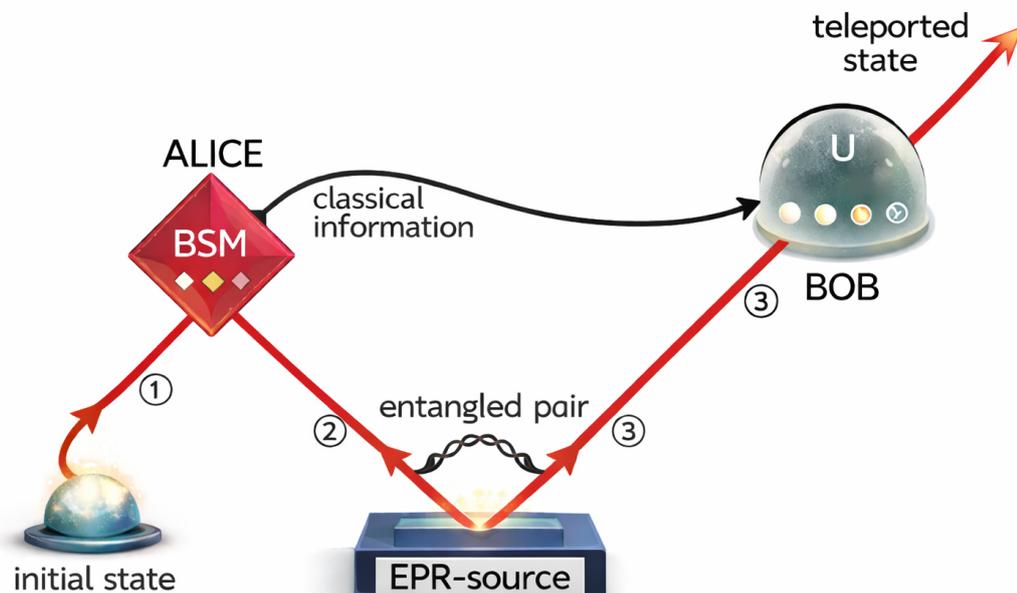


А.А. Гайдаш, М.С. Гусельников, А.В. Козубов  
ДИНАМИКА ЗАПУТАННОСТИ ФОТОННЫХ СИСТЕМ



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**А.А. Гайдаш, М.С. Гусельников, А.В. Козубов**  
**ДИНАМИКА ЗАПУТАННОСТИ ФОТОННЫХ**  
**СИСТЕМ**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО  
по направлению подготовки 12.04.03 Фотоника и оптоинформатика  
в качестве Учебно-методического пособия для реализации  
основных профессиональных образовательных программ  
высшего образования магистратуры

**ИТМО**

Санкт-Петербург  
2026

Гайдаш А.А., Гусельников М.С., Козубов А.В., Динамика запутанности фотонных систем– СПб: Университет ИТМО, 2026. – 82 с.

Рецензент(ы):

Мирошниченко Георгий Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор (квалификационная категория “ординарный профессор”) института “Высшая инженерно-техническая школа”, Университета ИТМО.

Методическое пособие представляет систематизированное введение в тематику квантовой запутанности в контексте современных научных исследований. Материал ориентирован на формирование у обучающихся компетенций, необходимых для самостоятельного решения практических задач квантовой оптики, квантовой информатики и смежных областей. Пособие предназначено для студентов, освоивших курс квантовой механики в рамках общей физики и знакомых с основами квантовой оптики. Пособие рекомендуется студентам направления подготовки 12.04.03 «Фотоника и оптоинформатика» в рамках дисциплины "Основы квантовой теории информации".

The logo of ITMO University, consisting of the letters 'ITMO' in a bold, black, sans-serif font. The letter 'I' has a small dot above it, and the 'O' is a solid circle.

ИТМО (Санкт-Петербург) — национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: ИТ и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication.

Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализуется программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития — научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента.

ИТМО пять лет подряд — в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере ИТ. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ-5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

©Университет ИТМО, 2026

©Гайдаш А.А., Гусельников М.С., Козубов А.В., 2026

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>1 Формирование концепции квантовой запутанности</b>	<b>10</b>
1.1 ЭПР-парадокс . . . . .	10
1.2 Математическая формулировка квантовой запутанности . .	14
1.3 ЭПР-парадокс в формулировке Бома . . . . .	16
1.4 Неравенства Белла . . . . .	18
1.5 Контрольные вопросы . . . . .	22
<b>2 Запутанные состояния в современных технологиях</b>	<b>23</b>
2.1 Квантовое распределение ключа . . . . .	23
2.2 Квантовая телепортация . . . . .	24
2.3 Другие применения . . . . .	27
2.4 Контрольные вопросы . . . . .	27
<b>3 Методы оценки степени запутанности</b>	<b>29</b>
3.1 Критерии запутанности . . . . .	29
3.2 Меры запутанности . . . . .	31
3.3 Контрольные вопросы . . . . .	34
<b>4 Специальные разделы математики</b>	<b>35</b>
4.1 Матрицы Паули и группы Ли . . . . .	35
4.1.1 Группа $SO(3)$ . . . . .	37
4.1.2 Группа $SU(2)$ . . . . .	39
4.1.3 Матрицы Паули в квантовой физике . . . . .	43
4.2 Обобщенный матричный базис Гелл-Манна . . . . .	46
4.3 Обобщенный метод множителей Лагранжа . . . . .	49
4.4 Контрольные вопросы . . . . .	51
<b>5 Общее кинетическое уравнение</b>	<b>53</b>
5.1 Динамическое уравнение фон Неймана . . . . .	54
5.2 Уравнение Лиувилля . . . . .	57
5.3 Многомодовое уравнение Лиувилля . . . . .	63
5.4 Контрольные вопросы . . . . .	68

<b>6</b>	<b>Динамика степени запутанности</b>	<b>69</b>
6.1	Нахождение ближайшего сепарабельного состояния . . . . .	69
6.2	Динамика степени запутанности на примере однофотонного поляризационного состояния . . . . .	71
6.3	Контрольные вопросы . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Задачи для моделирования</b>	<b>74</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>75</b>

# Введение

История понятия квантовой запутанности началась в 1935 году. Именно тогда в журнале *Physical Review*<sup>1</sup> вышла статья под названием «Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?» [1]<sup>2</sup>. Авторами данной статьи стали три сотрудника Института перспективных исследований (г. Принстон, США): Альберт Эйнштейн, его коллега Борис Подольский и аспирант Натан Розен. В дальнейшем за этой тройцей прочно закрепится аббревиатура ЭПР, а их статью 1935 года будут называть «статья ЭПР». Мы подробно обсудим эту публикацию в следующих разделах настоящего пособия, а пока, для лучшего понимания изучаемой тематики, опишем общее положение дел, которое сложилось в квантовой физике к 1935 году.

Вкратце напомним основные этапы становления квантовой науки<sup>3</sup>. К началу XX века в классической физике образовалось несколько фундаментальных проблем, которые не удавалось решить известными методами. Одна из таких проблем получила название «Ультрафиолетовая катастрофа». «Катастрофа» заключалась в том, что на основе классической термодинамики и максвелловской теории электромагнитного излучения не удавалось объяснить экспериментально наблюдаемый спектр абсолютно черного тела. Решить эту проблему удалось в 1900 году профессору Берлинского университета Макс Планку. Однако решение Планка основывалось на идее, которая не соответствует классической физике: Планку пришлось предположить, что энергия излучения может испускаться или поглощаться только дискретными порциями – квантами, величина которых пропорциональна частоте излучения.

Сам Планк слабо верил в физичность своего вывода и искал альтернативные пути; однако идею немецкого профессора подхватил молодой клерк патентного бюро Альберт Эйнштейн. В 1905 году он опубликовал в немецком журнале *Annalen der Physik* четыре статьи, каждая из которых стала знаковой для развития физики [4, 5, 6, 7]. В одной из этих статей [6]

---

<sup>1</sup>В 1970 году *Physical Review* был разделен на четыре журнала: *Physical Review A*, *B*, *C*, *D*.

<sup>2</sup>В русском переводе: «Можно ли считать квантово-механическое описание физической реальности полным?»

<sup>3</sup>С подробным описанием этапов становления квантовой физики до 1935 года можно ознакомиться в классических учебниках по квантовой механике, например в монографии Дэвида Бома [2] (если интересует научный контекст) или в монографии Джеммера [3] (если интересует исторический контекст).

Эйнштейн, пользуясь гипотезой Планка, успешно описал результаты опытов по фотоэлектрическому эффекту, которые, как и экспериментальный спектр абсолютно черного тела, противоречили предсказаниям классической физики. Статья Эйнштейна вызвала бурные обсуждения в научном сообществе: одни ученые разделяли концепцию квантования энергии, другие считали ее ошибочной, но, так или иначе, развитие квантовой теории стало неизбежным.

В первом десятилетии XX века Альберт Эйнштейн был одним из пионеров и главных сторонников квантовой науки. Во втором десятилетии на передний план вышел Нильс Бор. Бор был учеником Эрнеста Резерфорда, который в то время занимался экспериментальными исследованиями строения атома. В результате своих экспериментов Резерфорд обнаружил, что в атоме есть ядро, которое занимает очень малую часть всего размера атома, а вокруг ядра распределены электроны, которые на порядки легче ядра. На основании этих результатов Резерфорд предложил планетарную модель атома, согласно которой электроны вращаются вокруг ядра подобно планетам, вращающимся вокруг Солнца. С классической точки зрения такая модель была абсолютно непригодна, поскольку согласно классической электродинамике всякое ускоренно движущееся заряженное тело обязано излучать, а значит, терять энергию при движении. При таком раскладе электрон должен упасть на ядро примерно за одну наносекунду, что, конечно же, противоречит реальному положению вещей, поскольку в нашем мире стабильные атомы могут существовать сколь угодно долго. Несмотря на это, Нильс Бор решил совместить идею своего учителя и концепцию квантования энергии. Чтобы спасти классическую модель, Бору пришлось ввести несколько ничем не обоснованных постулатов: (1) существуют определенные электронные орбиты, называемые стационарными, вращаясь по которым, электрон не излучает; (2) переход с одной орбиты на другую сопровождается излучением фотона, энергия которого равна разности энергий двух орбит; (3) момент импульса электрона на стационарной орбите должен равняться целому числу, умноженному на постоянную Планка.

Модель Бора, хотя и не имела под собой никаких физических обоснований, прекрасно объяснила наблюдаемый экспериментально спектр атома водорода. Несмотря на успех, быстро выяснилось, что эта модель не способна описать спектр более сложных молекул, например, гелия. Попытки усовершенствовать теорию Бора не принесли заметного успеха. Поэтому встал вопрос о развитии других квантовых теорий. Модель микромира, которую развивал Бор и его последователи в эти годы, позже получила название старой квантовой механики.

В 1920-е на смену идеям Бора пришли принципиально новые модели. Именно тогда произошло становление квантовой механики как цельной теории. В 1925 году немецкие физики Вернер Гейзенберг, Макс Борн и Паскуаль Жордан представили первое строгое математическое описание

квантовой механики, которое вошло в историю под названием «матричная квантовая механика». Именно 1925 год теперь считается годом рождения квантовой механики. Годом позже австрийский физик Эрвин Шредингер представил динамическое уравнение для волновой функции, которое мы теперь называем уравнением Шредингера. На основе этого уравнения был сформулирован другой подход к описанию квантовой механики, за которым закрепилось название «волновая квантовая механика». Вскоре оказалось, что матричная и волновая формулировки квантовой механики полностью эквивалентны, хотя выглядят совершенно по-разному.

Параллельно с формированием математического аппарата квантовой механики австрийский физик-теоретик, сотрудник Гамбургского университета Вольфганг Паули пытался построить математическое описание спина. Еще в 1922 году немецкий экспериментатор Вальтер Герлах поставил эксперимент, предложенный годом ранее немецким физиком Отто Штерном, результаты которого позволили Паули заключить, что электрон обладает особой квантовой степенью свободы. Сперва некоторые ученые предположили, что эта степень свободы возникает из-за собственного вращения электрона вокруг своей оси (эта модель предполагала, что электрон имеет форму шара), поэтому новую степень свободы называли спином (от англ. spin – крутиться, вертеться). Однако Паули, Шредингер и другие ученые быстро указали на несостоятельность данной концепции, поскольку она не согласуется со специальной теорией относительности. Тем не менее термин «спин» навсегда закрепился за особой степенью свободы электрона.

В 1927 году Паули, наконец, сумел построить нерелятивистскую квантовомеханическую модель спина электрона, обобщив уравнение Шредингера соответствующим образом. Это обобщенное уравнение теперь называют уравнением Паули. Годом позже уравнение Паули обобщил Поль Дирак на случай околосветовых скоростей электрона, то есть с учетом специальной теории относительности, которую в начале XX века создал Эйнштейн. Одним из следствий уравнения Дирака оказалось существование антиэлектрона (полной копии электрона, но с противоположным знаком), что было экспериментально подтверждено в 1932 году<sup>4</sup>. В том же году известный венгерский математик Джон фон Нейман издал свою знаковую монографию «Математические основы квантовой механики» [8], в которой привел строгое математическое изложение аппарата квантовой механики в терминах Гильбертова пространства и его операторов.

Таким образом, к 1935 году квантовая механика сформировалась как цельная теория с развитым математическим аппаратом, которая была неоднократно проверена на эксперименте. Именно в этот момент ЭПР выпустили свою знаковую работу, которая, по заявлениям газет того времени,

---

<sup>4</sup>Позже было обнаружено, что каждая элементарная частица имеет свою античастицу. Так была создана концепция антиматерии.

атаковала квантовую теорию, поставив под сомнение ее состоятельность<sup>5</sup>. Несмотря на то, что статья ЭПР действительно критиковала квантовую механику и была направлена против этой теории, идеи, изложенные в статье, наоборот, внесли значительный вклад в развитие квантовой физики. В частности, публикация ЭПР дала старт развитию концепции квантовой запутанности, благодаря чему и в современных научных статьях можно встретить аббревиатуру ЭПР.

С 1935 года квантовая запутанность прошла большой путь от мысленной концепции до ее воплощения в технологиях нового поколения – квантовых коммуникациях, квантовых вычислениях и квантовой сенсорике. Как это произошло и какие актуальные задачи стоят перед исследователями квантовой запутанности сегодня, мы обсудим в первых трех главах настоящего пособия. В Главах 4, 5 и 6 читатель сможет углубиться в изучение методов описания динамики степени запутанности одномодовых и многомодовых фотонных систем. В Главе 4 рассматриваются специальные разделы математики, знание которых необходимо для освоения последующих глав пособия. В Главе 5 приведено подробное изложение метода описания диссипативной динамики фотонных систем с использованием общего кинетического уравнения, которое в последнее время все чаще называют мастер-уравнением (прямой перевод с английского *master-equation*). В Главе 6 весь материал, изложенный в предыдущих главах, объединяется для описания динамики степени запутанности конкретных фотонных систем. Подчеркнем, что материал, изложенный во второй части настоящего пособия, используется учеными для решения актуальных научных задач. В конце каждой главы приведены контрольные вопросы для закрепления материала. В заключении пособия представлены задачи для моделирования (Глава 7) с целью закрепления на практике полученных знаний.

Пособие предназначено для общего введения читателя в тематику квантовой запутанности в контексте современных исследований и формирования компетенций для самостоятельного решения практических задач в квантовой оптике, квантовой информатике и смежных областях. Пособие рассчитано на студентов, освоивших курс квантовой механики в рамках общей физики, а также знакомых с основами квантовой оптики. Для успешного освоения материала студенту необходимо владеть навыками численного моделирования в таких программных пакетах, как Wolfram Mathematica, MATLAB Mathcad, или на языках программирования, например, Python.

Пособие рекомендовано к освоению студентам направления подготовки 12.04.03 «Фотоника и оптоинформатика» в рамках дисциплины "Основы квантовой теории информации". Содержание Глав 1 - 6 может быть использовано для самостоятельного закрепления материала, излагаемого в рамках дисциплины, а также в качестве справочного материала для реше-

---

<sup>5</sup>4 мая 1935 года в газете The New York Times вышла статья под заголовком «Einstein attacks quantum theory».

ния задач, представленных в Главе 7. Решение задач и составление краткого отчета предполагается при самостоятельной работе студентов, а защита отчета – в рамках контактной работы.

## Глава 1

# Формирование концепции квантовой запутанности

### 1.1 ЭПР-парадокс

Итак, вернемся к статье ЭПР и разберемся с ее основной идеей. Краеугольным камнем статьи является понятие реальности. Трудно не согласиться с тем, что каждая физическая теория или модель призвана описать некую «объективную» физическую реальность. Само слово «реальность» – это неоднозначный термин, являющийся объектом философских дискуссий. Однако, в конечном счете, говоря о реальности, мы подразумеваем наш эмпирический опыт, который в физике в первую очередь ассоциируется с экспериментом: грубо говоря, если я могу измерить длину объекта линейкой, значит его длина реальна<sup>1</sup>. В таком случае естественным умозаключением является утверждение, что физическая теория соответствует реальности только в том случае, если она может предсказать результаты экспериментальных измерений.

Размышляя об этой идее, ЭПР выбрали в качестве отправной точки своей работы следующее утверждение: всякий объект физической теории должен соответствовать некоторому элементу реальности<sup>2</sup>. Теория, которая удовлетворяет данному требованию (полному соответствию объектов теории и объектов реальности), может считаться полной (от англ. complete – полный, заверченный, законченный). Если в некоторой теории существует экспериментально фиксируемый элемент реальности, который теория не может описать, т.е. не может предсказать результат его измерения, то такая теория не может считаться полной.

Теперь давайте разберемся, как обстоят дела с полнотой в квантовой теории. В квантовой механике (КМ), как мы знаем, каждой эксперимен-

---

<sup>1</sup>Проблема такого определения реальности связана с тем, что, например, визуальный образ предмета может быть создан в нашей голове и без непосредственного участия органов зрения, например, во сне. Иными словами, эмпирический опыт – необъективный критерий реальности. Тем не менее лучшего критерия в физике мы не имеем.

<sup>2</sup>О том, насколько это утверждение справедливо, читателю предлагается поразмыслить самостоятельно.

тально измеряемой величине (наблюдаемой) соответствует определенный оператор гильбертова пространства. При этом вся информация о конкретной квантовой системе, как утверждает теория, содержится в волновой функции (ВФ)  $\psi$ . КМ претендует на полноту, поскольку утверждает, что все элементы реальности могут быть описаны волновой функцией и соответствующими операторами.

Для наглядности рассмотрим состояние одномерной свободной частицы. Ее волновая функция задается соотношением<sup>3</sup>

$$\psi(x) = e^{ixp_0/\hbar}, \quad (1.1)$$

где  $x$  – координата частицы,  $p_0$  – ее импульс,  $\hbar$  – приведенная постоянная Планка (постоянная Дирака).

Волновая функция свободной частицы (1.1) является собственной функцией оператора импульса  $\hat{A} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ , а  $p_0$  – собственным значением оператора. Действительно,

$$\hat{A}\psi(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} e^{ixp_0/\hbar} = p_0\psi(x). \quad (1.2)$$

Поскольку  $p_0$  – собственное значение оператора импульса, то оно соответствует среднему значению измеряемой на эксперименте величины импульса. В таком случае мы можем сказать, что частица в данном состоянии  $\psi(x)$  имеет определенное значение импульса.

Вместе с этим для оператора координаты  $\hat{B} = x$  состояние (1.1) не является собственным состоянием:

$$\hat{B}\psi(x) = xe^{ixp_0/\hbar} \neq const \cdot \psi(x). \quad (1.3)$$

В таком случае мы не можем предсказать результат измерения координаты частицы до эксперимента. Получается, что, точно зная импульс частицы, мы ничего не можем сказать о ее координате. Фактически, это следствие принципа неопределенности Гейзенберга: мы не можем одновременно знать с одинаковой точностью значения двух канонически сопряженных величин (то есть таких величин, которым соответствуют не коммутирующие друг с другом операторы). Если мы считаем, что КМ – это полная теория в том смысле, что каждому объекту реальности соответствует свой объект теории, а в данном случае в теории нет объекта, сопоставляемого координате частицы, то мы вынуждены заключить, что в данном состоянии координата частицы не является элементом реальности.

Теперь рассмотрим следующую ситуацию. Пусть у нас есть две пронумерованные частицы, 1 и 2, состояние которых первоначально было известно. Затем мы подвергли две частицы взаимодействию и разнесли их

---

<sup>3</sup>Строго говоря, в ВФ свободной частицы должен быть временной множитель  $\exp\{-iEt/\hbar\}$ , где  $E$  – энергия частицы,  $t$  – время, однако в статье ЭПР он опускается, поскольку не имеет принципиального значения для приводимых рассуждений.

на некоторое произвольное расстояние друг от друга, так что теперь мы можем говорить о двух пронумерованных подсистемах Гильбертова пространства, 1 и 2.

Предположим теперь, что после наших манипуляций с частицами волновая функция системы имеет следующий вид:

$$\psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_1 p/\hbar} e^{-i(x_2 - x_0)p/\hbar} dp. \quad (1.4)$$

Что это за состояние? Фактически,  $\psi(x_1, x_2)$  описывает суперпозицию двухчастичных состояний: первая частица характеризуется координатой  $x_1$  и импульсом  $p$ , другая – координатой  $x_2 - x_0$  и импульсом  $-p$ . При этом по импульсу мы интегрируем (что и дает суперпозицию), то есть частицы могут с некоторой вероятностью иметь любое допустимое значение импульса в диапазоне от  $-\infty$  до  $\infty$ .

Заметим, что состояния подсистем 1 и 2 являются собственными состояниями для соответствующих операторов импульса  $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ . Более того, состояние (1.4) устроено таким образом, что, производя измерение импульса одной частицы, мы автоматически узнаем импульс другой частицы.

Теперь перепишем состояние (1.4) в другом виде:

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_1 p/\hbar} e^{-i(x_2 - x_0)p/\hbar} dp = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_1) \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{i(x - x_2 + x_0)p/\hbar} = 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_1) \delta(x - x_2 + x_0). \end{aligned} \quad (1.5)$$

В такой форме  $\psi(x_1, x_2)$  описывает суперпозицию двухчастичных состояний с заданными координатами  $x_1, x_2 - x_0$  и неопределённым импульсом. Действительно, в таком представлении ВФ подсистем 1 и 2 теперь являются собственными функциями соответствующих операторов координат  $\hat{B}_1, \hat{B}_2$ , поскольку

$$x\delta(x - x_1) = x_1\delta(x - x_1). \quad (1.6)$$

Подобно тому, как в импульсном представлении ВФ измерение импульса одной частицы автоматически определяет импульс другой частицы, так и в координатном представлении измерение координаты одной частицы мгновенно определяет координату другой частицы.

Из вышеописанного следует, что одному квантовому состоянию мы можем сопоставить две разные волновые функции. Одна ВФ соответствует физически реальным импульсам и несуществующим координатам, а другая – физически реальным координатам и несуществующим импульсам. Из этого вытекает, что реальность физической величины не объективна, а определяется типом измерения, который мы используем при проведении эксперимента. Но разве может измерительный прибор изменять реальность? Причем в данном случае реальность меняется быстрее скорости

света, поскольку, измеряя импульс (координату) одной частицы, мы автоматически делаем реальным импульс (координату) другой частицы. С точки зрения классического представления о реальности это звучит абсурдно. Отсюда следует, что, если мы верим в существование реальных координаты и импульса независимо от способа измерения, значит, КМ неполна, поскольку она не может предсказать одновременное существование этих величин. Если мы утверждаем, что КМ полна, тогда мы должны отказаться от привычного нам представления о реальности и локальности. В этом и заключается парадокс ЭПР.

Сами ЭПР, придерживаясь классического определения реальности, сделали вывод, что КМ – неполная теория. В заключении статьи они выразили надежду на возможность создания альтернативной теории, которая не противоречила бы понятиям реальности и локальности. В скором времени после выхода статьи ЭПР такие теории действительно начнут разрабатываться и получат название «теории скрытых параметров».

