^2}. \quad \blacksquare \quad (5.8)$$

Выражение (5.8) определяет фазу α и, следовательно, угол поворота осей эллипса относительно исходной системы координат, а также величину его полюсей. В случае $a = b$ поляризация становится круговой, если $\phi = 0$ – линейной.

5.2 Пример 2. Правые и левые среды

Исследуйте задачу дифракции плоской монохроматической волны на границе раздела двух диэлектриков (в общей физике эту задачу обычно называют задачей об отражении и преломлении, но в рамках данного курса мы будем называть ее задачей дифракции). Первый диэлектрик характеризуется положительными параметрами $\varepsilon_r^{(1)}, \mu_r^{(1)} > 0$, а второй – отрицательными параметрами $\varepsilon_r^{(2)}, \mu_r^{(2)} < 0$. Изобразите направления лучей падающей, отраженной и преломленной волн. Рассмотрите частный случай $\varepsilon_r^{(2)} = -\varepsilon_r^{(1)}, \mu_r^{(2)} = -\mu_r^{(1)}$.

Общий комментарий

Под дифракцией в широком смысле понимается явление рассеяния поля излучения заданной конфигурации источников на любой неоднородности. В качестве поля источника в этой задаче выступает поле плоской монохроматической волны, в качестве неоднородности – граница раздела двух сред. При нахождении выражений для поля в первой и второй среде будем действовать аналогично тому, как это было показано на примерах граничных задач в электростатике:

1. определим общий вид решения в первой и второй среде;
2. составим систему уравнений из граничных условий;
3. найдем неизвестные амплитуды полей, решив систему.

Решение задачи

Для сравнения на первом шаге разберем случай, когда в обеих средах все параметры положительные: $\varepsilon_{\Gamma}^{(1)}, \mu_{\Gamma}^{(1)} > 0$, $\varepsilon_{\Gamma}^{(2)}, \mu_{\Gamma}^{(2)} > 0$. Полное поле в первой среде будет складываться из полей падающей (incident) и отраженной (reflected) плоских волн, поле во второй среде будет представлять собой поле одной прошедшей (transmitted) плоской волны, распространяющейся в направлении от границы раздела сред (см. Рис. 5.2).

На рисунке все векторы напряженностей, а также волновые векторы и углы с нормалью помечены соответствующими индексами. В данном случае рассматривается волна ТМ-поляризации. В силу непрерывности тангенциальная компонента волнового вектора должна сохраняться, поэтому всего может быть четыре различных волны. Из них волна, падающая на границу раздела из второй среды, не возникает в силу принципа причинности. Более подробно этот вопрос обсуждался ранее в курсе общей физики [14]. Так как обе среды линейные и все колебания происходят на одинаковой частоте, применим метод комплексных амплитуд. Комплексные амплитуды напряженностей электрического поля каждой из волн:

$$\mathbf{E}_i = E_0 e^{-ik_1 \cos \vartheta_i z - ik_1 \sin \vartheta_i x}, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{E}_r = E_1 e^{ik_1 \cos \vartheta_r z - ik_1 \sin \vartheta_r x}, \quad (5.10)$$

$$\mathbf{E}_t = E_2 e^{-ik_2 \cos \vartheta_t z - ik_2 \sin \vartheta_t x}. \quad (5.11)$$

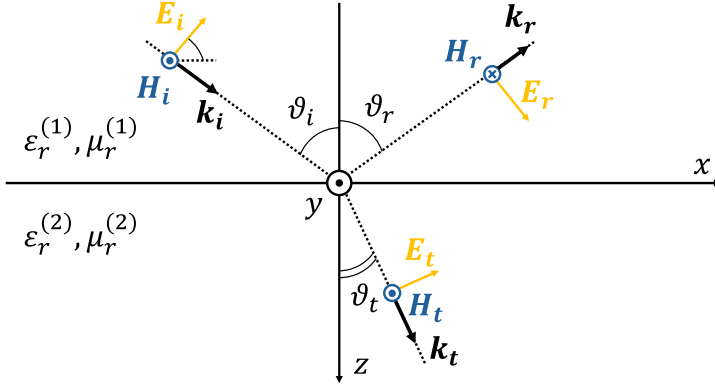


Рис. 5.2: Трехлучевая схема для случая дифракции на границе раздела двух правых сред

Теперь, когда общий вид решения определен, перейдем к составлению системы уравнений на амплитуды $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$. Перечислим все граничные условия электродинамики:

$$\mathbf{n}_{21} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)|_{z=0} = \sigma_e, \quad (5.12)$$

$$\mathbf{n}_{21} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)|_{z=0} = 0, \quad (5.13)$$

$$\mathbf{n}_{21} \times [\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1]|_{z=0} = \mathbf{i}_e, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{n}_{21} \times [\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1]|_{z=0} = 0, \quad (5.15)$$

где $\mathbf{n}_{21}$ – нормальный единичный вектор, проведенный во вторую среду со стороны первой.

На границе раздела двух сред нет сторонних токов и зарядов, поэтому $\mathbf{i}_e = 0$ и $\sigma_e = 0$. В этом случае уравнения (5.12)-(5.15) в плоскости $z = 0$

эквивалентны системе

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 0, \\ B_{2n} - B_{1n} = 0, \\ H_{2t} - H_{1t} = 0, \\ E_{2t} - E_{1t} = 0, \end{cases} \quad (5.16)$$

где индексами t и n обозначены касательные и нормальные компоненты векторов к поверхности границы раздела.

Граничные условия (5.16) должны выполняться при любом x , поэтому показатели экспонент в выражениях для комплексных амплитуд (5.9)-(5.11) равны, откуда

$$\vartheta_i = \vartheta_r \equiv \vartheta, \quad (5.17)$$

$$k_1 \sin \vartheta_i = k_2 \sin \vartheta_t \iff \sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r1}} \sin \vartheta_i = \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r2}} \sin \vartheta_t. \quad (5.18)$$

Сократим равные экспоненты и запишем систему на амплитуды напряженности электрического поля. Введем обозначения: $r \equiv |\mathbf{E}_r|/|\mathbf{E}_i|$, $t \equiv |\mathbf{E}_t|/|\mathbf{E}_i|$, $\phi \equiv \vartheta_t$. Из условия непрерывности нормальной компоненты вектора электрической индукции запишем

$$(\sin \vartheta + r \sin \vartheta) \varepsilon_{r1} = t \sin \phi \varepsilon_{r2}. \quad (5.19)$$

Из условия непрерывности касательной компоненты вектора напряженности магнитного поля с учетом того, что в плоской волне $|\mathbf{E}|/|\mathbf{H}| = \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a} \equiv \eta$ (волновое сопротивление или волновой импеданс среды),

$$\frac{1}{\eta_1} (1 + r) = \frac{t}{\eta_2}. \quad (5.20)$$

Из условия непрерывности касательной компоненты вектора напряженности электрического поля получим

$$\cos \vartheta - r \cos \vartheta = t \cos \phi. \quad (5.21)$$

Нормальные компоненты вектора магнитной индукции в задаче отсутствуют, поэтому уравнений всего 3, а не 4, как в исходной системе (5.16). Заметим, что с учетом закона Снеллиуса (5.18) тождества (5.19), (5.20) эквивалентны. Действительно,

$$\begin{cases} (1+r) \sin \vartheta \varepsilon_{r1} = t \sin \phi \varepsilon_{r2} \\ \sin \vartheta = \sin \phi \sqrt{\varepsilon_{r2} \mu_{r2} / \varepsilon_{r1} \mu_{r1}} \end{cases} \implies (1+r) / \sqrt{\mu_{r1} / \varepsilon_{r1}} = t / \sqrt{\mu_{r2} / \varepsilon_{r2}}, \quad (5.22)$$

что с учетом $\sqrt{\mu_0 \mu_{rn} / \varepsilon_0 \varepsilon_{rn}} = \eta_n$ эквивалентно выражению (5.20).

Итак, с учетом равенства углов для падающей и отраженной волн, а также закона Снеллиуса, имеем линейную алгебраическую систему из двух уравнений с двумя неизвестными коэффициентами отражения и прохождения r, t

$$\begin{cases} (1+r) / \eta_1 = t / \eta_2, \\ \cos \vartheta - r \cos \vartheta = t \cos \phi. \end{cases} \quad (5.23)$$

Решив ее, получим

$$t = \frac{2\eta_2 \cos \vartheta}{\eta_1 \cos \vartheta + \eta_2 \cos \phi}, \quad (5.24)$$

$$r = \frac{\eta_1 \cos \vartheta - \eta_2 \cos \phi}{\eta_1 \cos \vartheta + \eta_2 \cos \phi}. \quad (5.25)$$

Амплитуды отраженной и прошедшей ТМ-поляризованных волн найдены, тем самым задача дифракции на границе раздела двух сред с положительными параметрами решена.

Теперь перейдем к решению аналогичной задачи для ситуации, когда одна из двух сред имеет отрицательные магнитную и диэлектрическую проницаемости. Попробуем действовать точно так же. Запишем систему на амплитуды из трех уравнений

$$\begin{cases} (1+r) / \eta_1 = t / \eta_2, \\ \cos \vartheta - r \cos \vartheta = t \cos \phi, \\ \sin \vartheta (1+r) \varepsilon_{r1} = -|\varepsilon_{r2}| t \sin \phi. \end{cases} \quad (5.26)$$

Нетрудно видеть, что из-за добавленного минуса система (5.26) не имеет решения: она содержит 3 независимые строки и 2 неизвестные переменные, поэтому не существует амплитуд напряженности поля $\mathbf{E}$, которые бы позволили удовлетворить сразу всем граничным условиям для трехлучевой схемы, изображенной на Рис. 5.2. На самом деле из тех же граничных условий и принципа причинности можно показать, что во второй среде луч направлен в другую сторону (см. Рис. 5.3).

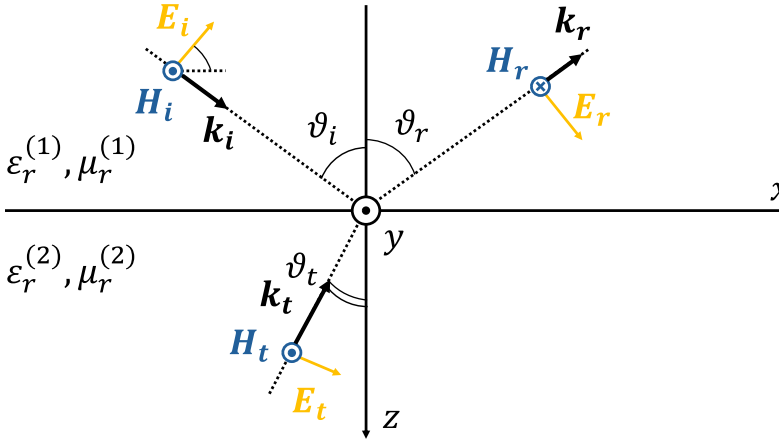


Рис. 5.3: Трехлучевая схема для случая дифракции на границе раздела левой и правой среды

Если проделать последовательность действий, аналогично тому, как это было сделано в первой части примера, в системе из трех уравнений две строчки снова совпадут. После этого решим систему и получим выражения для амплитудных коэффициентов отражения и прохождения

$$t = \frac{2\eta_2 \cos \vartheta}{\eta_1 \cos \vartheta + \eta_2 \cos \phi}, \quad \blacksquare \tag{5.27}$$

$$r = \frac{\eta_1 \cos \vartheta - \eta_2 \cos \phi}{\eta_1 \cos \vartheta + \eta_2 \cos \phi}. \quad \blacksquare \quad (5.28)$$

Отметим, что выражения получились такими же, как и для правой среды, однако, изменилось направление прошедшего луча – можно сказать, что показатель преломления стал отрицательным.

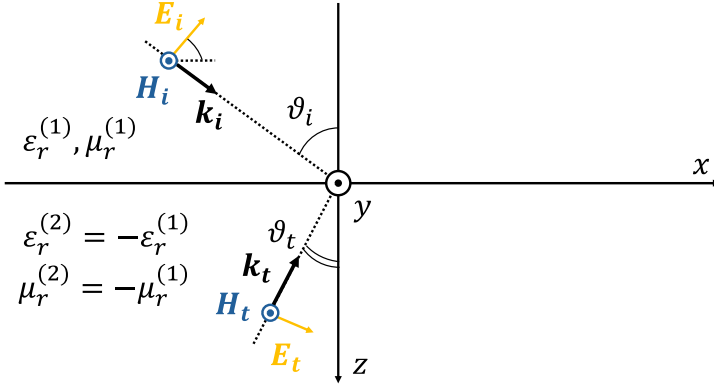


Рис. 5.4: Решение в частном случае $\varepsilon_r^{(2)} = -\varepsilon_r^{(1)}, \mu_r^{(2)} = -\mu_r^{(1)}$

Среды с $\varepsilon_r, \mu_r > 0$ называют правыми, так как в них векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{k}$ образуют правую тройку, в то время как среды с отрицательными $\varepsilon_r, \mu_r < 0$, где векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{k}$ образуют левую тройку – левыми. Действительно, запишем уравнение из системы Максвелла для плоской волны с множителем $e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \implies -i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mu_r\mathbf{H} \implies \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mu_0\mu_r\mathbf{H}. \quad (5.29)$$

Из цепочки равенств (5.29) следует, что векторы $(\mathbf{E}, \mu_r\mathbf{H}, \mathbf{k})$ образуют правую тройку. Если $\mu_r > 0$, тройка векторов $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{k})$ – правая, иначе –

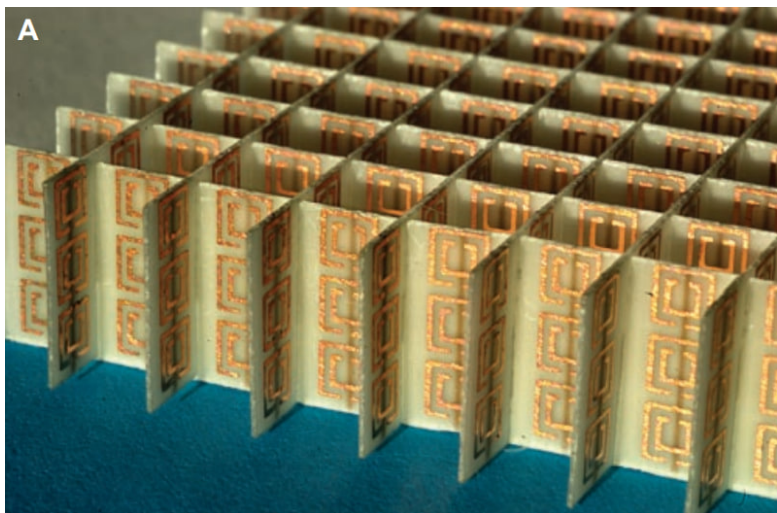


Рис. 5.5: Пример практической реализации среды с отрицательным показателем преломления, состоящей из проводов и разомкнутых кольцевых резонаторов [35]

левая. Важно отметить, что знаки ε_r, μ_r влияют только на направление распространения фронтов постоянной фазы, а не на направление переноса энергии плоской волной: оно всегда совпадает с направлением вектора Пойнтинга $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, мощность переносится в направлении от границы раздела сред на бесконечность.

