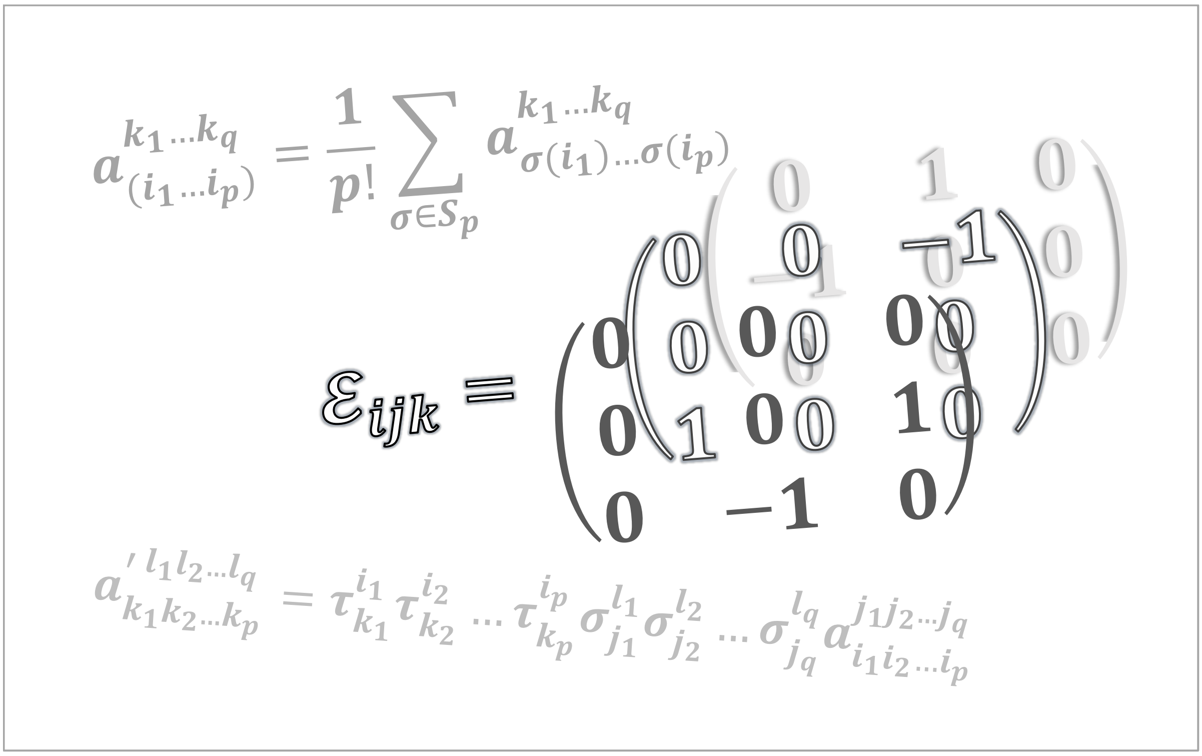
ITMO

ТЕНЗОРЫ.
ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2026

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

ТЕНЗОРЫ.
ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования бакалавриата

Санкт-Петербург
2026

Тензоры. Задачи и упражнения / О.В. Блейхер, Т.Т. Исаева, А.С. Рванова [и др]. – СПб: Университет ИТМО, 2026. – 80 с.

Рецензенты:

Хахина Анна Михайловна, доктор технических наук, доцент, профессор Высшей школы программной инженерии (Институт компьютерных наук и кибербезопасности) ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»;

Панкратова Татьяна Фёдоровна, кандидат физико-математических наук, доцент.

Учебное пособие содержит краткие теоретические сведения, подробные решения вычислительных задач, а также упражнения для самостоятельной работы по теме «Тензоры», изучаемой в курсе линейной алгебры.

Пособие предназначено для студентов, изучающих линейную алгебру, а также будет полезно преподавателям при организации практических занятий.

ИТМО

ИТМО (Санкт-Петербург) – национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: IT и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication. Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализовывается программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития – научно-образовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента.

ИТМО пять лет подряд – в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере IT. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ 5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

Оглавление

Введение

Настоящее методическое пособие посвящено изучению тензоров и операций над ними в рамках курса линейной алгебры и ориентировано прежде всего на формирование устойчивых навыков выполнения вычислительных задач. Опыт преподавания данной темы студентам инженерных и естественнонаучных направлений подготовки показывает, что при общем понимании теоретических определений вычислительная сторона тензорного исчисления вызывает наибольшие затруднения. Эти трудности проявляются при работе с координатными представлениями тензоров, при выполнении свёрток, тензорных произведений, преобразований компонент при замене базиса, а также при операциях симметрирования, транспонирования, поднятия и опускания индексов.

Теория тензоров традиционно излагается в достаточно абстрактной форме, что методически оправдано и необходимо для понимания их инвариантной природы. Однако на практике студенты сталкиваются с необходимостью выполнять конкретные расчёты, корректно работать с индексами, многомерными матрицами. Именно на этом этапе часто возникают типовые ошибки: смешение верхних и нижних индексов, неверный порядок индексов при тензорном умножении, формальное применение формул без понимания их вычислительного смысла. В результате даже при знании определений и формулировок теорем решение задач оказывается затруднительным.

Данное пособие построено с учётом этих методических особенностей. Теоретический материал представлен в объёме, необходимом для осмысленного выполнения вычислений, и непосредственно сопровождается подробно разобранными примерами. Основное внимание уделено пошаговому выполнению вычислений в координатной форме, интерпретации индексов, работе с пространственными матрицами и установлению связи между тензорными операциями и привычными матричными преобразованиями. Такой подход позволяет студентам увидеть внутреннюю логику вычислений и избежать механического заучивания формул.

Структура пособия ориентирована на постепенное наращивание вычислительной сложности. От простейших тензоров малой валентности читатель переходит к многовалентным тензорам, осваивает операции тензорного умножения и свёртывания, изучает преобразование компонент при замене базиса и работу с метрическим тензором. Отдельный раздел посвящён типовым расчётам, которые обобщают и систематизируют изученный материал и могут быть использованы как при подготовке к текущему контролю, так и при самостоятельной работе.

Пособие адресовано студентам, изучающим линейную алгебру, аналитическую геометрию и элементы тензорного исчисления, а также может быть полезно преподавателям при организации практических занятий. Его цель – не только закрепление теоретических понятий, но и формирование уверенных вычислительных навыков, необходимых для дальнейшего изучения математической физики, механики, дифференциальной геометрии и прикладных инженерных дисциплин.

Предложения и замечания, направленные на совершенствование учебного пособия, принимаются по адресу электронной почты: mathgate@itmo.ru.

1. Основные определения

Пусть L_n – n-мерное линейное пространство над полем K ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), L_n^* – сопряжённое к L_n пространство. Элементы пространства L_n называют векторами, а пространства L_n^* – ковекторами.

Тензором типа $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{0})$ ***на*** $\boldsymbol{L_n}$ называется полилинейная форма

$$A : \underbrace{L_n \times \ldots \times L_n}_{p \text{ раз}} \times \underbrace{L_n^* \times \ldots \times L_n^*}_{q \text{ раз}} \to K.$$

Таким образом, тензор A каждым p векторам $x_1, x_2, \ldots, x_p$из пространства L_n и q ковекторам $u^1, u^2, \ldots, u^q$ из пространства L_n^* , сопряжённого с L_n , сопоставляет число

$$A\left(x_1, x_2, \ldots x_p, u^1, u^2, \ldots u^q\right) \in K.$$

Число p называется ***ковариантной валентностью***, q – ***контравариантной валентностью***, $p + q$ – ***(полной) валентностью (рангом)*** тензора.

Тензор типа $(p, 0)$ называют ***ковариантным***.

Тензор типа $(0, q)$ называют ***контравариантным***.

Тензор типа (p, q) называют ***p раз ковариантным*** и ***q раз контравариантным.***

Примеры тензоров:

- тензор типа $(0, 0)$является ***скаляром (инвариантом),*** отождествляется с элементами поля K;
- тензор типа $(1, 0)$ является ***линейной формой (ковектором)***;
- тензор типа $(0, 1)$ является ***вектором***.

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис в L_n, $\left\{e^j\right\}_{j=1}^n$ – базис в L_n^*, тогда

$$e^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, \text{если } i = j \\ 0, \text{если } i \neq j \end{cases} i, j = 1, 2, \ldots n.$$

Координатами (компонентами) тензора валентности $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n, \left\{e^j\right\}_{j=1}^n$ пространств L_nи L_n^* называется набор из n^{p+q} скаляров, которые являются значениями тензора на всевозможных наборах базисных векторов

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q} = A\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots e_{i_p}, e^{j_1}, e^{j_2}, \ldots, e^{j_q}\right),$$

где $i_1, i_2, .. i_p, j_1, j_2, .. j_q = 1, 2, \ldots, n, n = \dim L_n$.

Задание тензора эквивалентно заданию его компонент в паре базисов пространств L_nи L_n^* .

Представление тензора пространственной матрицей.

Тензор можно представить в виде пространственной матрицы. Порядок матрицы совпадает с размерностью рассматриваемого линейного пространства. Элементами матрицы являются скаляры $a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$, то есть значения тензора (полилинейной формы) на базисных векторах. При этом индексы элементов матрицы читаются следующим образом: сначала верхние слева направо, потом нижние слева направо.

Примеры записи тензоров матрицами:

1. ***Нульвалентные тензоры*** (валентность $r = p + q = 0, p = 0, q = 0$) имеют одну координату, у которой отсутствуют индексы, и которая имеет одно и то же значение во всех системах координат. Такой тензор является скаляром, числом, инвариантом.

2. ***Одновалентные тензоры*** (валентность $r = p + q = 1$) могут быть двух типов:

• тензор типа $(1, 0)$ является линейной формой (вектор-строка) и в линейном пространстве L_n имеет матричный вид:

$$(a_i) = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n);$$

• тензор типа $(0, 1)$ является вектором (вектор-столбец) и в линейном пространстве L_n имеет матричный вид:

$$(b^j) = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}.$$

3. ***Двухвалентные тензоры*** (полная валентность $r = p + q = 2$) могут быть трех типов:

• тензор типа $(2, 0)$ является билинейной формой и в линейном пространстве L_3 имеет матричный вид:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

• тензор типа $(1, 1)$ является оператором и в линейном пространстве L_3 имеет матричный вид:

$$(b_j^i) = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{pmatrix};$$

- тензор типа $(0,2)$ в линейном пространстве L_3 имеет матричный вид:

$$(c^{ij}) = \begin{pmatrix} c^{11} & c^{12} & c^{13} \\ c^{21} & c^{22} & c^{23} \\ c^{31} & c^{32} & c^{33} \end{pmatrix}.$$

Во всех трёх случаях:
1-й индекс (i) соответствует номеру строки;
2-й индекс (j) соответствует номеру столбца.
Примером двухвалентного тензора является ***символ Кронекера***:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, n},$$

матрица которого имеет вид:

$$(\delta_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

4. ***Трехвалентные тензоры*** (полная валентность $r = p + q = 3$) могут быть четырех типов:

- тензор типа $(3,0)$ в линейном пространстве L_n имеет матричный вид:

$$(a_{ijk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} \end{array}\right) \text{ для } n = 2 \text{ и}$$

$$(a_{ijk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_{111} & a_{121} & a_{131} & a_{112} & a_{122} & a_{132} & a_{113} & a_{123} & a_{133} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} & a_{212} & a_{222} & a_{232} & a_{213} & a_{223} & a_{233} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} & a_{312} & a_{322} & a_{332} & a_{313} & a_{323} & a_{333} \end{array}\right) \text{ для } n = 3;$$

- тензор типа $(2,1)$ в линейном пространстве L_n имеет матричный вид:

$$(b_{jk}^i) = \left(\begin{array}{cc|cc} b_{11}^1 & b_{21}^1 & b_{12}^1 & b_{22}^1 \\ b_{11}^2 & b_{21}^2 & b_{12}^2 & b_{22}^2 \end{array}\right) \text{ для } n = 2 \text{ и}$$

$$(b_{jk}^i) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} b_{11}^1 & b_{21}^1 & b_{31}^1 & b_{12}^1 & b_{22}^1 & b_{32}^1 & b_{13}^1 & b_{23}^1 & b_{33}^1 \\ b_{11}^2 & b_{21}^2 & b_{31}^2 & b_{12}^2 & b_{22}^2 & b_{32}^2 & b_{13}^2 & b_{23}^2 & b_{33}^2 \\ b_{11}^3 & b_{21}^3 & b_{31}^3 & b_{12}^3 & b_{22}^3 & b_{32}^3 & b_{13}^3 & b_{23}^3 & b_{33}^3 \end{array}\right) \text{ для } n = 3;$$

- тензор типа $(1,2)$ в линейном пространстве L_n имеет матричный вид:

$$(c_k^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} c_1^{11} & c_1^{12} & c_2^{11} & c_2^{12} \\ c_1^{21} & c_1^{22} & c_2^{21} & c_2^{22} \end{array}\right) \text{ для } n = 2 \text{ и}$$

$$\left(c_k^{ij}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} c_1^{11} & c_1^{11} & c_1^{11} & c_2^{11} & c_2^{12} & c_2^{13} & c_3^{11} & c_3^{12} & c_3^{13} \\ c_1^{21} & c_1^{22} & c_1^{23} & c_2^{21} & c_2^{22} & c_2^{23} & c_3^{21} & c_3^{22} & c_3^{23} \\ c_1^{31} & c_1^{32} & c_1^{33} & c_2^{31} & c_2^{32} & c_2^{33} & c_3^{31} & c_3^{32} & c_3^{33} \end{array}\right) \text{ для } n = 3;$$

- тензор типа $(0, 3)$ в линейном пространстве L_n имеет матричный вид:

$$\left(d^{ijk}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} d^{111} & d^{121} & d^{112} & d^{122} \\ d^{211} & d^{221} & d^{212} & d^{222} \end{array}\right) \text{ для } n = 2 \text{ и}$$

$$\left(d^{ijk}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} d^{111} & d^{121} & d^{131} & d^{112} & d^{122} & d^{132} & d^{113} & d^{123} & d^{133} \\ d^{211} & d^{221} & d^{231} & d^{212} & d^{222} & d^{232} & d^{213} & d^{223} & d^{233} \\ d^{311} & d^{321} & d^{331} & d^{312} & d^{322} & d^{332} & d^{313} & d^{323} & d^{333} \end{array}\right) \text{ для } n = 3.$$

Порядок чтения индексов:
1-й индекс (i) соответствует номеру строки;
2-й индекс (j) соответствует номеру столбца;
3-й индекс (k) соответствует номеру слоя.

Пример 1.1

Примером трехвалентного тензора в линейном пространстве L_3 является ***символ Леви-Чевиты***, компоненты которого в правом ортонормированном базисе определяются следующим образом:

$$\mathcal{E}_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i, j, k - \text{чётная перестановка;} \\ -1, & \text{если } i, j, k - \text{нечётная перестановка;} \\ 0, & \text{если есть повторяющиеся индексы.} \end{cases}$$

Запишем данный тензор в виде матрицы:

$$\left(\mathcal{E}_{ijk}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Символ Леви-Чевиты обобщается на пространство любой размерности $n > 1$:

$$\mathcal{E}_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{если } i_1, i_2, \dots, i_n - \text{чётная перестановка;} \\ -1, & \text{если } i_1, i_2, \dots, i_n - \text{нечётная перестановка;} \\ 0, & \text{если есть повторяющиеся индексы.} \end{cases}$$

5. ***Четырехвалентные тензоры*** (полная валентность $r = p + q = 4$) могут быть пяти типов:

- $\left(a_{ijkl}\right)$ – тензор типа $(4, 0)$;
- $\left(b_{jkl}^{i}\right)$ – тензор типа $(3, 1)$;

- $\left(c^{ij}_{kl}\right)$ – тензор типа $(2, 2)$;
- $\left(d^{ijk}_{l}\right)$ – тензор типа $(1, 3)$;
- $\left(e^{ijkl}\right)$ – тензор типа $(0, 4)$.

К примеру, в L_n для $n\ =\ 2$:

$$\left(c^{ij}_{kl}\right) = \begin{array}{rcl} & \begin{array}{cccc} j=1 & j=2 & j=1 & j=2 \end{array} & \\ \begin{array}{r} i=1 \\ i=2 \\ i=1 \\ i=2 \end{array} & \left(\begin{array}{cc|cc} c^{11}_{11} & c^{12}_{11} & c^{11}_{12} & c^{12}_{12} \\ c^{21}_{11} & c^{22}_{11} & c^{21}_{12} & c^{22}_{12} \\ \hline c^{11}_{21} & c^{12}_{21} & c^{11}_{22} & c^{12}_{22} \\ c^{21}_{21} & c^{22}_{21} & c^{21}_{22} & c^{22}_{22} \end{array}\right) & \begin{array}{l} k=1 \\ \\ \\ k=2 \end{array} \\ & \begin{array}{cc} l=1 & l=2 \end{array} & \end{array}$$

Порядок чтения индексов:

1-й индекс (i) соответствует номеру строки;
2-й индекс (j) соответствует номеру столбца;
3-й индекс (k) соответствует номеру слоя (большой строке);
4-й индекс (l) соответствует номеру сечения (большому столбцу).

Пример 1.2

Пример четырехвалентного тензора:

$$c^{ij}_{kl} = \begin{cases} 1, \text{если } i = k\ \neq j = l; \\ -1, \text{если } i = l\ \neq j = k; \\ 0, \text{все остальные.} \end{cases}$$

Запишем данный тензор в виде матрицы в линейном пространстве L_2:

$$\left(c^{ij}_{kl}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Упражнения

1.1. Укажите тип тензора (p, q), его ковариантную, контравариантную и полную валентность:
1) $A(x, y)$ – билинейная форма;
2) $B(x, y, z)$, где $x, y, z \in L_3$;
3) $C(u, v)$, где $u, v \in L_3^*$;
4) $D(x, u)$, где $x \in L_3, u \in L_3^*$;
5) $B(u)$, где $u \in L_n^*$.

1.2. Представьте в виде матрицы тензор A, компоненты которого в данном базисе пространства L_n:

1) $a^{ij} = 2i - j, n = 2$;
2) $a^{ij} = 2i - j, n = 3$;
3) $a^{ij}_{k} = 2i - j + 3k, n = 2$;
4) $a^{ij}_{k} = 2i - j + 3k, n = 3$;
5) $a^{k}_{ij} = 2i - j + 3k, n = 3$;
6) $c^{ij}_{kl} = 2i - j + 3k + (-1)^l, n = 2$;
7) $c^{ik}_{jl} = 2i - j + 3k + (-1)^l, n = 2$.

1.3. Определите количество компонент данного тензора в правом ортонормированном базисе, найдите все его ненулевые компоненты:

1) символ Кронекера δ^i_j в $\mathbb{R}_3$;
2) символ Леви-Чевиты $\mathcal{E}_{ijkl}$ в $\mathbb{R}_4$.

2. Операции над тензорами

2.1. Сложение и вычитание тензоров

Сложение и вычитание тензоров определяется для тензоров одинакового типа.

Суммой тензоров A и B типа $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ называется тензор $A+B$ типа (p,q) такой, что:

$\forall x_1, x_2, \dots x_p \in L_n \ \forall u^1, u^2, \dots, u^q \in L_n^*$

$$(A+B)\big(x_1, x_2, \dots x_p, u^1, u^2, \dots, u^q\big) =$$
$$= A\big(x_1, x_2, \dots x_p, u^1, u^2, \dots, u^q\big) + B\big(x_1, x_2, \dots x_p, u^1, u^2, \dots, u^q\big).$$

Определим сложение тензоров, заданных координатами. Пусть A и B – два тензора типа (p,q), $a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ и $b_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ – координаты этих тензоров в базисе $\{e_i\}$, тогда тензор $C = A \pm B$ типа (p,q) в базисе $\{e_i\}$ имеет координаты:

$$c_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \pm b_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}.$$

Пример 2.1

Найти сумму и разность тензоров A и B типа $(0,1)$, заданных матрицами:

$$\big(a^i\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ и } \big(b^i\big) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Тензор суммы: $C = A + B$; $\big(c^i\big) = \big(a^i\big) + \big(b^i\big) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Тензор разности: $D = A - B$; $\big(d^i\big) = \big(a^i\big) - \big(b^i\big) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.2. Умножение тензора на число

Произведением тензора A типа $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ ***на число*** $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{K}$ называется тензор αA типа (p,q) такой, что:

$\forall x_1, x_2, \dots x_p \in L_n, \forall u^1, u^2, \dots, u^q \in L_n^*$
$$(\alpha A)\big(x_1, x_2, \dots x_p, u^1, u^2, \dots, u^q\big) = \alpha A\big(x_1, x_2, \dots x_p, u^1, u^2, \dots, u^q\big).$$

Определим произведение тензора на число в координатах.