Статья ЭПР вызвала большой интерес в научном сообществе. В том же году на нее незамедлительно последовал ответ Бора, главного идеолога квантовой механики, который опубликовал свою статью с одноименным названием в том же журнале [9]. В своей статье Бор подчеркнул важный нюанс: когда мы говорим об измерении координаты и импульса, мы пользуемся понятиями классического макромира, совершенно не зная, как устроены частицы на микроуровне. Мы не знаем, применимы ли к микрочастицам макроскопические понятия. Однако измерения параметров микрочастиц мы проводим с помощью классических приборов, которые имеют классические характеристики. Соответственно, понятия импульс и координата относятся скорее к прибору измерения, а не к самой частице. Поэтому нельзя говорить о реальном импульсе и координате частицы вне контекста измерения. Вне этого контекста понятия «импульс» и «координата» не имеют смысла. Приборы, измеряющие импульс и координату, устроены таким образом, что точное измерение одной величины исключает точное измерение другой величины. Но так устроены приборы, а не характеристики частиц. В конце своей статьи Бор заключает, что в КМ привычные нам классические понятия реальности и локальности неприменимы, поскольку квантовая теория устроена совершенно иным образом. Ответная статья Бора стала символом так называемой копенгагенской интерпретации КМ, которая заслужила репутацию «канонического» взгляда на идейные основы квантовой науки.

В том же 1935 году, вдохновившись статьей ЭПР, известный австрийский физик-теоретик Эрвин Шредингер выпустил работу «The Present Situation in Quantum Mechanics» [10]. Именно в этой статье Шредингер сформулировал свой знаменитый парадокс с котом. В ней же Шредингер первым обратил особое внимание на двухчастичное состояние, которое использовали ЭПР для иллюстрации своего парадокса. Шредингер ввел

новое понятие *Verschränkung* (статья Шредингера написана на немецком языке), которое позже он сам перевел на английский как *entanglement* [11]. На русский язык этот термин перевели как сцепленность, перепутанность, запутанность (последний термин чаще всего встречается в русскоязычной литературе).

## 1.2 Математическая формулировка квантовой запутанности

Концепция запутанности для чистых состояний может быть выражена в следующей математической форме. Положим, что имеются две квантовые системы  $A$  и  $B$ , состояние которых описывается векторами гильбертова пространства  $|\psi\rangle_A$  и  $|\psi\rangle_B$ , соответственно. Тогда, согласно КМ, состояние составной системы  $AB$  при отсутствии взаимодействия между подсистемами описывается тензорным произведением векторов  $|\psi\rangle_A$  и  $|\psi\rangle_B$

$$|\Psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B. \quad (1.7)$$

В общем случае это не так, и всякое состояние общего вида можно разложить по некоторому ортогональному базису; тогда справедливо соотношение

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{ij} c_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B. \quad (1.8)$$

где  $|i\rangle_A$  и  $|j\rangle_B$  – ортонормированные векторы (базис) в соответствующих пространствах, а  $c_{ij}$  – коэффициент разложения. Если состояния вида (1.8) можно представить в форме (1.7), то есть в виде тензорного произведения векторов состояния двух подсистем, то такие состояния называют сепарабельными. Это возможно только в случае, когда  $c_{ij} = c_i c_j$ , то есть

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{ij} c_i c_j |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B = \left( \sum_i c_i |i\rangle_A \right) \otimes \left( \sum_j c_j |j\rangle_B \right). \quad (1.9)$$

Если по какой-то причине коэффициент  $c_{ij}$  не факторизуется, то есть  $c_{ij} \neq c_i c_j$ , то состояние (1.8) больше нельзя представить в виде (1.7):

$$|\Psi\rangle_{AB} \neq |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B. \quad (1.10)$$

Состояния, которые удовлетворяют условию (1.10), называют чистыми запутанными состояниями.

В общем случае, как известно, квантовые состояния не чистые, а смешанные, то есть их нельзя описать вектором состояния  $|\Psi\rangle$ . Для работы со смешанными состояниями вводят оператор (матрицу) плотности  $\hat{\rho}$ , который представляет собой статистическую сумму чистых состояний. Напомним основные свойства матрицы плотности:

1. Эрмитовость  $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$ .
2. Единичный след  $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$ .
3. Матрица плотности – положительно полуопределенный (positive semi-definite) оператор: собственные значения такого оператора всегда неотрицательны (положительны или равны нулю).
4. Для чистого состояния чистота (purity),  $\text{Tr}(\hat{\rho}^2)$ , равна единице ( $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1$ ); для смешанного – меньше единицы ( $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) < 1$ ).

Для сепарабельных состояний вида (1.7) смешанное состояние описывается матрицей плотности

$$\hat{\rho}_{AB} = \sum_{n=1}^N p_n |\psi_n\rangle_A \langle\psi_n| \otimes |\phi_n\rangle_B \langle\phi_n| = \sum_{n=1}^N p_n \rho_A^{(n)} \otimes \rho_B^{(n)}, \quad (1.11)$$

$$\sum_{n=1}^N p_n = 1, \quad 0 \leq p_n \leq 1, \quad N \neq 1.$$

Выражение вида (1.11) называют выпуклой комбинацией. Термин «выпуклая комбинация» пришел из геометрии. Там под выпуклым множеством  $S$  понимают множество точек, для которых справедливо следующее тождество: если  $\mathbf{r}_1 \in S$  и  $\mathbf{r}_2 \in S$ , то  $\mathbf{r}_{12} = \lambda \mathbf{r}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{r}_2 \in S$ , где  $\lambda \in [0, 1]$ . То есть в выпуклом множестве выпуклая комбинация координат двух точек всегда остается внутри множества. К выпуклым множествам относятся, например, круг, треугольник, квадрат и другие геометрические фигуры. Поскольку сумма сепарабельных состояний (1.11) остается сепарабельным состоянием, то матрица плотности (1.11) также является выпуклой комбинацией. Если ни в одном из базисов оператор плотности  $\hat{\rho}$  нельзя представить в виде выпуклой комбинации (1.11), то смешанное состояние запутанно.

Шредингер первым указал на интересную особенность запутанности: энтропия запутанного состояния в целом оказывается меньшей, чем энтропия любой из его подсистем, в то время как в классической теории информации совместная энтропия всегда больше энтропии каждой из подсистем<sup>4</sup>. Действительно, о подсистеме запутанного состояния до измерения мы ничего не знаем, а вот о состоянии в целом – знаем. Значит, в квантовой механике условная энтропия может быть отрицательной.

Другой важный аспект, на который указал Шредингер, заключается в том, что запутанность – это исключительно квантовый феномен. Действительно, такие феномены квантовой физики, как, например, принцип

---

<sup>4</sup>В классической теории информации совместная энтропия двух величин  $X, Y$  определяется как сумма энтропии одной из величин и условной энтропии  $S(X, Y) = S(X) + S(Y|X) = S(Y) + S(X|Y)$ . Энтропия в классике – строго положительная величина.

суперпозиции или принцип неопределенности, встречаются и в классической физике. С суперпозицией мы имеем дело в электромагнетизме, где электрические и магнитные поля подчиняются принципу суперпозиции. Принцип неопределенности проявляется в классических измерениях. Представим для примера классическую частицу с импульсом  $p_y$ , которую запустили вдоль координаты  $y$ . Если вы захотите измерить положение частицы вдоль координаты  $x$ , то вам потребуется разместить что-то вроде маленькой диафрагмы на пути частицы. Если диафрагма достаточно мала, то при прохождении частицы через отверстие мы с хорошей точностью локализуем частицу; однако в таком случае велика вероятность столкновения частицы со стенками диафрагмы. В результате столкновения частица приобретет импульс вдоль оси  $x$ , который останется неизвестным. Если мы будем увеличивать размеры диафрагмы, тогда вероятность столкновения частицы со стенками уменьшится, и импульс вдоль оси  $x$  с большей вероятностью будет равен нулю. Однако из-за увеличения размера диафрагмы уменьшится точность локализации частицы. Вот вам и принцип неопределенности.

### 1.3 ЭПР-парадокс в формулировке Бома

С 1933 года<sup>5</sup> и до конца своей жизни Альберт Эйнштейн работал в Институте перспективных исследований в городе Принстон. В период с 1947 по 1951 год неподалеку от Эйнштейна в Принстонском университете работал американский физик, участник атомного проекта, Дэвид Бом. Бом тесно сотрудничал с Эйнштейном в научных исследованиях. Наверное, в том числе и по этой причине, в одном из последних параграфов своей книги «Квантовая теория» [2], которую Бом выпустил в 1951 году, он привел новую формулировку ЭПР-парадокса. Формулировка Бома оказалась более наглядной и удобной для экспериментальной реализации, поэтому с тех пор большая часть исследователей используют именно эту формулировку.

Бом предложил рассмотреть систему из двух связанных атомов, которые образуют молекулу с нулевым спином. В данном разделе мы рассмотрим математически идентичную задачу, но для фотонов, которые испускаются некоторым атомом в результате каскадного перехода. Механизм каскадного перехода устроен следующим образом: сперва в атоме накачивается некоторый особый энергетический уровень, с которого атом не сразу возвращается в исходное состояние, переизлучая поглощенный фотон, а сначала переходит на промежуточный уровень и только потом возвращается в основное состояние. В результате такого перехода излучаются два фотона, которые могут быть коррелированы в разных степенях свободы

---

<sup>5</sup>Будучи уроженцем Германии, Эйнштейн был вынужден покинуть свою родную страну в 1933 году из-за смены в ней власти.

в зависимости от свойств атома. Например, в парах атомов кальция в результате каскадного перехода удается создать ЭПР-пару, запутанную по поляризации, которая может быть описана следующим вектором гильбертова пространства:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle_1 |y\rangle_2 - |y\rangle_1 |x\rangle_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( a_{1x}^\dagger a_{2y}^\dagger |0\rangle_1 |0\rangle_2 - a_{1y}^\dagger a_{2x}^\dagger |0\rangle_1 |0\rangle_2 \right), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $x$  и  $y$  обозначают поляризацию вдоль соответствующей оси,  $a_{jx}^\dagger$ ,  $a_{jy}^\dagger$ ,  $j = 1, 2$  – соответствующие операторы рождения. Состояние такого вида называют состоянием Бома, ЭПР-состоянием или состоянием ЭПР-Бома.

В результате рассматриваемого каскадного перехода фотоны разлетаются в противоположенные стороны. Поставим на пути каждого из фотонов по поляризатору, повернутому на угол  $\theta_1$  и  $\theta_2$  относительно направления  $x$ , соответственно. После поляризатора расположим детекторы  $D_1$  и  $D_2$ , характеризуемые эффективностью  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , соответственно. Теперь мы хотим посчитать условную вероятность  $P(\theta_2|\theta_1)$  регистрации фотона в плече 2 при условии регистрации фотона в плече 1. Из классической статистики известно, что условная вероятность может быть вычислена следующим образом [12]:

$$P(\theta_2|\theta_1) = \frac{P(\theta_1, \theta_2)}{P(\theta_1)}, \quad (1.13)$$

где  $P(\theta_1, \theta_2)$  – вероятность одновременной регистрации одного фотона в плече 1 и другого фотона в плече 2,  $P(\theta_1)$  – вероятность регистрации одного фотона в плече 1 независимо от результата в плече 2.

Вероятности регистрации фотонов рассчитываются с помощью соответствующих функций корреляции [12, 13]

$$P(\theta_j) = \alpha_j G^{(1)} = \alpha_j \langle \psi | \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j | \psi \rangle, \quad (1.14)$$

$$P(\theta_1, \theta_2) = \alpha_1 \alpha_2 G^{(2)} = \alpha_1 \alpha_2 \langle \psi | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_1 | \psi \rangle, \quad (1.15)$$

где  $\hat{a}_j^\dagger$ ,  $j = 1, 2$  – оператор рождения на выходе из соответствующего поляризатора.

При прохождении через линейный поляризатор исходные операторы рождения  $\hat{a}_{jx}^\dagger$ ,  $\hat{a}_{jy}^\dagger$  преобразуются следующим образом [12]

$$\hat{a}_j^\dagger = \hat{a}_{jx}^\dagger \cos \theta_j + \hat{a}_{jy}^\dagger \sin \theta_j. \quad (1.16)$$

Используя это соотношение, получим для вероятности  $P(\theta_1)$

$$P(\theta_1) = \alpha_1 \langle \psi | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 | \psi \rangle = \frac{\alpha_1}{2} \quad (1.17)$$

и для вероятности  $P(\theta_1, \theta_2)$

$$P(\theta_1, \theta_2) = \alpha_1 \alpha_2 \langle \psi | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_1 | \psi \rangle = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2} \sin^2 (\theta_2 - \theta_1). \quad (1.18)$$

Из (1.17), (1.18) получаем для условной вероятности

$$P(\theta_2 | \theta_1) = \alpha_2 \sin^2 (\theta_2 - \theta_1), \quad (1.19)$$

Положим, что мы используем идеальный детектор  $\alpha_2 = 1$ . Тогда при  $\theta_2 - \theta_1 = \pm\pi/2$  мы имеем стопроцентную вероятность регистрации второго фотона при условии регистрации первого фотона. Отсюда следует, что поляризации фотонов всегда будут ортогональны друг другу. Но до измерения фотон не имеет поляризации – его поляризация определяется выбранным углом поляризатора. Значит, выбор угла первого поляризатора определяет поляризацию фотона 2, а это и есть парадокс ЭПР.

## 1.4 Неравенства Белла

Несмотря на то, что Бор еще в 1935 году привел свои аргументы против ЭПР парадокса, многие ученые не смогли смириться с необходимостью отказаться от понятий локальности и реализма в КМ. Интересно, что Дэвид Бом, изложивший в своей монографии 1951 года каноническую копенгагенскую интерпретацию квантовой механики, стал главным идеологом развития теории скрытых переменных (ТСП) и одним из первых опубликовал ряд серьезных исследований на эту тему [14, 15].

Идея ТСП очень заинтересовала американского физика Джона Белла. Строго говоря, еще в 1932 году Джон фон Нейман в своей книге «Математические основы квантовой механики» привел доказательство невозможности объяснения результатов КМ с помощью ТСП. Однако приведенное доказательство оказалось неуниверсальным, за что позже было раскритиковано многими учеными, в том числе Беллом [16]. Не удовлетворенный доказательством фон Неймана, Белл начал разработку экспериментальных методов проверки концепций локальности и реализма.

В 1964 году, работая в Университете Висконсин (США), Белл выпустил статью «On the Einstein Podolsky Rosen paradox» [17]<sup>6</sup>, в которой ввел свое знаменитое неравенство. Это неравенство открыло возможность для экспериментальной проверки ТСП. Рассмотрим идею Белла подробнее.

Пусть у нас есть две бинарные наблюдаемые  $A(a) = \pm 1$  и  $B(b) = \pm 1$ , где  $a$  и  $b$  – некоторые параметры, определяющие результат измерения. Пусть  $C(a, b) = \langle A(a), B(b) \rangle$  есть функция, описывающая корреляции между наблюдаемыми величинами, усредненная по всем возможным исходам.

<sup>6</sup>Так сложилось, что статья, в которой Белл показал несостоятельность доказательства фон Неймана [16], была опубликована на два года позже статьи, в которой Белл предложил свои неравенства [17], хотя первая статья была подана в журнал раньше второй.

Согласно ЭПР, существует некоторый локальный элемент реальности  $\lambda$ , который определяет результат измерения для заданной наблюдаемой величины. Тогда величины  $A$  и  $B$  также должны зависеть от параметра  $\lambda$ . Пусть этот параметр имеет нормированную на единицу функцию распределения  $f(\lambda)$ , так что  $\int f(\lambda)d\lambda = 1$ . В качестве функции корреляции рассмотрим математическое ожидание для произведения  $A(a, \lambda)B(b, \lambda)$ :

$$C(a, b) = \int A(a, \lambda)B(b, \lambda)f(\lambda)d\lambda. \quad (1.20)$$

Рассмотрим теперь следующие комбинации функции  $C(a, b)$ :

$$\begin{aligned} C(a, b) - C(a, b') &= \int A(a, \lambda)[B(b, \lambda) - B(b', \lambda)]f(\lambda)d\lambda, \\ |C(a, b) - C(a, b')| &\leq \int |A(a, \lambda)[B(b, \lambda) - B(b', \lambda)]f(\lambda)|d\lambda, \\ |C(a, b) - C(a, b')| &\leq \int |B(b, \lambda) - B(b', \lambda)|f(\lambda)d\lambda. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Здесь мы использовали тот факт, что модуль произведения равен произведению модулей, а также положительность плотности распределения  $|f(\lambda)| = f(\lambda)$  и определение бинарной наблюдаемой величины  $|A(a, \lambda)| = 1$ . Аналогичным образом, получим следующее неравенство:

$$|C(a', b) + C(a', b')| \leq \int |B(b, \lambda) + B(b', \lambda)|f(\lambda)d\lambda. \quad (1.22)$$

Комбинируя (1.21) и (1.22), получаем

$$\begin{aligned} |C(a, b) - C(a, b')| + |C(a', b) + C(a', b')| &\leq \\ \int [|B(b, \lambda) + B(b', \lambda)| + |B(b, \lambda) - B(b', \lambda)|]f(\lambda)d\lambda, \end{aligned} \quad (1.23)$$

откуда окончательно

$$|C(a, b) - C(a, b')| + |C(a', b) + C(a', b')| \leq 2. \quad (1.24)$$

Формула (1.24) представляет собой математическую форму неравенства Белла. Неравенство не должно нарушаться, если ТСП описывает реальность так же полно, как и КМ. Если КМ предскажет нарушение неравенства (1.24) и это будет подтверждено экспериментом, то мы будем вынуждены заключить, что ТСП не позволяет описать мир так же полно, как и КМ. В таком случае придется признать, что концепция скрытых параметров не работает, как и концепции локальности и реализма.

Проверим неравенства Белла на примере эксперимента с двумя фотонами, рассмотренного нами в предыдущем подразделе. В таком случае

$A(a) = \pm 1$ ,  $B(b) = \pm 1$ ,  $a = \theta_1$ ,  $b = \theta_2$ , где  $+1$  соответствует событию регистрации фотона детектором, а  $-1$  соответствует обратному исходу.

В данном примере мы работаем с дискретными величинами  $A$  и  $B$ . Математическое ожидание дискретной величины вычисляется по следующей формуле:

$$\begin{aligned} C(a, b) &= \sum_{A, B} ABP(A, B|a, b) \\ &= P_{12}(+1, +1|\theta_1, \theta_2) + P_{12}(-1, -1|\theta_1, \theta_2) \\ &\quad - P_{12}(+1, -1|\theta_1, \theta_2) - P_{12}(-1, +1|\theta_1, \theta_2). \end{aligned} \quad (1.25)$$

В прошлом разделе мы показали, что для идеальных детекторов

$$P_{12}(+1, +1|\theta_1, \theta_2) = \sin^2(\theta_2 - \theta_1). \quad (1.26)$$

Чтобы получить вероятность  $P_{12}(-1, -1|\theta_1, \theta_2)$ , необходимо в выражении (1.26) произвести сдвиг углов  $\theta_{1,2} \rightarrow \theta_{1,2} + \pi/2$ , откуда получаем

$$P_{12}(-1, -1|\theta_1, \theta_2) = \sin^2(\theta_2 - \theta_1 + \pi) = P_{12}(+1, +1|\theta_1, \theta_2). \quad (1.27)$$

Чтобы получить вероятность  $P_{12}(\pm 1, \mp 1|\theta_1, \theta_2)$ , необходимо произвести в (1.26) сдвиг на  $\pi/2$  только для одного угла  $\theta_1$  или  $\theta_2$ , откуда получаем

$$P_{12}(\pm 1, \mp 1|\theta_1, \theta_2) = \cos^2(\theta_2 - \theta_1). \quad (1.28)$$

В результате математическое ожидание (1.25) примет следующий вид:

$$C(a, b) = \sin^2(\theta_1 - \theta_2) - \cos^2(\theta_1 - \theta_2) = -\cos 2(\theta_1 - \theta_2). \quad (1.29)$$

Подставляем полученный результат в неравенства Белла:

$$\begin{aligned} &| -\cos 2(\theta_1 - \theta_2) + \cos 2(\theta_1 - \theta'_2) | \\ &+ | \cos 2(\theta'_1 - \theta_2) + \cos 2(\theta'_1 - \theta'_2) | \leq 2. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Если мы теперь выберем  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = 3\pi/8$ ,  $\theta'_1 = \pi/4$ ,  $\theta'_2 = \pi/8$ , то получим

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = 2\sqrt{2} > 2. \quad (1.31)$$

Мы видим, что КМ предсказывает нарушение неравенств Белла. Это очень хорошо, поскольку теперь достаточно поставить эксперимент, чтобы понять, кто прав – ТСП или КМ.

В действительности неравенство Белла не совсем универсально. В данном случае мы считали наши детекторы идеальными, поэтому все получилось. Но с реальными детекторами мы можем получить другой результат. Поэтому в дальнейшем неравенство Белла было записано в более удобной для экспериментальной проверки форме.

Так, в 1969 году модифицированное неравенство Белла представили в своей статье американские физики Джон Клаузер, Майкл Хорн, Абнер Шимони и Ричард Холт [18]:

$$|C(a, b) - C(a, b') + C(a', b) + C(a', b')| \leq 2. \quad (1.32)$$

Впоследствии это выражение получило название CHSH-неравенства (надо сказать, что в оригинальной статье 1969 года это неравенство записано в другой форме; приведенная здесь и наиболее употребляемая форма получена все тем же Беллом позже [19]).

В 1974 году Клаузер и Хорн [20] в своей отдельной статье предложили еще одну форму неравенства Белла, записанную непосредственно для вероятностей, а не математического ожидания:

$$\begin{aligned} -1 \leq P_{12}(\theta_1, \theta_2) - P_{12}(\theta_1, \theta'_2) + P_{12}(\theta'_1, \theta_2) \\ + P_{12}(\theta'_1, \theta'_2) - P_{12}(\theta'_1, -) - P_{12}(-, \theta_2) \leq 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

В 1980 году ленинградский математик Борис Цирельсон представил форму записи неравенства CHSH через оператор Белла [21]:

$$\hat{\mathcal{B}}_{CHSH} = \hat{A} \otimes (\hat{B} + \hat{B}') + \hat{A}' \otimes (\hat{B} - \hat{B}'), \quad (1.34)$$

где  $(\hat{A})^2 = (\hat{A}')^2 = (\hat{B})^2 = (\hat{B}')^2 = \hat{I}$ , где  $\hat{I}$  – единичный оператор. В записи Цирельсона проверка неравенства Белла сводится к оценке собственных значений оператора Белла. Для классически-коррелированных систем неравенство принимает следующую форму:

$$|\langle \hat{\mathcal{B}}_{CHSH} \rangle| = |\text{Tr} \{ \hat{\mathcal{B}}_{CHSH} \hat{\rho} \}| \leq 2, \quad (1.35)$$

а для квантово-коррелированных систем:

$$|\langle \hat{\mathcal{B}}_{CHSH} \rangle| = |\text{Tr} \{ \hat{\mathcal{B}}_{CHSH} \hat{\rho} \}| \leq 2\sqrt{2}. \quad (1.36)$$

Выражение (1.36) называют границей Цирельсона. Фактически, Цирельсон теоретически показал нарушение неравенств Белла для ТСП в общем случае. Поскольку сегодня мы имеем множество форм неравенств Белла, то теперь в научной литературе принято говорить не о «неравенстве Белла», а об «неравенствах Белла», имея в виду целое семейство неравенств.

Пока теоретики искали оптимальные формы для неравенств Белла, экспериментаторы искали методы их проверки. Первые эксперименты были поставлены еще в конце 60-х, однако они оказались недостаточно убедительными. Только в 1981-1982 годах французский физик-экспериментатор Алан Аспе и его команда поставили эксперименты [22, 23, 24], достоверность которых была признана научным сообществом. В своих экспериментах Аспе и его команда использовали пары атомов кальция для генерации

запутанных по поляризации фотонов в результате каскадного перехода. В результате ученые продемонстрировали нарушение неравенств Белла на 5 стандартных отклонений. Позже, в 80-е и 90-е года, результаты Аспе были неоднократно повторены другими исследователями при использовании запутанных состояний различной природы.

В 1989 году Дэниел Гринберг, Майкл Хорн и Антон Цайлингер на примере состояний, которые позже получили название GHZ-состояний, показали, что запутанность более чем двух частиц в целом противоречит ТСП [25, 26]. Для наглядности приведем пример трехчастичного GHZ-состояния:

$$|GHZ\rangle = \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (1.37)$$

Завершая данный раздел, отметим, что, хотя нарушение неравенств Белла было продемонстрировано экспериментально, вопрос о скрытых параметрах не закрыт окончательно. Дело в том, что во всех поставленных экспериментах всегда можно найти некоторую лазейку (от англ. loophole), некоторое несовершенство установки, которое позволяет описать результат эксперимента на языке скрытых параметров [27]. Поэтому вопрос об идеальном белловском тесте (loophole-free Bell test) остается открытым и в наше время.