В частном случае $\varepsilon_r^{(2)} = -\varepsilon_r^{(1)}, \mu_r^{(2)} = -\mu_r^{(1)}$ коэффициент r обращается в 0 и отраженная волна пропадает (см. Рис. 5.4). В таком случае говорят, что среды «согласованы».

Левые среды или среды с отрицательным показателем преломления впервые были описаны в статье [32] 1967 года и с тех пор нашли ряд практических применений в радиофизике и антенной технике [36, 35, 37].

5.3 Пример 3. Эволюция волнового пакета в диспергирующей среде с линейным законом дисперсии

Исследуйте форму и движение волнового пакета, полученного наложением плоских волн с одинаковыми амплитудами a_0 и волновыми векторами, лежащими в области $|\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}| \leq q$. При этом закон дисперсии $\omega(k)$ замените на разложение в ряд в окрестности точки $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ с точностью до линейного члена.

Общий комментарий

Дисперсия – это зависимость волнового числа от частоты. Исследуем характер распространения набора плоских волн (волнового пакета) с близкими волновыми числами в предположении, что эта зависимость является линейной. Для получения координатной зависимости сложим (проинтегрируем) все плоские волны, выполнив преобразование Фурье

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{K}^3} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \quad (5.30)$$

Решение задачи

Разложим дисперсионное уравнение в ряд с точностью до линейного члена

$$\omega(\mathbf{k}) \approx \omega(\mathbf{k}_0) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \equiv \omega_0 + \mathbf{v}_g \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0), \quad (5.31)$$

где введено обозначение для градиента ω частоты по волновому вектору $\mathbf{k}$

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \quad (5.32)$$

Величину $\mathbf{v}_g$ принято называть групповой скоростью волнового пакета. В частном случае изотропной среды выражение для групповой скорости сводится к виду

$$|\mathbf{v}_g| = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad (5.33)$$

Подставим разложение в выражение для преобразования Фурье, а также запишем $\mathbf{k}$ в виде $\mathbf{k}_0 + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &\approx \iiint_{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \leq q} \mathbf{a}_0 e^{i\omega_0 t - i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} e^{i(\mathbf{v}_g t - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)} d^3 \mathbf{k} \equiv \\ &\equiv \mathbf{a}_0 e^{i\omega_0 t - i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^q e^{i\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}'} k'^2 \sin \vartheta dk' d\vartheta d\varphi, \end{aligned} \quad (5.34)$$

где введены обозначения $\mathbf{g} = \mathbf{v}_g t - \mathbf{r}$, $\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$. Вычислим тройной интеграл в сферической системе координат

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^q e^{i\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}'} k'^2 \sin \vartheta dk' d\vartheta d\varphi &= 2\pi \int_0^\pi \int_0^q e^{igk' \cos \vartheta} k'^2 \sin \vartheta dk' d\vartheta = \\ &= \frac{2\pi}{g^3} \int_0^\pi \int_0^{gq} e^{i\kappa \cos \vartheta} \kappa^2 \sin \vartheta d\kappa d\vartheta = \frac{2\pi}{g^3} \int_{-1}^1 \int_0^{gq} e^{i\kappa t} \kappa^2 d\kappa dt = \\ &= \frac{4\pi}{g^3} \int_0^{gq} \kappa \sin \kappa d\kappa = \frac{4\pi}{g^3} [\sin(gq) - gq \cos(gq)]. \end{aligned}$$

После обратной замены, окончательно получим

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}_0 e^{i\omega_0 t - i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} \frac{4\pi [\sin(|\mathbf{v}_g t - \mathbf{r}|q) - |\mathbf{v}_g t - \mathbf{r}|q \cos(|\mathbf{v}_g t - \mathbf{r}|q)]}{|\mathbf{v}_g t - \mathbf{r}|^3}, \quad \blacksquare \quad (5.35)$$

где видно, что $\mathbf{v}_g = \partial \omega / \partial \mathbf{k}|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0}$ – вектор групповой скорости волнового пакета. В выражении (5.35) можно выделить огибающую волнового пакета (все выражение кроме экспоненты бегущей волны), распространяющуюся в среде с групповой скоростью $\mathbf{v}_g$, и ее высокочастотное заполнение

(экспонента бегущей волны). С течением времени форма волнового пакета сохраняется, однако уменьшается его амплитуда.

5.4 Пример 4. Эволюция волнового пакета в диспергирующей среде с квадратичным законом дисперсии

Покажите, что «расплывание» одномерного волнового пакета в диспергирующей среде определяется учетом второй производной $\omega''(k)$ на примере одномерного волнового пакета со спектральной плотностью

$$\tilde{E}(k) = E_0 e^{-\alpha(k-k_0)^2}.$$

Общий комментарий

Повторим все сделанное в предыдущем примере, однако в разложении в ряд дисперсионного соотношения кроме линейного слагаемого также оставим квадратичный член и посмотрим, к каким эффектам это приведет на примере одномерного гауссовского волнового пакета.

Решение задачи

Разложим в ряд дисперсионное соотношение вплоть до квадратичного члена

$$\begin{aligned} \omega(k) &\approx \omega(k_0) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k=k_0} (k - k_0)^2 \equiv \\ &\equiv \omega_0 + v_g(k - k_0) + \Gamma(k - k_0)^2. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Вычислим координатную зависимость, выполнив одномерное преобразование Фурье,

$$\begin{aligned}
 E(z, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(k) e^{i\omega t - ikz} dk \approx \\
 &\approx E_0 e^{i\omega_0 t - ik_0 z} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[v_g(k-k_0)t + \Gamma(k-k_0)^2 t - (k-k_0)z] - \alpha(k-k_0)^2} dk = \\
 &= E_0 e^{i\omega_0 t - ik_0 z} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha - i\Gamma t}} e^{-(v_g t - z)^2 / 4(\alpha - i\Gamma t)}. \quad (5.37)
 \end{aligned}$$

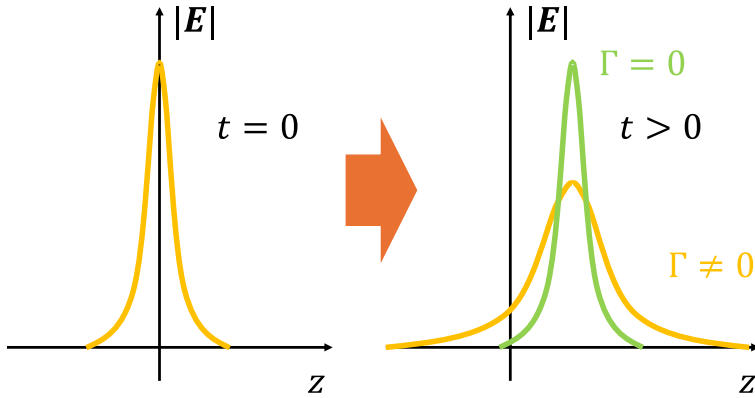


Рис. 5.6: Эволюция огибающей гауссовского волнового пакета с течением времени для случаев $\Gamma \neq 0$, $\Gamma = 0$

Структура выражения (5.37) совпадает со структурой (5.35). Для того, чтобы охарактеризовать эволюцию огибающей, запишем выражение для $|E|$

$$|E| = E_0 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{\alpha^2 + \Gamma^2 t^2}} e^{-\frac{\alpha(v_g t - z)^2}{4(\alpha^2 + \Gamma^2 t^2)}}. \quad \blacksquare \quad (5.38)$$

С течением времени максимум огибающей уменьшается, а ее ширина – увеличивается (см. Рис. 5.6). Наличие ненулевого квадратичного члена в дисперсионной характеристике привело к тому, что огибающая стала изменяться с течением времени (говорят, что волновой пакет «расплывается»).

5.5 Пример 5. Матрица рассеяния стыка линий передачи

В стык двух коаксиальных кабелей с разными волновыми сопротивлениями η_1 , η_2 включена реактивная неоднородность с импедансом iX . Определите S -матрицу такого стыка. Является ли она унитарной?

Общий комментарий

В задаче требуется определить матрицу рассеяния (S -матрицу). Матрица S –параметров $2N$ -полосника – это матрица, элементы которой определяются [33] как

$$S_{ij} = \frac{b_i}{a_j}, \quad (5.39)$$

где a_j – амплитуда волны мощности [33], падающей на вход с номером j , b_i – амплитуда волны мощности, отраженной от входа с номером i (см. Рис. 5.7). Например, S –матрица четырехполосника имеет вид

$$\bar{\bar{S}} = \begin{pmatrix} b_1/a_1 & b_1/a_2 \\ b_2/a_1 & b_2/a_2 \end{pmatrix}. \quad (5.40)$$

Диагональные элементы $\bar{\bar{S}}$ -матрицы имеют смысл коэффициентов отражения от входа с соответствующим номером, недиагональные s_{ij} – ко-



Рис. 5.7: Матрица рассеяния четырехполюсника

эффицентов передачи на i -й вход со стороны j -го.

В задачах курса все схемы составлены только из взаимных элементов, поэтому $\hat{S}$ -матрица всегда будет симметричной. Отрезок длиной линии, закороченный на конце на некоторую нагрузку – это двухполюсник, у него есть только коэффициент отражения r ; длинная линия, в которую включена некоторая нагрузка – четырехполюсник, у него есть коэффициент отражения r и коэффициент пропускания t .

$$\bar{\bar{S}}_{\text{двухполюсника}} \equiv \begin{pmatrix} s_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \end{pmatrix}, \quad \bar{\bar{S}}_{\text{четырёхполюсника}} \equiv \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ t & r \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

Для упрощения алгебраических преобразований положим $\eta_1 = \eta_2 = \eta$. В задаче рассматривается рассеяние на чисто мнимой нагрузке iX волны мощности. Найдем S -матрицу, определив коэффициенты передачи и отражения. Порядок действий при решении:

1. покажем на эквивалентной схеме токи и напряжения падающей, отраженной и прошедшей волн мощности;
2. из граничных условий в точке $z = 0$ составим алгебраическую систему на неизвестные амплитуды тока и напряжения;
3. перейдем к величинам, нормированным на корень из мощности, решим полученную систему.

В схеме, описанной в задаче, нет резистивных элементов, поэтому нет потерь. Обсудим, почему из этого следует, что матрица рассеяния будет унитарной. Пусть на некоторый многополюсник без потерь падают волны мощности, характеризуемые вектором $\mathbf{a}$. Тогда, согласно определению $\bar{\bar{S}}$, введенному ранее, от многополюсника отразятся волны мощности, характеризуемые вектором $\mathbf{b} = \bar{\bar{S}} \cdot \mathbf{a}$. Запишем выражения для падающей мощности

$$P_i = \mathbf{a}^+ \cdot \mathbf{a} \quad (5.42)$$

и отраженной мощности

$$P_r = \mathbf{b}^+ \cdot \mathbf{b} = (\bar{\bar{S}} \cdot \mathbf{a})^+ \cdot (\bar{\bar{S}} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a}^+ \cdot \bar{\bar{S}}^+ \cdot \bar{\bar{S}} \cdot \mathbf{a}, \quad (5.43)$$

где символ $^+$ означает эрмитово сопряжение (сопряжение и транспонирование). Если в многополюснике нет потерь, разность мощностей должна быть равна нулю, откуда получим свойство унитарности

$$P_i - P_r = \mathbf{a}^+ \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a}^+ \cdot \bar{\bar{S}}^+ \cdot \bar{\bar{S}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^+ \cdot (\bar{\mathbf{1}} - \bar{\bar{S}}^+ \cdot \bar{\bar{S}}) \cdot \mathbf{a} = 0 \implies \bar{\bar{S}}^{-1} = \bar{\bar{S}}^+. \quad (5.44)$$

Решение задачи

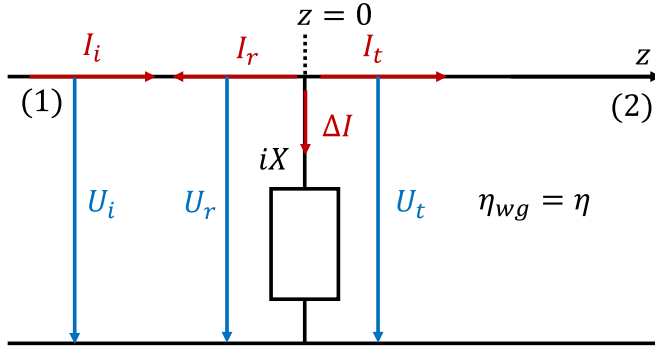


Рис. 5.8: Рассеяние на стыке двух линий передачи

На рисунке 5.8 показаны направления токов и напряжений трех волн, а также тока ΔI , протекающего через нагрузку iX . Напряжение всегда определено как разность потенциалов между верхним проводом на схеме и нижним проводом, землей. Токи волн, распространяющихся в положительном направлении вдоль оси z , текут направо, ток отраженной волны, распространяющейся в отрицательном направлении вдоль оси z , – налево.

На стыке двух длинных линий в точке $z = 0$ напряжение непрерывно, в то время как ток претерпевает разрыв, равный величине тока ΔI :

$$\begin{cases} (I_i - I_r) - I_t = \Delta I \\ U_i + U_r - U_t = 0. \end{cases} \quad (5.45)$$

По закону Ома величина разрыва тока

$$\Delta I = \frac{U_t}{iX}. \quad (5.46)$$

Амплитуды тока и напряжения в каждой из волн связаны друг с другом через волновое сопротивление линии

$$U_{i,r,t} = I_{i,r,t} \cdot \eta. \quad (5.47)$$

С учетом (5.46) и (5.47) система (5.45) примет вид

$$\begin{cases} \left(\frac{U_i}{\eta} - \frac{U_r}{\eta} \right) - \frac{U_t}{\eta} = \frac{U_t}{iX} \\ U_i + U_r - U_t = 0. \end{cases} \quad (5.48)$$

Отнормируем амплитуды волн на корень из мощности, заменив амплитуды напряжений $U_{i,r,t}$ на $a_{i,r,t}\sqrt{\eta}$. Разделим обе строчки системы на a_i и обозначим $s_{11} = a_r/a_i$, $s_{21} = a_t/a_i$. С учетом переобозначений перепишем систему (5.48) в виде

$$\begin{cases} (1 - s_{11}) - s_{21} = s_{21} \frac{\eta}{iX} \\ 1 + s_{11} - s_{21} = 0. \end{cases} \quad (5.49)$$

Решив систему относительно неизвестных S -параметров, получим

$$s_{11} = -\frac{1}{1 + 2iX/\eta}, \quad \blacksquare \quad (5.50)$$

$$s_{21} = \frac{1}{1 + \eta/2iX}. \quad \blacksquare \quad (5.51)$$

Так как схема симметричная, $s_{12} = s_{21}$, $s_{22} = s_{11}$. Это и есть элементы S -матрицы, связывающей амплитуды волн по разные стороны границы

$$\bar{\bar{S}} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}. \quad (5.52)$$

В рассматриваемой задаче волновое сопротивление η чисто вещественное, а нагрузка iX чисто мнимая. Из этого следует, что потери отсутствуют и S -матрица унитарная. Действительно,

$$\bar{\bar{S}}^+ = \begin{pmatrix} -1/(1 - 2iX/\eta) & 1/(1 - \eta/2iX) \\ 1/(1 - \eta/2iX) & -1/(1 - 2iX/\eta) \end{pmatrix}, \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{S}} \cdot \bar{\bar{S}}^+ &= \begin{pmatrix} -1/(1 + 2iX/\eta) & 1/(1 + \eta/2iX) \\ 1/(1 + \eta/2iX) & -1/(1 + 2iX/\eta) \end{pmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{pmatrix} -1/(1 - 2iX/\eta) & 1/(1 - \eta/2iX) \\ 1/(1 - \eta/2iX) & -1/(1 - 2iX/\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

5.6 Пример 6. Рассеяние на метаповерхности в приближении усредненных граничных условий

Определите коэффициенты пропускания и отражения для материала с электрическим граничным условием сеточного типа

$$\mathbf{n}_{21} \times [\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = \mathbf{E}_\tau / Z_g,$$

где Z_g – постоянная величина (сеточный импеданс), $\mathbf{n}_{21}$ - единичный вектор нормали к границе раздела, проведенный во вторую среду со стороны первой. Изобразите эквивалентную схему.