Пусть A – тензор типа (p, q), имеющий в базисе $\{e_i\}$ координаты $a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$, и $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда тензор $B = \alpha A$ в базисе $\{e_i\}$ имеет координаты:

$$b_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} = \alpha a_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}.$$

Пример 2.2

Тензор A типа $(1, 1)$ имеет матрицу $\left(a_i^j\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Найти тензор $3A$.

Решение.

Выполним умножение тензора A на число $\alpha = 3$.

Тензор $B = 3A$ имеет координаты $b_i^j = 3a_i^j$, где $i, j = 1, 2, 3$.

Тогда $\left(b_i^j\right) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \\ 21 & 24 & 36 \end{pmatrix}$.

2.3. Тензорное умножение

Тензорное произведение определяется для тензоров произвольных типов.

Тензорным произведением тензоров A типа (p, q) и B типа (t, s) называется тензор $A \otimes B$ типа $(p + t, q + s)$ такой, что:

$$\forall x_1, x_2, \dots x_{p+t} \in L_n, \forall u^1, u^2, \dots, u^{q+s} \in L_n^*$$

$$A \otimes B\left(x_1, x_2, \dots x_{p+t}, u^1, u^2, \dots, u^{q+s}\right) =$$

$$= A\left(x_1, x_2, \dots x_p, u^1, u^2, \dots, u^q\right) \cdot B\left(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots x_{p+t}, u^{q+1}, u^{q+2}, \dots, u^{q+s}\right).$$

Определим тензорное произведение в координатах. Пусть A – тензор типа (p, q), имеющий в данном базисе $\{e_i\}$ координаты $a_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$, а B – тензор типа (t, s), имеющий в этом же базисе $\{e_i\}$, координаты $b_{l_1 \dots l_t}^{m_1 \dots m_s}$. Тогда тензор $D = A \otimes B$ в базисе $\{e_i\}$ имеет координаты:

$$d_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+t}}^{k_1 \dots k_q k_{q+1} \dots k_{q+s}} = a_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} \cdot b_{i_{p+1} \dots i_{p+t}}^{k_{q+1} \dots k_{q+s}}.$$

То есть для определения произведения $D = A \otimes B$ составляются всевозможные произведения координат тензора A на кординаты тензора B. В каждом таком произведении индексы $l_1 \dots l_t$ и $m_1 \dots m_s$ у координат тензора B заменяются новыми индексами. Именно, полагают:

$$l_1 = i_{p+1} \ \dots \ l_t = i_{p+t} \text{ и } m_1 = k_{q+1} \ \dots \ m_s = k_{q+s}.$$

Операция умножения в общем случае не обладает свойством коммутативности:

$$A \otimes B \neq B \otimes A.$$

Это объясняется тем, что порядок следования индексов у координат тензора определяет «номер» этой координаты.

Примеры умножения тензоров

Пример 2.3

Даны линейная форма:

$$A(x_1) = 2\,\xi_1^1 - \xi_1^2 + \xi_1^3,$$

и билинейная форма:

$$B(x_1, x_2) = \xi_1^1\xi_2^1 + 2\,\xi_1^2\xi_2^3 - 2\,\xi_1^2\xi_2^1 - \xi_1^2\xi_2^2 - 3\,\xi_1^2\xi_2^1 + 3\,\xi_1^3\xi_2^1 + 4\,\xi_1^3\xi_2^3,$$

где

$$x_1 = (\xi_1^1 \quad \xi_1^2 \quad \xi_1^3)^T, \; x_2 = (\xi_2^1 \quad \xi_2^2 \quad \xi_2^3)^T.$$

Найти трехлинейные формы:

$C(x_1, x_2, x_3) = A(x_1) \cdot B(x_2, x_3)$ и $D(x_1, x_2, x_3) = B(x_1, x_2) \cdot A(x_3)$.

Убедиться, что $A(x_1) \cdot B(x_2, x_3) \neq B(x_1, x_2) \cdot A(x_3)$.

Решение.

Найдем трехлинейные формы:

$$C(x_1, x_2, x_3) = A(x_1) \cdot B(x_2, x_3) =$$

$$= (2\,\xi_1^1 - \xi_1^2 + \xi_1^3)(\xi_2^1\xi_3^1 + 2\,\xi_2^2\xi_3^3 - 2\,\xi_2^2\xi_3^1 - \xi_2^2\xi_3^2 - 3\,\xi_2^2\xi_3^1 + 3\,\xi_2^3\xi_3^1 + 4\,\xi_2^3\xi_3^3) =$$

$$= 2\,\xi_1^1\xi_2^1\xi_3^1 + 4\,\xi_1^1\xi_2^2\xi_3^3 - 4\,\xi_1^1\xi_2^2\xi_3^1 - 2\,\xi_1^1\xi_2^2\xi_3^2 - 6\,\xi_1^1\xi_2^2\xi_3^1 + 6\,\xi_1^1\xi_2^3\xi_3^1 + 8\,\xi_1^1\xi_2^3\xi_3^3 -$$

$$-\xi_1^2\xi_2^1\xi_3^1 - 2\,\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^3 + 2\,\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^1 + \xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2 + 3\,\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^1 - 3\,\xi_1^2\xi_2^3\xi_3^1 - 4\,\xi_1^2\xi_2^3\xi_3^3 +$$

$$+\xi_1^3\xi_2^1\xi_3^1 + 2\,\xi_1^3\xi_2^2\xi_3^3 - 2\,\xi_1^3\xi_2^2\xi_3^1 - \xi_1^3\xi_2^2\xi_3^2 - 3\,\xi_1^3\xi_2^2\xi_3^1 + 3\,\xi_1^3\xi_2^3\xi_3^1 + 4\,\xi_1^3\xi_2^3\xi_3^3;$$

$$D(x_1, x_2, x_3) = B(x_1, x_2) \cdot A(x_3) =$$

$$= (\xi_1^1\xi_2^1 + 2\,\xi_1^2\xi_2^3 - 2\,\xi_1^2\xi_2^1 - \xi_1^2\xi_2^2 - 3\,\xi_1^2\xi_2^1 + 3\,\xi_1^3\xi_2^1 + 4\,\xi_1^3\xi_2^3)(2\,\xi_3^1 - \xi_3^2 + \xi_3^3) =$$

$$= 2\,\xi_1^1\xi_2^1\xi_3^1 + 4\,\xi_1^2\xi_2^3\xi_3^1 - 4\,\xi_1^2\xi_2^1\xi_3^1 - 2\,\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^1 - 6\,\xi_1^2\xi_2^1\xi_3^1 + 6\,\xi_1^3\xi_2^1\xi_3^1 + 8\,\xi_1^3\xi_2^3\xi_3^1 -$$

$$-\xi_1^1\xi_2^1\xi_3^2 - 2\,\xi_1^2\xi_2^3\xi_3^2 + 2\,\xi_1^2\xi_2^1\xi_3^2 + \xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2 + 3\,\xi_1^2\xi_2^1\xi_3^2 - 3\,\xi_1^3\xi_2^1\xi_3^2 - 4\,\xi_1^3\xi_2^3\xi_3^2 +$$

$$+\xi_1^1\xi_2^1\xi_3^3 + 2\,\xi_1^2\xi_2^3\xi_3^3 - 2\,\xi_1^2\xi_2^1\xi_3^3 - \xi_1^2\xi_2^2\xi_3^3 - 3\,\xi_1^2\xi_2^1\xi_3^3 + 3\,\xi_1^3\xi_2^1\xi_3^3 + 4\,\xi_1^3\xi_2^3\xi_3^3.$$

Сравнивая результаты, замечаем, что $C(x_1, x_2, x_3) \neq D(x_1, x_2, x_3)$, то есть произведение полилинейных форм некоммутативно:

$$A(x_1) \cdot B(x_2, x_3) \neq B(x_1, x_2) \cdot A(x_3).$$

Рассмотрим другой подход к решению данной задачи.

Линейная форма $A(x_1)$ является тензором типа $(1, 0)$ и имеет матрицу:

$$(a_i) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Билинейная форма $B(x_1, x_2)$ является тензором типа $(2, 0)$, её матрица:

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Трёхлинейная форма $C(x_1, x_2, x_3) = A(x_1) \cdot B(x_2, x_3)$ является тензором типа $(3,0)$:

$$C = A \otimes B,\ c_{ijk} = a_i \cdot b_{jk},$$

где i – номер строки, j – номер столбца, k – номер слоя.

Матрицы тензоров C, A, B:

$$(c_{ijk}) = (a_i \cdot b_{jk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} c_{111} & c_{121} & c_{131} & c_{112} & c_{122} & c_{132} & c_{113} & c_{123} & c_{133} \\ c_{211} & c_{221} & c_{231} & c_{222} & c_{222} & c_{222} & c_{213} & c_{223} & c_{233} \\ c_{311} & c_{321} & c_{331} & c_{312} & c_{322} & c_{322} & c_{313} & c_{323} & c_{333} \end{array}\right);$$

$$(a_i) = (a_1 = 2, a_2 = -1, a_3 = 1);$$

$$(b_{jk}) = \begin{pmatrix} b_{11} = 1 & b_{12} = 0 & b_{13} = 2 \\ b_{21} = -2 & b_{22} = -1 & b_{23} = -3 \\ b_{31} = 3 & b_{32} = 0 & b_{33} = 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим коэффициенты c_{ijk}:

1-я строка:

$c_{111} = a_1 b_{11} = 2 \cdot 1 = 2;$ $c_{112} = a_1 b_{12} = 2 \cdot 0 = 0;$ $c_{113} = a_1 b_{13} = 2 \cdot 2 = 4;$

$c_{121} = a_1 b_{21} = 2 \cdot (-2) = -4;$ $c_{122} = a_1 b_{22} = 2 \cdot (-1) = -2;$ $c_{123} = a_1 b_{23} = 2 \cdot (-3) = -6;$

$c_{131} = a_1 b_{31} = 2 \cdot 3 = 6;$ $c_{132} = a_1 b_{32} = 2 \cdot 0 = 0;$ $c_{132} = a_1 b_{32} = 2 \cdot 0 = 0.$

2-я строка:

$c_{211} = a_2 b_{11} = (-1) \cdot 1 = -1;$ $c_{212} = a_2 b_{12} = (-1) \cdot 0 = 0;$ $c_{213} = a_2 b_{13} = (-1) \cdot 2 = -2;$

$c_{221} = a_2 b_{21} = (-1) \cdot (-2) = 2;$ $c_{222} = a_2 b_{22} = (-1) \cdot (-1) = 1;$ $c_{223} = a_2 b_{23} = (-1) \cdot (-3) = 3;$

$c_{231} = a_2 b_{31} = (-1) \cdot 3 = -3;$ $c_{232} = a_2 b_{32} = (-1) \cdot 0 = -1;$ $c_{233} = a_2 b_{33} = (-1) \cdot 4 = -4.$

3-я строка:

$c_{311} = a_3 b_{11} = 1 \cdot 1 = 1;$ $c_{312} = a_3 b_{12} = 1 \cdot 0 = 0;$ $c_{313} = a_3 b_{13} = 1 \cdot 2 = 2;$

$c_{321} = a_3 b_{21} = 1 \cdot (-2) = -2;$ $c_{322} = a_3 b_{22} = 1 \cdot (-1) = -1;$ $c_{323} = a_3 b_{23} = 1 \cdot (-3) = -3;$

$c_{331} = a_3 b_{31} = 1 \cdot 3 = 3;$ $c_{332} = a_3 b_{32} = 1 \cdot 0 = 0;$ $c_{333} = a_3 b_{33} = 1 \cdot 4 = 4.$

В итоге получаем:

$$\left(c_{ijk}\right) = \left(a_i \cdot b_{jk}\right) = \left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 2 & -4 & 6 & 0 & -2 & 0 & 4 & -6 & 8 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 0 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Сравнивая коэффициенты трехлинейной формы $C(x_1, x_2, x_3)$ и матрицы $\left(c_{ijk}\right)$, видим, что коэффициент при произведении $\xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k$ равен элементу матрицы c_{ijk}. К примеру, третье слагаемое в форме $C(x_1, x_2, x_3)$: $-4\,\xi_1^1 \xi_2^2 \xi_3^1$, коэффициент равен: -4. По верхним индексам определяем соответствующий элемент матрицы $\left(c_{ijk}\right)$: 1-я строка, 2-й столбец,1-й слой, то есть $c_{121} = -4$.

Аналогично найдем трехлинейную форму $D(x_1, x_2, x_3) = B(x_1, x_2) \cdot A(x_3)$. Тогда $D = B \otimes A$, то есть $d_{ijk} = b_{ij} a_k$.

Вычислим коэффициенты d_{ijk}:

1-я строка

$d_{111} = b_{11} \cdot a_1 = 1 \cdot 2 = 2;$ $d_{121} = b_{12} \cdot a_1 = 0 \cdot 2 = 0;$ $d_{131} = b_{13} \cdot a_1 = 2 \cdot 2 = 4;$

$d_{211} = b_{21} \cdot a_1 = (-2) \cdot 2 = -4;$ $d_{221} = b_{22} \cdot a_1 = (-1) \cdot 2 = -2;$ $d_{231} = b_{23} \cdot a_1 = (-3) \cdot 2 = -6;$

$d_{311} = b_{31} \cdot a_1 = 3 \cdot 2 = 6;$ $d_{321} = b_{32} \cdot a_1 = 0 \cdot 2 = 0;$ $d_{331} = b_{33} \cdot a_1 = 4 \cdot 2 = 8.$

2-я строка

$d_{112} = b_{11} \cdot a_2 = 1 \cdot (-1) = -1;$ $d_{122} = b_{12} \cdot a_2 = 0 \cdot (-1) = 0;$ $d_{132} = b_{13} \cdot a_2 = 2 \cdot (-1) = -2;$

$d_{212} = b_{21} \cdot a_2 = (-2) \cdot (-1) = 2;$ $d_{222} = b_{22} \cdot a_2 = (-1) \cdot (-1) = 1;$ $d_{232} = b_{23} \cdot a_2 = (-3) \cdot (-1) = 3;$

$d_{312} = b_{31} \cdot a_2 = 3 \cdot (-1) = -3;$ $d_{322} = b_{32} \cdot a_2 = 0 \cdot (-1) = 0;$ $d_{332} = b_{33} \cdot a_2 = 4 \cdot (-1) = -4.$

3-я строка

$d_{113} = b_{11} \cdot a_3 = 1 \cdot 1 = 1;$ $d_{123} = b_{12} \cdot a_3 = 0 \cdot 1 = 0;$ $d_{133} = b_{13} \cdot a_3 = 2 \cdot 1 = 2;$

$d_{213} = b_{21} \cdot a_3 = (-2) \cdot 1 = -2;$ $d_{223} = b_{22} \cdot a_3 = (-1) \cdot 1 = -1;$ $d_{233} = b_{23} \cdot a_3 = (-3) \cdot 1 = -3;$

$d_{313} = b_{31} \cdot a_3 = 3 \cdot 1 = 3;$ $d_{323} = b_{32} \cdot a_3 = 0 \cdot 1 = 0;$ $d_{333} = b_{33} \cdot a_3 = 4 \cdot 1 = 4.$

Получаем:

$$\left(d_{ijk}\right) = \left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 2 & 0 & 4 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & -6 & 2 & 1 & 3 & -2 & -1 & -3 \\ 6 & 0 & 8 & -3 & 0 & -4 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Пример 2.4

Тензор A типа $(1, 0)$ определен координатами $a_i = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, тензор B типа $(0, 1)$ определен координатами $b^j = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Найти тензорные произведения $A \otimes B$ и $B \otimes A$.

Решение.

Пусть $C = A \otimes B$, тогда тензор C типа $(1,1)$. Его координаты:

$$\left(c_i^j\right) = \left(a_i b^j\right) = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b^1 & a_1 b^2 & a_1 b^3 \\ a_2 b^1 & a_2 b^2 & a_2 b^3 \\ a_3 b^1 & a_3 b^2 & a_3 b^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 5 & 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 & -1 \cdot 5 & -1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 & 0 \cdot 5 & 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $D = B \otimes A$, тогда тензор D типа $(1,1)$. Его координаты:

$$\left(d_i^j\right) = \left(b^j a_i\right) = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 & d_3^1 \\ d_1^2 & d_2^2 & d_3^2 \\ d_1^3 & d_2^3 & d_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 a_1 & b^1 a_2 & b^1 a_3 \\ b^2 a_1 & b^2 a_2 & b^2 a_3 \\ b^3 a_1 & b^3 a_2 & b^3 a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая полученные матрицы, замечаем, что $C \neq D$, то есть $A \otimes B \neq B \otimes A$.

Таким образом, произведение тензоров в общем случае не является коммутативным.

Пример 2.5

Тензоры A типа $(1,0)$ и B типа $(2,0)$ заданы матрицами:

$$a_i = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ b_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Найти и сравнить $A \otimes B$ и $B \otimes A$.

Решение.

Пусть $D = A \otimes B$, тогда тензор D типа $(3,0)$:

$$\left(d_{ijk}\right) = \left(a_i b_{jk}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} d_{111} & d_{121} & d_{131} & d_{111} & d_{122} & d_{133} & d_{113} & d_{123} & d_{123} \\ d_{211} & d_{221} & d_{231} & d_{212} & d_{222} & d_{232} & d_{213} & d_{223} & d_{233} \\ d_{311} & d_{321} & d_{331} & d_{312} & d_{322} & d_{332} & d_{313} & d_{323} & d_{333} \end{array}\right) =$$
$$\begin{array}{ccc} \qquad k=1 \qquad & \qquad k=2 \qquad & \qquad k=3 \qquad \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 b_{jk} \\ a_2 b_{jk} \\ a_3 b_{jk} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 7 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 5 & 1 \cdot 8 & 1 \cdot 3 & 1 \cdot 6 & 1 \cdot 9 \\ -1 \cdot 1 & -1 \cdot 4 & -1 \cdot 7 & -1 \cdot 2 & -1 \cdot 5 & -1 \cdot 8 & -1 \cdot 3 & -1 \cdot 6 & -1 \cdot 9 \\ 0 \cdot 1 & 0 \cdot 4 & 0 \cdot 7 & 0 \cdot 2 & 0 \cdot 5 & 0 \cdot 8 & 0 \cdot 3 & 0 \cdot 6 & 0 \cdot 9 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 \\ -1 & -4 & -7 & -2 & -5 & -8 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Пусть $H = B \otimes A$, тогда тензор H типа $(3, 0)$:

$$(h_{ijk}) = (b_{ij} \cdot a_k) = (b_{ij} \cdot a_1 | b_{ij} \cdot a_2 | b_{ij} \cdot a_3) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot 1 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot (-1) \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot 0 \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & -4 & -5 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & -7 & -8 & -9 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Сравнивая полученные матрицы, замечаем, что $A \otimes B \neq B \otimes A$.

Данный пример подтверждает, что произведение тензоров в общем случае не является коммутативным.

Пример 2.6

Даны тензоры A типа $(1, 1)$ и тензор B типа $(1, 0)$:

$$(a_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & b_2^1 \\ a_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}; \ (b_k) = (1 \quad -1) = (b_1 \quad b_2).$$

Найти тензорные произведения $A \otimes B$ и $B \otimes A$.

Решение.

Пусть $A \otimes B = W$, тогда тензор W типа $(2, 1)$ с координатами:

$$a_j^i \cdot b_k = w_{jk}^i,$$

где i – номер строки, j – номер столбца, k – номер слоя, $i, j, k = 1, 2$:

$$(w_{jk}^i) = \left(\begin{array}{cc|cc} w_{11}^1 & w_{21}^1 & w_{12}^1 & w_{22}^1 \\ w_{11}^2 & w_{21}^2 & w_{12}^2 & w_{22}^2 \end{array}\right).$$
$$\qquad k=1 \qquad\qquad k=2$$

$$w_{11}^1 = a_1^1 b_1 = 1 \cdot 1 = 1; \qquad w_{12}^1 = a_1^1 b_2 = 1 \cdot (-1) = -1;$$
$$w_{21}^1 = a_2^1 b_1 = 2 \cdot 1 = 2; \qquad w_{22}^1 = a_2^1 b_2 = 2 \cdot (-1) = -2;$$
$$w_{11}^2 = a_1^2 b_1 = 3 \cdot 1 = 3; \qquad w_{12}^2 = a_1^2 b_2 = 3 \cdot (-1) = -3;$$
$$w_{21}^2 = a_2^2 b_1 = 4 \cdot 1 = 4; \qquad w_{22}^2 = a_2^2 b_2 = 4 \cdot (-1) = -4;$$

$$\left(w_{jk}^{i}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & -1 & -2\\ 3 & 4 & -3 & -4\end{array}\right).$$

Пусть $B \otimes A = V$, тогда тензор V типа $(2, 1)$ с координатами:

$$b_k \cdot a_j^i = v_{kj}^i,$$

где i – номер строки, k – номер столбца, j – номер слоя, $i, j, k = 1, 2, 3$:

$$\left(v_{kj}^{i}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}v_{11}^1 & v_{21}^1 & v_{12}^1 & v_{22}^1\\ v_{11}^2 & v_{21}^2 & v_{12}^2 & v_{22}^2\end{array}\right).$$
$$\qquad j=1 \qquad\qquad j=2$$

$v_{11}^1 = b_1 a_1^1 = 1 \cdot 1 = 1;$ $\qquad v_{12}^1 = b_1 a_2^1 = 1 \cdot 2 = 2;$

$v_{21}^1 = b_2 a_1^1 = (-1) \cdot 1 = -1;$ $\qquad v_{22}^1 = b_2 a_2^1 = (-1) \cdot 2 = -2;$

$v_{11}^2 = b_1 a_1^2 = 1 \cdot 3 = 3;$ $\qquad v_{12}^2 = b_1 a_2^2 = 1 \cdot 4 = 4;$

$v_{21}^2 = b_2 a_1^2 = (-1) \cdot 3 = -3;$ $\qquad v_{22}^2 = b_2 a_2^2 = (-1) \cdot 4 = -4;$

$$\left(v_{kj}^{i}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 2 & -2\\ 3 & -3 & 4 & -4\end{array}\right).$$

Сравнивая полученные матрицы, замечаем, что $A \otimes B \neq B \otimes A$.