## 1.5 Контрольные вопросы

1. С чего началось изучение квантовой запутанности?
2. Что означают концепции локальности и реализма? Как они трактуются в классической и квантовой физике?
3. В чем суть парадокса ЭПР?
4. Когда состояние  $\rho$  можно назвать чистым?
5. Какие чистые состояния называют запутанными? Какие смешанные состояния называют запутанными?
6. Зачем нужны неравенства Белла? Какие формы неравенств Белла вы знаете? Чему соответствует граница Цирельсона?

## Глава 2

# Запутанные состояния в современных технологиях

В ходе разработки экспериментальных методов проверки неравенств Белла были существенно развиты методы генерации и контроля запутанных состояний. Уже в 1990-е начинается активное развитие методов практического применения квантовой запутанности. Некоторые из них мы рассмотрим в настоящей главе.

### 2.1 Квантовое распределение ключа

Еще в 1984 году сотрудник IBM Чарльз Беннет и канадский физик Жиль Brassar предложили первый протокол квантового распределения ключей (КРК) BB84 [28], который подразумевает использование незапутанных поляризационных кубитов для его реализации. Ценность этого протокола заключается в его высоком уровне стойкости, обеспечиваемом фундаментальными квантовыми принципами: неопределенности (несовместимость одновременного измерения в двух поляризационных базисах) и теоремой о запрете клонирования, которые не позволяют злонамеренному перехватчику получить секретную информацию и остаться незамеченным. Напомним, что теорема о запрете клонирования (no-cloning theorem) утверждает, что невозможно получить идентичную копию неизвестного чистого квантового состояния [29]<sup>1</sup>. Обобщение этой теоремы на случай смешанных состояний известно как теорема о запрете трансляции (no-broadcasting theorem) [31]. Она утверждает, что для состояния  $\hat{\rho}$  невозможно создать такое состояние  $\hat{\rho}_{AB}$ , чтобы выполнялись условия  $\text{Tr}_A \hat{\rho}_{AB} = \text{Tr}_B \hat{\rho}_{AB} = \hat{\rho}$  при  $\hat{\rho}_{AB} \neq \hat{\rho} \otimes \hat{\rho}$ .

Впервые протокол BB84 экспериментально реализовали его создатели, Беннет и Brassar, в 1989 году [32]. Надо сказать, что в практической реализации протокол оказался не таким идеальным, каким он выглядит в теории: было обнаружено множество уязвимостей и слабых мест BB84, что,

---

<sup>1</sup>Невозможно получить идентичную копию неизвестного чистого квантового состояния с единичной вероятностью, однако недавно было показано, что пост-селективные измерения позволяют это сделать с малой вероятностью [30]

однако, не умалило его перспективности. Разработка протокола BB84 послужила стартом для развития сферы квантовых коммуникаций. Сегодня квантовые коммуникации наряду с квантовыми вычислениями и сенсорикой являются основным направлением развития квантовых технологий.

В 1991 году польский физик Артур Экерт предложил свою версию протокола квантового распределения ключей, который основан на использовании ЭПР-состояний (E91) [33]. Концептуально этот протокол можно описать следующим образом. Положим, что отправитель Алиса (А) создала поляризационное ЭПР-состояние

$$|\Psi\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1 |\leftrightarrow\rangle_2 - |\leftrightarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2). \quad (2.1)$$

Один фотон Алиса оставляет себе, а второй отправляет Бобу (Б). Изменяя поляризацию своего фотона в базисе  $\{\uparrow, \leftrightarrow\}$ , Алиса немедленно узнает поляризацию фотона Боба. Поскольку фотоны запутаны, то они нарушают неравенства Белла, что можно проверить с помощью соответствующих измерений. Если какой-то злонамеренный перехватчик попытается украсть информацию и проведет измерение над одним из фотонов, то второй фотон автоматически получит определенную поляризацию. Тогда ЭПР-состояние потеряет свои нелокальные свойства и больше не сможет нарушить неравенства Белла. Проводя белловский тест, А и Б могут понять, что процесс передачи информации скомпрометирован (кто-то прослушивает канал коммуникаций). Экспериментально протокол Экерта был реализован в начале нулевых [34].

Ознакомившись с работой Экерта, Беннет и Brassar решили не оставаться в стороне: в 1992 году они вместе с Дэвидом Мермином предложили модификацию BB84 на основе идея Экерта [35]. Предложенный протокол получил название BBM92. Он оказался более эффективным и простым в реализации, чем E91. В частности, проверка стойкости в BBM92 может быть выполнена без проверки неравенств Белла. Отметим, что протоколы квантового распределения ключа, использующие запутанные состояния, оказались сложнее в реализации и медленнее в работе по сравнению с протоколами на незапутанных кубитах. Однако протоколы первого типа обеспечивают больший уровень стойкости, поэтому на практике выбор того или иного протокола определяется типом поставленной задачи.

## 2.2 Квантовая телепортация

Теорема о запрете клонирования создает как определенное преимущество (с точки зрения конфиденциальности информации), так и проблему для квантовых коммуникаций (с точки зрения передачи информации на большие расстояния). Однако оказалось, что квантовое состояние хотя и невоз-

можно клонировать, но возможно телепортировать из одной точки пространства в другую, используя квантовую запутанность. Метод квантовой телепортации был впервые предложен в 1993 году автором протокола BB84, американским физиком Чарльзом Беннетом, и его соавторами [36].

Прежде чем обсуждать протокол квантовой телепортации, заметим, что ЭПР состояние типа (2.1) не уникально. Австралийский физик Самуэль Бранштейн в 1992 году показал, что собственными состояниями оператора Белла являются следующие четыре состояния [37]

$$\begin{aligned} |\Psi^{(\pm)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |1\rangle_2 \pm |1\rangle_1 |0\rangle_2), \\ |\Phi^{(\pm)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |0\rangle_2 \pm |1\rangle_1 |1\rangle_2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Их назвали состояниями Белла. Белловские состояния формируют ортонормированный базис в двухчастичном Гильбертовом пространстве

$$\begin{aligned} \langle \Psi^{(i)} | \Psi^{(j)} \rangle &= \delta_{ij} \\ \langle \Phi^{(i)} | \Phi^{(j)} \rangle &= \delta_{ij} \\ \langle \Psi^{(i)} | \Phi^{(j)} \rangle &= 0, \\ \sum_{i=\pm} (|\Psi^{(i)}\rangle \langle \Psi^{(i)}| + |\Phi^{(i)}\rangle \langle \Phi^{(i)}|) &= \hat{I}_1 \otimes \hat{I}_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Положим, что Алиса хочет передать Бобу кубит  $|q\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ . Тогда Алисе надо приготовить любое белловское состояние, например,  $|\Phi^{(+)}\rangle$ , которым она обменяется с Бобом. В результате общее состояние Алисы и Боба:

$$|\psi_{AA'B}\rangle = |q\rangle_A \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_{A'} |0\rangle_B + |1\rangle_{A'} |1\rangle_B). \quad (2.4)$$

Выразим теперь состояния, относящиеся к системам  $A$  и  $A'$ , через белловский базис:

$$\begin{aligned} |\psi_{AA'B}\rangle &= |c_1\rangle_B |\Psi^{(+)}\rangle_{AA'} + |c_2\rangle_B |\Psi^{(-)}\rangle_{AA'} \\ &+ |c_3\rangle_B |\Phi^{(+)}\rangle_{AA'} + |c_4\rangle_B |\Phi^{(-)}\rangle_{AA'}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Проецируя состояние (2.4) на соответствующие белловские орты, получаем

$$\begin{aligned}
|c_1\rangle_B &= b|0\rangle_b + a|1\rangle_b, \\
|c_2\rangle_B &= b|0\rangle_b - a|1\rangle_b, \\
|c_3\rangle_B &= a|0\rangle_b + b|1\rangle_b, \\
|c_4\rangle_B &= a|0\rangle_b - b|1\rangle_b.
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

Смотрите, состояние  $|c_3\rangle_B$  совпадает с состоянием  $|q\rangle_A$ , но находится в системе Боба. Если теперь Алиса произведет в своей системе  $AA'$  измерение в базисе  $|\Phi^{(+)}\rangle_{AA'}$ , то Боб получит в точности исходный кубит Алисы. Алисе останется только позвонить Бобу и сказать, какое белловское состояние она использовала для передачи кубита. В целом, Алисе даже необязательно производить измерение в том базисе, который она использовала изначально. Как бы она не произвела измерение, состояние  $|c_3\rangle_B$  всегда можно получить из  $|c_i\rangle$ , используя соответствующее унитарное преобразование.

Первым экспериментально реализовал квантовую телепортацию австрийский ученый Антон Цайлингер и его научная группа в 1997 году [38]. Позже, в 2012 году, группе Цайлингера удалось телепортировать кубит на 143 км между двумя островами группы Канарских островов [39]. Для генерации белловского состояния исследователи использовали спонтанное параметрическое рассеяние (СПР).

СПР – это процесс генерации коррелированных фотонов при накачке кристалла с квадратичной нелинейностью классическим излучением. В зависимости от поляризации исходного излучения и сгенерированных фотонов выделяют три типа СПР: 0, I, II. При СПР II типа генерируемые фотоны обладают взаимно ортогональной поляризацией и разлетаются в разные стороны в пределах заданного телесного угла. Конусы, построенные на этих телесных углах, имеют две точки пересечения, симметрично расположенные относительно направления, вдоль которого распространяется излучение накачки. В этих точках фотон может быть поляризован как вертикально, так и горизонтально. Однако, если в одной точке поляризация фотона вертикальная (горизонтальная), то в другой точке поляризация будет горизонтальной (вертикальной). Это и есть ЭПР-пара.

Для проведения измерений в белловском базисе использовался обычный светоделитель, который позволяет осуществить измерение в базисе  $|\Psi^{(-)}\rangle$  при регистрации фотонов на двух детекторах, расположенных на выходе из соответствующих выходных портов светоделителя (если щелкнут два детектора, значит зарегистрировано состояние  $|\Psi^{(-)}\rangle$ ; если щелкнет один детектор, то результат измерения неоднозначен – состояние может быть в одном из трех других белловских состояний).

В 1993 году с участием Эккерта и Цайлингера был разработан протокол для телепортации запутанных состояний, который получил название «entanglement swapping» (обмен запутанностью) [40] и был экспериментально реализован группой Цайлингера в 1998 году [41].

## 2.3 Другие применения

Мы подробно рассмотрели лишь два примера применения запутанности в реальных технологиях. Очевидно, что таких примеров много больше. Например, квантовая запутанность используется в протоколах сверхплотного кодирования (quantum dense coding), которые позволяют передавать 2 бита информации, используя частицу с двумя состояниями, т.е. однобитовую квантовую систему [42] (этот протокол также предложил Чарльз Беннет). Напомним, что бит – это, по определению, энтропия равновероятной бинарной величины. Энтропия задается формулой Шеннона  $S = -\sum_k p(x_k) \log_2 p(x_k)$ , где  $x_k$  – значение случайной величины из набора  $\{x_k\}$ ,  $p(x_k)$  – вероятность, с которой случайная величина  $x$  имеет значение  $x_k$ . Для равновероятной бинарной величины  $S = -0.5 \log_2 0.5 - 0.5 \log_2 0.5 = 1$ . Два бита соответствуют энтропии равновероятной величины с четырьмя возможными состояниями.

Квантовая запутанность используется для создания квантовых компьютеров, поскольку наличие запутанности между кубитами является необходимым условием для эффективных квантовых вычислений. Квантовая запутанность используется для создания сверхточных квантовых сенсоров, которые позволяют проводить измерения с точностью, недоступной для классических сенсоров. Одним словом, сегодня квантовая запутанность – это неотъемлемый элемент квантовых технологий второго поколения, которые постепенно приближаются к промышленному внедрению [43, 44, 45, 46]. К квантовым технологиям первого поколения относятся, например, лазеры и полупроводники, которыми сегодня в той или иной форме пользуется каждый человек.

В завершении данной главы отметим, что в 2022 году Алан Аспе, Джон Клаузер и Антон Цайлингер были награждены Нобелевской премией «за эксперименты с запутанными фотонами, которые продемонстрировали нарушение неравенств Белла и заложили основы квантовой информатики»<sup>2</sup>. Это событие подвело условные итоги первого этапа становления технологий квантовой запутанности.

## 2.4 Контрольные вопросы

1. Что такое ЭПР-состояние? Что вы знаете о белловских состояниях? Как их можно генерировать?
2. В какой области науки запутанность нашла наибольшее применение?
3. На чем основана стойкость протокола E91?

---

<sup>2</sup>В оригинале: «for experiments with entangled photons, establishing the violation of Bell inequalities and pioneering quantum information science».

4. Что телепортируется в протоколе квантовой телепортации? На каких принципах работает данный протокол?
5. В чем идея протокола сверхплотного кодирования?

## Глава 3

# Методы оценки степени запутанности

Желание использовать эффект квантовой запутанности в практических приложениях поставил перед исследователями новый вопрос: можно ли количественно оценить степень запутанности квантового состояния? Дело в том, что на практике никогда не удастся создать идеально запутанные состояния, и это нужно учитывать. Кроме того, оказалось, что запутанность – достаточно хрупкое явление. Она может быстро разрушаться при взаимодействии состояния с окружающей средой из-за так называемых эффектов декогеренции, то есть эффектов, при которых происходит неунитарная эволюция состояния. Поэтому при создании технологий на основе запутанных состояний важно контролировать степень запутанности. Так возникла необходимость в поиске критериев и мер запутанности. Некоторые из них мы рассмотрим в настоящем разделе. С другими существующими критериями любознательный читатель может ознакомиться, например, в работах [47, 48, 49, 50].

Заранее оговоримся, что в данном пособии основной фокус направлен на фотонные системы с ограниченной размерностью, поскольку запутанность систем с неограниченной размерностью, так называемых гауссовских состояний [51, 52, 53, 54], довольно хорошо изучена. С точки зрения актуальных исследований главный интерес представляют фотонные системы, занимающие ограниченное число фоковских подпространств (фотонных секторов), поскольку в данной области остается много открытых вопросов.

### 3.1 Критерии запутанности

Критерий запутанности позволяет установить, является ли состояние запутанным или нет, однако он не дает никакой количественной оценки, которая позволила бы сравнивать разные запутанные состояния друг с другом. Для количественных оценок необходимо использовать меры запутанности.

Неравенства Белла сами по себе являются критерием запутанности, поскольку только запутанные состояния могут их нарушать. Степень нару-

шения неравенств может быть использована для количественного описания степени запутанности. Однако исследования показали, что не всякое запутанное состояние нарушает неравенства Белла (например, состояние Вернера [55]), поэтому возникла потребность в разработке альтернативных методов.

В разделе 1.2 мы рассмотрели формальное определение запутанности для чистых и смешанных состояний, однако в качестве критерия запутанности они мало пригодны. Первый удобный аналитический критерий запутанности был независимо представлен израильским физиком Ашером Пересом [56] и семьей польских физиков Городецки (два сына: Майкл, Повел, и их отец Рисзард) [57, 58] в 1996 году. Сейчас этот критерий называют критерием Переса-Городецки или РРТ-критерием (от англ. positive partial transpose).

Суть РРТ-критерия заключается в следующем. Определим частичное транспонирование матрицы плотности следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{AB}^{T_B} &= (I_A \otimes \hat{T}_B) \hat{\rho}_{AB} \\ &= \sum_{nijkl} p_n (c_{ij} c_{mn}^*)^T |i\rangle_A \langle m| \otimes (|j\rangle_B \langle n|)^T \\ &= \sum_{nijkl} p_n c_{in} c_{mj}^* |i\rangle_A \langle m| \otimes |n\rangle_B \langle j|.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Если в результате частичного транспонирования матрица плотности осталась положительно полуопределенной (т.е. все ее собственные значения неотрицательны), то состояние обязано быть сепарабельным. Если хотя бы одно из собственных значений матрицы плотности стало отрицательным, то состояние запутано.

Для примера рассмотрим РРТ-критерий в применении к белловскому состоянию  $|\Psi^{(+)}\rangle$ . Собственные значения его матрицы плотности задаются вектор-столбцом  $\Lambda_\rho = (1, 0, 0, 0)^T$ . После частичного транспонирования у матрицы плотности появляется одно отрицательное собственное значение  $\Lambda_{\rho^{T_B}} = (-1/2, 1/2, 1/2, 1/2)^T$ . Предлагаем читателю самостоятельно провести данные расчеты.

На основе РРТ-критерия можно также ввести меру запутанности. Она носит название логарифмической отрицательности (logarithmic negativity) и задается формулой

$$\mathcal{N} = \log_2 \sum_i |\lambda_i^{T_B}|,\tag{3.2}$$

где  $\lambda_i^{T_B}$  – собственные значения частично транспонированной матрицы плотности. Для положительно полуопределенной матрицы  $\sum_i |\lambda_i^{T_B}| = 1$  и  $\mathcal{N} = 0$ . Для матрицы с отрицательными собственными значениями  $\sum_i |\lambda_i^{T_B}| > 1$  и  $\mathcal{N} > 0$ . Например, для только что рассмотренного частично транспонированного белловского состояния  $\mathcal{N} = \log_2 2 = 1$ .

К сожалению, РРТ-критерий оказался не универсальным. Он безотказно работает для систем малой размерности  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$  и  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$ , то есть когда матрица плотности композитной системы имеет размерность  $4 \times 4$  или  $6 \times 6$ . В системах большей размерности существуют запутанные состояния, матрица плотности которых остается положительно полуопределенной даже после взятия частичного следа. Также проблема критерия Переса-Городецки заключается в том, что он достаточно абстрактен и его трудно использовать в экспериментальных исследованиях.

В качестве альтернативы РРТ-критерию была предложена концепция так называемого свидетеля запутанности (entanglement witness). Еще Городецки в своей работе [57] показали, что для всякой составной квантовой системы существует такой эрмитов оператор  $\hat{W}$ , что

$$\text{Tr}\{\hat{W}\hat{\rho}_{sep}\} \geq 0 \cap \text{Tr}\{\hat{W}\hat{\rho}_{ent}\} < 0, \quad (3.3)$$

где  $\hat{\rho}_{sep}$  и  $\hat{\rho}_{ent}$  – сепарабельная и запутанная матрицы плотности соответственно. В 2000 году физик-теоретик из Нидерландов Барбара Терхал показала, что нарушение неравенств Белла может быть сформулировано в терминах свидетеля запутанности [59]: неравенства Белла соответствуют свидетелю запутанности  $\hat{W} = 2\hat{I} - \hat{B}_{CHSH}$ .

Выражение  $\text{Tr}\{\hat{W}\hat{\rho}_{sep}\} \geq 0$  также называют обобщенным неравенством Белла: в отличие от обычных неравенств Белла, которые позволяют различать локальные и нелокальные корреляции, но не обязательно различают запутанные и незапутанные состояния, обобщенное неравенство позволяет различать запутанные и незапутанные состояния, но не обязательно различает локальные и нелокальные корреляции.

Концепция свидетелей запутанности стала очень популярной в научном сообществе и получила широкое развитие. Главное преимущество свидетеля запутанности состоит в том, что с его помощью запутанность можно детектировать экспериментально без необходимости проведения полной томографии состояния – достаточно лишь измерить среднее значение некоторой наблюдаемой величины.

## 3.2 Меры запутанности

Существуют различные подходы к разработке мер запутанности. Одним из наиболее очевидных путей является использование «геометрического» подхода. В декартовых координатах расстояние между двумя точками  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$  измеряется с помощью евклидовой метрики

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (3.4)$$

Аналогичную метрику можно построить для матриц плотности в гильбертовом пространстве.

При построении меры  $M$  такого сорта необходимо, чтобы она удовлетворяла следующим условиям [48]:

1.  $M(\rho) = 0 \Leftrightarrow \hat{\rho} = \hat{\rho}_{sep}$
2. Локальные унитарные операции не должны менять меру:  $M(\rho) = M(\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B \rho \hat{U}_A^\dagger \otimes \hat{U}_B^\dagger)$ ;
3. Мера запутанности не может быть увеличена путем локальных обобщенных преобразований и классической коммуникации;

Существует термин «локальные операции и классическая коммуникация» (ЛОСС), который обозначает метод манипуляций с запутанностью за счет классических каналов связи (например, телефонной связи) и локальных измерений. Типичный пример использования ЛОСС – рассмотренная нами квантовая телепортация. Существует также термин «локальные обобщенные измерения» (LGM), который обозначает преобразования типа  $\sum_{ij} \hat{A}_i \otimes \hat{B}_j$ , где операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  обязательно унитарны, но обязательно удовлетворяют условиям полноты  $\sum_i \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i = \sum_i \hat{B}_i^\dagger \hat{B}_i = \hat{I}$ . Локальная коммуникация позволяет классически коррелировать измерение, так что под действием LGM + CC

$$\hat{\rho} \xrightarrow{LGM+CC} \sum_i (\hat{A}_i \otimes \hat{B}_i) \hat{\rho} (\hat{A}_i^\dagger \otimes \hat{B}_i^\dagger). \quad (3.5)$$

Существует множество мер такого типа. Каждая из них обладает своими преимуществами и недостатками. В данном разделе мы подробно рассмотрим меру Гильберта-Шмидта (ГШ), названную в честь двух великих немецких математиков Дэвида Гильберта и Эрхарда Шмидта.

Как известно, квантовомеханические состояния – это векторы в  $N$ -мерном гильбертовом пространстве. Эрмитовы операторы, действующие на такие состояния в гильбертовом пространстве, образуют свое пространство, которое называют пространством ГШ. В этом пространстве задано скалярное произведение

$$\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = \text{Tr} \{ \hat{A}^\dagger \hat{B} \}, \quad (3.6)$$

где  $\hat{A}, \hat{B}$  – некоторые операторы. Метрика (3.6) задает норму оператора

$$\|\hat{A}\|_{HS}^2 = \text{Tr} \{ \hat{A}^\dagger \hat{A} \}. \quad (3.7)$$

Выражение (3.7) называют нормой ГШ. Оператор, для которого норма ГШ (3.7) конечна, то есть меньше бесконечности, называют оператором ГШ.

Матрицу плотности можно рассматривать как вектор в пространстве ГШ. Сепарабельные состояния образуют в этом пространстве выпуклое множество. Элементы, лежащие вне этого множества, называют запутанными состояниями. Расстояние от запутанного состояния до ближайшего сепарабельного состояния логично рассматривать в качестве меры запутанности. Поэтому определим квадрат меры ГШ  $D_{HS}^2$  следующим образом [60]:

$$D_{HS}^2 = \min_{\hat{\rho}_{sep}} \|\hat{\rho} - \hat{\rho}_{sep}\|_{HS}^2, \quad (3.8)$$

то есть квадрат меры ГШ вычисляется как норма ГШ для разности между рассматриваемой матрицей плотности и ближайшей к ней сепарабельной матрицей плотности. Очевидно, что «снизу» область значений для  $D_{HS}$  ограничена нулем. Верхнюю границу нетрудно рассчитать:

$$\begin{aligned} \|\hat{\rho} - \hat{\rho}_{sep}\|_{HS}^2 &= \text{Tr}\{(\hat{\rho} - \hat{\rho}_{sep})^\dagger(\hat{\rho} - \hat{\rho}_{sep})\} = \text{Tr}\{(\hat{\rho} - \hat{\rho}_{sep})^2\} \\ &= \text{Tr}\{\hat{\rho}^2 - 2\hat{\rho}\hat{\rho}_{sep} + \hat{\rho}_{sep}^2\} \leq \text{Tr}\{\hat{\rho}^2 + \hat{\rho}_{sep}^2\} \leq 2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

откуда следует, что  $\sqrt{2} \geq D_{HS} \geq 0$ . Заметим, что мера ГШ тесно связана с понятием свидетеля запутанности. Действительно, рассмотрим

$$\begin{aligned} \|\hat{\rho} - \hat{\rho}_{sep}\|_{HS}^2 &= \text{Tr}\{(\hat{\rho}_{sep} - \hat{\rho})^2\}, \\ \|\hat{\rho} - \hat{\rho}_{sep}\|_{HS} &= \text{Tr}\left\{(\hat{\rho}_{sep} - \hat{\rho}) \frac{\hat{\rho}_{sep} - \hat{\rho}}{\|\hat{\rho} - \hat{\rho}_{sep}\|_{HS}}\right\} \\ &= \left[\hat{C}' = \frac{\hat{\rho}_{sep} - \hat{\rho}}{\|\hat{\rho} - \hat{\rho}_{sep}\|_{HS}}\right] = \text{Tr}\{(\hat{\rho}_{sep} - \hat{\rho})\hat{C}'\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Введем новый оператор  $\hat{C} = \hat{C}' - a\hat{I}$ , где  $a$  – произвольное число. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{(\hat{\rho}_{sep} - \hat{\rho})\hat{C}'\} &= \text{Tr}\{(\hat{\rho}_{sep} - \hat{\rho})\hat{C}\} + a \text{Tr}\{(\hat{\rho}_{sep} - \hat{\rho})\} \\ &= \text{Tr}\{(\hat{\rho}_{sep} - \hat{\rho})\hat{C}\} = \text{Tr}\{\hat{\rho}_{sep}\hat{C}\} - \text{Tr}\{\hat{\rho}\hat{C}\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Если оператор  $\hat{C}$  – свидетель запутанности и  $\hat{\rho} = \hat{\rho}_{ent}$ , то выражение (3.11) максимально в случае, когда  $\text{Tr}\{\hat{\rho}_{sep}\hat{C}\} = 0$ , поскольку  $-\text{Tr}\{\hat{\rho}\hat{C}\} > 0$ . Однако условие  $\text{Tr}\{\hat{\rho}_{sep}\hat{C}\} = 0$  означает ортогональность операторов  $\hat{\rho}_{sep}$  и  $\hat{C}$  в пространстве ГШ. Это возможно только в случае, когда  $\hat{\rho}_{sep} = \hat{\rho}_{sep}^{(0)}$  – ближайшее сепарабельное состояние, а  $\hat{C}$  является тангенциальным вектором на поверхности выпуклого множества в точке касания  $\hat{\rho}_{sep}$ . Таким образом, зная ближайшее сепарабельное состояние, мы можем сконструировать свидетель запутанности

$$\hat{C} = \frac{\hat{\rho}_{sep} - \hat{\rho}}{\|\hat{\rho} - \hat{\rho}_{sep}\|_{HS}} - a\hat{I} = \frac{\hat{\rho}_{sep}^{(0)} - \hat{\rho} - \text{Tr}\left\{\hat{\rho}_{sep}^{(0)}(\hat{\rho}_{sep}^{(0)} - \hat{\rho})\right\}\hat{I}}{\|\hat{\rho} - \hat{\rho}_{sep}^{(0)}\|_{HS}}. \quad (3.12)$$

Поскольку константа  $a$  может быть любой, то ее удобно выбрать в представленном виде. Обратное утверждение тоже верно: зная ближайшее сепарабельное состояние, мы можем сконструировать свидетель запутанности. Так, в 2002 году Бертлман, Нарнхофер и Тирринг показали, что свидетель запутанности вида (3.12) соответствует максимальному нарушению обобщенных неравенств Белла [61, 62].