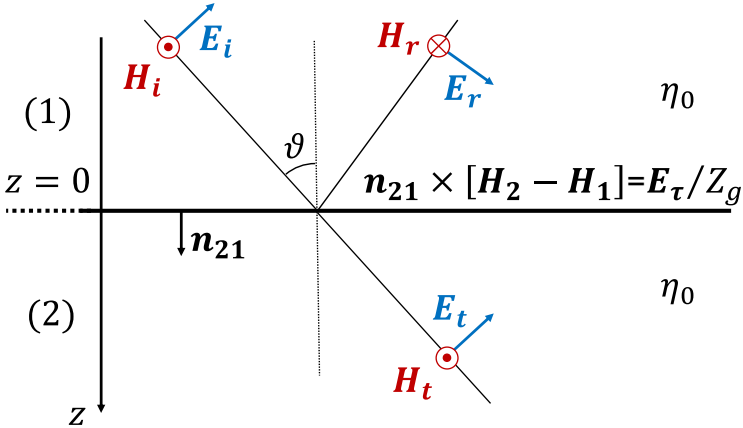


Рис. 5.9: Рассеяние на метаповерхности с сеточным граничным условием

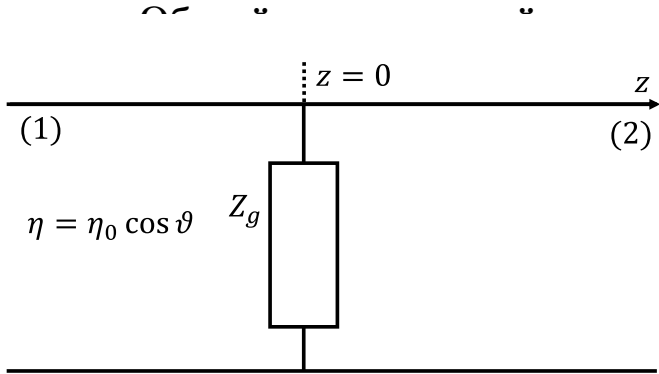


Рис. 5.10: Эквивалентная схема задачи рассеяния на метаповерхности с сеточным граничным условием

Рассмотрим задачу дифракции плоской волны на бесконечно тонкой плоской двукратно периодической структуре с периодами много меньше длины волны $T_x, T_y \ll \lambda$. В этом случае некоторые такие структуры можно описать [34, 38] с помощью приближенного граничного условия

$$\mathbf{n}_{21} \times [\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = \mathbf{E}_\tau / Z_g, \quad (5.55)$$

где Z_g – сеточный импеданс, определяемый параметрами структуры и практически не зависящий от свойств падающей волны, $\mathbf{n}_{21}$ – единичный вектор нормали к границе раздела, проведенный во вторую среду со стороны первой. Исторически первыми структурами, описанными таким образом, были сетки из проводов, поэтому граничное условие (5.55) часто называют сеточным [34]. С другой стороны, при дифракции часть излучения отражается от структуры, а часть – проходит во вторую область пространства, поэтому также в литературе его иногда называют полупрозрачным граничным условием [39].

Решение задачи

Для решения задачи введем эквивалентные токи и напряжения следующим образом: положим амплитуду эквивалентного тока в каждой волне (падающей, отраженной и прошедшей) равной касательной к границе раздела компоненте вектора $\mathbf{H}$, а амплитуду эквивалентного напряжения – равной касательной компоненте $\mathbf{E}$. Тогда эквивалентная схема задачи примет вид Рис. 5.10.

Здесь $\eta = \eta_0 \cos \vartheta$ – отношение касательных компонент полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (характеристическое сопротивление свободного пространства) в случае ТМ-поляризации при падении волны под углом ϑ к нормали. Можно показать, что для изображенной схемы система уравнений на амплитуды токов и напряжений будет полностью эквивалентна исходной системе

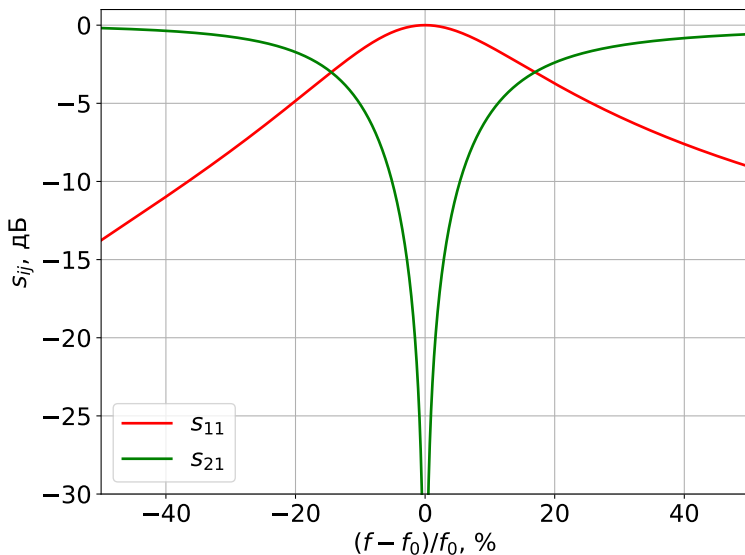


Рис. 5.11: Типичные частотные зависимости s -параметров для полупрозрачного материала

уравнений на амплитуды напряженности полей, поэтому такой подход (метод эквивалентных схем) правомерен. Более строгое обоснование метода эквивалентных схем указано в [40]. Таким образом, задача сведена к предыдущей с точностью до замены η_0 на $\eta_0 \cos \vartheta$ и iX на Z_g

$$s_{11} = s_{22} = -\frac{1}{1 + 2Z_g/\eta_0 \cos \vartheta}, \quad \blacksquare \quad (5.56)$$

$$s_{21} = s_{12} = \frac{1}{1 + \eta_0 \cos \vartheta / 2Z_g}. \quad \blacksquare \quad (5.57)$$

Остановимся на практических свойствах полупрозрачных материалов. Для этого предположим, что $Z_g = i\omega L_g - i/\omega C_g$ и построим зависимости $|s_{11}|, |s_{21}|$ в децибелах ($s[\text{дБ}] = 20\lg|s[\text{ед.}]|$) от частоты.

На рисунке 5.11 по горизонтальной оси отложены значения отстройки частоты f от центральной частоты, на которой коэффициент передачи



Рис. 5.12: Метаматериал на дверце СВЧ-печи: полупрозрачное покрытие не пропускает излучение СВЧ-диапазона, зато пропускает свет, позволяя видеть содержимое. Характерная длина волны электромагнитного излучения в СВЧ-печи составляет порядка 10 сантиметров и заметно превышает размеры ячеек сетки. Источник: <https://www.ixbt.com/live/chome/pochemu-dverca-mikrovolnovki-meet-setchatyy-uzor.html>.

s_{21} обращается в 0 (или $-\infty$ дБ на графике). В окрестности этой частоты материал практически полностью отражает падающее излучение, в то время как на высоких и низких частотах является прозрачным. Именно из-за своих частотно-селективных свойств полупрозрачные метаматериалы получили крайне широкое распространение (Рис. 5.12, 5.13).

В этом примере мы предположили, что полупрозрачное граничное условие выполняется в каждой точке бесконечно тонкой поверхности, расположенной в плоскости $z = 0$. Строго говоря, при практической реализации это верно только в смысле средних значений векторов по-



Рис. 5.13: Зеркало радиотелескопа в виде сетки из проводов: на частотах рабочего диапазона длина радиоволн составляет порядка дециметра, и сетка из проводов ведет себя как идеальный проводник и позволяет сформировать узкий луч телескопа, при этом такая конструкция гораздо легче и более устойчива к ветровым нагрузкам, чем зеркало из сплошного листа металла. Источник: apo.rf/материалы/радиотелескопы

лей, поэтому полученное решение является приближенным. Такое приближение называется приближением **усредненных граничных условий (УГРУ)**. Во второй части курса аналогичная задача дифракции на периодической структуре будет решена методом, учитывающим строение элементарной ячейки.

5.7 Задачи для самостоятельного решения

1. Две монохроматические волны одной частоты поляризованы по кругу с противоположными направлениями вращения, имеют одинако-

вые фазы и распространяются в одном направлении. Амплитуды этих волн a (у правополяризованной волны) и b (у левополяризованной волны). Найдите зависимость характера поляризации от a/b .

2. Две монохроматические волны поляризованы одной частоты по кругу в противоположные стороны и распространяются в одном направлении. Амплитуды и частоты волн одинаковы, а фазы отличаются на постоянную величину. Определите поляризацию суммарной волну.
3. Поляризованная по кругу плоская монохроматическая волна падает наклонно на плоскую границу диэлектрика. Определите характер поляризации отраженной и преломленной волн.
4. Вывести формулы Френеля для случая, когда электромагнитная волна падает из вакуума на плоскую границу раздела проводящей среды с малым поверхностным импедансом Z_s .
5. Диэлектрический слой с диэлектрической проницаемостью ε_2 , ограниченный плоскостями $z = 0$ и $z = a$, разделяет диэлектрические среды с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_3 . На этот слой нормально к его поверхности падает из области $z < 0$ волна. При какой толщине слоя отражение будет минимальным? При каком соотношении между ε_i отражения не будет?
6. Покажите, что после полного отражения от границы диэлектрика линейно поляризованная волна приобретает в общем случае эллиптическую поляризацию.
7. Определите амплитудный коэффициент отражения при нормальном падении плоской волны на проводник. Рассмотрите частные случаи хорошего и плохого проводника.

8. Определите тангенс угла падения TM –поляризованной плоской волны, при котором в первой среде не будет отраженной волны. Возможен ли такой же эффект при другой поляризации? Докажите и воспользуйтесь выражением

$$\frac{\sin x \cos x - \sin y \cos y}{\sin x \cos x + \sin y \cos y} = \frac{\tan(x - y)}{\tan(x + y)}.$$

9. Определите волновое число k и волновое сопротивление η в среде с конечной проводимостью $\sigma \neq 0$. Рассмотрите частные случаи хорошего и плохого проводника, разложив выражения в ряд Тейлора до первого неисчезающего порядка.
10. Докажите формулу Рэлея, связывающую фазовую ($v_{\text{ph}} = \omega/k$) и групповую ($v_g = \partial\omega/\partial k$) скорости,

$$v_{\text{gr}} = v_{\text{ph}} - \lambda \frac{dv_{\text{ph}}}{d\lambda}.$$

11. Определите фазовую и групповую скорости электромагнитной волны, в среде с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Рассмотрите только частные случаи $\omega \ll \omega_0$, $\omega \gg \omega_0$.

12. Определите фазовые и групповые скорости для дисперсионных соотношений:

- $\omega = kc/\sqrt{\varepsilon\mu}$;
- $\omega = \hbar k^2/2m$;
- $\omega = \sqrt{k^2 c^2 + (mc^2/\hbar)^2}$.

Чему соответствуют эти дисперсионные соотношения?

13. Напряженность электрического поля электромагнитной волны задана в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-|t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}/c|/\tau}.$$

Определите компоненту Фурье $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$.

14. Компонента Фурье $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ напряженности электрического поля имеет вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{E}_0 \frac{(2\pi)^4}{\omega_0} \delta(\mathbf{k} - \omega \mathbf{n}/c) e^{-(\omega/\omega_0)^2}.$$

Определите напряженность электрического поля как функцию координат и времени.

15. Определите условия, которым подчиняются элементы S -матрицы пассивного четырехполюсника без потерь.
16. В линию с волновым сопротивлением η включена нагрузка величиной Z_{load} . Чему будет равно отношение амплитуды напряжения к амплитуде тока в точке, удаленной от нагрузки на расстояние l ?
17. В линию с волновым сопротивлением η включена нагрузка величиной Z_{load} . Предложите метод согласования с помощью одного реактивного элемента.
18. Три микрополосковые линии с волновым сопротивлением η соединены параллельно через одинаковые сосредоточенные сопротивления R . Вычислите S -матрицу системы. Подберите величину r так, чтобы диагональные элементы S -матрицы равнялись нулю. Является ли S -матрица унитарной?
19. Микрополосковая линия 1 с волновым сопротивлением η_1 подключена к параллельно соединенным линиям 2,3, имеющим сопротивления η_2, η_3 . Определите S -матрицу. Является ли она унитарной?

20. Определите коэффициенты пропускания и отражения для материала с магнитным граничным условием сеточного типа

$$\mathbf{n}_{21} \times [\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = -\mathbf{H}_\tau / Y_g,$$

где Y_g – постоянная величина (сеточная проводимость), $\mathbf{n}_{21}$ – единичный вектор нормали к границе раздела, проведенный во вторую среду со стороны первой. Изобразите эквивалентную схему.

5.8 Вопросы для самопроверки

1. Запишите множитель плоской волны, волновой вектор которой задан выражением

$$\mathbf{k} = \frac{k}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y).$$

2. Запишите множитель плоской волны, волновой вектор которой задан выражением

$$\mathbf{k} = \frac{k}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z).$$

3. Запишите множитель плоской волны, волновой вектор которой задан выражением

$$\mathbf{k} = \frac{k}{2}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - 2\mathbf{e}_z).$$

4. Запишите множитель сферической волны.

5. Запишите множитель цилиндрической волны.