Пример 2.7

Даны тензоры A типа $(2, 0)$ и B типа $(1, 1)$:

$$\left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}; \left(b_l^k\right) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1^1 & b_2^1\\ b_1^2 & b_2^2\end{pmatrix}.$$

Найти тензорные произведения $A \otimes B$ и $B \otimes A$.

Решение.

Пусть $A \otimes B = C$, тогда тензор C типа $(3, 1)$ с координатами:

$$a_{ij} \cdot b_l^k = c_{ijl}^k,$$

где k – номер строки, i – номер столбца, j – номер слоя (большой строки), l – номер сечения (большого столбца), $i, j, k, l = 1, 2$:

$$\left(c_{ijl}^{k}\right) = \begin{array}{ccc} & \begin{array}{cccc} i=1 & i=2 & i=1 & i=2 \end{array} & \\ \begin{array}{c} k=1 \\ k=2 \\ k=1 \\ k=2 \end{array} & \left(\begin{array}{cc|cc} c_{111}^{1} & c_{211}^{1} & c_{112}^{1} & c_{212}^{1} \\ c_{111}^{2} & c_{211}^{2} & c_{112}^{2} & c_{212}^{2} \\ \hline c_{121}^{1} & c_{221}^{1} & c_{122}^{1} & c_{222}^{1} \\ c_{121}^{2} & c_{221}^{2} & c_{122}^{2} & c_{222}^{2} \end{array}\right) & \begin{array}{c} j=1 \\ \\ j=2 \end{array} \\ & \begin{array}{cc} l=1 & l=2 \end{array} & \end{array}$$

$c_{111}^{1} = a_{11} \cdot b_{1}^{1} = 1 \cdot 1 = 1;$ $\quad$ $c_{112}^{1} = a_{11} \cdot b_{2}^{1} = 1 \cdot 1 = 1;$

$c_{211}^{1} = a_{21} \cdot b_{1}^{1} = (-1) \cdot 1 = -1;$ $\quad$ $c_{212}^{1} = a_{21} \cdot b_{2}^{1} = (-1) \cdot 1 = -1;$

$c_{111}^{2} = a_{11} \cdot b_{1}^{2} = 1 \cdot 1 = 1;$ $\quad$ $c_{112}^{2} = a_{11} \cdot b_{2}^{2} = 1 \cdot 2 = 2;$

$c_{211}^{2} = a_{21} \cdot b_{1}^{2} = (-1) \cdot 1 = -1;$ $\quad$ $c_{212}^{2} = a_{21} \cdot b_{2}^{2} = (-1) \cdot 2 = -2;$

$c_{121}^{1} = a_{12} \cdot b_{1}^{1} = (-1) \cdot 1 = -1;$ $\quad$ $c_{122}^{1} = a_{12} \cdot b_{2}^{1} = (-1) \cdot 1 = -1;$

$c_{221}^{1} = a_{22} \cdot b_{1}^{1} = 1 \cdot 1 = 1;$ $\quad$ $c_{222}^{1} = a_{22} \cdot b_{2}^{1} = 1 \cdot 1 = 1;$

$c_{121}^{2} = a_{12} \cdot b_{1}^{2} = (-1) \cdot 1 = -1;$ $\quad$ $c_{122}^{2} = a_{12} \cdot b_{2}^{2} = (-1) \cdot 2 = -2;$

$c_{221}^{2} = a_{22} \cdot b_{1}^{2} = 1 \cdot 1 = 1;$ $\quad$ $c_{222}^{2} = a_{22} \cdot b_{2}^{2} = 1 \cdot 2 = 2;$

$$\left(c_{ijl}^{k}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ \hline -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

Пусть $B \otimes A = D$, тогда тензор D типа $(3, 1)$ с координатами:

$$b_{l}^{k} \cdot a_{ij} = d_{lij}^{k},$$

где k – номер строки, l – номер столбца, $i -$ номер слоя (большой строки), $j -$ номер сечения (большого столбца), $i, j, k, l = 1, 2$:

$$\left(d_{ijl}^{k}\right) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc|cc} d_{111}^{1} & d_{211}^{1} & d_{112}^{1} & d_{212}^{1} \\ d_{111}^{2} & d_{211}^{2} & d_{112}^{2} & d_{212}^{2} \\ \hline d_{121}^{1} & d_{221}^{1} & d_{122}^{1} & d_{222}^{1} \\ d_{121}^{2} & d_{221}^{2} & d_{122}^{2} & d_{222}^{2} \end{array}\right) & \begin{array}{c} i=1 \\ \\ i=2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} j=1 & j=2 \end{array} & \end{array}$$

$d_{111}^{1} = a_{11} \cdot b_{1}^{1} = 1 \cdot 1 = 1;$ $\quad$ $d_{112}^{1} = a_{12} \cdot b_{1}^{1} = (-1) \cdot 1 = -1;$

$d_{211}^{1} = a_{11} \cdot b_{2}^{1} = 1 \cdot 1 = 1;$ $\quad$ $d_{212}^{1} = a_{12} \cdot b_{2}^{1} = (-1) \cdot 1 = -1;$

$d_{111}^{2} = a_{11} \cdot b_{1}^{2} = 1 \cdot 1 = 1;$ $\quad$ $d_{112}^{2} = a_{12} \cdot b_{1}^{2} = (-1) \cdot 1 = -1;$

$d_{211}^{2} = a_{11} \cdot b_{2}^{2} = 2 \cdot 1 = 2;$ $\quad$ $d_{212}^{2} = a_{12} \cdot b_{2}^{2} = (-1) \cdot 2 = -2;$

$d^1_{121} = a_{21} \cdot b^1_1 = (-1) \cdot 1 = -1;$ $\qquad$ $d^1_{122} = a_{22} \cdot b^1_1 = 1 \cdot 1 = 1;$

$d^1_{221} = a_{21} \cdot b^1_2 = (-1) \cdot 1 = -1;$ $\qquad$ $d^1_{222} = a_{22} \cdot b^1_2 = 1 \cdot 1 = 1;$

$d^2_{121} = a_{21} \cdot b^2_1 = (-1) \cdot 1 = -1;$ $\qquad$ $d^2_{122} = a_{22} \cdot b^2_1 = 1 \cdot 1 = 1;$

$d^2_{221} = a_{21} \cdot b^2_2 = (-1) \cdot 2 = -2;$ $\qquad$ $d^2_{222} = a_{22} \cdot b^2_2 = 1 \cdot 2 = 2;$

$$\left(d^k_{ijl}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Сравнивая полученные матрицы, снова убеждаемся, что $A \otimes B \neq B \otimes A$.

Пример 2.8

Тензоры A и B заданы матрицами:

$$\left(a^i_j\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \left(b^k_l\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти их произведение в разном порядке.

Решение.

Пусть $A \otimes B = C$. Тогда координаты тензора C:

$$c^{ik}_{jl} = a^i_j \cdot b^k_l.$$

При этом в матричной записи: i – номер строки, k – номер столбца, j – номер слоя (большой строки), l – номер сечения (большого столбца), $i, j, k, l = 1, 2, 3$:

$$\left(c^{ik}_{jl}\right) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} c^{11}_{11} & c^{12}_{11} & c^{13}_{11} & c^{11}_{12} & c^{12}_{12} & c^{13}_{12} & c^{11}_{13} & c^{12}_{13} & c^{13}_{13} \\ c^{21}_{11} & c^{22}_{11} & c^{23}_{11} & c^{21}_{12} & c^{22}_{12} & c^{23}_{12} & c^{21}_{13} & c^{22}_{13} & c^{23}_{13} \\ c^{31}_{11} & c^{32}_{11} & c^{33}_{11} & c^{31}_{12} & c^{32}_{12} & c^{33}_{12} & c^{31}_{13} & c^{32}_{13} & c^{33}_{13} \\ \hline c^{11}_{21} & c^{12}_{21} & c^{13}_{21} & c^{11}_{22} & c^{12}_{22} & c^{13}_{23} & c^{11}_{23} & c^{12}_{23} & c^{13}_{23} \\ c^{21}_{21} & c^{22}_{21} & c^{23}_{21} & c^{21}_{22} & c^{22}_{22} & c^{23}_{23} & c^{21}_{23} & c^{22}_{23} & c^{23}_{23} \\ c^{31}_{21} & c^{32}_{21} & c^{33}_{21} & c^{31}_{22} & c^{32}_{22} & c^{33}_{23} & c^{31}_{23} & c^{32}_{23} & c^{33}_{23} \\ \hline c^{11}_{31} & c^{12}_{31} & c^{13}_{31} & c^{11}_{32} & c^{12}_{32} & c^{13}_{32} & c^{11}_{33} & c^{12}_{33} & c^{13}_{33} \\ c^{21}_{31} & c^{22}_{31} & c^{23}_{31} & c^{21}_{32} & c^{22}_{32} & c^{23}_{32} & c^{21}_{33} & c^{22}_{33} & c^{23}_{33} \\ c^{31}_{31} & c^{32}_{31} & c^{33}_{31} & c^{31}_{32} & c^{32}_{32} & c^{33}_{32} & c^{31}_{33} & c^{32}_{33} & c^{33}_{33} \end{array}\right) & \begin{array}{c} j=1 \\ \\ \\ \\ j=2 \\ \\ \\ \\ j=3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \quad l=1 \quad & \quad l=2 \quad & \quad l=3 \quad \end{array} & \end{array}$$

1-я строка

$c_{11}^{11} = a_1^1 \cdot b_1^1 = 1 \cdot 0 = 0;$ $c_{12}^{11} = a_1^1 \cdot b_2^1 = 1 \cdot 1 = 1;$ $c_{13}^{11} = a_1^1 \cdot b_3^1 = 1 \cdot 1 = 1;$

$c_{11}^{12} = a_1^1 \cdot b_1^2 = 1 \cdot (-2) = -2;$ $c_{12}^{12} = a_1^1 \cdot b_2^2 = 1 \cdot (-1) = -1;$ $c_{13}^{12} = a_1^1 \cdot b_3^2 = 1 \cdot (-3) = -3;$

$c_{11}^{13} = a_1^1 \cdot b_1^3 = 1 \cdot 2 = 2;$ $c_{12}^{13} = a_1^1 \cdot b_2^3 = 1 \cdot 0 = 0;$ $c_{13}^{13} = a_1^1 \cdot b_3^3 = 1 \cdot 1 = 1.$

2-я строка

$c_{11}^{21} = a_1^2 \cdot b_1^1 = 2 \cdot 0 = 0;$ $c_{12}^{21} = a_1^2 \cdot b_2^1 = 2 \cdot 1 = 2;$ $c_{13}^{21} = a_1^2 \cdot b_3^1 = 2 \cdot 1 = 2;$

$c_{11}^{22} = a_1^2 \cdot b_1^2 = 2 \cdot (-2) = -4;$ $c_{12}^{22} = a_1^2 \cdot b_2^2 = 2 \cdot (-1) = -2;$ $c\,_{13}^{22} = a_1^2 \cdot b_3^2 = 2 \cdot (-3) = -6;$

$c_{11}^{23} = a_1^2 \cdot b_1^3 = 2 \cdot 2 = 4;$ $c_{12}^{23} = a_1^2 \cdot b_2^3 = 2 \cdot 0 = 0;$ $c_{13}^{23} = a_1^2 \cdot b_3^3 = 2 \cdot 1 = 2;$

3-я строка

$c_{11}^{3} = a_1^3 \cdot b_1^1 = (-1) \cdot 0 = 0;$ $c_{12}^{31} = a_1^3 \cdot b_2^1 = (-1) \cdot 1 = -1;$ $c_{13}^{31} = a_1^3 \cdot b_3^1 = (-1) \cdot 1 = -1;$

$c_{11}^{32} = a_1^3 \cdot b_1^2 = (-1) \cdot (-2) = 2;$ $c_{12}^{32} = a_1^3 \cdot b_2^2 = (-1) \cdot (-1) = 1;$ $c_{13}^{32} = a_1^3 \cdot b_3^2 = (-1) \cdot (-3) = 3;$

$c_{11}^{33} = a_1^3 \cdot b_1^3 = (-1) \cdot 2 = -2;$ $c_{12}^{33} = a_1^3 \cdot b_2^3 = (-1) \cdot 0 = 0;$ $c_{13}^{33} = a_1^3 \cdot b_3^3 = (-1) \cdot 1 = 1.$

4-я строка

$c_{21}^{11} = a_1^2 \cdot b_1^1 = (-1) \cdot 0 = 0;$ $c_{22}^{11} = a_1^2 \cdot b_1^2 = (-1) \cdot 1 = -1;$ $c_{23}^{11} = a_1^2 \cdot b_1^3 = (-1) \cdot 1 = -1;$

$c_{21}^{12} = a_1^2 \cdot b_2^1 = (-1) \cdot (-2) = 2;$ $c_{22}^{12} = a_1^2 \cdot b_2^2 = (-1) \cdot (-1) = 1;$ $c_{23}^{12} = a_1^2 \cdot b_2^3 = (-1) \cdot (-3) = 3;$

$c_{21}^{13} = a_1^2 \cdot b_3^1 = (-1) \cdot 2 = -2;$ $c_{22}^{13} = a_1^2 \cdot b_3^2 = (-1) \cdot 0 = 0;$ $c_{23}^{13} = a_1^2 \cdot b_3^3 = (-1) \cdot 1 = 1.$

5-я строка

$c_{21}^{21} = a_2^2 \cdot b_1^1 = 0 \cdot 0 = 0;$ $c_{22}^{21} = a_2^2 \cdot b_1^2 = 0 \cdot 1 = 0;$ $c_{23}^{21} = a_2^2 \cdot b_1^3 = 0 \cdot 1 = 0;$

$c_{21}^{22} = a_2^2 \cdot b_2^1 = 0 \cdot (-2) = 0;$ $c_{22}^{22} = a_2^2 \cdot b_2^2 = 0 \cdot (-1) = 0;$ $c_{23}^{22} = a_2^2 \cdot b_2^3 = 0 \cdot (-3) = 0;$

$c_{21}^{23} = a_2^2 \cdot b_3^1 = 0 \cdot 2 = 0;$ $c_{22}^{23} = a_2^2 \cdot b_3^2 = 0 \cdot 0 = 0;$ $c_{23}^{23} = a_2^2 \cdot b_3^3 = 0 \cdot 1 = 0.$

6-я строка

$c_{21}^{31} = a_3^2 \cdot b_1^1 = 2 \cdot 0 = 0;$ $c_{22}^{31} = a_3^2 \cdot b_1^2 = 2 \cdot 1 = 2;$ $c_{23}^{31} = a_3^2 \cdot b_1^3 = 2 \cdot 1 = 2;$

$c_{21}^{32} = a_3^2 \cdot b_2^1 = 2 \cdot (-2) = -4;$ $c_{22}^{32} = a_3^2 \cdot b_2^2 = 2 \cdot (-1) = -2;$ $c_{23}^{32} = a_3^2 \cdot b_2^3 = 2 \cdot (-3) = -6;$

$c_{21}^{33} = a_3^2 \cdot b_3^1 = 2 \cdot 2 = 4;$ $c_{22}^{33} = a_3^2 \cdot b_3^2 = 2 \cdot 0 = 0;$ $c_{23}^{33} = a_3^2 \cdot b_3^3 = 2 \cdot 1 = 2.$

7-я строка

$c_{31}^{11} = a_1^3 \cdot b_1^1 = 2 \cdot 0 = 0;$ $c_{32}^{11} = a_1^3 \cdot b_1^2 = 2 \cdot 1 = 2;$ $c_{33}^{11} = a_1^3 \cdot b_1^3 = 2 \cdot 1 = 2;$

$c_{31}^{12} = a_1^3 \cdot b_2^1 = 2 \cdot (-2) = -4;$ $c_{32}^{12} = a_1^3 \cdot b_2^2 = 2 \cdot (-1) = -2;$ $c_{33}^{12} = a_1^3 \cdot b_2^3 = 2 \cdot (-3) = -6;$

$c_{31}^{13} = a_1^3 \cdot b_3^1 = 2 \cdot 2 = 4;$ $c_{32}^{13} = a_1^3 \cdot b_3^2 = 2 \cdot 0 = 0;$ $c_{33}^{13} = a_1^3 \cdot b_3^3 = 2 \cdot 1 = 2.$

8-я строка

$c_{31}^{21} = a_2^3 \cdot b_1^1 = 1 \cdot 0 = 0;$ $c_{32}^{21} = a_2^3 \cdot b_1^2 = 1 \cdot 1 = 1;$ $c_{33}^{21} = a_2^3 \cdot b_1^3 = 1 \cdot 1 = 1;$

$c_{31}^{22} = a_2^3 \cdot b_2^1 = 1 \cdot (-2) = -2;$ $c_{32}^{22} = a_2^3 \cdot b_2^2 = 1 \cdot (-1) = -1;$ $c_{33}^{22} = a_2^3 \cdot b_2^3 = 1 \cdot (-3) = -3;$

$c_{31}^{23} = a_2^3 \cdot b_3^1 = 1 \cdot 2 = 2;$ $c_{32}^{23} = a_2^3 \cdot b_3^2 = 1 \cdot 0 = 0;$ $c_{33}^{23} = a_2^3 \cdot b_3^3 = 1 \cdot 1 = 1.$

9-я строка

$c_{31}^{31} = a_3^3 \cdot b_1^1 = 3 \cdot 0 = 0;$ $c_{32}^{31} = a_3^3 \cdot b_1^2 = 3 \cdot 1 = 3;$ $c_{33}^{31} = a_3^3 \cdot b_1^3 = 3 \cdot 1 = 3;$

$c_{31}^{32} = a_3^3 \cdot b_2^1 = 3 \cdot (-2) = -6;$ $c_{32}^{32} = a_3^3 \cdot b_2^2 = 3 \cdot (-1) = -3;$ $c_{33}^{32} = a_3^3 \cdot b_2^3 = 3 \cdot (-3) = -9;$

$c_{31}^{33} = a_3^3 \cdot b_3^1 = 3 \cdot 2 = 6;$ $c_{32}^{33} = a_3^3 \cdot b_3^2 = 3 \cdot 0 = 0;$ $c_{33}^{33} = a_3^3 \cdot b_3^3 = 3 \cdot 1 = 3.$

$$\left(c_{jl}^{ik}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\
0 & -4 & 4 & 2 & -2 & 0 & 2 & -6 & 2 \\
0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\
\hline
0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 & -1 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -4 & 4 & 2 & -2 & 0 & 2 & -6 & 2 \\
\hline
0 & -4 & 4 & 2 & -2 & 0 & 2 & -6 & 2 \\
0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\
0 & -6 & 6 & 3 & -3 & 0 & 3 & -9 & 3
\end{array}\right).$$

Пусть $B \otimes A = D$. Тогда координаты тензора D: $d_{lj}^{ki} = b_l^k \cdot a_j^i$, в матричной записи k – номер строки, i – номер столбца, l – номер слоя (большой строки), j – номер сечения (большого столбца), $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

Предлагаем читателю выполнить вычисления самостоятельно и сравнить $A \otimes B$ и $B \otimes A$.

Упражнения

2.1. Тензоры заданы матрицами:

тензор A типа $(1,0)$: $(a_i) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;

тензор B типа $(0,1)$: $(b^i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$;

тензор C типа $(0,1)$: $(c^i) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$;

тензор D типа $(1,1)$: $(d_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Выполнить действие, если возможно:

1) $A + B$;	5) $2B$;	9) $B \otimes C$;
2) $A + C$;	6) $-3C$;	10) $C \otimes B$;
3) $B + C$;	7) $A \otimes B$;	11) $C \otimes D$;
4) $C + D$;	8) $B \otimes A$;	12) $D \otimes C$.