В завершение данного раздела отметим, что мера ГШ, так же как и все другие существующие меры и критерии запутанности, не универсальна, поскольку она хорошо работает только для систем малой размерности. Связано это со сложностью процедуры нахождения ближайшего сепарабельного состояния. Чтобы обсудить эту процедуру подробнее, в следующей главе читателю предлагается ознакомиться со специальными разделами математики, которые используются для решения обозначенной задачи.

Говоря в целом, задача оценки степени запутанности квантовых состояний общего вида не решена полностью, поэтому исследования в данной области ведутся по сей день.

### 3.3 Контрольные вопросы

1. В чем отличие между критериями и мерами запутанности?
2. В чем заключается критерий запутанности Переса-Городецких? Назовите ограничения данного метода.
3. Что такое свидетель запутанности? Как с ним связано понятие обобщенных неравенств Белла?
4. Перечислите требования, которым должна удовлетворять любая мера запутанности.
5. Что такое норма Гильберта-Шмидта? Как она связана с одноименной мерой? Какое состояние называется ближайшим сепарабельным?
6. Сформулируйте теорему Бертлманна-Нарнхофер-Тирринга.

## Глава 4

# Специальные разделы математики

### 4.1 Матрицы Паули и группы Ли

В 1927 году известный австрийский физик Вольфганг Паули представил научной общественности обобщенный вариант уравнения Шредингера для частиц, обладающих спином  $\pm 1/2$  [63].

$$\left[ \frac{1}{2m} (\boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}))^2 + q\varphi \right] |\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle. \quad (4.1)$$

Здесь  $m$  – масса электрона,  $\hat{\mathbf{p}}$  – оператор импульса<sup>1</sup>,  $q$  – заряд электрона,  $\mathbf{A}$  – векторный потенциал,  $\varphi$  – скалярный потенциал<sup>2</sup>,  $|\psi\rangle = \psi_+ |\uparrow\rangle + \psi_- |\downarrow\rangle$ . В этом уравнении впервые был введен вектор  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ , состоящий из матриц

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

которые мы теперь называем матрицами Паули. Эти матрицы обладают целым набором особых свойств:

1. Нулевой след:  $\text{Tr}\{\sigma_i\} = 0$
2. Эрмитовость:  $\sigma_i^\dagger = \sigma_i$
3. Унитарность:  $\sigma_i^\dagger \sigma_i = \sigma_i^2 = I$
4. Одинаковый определитель  $\det\{\sigma_i\} = -1$
5. Ортогональность относительно нормы Гильберта-Шмидта  $\text{Tr}\{\sigma_i^\dagger \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$ . Ортогональность вытекает из соотношения  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} I + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k$ ,

---

<sup>1</sup>Здесь и далее жирным шрифтом мы обозначаем векторы.

<sup>2</sup>Потенциалы в данном случае рассматриваются в классическом виде, поэтому входят в уравнение не в операторной форме.

где  $\varepsilon_{ijk}$  – символ Чевы-Левиты<sup>3</sup>.

## 6. Генераторы группы SU(2).

Особая значимость матриц Паули для квантовой физики обусловлена во многом свойством (6). Чтобы показать это наглядно, вкратце напомним основные понятия теории групп<sup>4</sup>. Группой  $G$  называют такое множество элементов  $g_i \in G$ , над которым определена операция обобщенного умножения  $g_a \circ g_b = g_c \in G$ , удовлетворяющая следующим условиям:

1. Ассоциативность  $g_a \circ (g_b \circ g_c) = (g_a \circ g_b) \circ g_c$
2. Наличие единичного элемента  $g_I$ , удовлетворяющего условиям  $g_I \circ g_b = g_b \circ g_I = g_b$
3. Наличие для каждого элемента группы  $g_a$  обратного элемента  $g_a^{-1}$ :  
 $g_a \circ g_a^{-1} = g_a^{-1} \circ g_a = g_I$

В качестве обобщенного умножения могут использоваться различные операции: обычное умножение, сложение, вычитание и др. Простейший пример группы – квадратные корни единицы  $\{-1, 1\}$ , создающие группу под операцией обычного умножения. Действительно, в результате перемножения элементов группы мы можем получить только 1 или  $-1$ . Единичный элемент группы – это 1. Каждый элемент группы является собственным обратным элементом.

Существует ряд особых матричных групп, которые оказались настолько полезными для математических и физических приложений, что им присвоили отдельные названия. К их числу относятся, например  $SO(N)$ <sup>5</sup> и  $SU(N)$ <sup>6</sup> группы. Группа  $SO(N)$  представляет собой множество матриц  $\{M_i\}$  размерностью  $N \times N$ , которые удовлетворяют условию ортогональности  $M_i^T M_i = I$  и специальности (или особенности, т.е. некоторое дополнительное условие, выделяющее определенную подгруппу среди всех ортогональных матриц)  $\det\{M_i\} = 1$ , а также над которыми определена операция матричного умножения. Группа  $SU(N)$  определена аналогично, за исключением того, что требование ортогональности в ней заменено требованием унитарности  $M_i^\dagger M_i = I$ . Группы  $SO(N)$  и  $SU(N)$  тесно связаны друг с другом, поэтому сперва мы рассмотрим группу  $SO(3)$ , которая имеет очевидный геометрический смысл.

<sup>3</sup>Напомним, что символ Чевы-Левиты – это сокращенное название совершенно-антисимметричного тензора 3-го ранга. Его компоненты равны нулю, если хотя бы два индекса тензора одинаковы; равны единице, если комбинация  $ijk$  может быть получена циклической перестановкой координат  $xyz$ ; равны минус единице, если комбинация  $ijk$  не может быть получена циклической перестановкой координат  $xyz$ :  $\varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{zyx} = \varepsilon_{yxz} = 1$ ,  $\varepsilon_{xzy} = \varepsilon_{yzx} = \varepsilon_{zxy} = -1$ .

<sup>4</sup>Подробно с теорией групп в физическом контексте можно ознакомиться, например, в монографии [64].

<sup>5</sup>SO – special orthogonal (специальная ортогональная).

<sup>6</sup>SU – special unitary (специальная унитарная).

### 4.1.1 Группа $SO(3)$

Группа  $SO(3)$  состоит из матриц  $R$ , которые осуществляют вращение вектора в декартовой системе координат. Действительно, вспомним, что определяющим свойством операции поворота является то, что в результате ее применения длина вектора не меняется. Квадрат нормы вектора  $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$  в матричном виде задается соотношением  $\mathbf{r}^T \mathbf{r}$ . Тогда для нового вектора  $\mathbf{r}' = R\mathbf{r}$  справедливо соотношение  $\mathbf{r}'^T \mathbf{r}' = (R\mathbf{r})^T R\mathbf{r} = \mathbf{r}^T R^T R \mathbf{r}$ . Если мы требуем, чтобы в результате применения матрицы  $R$  норма вектора не менялась, то матрица  $R$  должна быть ортогональной, то есть  $R^T R = I$ .

Посчитаем теперь определитель ортогональной матрицы:  $\det\{R^T R\} = \det\{R^T\} \det\{R\} = (\det\{R\})^2 = \det\{I\} = 1$ , откуда следует  $\det\{R\} = \pm 1$ . Ортогональные матрицы с отрицательным определителем соответствуют отражению вектора относительно заданной плоскости либо повороту, комбинированному с отражением. Например, матрица

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

задает преобразование  $z \rightarrow -z$ , то есть отражает вектор относительно плоскости  $yx$ . Группа  $SO(3)$  включает в себя только матрицы с положительным определителем, то есть матрицы, осуществляющие поворот в трехмерном пространстве. Эти матрицы несложно получить самостоятельно из простых геометрических соображений, что мы и предлагаем сделать читателю. Если читатель не поленится, то он обнаружит, что матрицы  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$ , задающие поворот трехмерного вектора вокруг одной из осей декартовых координат  $x, y, z$  на угол  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  соответственно имеют следующий вид:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix}, \quad R_y = \begin{pmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{pmatrix} \quad (4.4)$$
$$R_z = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если у читателя еще не иссяк энтузиазм (если он вообще был, конечно), то он может самостоятельно убедиться в ортогональности и специальности этих матриц.

Известно, что всякую аналитическую функцию<sup>7</sup> можно разложить в ряд Тейлора. То же самое можно сделать и для матрицы, элементы которой являются аналитическими функциями. Выполним такое разложение для матриц поворота в точках  $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ :

$$\begin{aligned} R_x(\theta_x) &\approx \sum_n \frac{d^n R_x}{d\theta_x^n} \Big|_{\theta_x=0} \theta_x^n = I + J_x \theta_x + J_x^2 \theta_x^2 + J_x^3 \theta_x^3 + \dots = \exp\{J_x \theta_x\}, \\ R_y(\theta_y) &\approx \sum_n \frac{d^n R_y}{d\theta_y^n} \Big|_{\theta_y=0} \theta_y^n = I + J_y \theta_y + J_y^2 \theta_y^2 + J_y^3 \theta_y^3 + \dots = \exp\{J_y \theta_y\}, \\ R_z(\theta_z) &\approx \sum_n \frac{d^n R_z}{d\theta_z^n} \Big|_{\theta_z=0} \theta_z^n = I + J_z \theta_z + J_z^2 \theta_z^2 + J_z^3 \theta_z^3 + \dots = \exp\{J_z \theta_z\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Обратим внимание, что матрицы  $J_x, J_y, J_z$  образуют базис в линейном пространстве кососимметричных матриц (кососимметричной или антисимметричной матрицей называют любую матрицу  $A$ , которая удовлетворяет условию  $A^T = -A$ ). Действительно, всякая кососимметричная матрица имеет общий вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} &= x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= xJ_x + yJ_y + zJ_z. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Факт того, что генераторы  $SO(3)$  образуют базис в пространстве кососимметричных матриц, следует из ортогональности элементов  $SO(3)$ . Действительно, положим, что матрица вращения задается матричной экспонентой  $R = \exp\{A\}$ , где  $A$  – некоторая матрица. Рассмотрим малое вращение, для которого можно разложить матрицу в первом порядке малости:

$$R^T R \approx (I + A^T)(I + A) \approx I + (A^T + A). \quad (4.8)$$

Из требования ортогональности следует, что на матрицу  $A$  накладывается условие  $A^T = -A$ , но это и есть условие кососимметричности. Отсюда следует, что всякий поворот в  $SO(3)$  задается кососимметричной матрицей, а

---

<sup>7</sup>Аналитической называют функцию, которая в окрестности любой из своих точек может быть описана сходящимся степенным рядом.

поскольку всякая кососимметричная матрица задается базисом  $J_x, J_y, J_z$ , то базисные матрицы определяют любой элемент  $SO(3)$ . В связи с этим матрицы  $J_x, J_y, J_z$  называют генераторами группы  $SO_3$ . Если ввести векторы  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)$  и  $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ , то общий элемент  $SO(3)$  можно записать в форме  $R = \exp\{J_a\theta_a\}$ , где подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу  $J_a\theta_a = \sum_a J_a\theta_a = \mathbf{J}\boldsymbol{\theta}$  (это так называемое правило суммирования Эйнштейна, которое широко используется в тензорном анализе).

Заметим, что полученные генераторы удовлетворяют следующему коммутационному соотношению:  $[J_i, J_j] = -\varepsilon_{ijk}J_k$ . Для физических приложений оказывается удобным произвести замену  $\tilde{J}_i = -iJ_i$ , поскольку матрицы  $\tilde{J}_i$  эрмитовы. Элементы  $SO(3)$  в таком случае описываются выражением  $R = \exp\{-i\mathbf{J}\boldsymbol{\theta}\}$ , а генераторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\tilde{J}_i, \tilde{J}_j] = i\varepsilon_{ijk}\tilde{J}_k. \quad (4.9)$$

Заметим, что для заданных генераторов справедливо тождество

$$\begin{aligned} & [\tilde{J}_x, [\tilde{J}_y, \tilde{J}_z]] + [\tilde{J}_y, [\tilde{J}_z, \tilde{J}_x]] + [\tilde{J}_z, [\tilde{J}_x, \tilde{J}_y]] \\ & = i[\tilde{J}_x, \tilde{J}_x] + i[\tilde{J}_y, \tilde{J}_y] + i[\tilde{J}_z, \tilde{J}_z] = 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

которое называют тождеством Якоби. Поскольку коммутатор (4.9) удовлетворяет тождеству Якоби (4.10) и условию кососимметрии  $[\tilde{J}_i, \tilde{J}_j] = -[\tilde{J}_j, \tilde{J}_i]$ , то генераторы  $\tilde{J}_x, \tilde{J}_y, \tilde{J}_z$  образуют так называемую алгебру Ли. Алгебра Ли – это, по определению, векторное пространство, над которым определены скобки Ли, удовлетворяющие трем требованиям: билинейность (операция линейна по первому аргументу, если второй зафиксирован и наоборот), кососимметричность и выполнение тождества Якоби. Таким образом, базисные элементы алгебры Ли  $so(3)$  (чтобы отличать алгебру от группы, ее обозначают малыми буквами) являются генераторами группы  $SO(3)$ .

Изучив структуру группы  $SO(3)$ , перейдем к группе  $SU(2)$ .

### 4.1.2 Группа $SU(2)$

Группа  $SU(2)$  включает в себя унитарные ( $U^\dagger U = I$ ) матрицы  $U$  размерностью  $2 \times 2$ , которые обладают единичным определителем  $\det\{U\} = 1$ . Зная структуру группы  $SO(3)$ , предположим, что элемент группы  $SU(2)$  может быть представлен в виде матричной экспоненты  $U = \exp\{-iH\}$ . Рассмотрим ее в первом порядке малости

$$U^\dagger U \approx (I + iH^\dagger)(I - iH) \approx I + i(H^\dagger - H). \quad (4.11)$$

Требование унитарности для элемента  $SU(2)$  накладывает условие эрмитовости  $H^\dagger = H$  на матрицу  $H$ . Напомним, что любая эрмитова матрица всегда может быть диагонализирована, то есть представлена в виде  $H = W^\dagger \Lambda W$ ,

где  $W^\dagger W = I$ ,  $\Lambda = \text{diag } \lambda_i$  – диагональная матрица собственных значений матрицы  $\lambda_i$ . Пользуясь этим свойством, рассмотрим определитель матрицы  $U$

$$\begin{aligned} \det\{U\} &= \det\{\exp\{-iH\}\} = \det\{\exp\{-iW^\dagger\Lambda W\}\} = \det\{W^\dagger \exp\{-i\Lambda\}W\} \\ &= \det\{W^\dagger W\} \det\{\exp\{-i\Lambda\}\} = \det\{\exp\{-i\Lambda\}\} = \prod_j \exp\{-i\lambda_j\} \\ &= \exp\left\{-i \sum_j \lambda_j\right\} = \exp\{-i \text{Tr}\{W^\dagger\Lambda W\}\} = \exp\{-i \text{Tr}\{H\}\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Требование единичного определителя накладывает условие на след матрицы  $H$ : он должен равняться нулю  $\text{Tr}\{H\} = 0$ . Поскольку определенные нами свойства  $H$  никак не зависят от размерности пространства  $SU$ , то можно заключить, что генераторы  $SU(N)$  – эрмитовы, бесследовые матрицы. Для  $SU(2)$  матрица, удовлетворяющая этим условиям, в общем виде представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta_z & \theta_x - i\theta_y \\ \theta_x + i\theta_y & -\theta_z \end{pmatrix} \\ &= \frac{\theta_x}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta_y}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta_z}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \theta_a \sigma_a. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Из (4.13) следует, что матрицы Паули являются генераторами группы  $SU(2)$ , а значит, они должны образовывать алгебру Ли. Действительно, для матриц Паули справедливо коммутационное соотношение  $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ . Чтобы получить коммутационное соотношение, идентичное (4.9), необходимо умножить коммутатор  $[\sigma_i, \sigma_j]$  на  $1/4$ , откуда получаем

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\varepsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}. \quad (4.14)$$

Именно поэтому мы ввели множитель  $1/2$  в (4.13). Структура алгебры  $SO(3)$  полностью идентична структуре алгебры  $SU(2)$  с точностью до замены элементов  $\tilde{J}_i \leftrightarrow \sigma_i/2$ . В таком случае говорят, что эти алгебры изоморфны.

Рассмотрим теперь действие унитарной матрицы  $U$  на произвольную эрмитову и безследовую матрицу  $X$

$$X = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

так что  $X' = U^\dagger X U$ .

$$(X')^\dagger = (U^\dagger X U)^\dagger = U^\dagger X^\dagger U = U^\dagger X U = X'. \quad (4.16)$$

Значит, преобразование вида  $U^\dagger X U$  сохраняет эрмитовость. То же самое можно сказать про след  $\text{Tr}\{U^\dagger X U\} = \text{Tr}\{X\} = 0$ . Теперь посмотрим, что происходит с определителем матрицы  $X$ . Для исходной и преобразованной матриц имеем  $\det\{X\} = -(x^2 + y^2 + z^2)$  и  $\det\{X'\} = -((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)$ , соответственно. С другой стороны:

$$\det\{X'\} = \det\{U^\dagger X U\} = \det\{U^\dagger U\} \det\{X\} = \det\{X\}. \quad (4.17)$$

Из (4.17) следует, что длина вектора  $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$  сохраняется  $(\mathbf{r}')^2 = \mathbf{r}^2$ . Но мы уже отмечали, что в математике операции, которые сохраняют длину вектора и представляются матрицами с единичным определителем, называют вращениями. Чтобы наглядно понять, о каком вращении идет речь, рассмотрим преобразование  $U^\dagger(x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z)U$ . Для этого перепишем  $U$  в другой форме:

$$U = \exp\{-i\theta_a\sigma_a/2\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta_a\sigma_a)^n}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta_a\sigma_a)^{2n}}{2^{2n}(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\theta_a\sigma_a)^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!}. \quad (4.18)$$

Для дальнейших преобразований нам понадобится следующее соотношение

$$\begin{aligned} (u_a\sigma_a)(v_b\sigma_b) &= u_a v_b (\delta_{ab}I + i\varepsilon_{abc}\sigma_c) \\ &= u_a v_a I + i\varepsilon_{abc}u_a v_b \sigma_c = u_a v_a I + i(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_c \sigma_c. \end{aligned} \quad (4.19)$$

При выводе (4.19) использована связь между векторным произведением и совершенно антисимметричным тензором 3-го ранга Чевы-Левитты  $\varepsilon_{abc}$ . Действительно, рассмотрим тензорное произведение

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_x(u_y v_z - u_z v_y) + \mathbf{e}_y(u_z v_x - u_x v_z) + \mathbf{e}_z(u_x v_y - u_y v_x) \\ &= \mathbf{e}_x \varepsilon_{abx} u_a v_b + \mathbf{e}_y \varepsilon_{aby} u_a v_b + \mathbf{e}_z \varepsilon_{abz} u_a v_b = \mathbf{e}_c \varepsilon_{abc} u_a v_b, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где  $\mathbf{e}_c$  – соответствующий единичный орт. Из (4.20) очевидно, что  $\mathbf{w}\sigma = \mathbf{w}_c \sigma_c = \varepsilon_{abc} u_a v_b \sigma_c$ .

Используя (4.19), мы получаем  $(\theta_a \sigma_a)^2 = \theta^2 I$ , где  $\theta^2 = |\boldsymbol{\theta}|^2$ , откуда

$$\begin{aligned} U &= I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\theta/2)^{2n}}{(2n)!} - i\mathbf{e}_\theta \boldsymbol{\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\theta/2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= I \cos \frac{\theta}{2} - i\mathbf{e}_\theta \boldsymbol{\sigma} \sin \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Здесь  $\mathbf{e}_\theta = (\theta_x/|\boldsymbol{\theta}|)\mathbf{e}_x + (\theta_y/|\boldsymbol{\theta}|)\mathbf{e}_y + (\theta_z/|\boldsymbol{\theta}|)\mathbf{e}_z$  – единичный орт, задающий направление вектора  $\boldsymbol{\theta}$ . С помощью (4.21) преобразуем выражение  $U^\dagger \sigma_a U$

в случае  $U = \exp\{i\theta\sigma_z/2\}$ :

$$\begin{aligned}
U^\dagger\sigma_aU &= \exp\{i\theta\sigma_z/2\}\sigma_a\exp\{-i\theta\sigma_z/2\} \\
&= (I\cos\frac{\theta}{2} + i\sigma_z\sin\frac{\theta}{2})\sigma_a(I\cos\frac{\theta}{2} - i\sigma_z\sin\frac{\theta}{2}) \\
&= \sigma_a\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{i}{2}[\sigma_a, \sigma_z]\sin\theta + \sigma_z\sigma_a\sigma_z\sin^2\frac{\theta}{2} \\
&= \sigma_a\cos^2\frac{\theta}{2} + \varepsilon_{azc}\sigma_c\sin\theta + \sigma_z(2i\varepsilon_{azc}\sigma_c + \sigma_z\sigma_a)\sin^2\frac{\theta}{2} \\
&= \sigma_a + \varepsilon_{azc}\sigma_c\sin\theta + 2i\varepsilon_{azc}(\delta_{zc}I + i\varepsilon_{zcs}\sigma_s)\sin^2\frac{\theta}{2}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Из (4.22) получаем

$$\begin{aligned}
U^\dagger\sigma_xU &= \sigma_x\cos\theta - \sigma_y\sin\theta, \\
U^\dagger\sigma_yU &= \sigma_y\cos\theta + \sigma_x\sin\theta, \\
U^\dagger\sigma_zU &= \sigma_z.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Подставляем полученные преобразования в  $U^\dagger(x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z)U$ :

$$\begin{aligned}
U^\dagger(x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z)U &= x(\sigma_x\cos\theta - \sigma_y\sin\theta) + y(\sigma_y\cos\theta + \sigma_x\sin\theta) + z\sigma_z \\
&= (x\cos\theta + y\sin\theta)\sigma_x + (-x\sin\theta + y\cos\theta)\sigma_y + z\sigma_z = x'\sigma_x + y'\sigma_y + z'\sigma_z.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Таким образом, мы получили следующее преобразование для координат в базисе матриц Паули:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

Обратите внимание, что полученная матрица преобразования полностью совпадает с  $R_z$ . Нетрудно заключить, что всякий элемент  $SU(2)$  осуществляет вращение вектора, задающего координаты эрмитовой безследовой матрицы в базисе матриц Паули, точно так же, как всякий элемент  $SO(3)$  осуществляет вращение обычного геометрического вектора в декартовых координатах.