6. Запишите граничное условие на идеальном проводнике.

7. Запишите граничное условие на идеальном магнетике.

8. Запишите граничное условие Леонтовича.

9. На плоскость из идеального проводника в свободном пространстве по нормали падает плоская волна с амплитудой электрического поля E_0 . Определите напряженность поля E во всем пространстве.
10. На плоскость из идеального проводника в свободном пространстве по нормали падает плоская волна с амплитудой электрического поля E_0 . Определите поверхностную плотность электрических токов, текущих по плоскости.
11. На плоскость из идеального магнетика в свободном пространстве по нормали падает плоская волна с амплитудой электрического поля E_0 . Определите напряженность поля E во всем пространстве.
12. На плоскость из идеального магнетика в свободном пространстве под углом ϑ к нормали падает плоская ТЕ-волна с амплитудой электрического поля E_0 . Определите напряженность поля E во всем пространстве.
13. На плоскость из идеального магнетика в свободном пространстве под углом ϑ к нормали падает плоская ТМ-волна с амплитудой электрического поля E_0 . Определите напряженность поля E во всем пространстве.
14. На плоскость из идеального проводника в свободном пространстве под углом ϑ к нормали падает плоская ТЕ-волна с амплитудой электрического поля E_0 . Определите напряженность поля E во всем пространстве.
15. На плоскость из идеального проводника в свободном пространстве под углом ϑ к нормали падает плоская ТЕ-волна с амплитудой электрического поля E_0 . Определите поверхностную плотность электрических токов, текущих по плоскости.

16. На плоскость из идеального проводника в свободном пространстве под углом ϑ к нормали падает плоская ТМ-волна с амплитудой электрического поля E_0 . Определите напряженность поля E во всем пространстве.
17. На плоскость из идеального проводника в свободном пространстве под углом ϑ к нормали падает плоская ТМ-волна с амплитудой электрического поля E_0 . Определите поверхностную плотность электрических токов, текущих по плоскости.
18. Дисперсионное соотношение для электромагнитных волн в ионосфере может быть записано в виде

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2,$$

где c – скорость света в вакууме, ω_p — плазменная частота. Определите выражения для фазовой и групповой скорости в этом случае.

19. Дисперсионное соотношение для волн на глубокой воде может быть записано в виде

$$\omega^2 = gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3,$$

где g – ускорение свободного падения, σ – коэффициент поверхностного натяжения, а ρ – плотность. Определите выражения для фазовой и групповой скорости в этом случае.

20. Известно, что для некоторой среды фазовая скорость волны зависит от волнового числа квадратично

$$v_{ph} = \alpha k^2.$$

Определите выражение для групповой скорости в этом случае.

21. Определите тип поляризации, если известно, что комплексная амплитуда вектора $\mathbf{E}$ задана выражением

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y).$$

Предполагается, что волна распространяется в положительном направлении вдоль оси z .

22. Определите тип поляризации, если известно, что комплексная амплитуда вектора $\mathbf{E}$ задана выражением

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x e^{-13i\pi/2} + i\mathbf{e}_y).$$

Предполагается, что волна распространяется в положительном направлении вдоль оси z .

23. Определите тип поляризации, если известно, что комплексная амплитуда вектора $\mathbf{E}$ задана выражением

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y).$$

Предполагается, что волна распространяется в положительном направлении вдоль оси z .

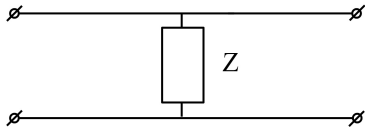
24. Получите выражение для амплитудного коэффициента отражения r (по полю $\mathbf{E}$) от границы раздела двух сред с параметрами $\varepsilon_{r1,2}$ и $\mu_{r1,2}$ для случая ТМ-поляризации при падении из первой среды по нормали.

25. Получите выражение для амплитудного коэффициента прохождения t (по полю $\mathbf{E}$) при дифракции плоской волны на границе раздела двух сред с параметрами $\varepsilon_{r1,2}$ и $\mu_{r1,2}$ для случая ТЕ-поляризации при падении из первой среды по нормали.

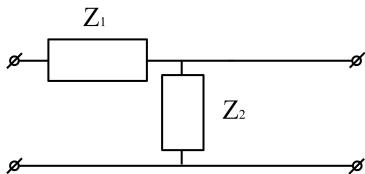
26. Получите выражение для амплитудного коэффициента отражения r (по полю $\mathbf{E}$) от границы раздела двух сред с параметрами $\varepsilon_{r1,2}$ и $\mu_{r1,2}$ для случая ТЕ-поляризации при падении из первой среды под углом ϑ .
27. Получите выражение для амплитудного коэффициента отражения r (по полю $\mathbf{E}$) от границы раздела двух сред с параметрами $\varepsilon_{r1,2}$ и $\mu_{r1,2}$ для случая ТМ-поляризации при падении из первой среды под углом ϑ .
28. Получите выражение для амплитудного коэффициента прохождения t (по полю $\mathbf{E}$) при дифракции на границе раздела двух сред с параметрами $\varepsilon_{r1,2}$ и $\mu_{r1,2}$ для случая ТЕ-поляризации при падении из первой среды под углом ϑ .
29. Получите выражение для амплитудного коэффициента прохождения t (по полю $\mathbf{E}$) при дифракции на границе раздела двух сред с параметрами $\varepsilon_{r1,2}$ и $\mu_{r1,2}$ для случая ТМ-поляризации при падении из первой среды под углом ϑ .
30. Изобразите ход лучей в задаче дифракции плоской волны на границе раздела двух сред с параметрами $\varepsilon_{r1} = 2$, $\mu_{r1} = 2$, $\varepsilon_{r2} = 4$ и $\mu_{r1} = 4$, если волна падает под углом ϑ к нормали из первой среды во вторую.
31. Изобразите ход лучей в задаче дифракции плоской волны на границе раздела двух сред с параметрами $\varepsilon_{r1} = 2$, $\mu_{r1} = 2$, $\varepsilon_{r2} = -4$ и $\mu_{r1} = -4$, если волна падает под углом ϑ к нормали из первой среды во вторую.
32. Изобразите ход лучей в задаче дифракции плоской волны на границе раздела двух сред с параметрами $\varepsilon_{r1} = 1$, $\mu_{r1} = 1$, $\varepsilon_{r2} = -1$

и $\mu_{r1} = -1$, если волна падает под углом ϑ к нормали из первой среды во вторую.

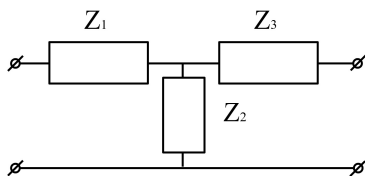
33. Покажите, что в однородном изотропном материале с параметрами $\varepsilon_r = 10, \mu_r = 1$ векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{S}$ (вектор Пойнтинга) сонаправлены.
34. Покажите, что в однородном изотропном материале с параметрами $\varepsilon_r = -10, \mu_r = -1$ векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{S}$ (вектор Пойнтинга) направлены в противоположные стороны.
35. Покажите, что матрица рассеяния многополюсника без потерь является унитарной.
36. Определите $\overline{\overline{Z}}$ -матрицу изображенного четырехполюсника.



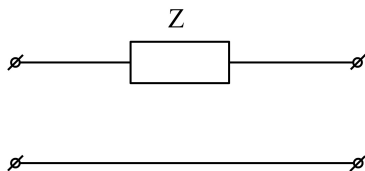
37. Определите $\overline{\overline{Z}}$ -матрицу изображенного четырехполюсника.



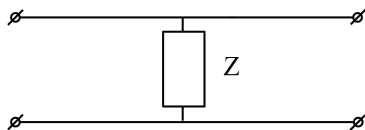
38. Определите $\overline{\overline{Z}}$ -матрицу изображенного четырехполюсника.



39. Определите $\overline{\overline{S}}$ -матрицу изображенного четырехполюсника, если волновое сопротивление длинной линии с каждой из сторон равно η .



40. Определите $\overline{\overline{S}}$ -матрицу изображенного четырехполюсника, если волновое сопротивление длинной линии с каждой из сторон равно η .



Глава 6

Задача излучения

Последняя тема первой половины курса – задача излучения. Общая постановка задачи излучения была впервые сформулирована еще во второй главе, когда шла речь о волновых уравнениях на векторы напряженности полей, а также потенциалах. Коротко ее можно охарактеризовать так: по заданному распределению источников (электрических и магнитных токов и зарядов) найти распределения полей во всем пространстве. Ниже помимо вывода волновых уравнений на векторные потенциалы получено выражение для одномерной функции Грина уравнения Гельмгольца, а также приведены примеры задач, в которых вычислены поля излучения элементарных источников. В конце главы разобрано несколько задач на нахождение диаграмм направленности систем токов, что можно считать введением в теорию антенн и устройств СВЧ, составляющую предмет изучения отдельной дисциплины. В качестве справочника, содержащего все основные выражения для разных представлений функции Грина уравнения Гельмгольца, рекомендуется использовать [10]. Большое количество упражнений по теории излучения разобрано в [11, 41].

6.1 Пример 1. Волновые уравнения на векторные потенциалы

Получите волновые уравнения на векторные потенциалы $\mathbf{A}^{(e)}$ и $\mathbf{A}^{(m)}$ в условиях соответствующих калибровок Лоренца. Как связаны между собой векторные потенциалы $\mathbf{A}^{(e)}$ и $\mathbf{A}^{(m)}$ и векторы полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ при наличии не только электрических, но и магнитных источников?

Общий комментарий

С учетом не только электрических, но и магнитных источников поля система уравнений Максвелла в случае однородной и изотропной среды с относительными диэлектрической и магнитной проницаемостями μ_r, ε_r имеет вид [8]

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{H} = i\omega\varepsilon_r\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{j}^{(e)}, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_r\mu_0\mathbf{H} - \mathbf{j}^{(m)}, \\ \nabla \cdot (\varepsilon_r\varepsilon_0\mathbf{E}) = \rho^{(e)}, \\ \nabla \cdot (\mu_r\mu_0\mathbf{H}) = \rho^{(m)}. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Начиная с этого момента курса всегда будем по умолчанию предполагать, что поле создается не только электрическими, но и магнитными источниками. В любом из учебников по электродинамике и распространению радиоволн (см., например, [8, 10, 11, 42, 43]) можно найти полное изложение, касающееся физической природы и удобства использования магнитных источников, поэтому здесь лишь только кратко напомним их физический смысл. Из принципа перестановочной двойственности (см. задачи для самостоятельного решения к главе 6) и граничного условия

на разрыв касательной компоненты поля $\mathbf{H}$ следует граничное условие на разрыв касательной компоненты поля $\mathbf{E}$

$$\mathbf{n}_{21} \times [\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = -\mathbf{i}_m, \quad (6.2)$$

где $\mathbf{i}_m$ – поверхностная плотность магнитных токов, измеряемая в Вольтах на метр, $\mathbf{n}_{21}$ – единичный вектор нормали к границе раздела, проведенный во вторую среду со стороны первой. Таким образом, любой источник разрыва касательной компоненты поля $\mathbf{E}$ можно описать с помощью магнитных токов. На практике эквивалентный магнитный ток реализуют в виде кольцевого электрического тока или щелей в экране из идеального проводника [11].

Вернемся к математической постановке задачи. Векторы, связанные с электрическими источниками, пометим индексом (e), с магнитными – индексом (m). Тогда в силу принципа суперпозиции выражения для векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ будут состоять из двух частей, каждая из которых представляет собой вклад только электрических или только магнитных источников. Как и в случае с электрическими источниками, рассмотренном ранее, уравнения Максвелла и волновые уравнения на векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ представляются достаточно сложными для непосредственного решения, поэтому сразу перейдем к скалярным и векторным потенциалам. Везде далее предполагается, что все векторы имеют временную зависимость в виде $e^{i\omega t}$, поэтому будем записывать уравнения на комплексные амплитуды полей.

Порядок действий при решении:

1. рассмотрим случай только электрических источников, получим волновое уравнение на $\mathbf{A}^{(e)}$;
2. рассмотрим случай только магнитных источников, получим волновое уравнение на $\mathbf{A}^{(m)}$;

3. запишем полные выражения для полей $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ в виде суммы вкладов электрических и магнитных источников и сформулируем общую постановку задачи излучения.

Решение задачи

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{j}^{(m)} = 0$, $\rho^{(m)} = 0$. Система уравнений Максвелла (6.1) примет привычный вид

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H}^{(e)} = i\omega\varepsilon_r\varepsilon_0\mathbf{E}^{(e)} + \mathbf{j}^{(e)}, \\ \nabla \times \mathbf{E}^{(e)} = -i\omega\mu_r\mu_0\mathbf{H}^{(e)}, \\ \nabla \cdot (\varepsilon_r\varepsilon_0\mathbf{E}^{(e)}) = \rho^{(e)}, \\ \nabla \cdot (\mu_r\mu_0\mathbf{H}^{(e)}) = 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Определим векторы $\mathbf{E}^{(e)}$ и $\mathbf{H}^{(e)}$ в виде

$$\mathbf{E}^{(e)} = -\nabla\varphi^{(e)} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}^{(e)} = -\nabla\varphi^{(e)} - i\omega\mathbf{A}^{(e)}, \quad (6.4)$$

$$\mathbf{H}^{(e)} = \frac{1}{\mu_0\mu_r}\nabla \times \mathbf{A}^{(e)}. \quad (6.5)$$

При использовании готовых выражений важно помнить, что определения (6.4), (6.5) хотя и встречаются достаточно часто, не являются универсальными. Например, в [10] используется другое определение для вектора $\mathbf{B}$.