2.2. Тензоры заданы матрицами:

тензор A типа $(2, 0)$: $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

тензор B типа $(1, 1)$: $(b_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

тензор C типа $(2, 0)$: $(c_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Выполнить действие, если возможно:

1) $A + B$;	4) $2B$;	7) $B \otimes A$;
2) $A + C$;	5) $-3C$;	8) $A \otimes C$;
3) $B + C$;	6) $A \otimes B$;	9) $C \otimes A$.

2.3. Выполнить тензорное умножение тензоров A и B:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix};\ (b_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Свёртывание тензоров

В дальнейшем изложении будем использовать общепринятое ***соглашение о немом суммировании***: если в одночлене присутствует одинаковый верхний и нижний индекс, то подразумевается суммирование по всем значениям этого индекса, но знак суммы при этом не пишется. К примеру, вместо

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^i$$

пишут:

$$x = \alpha_i e^i.$$

Свёртывание тензора (свёртка) применяется к тензору A типа (p, q), $p \neq 0$, $q \neq 0$, и производится по каким-либо отмеченным верхнему и нижнему индексам. При этом в результате свёртывания получается тензор типа $(p-1, q-1)$.

Свёрткой тензора A типа (p, q), где $p \neq 0$, $q \neq 0$, по k-му нижнему и l-му верхнему индексам называется отображение, которое тензору A ставит в соответствие тензор C типа $(p-1, q-1)$:

$$C\left(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p, u^1, u^2, \dots, u^{l-1}, u^{l+1}, \dots, u^q\right) =$$

$$= A\left(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, e_r, x_{k+1}, \dots, x_p, u^1, u^2, \dots, u^{l-1}, e^r, u^{l+1}, \dots, u^q\right),$$

где выполняется немое суммирование по индексу r;

e_r, e^r, r =1, 2, …, n – векторы базисов пространств L_n, L_n^*.

Также можно определить свёртку по нескольким парам индексов как композицию свёрток по этим парам индексов. При этом результатом свёртки по s парам индексов тензора A типа (p, q), где $p \geq s$, $q \geq s$, является тензор типа $(p-s, q-s)$. Если $s = \min\{p, q\}$, то свёртку называют ***полной***.

Рассмотрим свёртку в координатной форме. Например, у каждой координаты тензора A отмечен верхний индекс с номером l и нижний с номером k (выполним свёртку тензора A по k-му нижнему и l-му верхнему индексам):

$$a_{i_1 i_2 \dots \boldsymbol{i_k} \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots \boldsymbol{j_l} \dots j_q}.$$

Произведём суммирование (свёртывание) координат тензора с одинаковыми выделенными индексами. Эта операция и даёт следующие координаты тензора, полученного свёртыванием по верхнему и нижнему индексам с номером l и k:

$$c^{j_1 j_2 \dots j_{l-1} j_{l+1} \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_p} = a^{j_1 j_2 \dots \boldsymbol{r} \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots \boldsymbol{r} \dots i_p}.$$

Здесь использовано соглашение о суммировании, причем суммирование производится по какой-либо паре индексов и даёт в результате тензор с меньшим на два рангом.

Для тензора второго ранга свёртка даёт скаляр, называемый первым главным инвариантом или следом тензора:

$$a_i^i = a_1^1 + a_2^2 + \dots + a_n^n = I^1(A) = trA.$$

Пример 3.1

Дан тензор:

$$\left(a_{kl}^{ij}\right) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & -2 & -1 \\ \hline -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} k{=}1 \\ \\ \\ k{=}2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} l = 1 & \quad l = 2 \end{array} \end{array}.$$

Найти свёртки тензора: $a_{il}^{ij}, a_{kj}^{ij}, a_{ij}^{ij}, a_{ki}^{ij}, a_{jl}^{ij}, a_{ji}^{ij}$.

Решение.

Согласно введенным ранее договоренностям:

$$\left(a_{kl}^{ij}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11}^{11} & a_{11}^{12} & a_{12}^{11} & a_{12}^{12} \\ a_{11}^{21} & a_{11}^{22} & a_{12}^{21} & a_{12}^{22} \\ \hline a_{21}^{11} & a_{21}^{12} & a_{22}^{11} & a_{22}^{12} \\ a_{21}^{21} & a_{21}^{22} & a_{22}^{21} & a_{22}^{22} \end{array}\right).$$

Найдём свёртки по парам индексов:

1) $b_l^j = a_{il}^{ij} = a_{1l}^{1j} + a_{2l}^{2j}$;

$b_1^1 = a_{11}^{11} + a_{21}^{21} = 1 + 5 = 6;$

$b_2^1 = a_{12}^{11} + a_{22}^{21} = 3 + 7 = 10;$

$\boxed{b_1^2} = a_{11}^{12} + a_{21}^{22} = 2 + 6 = 8;$

$b_2^2 = a_{12}^{12} + a_{22}^{22} = 4 + 8 = 12;$

$$\left(a_{kl}^{ij}\right) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \boxed{2} & 3 & 4 \\ -4 & 3 & -2 & -1 \\ \hline -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & \boxed{6} & 7 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} k{=}1 \\ \\ \\ k{=}2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} l = 1 & \quad l = 2 \end{array} \end{array}$$

$$\left(b_l^j\right) = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ \boxed{8} & 12 \end{pmatrix};$$

$$f = b^j_j = b^1_1 + b^2_2 = trB;$$

$$f = tr\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} = 6 + 12 = 18.$$

2) $c^i_k = a^{ij}_{kj} = a^{i1}_{k1} + a^{i2}_{k2};$

$$c^1_1 = a^{11}_{11} + a^{12}_{12} = 1 + 4 = 5;$$
$$c^1_2 = a^{11}_{21} + a^{12}_{22} = -4 - 1 = -5;$$
$$\boxed{c^2_1} = a^{21}_{11} + a^{22}_{12} = -4 - 1 = -5;$$
$$c^2_2 = a^{21}_{21} + a^{22}_{22} = 5 + 8 = 13;$$

$$(a^{ij}_{kl}) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{-4} & 3 & -2 & \boxed{-1} \\ \hline -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right) & \begin{array}{l} k{=}1 \\ \\ k{=}2 \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} l = 1 & \quad l = 2 \end{array} & \end{array}$$

$$(c^i_k) = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ \boxed{-5} & 13 \end{pmatrix};$$

$$m = c^i_i = c^1_1 + c^2_2 = trC;$$

$$m = tr\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix} = 5 + 13 = 18.$$

3) $d^i_l = a^{ij}_{ki} = a^{1j}_{k1} + a^{2j}_{k2};$

$$d^1_1 = a^{11}_{11} + a^{21}_{12} = 1 - 2 = -1;$$
$$d^1_2 = a^{11}_{21} + a^{21}_{22} = -4 + 7 = 3;$$
$$\boxed{d^2_1} = a^{12}_{11} + a^{22}_{12} = 2 - 1 = 1;$$
$$d^2_2 = a^{12}_{21} + a^{22}_{22} = -3 + 8 = 5;$$

$$(a^{ij}_{kl}) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \boxed{2} & 3 & 4 \\ -4 & 3 & -2 & \boxed{-1} \\ \hline -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right) & \begin{array}{l} k{=}1 \\ \\ k{=}2 \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} l = 1 & \quad l = 2 \end{array} & \end{array}$$

$$(d^i_l) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ \boxed{1} & 5 \end{pmatrix};$$

$$s = d^i_i = d^1_1 + d^2_2 = trD;$$

$$s = tr\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = -1 + 5 = 4.$$

4) $g^i_l = a^{ij}_{jl} = a^{i1}_{1l} + a^{i2}_{2l};$

$$\boxed{g^1_1} = a^{11}_{11} + a^{12}_{21} = 1 - 3 = -2;$$
$$g^1_2 = a^{11}_{12} + a^{12}_{22} = 3 - 1 = 2;$$
$$g^2_1 = a^{21}_{11} + a^{22}_{21} = -4 + 6 = 2;$$
$$g^2_2 = a^{21}_{12} + a^{22}_{22} = -2 + 8 = 6;$$

$$(a^{ij}_{kl}) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & -2 & -1 \\ \hline -4 & \boxed{-3} & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right) & \begin{array}{l} k{=}1 \\ \\ k{=}2 \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} l = 1 & \quad l = 2 \end{array} & \end{array}$$

$$(g_l^j) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix};$$

$$r = g_j^j = g_1^1 + g_2^2 = trG;$$

$$r = tr\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = -2 + 6 = 4.$$

Пример 3.2

Тензоры A и B заданы матрицами:

$$(a_k^i) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}; \qquad (b_l^j) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти тензор:

$$C = A \otimes B;\ c_{kl}^{ij} = a_k^i \cdot b_l^j.$$

Выполнить все возможные свертки как по одной паре индексов, так и по двум (полные свертки). Проверить соответствие операций:

$$c_{ij}^{ij} = trA \cdot trB;\quad c_{ji}^{ij} = tr(A \cdot B).$$

Решение.

C – тензор типа $(2,2)$, $c_{kl}^{ij} = a_k^i b_l^j$,
где i – номер строки, j – номер столбца, k – номер слоя, l – номер сечения.

$$(c_{kl}^{ij}) = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} c_{11}^{11} = a_1^1 \cdot b_1^1 & c_{11}^{12} = a_1^1 \cdot b_1^2 & c_{12}^{11} = a_1^1 \cdot b_2^1 & c_{12}^{12} = a_1^1 \cdot b_2^2 \\ c_{11}^{21} = a_1^2 \cdot b_1^1 & c_{11}^{22} = a_1^2 \cdot b_1^2 & c_{12}^{21} = a_1^2 \cdot b_2^1 & c_{12}^{22} = a_1^2 \cdot b_2^2 \\ \hline c_{21}^{11} = a_2^1 \cdot b_1^1 & c_{21}^{12} = a_2^1 \cdot b_1^2 & c_{22}^{11} = a_2^1 \cdot b_2^1 & c_{22}^{12} = a_2^1 \cdot b_2^2 \\ c_{21}^{21} = a_2^2 \cdot b_1^1 & c_{21}^{22} = a_2^2 \cdot b_1^2 & c_{22}^{21} = a_2^2 \cdot b_2^1 & c_{22}^{22} = a_2^2 \cdot b_2^2 \end{array}\right) \\ \qquad l=1 \qquad\qquad\qquad\qquad l=2 \end{array} \begin{array}{l} k=1 \\ \\ k=2 \end{array}$$

$$(c_{kl}^{ij}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 \cdot (-4) & 0 \cdot (-5) & 0 \cdot 4 & 0 \cdot (-3) \\ -5 \cdot (-4) & -5 \cdot (-5) & -5 \cdot 4 & -5 \cdot (-3) \\ \hline 2 \cdot (-4) & 2 \cdot (-5) & 2 \cdot 4 & 2 \cdot (-3) \\ -4 \cdot (-4) & -4 \cdot (-5) & -4 \cdot 4 & -4 \cdot (-3) \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 25 & -20 & 15 \\ \hline -8 & -10 & 8 & -6 \\ 16 & 20 & -16 & 12 \end{array}\right).$$

Найдем свёртки по одной паре индексов:

1) $d_l^j = c_{il}^{ij} = c_{1l}^{1j} + c_{2l}^{2j}$;

$d_1^1 = c_{i1}^{i1} = c_{11}^{11} + c_{21}^{21} = 0 + 16 = 16$;

$d_2^1 = c_{i2}^{i1} = c_{12}^{11} + c_{22}^{21} = 0 - 16 = -16$;

$d_1^2 = c_{i1}^{i2} = c_{11}^{12} + c_{21}^{22} = 0 + 20 = 20$;

$d_2^2 = c_{i2}^{i2} = c_{12}^{12} + c_{22}^{22} = 0 + 12 = 12$;

$$\left(c_{kl}^{ij}\right) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 25 & -20 & 15 \\ \hline -8 & -10 & 8 & -6 \\ 16 & 20 & -16 & 12 \end{array}\right) \\ l=1 \qquad\quad l=2 \end{array} \begin{array}{l} k{=}1 \\ \\ k{=}2 \end{array}$$

$$\left(d_l^j\right) = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 \\ d_1^2 & d_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -16 \\ 20 & 12 \end{pmatrix}.$$

2) $f_k^i = c_{kj}^{ij} = c_{k1}^{i1} + c_{k2}^{i2}$;

$f_1^1 = c_{1j}^{1j} = c_{11}^{11} + c_{12}^{12} = 0 + 0 = 0$;

$f_2^1 = c_{2j}^{1j} = c_{21}^{11} + c_{22}^{12} = -8 - 6 = -14$;

$f_1^2 = c_{1j}^{2j} = c_{11}^{21} + c_{12}^{22} = 20 + 15 = 35$;

$f_2^2 = c_{2j}^{2j} = c_{21}^{21} + c_{22}^{22} = 16 + 12 = 28$;

$$\left(c_{kl}^{ij}\right) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 25 & -20 & 15 \\ \hline -8 & -10 & 8 & -6 \\ 16 & 20 & -16 & 12 \end{array}\right) \\ l=1 \qquad\quad l=2 \end{array} \begin{array}{l} k{=}1 \\ \\ k{=}2 \end{array}$$

$$\left(f_k^i\right) = \begin{pmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -14 \\ 35 & 28 \end{pmatrix}.$$

3) $s_k^j = c_{ki}^{ij} = c_{k1}^{1j} + c_{k2}^{2j}$;

$s_1^1 = c_{1i}^{i1} = c_{11}^{11} + c_{12}^{21} = 0 - 20 = -20$;

$s_2^1 = c_{2i}^{i1} = c_{21}^{11} + c_{22}^{21} = -8 - 16 = -24$;

$s_1^2 = c_{1i}^{i2} = c_{11}^{12} + c_{12}^{22} = 0 + 15 = 15$;

$s_2^2 = c_{2i}^{i2} = c_{21}^{12} + c_{22}^{22} = -10 + 12 = 2$;

$$\left(c_{kl}^{ij}\right) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 25 & -20 & 15 \\ \hline -8 & -10 & 8 & -6 \\ 16 & 20 & -16 & 12 \end{array}\right) \\ l=1 \qquad\quad l=2 \end{array} \begin{array}{l} k{=}1 \\ \\ k{=}2 \end{array}$$

$$\left(s_k^j\right) = \begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 \\ s_1^2 & s_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -24 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}.$$

4) $t_l^i = c_{jl}^{ij} = c_{1l}^{i1} + c_{2l}^{i2}$;

$t_1^1 = c_{j1}^{1j} = c_{11}^{11} + c_{21}^{12} = 0 - 10 = -10$;

$t_2^1 = c_{j2}^{1j} = c_{12}^{11} + c_{21}^{12} = 0 - 6 = -6$;

$t_1^2 = c_{j1}^{2j} = c_{11}^{21} + c_{21}^{22} = 20 + 20 = 40$;

$t_2^2 = c_{j2}^{2j} = c_{12}^{21} + c_{22}^{22} = -20 + 12 = -8$;

$$\left(c_{kl}^{ij}\right) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 25 & -20 & 15 \\ \hline -8 & -10 & 8 & -6 \\ 16 & 20 & -16 & 12 \end{array}\right) \\ l=1 \qquad\quad l=2 \end{array} \begin{array}{l} k{=}1 \\ \\ k{=}2 \end{array}$$

$$\left(t_l^i\right) = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -6 \\ 40 & -8 \end{pmatrix}.$$

Найдем полные свёртки.

5) $m = c_{ij}^{ij} = d_j^j = d_1^1 + d_2^2 = 16 + 12 = 28$ или
$m = c_{ij}^{ij} = f_i^i = f_1^1 + f_2^2 = 0 + 28 = 28.$

Далее найдем произведение следов матриц A и B:

$$trA \cdot trB = tr\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \cdot tr\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = (0-4)\cdot(-4-3) = -4\cdot(-7) = 28.$$

Таким образом, убеждаемся, что в данном случае: $m = c_{ij}^{ij} = trA \cdot trB$.

6) $r = c_{ji}^{ij} = s_j^j = s_1^1 + s_2^2 = -20 + 2 = -18$ или
$r = c_{ji}^{ij} = t_i^i = t_1^1 + t_2^2 = -10 - 8 = -18.$

Далее найдем след матрицы $A \cdot B$:

$$tr(A\cdot B) = tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} -10 & -6 \\ 40 & -8 \end{pmatrix} = -10 - 8 = -18.$$

Таким образом, убеждаемся, что в данном случае: $r = c_{ji}^{ij} = tr(A\cdot B)$.

Пример 3.3

Тензоры A и X заданы матрицами:

$$\left(a_j^i\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \ \ (x^k) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Найти тензор $B = A \otimes X$, $b_j^{ik} = a_j^i \cdot x^k$ и его свёртки:

$$b_j^{ij} = c^i; \, b_i^{ik} = d^k.$$

Проверить, что эти действия соответствуют матричным операциям:

$$\left(a_j^i\right) \cdot (x^k) = \left(c^i\right); \, (trA) \cdot (x^k) = (d^k).$$

Решение.

Умножая тензоры A типа $(1,1)$ и X типа $(1,0)$, получим тензор B типа $(1,2)$:

$$\left(b_j^{ik}\right) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} k=1 & k=2 & k=3 & k=1 & k=2 & k=3 & k=1 & k=2 & k=3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} b_1^{11} & b_1^{12} & b_1^{13} & b_2^{11} & b_2^{12} & b_2^{13} & b_3^{11} & b_3^{12} & b_3^{13} \\ b_1^{21} & b_1^{22} & b_1^{23} & b_2^{21} & b_2^{22} & b_2^{23} & b_3^{21} & b_3^{22} & b_3^{23} \\ b_1^{31} & b_1^{32} & b_1^{33} & b_2^{31} & b_2^{32} & b_2^{33} & b_3^{31} & b_3^{32} & b_3^{33} \end{array}\right) \begin{array}{c} i=1 \\ i=2 \\ i=3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} j=1 & \qquad\qquad j=2 & \qquad\qquad j=3 \end{array} \end{array}$$

i – номер строки, k – номер столбца, j – номер слоя.

1-я строка

$b_1^{11} = a_1^1 \cdot x^1 = 4 \cdot 3 = 12;$ $\quad b_1^{12} = a_1^1 \cdot x^2 = 4 \cdot 2 = 8;$ $\quad b_1^{13} = a_1^1 \cdot x^3 = 4 \cdot (-2) = -8;$

$b_2^{11} = a_2^1 \cdot x^1 = (-1) \cdot 3 = -3;$ $\quad b_2^{12} = a_2^1 \cdot x^2 = (-1) \cdot 2 = -2;$ $\quad b_2^{13} = a_2^1 \cdot x^3 = (-1) \cdot (-2) = 2;$

$b_3^{11} = a_3^1 \cdot x^1 = (-2) \cdot 3 = -6;$ $\quad b_3^{12} = a_3^1 \cdot x^2 = (-2) \cdot 2 = -4;$ $\quad b_3^{13} = a_3^1 \cdot x^3 = (-2) \cdot (-2) = 4.$

2-я строка

$b_1^{21} = a_1^2 \cdot x^1 = 0;$ $\quad b_1^{22} = a_1^2 \cdot x^2 = 0;$ $\quad b_1^{23} = a_1^2 \cdot x^3 = 0;$

$b_2^{21} = a_2^2 \cdot x^1 = (-3) \cdot 3 = -9;$ $\quad b_2^{22} = a_2^2 \cdot x^2 = (-3) \cdot 2 = -6;$ $\quad b_2^{23} = a_2^2 \cdot x^3 = (-3) \cdot (-2) = 6;$

$b_3^{21} = a_3^2 \cdot x^1 = (-2) \cdot 3 = -6;$ $\quad b_3^{22} = a_3^2 \cdot x^2 = (-2) \cdot 2 = -4;$ $\quad b_3^{23} = a_3^2 \cdot x^3 = (-2) \cdot (-2) = 4.$

3-я строка

$b_1^{31} = a_1^3 \cdot x^1 = 0 \cdot 3 = 0;$ $\quad b_1^{32} = a_1^3 \cdot x^2 = 0 \cdot 2 = 0;$ $\quad b_1^{33} = a_1^3 \cdot x^3 = 0 \cdot (-2) = 0;$

$b_2^{31} = a_2^3 \cdot x^1 = (-1) \cdot 3 = -3;$ $\quad b_2^{32} = a_2^3 \cdot x^2 = (-1) \cdot 2 = -2;$ $\quad b_2^{33} = a_2^3 \cdot x^3 = (-1) \cdot (-2) = 2;$

$b_3^{31} = a_3^3 \cdot x^1 = (-5) \cdot 3 = -15;$ $\quad b_3^{32} = a_3^3 \cdot x^2 = (-5) \cdot 2 = -10;$ $\quad b_3^{33} = a_3^3 \cdot x^3 = (-5) \cdot (-2) = 10.$

$$\left(b_j^{ik}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 12 & 8 & -8 & -3 & -2 & 2 & -6 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -6 & 6 & -6 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 2 & -15 & -10 & 10 \end{array}\right).$$

Выполним свёртку:

$$c^i = b_j^{ij}; \qquad \left(b_j^{ik}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 12 & 8 & -8 & -3 & -2 & 2 & -6 & -4 & 4 \\ \boxed{0} & 0 & 0 & -9 & \boxed{-6} & 6 & -6 & -4 & \boxed{4} \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 2 & -15 & -10 & 10 \end{array}\right);$$

$$c^1 = b_1^{11} + b_2^{12} + b_3^{13} = 12 - 2 + 4 = 14;$$

$$\boxed{c^2} = b_1^{21} + b_2^{22} + b_3^{23} = 0 - 6 + 4 = -2;$$

$$c^3 = b_1^{31} + b_2^{32} + b_3^{33} = 0 - 2 + 10 = 8.$$

В итоге: $\left(c^i\right) = \left(b_j^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}.$

Убедимся, что матрица тензора равна произведению матриц, задающих тензоры:

$$\left(a_j^i\right) \cdot \left(x^k\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \left(c^i\right).$$

Найдем свёртку:

$$d^k = b_i^{ik}; \qquad \left(b_j^{ik}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 12 & \boxed{8} & -8 & -3 & -2 & 2 & -6 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & \boxed{-6} & 6 & -6 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 2 & -15 & \boxed{-10} & 10 \end{array}\right);$$

$d^1 = b_1^{11} + b_2^{21} + b_3^{31} = 12 - 9 - 15 = -12;$

$\boxed{d^2} = b_1^{12} + b_2^{22} + b_3^{32} = 8 - 6 - 10 = -8;$

$d^3 = b_1^{13} + b_2^{23} + b_3^{33} = -8 + 6 - 10 = 8.$

В итоге: $\left(d^k\right) = \left(b_i^{ik}\right) = \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}.$

Убедимся, что полученная свёртка равна произведению следа тензора A и матрицы тензора X:

$$trA \cdot x = (4 - 3 - 5) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = \left(d^k\right).$$

Упражнения

3.1. Найти все возможные свёртки тензора A типа $(1, 1)$, заданного матрицей:

1) $\left(a_j^i\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\left(a_j^i\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

3.2. Тензоры A и B заданы матрицами:

$$\left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \left(b^k\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Найти все возможные свёртки тензора $C = A \otimes B$.