Несмотря на схожесть структуры групп  $SU(2)$  и  $SO(3)$ , нельзя сказать, что они неизоморфны, поскольку в  $SU(2)$  одному вращению соответствуют два набора матриц. Действительно,  $U^\dagger XU = (-U)^\dagger X(-U)$ . В  $SO(3)$  одному вращению соответствует только одна матрица. С этим связан следующий любопытный факт. Мы знаем, что при угле вращения вокруг одной из осей  $\theta_a = 2\pi$  соответствующая матрица поворота должна обратиться в единичную матрицу. Рассмотрим, например, вращение вокруг оси  $z$ . Тогда согласно (4.4)  $R_z(2\pi) = I$ . Теперь рассмотрим аналогичное вращение в

$SU(2) \exp\{-i2\pi\sigma_z/2\}$ :

$$\exp\{-i2\pi\sigma_z/2\} = \begin{pmatrix} \exp\{-i\pi\} & 0 \\ 0 & \exp\{i\pi\} \end{pmatrix} = -I. \quad (4.26)$$

Как видно, в данном случае полного поворота не происходит. Чтобы получить единичную матрицу в  $SU(2)$ , необходимо провести вращение на  $4\pi$ . Поэтому говорят, что  $SU(2)$  покрывает  $SO(3)$  дважды: один полный оборот в  $SU(2)$  соответствует двум полным оборотам в  $SO(3)$ . В заключение отметим, что хотя группы  $SU(2)$  и  $SO(3)$  неизоморфны, они все же локально изоморфны, поскольку вблизи  $I$ , то есть на уровне бесконечно малых преобразований, группы идентичны (поскольку их алгебры изоморфны).

### 4.1.3 Матрицы Паули в квантовой физике

В подразделе 1.2 мы обсуждали, что матрица плотности по определению эрмитова и обладает единичным следом. В предыдущем подразделе мы выяснили, что всякая бесследовая эрмитова матрица представима в базисе матриц (операторов) Паули. Тогда матрицу плотности можно получить, добавив к бесследовой эрмитовой матрице единичную матрицу:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\hat{I} + \frac{1}{2}\mathbf{r}\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2}\hat{I} + \frac{1}{2}(r_x\hat{\sigma}_x + r_y\hat{\sigma}_y + r_z\hat{\sigma}_z) \quad (4.27)$$

где  $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$  – вектор Блоха. Этот вектор задает координаты состояния в базисе матриц Паули. Строго говоря, в представлении (4.27) мы имеем дело с операторами Паули, которые представляются матрицами Паули, однако на практике операторы Паули также называют матрицами Паули. Мы будем различать матрицы и операторы Паули, используя соответствующий знак оператора.

Компоненты вектора Блоха вычисляются как среднее значение для соответствующей матрицы Паули

$$r_i = \text{Tr}\{\hat{\sigma}_i\hat{\rho}\}. \quad (4.28)$$

Рассмотрим квадрат матрицы плотности

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^2 &= \frac{1}{4}(\hat{\sigma}_0 + 2 \sum_i r_i \hat{\sigma}_i + \sum_{ij} r_i r_j \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j) \\ &= \frac{1}{4}(\hat{\sigma}_0 + 2 \sum_i r_i \hat{\sigma}_i + \sum_{ij} r_i r_j (\delta_{ij} I + i \varepsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k)) \\ &= \frac{1}{4}(\hat{\sigma}_0 + 2 \sum_i r_i \hat{\sigma}_i + r^2 I + i \sum_{ij} r_i r_j \varepsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Тогда чистота матрицы плотности

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\{\rho^2\} &= \frac{1}{2}(1 + r^2), \\ r^2 &= 2 \mathrm{Tr}\{\rho^2\} - 1.\end{aligned}\tag{4.30}$$

Из (4.30) следует, что для чистого состояния модуль вектора Блоха равен  $r^2 = 1$  (вектор Блоха находится на сфере Блоха), а для смешанного —  $r^2 < 1$  (вектор находится внутри сферы Блоха).

Заметим, что операторы Паули не являются положительно определенными операторами, поскольку имеют отрицательные собственные значения. Однако матрица плотности в представлении (4.27) остается положительно определенной. Действительно, в общей записи

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1+z}{2} & \frac{x-iy}{2} \\ \frac{x+iy}{2} & \frac{1-z}{2} \end{pmatrix}.\tag{4.31}$$

Собственные значения матрицы плотности (4.31) равны  $\lambda_{\pm} = (1 \pm |r|)/2$ . Их положительность обеспечивается ограничением, наложенным на модуль вектора Блоха, которые следует из свойства чистоты матрицы плотности.

Матричный базис Паули чаще всего используется для визуализации вектора состояния кубита  $|q\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  ( $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ) на сфере Блоха. Матрица плотности такого кубита имеет вид

$$\rho = |q\rangle\langle q| = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & b^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ ba^* & |b|^2 \end{pmatrix}.\tag{4.32}$$

Найдем координаты вектора Блоха для (4.32)

$$\begin{aligned}r_x &= \mathrm{Tr}\{\rho\sigma_x\} = \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ ba^* & |b|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} ab^* & |a|^2 \\ |b|^2 & ba^* \end{pmatrix} = ab^* + ba^*, \\ r_y &= \mathrm{Tr}\{\rho\sigma_y\} = \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ ba^* & |b|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} iab^* & -i|a|^2 \\ i|b|^2 & -iba^* \end{pmatrix} = i(ab^* - ba^*), \\ r_z &= \mathrm{Tr}\{\rho\sigma_z\} = \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ ba^* & |b|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} |a|^2 & -ab^* \\ ba^* & -|b|^2 \end{pmatrix} = |a|^2 - |b|^2.\end{aligned}\tag{4.33}$$

Несколько конкретных примеров для разных  $a, b$  приведены в Таблице 4.1. Матрицы Паули можно использовать для описания составных гильбертовых пространств размерностью  $2 \times 2$ , то есть для матриц плотности раз-

Таблица 4.1: Компоненты вектора Блоха для разных состояний кубита

$r_i$	$a = 1,$ $b = 0$	$a = 0,$ $b = 1$	$a = 1/\sqrt{2},$ $b = 1/\sqrt{2}$	$a = -i/\sqrt{2},$ $b = 1/\sqrt{2}$
$r_x$	0	0	1	0
$r_y$	0	0	0	1
$r_z$	1	-1	0	0

мерностью  $4 \times 4$ . Рассмотрим, например, сепарабельное состояние

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{12} &= \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2 = \frac{1}{4}(\hat{I} + \sum_n r_n^{(1)} \hat{\sigma}_n) \otimes (\hat{I} + \sum_m r_m^{(2)} \hat{\sigma}_m) \\ &= \frac{1}{4}(I \otimes \hat{I} + \sum_n r_n^{(1)} \hat{\sigma}_n \otimes \hat{I} + \sum_m r_m^{(2)} I \otimes \hat{\sigma}_m + \sum_{mn} r_n^{(1)} r_m^{(2)} \hat{\sigma}_n \otimes \hat{\sigma}_m).\end{aligned}\quad (4.34)$$

Если на композитное сепарабельное состояние действуют только подпространственные унитарные операторы  $\hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2$ , то необходимости рассматривать матрицу плотности в базисе  $\sigma_n \otimes \sigma_m$  нет. Однако, если на композитное состояние подействует общее преобразование  $\hat{U}_{12} \neq \hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2$ , то в общем случае состояние может стать запутанным. В таком случае состояние можно выразить только в композитном базисе матриц Паули  $\sigma_n \otimes \sigma_m$

$$\begin{aligned}\rho_{12} &= \frac{1}{4}(I \otimes I + \sum_m a_m I \otimes \sigma_m + \sum_n b_n \sigma_n \otimes I + \sum_{mn} c_{nm} \sigma_n \otimes \sigma_m), \\ a_k &= \text{Tr}\{\rho_{12} I \otimes \sigma_k\}, \quad b_k = \text{Tr}\{\rho_{12} \sigma_k \otimes I\}, \quad c_{kl} = \text{Tr}\{\rho_{12} \sigma_k \otimes \sigma_l\}.\end{aligned}\quad (4.35)$$

Для примера рассмотрим двумодовое состояние  $|\psi\rangle = |1\rangle_1 |0\rangle_2$ , которое описывает фотон, падающий на светоделитель с одного из входных портов. Изначально состояние сепарабельно и в композитном базисе матриц Паули имеет матрицу плотности вида

$$\rho_{12} = \frac{1}{4}(\hat{I} \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{\sigma}_z - \hat{\sigma}_z \otimes \hat{I} - \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z).\quad (4.36)$$

Преобразование светоделителя задается оператором  $\hat{U}$

$$\begin{pmatrix} b_1^\dagger \\ b_2^\dagger \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} a_1^\dagger \\ a_2^\dagger \end{pmatrix} = e^{i\phi_0} \begin{pmatrix} \cos \theta e^{i\phi_r} & \sin \theta e^{i\phi_r} \\ -\sin \theta e^{-i\phi_r} & \cos \theta e^{-i\phi_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^\dagger \\ a_2^\dagger \end{pmatrix}.\quad (4.37)$$

где  $a_i^\dagger, b_i^\dagger$  – операторы рождения соответствующей моды на входе и выходе из светоделителя, соответственно;  $\phi_{0,r,\tau}$  – соответствующие фазы. Для удобства их всегда можно занулить  $\phi_{0,r,\tau} = 0$ . При  $\phi_0 = 0$  матрица, соответствующая оператору светоделителя, становится элементом  $SU(2)$ . Однако

существенно, что  $\hat{U}$  осуществляет вращение не в одномодовом гильбертовом пространстве, а в двумодовом. Поэтому оператор  $\hat{U}$  вращает не вектора Блоха в базисе матриц Паули, как в случае кубита, а вращает пятнадцатимерный вектор

$$(a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, c_{xx}, c_{xy}, c_{xz}, c_{yx}, c_{yy}, c_{yz}, c_{zx}, c_{zy}, c_{zz})^T \quad (4.38)$$

в базисе  $\sigma_n \otimes \sigma_m$ .

В результате преобразования (4.37) состояние  $|\psi\rangle = a_1^\dagger |0\rangle_1 |0\rangle_2$  преобразуется в вектор  $|\psi\rangle = (a_1^\dagger \cos \theta + a_2^\dagger \sin \theta) |0\rangle_1 |0\rangle_2 = \cos \theta |1\rangle_1 |0\rangle_2 + \sin \theta |0\rangle_1 |1\rangle_2$ . Этот вектор описывает запутанное состояние, которое при  $\theta = \pi/4$  обращается в состояние Белла  $|\Psi^{(+)}\rangle$ . Матрица плотности такого состояния имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{12} = \frac{1}{4} & \left( \hat{I} \otimes \hat{I} + \cos 2\theta \hat{I} \otimes \hat{\sigma}_z - \cos 2\theta \hat{\sigma}_z \otimes \hat{I} \right. \\ & \left. + \sin 2\theta \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x + \sin 2\theta \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y - \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Заметим, что вращение такого сорта уменьшает значение проекций  $\hat{I} \otimes \hat{\sigma}_z$ ,  $\hat{\sigma}_z \otimes \hat{I}$  и увеличивает проекции  $\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x$  и  $\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y$ . Для сбалансированного светоделителя ( $\theta = \pi/4$ )

$$\hat{\rho}_{12} = \frac{1}{4} (\hat{I} \otimes \hat{I} + \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y - \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z). \quad (4.40)$$

В результате такого поворота мы полностью перевели компоненты  $\hat{I} \otimes \sigma_z$  и  $\sigma_z \otimes \hat{I}$  в компоненты  $\sigma_x \otimes \sigma_x$  и  $\sigma_y \otimes \sigma_y$ .

В случае, когда на светоделитель падает не один, а два фотона, как это обычно и происходит, размерность одномодового подпространства задается матрицей  $3 \times 3$ , а композитного пространства – матрицей  $9 \times 9$ . В таком случае матрицы Паули становятся неприменимы. Возникает естественный вопрос: существует ли аналог матриц Паули для матриц большей размерности? Ответ на этот вопрос мы рассмотрим в следующем разделе.

## 4.2 Обобщенный матричный базис Гелл-Манна

В 1961 году американский физик-теоретик Мюррей Гелл-Манн работал над проблемами теории сильных взаимодействий, исследуя поведение барионов и мезонов. В процессе работы перед Гелл-Манном встала задача о возможности обобщения матриц Паули для  $SU(3)$ . Так появились матрицы Гелл-Манна [65]. Тремя годами позднее, используя эти матрицы, Гелл-Манн предсказал существование кварков, из которых, как мы сегодня зна-

ем, состоят элементарные частицы. В 1969 году Гелл-Манн получил Нобелевскую премию за свои плодотворные труды в области физики сильных взаимодействий<sup>8</sup>.

После вывода матриц Гелл-Манна возник закономерный вопрос о возможности их обобщения на  $N$ -мерный случай. Оказалось, что и такое возможно [66, 67].  $N$ -мерный обобщенный базис Гелл-Манна включает в себя единичную матрицу и  $N - 1$  матриц  $\{A_i\}$ , обладающих нулевым следом, эрмитовостью и ортогональностью в пространстве ГШ  $\text{Tr}\{A_i^\dagger A_j\} = 2\delta_{ij}$ . Матрицы  $\{A_i\}$  в общем случае являются генераторами  $SU(N)$ . Всякое квантовое состояние в  $N$ -мерном гильбертовом пространстве может быть представлено в базисе обобщенных матриц Гелл-Манна

$$\rho = \frac{1}{N}\left(I + \frac{1}{2}\mathbf{a}\mathbf{A}\right), \quad (4.41)$$

где  $\mathbf{a}$  – обобщенный вектор Блоха.

Заметим, что остальные свойства матриц обобщенного базиса необязательно совпадают со свойствами матриц Паули. Например, матрицы обобщенного базиса в общем случае не унитарны. В двумерном пространстве матриц всякому вектору Блоха соответствует матрица плотности из гильбертова пространства; в  $N$ -мерном пространстве матриц это не так, поскольку положительная определенность матрицы плотности сохраняется не для всякого вектора Блоха.

Рассмотрим общие ограничения, накладываемые на обобщенный вектор Блоха в обобщенном базисе

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\rho^2\} &= \frac{1}{N^2} \text{Tr}\{(I + a_n A_n + a_n a_m A_n A_m)\} = \frac{1}{N^2}(N + 2a^2), \\ a^2 &= N(N \text{Tr}\{\rho^2\} - 1)/2 \Rightarrow a^2 \leq N(N - 1)/2. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Матрицы обобщенного базиса находятся следующим образом. Они включают в себя

1.  $\frac{N(N-1)}{2}$  симметричных матриц  
 $\Lambda_{nk}^{(s)} = |n\rangle \langle k| + |k\rangle \langle n|, 1 \leq n < k \leq N,$
2.  $\frac{N(N-1)}{2}$  антисимметричных матриц  
 $\Lambda_{nk}^{(a)} = -i |n\rangle \langle k| + i |k\rangle \langle n|, 1 \leq n < k \leq N,$
3.  $N - 1$  диагональных матриц  
 $\Lambda_n^{(d)} = \sqrt{\frac{2}{n(n+1)}} \left( \sum_{j=1}^N |j\rangle \langle j| - n |n+1\rangle \langle n+1| \right), 1 \leq n \leq N - 1,$

---

<sup>8</sup>Официальная формулировка: «for his contributions and discoveries concerning the classification of elementary particles and their interactions».

где  $|n\rangle$  – фоковское состояние. В качестве упражнения читателю предлагается самостоятельно получить матрицы Гелл-Манна ( $N = 3$ ). Здесь приведем итоговый результат:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^{(S)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Lambda_2^{(S)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Lambda_3^{(S)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\Lambda_1^{(A)} &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Lambda_2^{(A)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Lambda_3^{(A)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\
\Lambda_1^{(D)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Lambda_2^{(D)} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Заметим, что кососимметричные матрицы Гелл-Манна фактически являются генераторами  $SO(3)$ , поскольку  $\Lambda_3^{(A)} = \tilde{J}_x$ ,  $\Lambda_2^{(A)} = -\tilde{J}_y$  и  $\Lambda_1^{(A)} = \tilde{J}_z$ .

Для  $N = 4$  обобщенный матричный базис Гелл-Манна выглядит следующим образом:

1. Шесть симметричных матриц:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^{(S)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Lambda_2^{(S)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Lambda_3^{(S)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\Lambda_4^{(S)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Lambda_5^{(S)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Lambda_6^{(S)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2. Шесть антисимметричных матриц:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^{(A)} &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Lambda_2^{(A)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Lambda_3^{(A)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\Lambda_4^{(A)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Lambda_5^{(A)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Lambda_6^{(A)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3. Три диагональные матрицы:

$$\Lambda_1^{(D)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda_2^{(D)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda_3^{(D)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

В заключение данного раздела отметим, что матрицы Гелл-Манна – это не единственный базис для матриц плотности  $N \times N$ . Существуют, например, поляризационный базис и базис Вейля [66]. Выбор конкретного базиса определяется удобством его использования для решения той или иной задачи.

### 4.3 Обобщенный метод множителей Лагранжа

Если до сих пор мы говорили о достижениях XX и даже начала XXI века, то в данном разделе мы возвращаемся сильно назад – в XVIII век. В то время в Берлинской академии наук работал Жозеф Луи Лагранж. Несмотря на французское имя, Лагранж родился не во Франции, а в Италии и при рождении был назван Джузеппе Луиджи Лагранжа. На французский манер он стал подписываться, когда начал публиковать трактаты на французском языке (в то время было принято переделывать имя на французский лад, поскольку французский язык был общеупотребимым языком). Так получилось, что все значимые работы Лагранжа написаны на французском, поэтому в истории Лагранж остался именно под французским именем.

Итак, во второй половине XVIII века Лагранж упорно работал над вариационным исчислением и методами решения оптимизационных задач. Результаты деятельности Лагранжа заложили основу классической механики – способа описания физических систем с помощью формализма функции Лагранжа, Гамильтона и прочих аналогичных функций. Среди прочих достижений Лагранжа числится метод нахождения локальных экстремумов функции с учетом заданных ограничений (условий). Этот метод сегодня называют методом множителей Лагранжа.

Суть метода заключается в следующем. Имеется функция  $f(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ . Необходимо найти ее экстремум при наборе условий  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_N(\mathbf{x})) = 0$ . Введем функцию Лагранжа следующим образом

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda} \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (4.44)$$

где  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$  – неизвестные множители Лагранжа. Задача о нахождении экстремумов сводится к нахождению  $\mathbf{x}_0$ , при которых выполняется равенство

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = 0. \quad (4.45)$$

Равенство (4.45) эквивалентно условиям

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right] \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} &= 0, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

**Пример.** Рассмотрим метод Лагранжа на следующем конкретном примере. Пусть  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Эта функция задает расстояние от начала координат до точки  $(x, y)$ . Мы хотим найти ее минимум при условии, что точка  $(x, y)$  удовлетворяет условию  $g(x, y) = x + y - 1 = 0$ , т.е. лежит на прямой  $y = 1 - x$ . Конструируем Лагранжиан

$$L = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1). \quad (4.47)$$

Из условий (4.46) получим систему из трех уравнений

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

Решение системы (4.48) находится элементарно

$$\begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/2 \\ \lambda = -1 \end{cases} \quad (4.49)$$

Мы получили координату нашего экстремума  $(1/2, 1/2)$ . Полученный результат легко проверить геометрически. Действительно, ближайшая к началу координат точка, лежащая на прямой, соответствует перпендикуляру, опущенному из начала координат на линию  $y = 1 - x$ . Линия и оси координат образуют прямой треугольник со сторонами  $(1, 1)$ . Перпендикуляр, опущенный из начала координат на прямую  $y = 1 - x$ , есть медиана и высота прямоугольного треугольника. Длина перпендикуляра  $1 \times \sin \pi/4 = 1/\sqrt{2}$ . Откуда  $x_{min} = (1/\sqrt{2}) \cos \pi/4 = 1/2$  и  $y_{min} = (1/\sqrt{2}) \sin \pi/4 = 1/2$ . Все совпало.

Проблема метода Лагранжа заключается в том, что он работает только со строгими условиями  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ , но для решения ряда задач хотелось бы иметь оптимизационный метод для нестрогих дополнительных условий  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0$ . Модернизация метода Лагранжа для нестрогих условий была выполнена только в 1951 году американским математиком Гарольдом Куном и канадским математиком Альбертом Такером [68]. Однако вскоре выяснилось, что аналогичное обобщение выполнил еще в 1939 году американский математик Вильям Каруш в своей магистерской диссертации [69]. Поэтому обобщенный метод Лагранжа получил название условий Каруша-Куна-Такера.

Обобщенный метод формулируется совершенно аналогичным образом. Пусть у нас есть функция  $f(\mathbf{x})$ , которая должна иметь экстремумы при двух условиях  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0$  и  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$ . Лагранжиан в данном случае задается в аналогичной форме

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}\mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad (4.50)$$

где  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ . Как и прежде, нахождение экстремума  $\boldsymbol{x}_0$  подразумевает решение уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}}|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}}|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\mu}}|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = 0. \quad (4.51)$$

Однако в условиях Каруша-Куна-Такера возникает еще два требования

$$\lambda_i \geq 0, \quad \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0. \quad (4.52)$$

**Пример.** Рассмотрим ту же задачу, что и в первом примере, но в модифицированной форме:  $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$  – эта функция задает расстояние от точки  $(2, 3)$  до точки  $(x, y)$ . Мы хотим найти ее минимум при условии, что точка  $(x, y)$  удовлетворяет условию  $g(x, y) = x + y - 4 \leq 0$ , то есть лежит ниже или на прямой  $x + y - 4 = 0$ , и удовлетворяет условию  $h(x, y) = x - y = 0$ , то есть лежит на прямой  $x = y$ . Лагранжиан

$$L = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + \lambda(x + y - 4) + \mu(x - y) \quad (4.53)$$

приводит к системе из трех уравнений

$$\begin{cases} 2(x - 2) + \lambda + \mu = 0 \\ 2(y - 3) + \lambda - \mu = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad (4.54)$$

из которых получаем

$$\begin{cases} x = y \\ \mu = -1 \\ \lambda = 5 - 2x \end{cases} \quad (4.55)$$

Вспомним, что мы имеем нестрогое условие  $x + y \leq 4$  или с учетом (4.55)  $x \leq 2$ . В таком случае требование  $\lambda \geq 0$  удовлетворяется. Также нам нужно выполнить условие  $(5 - 2x)(x + y - 4) = 0 = 2(5 - 2x)(x - 2)$ , что возможно только при  $x = 2$ . Значит, искомая точка  $(x, y) = (2, 2)$ . Предлагаем самостоятельно проверить этот результат геометрически.

В последующих разделах мы покажем, как условия ККТ могут быть использованы для поиска ближайшего сепарабельного состояния.

## 4.4 Контрольные вопросы

1. Как выглядят матрицы Паули? Какими свойствами они обладают?
2. Дайте определение понятию группы в математике. Какие элементы входят в группы  $SU(N)$ ,  $SO(N)$ ? Какое отношение имеют матрицы Паули к группе  $SU(2)$ ?

3. В чем отличие между группой и алгеброй Ли?
4. Что такое вектор Блоха? Как он связан с чистотой матрицы плотности? Что такое сфера Блоха?
5. Что из себя представляет обобщенный матричный базис Гелл-Манна? Что такое обобщенный вектор Блоха?
6. В чем заключается смысл метода множителей Лагранжа?
7. В чем отличие обобщенного метода множителей Лагранжа от обычного метода множителей Лагранжа?

## Глава 5

# Общее кинетическое уравнение

В предыдущих разделах мы уже упоминали, что декогеренция, т.е. «разрушение» приготовленного квантового состояния за счет взаимодействия с «классической» окружающей средой (ОС), очень быстро уменьшает степень запутанности. Это одна из главных проблем при реализации технологий квантовой запутанности. В настоящем разделе приведен обзор так называемых общих кинетических уравнений, которые сегодня часто называют мастер-уравнениями (от англ. master equation); такие уравнения позволяют описывать временную эволюцию квантовых состояний, учитывая, в том числе, взаимодействие квантовой системы с окружающей средой. Представленные в настоящей главе техники и методы будут использованы в следующей главе для исследования влияния процесса декогеренции на степень запутанности.

Согласно одному из определений, декогеренция представляет собой неунитарную динамику, которая является следствием взаимодействия квантовой системы с внешней средой [70, 71, 72]. Отталкиваясь от данного определения, можно заключить, что большая часть квантовых состояний подвержена декогеренции (состояние равновесия является единственным формальным исключением).