Подставим определения (6.4), (6.5) в первое уравнение системы (6.3) и преобразуем, используя правило раскрытия двойного векторного произведения и тождество в системе СИ $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$:

$$\frac{1}{\mu_r\mu_0}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}^{(e)}) = -i\omega\varepsilon_r\varepsilon_0 (\nabla\varphi^{(e)} + i\omega\mathbf{A}^{(e)}) + \mathbf{j}^{(e)}. \quad (6.6)$$

Преобразуем левую часть по правилу «бац минус цаб»

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}^{(e)}) - \Delta\mathbf{A}^{(e)} = -i\omega\frac{\varepsilon_r\mu_r}{c^2} (\nabla\varphi^{(e)} + i\omega\mathbf{A}^{(e)}) + \mu_r\mu_0\mathbf{j}^{(e)} \quad (6.7)$$

и запишем волновое уравнение в виде

$$\Delta \mathbf{A}^{(e)} + \varepsilon_r \mu_r \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A}^{(e)} + \mu_r \mu_0 \mathbf{j}^{(e)} = \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A}^{(e)} + i\omega \frac{\varepsilon_r \mu_r}{c^2} \varphi^{(e)} \right). \quad (6.8)$$

Волновое уравнение принимает простой вид в калибровке Лоренца (производная по времени заменена на $i\omega \cdot$)

$$\nabla \cdot \mathbf{A}^{(e)} + i\omega \frac{\varepsilon_r \mu_r}{c^2} \varphi^{(e)} = 0, \quad (6.9)$$

тогда уравнение (6.8) сводится к рассмотренному ранее уравнению Гельмгольца

$$\Delta \mathbf{A}^{(e)} + \varepsilon_r \mu_r \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A}^{(e)} = -\mu_r \mu_0 \mathbf{j}^{(e)}. \quad \blacksquare \quad (6.10)$$

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{j}^{(e)} = 0$, $\rho^{(e)} = 0$. Система уравнений Максвелла (6.1) примет вид

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H}^{(m)} = i\omega \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}^{(m)}, \\ \nabla \times \mathbf{E}^{(m)} = -i\omega \mu_r \mu_0 \mathbf{H}^{(m)} - \mathbf{j}^{(m)}, \\ \nabla \cdot (\varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}^{(m)}) = 0, \\ \nabla \cdot (\mu_r \mu_0 \mathbf{H}^{(m)}) = \rho^{(m)}. \end{cases} \quad (6.11)$$

Определим векторы $\mathbf{E}^{(m)}$ и $\mathbf{H}^{(m)}$ в виде

$$\mathbf{E}^{(m)} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \nabla \times \mathbf{A}^{(m)}. \quad (6.12)$$

$$\mathbf{H}^{(m)} = -\nabla \varphi^{(m)} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}^{(m)} = -\nabla \varphi^{(m)} - i\omega \mathbf{A}^{(m)}, \quad (6.13)$$

Подставим определения (6.12), (6.13) во второе уравнение системы (6.11) и преобразуем, используя правило раскрытия двойного векторного произведения и тождество в системе СИ $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$

$$-\frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}^{(m)}) = i\omega \mu_r \mu_0 (\nabla \varphi^{(m)} + i\omega \mathbf{A}^{(m)}) - \mathbf{j}^{(m)}, \quad (6.14)$$

Преобразуем левую часть по правилу «бац минус цаб»

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}^{(m)}) - \Delta \mathbf{A}^{(m)} = -i\omega \frac{\varepsilon_r \mu_r}{c^2} \left(\nabla \varphi^{(m)} + i\omega \mathbf{A}^{(m)} \right) + \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{j}^{(m)}, \quad (6.15)$$

и запишем волновое уравнение в виде

$$\Delta \mathbf{A}^{(m)} + \varepsilon_r \mu_r \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A}^{(m)} + \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{j}^{(m)} = \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A}^{(m)} + i\omega \frac{\varepsilon_r \mu_r}{c^2} \varphi^{(m)} \right). \quad (6.16)$$

Запишем выражение для калибровки Лоренца (производная по времени заменена на $i\omega \cdot$)

$$\nabla \cdot \mathbf{A}^{(m)} + i\omega \frac{\varepsilon_r \mu_r}{c^2} \varphi^{(m)} = 0, \quad (6.17)$$

тогда уравнение (6.16) сведется к виду

$$\Delta \mathbf{A}^{(m)} + \varepsilon_r \mu_r \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A}^{(m)} = -\varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{j}^{(m)}. \quad \blacksquare \quad (6.18)$$

Воспользуемся принципом суперпозиции и запишем полные выражения для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в общем случае, когда есть не только электрические, но и магнитные источники поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(e)} + \mathbf{E}^{(m)} = -\nabla \varphi^{(e)} - i\omega \mathbf{A}^{(e)} - \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \nabla \times \mathbf{A}^{(m)}, \quad (6.19)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(e)} + \mathbf{H}^{(m)} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \nabla \times \mathbf{A}^{(e)} - \nabla \varphi^{(m)} - i\omega \mathbf{A}^{(m)}. \quad (6.20)$$

Полученный результат для напряженностей полей содержит не только векторные, но и скалярные потенциалы, для определения которых нужно решать отдельные уравнения. Для того, чтобы этого не делать, выразим скалярные потенциалы через векторные, воспользовавшись калибровками Лоренца, получим

$$\mathbf{E} = \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}^{(e)})}{i\omega \varepsilon_r \mu_r / c^2} - i\omega \mathbf{A}^{(e)} - \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \nabla \times \mathbf{A}^{(m)}, \quad \blacksquare \quad (6.21)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \nabla \times \mathbf{A}^{(e)} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}^{(m)})}{i\omega \varepsilon_r \mu_r / c^2} - i\omega \mathbf{A}^{(m)}. \quad \blacksquare \quad (6.22)$$

Таким образом, при наличии и электрических, и магнитных источников задача излучения может быть сформулирована следующим образом: по заданным функциям $\mathbf{j}^{(e)}$ и $\mathbf{j}^{(m)}$ требуется определить неизвестные выражения для векторных потенциалов $\mathbf{A}^{(e)}$ и $\mathbf{A}^{(m)}$, решив уравнения (6.10), (6.18), а затем вычислить распределения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ с помощью выражений (6.21), (6.22).

6.2 Пример 2. Функция Грина одномерного уравнения Гельмгольца

Вычислите функцию Грина одномерного скалярного уравнения Гельмгольца

$$\Delta_1 G(x, x') + k^2 G(x, x') = \delta(x - x'),$$

перейдя к Фурье-образам и выполнив интегрирование на плоскости комплексного переменного.

Общий комментарий

В предыдущей задаче было показано, что решение задачи излучения сводится к решению дифференциальных уравнений Гельмгольца вида

$$\Delta A(\mathbf{r}) + k^2 A(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad (6.23)$$

где $A(\mathbf{r})$ – это неизвестная компонента векторного потенциала (электрического или магнитного), а $f(\mathbf{r})$ – известная функция, связанная с плотностью распределения токов (электрических или магнитных). Один из возможных способов решения такого уравнения – использование функ-

ции Грина. Функция Грина – это реакция системы на δ -образное возбуждение в точке $\mathbf{r}'$, т.е. решение уравнения

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (6.24)$$

Вычислив функцию $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, в случае неограниченного пространства решение исходного уравнения получим в виде

$$A(\mathbf{r}) = \int_{V'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') dV', \quad (6.25)$$

где интегрирование проводится по всем точкам $\mathbf{r}'$, где функция $f(\mathbf{r}')$ отлична от нуля. Выражение (6.25) получается в результате подстановки функции Грина и решения уравнения (6.23) во вторую формулу Грина с учетом условий излучения (подробный вывод приведен в [10]).

Таким образом, вычисленная функция Грина конкретного дифференциального оператора позволяет записать решение соответствующего ему дифференциального уравнения в виде интеграла (6.25). Строгий расчет полученного интеграла может быть достаточно сложным, поэтому аналогично тому, как это было при решении уравнения Пуассона, часто прибегают к приближенным методам (переход в дальнюю зону, разложение по мультиполям и др.), о чем пойдет речь в следующих разделах.

В качестве примера вычислим функцию Грина одномерного оператора Гельмгольца, решив уравнение (6.24).

Порядок действий при решении:

1. представим δ -функцию и функцию Грина в виде интегралов от Фурье-образов;
2. подставим интегралы в уравнение (6.38) и определим Фурье-образ функции Грина;
3. выполним преобразование Фурье от Фурье-образа функции Грина и получим ответ.

Решение задачи

Запишем в явном виде оператор Лапласа и положим $x' = 0$, тогда определение функции Грина

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x) + k^2 G(x) = \delta(x). \quad (6.26)$$

Представим δ -функцию и функцию Грина в виде интегралов от Фурье-образов [5]

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{G}(\kappa) e^{i\kappa x} d\kappa, \quad (6.27)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\kappa x} d\kappa. \quad (6.28)$$

Подставим интегралы (6.27), (6.28) в уравнение (6.26) и рассмотрим только подынтегральные выражения, сократив экспоненты,

$$-\kappa^2 \tilde{G}(\kappa) + k^2 \tilde{G}(\kappa) = 1, \quad (6.29)$$

откуда

$$\tilde{G}(\kappa) = \frac{1}{k^2 - \kappa^2}. \quad (6.30)$$

Итак, Фурье-образ функции Грина $\tilde{G}(\kappa)$ найден. Перейдем к самой сложной части задачи – вычислению обратного преобразования Фурье.

С учетом найденного Фурье-образа (6.30) и выражения (6.27) функция Грина может быть вычислена как

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\kappa x}}{k^2 - \kappa^2} d\kappa = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\kappa x}}{(k - \kappa)(k + \kappa)} d\kappa. \quad (6.31)$$

Возьмем интеграл (6.31) с помощью теоремы о вычетах [22, 44]. У подынтегрального выражения есть два полюса в точках $\kappa = \pm k$. Воспользуемся **принципом предельного поглощения**. Его суть заключается в том, чтобы отбросить нефизичные решения, соответствующие

волнам, приходящим из бесконечности в точку расположения источника. Для этого предположим, что у волнового числа k есть малая мнимая добавка $k \rightarrow k - i\chi$, где $\chi > 0$ (волна с фазовым множителем $e^{i\omega t - i(k - i\chi)x}$ затухает на $x = +\infty$), вычислим интеграл (6.31), а затем перейдем к пределу $\chi \rightarrow 0$.

С учетом сказанного, интеграл (6.31) примет вид

$$G(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\kappa x}}{(\kappa - (k - i\chi))(\kappa + (k - i\chi))} d\kappa. \quad (6.32)$$

Рассмотрим случай положительных координат $x > 0$, будем интегрировать по полуокружности Γ_{R+} , диаметр которой совпадает с отрезком вещественной оси (Рис. 6.1), а остальная часть контура лежит в верхней полуплоскости. Полуокружность была выбрана таким образом, чтобы при стремлении $R \rightarrow \infty$ для $x > 0$ интеграл сходиллся.

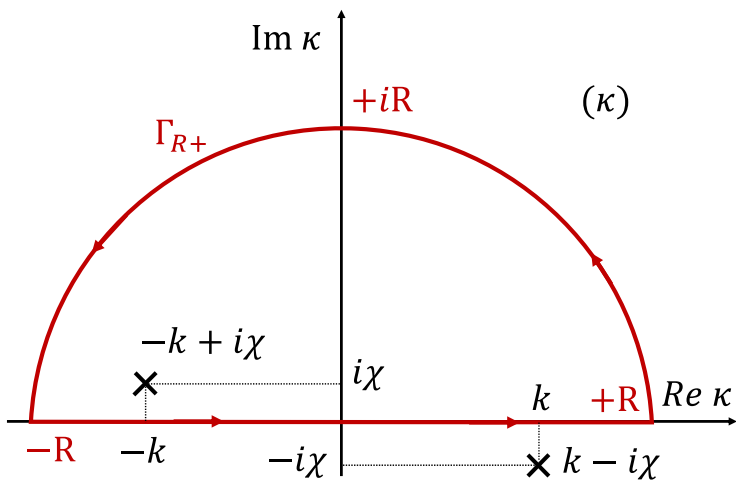


Рис. 6.1: Контур интегрирования в случае $x > 0$

Далее устремим $R \rightarrow +\infty$ и воспользуемся стандартной техникой вычисления интегралов с помощью теоремы о вычетах и леммы Жордана

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\kappa x}}{(\kappa - (k - i\chi))(\kappa + (k - i\chi))} d\kappa &= \\
 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_{R+}} \frac{e^{i\kappa x}}{(\kappa - (k - i\chi))(\kappa + (k - i\chi))} d\kappa = \\
 &= 2\pi i \operatorname{res}|_{\kappa = -k + i\chi} \left\{ \frac{e^{i\kappa x}}{(\kappa - (k - i\chi))(\kappa + (k - i\chi))} \right\} = 2\pi i \frac{e^{i(-k + i\chi)x}}{2(-k + i\chi)}.
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

В этом месте перейдем к пределу $\chi \rightarrow 0$ и запишем выражение для функции Грина в случае $x > 0$

$$G(x) = \frac{i}{2k} e^{-ikx}, \quad \text{для } x > 0. \tag{6.34}$$

Рассмотрение случая $x < 0$ производится аналогично, интегрирование следует производить по контуру Γ_{R-} (Рис. 6.2).

Ответ для $x < 0$

$$G(x) = \frac{i}{2k} e^{ikx}, \quad \text{для } x < 0. \tag{6.35}$$

Объединяя (6.34) и (6.35) и сдвинув особенность δ -функции обратно в точку x' , получим окончательный ответ

$$G(x, x') = \frac{i}{2k} e^{-ik|x-x'|}. \quad \blacksquare \tag{6.36}$$

Характер решения – две плоские волны, расходящиеся в обе стороны от источника, расположенного в точке x' .

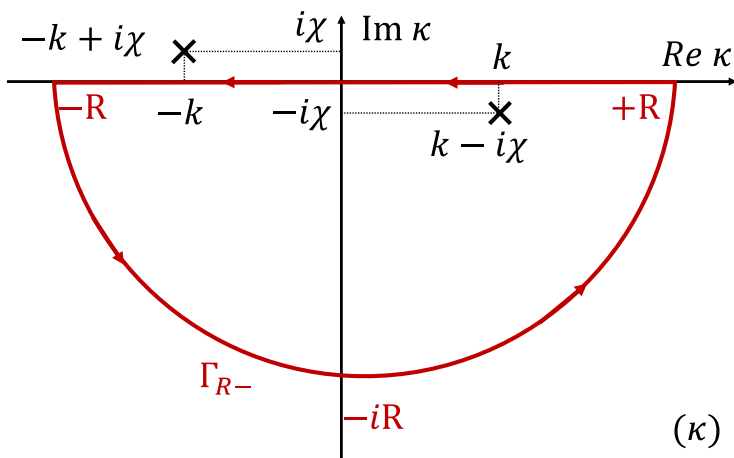


Рис. 6.2: Контур интегрирования в случае $x < 0$

6.3 Пример 3. Поле плоского листа электрического тока

Определите поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, создаваемые электрическим током, плотность которого в декартовой системе координат в свободном пространстве задана в виде

$$\mathbf{j}^e = i_0 e^{-i\beta x} \delta(y) \mathbf{e}_x.$$

Общий комментарий

В задаче требуется определить поля, создаваемые распределением электрического тока в виде плоского листа, по которому вдоль одной

из координат бежит волна с волновым числом β . При этом направление смещения линий постоянной фазы совпадает с направлением протекания тока (Рис. 6.3).