3.3. Тензоры A и B заданы матрицами:

$$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}; \qquad (b_{kl}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти все возможные свёртки тензора $C = A \otimes B$ как по одной паре индексов, так и по двум (полные свёртки).

3.4. Тензор A типа $(3, 3)$ задан в $\mathbb{R}^2$. Его компоненты a_{lmn}^{ijk} не равны 0 тогда и только тогда, когда все верхние индексы совпадают с соответствующими нижними: $i = l, j = m, k = n$. При этом:

$$a_{111}^{111} = 2, a_{112}^{112} = -1, a_{121}^{121} = 0, a_{122}^{122} = 3,$$

$$a_{211}^{211} = 1, a_{212}^{212} = 4, a_{221}^{221} = -2, a_{222}^{222} = 5.$$

Остальные компоненты – нулевые.

1) Сколько различных полных свёрток можно образовать из тензора A?
2) Вычислите полную свёртку a_{ijk}^{ijk}.
3) Вычислите полную свёртку a_{jik}^{ijk}.
4) Совпадают ли результаты пунктов 2 и 3? Почему?

4. Изменение координат тензора при замене базиса

Рассмотрим в L_nи L_n^* по два базиса – старый и новый:

$L_n\ :\ \{e_i\}_{i=1}^n, \{e'_k\}_{k=1}^n,$

$L_n^*\ :\ \left\{e^j\right\}_{j=1}^n, \{e'^l\}_{l=1}^n.$

Зададим матрицу перехода:
$T = \left(\tau_k^i\right)$ – из старого в новый, и $S = T^{-1} = \left(\sigma_j^l\right)$ – из нового в старый:

$$e'_k = \ e_j\,\tau_k^j,$$
$$e'^l = \ \sigma_j^l\,e^j.$$

Координаты тензора в новом базисе:

$$a'^{\,l_1 l_2 \dots l_q}_{k_1 k_2 \dots k_p} = \tau_{k_1}^{i_1}\tau_{k_2}^{i_2}\dots\tau_{k_p}^{i_p}\sigma_{j_1}^{l_1}\sigma_{j_2}^{l_2}\dots\sigma_{j_q}^{l_q}a_{i_1 i_2\dots i_p}^{j_1 j_2\dots j_q}.$$

Таким образом, тензор – это многокомпонентный объект, коэффициенты которого преобразуются по данному закону.

Пример 4.1
Преобразовать компоненты тензора C, заданного матрицей:

$$\left(c_{jk}^i\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right),$$

при замене базиса:

$$\begin{cases} e'_1 = 2e_1 - 3e_2; \\ e'_2 = -e_1 + 2e_2. \end{cases}$$

Решение.
Координаты тензора C в базисе $\{e_1, e_2\}$:

$$\left(c_{jk}^i\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right)\ \left(c_{jk}^i\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} c_{11}^1 & c_{21}^1 & c_{12}^1 & c_{22}^1 \\ c_{11}^2 & c_{21}^2 & c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{array}\right);$$

координаты тензора C в базисе $\{e'_1, e'_2\}$:

$$c'^{\,i'}_{j'k'} = \left(\begin{array}{cc|cc} c'^{\,1}_{11} & c'^{\,1}_{21} & c'^{\,1}_{12} & c'^{\,1}_{22} \\ c'^{\,2}_{11} & c'^{\,2}_{21} & c'^{\,2}_{12} & c'^{\,2}_{22} \end{array}\right).$$

Приведённую ранее формулу:

$$a'^{l_1 l_2 \dots l_q}_{k_1 k_2 \dots k_p} = \tau^{i_1}_{k_1} \tau^{i_2}_{k_2} \dots \tau^{i_p}_{k_p} \sigma^{l_1}_{j_1} \sigma^{l_2}_{j_2} \dots \sigma^{l_q}_{j_q} a^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p},$$

запишем для тензора C типа $(2,1)$:

$$c'^{l}_{k_1 k_2} = \tau^{i_1}_{k_1} \tau^{i_2}_{k_2} \sigma^{l}_{j} c^{j}_{i_1 i_2},$$

где $T = \left(\tau^i_k\right)$ – матрица перехода от базиса $\{e_1, e_2\}$ к базису $\{e'_1, e'_2\}$, $S = T^{-1} = \left(\sigma^l_j\right)$.

Переименуем в полученной формуле индексы, чтобы привести в соответствие с исходными данными (делать это совсем не обязательно!):

$$c'^{i'}_{j'k'} = \tau^{j}_{j'} \tau^{k}_{k'} \sigma^{i'}_{i} c^{i}_{jk},$$

где $T = \left(\tau^k_{k'}\right)$ – матрица перехода от базиса $\{e_1, e_2\}$ к базису $\{e'_1, e'_2\}$, $S = T^{-1} = \left(\sigma^{i'}_i\right)$:

$$T = \begin{pmatrix} \tau^1_1 & \tau^1_2 \\ \tau^1_2 & \tau^2_2 \end{pmatrix};\ T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$S = T^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma^1_1 & \sigma^1_2 \\ \sigma^1_2 & \sigma^2_2 \end{pmatrix};\ S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

В формуле $c'^{i'}_{j'k'} = \tau^{j}_{j'} \tau^{k}_{k'} \sigma^{i'}_{i} c^{i}_{jk}$ предполагается немое суммирование по индексам i, j и k.

Каждый элемент новой матрицы является суммой восьми слагаемых (размерность пространства: $n = 2$; индексов 3; $2^3 = 8$).

Распишем элементы новой матрицы:

$$c'^{i'}_{j'k'} = \tau^{j}_{j'} \tau^{k}_{k'} \sigma^{i'}_{i} c^{i}_{jk} =$$

по i

$$= \tau^{j}_{j'} \tau^{k}_{k'} \sigma^{i'}_{1} c^{1}_{jk} + \tau^{j}_{j'} \tau^{k}_{k'} \sigma^{i'}_{2} c^{2}_{jk} =$$

по j

$$= \tau^{1}_{j'} \tau^{k}_{k'} \sigma^{i'}_{1} c^{1}_{1k} + \tau^{2}_{j'} \tau^{k}_{k'} \sigma^{i'}_{1} c^{1}_{2k} + \tau^{1}_{j'} \tau^{k}_{k'} \sigma^{i'}_{2} c^{2}_{1k} + \tau^{2}_{j'} \tau^{k}_{k'} \sigma^{i'}_{2} c^{2}_{2k} =$$

по k

$$= \tau^{1}_{j'} \tau^{1}_{k'} \sigma^{i'}_{1} c^{1}_{11} + \tau^{1}_{j'} \tau^{2}_{k'} \sigma^{i'}_{1} c^{1}_{12} + \tau^{2}_{j'} \tau^{1}_{k'} \sigma^{i'}_{1} c^{1}_{21} + \tau^{2}_{j'} \tau^{2}_{k'} \sigma^{i'}_{1} c^{1}_{22} +$$
$$+ \tau^{1}_{j'} \tau^{1}_{k'} \sigma^{i'}_{2} c^{2}_{11} + \tau^{1}_{j'} \tau^{2}_{k'} \sigma^{i'}_{2} c^{2}_{12} + \tau^{2}_{j'} \tau^{1}_{k'} \sigma^{i'}_{2} c^{2}_{21} + \tau^{2}_{j'} \tau^{2}_{k'} \sigma^{i'}_{2} c^{2}_{22}.$$

Приведём расчёт одного элемента:

$$c'^{\,1}_{21} = \tau^j_2 \tau^k_1 \sigma^1_i c^i_{jk} =$$

$$= \tau^1_2\tau^1_1\sigma^1_1 c^1_{11} + \tau^1_2\tau^1_1\sigma^1_2 c^2_{11} + \tau^1_2\tau^2_1\sigma^1_1 c^1_{12} + \tau^1_2\tau^2_1\sigma^1_2 c^2_{12} +$$

$$+\tau^2_2\tau^1_1\sigma^1_1 c^1_{21} + \tau^2_2\tau^1_1\sigma^1_2 c^2_{21} + \tau^2_2\tau^2_1\sigma^1_1 c^1_{22} + \tau^2_2\tau^2_1\sigma^1_2 c^2_{22};$$

$$c'^{\,1}_{21} = (-1)\cdot 2\cdot 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 2\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-3)\cdot 2\cdot(-3) + (-1)\cdot(-3)\cdot 1\cdot 0 +$$

$$+ 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 1\cdot 4 + 2\cdot(-3)\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot(-3)\cdot 1\cdot 2 =$$

$$= 4 - 2 - 18 + 0 + 16 + 16 - 36 - 12 = -32.$$

Пример 4.2

Преобразовать компоненты тензоров A и B, заданных матрицами:

$$\left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \left(b^i_j\right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

при замене базиса:

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_3; \\ e'_2 = -e_1 + 2e_2 + e_3; \\ e'_3 = 2e_1 - e_2 + 2e_3. \end{cases}$$

Убедиться, что данные законы преобразования соответствуют матричным операциям:

$$A' = T^T A T,\, B' = T^{-1} B T,$$

где T – матрица перехода.

Решение.

Приведённую ранее формулу:

$$a'^{\,l_1 l_2 .. l_q}_{k_1 k_2 .. k_3} = \tau^{i_1}_{k_1}\tau^{i_2}_{k_2} .. \tau^{i_p}_{k_p} \sigma^{l_1}_{j_1}\sigma^{l_2}_{j_2} \dots \sigma^{l_q}_{j_q} a^{j_1 j_2 .. j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p},$$

запишем для тензора A типа (2, 0):

$$a'_{k_1 k_2} = \tau^{i_1}_{k_1}\tau^{i_2}_{k_2} a_{i_1 i_2},\ \ k_1, k_2, i_1, i_2 = 1, 2, 3,$$

где $T = \left(\tau^i_k\right)$ – матрица перехода от базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом требуют вычисления 9 координат тензора. Вычислим две из них:

$$a'_{11} = \tau_1^{i_1}\tau_1^{i_2}a_{i_1i_2} =$$
$$= \tau_1^1\tau_1^1a_{11} + \tau_1^1\tau_1^2a_{12} + \tau_1^1\tau_1^3a_{13} +$$
$$+\tau_1^2\tau_1^1a_{21} + \tau_1^2\tau_1^2a_{22} + \tau_1^2\tau_1^3a_{23} +$$
$$+\tau_1^3\tau_1^1a_{31} + \tau_1^3\tau_1^2a_{32} + \tau_1^3\tau_1^3a_{33}.$$

$$a'_{11} = 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot(-4) +$$
$$+\,0\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 0\cdot(-2) + 0\cdot 1\cdot 2 +$$
$$+\,1\cdot 1\cdot(-3) + 1\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot(-1) =$$
$$= 1 - 4 - 3 - 1 = -7;$$

$$a'_{23} = \tau_2^{i_1}\tau_3^{i_2}a_{i_1i_2} =$$
$$= \tau_2^1\tau_3^1a_{11} + \tau_2^1\tau_3^2a_{12} + \tau_2^1\tau_3^3a_{13} +$$
$$+\,\tau_2^2\tau_3^1a_{21} + \tau_2^2\tau_3^2a_{22} + \tau_2^2\tau_3^3a_{23} +$$
$$+\,\tau_2^3\tau_3^1a_{31} + \tau_2^3\tau_3^2a_{32} + \tau_2^3\tau_3^3a_{33}.$$

$$a'_{23} = -1\cdot 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)\cdot 0 + (-1)\cdot 2\cdot(-4) +$$
$$+\,2\cdot 2\cdot 0 + 2\cdot(-1)\cdot(-2) + 2\cdot 2\cdot 2 +$$
$$+1\cdot 2\cdot(-3) + 1\cdot(-1)\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot(-1) =$$
$$= -2 + 8 + 4 + 8 - 6 - 1 - 2 = 9.$$

Выполним матричные вычисления:

$$A' = T^TAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & -1 & -15 \\ 3 & 5 & 9 \\ -16 & 0 & -36 \end{pmatrix}.$$

Элементы этой матрицы $a'_{11} = -7$, $a'_{23} = 9$, что соответствует результатам, полученным по формулам преобразования координат тензора.

Для тензора B типа $(1,1)$ формула преобразования координат имеет вид:

$$b'^{l}_{k} = \tau_k^i\sigma_j^l b_i^j,\ k,l,i,j = 1,2,3,$$

где $T = \left(\tau_k^i\right)$ – матрица перехода от базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $\{e_1', e_2', e_3'\}$, $S = T^{-1} = \left(\sigma_j^l\right)$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; S = T^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 2 & -1{,}5 \\ -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом требуют вычисления 9 координат тензора. Вычислим две из них:

$$b_1'^1 = \tau_1^i \sigma_j^1 b_i^j =$$
$$= \tau_1^1 \sigma_1^1 b_1^1 + \tau_1^1 \sigma_2^1 b_1^2 + \tau_1^1 \sigma_3^1 b_1^3 +$$
$$+ \tau_1^2 \sigma_1^1 b_2^1 + \tau_1^2 \sigma_2^1 b_2^2 + \tau_1^2 \sigma_3^1 b_2^3 +$$
$$+ \tau_1^3 \sigma_1^1 b_3^1 + \tau_1^3 \sigma_2^1 b_3^2 + \tau_1^3 \sigma_3^1 b_3^3;$$

$$b_1'^1 = 1 \cdot 2{,}5 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1{,}5) \cdot 4 +$$
$$+ 0 \cdot 2{,}5 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1{,}5) \cdot (-2) +$$
$$+ 1 \cdot 2{,}5 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1{,}5) \cdot 0 =$$
$$= -5 + 2 - 6 + 5 + 6 = 2;$$

$$b_3'^2 = \tau_3^i \sigma_j^2 b_i^j =$$
$$= \tau_3^1 \sigma_1^2 b_1^1 + \tau_3^1 \sigma_2^2 b_1^2 + \tau_3^1 \sigma_3^2 b_1^3 +$$
$$+ \tau_3^2 \sigma_1^2 b_2^1 + \tau_3^2 \sigma_2^2 b_2^2 + \tau_3^2 \sigma_3^2 b_2^3 +$$
$$+ \tau_3^3 \sigma_1^2 b_3^1 + \tau_3^3 \sigma_2^2 b_3^2 + \tau_3^3 \sigma_3^2 b_3^3;$$

$$b_3'^2 = 2 \cdot (-0{,}5) \cdot (-2) + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 4 +$$
$$+ (-1) \cdot (-0{,}5) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0{,}5 \cdot (-2) +$$
$$+ 2 \cdot (-0{,}5) \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0 =$$
$$= 2 + 4 + 0{,}5 + 1 - 2 = 5{,}5.$$

Выполним матричные вычисления:

$$B' = T^{-1} B T = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 2 & -1{,}5 \\ -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 31 & -1{,}5 \\ 2 & -7 & 5{,}5 \\ 0 & -16 & 3 \end{pmatrix}.$$

Элементы этой матрицы $b_1'^1 = 2$, $b_3'^2 = 5{,}5$. Такие же результаты получены по формулам преобразования координат тензора.

Пример 4.3

Даны линейная форма:

$$A(x_1) = 2\,\xi_1^1 - \xi_1^2 + \xi_1^3,$$

и билинейная форма:

$$B(x_1, x_2) = \xi_1^1\xi_2^1 + 2\,\xi_1^2\xi_2^3 - 2\,\xi_1^2\xi_2^1 - \xi_1^2\xi_2^2 - 3\,\xi_1^2\xi_2^1 + 3\,\xi_1^3\xi_2^1 + 4\,\xi_1^3\xi_2^3,$$

где

$$x_1 = (\xi_1^1 \quad \xi_1^2 \quad \xi_1^3)^T, x_2 = (\xi_2^1 \quad \xi_2^2 \quad \xi_2^3)^T.$$

Найти их матричное представление (a_i') и $\left(b_{ij}'\right)$ в базисе $\{e_1', e_2', e_3'\}$:

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + e_3; \\ e_2' = e_2 + e_3; \\ e_3' = e_1 + e_3. \end{cases}$$

Решение.

Линейная форма $A(x_1)$ является тензором типа $(1, 0)$ и имеет матрицу:

$$(a_i) = (2 \quad -1 \quad 1).$$

Билинейная форма $B(x_1, x_2)$ является тензором типа $(2, 0)$, её матрица:

$$\left(b_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем матричное представление данных форм (a_i') и $\left(b_{ij}'\right)$ в базисе $\{e_1', e_2', e_3'\}$.

Матрица перехода к базису $\{e_1', e_2', e_3'\}$ и обратная ей матрица имеют вид:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица линейной формы A в базисе $\{e_1', e_2', e_3'\}$ имеет вид:

$$(a_i') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица билинейной формы B в базисе $\{e_1', e_2', e_3'\}$ имеет вид:

$$\left(b_{ij}'\right) = B' = T^T \cdot B \cdot T =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 10 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.4

Дан базис пространства $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} e'_1 = (1 \quad 1 \quad 1)^T; \\ e'_2 = (0 \quad 1 \quad 1)^T; \\ e'_3 = (1 \quad 0 \quad 1)^T. \end{cases}$$

Найти сопряженный ему базис (f'^1, f'^2, f'^3) и матричное представление P_i тензоров $f'^i \otimes e'_i$, $i = 1, 2, 3$.

Убедиться, что выполняются свойства:

$$P_1 + P_2 + P_3 = E,\ P_i^2 = P_i,\ P_i P_j = O, i \neq j.$$

Решение.

1) Найдем сопряженный базис. Составим матрицу перехода от стандартного базиса (e_1, e_2, e_3) к базису (e'_1, e'_2, e'_3) и найдем обратную к ней матрицу:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Строки матрицы T^{-1} являются векторами сопряженного базиса:

$$f'^1 = (1 \quad 1 \quad -1),\ f'^2 = (-1 \quad 0 \quad 1),\ f'^3 = (0 \quad -1 \quad 1).$$

2) Найдем матричное представление тензоров:

$$f'^1 \otimes e'_1 = P_1,\ f'^2 \otimes e'_2 = P_2,\ f'^3 \otimes e'_3 = P_3.$$

$$f'^1 \otimes e'_1 = (1, \quad 1, \quad -1) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = P_1;$$

$$f'^2 \otimes e'_2 = (-1, \quad 0, \quad 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P_2;$$

$$f'^3 \otimes e'_3 = (0, \quad -1, \quad 1) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_3.$$

3) Проверим выполнение свойств, приведенных в задании:

$$P_1 + P_2 + P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

$$P_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = P_1;$$

$$P_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P_2;$$

$$P_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_3;$$

$$P_1 \cdot P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0;$$

$$P_1 \cdot P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0;$$

$$P_2 \cdot P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Упражнения

4.1. В базисе e_1, e_2 пространства $\mathbb{R}^2$ заданы тензоры:

1) вектор $(v^i) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$;

2) ковектор $(a_i) = (3 \quad -1)$;

3) билинейная форма B: $(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

4) тензор C: $(c^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

5) линейный оператор A: $\left(a_j^i\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти компоненты этих тензоров в базисе e_1', e_2', где:

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2; \\ e_2' = 2e_1 + 3e_2. \end{cases}$$

4.2. В базисе e_1, e_2, e_3 пространства $\mathbb{R}^3$ заданы тензоры:

1) вектор $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;

2) ковектор $\alpha = (2 \quad 0 \quad -1)$;

3) билинейная форма B: $\left(b_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

4) тензор C: $\left(c^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

5) линейный оператор A: $\left(a_j^i\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти компоненты этих тензоров в базисе e_1', e_2', e_3', где:

$$\begin{cases} e_1' = e_1 - 2e_2 + e_3; \\ e_2' = e_2 + e_3; \\ e_3' = 2e_1 - 3e_2 + 4e_3. \end{cases}$$

4.3. Докажите, что след тензора типа $(1, 1)$ инвариантен относительно замены базиса.