Особый интерес с точки зрения квантовых технологий, в частности, квантовых коммуникаций, представляет динамика фотонных систем в оптическом волокне (ОВ) в условиях декогеренции. Внешние воздействия на волокно (ОВ), например, колебания температуры, вибрации, изгибы, кручения, а также рассеяние света на случайных неоднородностях показателя преломления ОВ и примесей внутри него приводят к изменению тензора диэлектрической проницаемости ОВ. Тензор диэлектрической проницаемости в общем случае имеет действительную и мнимую части и является анизотропным [12, 13, 73, 74]. Действительная часть тензора описывает эффект двулучепреломления, мнимая часть тензора отвечает за дихроизм. Оба этих эффекта зависят от частоты сигнала. В ОВ поляризационно-модовая дисперсия и поляризация, зависящая от потерь (дихроизм), хорошо изучены [75, 76, 77, 78, 79, 80]. Описание поляризационных эффектов можно изучать в различных режимах: линейный квантовый [81, 82, 83, 84],

классический линейный [85, 86, 87] и нелинейный режимы [88, 89, 90]. Последний также может быть потенциально применим к исследованиям в различных областях, например, в области диссипативных солитонов [91, 92, 93]. В свою очередь, квантовое рассмотрение может выявить новые особенности или даже предсказать новые квантовые эффекты. Исходя из общей теории релаксационных явлений [94], фотон, распространяющийся по ОВ, следует рассматривать как квантовую динамическую систему, взаимодействующую с внешней средой. Время корреляции переменных ОС может быть очень коротким. Как следствие, динамика матрицы плотности фотонов в ОВ должна описываться уравнением Лиувилля, содержащим релаксационный оператор в марковском приближении, что является частным случаем уравнения Линдблада. Далее мы приведем подробный вывод уравнения Лиувилля, однако перед этим предлагается рассмотреть более простое динамическое уравнение фон Неймана.

## 5.1 Динамическое уравнение фон Неймана

Временную эволюцию вектора состояния квантовой системы описывает уравнение Шредингера. Напомним, что Шредингер не вывел это уравнение, а постулировал его или, проще говоря, угадал. Заметим, однако, что позднее американскому физико-теоретику, лауреату Нобелевской премии Ричарду Фейнману удалось вывести уравнение Шредингера с помощью метода интегралов по траекториям из постулата, согласно которому квантовая частица может попасть из точки А в точку В по любой мыслимой траектории [95]. Также уравнение Шредингера можно вывести с помощью теории групп, исходя из соображений симметрии. Тем не менее сложно оценить, является ли наличие множественных вероятностных траекторий или особой симметрии состояний причиной, постулируя которую, можно вывести уравнение, или же следствием непосредственно из постулированного уравнения Шредингера. В любом случае что-то необходимо постулировать, и чаще всего говорят, что постулируется именно само уравнение.

В общем случае, как мы уже неоднократно обсуждали, квантовая система описывается не вектором состояния, а оператором матрицы плотности, для которого существует аналог уравнения Шредингера – динамическое уравнение фон Неймана. Выглядит оно следующим образом (здесь и далее мы будем записывать операторы без «крышечки»):

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = -i[H, \rho(t)], \quad (5.1)$$

где  $\rho(t)$  — матрица плотности рассматриваемого состояния,  $H$  — гамильтониан развития,  $[A, B] = AB - BA$  — коммутатор.

Рассмотрим свободное развитие «классического» (когерентного) света и сравним полученный результат с тем, что мы знаем из классической оптики

о свободном распространении света. Представим когерентное состояние:

$$\begin{aligned}\rho(0) &= |\alpha\rangle\langle\alpha|, \\ |\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle,\end{aligned}\quad (5.2)$$

где  $\alpha$  — комплексная амплитуда когерентного состояния,  $|n\rangle$  — состояние Фока, то есть состояние с определенным числом фотонов  $n$ . Гамильтониан в таком случае представляет собой гамильтониан свободного развития гармонического осциллятора:

$$H = \omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad (5.3)$$

где  $\omega$  — частота света,  $a^\dagger$  — оператор рождения,  $a$  — оператор уничтожения.

Для удобства введем представление Лиувилля [96], которое будет использоваться далее:

$$AB \equiv \overleftarrow{A}B, \quad (5.4)$$

$$BA \equiv \overrightarrow{A}B. \quad (5.5)$$

Стрелка указывает, в каком направлении действует оператор  $A$  относительно  $B$ , что делает  $\overleftarrow{A}$  и  $\overrightarrow{A}$  супероператорами. Запишем уравнение фон Неймана с использованием введенного представления Лиувилля:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} &= -i[H, \rho(t)] = \\ &= -i\omega(a^\dagger a \rho(t) - \rho(t) a^\dagger a) = -i\omega(\overleftarrow{a^\dagger a} - \overrightarrow{a^\dagger a})\rho(t) = -i\omega \mathcal{N} \rho(t),\end{aligned}\quad (5.6)$$

где  $\mathcal{N} = \overleftarrow{a^\dagger a} - \overrightarrow{a^\dagger a}$  — супероператор, действующий на матрицу плотности  $\rho$ . Уравнения типа

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = -i\omega \mathcal{N} \rho(t) \quad (5.7)$$

имеют экспоненциальное решение:

$$\rho(t) = e^{-i\omega \mathcal{N} t} |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (5.8)$$

где  $e^{-i\omega \mathcal{N} t}$  также является супероператором:

$$e^{-i\omega \mathcal{N} t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^n \mathcal{N}^n}{n!}, \quad (5.9)$$

где под  $\mathcal{N}^n$  подразумевается  $n$  раз последовательное применение супероператора  $\mathcal{N}$ .

Применим к решению (5.8) выражения (5.2) и (5.9):

$$\begin{aligned}
\rho(t) &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^n (a^\dagger a - a^\dagger a)^n}{n!} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\alpha^p (\alpha^*)^q}{\sqrt{p!q!}} |p\rangle \langle q| = \\
&= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^n \alpha^p (\alpha^*)^q}{n! \sqrt{p!q!}} (a^\dagger a - a^\dagger a)^n |p\rangle \langle q| = \\
&\quad [ (x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^k ] \\
&= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^n \alpha^p (\alpha^*)^q}{n! \sqrt{p!q!}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a^\dagger a)^{n-k} (-a^\dagger a)^k |p\rangle \langle q| = \\
&= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^n \alpha^p (\alpha^*)^q}{n! \sqrt{p!q!}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a^\dagger a)^{n-k} |p\rangle \langle q| (-a^\dagger a)^k = \\
&\quad [ a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle ] \\
&= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^n \alpha^p (\alpha^*)^q}{n! \sqrt{p!q!}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (p)^{n-k} (-q)^k |p\rangle \langle q| = \\
&= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^n \alpha^p (\alpha^*)^q}{n! \sqrt{p!q!}} (p - q)^n |p\rangle \langle q| = \\
&= e^{-|\alpha|^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\alpha^p (\alpha^*)^q}{\sqrt{p!q!}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t (p - q))^n}{n!} |p\rangle \langle q| = \\
&= e^{-|\alpha|^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\alpha^p (\alpha^*)^q}{\sqrt{p!q!}} e^{-i\omega t (p - q)} |p\rangle \langle q| = \\
&= e^{-|\alpha|^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^p ((\alpha e^{-i\omega t})^*)^q}{\sqrt{p!q!}} |p\rangle \langle q| = \\
&= |\alpha e^{-i\omega t}\rangle \langle \alpha e^{-i\omega t}|. \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Таким образом, комплексная амплитуда  $\alpha$  когерентного состояния приобретает фазовый сдвиг  $e^{-i\omega t}$ , что соответствует представлениям о свободном распространении света в классической оптике. Рассмотренный пример не только демонстрирует технику описания временной динамики матрицы плотности, но и позволяет в некоторой степени убедиться в «разумности» физического смысла уравнения фон Неймана.

## 5.2 Уравнение Лиувилля

Запишем гамильтониан общего вида, описывающий квантовую систему  $S$  и сопряженную с ней открытую среду  $R$ :

$$H = H_S + H_R + H_{SR}, \quad (5.11)$$

где  $H_S$  — гамильтониан квантовой системы  $S$ ,  $H_R$  — гамильтониан ОС  $R$ ,  $H_{SR}$  — гамильтониан взаимодействия двух подсистем. Предположим, что общее состояние двух подсистем описывается оператором плотности  $\chi(t)$ , тогда оператор квантовой подсистемы  $\rho(t)$  определяется следующим образом:

$$\rho(t) = \text{Tr}_R(\chi(t)), \quad (5.12)$$

где операция следа ( $\text{Tr}$ ) берется по ОС, на что указывает индекс  $R$ . Очевидно, если оператор  $O$  определен на гильбертовом пространстве, соответствующем квантовой системе  $S$ , то его среднее значение  $\langle O \rangle$  в представлении Шредингера может быть найдено в случае, когда состояние подсистемы  $\rho(t)$  известно, но не определено  $\chi(t)$ :

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= \text{Tr}_{SR}(O\chi(t)) = \text{Tr}_S \text{Tr}_R(O\chi(t)) = \\ &= \text{Tr}_S(O\text{Tr}_R\chi(t)) = \text{Tr}_S(O\rho(t)). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Следовательно, можно вывести уравнение, зависящее только от  $\rho(t)$ , а свойства ОС войдут в уравнение только в виде параметров.

Рассмотрим уравнение фон Неймана для общего состояния  $\chi(t)$ :

$$\frac{\partial \chi(t)}{\partial t} = -i[H, \chi(t)], \quad (5.14)$$

где  $[A, B] = AB - BA$  — коммутатор,  $H$  — гамильтониан согласно выражению (5.11), приведенная постоянная Планка  $\hbar = 1$  (за счет выбора соответствующих единиц измерений). Предполагая, что «скорость» развития каждой из подсистем намного выше, чем «скорость» их взаимодействия, можно преобразовать исходное состояние  $\chi(t)$  следующим образом (фактически переход в движущуюся систему координат), выделяя тем самым взаимодействие:

$$\tilde{\chi}(t) = e^{i(H_S+H_R)t} \chi(t) e^{-i(H_S+H_R)t}. \quad (5.15)$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{\partial \tilde{\chi}(t)}{\partial t} = -i[\tilde{H}_{SR}(t), \tilde{\chi}(t)], \quad (5.16)$$

где

$$\tilde{H}_{SR}(t) = e^{i(H_S+H_R)t} H_{SR} e^{-i(H_S+H_R)t}. \quad (5.17)$$

Интегрируя полученное уравнение Шредингера (5.16), получаем следующее выражение:

$$\tilde{\chi}(t) = \chi(0) - i \int_0^t [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\chi}(t')] dt', \quad (5.18)$$

принимая во внимание, что  $\tilde{\chi}(0) = \chi(0)$ . Подставляя выражение (5.18) в правую часть уравнения (5.16), получаем:

$$\frac{\partial \tilde{\chi}(t)}{\partial t} = -i[\tilde{H}_{SR}(t), \chi(0)] - \int_0^t [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\chi}(t')]] dt'. \quad (5.19)$$

Предположим, что взаимодействие начинается с  $t = 0$ , а до этого времени корреляций между  $S$  и  $R$  нет. Тогда

$$\chi(0) = \rho(0) \otimes R_0, \quad (5.20)$$

где  $R_0$  — начальное состояние ОС. Следовательно, справедливы следующие выражения:

$$\text{Tr}_R(\tilde{\chi}) = e^{iH_S t} \rho e^{-iH_S t} = \tilde{\rho}, \quad (5.21)$$

и

$$\frac{\partial \tilde{\rho}(t)}{\partial t} = - \int_0^t \text{Tr}_R \left( [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\chi}(t')]] \right) dt', \quad (5.22)$$

где  $-i \text{Tr}_R \left( [\tilde{H}_{SR}(t), \chi(0)] \right) = 0$ , возвращаясь к предположению, что начальное состояние при  $t = 0$  не имеет корреляций с ОС. Однако корреляции между подсистемами появляются с течением времени. Тем не менее предполагается, что взаимодействие подсистем слабое (т.е. можно пренебречь старшими порядками по  $H_{SR}$ ), а также, что ОС намного больше квантовой подсистемы и практически не меняется при взаимодействии ( $R_0$  не зависит от времени). Данное предположение называется приближением Борна и может быть записано в следующей форме:

$$\tilde{\chi}(t) \approx \tilde{\rho}(t) R_0, \quad (5.23)$$

тогда

$$\frac{\partial \tilde{\rho}(t)}{\partial t} = - \int_0^t \text{Tr}_R \left( [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t') R_0]] \right) dt'. \quad (5.24)$$

Последнее выражение является немарковским, иными словами, обладает эффектом памяти, т.е. будущее состояние  $\tilde{\rho}(t)$  зависит от предыдущего за счет интегрирования  $\tilde{\rho}(t')$  по  $dt'$ . Немарковские процессы характеризуются наличием какой-либо обратной связи. В общем случае, взаимодействие квантовой системы с ОС в некоторый момент времени  $t_1$  могло изменить состояния ОС, последнее в некоторое время  $t_2 > t_1$  обратно изменило бы состояние квантовой системы, тем самым выполнялось бы условие немарковости, т.е. состояние квантовой системы во время  $t_1$  влияло бы на него же во время  $t_2$ . Однако как уже было отмечено ранее, ОС является значительно более крупной системой по сравнению с квантовой системой и практически не меняется при взаимодействии. Таким образом, предположение об отсутствии обратной связи является обоснованным. Следовательно, следующим шагом будет применение приближения Маркова, т.е. замена  $\tilde{\rho}(t') \rightarrow \tilde{\rho}(t)$ . Таким образом, общее кинетическое уравнение в приближении Борна-Маркова имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}(t)}{\partial t} = - \int_0^t \text{Tr}_R \left( [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t)R_0]] \right) dt'. \quad (5.25)$$

Уточним полученное уравнение. Предположим, что гамильтониан взаимодействия выражается следующим образом:

$$H_{SR} = \sum_i s_i \Gamma_i, \quad (5.26)$$

где  $s_i$  — некоторые операторы в гильбертовом пространстве соответствующей квантовой подсистеме  $S$ ,  $\Gamma_i$  — некоторые операторы в гильбертовом пространстве соответствующем ОС  $R$ , тогда

$$\tilde{H}_{SR} = \sum_i \tilde{s}_i \tilde{\Gamma}_i. \quad (5.27)$$

Общее кинетическое уравнение тогда можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}(t)}{\partial t} = & - \sum_{ij} \int_0^t dt' \text{Tr}_R \left( [\tilde{s}_i(t) \tilde{\Gamma}_i(t), [\tilde{s}_j(t') \tilde{\Gamma}_j(t'), \tilde{\rho}(t)R_0]] \right) = \\ & - \sum_{ij} \int_0^t dt' \left( \left( \tilde{s}_i(t) \tilde{s}_j(t') \tilde{\rho}(t) - \tilde{s}_j(t') \tilde{\rho}(t) \tilde{s}_i(t) \right) \langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R + \right. \\ & \left. + \left( \tilde{\rho}(t) \tilde{s}_j(t') \tilde{s}_i(t) - \tilde{s}_i(t) \tilde{\rho}(t) \tilde{s}_j(t') \right) \langle \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t) \rangle_R \right), \end{aligned} \quad (5.28)$$

где

$$\langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R = \text{Tr}_R(\tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') R_0), \quad (5.29)$$

$$\langle \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t) \rangle_R = \text{Tr}_R(\tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t) R_0). \quad (5.30)$$

Таким образом, свойства ОС определяются функциями корреляции, представленными в последних двух выражениях. Поскольку используется приближение Маркова, данные функции корреляции затухают быстрее за то время, за которое характерно изменение  $\tilde{\rho}(t')$ , т.е.

$$\langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R \approx \delta(t - t'), \quad (5.31)$$

$$\langle \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t) \rangle_R \approx \delta(t - t'). \quad (5.32)$$

Теперь необходимо определить вид гамильтонианов рассматриваемой парной системы для уточнения результатов. Положим

$$H_S = \omega a^\dagger a, \quad (5.33)$$

$$H_R = \sum_j \Omega_j r_j^\dagger r_j, \quad (5.34)$$

$$H_{SR} = \sum_j (a k_j^* r_j^\dagger + a^\dagger k_j r_j), \quad (5.35)$$

где  $a$  ( $a^\dagger$ ) — оператор уничтожения (рождения) моды оптического квантового сигнала с частотой  $\omega$ ,  $r_j$  ( $r_j^\dagger$ ) — оператор уничтожения (рождения) теплового состояния ОС с частотой  $\Omega_j$ ,  $k_j$  — константа связи (пока не определенная). Таким образом, подсистема  $S$  описывает распространяющийся оптический сигнал, а подсистема  $R$  — тепловой резервуар с температурой  $T$ , заполненный тепловыми фотонами. Тогда начальное состояние ОС соответствует тепловому распределению:

$$R_0 = \bigotimes_j e^{-z_j r_j^\dagger r_j} (1 - e^{-z_j}), \quad (5.36)$$

$$z_j = \frac{\Omega_j}{k_B T}, \quad (5.37)$$

где  $k_B$  — постоянная Больцмана (в соответствующих единицах измерения). Тогда для выражения (5.28) справедлива следующая замена:

$$s_1 = a, \quad s_2 = a^\dagger, \quad (5.38)$$

$$\Gamma_1 = \Gamma^\dagger = \sum_j k_j^* r_j^\dagger, \quad \Gamma_2 = \Gamma = \sum_j k_j r_j, \quad (5.39)$$

а, следовательно, и

$$\tilde{s}_1(t) = e^{i\omega a^\dagger a} a e^{-i\omega a^\dagger a} = a e^{-i\omega t}, \quad (5.40)$$

$$\tilde{s}_2(t) = e^{i\omega a^\dagger a} a^\dagger e^{-i\omega a^\dagger a} = a^\dagger e^{i\omega t}, \quad (5.41)$$

$$\tilde{\Gamma}_1(t) = \tilde{\Gamma}_1^\dagger(t) = (e^{i \sum_n \Omega_n r_n^\dagger r_n}) \sum_j k_j^* r_j^\dagger (e^{-i \sum_m \Omega_m r_m^\dagger r_m}) = \sum_j k_j^* r_j^\dagger e^{i\Omega_j t}, \quad (5.42)$$

$$\tilde{\Gamma}_2(t) = \tilde{\Gamma}_2(t) = \sum_j k_j r_j e^{-i\Omega_j t}. \quad (5.43)$$

Применяя вышеописанные замены, выражение (5.28) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}(t)}{\partial t} = & - \int_0^t dt' \left( \left( aa\tilde{\rho}(t) - a\tilde{\rho}(t)a \right) e^{-i\omega(t+t')} \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R + h.c. + \right. \\ & + \left( a^\dagger a^\dagger \tilde{\rho}(t) - a^\dagger \tilde{\rho}(t) a^\dagger \right) e^{i\omega(t+t')} \langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}(t') \rangle_R + h.c. + \\ & + \left( aa^\dagger \tilde{\rho}(t) - a^\dagger \tilde{\rho}(t) a \right) e^{-i\omega(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}(t') \rangle_R + h.c. + \\ & \left. + \left( a^\dagger a \tilde{\rho}(t) - a\tilde{\rho}(t) a^\dagger \right) e^{i\omega(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R + h.c. \right), \end{aligned} \quad (5.44)$$

где  $h.c.$  — эрмитово-сопряженное слагаемое. Функции корреляции удовлетворяют следующим свойствам:

$$\langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = \langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}(t') \rangle_R = 0, \quad (5.45)$$

$$\langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}(t') \rangle_R = \sum_j |k_j|^2 e^{i\Omega_j(t-t')} \bar{n}(\Omega_j, T), \quad (5.46)$$

$$\langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = \sum_j |k_j|^2 e^{-i\Omega_j(t-t')} (\bar{n}(\Omega_j, T) + 1), \quad (5.47)$$

где среднее число тепловых фотонов на частоте  $\Omega_j$  определяется следующим образом:

$$\bar{n}(\Omega_j, T) = \text{Tr}_R(r_j^\dagger r_j R_0) = \frac{e^{-z_j}}{1 - e^{-z_j}}. \quad (5.48)$$

Для расчета функций корреляции воспользуемся заменой суммирования по модам теплового излучения на интегрирование, принимая во внимание, что шаг суммирования малый. Таким образом, необходимо ввести плотность распределения состояний  $g(\Omega)$ , показывающую распределение числа мод в интервале от  $\Omega$  до  $\Omega + d\Omega$ . Проведем замену  $\tau = t - t'$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}(t)}{\partial t} = & - \int_0^t d\tau \left( \left( aa^\dagger \tilde{\rho}(t) - a^\dagger \tilde{\rho}(t) a \right) e^{-i\omega\tau} \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}(t - \tau) \rangle_R + h.c. + \right. \\ & \left. + \left( a^\dagger a \tilde{\rho}(t) - a\tilde{\rho}(t) a^\dagger \right) e^{i\omega\tau} \langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t - \tau) \rangle_R + h.c. \right), \end{aligned} \quad (5.49)$$

и

$$\langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}(t - \tau) \rangle_R = \int_0^\infty |k(\Omega)|^2 e^{i\Omega\tau} \bar{n}(\Omega, T) g(\Omega) d\Omega, \quad (5.50)$$

$$\langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t - \tau) \rangle_R = \int_0^\infty |k(\Omega)|^2 e^{i\Omega\tau} (\bar{n}(\Omega, T) + 1) g(\Omega) d\Omega. \quad (5.51)$$

Наличие множителей  $e^{\pm i\omega\tau}$  в выражении (5.49) свидетельствует, что основной вклад при интегрировании функций корреляций, представленных выше, будет при  $\Omega \approx \omega$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}(t)}{\partial t} = & \alpha \left( a\tilde{\rho}(t)a^\dagger - a^\dagger a\tilde{\rho}(t) \right) + \\ & + \beta \left( a\tilde{\rho}(t)a^\dagger + a^\dagger \tilde{\rho}(t)a - a^\dagger a\tilde{\rho}(t) - aa^\dagger \tilde{\rho}(t) \right) + h.c., \end{aligned} \quad (5.52)$$

где

$$\alpha = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\Omega e^{-i(\Omega-\omega)\tau} g(\Omega) |k(\Omega)|^2, \quad (5.53)$$

$$\beta = \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\Omega e^{-i(\Omega-\omega)\tau} g(\Omega) |k(\Omega)|^2 \bar{n}(\Omega, T). \quad (5.54)$$

Типичное время  $t$ , характеризующее изменения  $\tilde{\rho}(t)$ , много больше времени  $\tau$  затухания функций корреляции, следовательно, можно использовать следующий предел при интегрировании:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-i(\Omega-\omega)\tau} d\tau = \pi \delta(\Omega - \omega) + iP, \quad (5.55)$$

где  $\delta(\Omega - \omega)$  — дельта-функция Дирака,  $P$  — главное значение Коши для функции  $\frac{1}{\Omega - \omega}$ , появляющееся при интегрировании через сингулярность. Далее, слагаемое с  $P$  даст небольшой сдвиг частоты  $\omega$ , чем в общем случае можно пренебречь в силу малости сдвига. Тогда

$$\alpha = \pi g(\omega) |k(\omega)|^2 \quad (5.56)$$

$$\beta = \pi g(\omega) |k(\omega)|^2 \bar{n}(\omega, T). \quad (5.57)$$

Произведя замену  $\gamma = 2\pi g(\omega) |k(\omega)|^2$  и  $n_T = \bar{n}(\omega, T)$ , уравнение принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}(t)}{\partial t} = & -\frac{\gamma(n_T + 1)}{2} \left( a^\dagger a\tilde{\rho}(t) + \tilde{\rho}(t)a^\dagger a - 2a\tilde{\rho}(t)a^\dagger \right) - \\ & -\frac{\gamma n_T}{2} \left( aa^\dagger \tilde{\rho}(t) + \tilde{\rho}(t)aa^\dagger - 2a^\dagger \tilde{\rho}(t)a \right). \end{aligned} \quad (5.58)$$

Возвращаясь от  $\tilde{\rho}(t)$  к  $\rho(t)$ , используя обратное преобразование, приведенное в выражении (5.21), получаем

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = -i[H_S, \rho(t)] + e^{iH_S t} \frac{\partial \tilde{\rho}(t)}{\partial t} e^{-iH_S t}. \quad (5.59)$$

Таким образом, выражение, описывающее динамику квантового оптического сигнала при взаимодействии с ОС, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = & -i\omega[a^\dagger a, \rho(t)] - \frac{\gamma(n_T + 1)}{2} \left( a^\dagger a\rho(t) + \rho(t)a^\dagger a - 2a\rho(t)a^\dagger \right) - \\ & -\frac{\gamma n_T}{2} \left( aa^\dagger \rho(t) + \rho(t)aa^\dagger - 2a^\dagger \rho(t)a \right). \end{aligned} \quad (5.60)$$

Данное уравнение и его свойства будут основными объектами дальнейших исследований. Получаем операторное дифференциальное уравнение с начальными условиями следующего вида (задача Коши):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = \mathcal{L}\rho(t), \\ \rho(t)|_{t=0} = \rho_0, \end{cases} \quad (5.61)$$

где правая часть выражения (5.60) обобщена в виде действия супероператора  $\mathcal{L}$  (иначе лиувиллиана) на оператор плотности состояния  $\rho(t)$ . Значение  $n_T$  определяется в виде

$$n_T = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}, \quad (5.62)$$

где  $\hbar$  — приведенная постоянная Планка,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура в  $K$ .