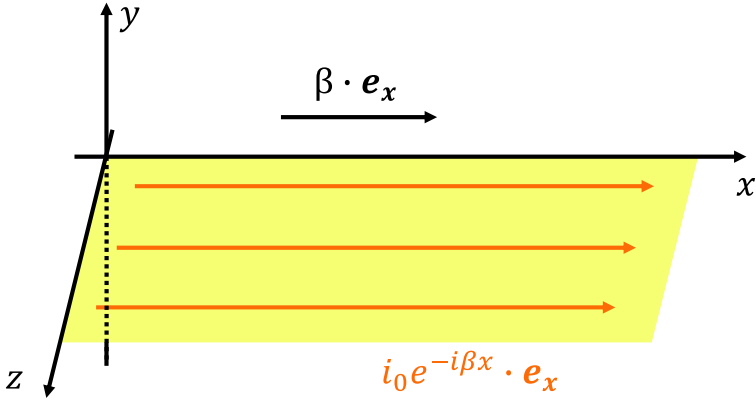


Рис. 6.3: Плоскость электрического тока в качестве источника электромагнитного поля

Решим эту задачу, воспользовавшись выражением для общего решения уравнения Гельмгольца в неограниченном пространстве:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mu_{\text{т}} \int_{V'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{j}^e(\mathbf{r}') dV', \quad (6.37)$$

где интегрирование проводится по всем точкам $\mathbf{r}'$, в которых плотность тока $\mathbf{j}^e(\mathbf{r}')$ отлична от нуля, а функция Грина – это решение уравнения

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (6.38)$$

В определение функции Грина (6.38) входит $+\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, поэтому в записи общего решения (6.37) стоит $-\mu_0 \mu_{\text{т}} \mathbf{j}^e(\mathbf{r}')$, т.к. в исходном уравнении

Гельмгольца на векторный потенциал в правой части равенства должна быть функция $-\mu_0\mu_r\mathbf{j}^e(\mathbf{r}')$. Иногда для удобства минус или абсолютную магнитную проницаемость вносят в правую часть уравнения (6.38), тогда в записи общего решения (6.37) эти константы отсутствуют. Итоговый ответ для векторного потенциала от этого не зависит, но при использовании готовых выражений для функции Грина или общего решения уравнения Гельмгольца важно проверить, что все знаки и размерности учтены верно.

Порядок действий при решении:

1. выбрать удобную форму записи функции Грина, определив наиболее естественную систему координат и форму записи – координатную или спектральную;
2. подставить функцию плотности тока и выбранную функцию Грина в общее решение (6.37), найти векторный потенциал $\mathbf{A}$;
3. определить выражения для полей, воспользовавшись определением поля $\mathbf{B}$ через векторный потенциал и одним из уравнений Максвелла или выражениями (6.21), (6.22).

Решение задачи

Существует несколько различных форм записи функции Грина для трехмерного пространства. В этой задаче удобно воспользоваться формой записи в декартовых координатах в спектральном представлении после интегрирования по одному из волновых чисел (см. [10] стр. 53, выражение (2.26) с точностью до минуса из-за отличия определений)

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ik_x(x-x')-ik_z(z-z') \pm \sqrt{k_x^2+k_z^2-k_0^2}(y-y')}}{\sqrt{k_x^2+k_z^2-k_0^2}} dk_x dk_z. \quad (6.39)$$

В показателе экспоненты знак $-$ отвечает случаю $y > y'$, а знак $+$ – случаю $y < y'$, $k_0 = \omega/c$. Вывод этого выражения в учебнике [10] опущен, поэтому предложен в качестве одного из упражнений среди задач для самостоятельного решения после главы 6.

Мы предполагаем лист тока расположенным в вакууме. По условию у вектора плотности тока есть только одна компонента, поэтому $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x$, где

$$A_x(\mathbf{r}) = -\mu_0 \int_{V'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') j_x^e(\mathbf{r}') dV'. \quad (6.40)$$

Подставим в это выражение функцию плотности тока из условия и функцию Грина (6.39)

$$A_x(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{8\pi^2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-i(k_x(x-x') + k_z(z-z') \pm \sqrt{k_x^2 + k_z^2 - k_0^2}(y-y'))}}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2 - k_0^2}} dk_x dk_z \right) \times (i_0 e^{-i\beta x'} \delta(y')) dx' dy' dz'. \quad (6.41)$$

В выражении (6.41) выполним интегрирование по y' , чтобы избавиться от одной δ -функции. Воспользуемся два раза формулой интегрального представления δ -функции

$$\delta(k_x - \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(k_x - \beta)x'} dx', \quad (6.42)$$

$$\delta(k_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ik_z z'} dz', \quad (6.43)$$

после чего проинтегрируем по оставшимся переменным k_x, k_z . В результате получим

$$A_x(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 i_0}{2} \frac{e^{-i\beta x} e^{\pm \sqrt{\beta^2 - k_0^2} y}}{\sqrt{\beta^2 - k_0^2}}, \quad (6.44)$$

в показателе экспоненты знак $-$ отвечает случаю $y > 0$, знак $+$ – случаю $y < 0$. Определение поля $\mathbf{B}$ через векторный потенциал

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (6.45)$$

Подставим (6.44) с учетом $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x$ в (6.45), получим

$$\mathbf{B} = \mp \frac{\mu_0 i_0}{2} e^{-i\beta x} e^{\pm \sqrt{\beta^2 - k_0^2} y} \mathbf{e}_z. \quad \blacksquare \quad (6.46)$$

Далее воспользуемся ответом для поля $\mathbf{B}$ и уравнением Максвелла, содержащим $\nabla \times \mathbf{H}$, чтобы вычислить поле $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = i \frac{i_0 \eta_0}{2} \frac{\sqrt{\beta^2 - k_0^2}}{k_0} e^{-i\beta x \pm \sqrt{\beta^2 - k_0^2} y} \mathbf{e}_x \mp \frac{i_0 \eta_0}{2} \frac{\beta}{k_0} e^{-i\beta x \pm \sqrt{\beta^2 - k_0^2} y} \mathbf{e}_y, \quad \blacksquare \quad (6.47)$$

где $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ – волновое сопротивление (импеданс) вакуума. Во всех выражениях нижние знаки отвечают случаю $y > 0$, верхние – случаю $y < 0$.

В случае $\beta < k_0$ решение – плоские волны, расходящиеся от листа с током в плоскости $y = 0$, с волновым вектором k_y , удовлетворяющим равенству $\beta^2 + k_y^2 = k_0^2$. Напротив, при $\beta > k_0$ поле локализовано вблизи листа с током и экспоненциально затухает при удалении от него.

6.4 Пример 4. Поле нити магнитного тока

Определите поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, создаваемые магнитным током, плотность которого в цилиндрической системе координат задана в виде

$$\mathbf{j}^m = U_0 e^{-i\beta z} \frac{\delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0)}{\rho} \mathbf{e}_z.$$

Общий комментарий

В задаче требуется определить поля, создаваемые распределением магнитного тока в виде смещенной относительно начала координат нити, вдоль которой бежит волна с волновым числом β (Рис. 6.4).

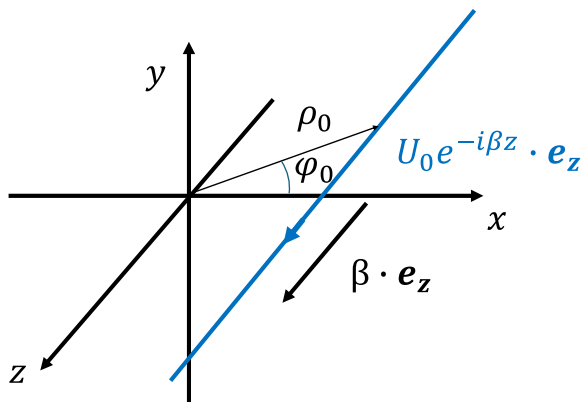


Рис. 6.4: Нить магнитного тока в качестве источника электромагнитного поля

Будем решать эту задачу аналогично предыдущей. Все отличия между двумя примерами заключаются только в том, что здесь источник – магнитный ток, а не электрический. Также стоит обратить внимание на форму записи δ -функции в цилиндрической системе координат. Деление на ρ возникает в выражении для δ -функции в цилиндрических координатах из-за якобиана перехода от декартовых координат к цилиндрическим.

Порядок действий при решении:

1. выбрать наиболее естественную форму записи функции Грина, определив удобную систему координат и форму записи – координатную или спектральную;
2. подставить функцию плотности тока и выбранную функцию Грина в общее решение, найти векторный потенциал $\mathbf{A}$;

3. определить выражения для полей, воспользовавшись определением поля $\mathbf{D}$ через магнитный векторный потенциал и одним из уравнений системы Максвелла или выражениями (6.21), (6.22).

Решение задачи

В этой задаче удобно воспользоваться формой записи в цилиндрических координатах в виде ряда (см. [10]; стр. 55, выражение (2.29) с точностью до минуса из-за отличия определений)

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi-\varphi')} \int_{\mathbb{R}} e^{-ih(z-z')} J_n(\nu\rho') H_n^{(2)}(\nu\rho) dh, \quad (6.48)$$

где $\nu(h) = -i\sqrt{h^2 - k_0^2}$,

где $k_0 = \omega/c$, J_n – функция Бесселя порядка n , $H_n^{(2)}$ – функция Ганкеля второго рода порядка n . Вывод этого выражения подробно пояснен в [10] в параграфе 2.4. В выражении (6.48) выбран именно такой порядок функций Бесселя и Ганкеля, т.к. далее нить будет смещена в точку $\rho' = 0$, поэтому для любого ρ выполняется $\rho > \rho'$.

По условию у вектора плотности тока есть только одна компонента, поэтому $\mathbf{A} = A_z \mathbf{e}_z$, где

$$A_z(\mathbf{r}) = -\varepsilon_0 \int_{V'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') j_z^{\text{m}}(\mathbf{r}') dV'. \quad (6.49)$$

= Подставим в это выражение функцию плотности тока и функцию Грина

$$A_z(\mathbf{r}) = -\frac{iU_0\varepsilon_0}{8\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi-\varphi')} \int_{\mathbb{R}} e^{-ih(z-z')} J_n(\nu\rho') H_n^{(2)}(\nu\rho) dh \right) \times \left(e^{-i\beta z'} \frac{\delta(\rho' - \rho_0) \delta(\varphi' - \varphi_0)}{\rho'} \right) d\varphi' \rho' d\rho' dz' \quad (6.50)$$

где $\nu(h) = -i\sqrt{h^2 - k_0^2}$. Положим $\varphi_0 = 0$ и проинтегрируем по φ' , а затем проинтегрируем по ρ'

$$\begin{aligned} A_z(\mathbf{r}) &= -\frac{iU_0\varepsilon_0}{8\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\varphi-\varphi')} \int_{\mathbb{R}} e^{-ih(z-z')} J_n(\nu\rho') H_n^{(2)}(\nu\rho) dh \right) \\ &\quad \times \left(e^{-i\beta z'} \frac{\delta(\rho' - \rho_0)\delta(\varphi')}{\rho'} \right) d\varphi' \rho' d\rho' dz' = \\ &= -\frac{iU_0\varepsilon_0}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-in\varphi} e^{-ih(z-z')} J_n(\nu\rho_0) H_n^{(2)}(\nu\rho) dh e^{-i\beta z'} dz'. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой интегрального представления δ -функции

$$\delta(h - \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(h-\beta)z'} dz', \quad (6.51)$$

и избавимся таким образом от интеграла по dz'

$$A_z(\mathbf{r}) = -\frac{iU_0\varepsilon_0}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta(h - \beta) e^{-in\varphi} e^{-ihz} J_n(\nu\rho_0) H_n^{(2)}(\nu\rho) dh, \quad (6.52)$$

после чего проинтегрируем по h , учтем определение ν и получим

$$A_z(\mathbf{r}) = -\frac{iU_0\varepsilon_0}{4} e^{-i\beta z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\varphi} J_n \left(\sqrt{k_0^2 - \beta^2} \rho_0 \right) H_n^{(2)} \left(\sqrt{k_0^2 - \beta^2} \rho \right). \quad (6.53)$$

Сдвинем источник магнитного тока в начало системы координат $\rho_0 = 0$ и воспользуемся свойством функций Бесселя

$$J_n(0) = \delta_{n0}, \quad (6.54)$$

где δ_{n0} – дельта-символ Кронекера, равный единице для $n = 0$ и равный нулю во всех остальных случаях. Тогда в ответ для проекции на z магнитного векторного потенциала войдет только слагаемое с нулевым номером, поэтому

$$A_z(\mathbf{r}) = \frac{U_0\varepsilon_0}{4i} e^{-i\beta z} H_0^{(2)} \left(\sqrt{k_0^2 - \beta^2} \rho \right). \quad (6.55)$$

Окончательный ответ для напряженностей полей получен аналогично тому, как это было сделано в предыдущей задаче. Выражения для полей

$$\mathbf{E} = -\frac{U_0 \sqrt{k_0^2 - \beta^2}}{4i} e^{-i\beta z} H_1^{(2)} \left(\sqrt{k_0^2 - \beta^2} \rho \right) \mathbf{e}_\varphi, \quad \blacksquare \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \frac{U_0 \beta \sqrt{k_0^2 - \beta^2}}{4i k_0 \eta_0} e^{-i\beta z} H_1^{(2)} \left(\sqrt{k_0^2 - \beta^2} \rho \right) \mathbf{e}_r - \\ & - \frac{U_0 (k_0^2 - \beta^2)}{4k_0 \eta_0} e^{-i\beta z} H_0^{(2)} \left(\sqrt{k_0^2 - \beta^2} \rho \right) \mathbf{e}_z. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (6.57)$$

В процессе вывода были использованы тождества

$$\frac{dH_0^{(2)}(x)}{dx} = -H_1^{(2)}(x), \quad (6.58)$$

$$\frac{d}{dx} \left(x H_1^{(2)}(x) \right) = x H_0^{(2)}(x). \quad (6.59)$$

Для того, чтобы получить распределения полей, создаваемых нитью, расположенной в точке, отличной от начала системы координат, требуется в выражениях (6.56), (6.57) выполнить замену $\rho \rightarrow |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0|$, где $\boldsymbol{\rho}_0$ – радиус вектор, проведенный в точку расположения нити.

6.5 Пример 5. Диаграмма направленности прямоугольного распределения электрического тока над идеальным магнетиком

В пустом пространстве расположен сторонний источник электрического тока, комплексная амплитуда плотности тока которого задана выражением

$$\mathbf{j}^e = I_0 \delta(x) \delta(y) \theta(a/2 - |z|) \mathbf{e}_z,$$

где функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Определите диаграмму направленности описанного распределения тока в Е-плоскости (плоскость чертежа). Как изменится ответ, если в пространстве дополнительно расположить плоскость из идеального проводника или идеального магнетика (РМС), совпадающую с плоскостью $z = -d$ ($d > a/2$)?

Общий комментарий

Распределение электрического тока, описанное в условии, схематично изображено на Рис. 6.5. Здесь прямоугольный профиль желтого цвета показывает форму функции распределения тока, а не точки его протекания: это синфазный ток, равномерно распределенный по отрезку бесконечно тонкого провода конечной длины. Найдем диаграмму направленности поля, излучаемого такой моделью проволочной антенны.