4.4. В базисе e_1, e_2 пространства $\mathbb{R}^2$ все компоненты тензора A типа $(1, 2)$ равны 1. Найти компоненту a'^{12}_1 тензора A в базисе e_1', e_2', где:

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + 2e_2; \\ e_2' = 2e_1 + 5e_2. \end{cases}$$

4.5. В базисе e_1, e_2, e_3 пространства $\mathbb{R}^3$ компоненты тензора A типа $(2, 3)$ имеют вид: $a_{lm}^{ijk} = 2m$. Найти компоненту a'^{123}_{31} тензора A в базисе e_1', e_2', e_3', где:

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + 3e_2 - 2e_3; \\ e_2' = e_2 + 4e_3; \\ e_3' = -e_3. \end{cases}$$

5. Транспонирование тензоров

Транспонирование тензоров определим через транспонирование m-мерной матрицы.

Пусть $\left(a_{i_1 i_2 \ldots i_m}\right)$ – m-мерная матрица.

Двумерным сечением, соответствующим i_k и i_l, называется двумерная матрица, полученная из $\left(a_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots i_l \ldots i_m}\right)$ фиксированием всех индексов, кроме i_k и i_l.

Транспонированием m-мерной матрицы $\left(a_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots i_l \ldots i_m}\right)$ по индексам i_k и i_l называется такая перестановка элементов этой матрицы, при которой все двумерные слои, отвечающие этим индексам, транспонируются обычным образом:

$$\left(a_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots i_l \ldots i_m}\right)^{T_{i_k i_l}} = a_{i_1 i_2 \ldots i_l \ldots i_k \ldots i_m}.$$

Транспонировать можно только по паре нижних или только по паре верхних индексов.

Для тензора A типа $(3,0)$ с компонентами a_{ijk} с помощью транспонирования можно получить три других тензора B, C, D с компонентами:

$$b_{ijk} = a_{jik}; \qquad c_{ijk} = a_{kji}; \qquad d_{ijk} = a_{ikj}.$$

$$ij \to ji \qquad ik \to ki \qquad jk \to kj$$

Пример 5.1

Тензор A имеет матричный вид:

$$\left(a_{ijk}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 7 & 8 & 9 & 4 & 6 & 5 \\ 9 & 7 & 8 & 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 8 & 6 & 7 & 1 & 9 & 5 \end{array}\right).$$

Найти тензор B, полученный из тензора A транспонированием:

$$\left(b_{ijk}\right) = \left(a_{ijk}\right)^{T_{jk}} = \left(a_{ikj}\right).$$

Решение.

Для $b_{ijk} = a_{ikj}$ нужно зафиксировать неизменяющийся индекс, здесь это i. Зафиксируем первую строку $i = 1$:

$$\left(a_{ijk}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & \boxed{3} & 2 & 7 & \boxed{8} & 9 & 4 & \boxed{6} & 5 \\ 9 & 7 & 8 & 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 8 & 6 & 7 & 1 & 9 & 5 \end{array}\right).$$

Составим матрицу:

$$(a_{1jk}) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ \boxed{3} & \boxed{8} & \boxed{6} \\ 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Теперь эту матрицу транспонируем:

$$(a_{1kj}) = (a_{1jk})^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (b_{1jk}).$$

Для $i = 2$:

$$(a_{2jk}) = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(a_{2kj}) = (a_{2jk})^T = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (b_{2jk}).$$

Для $i = 3$:

$$(a_{3jk}) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(a_{3kj}) = (a_{3jk})^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & 7 \\ 1 & 9 & 5 \end{pmatrix} = (b_{3jk}).$$

Объединяя результаты, получаем матрицу:

$$(b_{ijk}) = (a_{ikj}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 7 & 4 & 3 & 8 & 6 & 2 & 9 & 5 \\ 9 & 3 & 6 & 7 & 1 & 4 & 8 & 2 & 5 \\ 4 & 8 & 1 & 2 & 6 & 9 & 3 & 7 & 5 \end{array}\right).$$

Пример 5.2

Тензор A типа $(0, 3)$ имеет матричный вид:

$$(a^{ijk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 3 & -4 & 0 & 2 & -1 & 5 & -2 & 5 \\ 7 & 3 & -1 & 2 & 4 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & -3 & 3 & 7 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Найти тензор B, полученный из тензора A транспонированием:

$$(b^{ijk}) = (a^{ijk})^{T_{ik}} = (a^{kji}).$$

Решение.
Зафиксируем j:
Для $j = 1$:

$$\left(\alpha^{i1k}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\left(b^{i1k}\right) = \left(a^{k1i}\right) = (a^{i1k})^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для $j = 2$:

$$\left(a^{i2k}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\left(b^{i2k}\right) = \left(a^{k2i}\right) = (a^{i2k})^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для $j = 3$:

$$\left(a^{i3k}\right) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\left(b^{i3k}\right) = \left(a^{k3i}\right) = (a^{i3k})^T = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Объединяя результаты, получаем матрицу:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 3 & -4 & 7 & 3 & -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 & 0 & -3 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & 5 & 3 & 2 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Пример 5.3

Пусть тензоры A типа $(0, 1)$ и B типа $(0, 1)$. Сравнить матричный вид тензорных произведений $A \otimes B$ и $B \otimes A$.

Решение.
$C = A \otimes B$ – тензор типа $(0, 2)$; $D = B \otimes A$ – тензор типа $(0, 2)$.

$$c^{ij} = a^i b^j; \qquad d^{ji} = b^j a^i;$$

$$\left(c^{ij}\right) = \begin{pmatrix} a^1b^1 & a^1b^2 & a^1b^3 \\ a^2b^1 & a^2b^2 & a^2b^3 \\ a^3b^1 & a^3b^2 & a^3b^3 \end{pmatrix}; \qquad \left(d^{ji}\right) = \begin{pmatrix} b^1a^1 & b^1a^2 & b^1a^3 \\ b^2a^1 & b^2a^2 & b^2a^3 \\ b^3a^1 & b^3a^2 & a^3a^3 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая результаты, делаем вывод: $\left(d^{ji}\right) = \left(c^{ij}\right)^T$.

Пример 5.4
Тензор A имеет матричный вид:

$$\left(a_{ijk}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right).$$

Найти тензор B, полученный из тензора A транспонированием:

$$\left(b_{ijk}\right) = \left(a_{ijk}\right)^{T_{jk}} = \left(a_{ikj}\right).$$

Решение.
Зафиксируем i.
Для $i = 1$:

$$\left(a_{1jk}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad \left(a_{1kj}\right) = \left(a_{1jk}\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Для $i = 2$:

$$\left(a_{2jk}\right) = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(a_{2kj}\right) = \left(a_{2jk}\right)^T = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для $i = 3$:

$$\left(a_{3jk}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \left(a_{3kj}\right) = \left(a_{3jk}\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$B = \left(b_{ijk}\right) = \left(a_{ijk}\right)^{T_{jk}} = \left(a_{ikj}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 \\ 9 & 6 & 3 & 8 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right).$$

Пример 5.5
Тензор A имеет матричный вид:

$$\left(a^{ijk}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 3 & -4 & 0 & 2 & -1 & 5 & -2 & 5 \\ 7 & 3 & -1 & 2 & 4 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & -3 & 3 & 7 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Найти тензор B, полученный из тензора A транспонированием:

$$\left(b^{ijk}\right) = \left(a^{ijk}\right)^{T_{ik}} = \left(a^{kji}\right).$$

Решение.
Зафиксируем j.
Для $j = 1$:

$$\left(a^{i1k}\right) = \begin{pmatrix} a^{111} & a^{112} & a^{113} \\ a^{211} & a^{212} & a^{213} \\ a^{311} & a^{312} & a^{313} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\left(b^{i1k}\right) = \left(a^{k1i}\right) = \left(a^{i1k}\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для $j = 2$:

$$\left(a^{i2k}\right) = \begin{pmatrix} a^{121} & a^{122} & a^{123} \\ a^{221} & a^{222} & a^{223} \\ a^{321} & a^{322} & a^{323} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\left(b^{i2k}\right) = \left(a^{k2i}\right) = \left(a^{i2k}\right)^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для $j = 3$:

$$\left(a^{i3k}\right) = \begin{pmatrix} a^{131} & a^{132} & a^{133} \\ a^{231} & a^{232} & a^{233} \\ a^{331} & a^{332} & a^{333} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\left(b^{i3k}\right) = \left(a^{k3i}\right) = \left(a^{i3k}\right)^T = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B = \left(b^{ijk}\right) = \left(a^{ijk}\right)^{T_{ik}} = \left(a^{kji}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 3 & -4 & 7 & 3 & -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 & 0 & -3 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & 5 & 3 & 2 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Упражнения

5.1. Найти матрицы всех тензоров, получаемых транспонированием:

1) из тензора A, заданного матрицей:

$$\left(a_{ijk}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}\right);$$

2) из тензора B, заданного матрицей

$$\left(b^{ij}_{k}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}\right);$$

3) из тензора C, заданного матрицей

$$\left(c^{i}_{jk}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}\right).$$

5.2. Тензор A имеет матричный вид:

$$\left(a^{ijk}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right).$$

Найти:

1) тензор B, полученный из тензора A транспонированием:

$$\left(b^{ijk}\right) = \left(a^{ijk}\right)^{T_{ij}} = \left(a^{jik}\right);$$

2) тензор C, полученный из тензора A транспонированием:

$$\left(c^{ijk}\right) = \left(a^{ijk}\right)^{T_{jk}} = \left(a^{ikj}\right);$$

3) тензор D, полученный из тензора A транспонированием:

$$\left(d^{ijk}\right) = \left(a^{ijk}\right)^{T_{ik}} = \left(a^{kji}\right).$$

5.3. Найти матрицы всех тензоров, получаемых транспонированием:

1) из тензора A, заданного матрицей:

$$\left(a_{ijkl}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 11 & 12 \\ \hline 5 & 6 & 13 & 14 \\ 7 & 8 & 15 & 16 \end{array}\right);$$

2) из тензора B, заданного матрицей:

$$\left(b^{ij}_{kl}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 11 & 12 \\ \hline 5 & 6 & 13 & 14 \\ 7 & 8 & 15 & 16 \end{array}\right).$$

6. Симметрирование и альтернирование тензоров

Тензор A с координатами $a^{k_1\dots k_q}_{i_1\dots i_m\dots i_n\dots i_p}$ называется ***симметричным по нижним индексам*** i_m и i_n, если при перестановке этих индексов координаты тензора A не меняют своего значения, то есть:

$$a^{k_1\dots k_q}_{i_1\dots i_m\dots i_n\dots i_p} = a^{k_1\dots k_q}_{i_1\dots i_n\dots i_m\dots i_p}.$$

Записанное условие называется ***условием симметрии*** тензора A по нижним индексам i_m и i_n.

Тензор A называется ***кососимметричным по нижним индексам*** i_mи i_n, если при перестановке этих индексов справедливо соотношение

$$a^{k_1\dots k_q}_{i_1\dots i_m\dots i_n\dots i_p} = -a^{k_1\dots k_q}_{i_1\dots i_n\dots i_m\dots i_p}.$$

Это условие называется ***условием кососимметрии*** тензора A по нижним индексам i_m и i_n.

Аналогично вводится понятие симметрии и кососимметрии тензора по двум верхним индексам.

Условие симметрии и кососимметрии выполняется для тензора в любой системе координат.

Также можно рассмотреть понятия симметричного и кососимметричного тензора.

Пусть S_p – группа перестановок на p элементах, $\sigma \in S_p$.

Тензор A типа $(p, 0)$ с координатами $a_{i_1\dots i_p}$ называется ***симметричным***, если при любой перестановке индексов $i_1 \dots i_p$ координаты тензора A не меняют своего значения, то есть:

$$a_{i_1\dots i_p} = a_{\sigma(i_1)\dots\sigma(i_p)}.$$

Тензор A типа $(p, 0)$ с координатами $a_{i_1\dots i_p}$ называется ***кососимметричным***, если для любой перестановки индексов $i_1 \dots i_p$ имеет место равенство:

$$a_{i_1\dots i_p} = (-1)^\sigma a_{\sigma(i_1)\dots\sigma(i_p)},$$

где $(-1)^\sigma = \begin{cases} 1, \text{если } \sigma - \text{чётная;} \\ -1, \text{если } \sigma - \text{нечётная.} \end{cases}$

Выполнение операции симметрирования

Пусть A – тензор типа (p, q) с координатами

$$a^{k_1\dots k_q}_{i_1\dots i_m\dots i_n\dots i_p}.$$

Переставим у каждой координаты нижние индексы с номерами i_m и i_n. Затем построим тензор с координатами:

$$\frac{1}{2}\left(a^{k_1 \ldots k_q}_{i_1 \ldots i_m \ldots i_n \ldots i_p} + a^{k_1 \ldots k_q}_{i_1 \ldots i_n \ldots i_m \ldots i_p}\right).$$

Это и есть операция симметрирования тензора A по нижним индексам с номерами i_m и i_n.

Координаты нового тензора обычно обозначаются символами:

$$a^{k_1 \ldots k_q}_{i_1 \ldots (i_m | \ldots | i_n) \ldots i_p} = a_{(m,n)}.$$

Здесь индексы между знаками | и | не учитываются в симметрировании.

Операция симметрирования по верхним индексам определяется аналогично и обозначается $a^{(m,n)}$.

В результате симметрирования тензора A типа (p, q) по p нижним индексам получается тензор U, компоненты которого вычисляются по формуле:

$$u^{k_1 \ldots k_q}_{i_1 \ldots i_p} = a^{k_1 \ldots k_q}_{(i_1 \ldots i_p)} = \frac{1}{p!}\sum\nolimits_{\sigma \in S_p} a^{k_1 \ldots k_q}_{\sigma(i_1) \ldots \sigma(i_p)}.$$

(суммирование по множеству перестановок $(i_1 \ldots i_p)$).

К примеру, для тензора A типа $(3,0)$:

- симметрирование по двум индексам проводится по формулам:

$$a_{(ij)k} = \frac{1}{2}\left(a_{ijk} + a_{jik}\right);\ a_{i(jk)} = \frac{1}{2}\left(a_{ijk} + a_{ikj}\right); a_{(i|j|k)} = \frac{1}{2}\left(a_{ijk} + a_{kji}\right);$$

- симметрирование по трём индексам:

$$a_{(ijk)} = \frac{1}{3!}\left(a_{ijk} + a_{jik} + a_{jki} + a_{kji} + a_{kij} + a_{ikj}\right).$$

Выполнение операции альтернирования

Операция альтернирования тензора A по нижним индексам с номерами i_m и i_n производится следующим образом.

У каждого координаты тензора A переставляются в нижние индексы с номерами i_m и i_n, и затем строится тензор с координатами:

$$\frac{1}{2}\left(a^{k_1 \ldots k_q}_{i_1 \ldots i_m \ldots i_n \ldots i_p} - a^{k_1 \ldots k_q}_{i_1 \ldots i_n \ldots i_m \ldots i_p}\right) = a_{[m,n]}.$$

Координаты тензора $A_{[m,n]}$ так обозначаются символами:

$$a^{k_1 \ldots k_q}_{i_1 \ldots [i_m | \ldots | i_n] \ldots i_p}.$$

Операция альтернирования тензора по верхним индексам i_m и i_n определяется аналогично и построенный тензор обозначается $A^{[m,n]}$.

В результате альтернирования тензора A типа (p,q) по p нижним индексам получается тензор V, компоненты которого вычисляются по формуле:

$$v_{i_1\dots i_p}^{k_1\dots k_q} = a_{[i_1\dots i_p]}^{k_1\dots k_q} = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^\sigma a_{\sigma(i_1)\dots\sigma(i_p)}^{k_1\dots k_q},$$

где $(-1)^\sigma = \begin{cases} 1, \text{если } \sigma - \text{чётная;} \\ -1, \text{если } \sigma - \text{нечётная.} \end{cases}$

К примеру, для тензора A типа $(3,0)$:

- альтернирование по двум индексам проводится по формулам:

$$a_{[ij]k} = \frac{1}{2}\left(a_{ijk} - a_{jik}\right);\ a_{i[jk]} = \frac{1}{2}\left(a_{ijk} - a_{ikj}\right);\ a_{[i|j|k]} = \frac{1}{2}\left(a_{ijk} - a_{kji}\right);$$

- альтернирование по трём индексам:

$$a_{[ijk]} = \frac{1}{3!}\left(a_{ijk} - a_{jik} + a_{jki} - a_{kji} + a_{kij} - a_{ikj}\right).$$

Выполняются очевидные равенства:

$$A = A_{(m,n)} + A_{[m,n]};\ A = A^{(m,n)} + A^{[m,n]}.$$

Операции симметрирования и альтернирования, в отличие от свёрток, проводятся только по верхним или только по нижним индексам.

Свойства операции симметрирования

1. При симметрировании не меняются те координаты исходного тензора, у которых индексы, стоящие в круглых скобках, одинаковы.
2. Результат двукратного симметрирования тензора по одному и тому же набору индексов совпадает с результатом его однократного симметрирования.
3. У тензора $A_{i_1\dots(i_m\dots i_n)\dots i_p}^{k_1\dots k_q}$, полученного в результате симметрирования тензора A по индексам i_m, … , i_n, координаты не меняются при любой перестановке индексов i_m, … , i_n, заключенных в круглые скобки.

Свойства операции альтернирования

1. Коэффициенты исходного тензора, у которого все индексы, участвующие в альтернировании, совпадают после альтернирования, обращаются в ноль.

2. Повторное (а также многократное) альтернирование по одному и тому же набору индексов совпадает с однократным альтернированием.

3. В результате альтернирования по данному набору индексов получается тензор, у которого координаты не меняются при чётной перестановке индексов из этого набора и изменяют знак при нечетной перестановке этих индексов.

Пример 6.1

Тензор B типа (3,1) задан матрицей:

$$\left(b_{ijk}^{l}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 8 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 6 & 4 & -5 \\ \hline 3 & 5 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 7 & 9 \end{array}\right),$$

где l – строка, i – столбец, j – слой, k – сечение.

Выполнить симметрирование тензора по двум первым нижним индексам.

Решение.

Компоненты искомого тензора найдём по формуле:

$$a_{ijk}^{l} = a_{jik}^{l} = b_{(ij)k}^{l} = \frac{1}{2}\left(b_{ijk}^{l} + b_{jik}^{l}\right).$$

$$\left(b_{ijk}^{l}\right) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|cc} b_{111}^{1} & b_{211}^{1} & b_{112}^{1} & b_{212}^{1} \\ b_{111}^{2} & b_{211}^{2} & b_{112}^{2} & b_{212}^{2} \\ \hline b_{121}^{1} & b_{221}^{1} & b_{122}^{1} & b_{222}^{1} \\ b_{121}^{2} & b_{221}^{2} & b_{122}^{2} & b_{222}^{2} \end{array}\right) \\ \quad k=1 \qquad\qquad k=2 \end{array} \begin{array}{l} j=1 \\ \\ j=2 \end{array}$$

$$a_{111}^{1} = b_{111}^{1} = 8;$$
$$a_{211}^{1} = b_{(21)1}^{1} = \frac{1}{2}\left(b_{211}^{1} + b_{121}^{1}\right) = \frac{1}{2}(2+3) = \frac{5}{2};$$
$$a_{111}^{2} = b_{111}^{2} = 1;$$
$$a_{211}^{2} = b_{(21)1}^{2} = \frac{1}{2}\left(b_{211}^{2} + b_{121}^{2}\right) = \frac{1}{2}(6-4) = 1;$$
$$a_{121}^{1} = a_{211}^{1} = \frac{5}{2};$$
$$a_{221}^{1} = b_{221}^{1} = 5;$$
$$a_{121}^{2} = a_{211}^{2} = 1;$$
$$a_{221}^{2} = b_{221}^{2} = 6;$$

$$a_{112}^{1} = b_{112}^{1} = -2;$$
$$a_{212}^{1} = b_{(21)2}^{1} = \frac{1}{2}\left(b_{212}^{1} + b_{122}^{1}\right) = \frac{1}{2}(3+1) = 2;$$
$$a_{112}^{2} = b_{112}^{2} = 4;$$
$$a_{212}^{2} = b_{(21)2}^{2} = \frac{1}{2}\left(b_{212}^{2} + b_{122}^{2}\right) = \frac{1}{2}(-5+7) = 1;$$
$$a_{122}^{1} = a_{212}^{1} = 2;$$
$$a_{222}^{1} = b_{222}^{1} = 0;$$
$$a_{122}^{2} = a_{212}^{2} = 1;$$
$$a_{222}^{2} = b_{222}^{2} = 9.$$

$$\left(a_{ijk}^{l}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 8 & \frac{5}{2} & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ \hline \frac{5}{2} & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 9 \end{array}\right).$$

Пример 6.2

Выполнить симметрирование тензора из примера 6.1 по трём нижним индексам.