### 5.3 Многомодовое уравнение Лиувилля

Рассмотрев вывод одномодового уравнения Лиувилля, обратимся к обобщению данного уравнения на многомодовый случай. Динамика Линдблада бозонной  $N$ -модовой системы, взаимодействующей с тепловой средой, описывается кинетическим уравнением следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = & -i \sum_{n,m}^N \Omega_{nm} [a_n^\dagger a_m, \rho] - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{n,m}^N \Gamma_{nm} ((n_T + 1)(a_n^\dagger a_m \rho + \rho a_n^\dagger a_m - 2a_m \rho a_n^\dagger) + \\ & + n_T(a_m a_n^\dagger \rho + \rho a_m a_n^\dagger - 2a_n^\dagger \rho a_m)), \end{aligned} \quad (5.63)$$

$a_n$  ( $a_n^\dagger$ ) — оператор уничтожения (рождения)  $n$ -й моды, а  $n_T$  — среднее число тепловых фотонов; эффекты когерентных (динамических) межмодовых связей вводятся через матрицу частот  $\Omega = \Omega^\dagger$ , тогда как недиагональные элементы матрицы релаксации  $\Gamma = \Gamma^\dagger$  являются константами связи некогерентного (опосредованного средой) взаимодействия между бозонными модами. В двухмодовом (поляризационном) случае матрицы  $\Omega$  и  $\Gamma$  можно определить с помощью матриц Паули следующим образом:

$$\Omega = \frac{1}{2}(\omega_0 \sigma_0 + (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\sigma})), \quad \Gamma = \frac{1}{2}(\gamma_0 \sigma_0 + (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\sigma})), \quad (5.64)$$

где  $(\cdot, \cdot)$  обозначает скалярное произведение,  $\sigma_0$  — единичная матрица,  $\omega_0$  и  $\gamma_0$  — средняя оптическая частота и средняя скорость релаксации,

соответственно;  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , где  $\sigma_i$  — матрица Паули;  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  ( $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ ) — вектор частоты (релаксации). Векторы  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$  кодируют параметры анизотропии канала: собственные векторы/собственные значения анизотропной части матрицы  $\Omega$  ( $\Gamma$ ) определяют ориентацию главной оси/главные значения канала, описывающие двойное лучепреломление (дихроизм или потери, зависящие от поляризации). Кроме того, матрица релаксации  $\Gamma$ , задающая скорости термализации, должна быть положительно определенной,  $\Gamma > 0$ . Нетрудно показать, что последнее эквивалентно можно сформулировать в виде неравенства для скоростей релаксации:  $\gamma_0 > |\boldsymbol{\gamma}|$ . Важным моментом является то, что матрицы  $\Omega$  и  $\Gamma$  зависят от базиса в двумерном пространстве векторов поляризации, и хотя бы одну из них можно диагонализировать, выбрав подходящий базис.

Необходимо привести лиувиллиан в форму, пригодную для последующего алгебраического анализа. С этой целью обобщим изложенные в [96, 83] соображения на случай многомодовых систем и введем квадратичные комбинации левых и правых (действующих слева и справа) супероператоров следующего вида:

$$\mathcal{N}_{nm}^{(-)} = \overleftarrow{a_n^\dagger} a_m - a_n^\dagger \overrightarrow{a_m}, \quad (5.65a)$$

$$\mathcal{K}_{nm}^{(0)} = \frac{1}{2} \left( \overleftarrow{a_n^\dagger} a_m + a_m a_n^\dagger \right). \quad (5.65b)$$

$$\mathcal{K}_{nm}^{(+)} = \overleftarrow{a_n^\dagger} \overrightarrow{a_m}, \quad \mathcal{K}_{nm}^{(-)} = \overleftarrow{a_m} \overrightarrow{a_n^\dagger}. \quad (5.65c)$$

Лиувиллиан теперь можно выразить через супероператоры (5.65) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sum_{n,m}^N & \left[ -i\Omega_{nm} \mathcal{N}_{nm}^{(-)} - \Gamma_{nm} \left\{ (2n_T + 1) \mathcal{K}_{nm}^{(0)} \right. \right. \\ & \left. \left. - n_T \mathcal{K}_{nm}^{(+)} - (n_T + 1) \mathcal{K}_{nm}^{(-)} - \frac{1}{2} \delta_{nm} \right\} \right], \end{aligned} \quad (5.66)$$

где  $\delta_{nm}$  — дельта-символ Кронекера.

Формула (5.66), лиувиллиан, записанный как линейная комбинация супероператоров  $\mathcal{N}_{nm}^{(-)}$ ,  $\mathcal{K}_{nm}^{(0)}$  и  $\mathcal{K}_{nm}^{(\pm)}$  — отправная точка последующего анализа. Важным моментом является то, что эти супероператоры порождают алгебру Ли. Однако из-за ряда факторов, таких как большая размерность, структура этой алгебры непомерно сложна. Далее будет описан подход, который позволяет прояснить общую картину сложной алгебраической структуры за счет значительного сокращения количества коммутационных соотношений.

Наш следующий шаг — ввести алгебру супероператоров, которая имеет некоторое сходство с известным подходом Жордана-Швингера, используя

ющим жорданово отображение

$$A \mapsto J_A = \sum_{n,m=1}^N A_{nm} a_n^\dagger a_m, \quad (5.67)$$

где  $A$  — матрица  $N \times N$ , чтобы ввести квадратичные бозонные операторы, связанные с числовыми матрицами. Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[J_A, J_B] = J_{[A,B]} \quad (5.68)$$

и обладают рядом полезных свойств, таких как

$$e^{J_V} J_A e^{-J_V} = J_{A'}, \quad A' = e^V A e^{-V}, \quad (5.69)$$

$$e^{J_V} a_i^\dagger e^{-J_V} = \sum_{j=1}^N U_{ji} a_j^\dagger, \quad U = e^V. \quad (5.70)$$

Аналогично, общая идея состоит в том, чтобы использовать билинейные комбинации супероператоров так, чтобы коммутационные соотношения частично передавались в изменение числовых матриц коэффициентов. Теперь перейдём к обсуждению основных алгебраических свойств. Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{P}_A \equiv \sum_{n,m} A_{nm} \mathcal{P}_{nm}, \quad (5.71)$$

где  $\mathcal{P}_{nm}$  — произвольный (предположительно квадратичный) супероператор, помеченный двумя индексами, а  $A_{nm}$  — элемент комплексной матрицы  $A$ . Тогда, согласно введенным выше обозначениям, супероператоры обладают следующими общими свойствами:

$$\mathcal{P}_A + \mathcal{Q}_A = (\mathcal{P} + \mathcal{Q})_A, \quad (5.72)$$

$$\mathcal{P}_A + \mathcal{P}_B = \mathcal{P}_{A+B}, \quad (5.73)$$

$$c \cdot \mathcal{P}_A = \mathcal{P}_{c \cdot A}. \quad (5.74)$$

Еще одно полезное свойство состоит в том, что когда операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям вида:

$$[\mathcal{P}_{ij}, \mathcal{Q}_{nm}] = \mathcal{S}_{im} \delta_{jn} \pm \mathcal{S}_{jn} \delta_{im}, \quad (5.75)$$

где  $[A, B] = AB - BA$  — коммутатор, имеем следующее тождество:

$$[\mathcal{P}_A, \mathcal{Q}_B] = \mathcal{S}_{AB \pm BA}, \quad (5.76)$$

что аналогично ключевому свойству отображения Жордана-Швингера, заданному уравнением (5.68).

Используя эти супероператоры, лиувиллиан (5.66) можно альтернативно переписать следующим образом:

$$\mathcal{L} = \mathcal{N}_{-i\Omega}^{(-)} + \mathcal{K}_{\gamma_0\Gamma}^{(0)} + \mathcal{K}_{\gamma_+\Gamma}^{(+)} + \mathcal{K}_{\gamma_-\Gamma}^{(-)} + \mathcal{I}_{\frac{1}{2}\Gamma}, \quad (5.77)$$

$$\begin{aligned} \gamma_+ &= n_T, \quad \gamma_- = n_T + 1, \\ \gamma_0 &= -(\gamma_+ + \gamma_-) = -2n_T - 1, \end{aligned} \quad (5.78)$$

где  $\mathcal{I}_A$  обозначает тождественный супероператор, умноженный на  $\text{Tr}(A)$ . Заметим, что сопряженный (позволяющий определить не эволюцию матрицы плотности в представлении Шредингера, а эволюцию операторов наблюдаемых величин в представлении Гейзенберга) супероператор Лиувилля  $\mathcal{L}^\sharp$ , определенный соотношением

$$\text{Tr}\{a\mathcal{L}(\rho)\} = \text{Tr}\{\mathcal{L}^\sharp(a)\rho\}, \quad (5.79)$$

также имеет вид (5.77), где  $\Omega$  заменяется на  $-\Omega$ , а параметры перехода  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  поменяны местами, т.е.  $\gamma_\pm \rightarrow \gamma_\mp$ . Далее обсудим основные коммутационные свойства супероператоров, входящих в приведенное выше выражение для лиувиллиана. Начнем с супероператоров  $\mathcal{N}_{nm}^{(-)}$ ,  $\mathcal{K}_{nm}^{(+)}$ ,  $\mathcal{K}_{nm}^{(-)}$ , и  $\mathcal{K}_{nm}^{(0)}$  и далее выведем отношения для супероператоров вида (5.71), связанных с матрицами. Довольно просто получить следующие соотношения:

$$[\mathcal{K}_{ij}^{(0)}, \mathcal{K}_{nm}^{(\pm)}] = \pm \frac{1}{2}(\hat{\mathcal{K}}_{im}^{(\pm)}\delta_{jn} + \mathcal{K}_{jn}^{(\pm)}\delta_{im}), \quad (5.80a)$$

$$[\mathcal{K}_{ij}^{(-)}, \mathcal{K}_{nm}^{(+)}] = \hat{\mathcal{K}}_{im}^{(0)}\delta_{jn} + \mathcal{K}_{jn}^{(0)}\delta_{im} - \frac{1}{2}(\mathcal{N}_{im}^{(-)}\delta_{jn} - \mathcal{N}_{jn}^{(-)}\delta_{im}), \quad (5.80b)$$

$$[\mathcal{N}_{ij}^{(-)}, \mathcal{K}_{nm}^{(s)}] = \hat{\mathcal{K}}_{im}^{(s)}\delta_{jn} - \mathcal{K}_{jn}^{(s)}\delta_{im}, \quad s \in \{0, \pm\} \quad (5.80c)$$

и использовать свойства, заданные уравнениями (5.75) и (5.76), для получения следующих коммутационных соотношений:

$$[\mathcal{K}_A^{(0)}, \mathcal{K}_B^{(\pm)}] = \pm \mathcal{K}_{\frac{1}{2}\{A,B\}}^{(\pm)}, \quad (5.81a)$$

$$[\mathcal{K}_A^{(-)}, \mathcal{K}_B^{(+)}] = \mathcal{K}_{\{A,B\}}^{(0)} - \mathcal{N}_{\frac{1}{2}[A,B]}^{(-)}, \quad (5.81b)$$

$$[\mathcal{N}_A^{(-)}, \mathcal{K}_B^{(s)}] = \mathcal{K}_{[A,B]}^{(s)}, \quad (5.81c)$$

$$[\mathcal{K}_A^{(0)}, \mathcal{K}_B^{(0)}] = \mathcal{N}_{\frac{1}{4}[A,B]}^{(-)}, \quad (5.81d)$$

$$[\mathcal{N}_A^{(-)}, \mathcal{N}_B^{(-)}] = \mathcal{N}_{[A,B]}^{(-)}, \quad (5.81e)$$

$$[\mathcal{K}_A^{(\pm)}, \mathcal{K}_B^{(\pm)}] = 0, \quad (5.81f)$$

где  $\{A, B\} = AB + BA$  — антикоммутатор.

Формулы (5.81) описывают алгебраическую структуру, чем-то напоминающую  $\mathfrak{su}(1, 1)$  алгебру Ли. Прямая сумма таких алгебр — это в точности алгебра, соответствующая предельному случаю невзаимодействующих мод, когда все матрицы, входящие в уравнение (5.77), диагональны ( $\{\hat{\mathcal{K}}_{nn}^{(0)}, \mathcal{K}_{nn}^{(+)}, \mathcal{K}_{nn}^{(-)}\}$  — генераторы  $\mathfrak{su}(1, 1)$  алгебры Ли). Однако эффектами межмодовых связей, как правило, нельзя пренебрегать, поэтому матрицы  $\Omega$  и  $\Gamma$  необязательно являются диагональными (обе эрмитовы и  $\Gamma > 0$ ). Итак, остановимся на этом общем случае.

Подобно [83], мы начнем с алгебраических тождеств для экспоненцированных супероператоров, действующих по подобию (сопряженное действие). Используя коммутационные соотношения (5.81), получаем

$$e^{\mathcal{K}_B^{(\pm)}} \mathcal{N}_A^{(-)} e^{-\mathcal{K}_B^{(\pm)}} = \mathcal{N}_A^{(-)} - \mathcal{K}_{[A,B]}^{(\pm)}, \quad (5.82a)$$

$$e^{\mathcal{K}_B^{(\pm)}} \mathcal{K}_A^{(0)} e^{-\mathcal{K}_B^{(\pm)}} = \mathcal{K}_A^{(0)} \mp \mathcal{K}_{\frac{1}{2}\{A,B\}}^{(\pm)}, \quad (5.82b)$$

$$e^{\mathcal{K}_B^{(\pm)}} \mathcal{K}_A^{(\mp)} e^{-\mathcal{K}_B^{(\pm)}} = \mathcal{K}_A^{(\mp)} \mp \mathcal{K}_{\{A,B\}}^{(0)} + \mathcal{N}_{\frac{1}{2}[A,B]}^{(-)} + \mathcal{K}_{BAB}^{(\pm)}. \quad (5.82c)$$

Таким образом, проводя следующую операцию:

$$e^{\mathcal{K}_A^{(-)}} e^{\mathcal{K}_B^{(+)}} \mathcal{L} e^{-\mathcal{K}_B^{(+)}} e^{-\mathcal{K}_A^{(-)}}, \quad (5.83)$$

можно упростить вид лиувиллиана, приведя его к «диагональному» виду, т.е. к виду без операторов квантового скачка  $\mathcal{K}^{(+)}$  и  $\mathcal{K}^{(-)}$ . Однако для этого необходимо определить вид числовых матриц  $A$  и  $B$ . В данном случае  $A = (n_T + 1)I$  и  $B = -(\frac{n_T}{n_T + 1})I$ , пропорциональные единичной матрице, приводят супероператор к следующему виду:

$$\mathcal{L}_d = \mathcal{N}_{-i\Omega}^{(-)} + \mathcal{K}_{-\Gamma}^{(0)} + \mathcal{I}_{\frac{1}{2}\Gamma}. \quad (5.84)$$

Стоит отметить, что в общем виде общее кинетическое уравнение скорее всего не удастся диагонализировать аналитически, поскольку в таком случае необходимо решить матричное уравнение Рикатти для нахождения матриц  $A$  и  $B$ . К сожалению, в общем виде данное уравнение не имеет аналитического решения. Также обратите внимание, что процесс термализации полностью перешел в сопряженное действие операторов  $e^{\mathcal{K}_A^{(-)}}$  и  $e^{\mathcal{K}_B^{(+)}}$ . Таким образом, можно сказать, что

$$\mathcal{L}|_{n_T \rightarrow 0} = \mathcal{L}_d. \quad (5.85)$$

Последнее, что стоит упомянуть — диагонализированный лиувиллиан можно выразить в виде действия эффективного гамильтониана  $\hat{H}_{\text{eff}}$ :

$$\hat{L}^{(d)} = \overleftarrow{\hat{H}}_{\text{eff}} + \overrightarrow{\hat{H}}_{\text{eff}}^{\dagger}, \quad (5.86)$$

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \sum_{nm} \left( -i\Omega - \frac{\Gamma}{2} \right)_{nm} a_n^{\dagger} a_m. \quad (5.87)$$

## 5.4 Контрольные вопросы

1. Что описывает общее кинетическое уравнение?
2. Что такое декогеренция и какой эффект она оказывает на квантовые системы?
3. Что происходит с когерентным состоянием при эволюции в свободном пространстве?
4. Какова суть приближений Борна и Маркова при выводе уравнения Лиувилля?
5. Что такое супероператор? Какие супероператоры вы знаете?
6. В чем заключается метод Жордана-Швингера?

## Глава 6

# Динамика степени запутанности

### 6.1 Нахождение ближайшего сепарабельного состояния

Рассмотрим квадрат нормы Гильберта-Шмидта для разности между матрицей плотности ( $N^2 \times N^2$ ) и сепарабельным состоянием:

$$\min_{\rho_{sep}} \|\rho - \rho_{sep}\|_{HS} = \min_{\rho_{sep}} \text{Tr}((\rho - \rho_{sep})^2), \quad (6.1)$$

где  $\rho_{sep}$  — сепарабельное состояние. Запишем вид сепарабельного состояния в обобщенном матричном базисе Гелл-Манна, рассмотренном в Разделе 4.2:

$$\rho_{sep} = \sum_j p_j \frac{1}{N} (\sigma_0 + \sum_{n=1}^{N^2-1} a_n^{(j)} \sigma_n) \otimes \frac{1}{N} (\sigma_0 + \sum_{m=1}^{N^2-1} b_m^{(j)} \sigma_m), \quad (6.2)$$

где  $\sigma_n$  — матричный базисный элемент  $N \times N$ ,  $\sigma_0$  — единичная матрица размерности  $N \times N$ . Также  $0 \leq \langle a^{(j)} | a^{(j)} \rangle \leq \frac{N(N-1)}{2}$  и  $0 \leq \langle b^{(j)} | b^{(j)} \rangle \leq \frac{N(N-1)}{2}$ , что будет использовано в качестве нестрогих условий для нахождения оптимума согласно условиям ККТ, рассмотренным в Разделе 4.3. Тогда, вводя представление обобщенного матричного базиса, условие (6.1) можно представить следующим образом:

$$\min_{|a^{(j)}\rangle, |b^{(j)}\rangle, p_j} \text{Tr}((\rho - \rho_{sep})^2). \quad (6.3)$$

Квадрат нормы можно также представить в базисе  $\sigma_i \otimes \sigma_j$ :

$$\text{Tr}((\rho - \rho_{sep})^2) = \text{Tr}(W^T W), \quad (6.4)$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & \langle Q | \\ |S\rangle & R \end{pmatrix} - \sum_j p_j \begin{pmatrix} 1 & \langle b^{(j)} | \\ |a^{(j)}\rangle & |a^{(j)}\rangle \langle b^{(j)} | \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

где

$$S_i = \text{Tr}(\rho \sigma_i \otimes \sigma_0), \quad Q_i = \text{Tr}(\rho \sigma_0 \otimes \sigma_i), \quad R_{ij} = \text{Tr}(\rho \sigma_i \otimes \sigma_j). \quad (6.6)$$

Таким образом, функция для оптимизации, то есть те слагаемые  $\text{Tr}(W^T W)$ , которые зависят от  $|a^{(j)}\rangle$ ,  $|b^{(j)}\rangle$  и  $p_j$ , выглядит следующим образом:

$$f = -2 \sum_j p_j \langle S | a^{(j)} \rangle - 2 \sum_j p_j \langle b^{(j)} | Q \rangle - 2 \sum_j p_j \langle a^{(j)} | R | b^{(j)} \rangle + \sum_{ij} p_i p_j \langle a^{(i)} | a^{(j)} \rangle + \sum_{ij} p_i p_j \langle b^{(i)} | b^{(j)} \rangle + \sum_{ij} p_i p_j \langle a^{(i)} | a^{(j)} \rangle \langle b^{(i)} | b^{(j)} \rangle, \quad (6.7)$$

на которую накладываются ограничения:

$$g_a^{(j)} = \langle a^{(j)} | a^{(j)} \rangle - \frac{N(N-1)}{2} \leq 0, \quad (6.8)$$

$$g_b^{(j)} = \langle b^{(j)} | b^{(j)} \rangle - \frac{N(N-1)}{2} \leq 0, \quad (6.9)$$

$$k_a^{(j)} = -\langle a^{(j)} | a^{(j)} \rangle \leq 0, \quad (6.10)$$

$$k_b^{(j)} = -\langle b^{(j)} | b^{(j)} \rangle \leq 0, \quad (6.11)$$

$$h = \sum_j p_j - 1. \quad (6.12)$$

Тогда обобщенный лагранжиан имеет следующий вид:

$$L = f + \sum_j (\mu_a^{(j)} g_a^{(j)} + \mu_b^{(j)} g_b^{(j)} + \eta_a^{(j)} k_a^{(j)} + \eta_b^{(j)} k_b^{(j)}) + \lambda h. \quad (6.13)$$

Градиенты лагранжиана, которые должны быть равны нулю в точке оптимума, выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} & \nabla_{|a^{(n)}\rangle} L = \\ & = \sum_j p_j (1 + \langle b^{(j)} | b^{(n)} \rangle) |a^{(j)}\rangle + \frac{\mu_a^{(n)} - \eta_a^{(n)}}{p_n} |a^{(n)}\rangle - |S\rangle - R |b^{(n)}\rangle = 0, \end{aligned} \quad (6.14a)$$

$$\begin{aligned} & \nabla_{|b^{(n)}\rangle} L = \\ & = \sum_j p_j (1 + \langle a^{(j)} | a^{(n)} \rangle) |b^{(j)}\rangle + \frac{\mu_b^{(n)} - \eta_b^{(n)}}{p_n} |b^{(n)}\rangle - |Q\rangle - R^T |a^{(n)}\rangle = 0, \end{aligned} \quad (6.14b)$$

$$\begin{aligned} & \nabla_{p_j} L = \\ & = \sum_j p_j \langle a^{(j)} | a^{(n)} \rangle + \sum_j p_j \langle b^{(j)} | b^{(n)} \rangle + \sum_j p_j \langle a^{(j)} | a^{(n)} \rangle \langle b^{(j)} | b^{(n)} \rangle - \\ & \quad - \langle S | a^{(n)} \rangle - \langle b^{(n)} | Q \rangle - \langle a^{(n)} | R | b^{(n)} \rangle + \lambda = 0. \end{aligned} \quad (6.14c)$$

К сожалению, система нелинейных уравнений (6.14) не может быть решена в общем виде. Для размерности  $2 \times 2$  решение может быть получено в некоторых частных случаях. А именно, если для состояния  $\rho$  выполняется  $\text{Tr}(\sigma_i^{(0/d)} \otimes \sigma_j^{(a/s)} \rho) = \text{Tr}(\sigma_i^{(a/s)} \otimes \sigma_j^{(0/d)} \rho) = 0$ , т.е. матрица имеет блочно-диагональное представление в базисе  $\sigma_i \otimes \sigma_j$ , то ближайшее сепарабельное состояние  $\rho_{sep}^{(0)} = \text{diag}(\rho)$ , т.е. равняется диагональной части  $\rho$ . Подстановка  $\rho_{sep} = \text{diag}(\rho)$  в систему уравнений (6.14) при  $\mu_a^{(n)} = \eta_a^{(n)} = \mu_b^{(n)} = \eta_b^{(n)} = \lambda = 0$  позволяет убедиться, что  $\|\rho - \text{diag}(\rho)\|_{HS}$  действительно достигает минимума.