На первом этапе определим диаграмму направленности в случае, когда плоскость из РМС отсутствует. Для этого воспользуемся принципом суперпозиции и разложим прямоугольное распределение тока по элементарным электрическим диполям. Электрическое поле каждого из диполей в отдельности известно. В дальней зоне ($kr \gg 1$) напряженности полей, создаваемых электрическим диполем с параметрами I_0 , l , помещенным в начало сферической системы координат и ориентированным вдоль оси z , задаются выражениями [8]

$$\mathbf{H} = \frac{ikI_0l}{4\pi} \sin \vartheta \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{e}_\varphi, \quad (6.60)$$

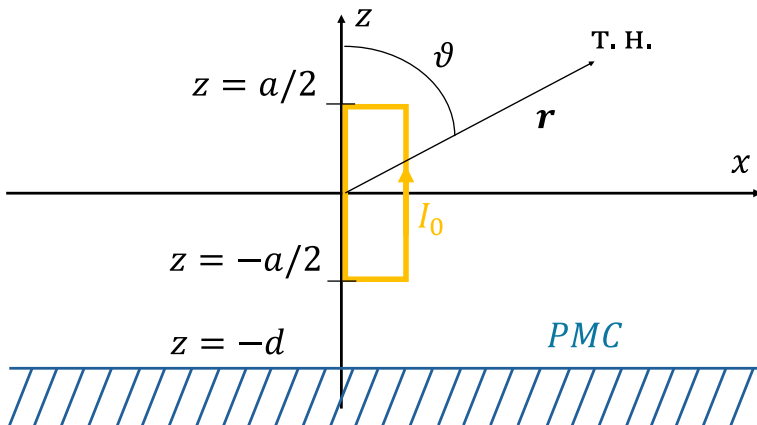


Рис. 6.5: Прямоугольное распределение электрического тока над плоскостью из РМС

$$\mathbf{E} = \frac{ikI_0l}{4\pi}\eta_0 \sin \vartheta \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{e}_{\vartheta}. \quad (6.61)$$

Отдельно обсудим способ сложения полей в дальней зоне. Для этого рассмотрим случай, когда в пространстве расположены два одинаковых источника поля (см. Рис. 6.6).

Пусть первый источник находится в начале системы координат, а второй – в точке $x = \Delta$. Суммарное поле в точке наблюдения в дальней зоне равно сумме полей каждого из источников в отдельности, тогда

$$\mathbf{E} = \frac{ikI_0l\eta_0}{4\pi} \left(\sin \vartheta_1 \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} \mathbf{e}_{\vartheta_1} + \sin \vartheta_2 \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} \mathbf{e}_{\vartheta_2} \right). \quad (6.62)$$

Упростим выражение (6.62), воспользовавшись тем, что $kr \gg 1$. Поскольку радиус-векторы проведены в бесконечно удаленную точку, будем считать, что $\vartheta_1 \approx \vartheta_2 \equiv \vartheta$, так как в дальней зоне $\Delta/r \ll 1$. По этой же при-

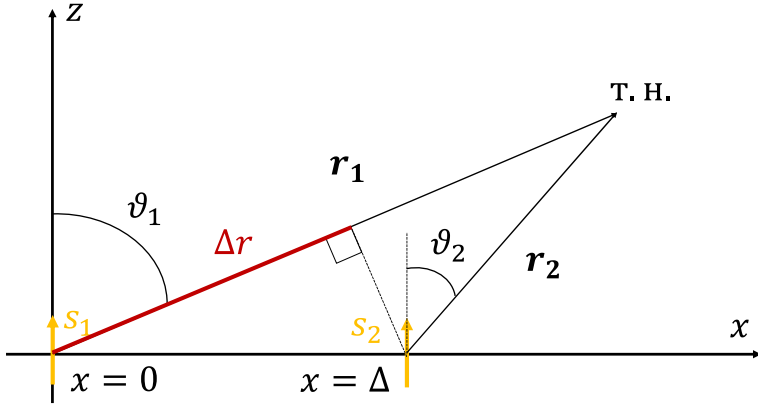


Рис. 6.6: Пояснение к переходу в дальнюю зону

чине $1/r_1 \approx 1/r_2 \equiv 1/r$. Однако различием между r_1, r_2 **нельзя пренебречь в показателе комплексной экспоненты**. Действительно, комплексная экспонента – периодическая функция, и даже малое различие ее аргумента может привести к большим отличиям в значении функции. Рассмотрим пример. Пусть $r_1 = 1000\lambda$, а $r_2 = 999.75\lambda$. Тогда $1/r_1 \approx 1/r_2$, но $e^{-ikr_1} = 1$, в то время как $e^{-ikr_2} = i$.

Для двух источников, изображенных на Рис. 6.6, запишем

$$e^{-ikr_1} \equiv e^{-ikr}, \quad (6.63)$$

$$e^{-ikr_2} \approx e^{-ik(r-\Delta r)} = e^{-ik(r-\Delta \sin \vartheta)}. \quad (6.64)$$

Тогда выражение (6.62) в дальней зоне

$$\mathbf{E} \approx \frac{ikI_0 l \eta_0}{4\pi} \sin \vartheta \left(1 + e^{ik\Delta \sin \vartheta} \right) \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{e}_\vartheta. \quad (6.65)$$

В (6.65) можно выделить размерную константу, угловую зависимость одного элемента ($\sin \vartheta$), угловую зависимость, определяемую взаимным расположением и свойствами источников $(1 + e^{ik\Delta \sin \vartheta})$, а также множитель сферической волны. Модуль нормированной на единицу угловой зависимости излучения принято называть **диаграммой направленности** системы токов и обозначать $F(\vartheta, \varphi)$. Воспользуемся формулой Эйлера и выделим в (6.65) косинус

$$\begin{aligned} \left| 1 + e^{ik\Delta \sin \vartheta} \right| &= \left| e^{ik\Delta \sin \vartheta/2} \cdot (e^{-ik\Delta \sin \vartheta/2} + e^{ik\Delta \sin \vartheta/2}) \right| = \\ &= 2 \left| \cos \left(\frac{k\Delta}{2} \sin \vartheta \right) \right|, \end{aligned} \quad (6.66)$$

откуда следует, что в данном примере сечение диаграммы плоскостью чертежа (Е-плоскостью)

$$F(\vartheta) = F_0 \left| \sin \vartheta \cos \left(\frac{k\Delta}{2} \sin \vartheta \right) \right|, \quad (6.67)$$

где F_0 – нормировочная константа, подобранная таким образом, чтобы $\max F(\vartheta) = 1$.

После нахождения диаграммы направленности распределения тока в свободном пространстве учтем влияние плоскости из идеального магнитного проводника (РМС), сложим поле источника с полем его изображения, свойства которого определим из теоремы единственности.

Порядок действий при решении:

1. разложим прямоугольное распределение тока по элементарным электрическим диполям;
2. сложим поля диполей в дальней зоне и определим диаграмму направленности распределения тока в свободном пространстве;
3. учтем влияние плоскости из РМС, сложив поле исходного тока с полем его изображения.

Решение задачи

Разложим распределение тока по диполям. Проекция напряженности электрического поля каждого из диполей

$$dE_{\vartheta} = \frac{ik\eta_0}{4\pi} I(z) dz \sin \vartheta \frac{e^{-ikr(z)}}{r(z)} \equiv A I(z) dz \sin \vartheta \frac{e^{-ikr(z)}}{r(z)}. \quad (6.68)$$

Полное поле

$$E_{\vartheta} = A \sin \vartheta \frac{e^{-ikr}}{r} \int_{-a/2}^{a/2} I_0 e^{ikz \cos \vartheta} dz \propto \sin \vartheta \operatorname{sinc} \left(\frac{ka}{2} \cos \vartheta \right) \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad (6.69)$$

где r – длина радиус-вектора, проведенного из начала системы координат.

Диаграмма направленности распределения тока в свободном пространстве

$$F(\vartheta) = F'_0 \left| \sin \vartheta \operatorname{sinc} \left(\frac{ka}{2} \cos \vartheta \right) \right|, \quad \blacksquare \quad (6.70)$$

где F'_0 – нормировочная константа, определенная из условия $\max |F(\vartheta)| = 1$.

Согласно теореме единственности [43], если два распределения токов в пространстве удовлетворяют одинаковым граничным условиям, поля, создаваемые этими разными распределениями тока, совпадают. Воспользуемся этим утверждением и заменим поле электрического тока над РМС на сумму полей электрического тока и его изображения. Направление тока-изображения легко определить из граничных условий на поверхности РМС (касательная компонента поля $\mathbf{H}$ равна нулю) и выражений для полей диполя Герца (6.60), (6.61). На Рис. 6.7 показаны все возможные случаи взаимного расположения вертикального или горизонтального электрического или магнитного тока над идеальным электрическим (РЕС) или магнитным (РМС) проводником.

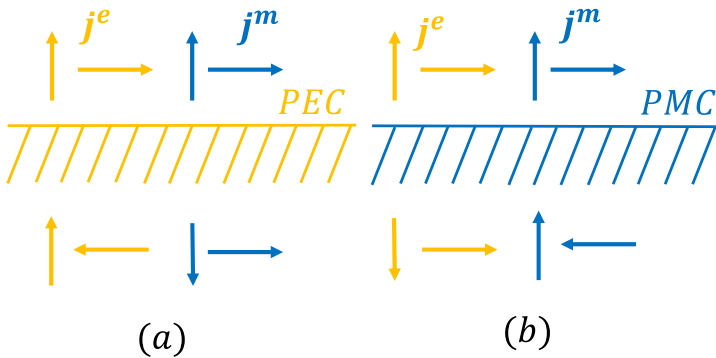


Рис. 6.7: Изображения токов в PEC (a) и PMC (b)

Решаемой задаче соответствует крайний левый случай под буквой (b). Отсюда выражение для диаграммы направленности в присутствии плоскости из PMC

$$\begin{aligned}
 F(\vartheta) &= F'_0 \left| \sin \vartheta \operatorname{sinc} \left(\frac{ka}{2} \cos \vartheta \right) \left(e^{ikd \cos \vartheta} - e^{-ikd \cos \vartheta} \right) \right| = \\
 &= F_0 \left| \sin \vartheta \operatorname{sinc} \left(\frac{ka}{2} \cos \vartheta \right) \sin (kd \cos \vartheta) \right|, \quad \blacksquare
 \end{aligned} \tag{6.71}$$

где F_0 – нормировочная константа, определенная из условия $\max |F(\vartheta)| = 1$.

6.6 Пример 6. Диаграмма направленности одномерной антенной решетки из коллинеарных диполей

N диполей Герца расположены коллинеарно вдоль оси z и образуют решетку с периодом $T = \lambda/2$. Амплитуды всех диполей одинаковые, а фазы образуют арифметическую прогрессию с шагом φ . Определите диаграмму направленности описанной антенной решетки.

Общий комментарий

Одномерная антенная решетка, описанная в условии задачи, схематично изображена на Рис. 6.8.

Найдем распределение поля в дальней зоне, создаваемое подобным набором источников, сложив их поля. При этом учтем, что в дальней зоне разность фазы излучения источников определяется не только взаимным расположением элементов (пространственная разность хода), но и дополнительным набегом фазы в виде арифметической прогрессии (фазовое распределение по элементам решетки). Для перехода в дальнюю зону и расчета диаграммы направленности воспользуемся всеми приближениями, подробно описанными в разборе предыдущей задачи. Порядок действий при решении:

1. представим полное поле в дальней зоне в виде суммы полей каждого из элементов;
2. перейдем к пределу $kr \gg 1$ и получим окончательное выражение для диаграммы направленности.

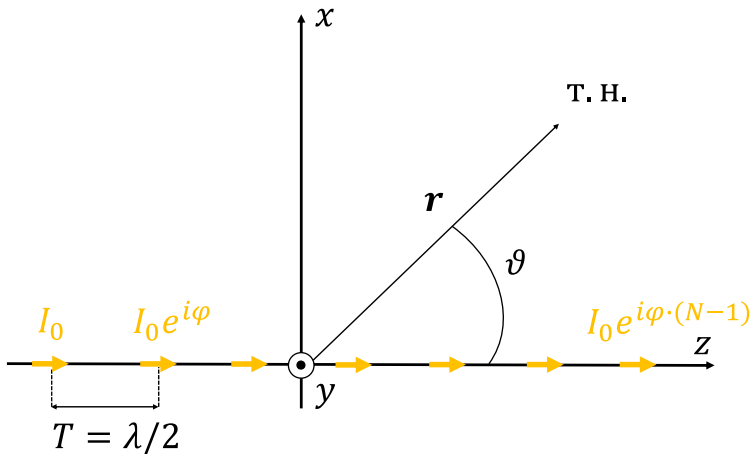


Рис. 6.8: Одномерная антенная решетка из коллинеарных диполей

Решение задачи

Запишем проекцию поля отдельного элемента с номером n в виде

$$E_{\vartheta}^{(n)} = A I_0 e^{in\varphi} \sin \vartheta \frac{e^{-ikr(z_n)}}{r(z_n)}, \quad (6.72)$$

где $r(z_n)$ – длина радиус-вектора, проведенного из диполя, расположенного в точке z_n , в дальнюю зону. Полное поле системы из N элементов

$$E_{\vartheta} = A I_0 \sin \vartheta \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\varphi} \frac{e^{-ikr(z_n)}}{r(z_n)}. \quad (6.73)$$

Перейдем к пределу $kr \gg 1$, тогда

$$\frac{e^{-ikr(z_n)}}{r(z_n)} \approx \frac{e^{-ikr}}{r} e^{i\varphi_0 + ikT \cos \vartheta n}, \quad (6.74)$$

где φ_0 – это некоторая начальная фаза, определяемая точкой расположения нулевого элемента. Подставляя (6.74) в (6.73), получим

$$E_{\vartheta} \propto \frac{e^{-ikr}}{r} \sin \vartheta \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(kT \cos \vartheta + \varphi)}. \quad (6.75)$$

По условию, $kT = 2\pi/\lambda \times \lambda/2 = \pi$, поэтому

$$E_{\vartheta} \propto \frac{e^{-ikr}}{r} \sin \vartheta \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(\pi \cos \vartheta + \varphi)}, \quad (6.76)$$

тогда выражение для диаграммы направленности в Е-плоскости

$$F(\vartheta) = F'_0 \left| \sin \vartheta \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(\pi \cos \vartheta + \varphi)} \right|, \quad (6.77)$$

где F'_0 – нормировочная константа, подобранная из условия $\max F(\vartheta) = 1$. Внутри модуля стоит сумма геометрической прогрессии, для которой известно

$$\sum_{i=0}^{N-1} q^i = \frac{1 - q^N}{1 - q}. \quad (6.78)$$

После упрощения получим

$$\begin{aligned} F(\vartheta) &= F'_0 \left| \sin \vartheta \frac{1 - e^{iN(\pi \cos \vartheta + \varphi)}}{1 - e^{i(\pi \cos \vartheta + \varphi)}} \right| = \\ &= F'_0 \left| \sin \vartheta \frac{e^{iN(\pi \cos \vartheta + \varphi)/2} - e^{-iN(\pi \cos \vartheta + \varphi)/2}}{e^{i(\pi \cos \vartheta + \varphi)/2} - e^{-i(\pi \cos \vartheta + \varphi)/2}} \right| = \\ &= F'_0 \left| \sin \vartheta \frac{\sin(N\psi/2)}{\sin(\psi/2)} \right|, \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (6.79)$$

где введено обозначение $\psi = \pi \cos \vartheta + \varphi$. Диаграмма направленности имеет ярко выраженные максимумы при $\psi/2 = \pi m$. Благодаря выбору периода $T = \lambda/2$ остается только один главный луч, усиленный в N раз в

направлении $\psi = 0$, то есть $\vartheta = \arccos(-\varphi/\pi)$. Из выражения (6.79) следует, что за счет изменения относительной фазы излучателей φ можно управлять формой диаграммы направленности, в том числе и направлением ее главного максимума. Таким образом, периодически изменяя распределение фазы по отдельным элементам, можно добиться того, что главный луч диаграммы направленности будет сканировать определенный сектор углов в пространстве, причем скорость сканирования может быть заметно выше, чем при механическом повороте антенного элемента. На этой идее основан принцип работы фазированных антенных решеток (ФАР), (см. рис. 6.9).