Решение.

Симметрирование тензора из примера 6.1 по трём нижним индексам выполняется по формуле:

$$a_{ijk}^{l}=b_{(ijk)}^{l}=\frac{1}{3!}\left(b_{ijk}^{l}+b_{jki}^{l}+b_{kij}^{l}+b_{jik}^{l}+b_{ikj}^{l}+b_{kji}^{l}\right).$$

Вычислим координаты искомого тензора:

$$a_{111}^{1}=b_{111}^{1}=8;$$
$$a_{111}^{2}=b_{111}^{2}=1;$$
$$a_{222}^{1}=b_{222}^{1}=0;$$
$$a_{222}^{2}=b_{222}^{2}=9;$$

$$a_{211}^{1}=a_{121}^{1}=a_{112}^{1}=b_{(211)}^{1}=\frac{1}{6}(b_{211}^{1}+b_{121}^{1}+b_{112}^{1}+b_{211}^{1}+b_{121}^{1}+b_{112}^{1})=$$
$$=\frac{1}{6}(2+3-2+2+3-2)=1;$$

$$a_{211}^{2}=a_{121}^{2}=a_{112}^{2}=b_{(211)}^{2}=\frac{1}{6}(b_{211}^{2}+b_{121}^{2}+b_{112}^{2}+b_{211}^{2}+b_{121}^{2}+b_{112}^{2})=$$
$$=\frac{1}{6}(6-4+4+6-4+4)=2;$$

$$a_{122}^{1}=a_{212}^{1}=a_{221}^{1}=b_{(122)}^{1}=\frac{1}{6}(b_{212}^{1}+b_{122}^{1}+b_{221}^{1}+b_{122}^{1}+b_{212}^{1}+b_{221}^{1})=$$
$$=\frac{1}{6}(3+1+5+1+3+5)=3;$$

$$a_{122}^{2}=a_{212}^{2}=a_{221}^{2}=b_{(122)}^{2}=\frac{1}{6}(b_{212}^{2}+b_{122}^{2}+b_{221}^{2}+b_{122}^{2}+b_{212}^{2}+b_{221}^{2})=$$
$$=\frac{1}{6}(-5+7+6-5+7+6)=\frac{8}{3}.$$

В итоге получаем матрицу:

$$\left(a_{ijk}^{l}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}8 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 2 & \frac{8}{3}\\ \hline 1 & 3 & 3 & 0\\ 2 & \frac{8}{3} & \frac{8}{3} & 9\end{array}\right).$$

Пример 6.3

Выполнить альтернирование тензора из примера 6.1 по двум первым нижним индексам.

Решение.

Проведем альтернирование тензора из примера 6.1 по двум первым нижним индексам. К примеру:

$$b^1_{[12]2} = \frac{1}{2}\left(b^1_{122} - b^1_{212}\right) = \frac{1}{2}(1-3) = -1.$$

В результате получим следующую матрицу:

$$\left(b^l_{[ij]k}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -6 \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right).$$

Пример 6.4

Выполнить альтернирование тензора из примера 6.1 по трём нижним индексам.

Решение.

Альтернирование того же самого тензора по трём нижним индексам выполняется по формуле:

$$b^l_{[ijk]} = \frac{1}{3!}\left(b^l_{ijk} + b^l_{jki} + b^l_{kij} - b^l_{jik} - b^l_{ikj} - b^l_{ikj}\right).$$

Получаем матрицу:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получился тождественно нулевой тензор, поскольку в данном случае все индексы пробегают только по двум различным значениям, и в наборе ijk не может оказаться трёх различных значений.

Упражнения

6.1. Тензор A задан матрицей:

1) $\left(a^{ij}\right)=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 1 & 3\end{pmatrix}$;

2) $\left(a^{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}$;

3) $\left(a^{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Найти матрицу тензора: а) $a^{(ij)}$; б) $a^{[ij]}$.

6.2. Тензор A задан матрицей:

1) $\left(a_{ijk}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 4 & 2 & 5\\ 5 & 7 & 1 & 3\end{array}\right)$;

2) $\left(a_{ijk}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}4 & 6 & 8 & 6 & 8 & 4 & 8 & 4 & 6\\ 8 & 4 & 6 & 4 & 6 & 8 & 6 & 8 & 4\\ 6 & 8 & 4 & 8 & 4 & 6 & 4 & 6 & 8\end{array}\right)$.

Найти матрицу тензора:
а) $a_{(ij)k}$; б) $a_{i(jk)}$; в) $a_{(i|j|k)}$; г) $a_{(ijk)}$; д) $a_{[ij]k}$; е) $a_{i[jk]}$; ж) $a_{[i|j|k]}$; з) $a_{[ijk]}$.

6.3. Тензор A задан матрицей:

$$\left(a^{ij}_{kl}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 4 & 4 & 6\\ 6 & 8 & 8 & 0\\ \hline 6 & 8 & 8 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 6\end{array}\right).$$

Найти матрицу тензора:
а) $a^{(ij)}_{kl}$; б) $a^{ij}_{(kl)}$; в) $a^{(ij)}_{(kl)}$; г) $a^{[ij]}_{kl}$; д) $a^{ij}_{[kl]}$; е) $a^{[ij]}_{[kl]}$.

6.4. 1) Доказать, что любой тензор типа $(2,0)$ или $(0,2)$ можно разложить в сумму симметричного и антисимметричного тензоров.

2) Разложить в сумму симметричного и антисимметричного тензоров тензор, заданный матрицей:

$$\left(a^{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

7. Симметрическое и внешнее произведения тензоров

Пусть A и B – тензоры, либо ковариантные типа $(p,0)$ и $(q,0)$, либо контравариантные типа $(0,p)$ и $(0,q)$.

В обоих этих случаях, применяя тензорное умножение, полное симметрирование и полное альтернирование можно определить следующие две операции.

1. ***Симметрическим произведением*** тензора A на тензор B называется полное симметрирование их тензорного произведения:

$$A \odot B = \mathrm{Sym}(A \otimes B).$$

2. ***Внешним произведением*** тензора A на тензор B называется полное альтернирование их тензорного произведения:

$$A \wedge B = \mathrm{Alt}(A \otimes B).$$

Формулы симметрического и внешнего произведений

$$A \odot B = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (A \otimes B)_{\sigma(i_1)\dots\sigma(i_p)\sigma(j_1)\dots\sigma(j_q)},$$

$$A \wedge B = \frac{1}{p!\,q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (-1)^{\sigma} (A \otimes B)_{\sigma(i_1)\dots\sigma(i_p)\sigma(j_1)\dots\sigma(j_q)},$$

где $(-1)^{\sigma} = \begin{cases} 1, \text{если } (i_1 \dots i_p) - \text{чётная;} \\ -1, \text{если } (i_1 \dots i_p) - \text{нечётная.} \end{cases}$

Пример 7.1

Вычислить симметрическое произведение двух векторов:

$$a = a^i e_i;$$
$$b = b^k e_k.$$

Решение.

$$a \odot b = \mathrm{Sym}(a \otimes b) = \mathrm{Sym}\left(a^i b^k e_i \otimes e_k\right) = \frac{1}{2}\left(a^i b^k + a^k b^i\right) e_i \otimes e_k =$$
$$= \frac{1}{2}(a \otimes b + b \otimes a).$$

Заметим, что при $a = b$ $a \odot a = a \otimes a$.

Пример 7.2

Вычислить внешнее произведение двух векторов:

$$a = a^i e_i;$$
$$b = b^k e_k.$$

Решение.

$$a \wedge b = \mathrm{Alt}(a \otimes b) = \mathrm{Alt}\left(a^i b^k \cdot e_i \otimes e_k\right) = \frac{1}{2}\left(a^i b^k - a^k b^i\right) \cdot e_i \otimes e_k =$$
$$= \frac{1}{2}(a \otimes b - b \otimes a).$$

Заметим, что при $a = b$ получается $a \wedge a = 0$ – тривиальный тензор.

Свойства симметрического и внешнего умножения

1. Симметрическое умножение билинейно.
2. Симметрическое умножение коммутативно.
3. Внешнее умножение билинейно.
4. Внешнее умножение антикоммутативно, то есть для произвольных тензоров A и B типа $(p, 0)$ и $(q, 0)$ (либо типа $(0, p)$ и $(0, q)$):
$$A \wedge B = (-1)^{qp}(B \wedge A).$$

Упражнения

7.1. Даны векторы $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Найти: 1) $u \odot v$; 2) $u \wedge v$; 3) $u \odot u$; 4) $u \wedge u$.

7.2. Даны ковекторы $\alpha = (1, -1)$, $\beta = (2,\ 3)$.

Найти: 1) $\alpha \odot \beta$; 2) $\alpha \wedge \beta$.

7.3. Даны векторы $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Вычислите: 1) $(u \odot v) \odot w$; 2) $(u \wedge v) \wedge w$.

8. Метрический тензор. Опускание и поднятие индексов

Пусть в линейном пространстве задано скалярное произведение

$g : V \times V \to R$ с матрицей Грама $g = (g_{ij})$, где $g_{ij} = g(e_i, e_j)$.

Скалярное произведение в линейном пространстве – это билинейная функция, удовлетворяющая условиям:

1) $g(x, y) = g(y, x)$ – симметричность;

2) $\forall x \in V: g(x, x) \geq 0$ и $g(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

В силу билинейности всякое скалярное произведение – это ковариантный тензор типа (2, 0).

В стандартном базисе он имеет вид:

$$g = g_{ij} e^i \otimes e^j.$$

Метрическим тензором в линейном пространстве называется ковариантный двухвалентный тензор, удовлетворяющий условиям 1 и 2, то есть являющийся скалярным произведением.

Линейное пространство с заданным в нем метрическим тензором g (евклидово пространство) изоморфно сопряженному пространству V^*.

Двойственный базис в евклидовом пространстве (взаимный базис) выражается через основной базис с помощью матрицы, обратной матрице Грама заданного скалярного произведения.

Для скалярного произведения во взаимном базисе запишем:

$$g^{ij} = g(e^i, e^j),$$

то есть

$$g = g^{ij} \cdot e_i \otimes e_j.$$

Таким образом g^{ij} – тензор типа $(0, 2)$, дважды контравариантный, симметричный по индексам i, j. Этот тензор также называют метрическим тензором.

Координаты g_{ij} и g^{ij} можно рассматривать как ковариантные и контравариантные координаты одного и того же тензора G.

Метрический тензор G используется для операции поднятия и опускания индексов у координат данного тензора A.

Эта операция заключается в следующем:

Пусть A – тензор типа (p, q) с координатами $a_{i_1 i_2 \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q}$.

Покажем, как производится операция поднятия индекса i_1.

Свернем тензоры G и A по верхнему индексу j у G и нижнему i_1 у A, то есть построим тензор с координатами:

$$g^{im}\, a_{m i_2 \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q},$$

и у координат полученного тензора индекс i обозначим через i_1:

$$g^{i_1 m} a_{m i_2 \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q} = a_{\cdot\, i_2 \,\dots\, i_p}^{i_1 k_1 \dots k_q}.$$

Здесь прежнее место индекса отмечается точкой.

Если первый нижний индекс поднимается на второе место среди верхних индексов, то в результате получим тензор с координатами:

$$a_{\cdot\; i_2 \dots i_p}^{k_1 i_1 k_2 \dots k_q}.$$

Операция опускания определяется аналогично:

$$g_{k_1 m} a_{i_1 i_2 \dots i_p}^{m k_2 \dots k_q} = a_{k_1 i_1 i_2 \,\dots\, i_p}^{\;\cdot\; k_2 \dots k_q}.$$

Пример 8.1

Задан метрический тензор

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

и тензор A типа $(1, 1)$

$$A = (a_j^i) = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу тензора, полученного в результате:

а) опускания верхнего индекса; б) поднятия нижнего индекса.

Решение.

а) Опустим верхний индекс, получим тензор с координатами $a_{ij}^{\cdot\cdot}$, которые вычисляются по формуле:

$$a_{ij}^{\cdot\cdot} = g_{im} \cdot \alpha_j^m.$$

Вычислим, например, $a_{21}^{\cdot\cdot}$:

$$a_{21}^{\cdot\cdot} = g_{2m} \cdot a_1^m = g_{12} \cdot a_1^1 + g_{22} \cdot a_1^2 = 2 \cdot 7 + 5 \cdot (-3) = -1.$$

В итоге получим:

$$(a_{ij}^{\cdot\cdot}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что: $\left(a_{ij}^{\cdot\cdot}\right) = \left(g_{im} \cdot \alpha_j^m\right) = G \cdot A.$

б) Рассмотрим процедуру поднятия индекса.

$$\left(g_{ij}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \left(g^{ij}\right).$$

$$a^{ij}_{\cdot\cdot} = g^{jm} \cdot a^{i}_{m} = a^{i}_{m} \cdot g^{jm} = a^{i}_{m} \cdot g^{mj}.$$

Вычислим $\alpha^{12}_{\cdot\cdot}$:

$$a^{12}_{\cdot\cdot} = a^{1}_{m} \cdot g^{2m} = a^{1}_{1} \cdot g^{21} + a^{1}_{2} \cdot g^{22} = 7 \cdot (-2) + (-8) \cdot 1 = -22.$$

Вычисляя остальные координаты, получим:

$$\left(a^{ij}_{\cdot\cdot}\right) = \begin{pmatrix} 51 & -22 \\ -25 & 11 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что: $\left(a^{ij}_{\cdot\cdot}\right) = \left(a^{i}_{m} \cdot g^{mj}\right) = A \cdot G^{-1}$.

Пример 8.2
Тензор A типа $(2, 0)$ задан матрицей:

$$A = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Метрический тензор G:

$$G = \left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 21 & -10 & -4 \\ -10 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти:
1) матрицу тензора A с поднятым первым индексом;
2) матрицу тензора A с поднятым вторым индексом;
3) матрицу тензора A с двумя поднятыми индексами.

Решение.

$$G^{-1} = (g^{ij}) = \left(g_{ij}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1) Найдём матрицу тензора с поднятым первым индексом:

$$a_{ij} \mapsto a^{i}_{\cdot j} = g^{ik} a_{kj} = G^{-1} A;$$

$$\left(a^{i}_{j}\right) = G^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 13 \\ 4 & 7 & 17 \\ 11 & 19 & 25 \end{pmatrix}.$$

2) Найдём матрицу с поднятым 2-м индексом:

$$a_{ij} \mapsto a_{i\cdot}^{\cdot j} = g^{kj} a_{ik} = a_{ik} g^{kj} = A \cdot G^{-1};$$

$$\left(a_{i\cdot}^{\cdot j}\right) = A \cdot G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 8 & 9 & 19 \\ 13 & 17 & 25 \end{pmatrix}.$$

3) Найдём матрицу с двумя поднятыми индексами

$$a_{ij} \mapsto a_{\cdot\cdot}^{ij} = g^{ik} g^{mj} a_{km} = g^{ik} a_{km} g^{mj} = G^{-1} A G^{-1};$$

$$\left(a^{ij}\right) = G^{-1} A G^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 13 \\ 4 & 7 & 17 \\ 11 & 19 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 17 & 51 \\ 18 & 9 & 71 \\ 49 & 67 & 87 \end{pmatrix}.$$

Упражнения

8.1. Тензор A типа $(2, 0)$ задан матрицей:

$$\left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Метрический тензор:

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

Найти тензор:

1) $\left(a_{\cdot j}^{i\cdot}\right)$ (поднять первый индекс);
2) $\left(a_{i\cdot}^{\cdot j}\right)$ (поднять второй индекс);
3) $\left(a^{ij}\right)$ (поднять оба индекса).

Сделайте проверку, опустив индексы обратно.

8.2. Тензор A типа $(2, 0)$ задан матрицей:

$$A = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Метрический тензор G:

$$G = \left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 21 & -10 & -4 \\ -10 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти:

1) матрицу тензора A с поднятым первым индексом;
2) матрицу тензора A с поднятым вторым индексом;
3) матрицу тензора A с двумя поднятыми индексами.

Убедиться, что опускание индексов возвращает исходную матрицу.

8.3. Тензор A типа $(2, 1)$ задан матрицей:

$$\left(a_{jk}^{i}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 7 & 1 \end{array}\right).$$

Метрический тензор:

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти тензор:

1) $\left(a_{ijk}\right)$ (опустить первый индекс);
2) $\left(a^{ij}_{\cdot\cdot k}\right)$ (поднять второй индекс);
3) $\left(a^{i\cdot k}_{\cdot j \cdot}\right)$ (поднять третий индекс);
4) $\left(a^{ijk}\right)$ (поднять второй и третий индексы).

8.4. Тензор A типа $(2, 2)$ задан матрицей:

$$\left(a_{kl}^{ij}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Метрический тензор:

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти тензор: 1) $\left(a_{ijkl}\right)$; 2) $\left(a^{ijkl}\right)$.

9. Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Сколько различных тензоров можно образовать при помощи свертывания из тензора типа $(2, 2)$?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B, если тензор A типа $(0, 1)$ имеет матрицу $(a^i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, тензор B типа $(0, 1)$ имеет матрицу $(b^i) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
3. Метрический тензор задан матрицей $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $(a^{ij}_{kl}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$. Найти матрицу тензора (a_{ijkl}).

Вариант 2

1. Тензоры каких типов имеют двумерные матрицы компонент?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B, если тензор A типа $(0, 1)$ имеет матрицу $(a^i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, тензор B типа $(1, 0)$ имеет матрицу $(b_i) = (1 \quad -1)$.
3. Дана матрица тензора $(a_{ijkl}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 13 & 14 \\ 11 & 12 & 15 & 16 \end{array}\right)$. Выписать матрицы тензоров: $(b_{ijkl}) = (a_{kjli})$, $(c_{ijkl}) = (a_{lkji})$.

Вариант 3

1. Тензоры каких типов имеют трехмерные матрицы компонент?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B, если тензор A типа $(1, 0)$ имеет матрицу $(a_i) = (1 \quad 1)$, тензор B типа $(0, 1)$ имеет матрицу $(b^i) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
3. Тензор A типа (3, 0) задан матрицей:

$$(a_{ijk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 9 & 8 & 4 & 6 & 5 \\ 9 & 7 & 8 & 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 8 & 6 & 7 & 1 & 9 & 5 \end{array}\right).$$

   Записать матрицы тензоров: $(b_{ijk}) = (a_{jki})$, $(c_{ijk}) = (a_{ikj})$.

Вариант 4

1. Тензоры каких типов имеют четырехмерные матрицы компонент?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B, если тензор A типа $(1,0)$ имеет матрицу $(a_i) = (1 \quad 1)$, тензор B типа $(1,0)$ имеет матрицу $(b_i) = (1 \quad -1)$.
3. Тензор A типа (3,0) задан матрицей $\left(a_{ijk}\right) = \left(\begin{matrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{matrix}\middle|\begin{matrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{matrix}\right)$.

   Выписать матрицы всех тензоров, получаемых из него транспонированием.

Вариант 5

1. Сколько различных двумерных сечений имеет трехмерная матрица третьего порядка? Какой порядок имеет каждое сечение?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B, если тензор A типа $(2,0)$ имеет матрицу $\left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$, тензор B типа $(1,0)$ имеет матрицу $(b_i) = (4 \quad -2)$.
3. Метрический тензор задан матрицей $(g^{ij}) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$, а тензор A, задан матрицей
$$\left(a^i_{jk}\right) = \left(\begin{matrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0 & 2 & -2\\ -2 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{matrix}\right).$$

   Найти матрицу тензора $\left(a^{ijk}\right)$.