## 6.2 Динамика степени запутанности на примере однофотонного поляризационного состояния

Рассмотрим динамику степени запутанности на простом примере однофотонного поляризационного состояния в случае, когда динамику определяет диагонализированный лиувиллиан, т.е. соответствующий лиувиллиану без термализации, как показано в (5.85). Последнее необходимо, чтобы оставаться в рамках однофотонного (для каждой моды) подпространства Фока, поскольку действие супероператора  $\mathcal{K}^{(+)}$  на состояние расширяет его. Также, ограничимся практическим случаем двух поляризационных мод, т.е. будем предполагать, что исследуемая фотонная система представляет собой квантовые поляризационные состояния, где  $a_1 \equiv a_H$  и  $a_2 \equiv a_V$  — операторы уничтожения для фотонных мод с горизонтальной и вертикальной поляризацией соответственно. В самом простом случае начальное состояние представляет собой чистое однофотонное состояние, взятое в виде

$$\begin{aligned} \rho(0) &= |\psi_0\rangle \langle \psi_0|, \\ |\psi_0\rangle &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |1_H, 0_V\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |0_H, 1_V\rangle \end{aligned} \quad (6.15)$$

где  $|n_H, m_V\rangle \equiv |n_H\rangle \otimes |m_V\rangle$ . Это состояние поляризационного кубита, который при  $\phi = 0$  линейно поляризован вдоль единичного вектора  $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ , заданного азимутом поляризации  $\theta$ . Воспользуемся соотношениями, введенными ранее, и заметим, что исходную матрицу плотности можно переписать с помощью супероператора  $\mathcal{K}^{(+)}$  следующим образом:

$$\rho(0) = \mathcal{K}_{R_0}^{(+)} |\mathbf{0}\rangle \langle \mathbf{0}|, \quad R_0 = \frac{1}{2} \{\sigma_0 + (\mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma})\} \quad (6.16)$$

где  $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  и  $|\mathbf{0}\rangle \equiv |0_H, 0_V\rangle$  — состояние вакуума. Эволюция матрицы плотности описывается действием оператора эволюции:  $\rho(t) = e^{\mathcal{L}_0 t} \rho(0)$ . Тогда для начального состояния (6.16) справедлива

следующая форма, которая может получена с помощью коммутационных соотношений, описанных в предыдущей главе:

$$\rho(t) = (\mathcal{K}_R^{(+)} + r) |\mathbf{0}\rangle \langle \mathbf{0}|, \quad (6.17)$$

$$R = P(t)R_0P^\dagger(t), \quad r = 1 - \text{Tr} R, \quad (6.18)$$

где матрица  $P(t)$ , определена следующим образом:

$$P(t) = e^{(-i\Omega - \Gamma)t} = e^{-(i\omega_0 + \gamma_0)t} \left\{ \cosh(qt)\sigma_0 - \frac{\sinh(qt)}{q}(\gamma + i\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\sigma}) \right\}, \quad (6.19)$$

где

$$q = \sqrt{(\boldsymbol{\gamma} + i\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma} + i\boldsymbol{\omega})} = \sqrt{\sum_{k=1}^3 (\gamma_k + i\omega_k)^2}. \quad (6.20)$$

Стоит отметить, что существует особое условие, т.н. особая точка, когда векторы  $\boldsymbol{\gamma}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  взаимно ортогональны,  $\boldsymbol{\gamma} \perp \boldsymbol{\omega}$ , и их длины равны,  $|\boldsymbol{\gamma}| = |\boldsymbol{\omega}|$ . При таких условиях необходимо совершить предельный переход для выражения (6.19), тогда

$$\lim_{q \rightarrow 0} P(t) = e^{-(i\omega_0 + \gamma_0)t} \left\{ \sigma_0 - \gamma t \left( \frac{\boldsymbol{\gamma}}{|\boldsymbol{\gamma}|} + i \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|}, \boldsymbol{\sigma} \right) \right\}, \quad (6.21)$$

где комбинация экспонент заменяется функцией, линейно зависящей от времени. Это стоит учитывать при проведении численного моделирования.

Тогда  $\rho(t)$ , согласно (6.18), выглядит в фоковском базисе следующим образом:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} 1 - \text{Tr}(R) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & R_{12} & 0 \\ 0 & R_{21} & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.22)$$

и в базисе  $\sigma_i \otimes \sigma_j$ :

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{d0} & 0 & 0 \\ A_{0d} & A_{dd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{ss} & A_{as} \\ 0 & 0 & A_{sa} & A_{aa} \end{pmatrix}, \quad (6.23)$$

$$A_{00} = 1 - \text{Tr}(R) + R_{11} + R_{22} = 1, \quad (6.24)$$

$$A_{d0} = 1 - \text{Tr}(R) + R_{11} - R_{22} = 1 - 2R_{22}, \quad (6.25)$$

$$A_{0d} = 1 - \text{Tr}(R) - R_{11} + R_{22} = 1 - 2R_{11}, \quad (6.26)$$

$$A_{dd} = 1 - \text{Tr}(R) - R_{11} - R_{22} = 1 - 2\text{Tr}(R), \quad (6.27)$$

$$A_{ss} = -A_{aa} = R_{12} + R_{21}, \quad (6.28)$$

$$A_{as} = -A_{sa} = R_{12} - R_{21}. \quad (6.29)$$

Поскольку (6.23) имеет блочно-диагональную структуру, можем воспользоваться наблюдением, изложенным в конце предыдущего раздела. Тогда ближайшее сепарабельное состояние выглядит следующим образом:

$$\rho_{sep}^{(0)}(t) = \text{diag}(\rho(t)) = \begin{pmatrix} 1 - \text{Tr}(R) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.30)$$

Следовательно, степень запутанности, определяемая нормой Гильберта-Шмидта, выражается в виде

$$D(t) = \sqrt{\|\rho(t) - \text{diag}(\rho(t))\|_{HS}} = \sqrt{2R_{12}R_{21}}. \quad (6.31)$$

Таким образом, анализируя выражение (6.31), можно исследовать влияние анизотропии в оптическом волокне на степень запутанности однофотонного поляризационного состояния. Также, зная ближайшее сепарабельное состояние, можно сконструировать оператор свидетеля запутанности для реализации экспериментального измерения запутанности (см (3.12)):

$$C(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_{12} & 0 \\ 0 & -R_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.32)$$

### 6.3 Контрольные вопросы

1. Для какого состояния, согласно предположению, ближайшее сепарабельное состояние – это диагональная часть этого состояния?
2. Что такое особая точка в контексте динамических уравнений?
3. Что происходит с поляризационным кубитом при распространении в волокне в присутствии эффектов декогеренции?

## Глава 7

### Задачи для моделирования

1. Постройте параметризованный 3D-график следующей зависимости:  $\frac{1}{\text{Tr}(R)}(\text{Tr}(\sigma_1 R), \text{Tr}(\sigma_2 R), \text{Tr}(\sigma_3 R))$ , задавая начальное поляризационное состояние (6.16) вектором  $\mathbf{n}$  и параметры анизотропии канала векторами  $\boldsymbol{\gamma}$  и  $\boldsymbol{\omega}$ , где  $R$  определяется выражением (6.18). Как называется такое представление поляризационного состояния? Проанализируйте полученные зависимости и укажите эффекты, вызываемые соответствующими компонентами векторов  $\boldsymbol{\gamma}$  и  $\boldsymbol{\omega}$ .
2. Постройте зависимости (6.31), задавая начальное поляризационное состояние (6.16) вектором  $\mathbf{n}$  и параметры анизотропии канала векторами  $\boldsymbol{\gamma}$  и  $\boldsymbol{\omega}$ , где  $R$  определяется выражением (6.18). В какой точке наблюдается максимальная запутанность и как это значение соотносится со значением в выражении (3.9)? В каких точках значение степени запутанности минимально? Исследуйте характер зависимости в особой точке. Попробуйте установить некоторое соответствие между поляризационными эффектами и характером зависимостей степени запутанности.
3. Исследуйте нарушение обобщенного неравенства Белла. Для этого постройте зависимости  $\text{Tr}(C(0)\rho(t))$  и  $\text{Tr}(C(t)\rho(t))$ , где  $\rho(t)$  определено в выражении (6.22) и свидетель запутанности представлен в выражении (6.32). Чему соответствуют оба случая? В какой момент происходит нарушение неравенства в первом случае? Как данный интервал соотносится с полученными зависимостями для степени запутанности? Как второй случай соотносится с полученными зависимостями для степени запутанности?

## Список литературы

- [1] Albert Einstein, Boris Podolsky, and Nathan Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, 10(47):777, 1935.
- [2] David Bohm. *Quantum theory*. Courier Corporation, 2012.
- [3] Макс Джеммер. *Эволюция понятий квантовой механики: Пер. с англ.* М.: Наука, 1985.
- [4] Albert Einstein. Zur elektrodynamik bewegter körper (on the electrodynamics of moving bodies). *Annalen der Physik*, 322(10):891–921, 1905.
- [5] Albert Einstein. Does the inertia of a body depend upon its energy-content. *Annalen der Physik*, 13(18):639–641, 1905.
- [6] Albert Einstein. Über einem die erzeugung und verwandlung des lichtetes betreffenden heuristischen gesichtspunkt (on a heuristic point of view concerning the production and transformation of light). *Annalen der Physik*, 17:132–148, 1905.
- [7] Albert Einstein. On the motion of small particles suspended in liquids at rest required by the molecular-kinetic theory of heat. *Annalen der Physik*, 17:549–560, 1905.
- [8] Джонн фон Нейман. *Математические основы квантовой механики: Пер. с нем.* М.: Наука, 1964.
- [9] Albert Einstein, Boris Podolsky, and Nathan Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, 8(48):696, 1935.
- [10] John Trimmer. The present situation in quantum mechanics: A translation of schrödinger's "cat paradox" paper. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 124(5):323–338, 1980.

- [11] Erwin Schrödinger. Discussion of probability relations between separated systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31(4):555–563, 1935.
- [12] Leonard Mandel and Emil Wolf. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge university press, 1995.
- [13] M Zubairy and M Scully. *Quantum optics*, 1997.
- [14] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of hidden variables. i. *Physical Review*, 85(2):166, 1952.
- [15] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of hidden variables. ii. *Physical Review*, 85(2):180, 1952.
- [16] John Bell. On the problem of hidden variables in quantum mechanics. *Reviews of Modern physics*, 38(3):447, 1966.
- [17] John S Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, 1(3):195, 1964.
- [18] John F Clauser, Michael A Horne, Abner Shimony, and Richard A Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical review letters*, 23(15):880, 1969.
- [19] John Bell. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics: Collected papers on quantum philosophy*. Cambridge university press, 2004.
- [20] John Clauser and Michael Horne. Experimental consequences of objective local theories. *Physical review D*, 10(2):526, 1974.
- [21] Boris S Cirel'son. Quantum generalizations of bell's inequality. *Letters in Mathematical Physics*, 4:93–100, 1980.
- [22] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gerard Roger. Experimental tests of realistic local theories via bell's theorem. *Physical review letters*, 47(7):460, 1981.
- [23] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of bell's inequalities using time-varying analyzers. *Physical review letters*, 49(25):1804, 1982.
- [24] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gerard Roger. Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm gedankenexperiment: a new violation of bell's inequalities. *Physical review letters*, 49(2):91, 1982.

- [25] Daniel Greenberger, Michael Horne, and Anton Zeilinger. Going beyond bell's theorem. *In: Kafatos, M. (eds) Bell's Theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe. Fundamental Theories of Physics*, 37, 1989.
- [26] Daniel Greenberger, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Anton Zeilinger. Bell's theorem without inequalities. *American Journal of Physics*, 58(12):1131–1143, 1990.
- [27] Jan-Åke Larsson. Loopholes in bell inequality tests of local realism. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 47(42):424003, 2014.
- [28] Charles Bennett and Gilles Brassard. Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. *In Proc. IEEE Int. Conf. Computers, Systems, and Signal Processing, Bangalore, India, 1984*, pages 175–179, 1984.
- [29] William Wootters and Wojciech Zurek. A single quantum cannot be cloned. *Nature*, 5886(299):802–803, 1982.
- [30] NR Kenbaev and DA Kronberg. Quantum postselective measurements: Sufficient condition for overcoming the holevo bound and the role of max-relative entropy. *Physical Review A*, 105(1):012609, 2022.
- [31] H Barnum, C Caves, C Fuchs, R Jozsa, and B Schumacher. Noncommuting mixed states cannot be broadcast. *Physical Review Letters*, 76(15):2818, 1996.
- [32] Charles Bennett and Gilles Brassard. Experimental quantum cryptography: the dawn of a new era for quantum cryptography: the experimental prototype is working. *ACM Sigact News*, 20(4):78–80, 1989.
- [33] Artur K Ekert. Quantum cryptography based on bell's theorem. *Physical review letters*, 67(6):661, 1991.
- [34] D Naik, C Peterson, A White, A Berglund, and P Kwiat. Entangled state quantum cryptography: eavesdropping on the ekert protocol. *Physical Review Letters*, 84(20):4733, 2000.
- [35] Charles H Bennett, Gilles Brassard, and N David Mermin. Quantum cryptography without bell's theorem. *Physical review letters*, 68(5):557, 1992.
- [36] Charles H Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres, and William K Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Physical review letters*, 70(13):1895, 1993.

- [37] Samuel Braunstein, A Mann, and M Revzen. Maximal violation of bell inequalities for mixed states. *Physical Review Letters*, 68(22):3259, 1992.
- [38] Dik Bouwmeester, Jian-Wei Pan, Klaus Mattle, Manfred Eibl, Harald Weinfurter, and Anton Zeilinger. Experimental quantum teleportation. *Nature*, 390(6660):575–579, 1997.
- [39] Xiao-Song Ma, Thomas Herbst, Thomas Scheidl, Daqing Wang, Sebastian Kropatschek, William Naylor, Bernhard Wittmann, Alexandra Mech, Johannes Kofler, Elena Anisimova, Vadim Makarov, Thomas Jennewein, Rupert Ursin, and Anton Zeilinger. Quantum teleportation over 143 kilometres using active feed-forward. *Nature*, 7415(489):269–273, 2012.
- [40] Marek Zukowski, Anton Zeilinger, Michael Horne, and Arthur Ekert. Event-ready-detectors bell experiment via entanglement swapping. *Physical Review Letters*, 71(26):4287, 1992.
- [41] Jian-Wei Pan, Dik Bouwmeester, Harald Weinfurter, and Anton Zeilinger. Experimental entanglement swapping: entangling photons that never interacted. *Physical Review Letters*, 80(18):3891, 1998.
- [42] Charles H Bennett and Stephen J Wiesner. Communication via one-and two-particle operators on einstein-podolsky-rosen states. *Physical review letters*, 69(20):2881, 1992.
- [43] Juan Yin, Yu-Huai Li, Sheng-Kai Liao, Meng Yang, Yuan Cao, Liang Zhang, Ji-Gang Ren, Wen-Qi Cai, Wei-Yue Liu, Shuang-Lin Li, et al. Entanglement-based secure quantum cryptography over 1,120 kilometres. *Nature*, 582(7813):501–505, 2020.
- [44] Víctor Zapatero, Tim van Leent, Rotem Arnon-Friedman, Wen-Zhao Liu, Qiang Zhang, Harald Weinfurter, and Marcos Curty. Advances in device-independent quantum key distribution. *npj quantum information*, 9(1):10, 2023.
- [45] Yu Guo, Bi-Heng Liu, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo. Advances in quantum dense coding. *Advanced Quantum Technologies*, 2(5-6):1900011, 2019.
- [46] Stefano Pirandola, Jens Eisert, Christian Weedbrook, Akira Furusawa, and Samuel L Braunstein. Advances in quantum teleportation. *Nature photonics*, 9(10):641–652, 2015.
- [47] Otfried Gühne and Géza Tóth. Entanglement detection. *Physics Reports*, 474(1-6):1–75, 2009.

- [48] Vlatko Vedral, Martin B Plenio, Michael A Rippin, and Peter L Knight. Quantifying entanglement. *Physical Review Letters*, 78(12):2275, 1997.
- [49] Lin Chen, Martin Aulbach, and Michal Hajdušek. Comparison of different definitions of the geometric measure of entanglement. *Physical Review A*, 89(4):042305, 2014.
- [50] Frank Verstraete, Koenraad Audenaert, Jeroen Dehaene, and Bart De Moor. A comparison of the entanglement measures negativity and concurrence. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34(47):10327, 2001.
- [51] Stefano Olivares. Quantum optics in the phase space: a tutorial on gaussian states. *The European Physical Journal Special Topics*, 203(1):3–24, 2012.
- [52] Alessio Serafini. *Quantum continuous variables: a primer of theoretical methods*. CRC press, 2017.
- [53] Xiang-Bin Wang, Tohya Hiroshima, Akihisa Tomita, and Masahito Hayashi. Quantum information with gaussian states. *Physics reports*, 448(1-4):1–111, 2007.
- [54] Christian Weedbrook, Stefano Pirandola, Raúl García-Patrón, Nicolas J Cerf, Timothy C Ralph, Jeffrey H Shapiro, and Seth Lloyd. Gaussian quantum information. *Reviews of Modern Physics*, 84(2):621, 2012.
- [55] Reinhard Werner. Quantum states with einstein-podolsky-rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Physical Review A*, 40(8):4277, 1989.
- [56] Asher Peres. Separability criterion for density matrices. *Physical Review Letters*, 77(8):1413, 1996.
- [57] Michał Horodecki, Paweł Horodecki, and Ryszard Horodecki. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. *Physics Letters A*, 223(1-2):1–8, 1996.
- [58] Paweł Horodecki. Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition. *Physics Letters A*, 232(5):333–339, 1997.
- [59] Michał Horodecki, Paweł Horodecki, and Ryszard Horodecki. Bell inequalities and the separability criterion. *Physics Letters A*, 271(5-6):319–326, 2000.
- [60] V. Dodonov, O. Man’Ko, V. Man’Ko, and A. Wünsche. Hilbert-schmidt distance and non-classicality of states in quantum optics. *Physics Letters A*, 47(4):633–654, 2000.

- [61] Reinhold A Bertlmann, Heide Narnhofer, and Walter Thirring. Geometric picture of entanglement and bell inequalities. *Physical Review A*, 66(3):032319, 2002.
- [62] Reinhold A Bertlmann, Katharina Durstberger, Beatrix C Hiesmayr, and Philipp Krammer. Optimal entanglement witnesses for qubits and qutrits. *Physical Review A*, 72(5):052331, 2005.
- [63] Wolfgang Pauli Jr. Zur quantenmechanik des magnetischen elektrons. *Zeitschrift für Physik*, 43(9):601–623, 1927.
- [64] Anthony Zee. *Group theory in a nutshell for physicists*. Princeton University Press, 2016.
- [65] Murray Gell-Mann. Symmetries of baryons and mesons. *Physical Review*, 125(3):1067, 1962.
- [66] Reinhold A Bertlmann and Philipp Krammer. Bloch vectors for qudits. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(23):235303, 2008.
- [67] Gen Kimura. The bloch vector for n-level systems. *Physics Letters A*, 314(5-6):339–349, 2003.
- [68] H Kuhn and A Tucker. Nonlinear programming in proceedings of 2nd berkeley symposium (pp. 481–492). *Berkeley: University of California Press.[Google Scholar]*, 1951.
- [69] William Karush. Minima of functions of several variables with inequalities as side constraints. *M. Sc. Dissertation. Dept. of Mathematics, Univ. of Chicago*, 1939.
- [70] Daniel A Lidar and K Birgitta Whaley. Decoherence-free subspaces and subsystems. In *Irreversible quantum dynamics*, pages 83–120. Springer, 2003.
- [71] Roland Omnes. General theory of the decoherence effect in quantum mechanics. *Physical Review A*, 56(5):3383, 1997.
- [72] Wojciech Hubert Zurek. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Reviews of modern physics*, 75(3):715, 2003.
- [73] Max Born and Emil Wolf. Principles of optics. electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. forth edition, 1968.
- [74] Vladimir Moisejevič Agranovič and Vitalij Lazarevič Ginzburg. *Kristallooptika s učetom prostranstvennoj dispersii i teorija eksitonov*. Nauka, 1965.

- [75] N Gisin and B Huttner. Combined effects of polarization mode dispersion and polarization dependent losses in optical fibers. *Optics communications*, 142(1-3):119–125, 1997.
- [76] Hui Dong, Ping Shum, Min Yan, JQ Zhou, GX Ning, YD Gong, and CQ Wu. Measurement of mueller matrix for an optical fiber system with birefringence and polarization-dependent loss or gain. *Optics communications*, 274(1):116–123, 2007.
- [77] Luca Palmieri. Polarization properties of spun single-mode fibers. *Journal of lightwave technology*, 24(11):4075–4088, 2006.
- [78] SC Rashleigh and R Ulrich. Polarization mode dispersion in single-mode fibers. *Optics Letters*, 3(2):60–62, 1978.
- [79] Craig D Poole, Jack H Winters, and Jonathan A Nagel. Dynamical equation for polarization dispersion. *Optics Letters*, 16(6):372–374, 1991.
- [80] Daniel A Nolan, Xin Chen, and Ming-Jun Li. Fibers with low polarization-mode dispersion. *Journal of lightwave technology*, 22(4):1066–1077, 2004.
- [81] Anton Kozubov, Andrei Gaidash, and George Miroschnichenko. Quantum model of decoherence in the polarization domain for the fiber channel. *Physical Review A*, 99(5):053842, 2019.
- [82] Ángel Rivas and Alfredo Luis. Su (2)-invariant depolarization of quantum states of light. *Physical Review A*, 88(5):052120, 2013.
- [83] Andrei Gaidash, Anton Kozubov, and George Miroschnichenko. Dissipative dynamics of quantum states in the fiber channel. *Physical Review A*, 102(2):023711, 2020.
- [84] Andrei Gaidash, Anton Kozubov, George Miroschnichenko, and Alexei D Kiselev. Quantum dynamics of mixed polarization states: Effects of environment-mediated intermode coupling. *JOSA B*, 38(9):2603–2611, 2021.
- [85] Jae-Seung Lee. Analysis of the polarization-mode-dispersion vector distribution for linearly birefringent optical fibers. *IEEE Photonics Technology Letters*, 19(13):972–974, 2007.
- [86] Svetislav Savović and Alexandar Djordjevich. Solution of mode coupling in step-index optical fibers by the fokker-planck equation and the langevin equation. *Applied optics*, 41(15):2826–2830, 2002.

- [87] Nicolas Gisin, J-P Von der Weid, and J-P Pellaux. Polarization mode dispersion of short and long single-mode fibers. *Journal of lightwave technology*, 9(7):821–827, 1991.
- [88] Han Zhang, Ding Yuan Tang, LM Zhao, and Xuan Wu. Observation of polarization domain wall solitons in weakly birefringent cavity fiber lasers. *Physical Review B*, 80(5):052302, 2009.
- [89] Han Zhang, DY Tang, LM Zhao, and RJ Knize. Vector dark domain wall solitons in a fiber ring laser. *Optics Express*, 18(5):4428–4433, 2010.
- [90] Han Zhang, Dingyuan Tang, Luming Zhao, and Xuan Wu. Dual-wavelength domain wall solitons in a fiber ring laser. *Optics express*, 19(4):3525–3530, 2011.
- [91] Yufeng Song, Si Chen, Qian Zhang, Lei Li, Luming Zhao, Han Zhang, and Dingyuan Tang. Vector soliton fiber laser passively mode locked by few layer black phosphorus-based optical saturable absorber. *Optics express*, 24(23):25933–25942, 2016.
- [92] Yufeng Song, Xujie Shi, Chengfa Wu, Dingyuan Tang, and Han Zhang. Recent progress of study on optical solitons in fiber lasers. *Applied Physics Reviews*, 6(2):021313, 2019.
- [93] Bo Guo, Shi-Hao Wang, Zhi-Xin Wu, Ze-Xin Wang, Da-He Wang, Hao Huang, Feng Zhang, Yan-Qi Ge, and Han Zhang. Sub-200 fs soliton mode-locked fiber laser based on bismuthene saturable absorber. *Optics express*, 26(18):22750–22760, 2018.
- [94] Ugo Fano. Description of states in quantum mechanics by density matrix and operator techniques. *Reviews of Modern Physics*, 29(1):74, 1957.
- [95] Richard Feynman and Albert Hibbs. *The path integral formulation of quantum mechanics*. McGraw-Hiill, New York, 1965.
- [96] IP Vadeiko, GP Miroshnichenko, AV Rybin, and Yu Timonen. Diagonal invariance and quasi-trapped states in the micromaser model based on n-atom clusters. *Optics and Spectroscopy*, 89(2):300–307, 2000.

Козубов Антон Владимирович  
Гайдаш Андрей Алексеевич  
Гусельников Михаил Сергеевич

## **ДИНАМИКА ЗАПУТАННОСТИ ФОТОННЫХ СИСТЕМ**

**Учебно-методическое пособие**

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе



**Редакционно-издательский отдел**  
**Университета ИТМО**  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А