Рис. 6.9: Радиолокационная станция, оснащенная фазированной антенной решеткой. Источник: <https://ru.wikipedia.org>

6.7 Задачи для самостоятельного решения

1. Покажите, что система уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = i\omega\varepsilon_r\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{j}^e, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_r\mu_0\mathbf{H} - \mathbf{j}^m, \\ \nabla \cdot (\varepsilon_r\varepsilon_0\mathbf{E}) = \rho^e, \\ \nabla \cdot (\mu_r\mu_0\mathbf{H}) = \rho^m. \end{cases}$$

инвариантна относительно замены

$$\varepsilon_r\varepsilon_0 \leftrightarrow \mu_r\mu_0, \quad \mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}, \\ \mathbf{j}^e \rightarrow -\mathbf{j}^m, \quad \mathbf{j}^m \rightarrow \mathbf{j}^e, \quad \rho^e \rightarrow -\rho^m, \quad \rho^m \rightarrow \rho^e.$$

Инвариантность системы уравнений Максвелла относительно этой замены называется **принципом перестановочной двойственности** или **дуальной симметрией**.

2. Вычислите функцию Грина трехмерного скалярного уравнения Гельмгольца

$$\Delta_3 G(x, y, z) + k^2 G(x, y, z) = -\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z'),$$

перейдя к Фурье-образам и выполнив интегрирование на плоскости комплексного переменного.

3. Получите двумерную функцию Грина уравнения Гельмгольца из трехмерной, проинтегрировав уравнение Гельмгольца, определяющее трехмерную функцию Грина, по координате z .
4. Получите представление трехмерной функции Грина в виде **двойного** интеграла по спектральной области.

5. Определите поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, создаваемые магнитным током, плотность которого в цилиндрической системе координат задана в виде

$$\mathbf{j}^m = U_0 \frac{\delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi)}{\rho} \mathbf{e}_r.$$

6. Распределение электрических и магнитных токов в пространстве задано выражениями

$$\mathbf{j}^e = \mathbf{e}_x i_0 e^{-i\beta x} \delta(y), \quad \mathbf{j}^m = \mathbf{e}_z u_0 e^{-i\beta x} \delta(y).$$

При каком соотношении между i_0 и u_0 суммарное излучение становится односторонним?

7. В пустом пространстве в точках $(\rho = d; \varphi = 0)$ и $(\rho = d; \varphi = \pi)$ цилиндрической системы координат расположены две нити магнитного тока, амплитуды которых равны, соответственно, $U_0 e^{+ikd}$ и $-U_0 e^{-ikd}$, а расстояние между нитями электрически мало ($kd \ll 1$). Определите диаграмму направленности такой системы в Е-плоскости, воспользовавшись асимптотикой функции Ганкеля.
8. В пустом пространстве расположен сторонний источник электрического тока, комплексная амплитуда плотности тока которого задана выражением

$$\mathbf{j} = \frac{I_0}{a} \delta(x) \delta(y) \left(1 - \frac{2|z|}{a} \right) \theta(a/2 - |z|) \mathbf{e}_z.$$

Определите диаграмму направленности описанной проволочной антенны. Как изменится ответ, если в пространстве дополнительно расположить плоскость из идеального проводника или идеального магнетика, совпадающую с плоскостью $z = -d$ ($d > a/2$)?

9. Бесконечная штыревая антенна находится на биссектрисе прямого двугранного угла, образованного двумя полубесконечными идеально проводящими плоскостями, на расстоянии a от вершины угла и вытянута в направлении вдоль его ребра. Определите диаграмму направленности в Н-плоскости, если в отсутствие проводящих плоскостей антенна излучает в этой плоскости изотропно. При каком минимальном ненулевом расстоянии a будет наблюдаться максимум излучения в направлении биссектрисы?
10. Два ортогонально скрещенных диполя Герца питаются токами одинаковой амплитуды со сдвигом фаз $\pi/2$. Определите диаграмму направленности по компонентам напряженности электрического поля в сферической системе координат и по мощности.
11. На плоскости xu в узлах прямоугольной регулярной решетки с периодами T_x , T_y расставлены синфазные диполи Герца, ориентированные вдоль оси z . Размеры решетки: $(N_x - 1)T_x \times (N_y - 1)T_y$. Определите диаграмму направленности (ДН) такой системы. Покажите, что ДН решетки – произведение ДН элемента на множитель решетки, зависящий от токов и положений элементов. При каком условии у диаграммы будет ровно один максимум?

6.8 Вопросы для самопроверки

1. На плоскость из идеального магнетика в вакууме нормально падает плоская волна с амплитудой электрического поля E_0 . Найдите поверхностную плотность магнитных токов в магнетике.
2. На плоский идеальный магнетик в вакууме под углом ϑ к нормали падает плоская ТЕ-волна с амплитудой электрического поля E_0 .

Найдите поверхностную плотность магнитных токов в магнетике.

3. На плоский идеальный магнетик в вакууме под углом ϑ к нормали падает плоская ТМ-волна с амплитудой электрического поля E_0 . Найдите поверхностную плотность магнитных токов в магнетике.
4. Запишите определение функции Грина уравнения Гельмгольца и общее решение уравнения Гельмгольца, записанное с учетом функции Грина.
5. Запишите волновые уравнения на векторные электрический и магнитный потенциалы.
6. Укажите способ вычисления функций полей по известному электрическому векторному потенциалу, если в пространстве отсутствуют магнитные источники.
7. Укажите способ вычисления функций полей по известному магнитному векторному потенциалу, если в пространстве отсутствуют электрические источники.
8. Укажите способ вычисления функций полей по известным электрическому и магнитному векторным потенциалам, если в пространстве есть и магнитные, и электрические источники.
9. Запишите выражение для объемной плотности магнитного тока в виде синфазной нити, расположенной вдоль оси z , протекающего также вдоль оси z , в декартовых и цилиндрических координатах.
10. Запишите выражение для объемной плотности электрического тока, текущего вдоль оси x , в виде плоского синфазного бесконечного листа, расположенного в плоскости xy .

11. Перечислите ненулевые компоненты полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ магнитного диполя Герца в ближней зоне.
12. Перечислите ненулевые компоненты полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ магнитного диполя Герца в дальней зоне.
13. Перечислите ненулевые компоненты полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ электрического диполя Герца в ближней зоне.
14. Перечислите ненулевые компоненты полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ электрического диполя Герца в дальней зоне.
15. Запишите выражение для диаграммы направленности диполя Герца, указав ориентацию диполя.
16. Запишите функцию Грина одномерного уравнения Гельмгольца в координатном представлении, указав ее определение.
17. Запишите функцию Грина двумерного уравнения Гельмгольца в координатном представлении, указав ее определение.
18. Запишите функцию Грина трехмерного уравнения Гельмгольца в координатном представлении, указав ее определение.
19. Определите диаграмму направленности (в E -плоскости) прямоугольного синфазного распределения электрического тока длины l .
20. Определите диаграмму направленности (в E -плоскости) треугольного синфазного распределения электрического тока длины l .
21. Определите диаграмму направленности (в E -плоскости) горизонтального электрического диполя, расположенного на расстоянии d от идеального проводника.

22. Определите диаграмму направленности (в Е-плоскости) вертикального электрического диполя, расположенного на расстоянии d от идеального проводника.
23. Определите диаграмму направленности (в Е-плоскости) горизонтального электрического диполя, расположенного на расстоянии d от идеального магнетика.
24. Определите диаграмму направленности (в Е-плоскости) вертикального электрического диполя, расположенного на расстоянии d от идеального магнетика.
25. Определите диаграмму направленности (в Н-плоскости) горизонтального магнитного диполя, расположенного на расстоянии d от идеального проводника.
26. Определите диаграмму направленности (в Н-плоскости) вертикального магнитного диполя, расположенного на расстоянии d от идеального проводника.
27. Определите диаграмму направленности (в Н-плоскости) горизонтального магнитного диполя, расположенного на расстоянии d от идеального магнетика.
28. Определите диаграмму направленности (в Н-плоскости) вертикального магнитного диполя, расположенного на расстоянии d от идеального магнетика.

Список литературы

- [1] В.В. Батыгин и И.Н. Топтыгин. *Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности*. Издательство Лань, 2010.
- [2] М.Н. Крамм. *Сборник задач по основам электродинамики*. Издательство Лань, 2011.
- [3] И.Е. Иродов. *Задачи по общей физике. Учебное пособие для вузов*. Бином, Лаборатория знаний, 2012.
- [4] А.И. Алексеев. *Сборник задач по классической электродинамике*. М.: Наука, 1977.
- [5] В.И. Смирнов. *Курс высшей математики*. М.: Наука, 1974.
- [6] Б.П. Демидович. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. М.: Наука, 1977.
- [7] Н.М. Гюнтер и Р.О. Кузьмин. *Сборник задач по высшей математике. Учебное пособие для вузов*. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949.
- [8] В.В. Никольский и Т.И. Никольская. *Электродинамика и распространение радиоволн*. М.: Наука, 1989.
- [9] C.W. Misner, K.S. Thorne и J.A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, 1973.

- [10] Г.Т. Марков, Б.М. Петров и Г.П. Грудинская. *Электродинамика и распространение радиоволн*. Москва, Сов. радио, 1979.
- [11] C.A. Balanis. *Advanced Engineering Electromagnetics*. John Wiley & Sons, 2024.
- [12] Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. *Теория поля*. М.: Наука, 1960.
- [13] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1999.
- [14] Д.В. Сивухин. *Общий курс физики: учеб. пособие для вузов в 5 томах. Том 3: Электричество*. 2004, с. 650.
- [15] E.J. Marsden и A.J. Tromba. *Vector Calculus*. W. H. Freeman, 2003.
- [16] В.Я. Арсенин. *Методы математической физики и специальные функции*. М.: Наука, 1984.
- [17] В.С. Владимиров. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1976.
- [18] В.С. Владимиров и др. *Сборник задач по уравнениям математической физики*. М.: Наука, 1982.
- [19] В.К. Козин, В.А. Пивоваров и Ф.А. Смирнов. *Практический курс классической электродинамики для студентов технических направлений подготовки*. СПб: Университет ИТМО, 2020.
- [20] M. Abramowitz и I.A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. US Government printing office, 1948.
- [21] Рыжик И.М. Градштейн И.С. *Таблицы интегралов сумм рядов и произведений*. М. Физматгиз, 1963.
- [22] М.Л. Краснов, А.И. Киселев и Г.И. Макаренко. *Функции комплексного переменного. Задачи и примеры с подробными решениями*. М.: Едиториал УРСС, 2003.

- [23] D. Zwillinger. *CRC standard mathematical tables and formulae*. CRC Press Company, 2002.
- [24] J.W. Brown и R.V. Churchill. *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill, 2009.
- [25] Michael Spivak. *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*. Benjamin, W.A., 1965.
- [26] К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман и Н.В. Коровкин. *Теоретические основы электротехники*. Питер, 2009.
- [27] А.Г. Свешников и А.Н. Тихонов. *Теория функций комплексной переменной*. М.: Наука, 1999.
- [28] S. Gevorgian, L. J. P. Linner и E. L. Kollberg. «CAD models for shielded multilayered CPW». В: *IEEE transactions on microwave theory and techniques* 43.4 (1995), с. 772—779.
- [29] S.S. Baturin и A.D. Kanareykin. «Cherenkov radiation from short relativistic bunches: General approach». В: *Physical review letters* 113.21 (2014), с. 214801.
- [30] L. Xu и H. Chen. «Conformal transformation optics». В: *Nature Photonics* 9.1 (2015), с. 15—23.
- [31] M.V. Flamarion и R. Ribeiro-Jr. «A numerical study of linear long water waves over variable topographies using a conformal mapping». В: *Trends in Computational and Applied Mathematics* 23.4 (2022), с. 625—638.
- [32] В. Г. Веселаго. «Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ε и μ ». В: *Успехи физических наук* 92.7 (1967), с. 517—526.
- [33] D.M. Pozar. *Microwave engineering: theory and techniques*. John Wiley & Sons, 2021.

- [34] S.A. Tretyakov. *Analytical modeling in applied electromagnetics*. Artech House, 2003.
- [35] D.R. Smith, J.B. Pendry и M.C. Wiltshire. «Metamaterials and negative refractive index». В: *Science* 305.5685 (2004), с. 788—792.
- [36] G.V. Eleftheriades и K.G. Balmain. *Negative-refraction metamaterials: fundamental principles and applications*. John Wiley & Sons, 2005.
- [37] V.M. Agranovich и др. «Linear and nonlinear wave propagation in negative refraction metamaterials». В: *Physical Review B* 69.16 (2004), с. 165112.
- [38] Е.И. Нефедов и А.Н. Сивов. *Электродинамика периодических структур*. М.: Наука, 1977.
- [39] D.V. Tatarnikov. «Semi-transparent ground planes excited by magnetic line current». В: *IEEE transactions on antennas and propagation* 60.6 (2012), с. 2843—2852.
- [40] L.B. Felsen и N. Marcuvitz. *Radiation and scattering of waves*. John Wiley & Sons, 1994.
- [41] C.A. Balanis. *Antenna theory: analysis and design*. John Wiley & Sons, 2016.
- [42] Л.А. Вайнштейн. *Электромагнитные волны*. Радио и связь, 1988.
- [43] Чаплин А.Ф. Марков Г.Т. *Возбуждение электромагнитных волн*. Энергия, 1967.
- [44] М.А. Лаврентьев и Б.В. Шабат. *Методы теории функций комплексного переменного*. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951.

Попов Михаил Михайлович
Яковлев Захар Александрович

**"Электродинамика и распространение радиоволн",
методическое пособие по курсу практических занятий**

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А