Вариант 6

1. Сколько двумерных сечений имеет четырехмерная матрица второго порядка?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B, если тензор A типа $(1,0)$ имеет матрицу $(a_i) = (4 \quad -2)$, тензор B типа $(2,0)$ имеет матрицу $\left(b_{ij}\right) = \begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$.
3. Найти матрицу тензора, транспонированного из матрицы тензора
$$\left(a^{ij}_k\right) = \left(\begin{matrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{matrix}\middle|\begin{matrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{matrix}\right).$$

Вариант 7

1. Сколько двумерных сечений имеет четырехмерная матрица третьего порядка?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B, если тензор A типа $(2,0)$ имеет матрицу $\left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, тензор B типа $(0,1)$ имеет матрицу $\left(b^i\right) = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$.
3. Найти матрицу тензора, транспонированного из матрицы тензора $\left(a^i_{jk}\right) = \left(\begin{matrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{matrix}\middle|\begin{matrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{matrix}\right)$.

Вариант 8

1. Можно ли транспонировать тензоры $(1,1)$, $(2,0)$?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B, если тензор A типа $(1,1)$ имеет матрицу $\left(a_j^i\right)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, тензор B типа $(0,1)$ имеет матрицу $\left(b^i\right)=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.
3. Метрический тензор задан матрицей $\left(g^{ij}\right)=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&5&-2\\0&-2&5\end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $\left(a_j^i\right)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&1&1\end{pmatrix}$. Найти матрицы тензоров $\left(a_{ij}^{\cdot}\right)$ и $\left(a_{i\cdot}^{\cdot j}\right)$.

Вариант 9

1. Один тензор типа $(0,2)$ получается из другого транспонированием. Как связаны соответствующие билинейные функции?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B, если тензор A типа $(0,1)$ имеет матрицу $\left(a^i\right)=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, тензор B типа $(0,2)$ имеет матрицу $\left(b^{ij}\right)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.
3. Метрический тензор задан матрицей $\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&5\end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $\left(a_j^i\right)=\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$. Найти матрицы метрических тензоров $\left(a_{ij}^{\cdot}\right)$ и $\left(a_{i\cdot}^{\cdot j}\right)$.

Вариант 10

1. Известно, что $\left(a_{kl}^{ij}\right)=\left(g^{il}\right)\left(g^{jm}\right)\left(a_{lmk}\right)$. Выразить $\left(a_{lmk}\right)$ через $\left(a_k^{ij}\right)$.
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B, если тензор A типа $(0,1)$ имеет матрицу $\left(a^i\right)=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, тензор B типа $(1,1)$ имеет матрицу $\left(b_j^i\right)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.
3. Метрический тензор задан матрицей $\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $\left(a_{jk}^i\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}3&4&2&5\\5&7&1&3\end{array}\right)$. Найти тензоры $\left(a_{\cdot j\cdot}^{i\cdot k}\right)$ и $\left(a^{ijk}\right)$.

Вариант 11

1. Какой тензор получается, если у метрического тензора поднять один индекс?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B, если тензор A типа $(3,0)$ имеет матрицу $\left(a_{ijk}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&-1\\1&1&1&-1\end{array}\right)$. Тензор B типа $(1,0)$ имеет матрицу $\left(b_i\right)=(2\ \ 4)$.

3. Метрический тензор задан матрицей $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $(a^i_{jk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right)$. Найти матрицы тензоров (a_{ijk}) и $(a^{ij}_{\cdot\cdot k})$.

Вариант 12

1. Какой тензор получается, если у метрического тензора поднять оба индекса?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B, если тензор A типа $(1,0)$ имеет матрицу $(a_i) = (2\ \ 4)$, а тензор B типа $(3,0)$ имеет матрицу $(a_{ijk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$.
3. Метрический тензор задан матрицей $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $(a^i_{jk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$. Найти тензоры $(a^{i\cdot k}_{\cdot j\cdot})$ и (a^{ijk}).

Вариант 13

1. Какой тензор получится, если у метрического тензора опустить один индекс?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B, если тензор A типа $(2,1)$ имеет матрицу $(a^i_{jk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right)$, а тензор B типа $(1,0)$ имеет матрицу $(b_i) = (-1\ \ \ 1)$.
3. Метрический тензор задан матрицей $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $(a^i_{jk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$. Найти тензоры (a_{ijk}) и $(a^{ijk}_{\cdot\cdot k})$.

Вариант 14

1. Какой тензор получится, если у метрического тензора опустить оба индекса?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B, если тензор A типа $(1,0)$ имеет матрицу $(a_i) = (-1\ \ \ 1)$, а тензор B типа $(2,1)$ имеет матрицу $(b^i_{jk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right)$.
3. Метрический тензор задан матрицей $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $(a^i_{jk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$. Найти тензоры (a_{ijk}) и $(a^{ij}_{\cdot\cdot k})$.

Вариант 15

1. Какой тензор получится, если у символа Кронекера опустить индекс?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B, если тензор A типа $(2,0)$ имеет матрицу $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$, а тензор B типа $(2,0)$ имеет матрицу $(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Метрический тензор задан матрицей $(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей

$$(a^i_{jk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Найти тензоры $(a^{i\cdot k}_{\cdot j \cdot})$ и (a^{ijk}).

Вариант 16

1. Какой тензор получится, если у символа Кронекера поднять индекс?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B, если тензор A типа $(2, 0)$ имеет матрицу $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, а тензор B типа $(2, 0)$ имеет матрицу $(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.
3. Метрический тензор задан матрицей $(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей

$$(a^i_{jk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Найти тензоры (a_{ijk}) и $(a^{ij}_{\cdot\cdot k})$.

Вариант 17

1. Верно ли утверждение: если матрица тензора (a_{ij}) симметрична, то симметричны и матрицы тензоров: а) $(a^{\cdot j}_{i \cdot})$; б) (a^{ij})?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B, если тензор A типа $(1, 1)$ имеет матрицу $(a^i_j) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а тензор B типа $(1, 1)$ имеет матрицу $(b^i_j) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Метрический тензор задан матрицей $(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $(a^i_j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти тензоры (a_{ij}) и $(a^{\cdot j}_{i \cdot})$.

Вариант 18

1. Сколько различных тензоров можно образовать при помощи свёртывания из данного тензора типа $(2,2)$?
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B, если тензор A типа $(0,2)$ имеет матрицу $\left(c^{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, а тензор B типа $(1,1)$ имеет матрицу $\left(b_j^i\right)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.
3. Метрический тензор задан матрицей $\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 5\end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $\left(a_j^i\right)=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицы тензоров $\left(a_{ij}^{\cdot}\right)$ и $\left(a_{i\cdot}^{\cdot j}\right)$.

Вариант 19

1. Можно ли транспонировать тензоры типа $(1,1)$, $(2,0)$?
2. Дано $A=X\otimes Y$, $X_e=(1\quad 0\quad 0)$, $Y_e=(0\quad 1\quad 0)$, $e'=eS$,

$S=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 1\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$. Найти матрицу тензора A в базисе $\{e\}$ и в базисе $\{e'\}$.

3. Метрический тензор задан матрицей $\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 5 & 13\end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $\left(a_{kl}^{ij}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ \hline 1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{array}\right)$. Найти матрицы тензоров $\left(a^{ijkl}\right)$.

Вариант 20

1. Известно, что $a_{\ \ k}^{ij}=g^{il}g^{jm}a_{lmk}$ выразить a_{lmk} через a_k^{ij}.
2. Дана матрица тензора $\left(a_k^{ij}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 5 & 6\\ 3 & 4 & 7 & 8\end{array}\right)$. Найти матрицу транспонированного тензора.
3. Метрический тензор задан матрицей $\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $\left(a_{kl}^{ij}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 3 & 4\\ -4 & -3 & -2 & -1\\ \hline -4 & -3 & -2 & -1\\ 5 & 6 & 7 & 8\end{array}\right)$. Найти матрицу тензора $\left(a_{ijkl}\right)$.

Вариант 21

1. Тензор $a_{\cdot}^{i}$ определяет индексное преобразование в евклидовом пространстве. Найти ему сопряженное.
2. Найти тип и матрицу тензорного произведения тензоров A и B, если тензор A типа $(3,0)$ имеет матрицу $\left(a_{ijk}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{array}\right)$, а тензор B типа $(1,0)$ имеет матрицу $\left(b_i\right)=(2\quad 4)$.

3. Метрический тензор задан матрицей $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, а тензор A задан матрицей $\left(a^{ij}_{kl}\right) = \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ \hline -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right)$. Найти тензор $\left(a^{ijkl}\right)$.

Ответы

1.1. 1) тип тензора: (2,0); ковариантная валентность – 2; контравариантная валентность – 0; полная валентность – 2;
2) тип тензора: (3,0); ковариантная валентность – 3; контравариантная валентность – 0; полная валентность – 3;
3) тип тензора: (0,2); ковариантная валентность – 0; контравариантная валентность – 2; полная валентность – 2;
4) тип тензора: (1,1); ковариантная валентность – 1; контравариантная валентность – 1; полная валентность – 2;
5) тип тензора: (0,1); ковариантная валентность – 0; контравариантная валентность – 1; полная валентность – 1.

1.2. 1) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}$; 3) $\left(\begin{array}{cc|cc}4 & 3 & 7 & 6\\ 6 & 5 & 9 & 8\end{array}\right)$; 4) $\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 10 & 9 & 8\\ 6 & 5 & 4 & 9 & 8 & 7 & 12 & 11 & 10\\ 8 & 7 & 6 & 11 & 10 & 9 & 14 & 13 & 12\end{array}\right)$;

5) $\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}4 & 6 & 8 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6\\ 7 & 9 & 11 & 6 & 8 & 10 & 5 & 7 & 9\\ 10 & 12 & 14 & 9 & 11 & 13 & 8 & 10 & 12\end{array}\right)$; 6) $\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 2 & 5 & 4\\ 5 & 4 & 7 & 6\\ \hline 6 & 5 & 8 & 7\\ 8 & 7 & 10 & 9\end{array}\right)$; 7) $\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 6 & 5 & 8\\ 5 & 8 & 7 & 10\\ \hline 2 & 5 & 4 & 7\\ 4 & 7 & 6 & 9\end{array}\right)$.

1.3. 1) 9; $\delta_1^1 = \delta_2^2 = \delta_3^3 = 1$;
2) 256; $\mathcal{E}_{1234} = \mathcal{E}_{2314} = \mathcal{E}_{3124} = \mathcal{E}_{2431} = \mathcal{E}_{4132} = \mathcal{E}_{3241} = \mathcal{E}_{4213} = \mathcal{E}_{1342} = \mathcal{E}_{1423} = \mathcal{E}_{2143} =$
$= \mathcal{E}_{3412} = \mathcal{E}_{4321} = 1$;
$\mathcal{E}_{2134} = \mathcal{E}_{3214} = \mathcal{E}_{4231} = \mathcal{E}_{1324} = \mathcal{E}_{1432} = \mathcal{E}_{1243} = \mathcal{E}_{2341} = \mathcal{E}_{2413} = \mathcal{E}_{3142} = \mathcal{E}_{3421} = \mathcal{E}_{4132} =$
$= \mathcal{E}_{4312} = -1$.

2.1. 1) невозможно; 2) невозможно; 3) $\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 7\end{pmatrix}$; 4) невозможно; 5) $\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 6\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}-6\\ 3\\ -12\end{pmatrix}$;

7) тензор типа (1, 1); $\begin{pmatrix}2 & 0 & 6\\ -1 & 0 & -3\\ 4 & 0 & 12\end{pmatrix}$; 8) тензор типа (1, 1); $\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ 6 & -3 & 12\end{pmatrix}$;

9) тензор типа (0, 2); $\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ 6 & -3 & 12\end{pmatrix}$; 10) тензор типа (0, 2); $\begin{pmatrix}2 & 0 & 6\\ -1 & 0 & -3\\ 4 & 0 & 12\end{pmatrix}$;

11) тензор типа (1, 2); $\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}2 & 4 & 0 & -4 & 2 & 2 & 8 & 6 & -4\\ -1 & -2 & 0 & 2 & -1 & -1 & -4 & -3 & 2\\ 4 & 8 & 0 & -8 & 4 & 4 & 16 & 12 & -8\end{array}\right)$;

12) тензор типа (1, 2); $\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}2 & 4 & 0 & -1 & -2 & 0 & 4 & 8 & 0\\ -4 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -8 & 4 & 4\\ 8 & 6 & -4 & -4 & -3 & 2 & 16 & 12 & -8\end{array}\right)$.

2.2. 1) невозможно; 2) $\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & 0\end{pmatrix}$; 3) невозможно; 4) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}3 & -3\\ -3 & -3\end{pmatrix}$;

6) тензор типа (3, 1); $\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 0 & 0\\ 2 & 6 & 1 & 3\\ \hline 2 & -1 & 0 & 0\\ 4 & -2 & 2 & -1\end{array}\right)$; 7) тензор типа (3, 1); $\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 4 & 2\\ \hline 3 & 0 & -1 & 0\\ 6 & 3 & -2 & -1\end{array}\right)$;

8) тензор типа (4, 0); $\left(\begin{array}{rr|rr} -1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$; 9) тензор типа (4, 0); $\left(\begin{array}{rr|rr} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline -3 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right)$.

2.3. $\left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 0 & -4 & 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ -6 & -2 & 0 & 6 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & -8 & -4 & 4 & 8 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 6 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 12 & 6 & 4 & 8 & 4 \end{array}\right)$.

3.1. 1) 5; 2) 7.

3.2. $\left(c_{ij}^{i}\right) = (8 \quad 4 \quad -17)$; $\left(c_{ij}^{j}\right) = (7 \quad 9 \quad -14)$;

3.3. $C = A \otimes B = \left(\begin{array}{rr|rr} 2 & 0 & 6 & 0 \\ -5 & -4 & -15 & -12 \\ \hline -8 & 0 & -4 & 0 \\ 20 & 16 & 10 & 8 \end{array}\right)$;

$\left(d_l^j\right) = \left(c_{il}^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 22 & 16 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$; $\left(f_k^i\right) = \left(c_{kj}^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -17 & 28 \end{pmatrix}$;

$\left(s_k^j\right) = \left(c_{ki}^{ij}\right) = \begin{pmatrix} -13 & 2 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}$; $\left(t_l^i\right) = \left(c_{jl}^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 11 & -7 \end{pmatrix}$; $m = c_{ij}^{ij} = 30$; $r = c_{ji}^{ij} = -5$.

3.4. 1) 6; 2) 12; 3) 4; 4) не совпадают.

4.1. 1) $\begin{pmatrix} 11 \\ -4 \end{pmatrix}$; 2) $(2 \quad 3)$; 3) $\begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 11 & 24 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 10 & 25 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$.

4.2. 1) $\begin{pmatrix} 16 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}$; 2) $(1 \quad -1 \quad 0)$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -6 & 8 & 5 \\ -1 & 17 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -35 & -16 & 18 \\ -19 & -13 & 15 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;

5) $\left(a_j^i\right) = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 86 \\ -1 & 20 & 71 \\ -14 & 3 & -31 \end{pmatrix}$.

4.4. -9.

4.5. -44.

5.1. 1) $\left(a_{jik}\right) = \left(\begin{array}{rr|rr} 0 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \end{array}\right)$; $\left(a_{kji}\right) = \left(\begin{array}{rr|rr} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \end{array}\right)$; $\left(a_{ikj}\right) = \left(\begin{array}{rr|rr} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \end{array}\right)$;

2) $\left(\begin{array}{rr|rr} 0 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \end{array}\right)$; 3) $\left(\begin{array}{rr|rr} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}\right)$.

5.2. 1) $\left(\alpha^{jik}\right) = \left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 1 & 4 & 7 & 1 & 4 & 7 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 & 2 & 5 & 8 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 3 & 6 & 9 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right)$; 2) $\left(\alpha^{ikj}\right) = \left(\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 9 & 9 & 9 \end{array}\right)$;

3) $\left(a^{kji}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}1&4&7&2&5&8&3&6&9\\1&4&7&2&5&8&3&6&9\\1&4&7&2&5&8&3&6&9\end{array}\right)$.

5.3. 1) $\left(a_{jikl}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&9&11\\2&4&10&12\\\hline 5&7&13&15\\6&8&14&16\end{array}\right)$; $\left(a_{kjil}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&9&10\\5&6&13&14\\\hline 3&4&11&12\\7&8&15&16\end{array}\right)$; $\left(a_{ljki}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&3&4\\9&10&11&12\\\hline 5&6&7&8\\13&14&15&16\end{array}\right)$;

$\left(a_{ikjl}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&5&9&13\\3&7&11&15\\\hline 2&6&10&14\\4&8&12&16\end{array}\right)$; $\left(a_{ilkj}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&9&2&10\\3&11&4&12\\\hline 5&6&6&14\\7&8&8&16\end{array}\right)$; $\left(a_{ijlk}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&5&6\\3&4&7&8\\\hline 9&10&13&14\\11&12&15&16\end{array}\right)$;

2) $\left(b^{ji}_{kl}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&9&11\\2&4&10&12\\\hline 5&7&13&15\\6&8&14&16\end{array}\right)$; $\left(b^{ij}_{lk}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&5&6\\3&4&7&8\\\hline 9&10&13&14\\11&12&15&16\end{array}\right)$.

6.1. 1) $\begin{pmatrix}5&4\\4&3\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0&3\\-3&0\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1&-3\\-3&2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1&2&2\\2&3&\frac{5}{2}\\2&\frac{5}{2}&1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&\frac{3}{2}\\-1&-\frac{3}{2}&0\end{pmatrix}$.

6.2. 1) а) $a_{(ij)k}=\left(\begin{array}{cc|cc}3&\frac{9}{2}&2&3\\\frac{9}{2}&7&3&3\end{array}\right)$; б) $a_{i(jk)}=\left(\begin{array}{cc|cc}3&3&3&5\\5&4&4&3\end{array}\right)$; в) $a_{(i|j|k)}=\left(\begin{array}{cc|cc}3&4&\frac{7}{2}&6\\\frac{7}{2}&6&1&3\end{array}\right)$;

г) $a_{(ijk)}=\left(\begin{array}{cc|cc}3&\frac{11}{3}&\frac{11}{3}&\frac{13}{3}\\\frac{11}{3}&\frac{13}{3}&\frac{13}{3}&3\end{array}\right)$; д) $a_{[ij]k}=\left(\begin{array}{cc|cc}0&-\frac{1}{2}&0&2\\\frac{1}{2}&0&-2&0\end{array}\right)$; е) $a_{i[jk]}=\left(\begin{array}{cc|cc}0&1&-1&0\\0&3&-3&0\end{array}\right)$;

ж) $a_{[i|j|k]}=\left(\begin{array}{cc|cc}0&0&-\frac{3}{2}&-1\\\frac{3}{2}&1&0&0\end{array}\right)$; з) $a_{[ijk]}=\left(\begin{array}{cc|cc}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$;

2) а) $a_{(ij)k}=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}4&7&7&6&6&6&8&5&5\\7&4&7&6&6&6&5&8&5\\7&7&4&6&6&6&5&5&8\end{array}\right)$; б) $a_{i(jk)}=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}4&6&8&6&8&4&8&4&6\\8&4&6&4&6&8&6&8&4\\6&8&4&8&4&6&4&6&8\end{array}\right)$;

в) $a_{(i|j|k)}=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}4&6&8&7&6&5&7&6&5\\7&6&5&4&6&8&7&6&5\\7&6&5&7&6&5&4&6&8\end{array}\right)$; г) $a_{(ijk)}=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}4&\frac{20}{3}&\frac{22}{3}&\frac{20}{3}&\frac{16}{3}&6&\frac{22}{3}&6&\frac{14}{3}\\\frac{20}{3}&\frac{26}{3}&6&\frac{16}{3}&6&\frac{20}{3}&6&\frac{20}{3}&\frac{16}{3}\\\frac{22}{3}&6&\frac{14}{3}&6&\frac{20}{3}&\frac{16}{3}&\frac{14}{3}&\frac{16}{3}&8\end{array}\right)$;

д) $a_{[ij]k}=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}0&-1&1&0&2&-2&0&-1&1\\1&0&-1&-2&0&2&1&0&-1\\-1&1&0&2&-2&0&-1&1&0\end{array}\right)$;

е) $a_{i[jk]} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$;

ж) $a_{[i|j|k]} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$;

з) $a_{[ijk]} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

6.3. а) $a^{(ij)}_{kl} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 4 & 7 \\ 5 & 8 & 7 & 0 \\ \hline 6 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$; б) $a^{ij}_{(kl)} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 7 & 7 \\ 6 & 8 & 4 & 1 \\ \hline 7 & 7 & 8 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$; в) $a^{(ij)}_{(kl)} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 7 & \frac{11}{2} \\ 5 & 8 & \frac{11}{2} & 1 \\ \hline 7 & \frac{11}{2} & 8 & 1 \\ \frac{11}{2} & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$;

г) $a^{[ij]}_{kl} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$; д) $a^{ij}_{[kl]} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$; е) $a^{[ij]}_{[kl]} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ \hline 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

6.4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & \frac{5}{2} \\ 2 & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

7.1. 1) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7.2. 1) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$; 2) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.

7.3. $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$.

8.1. 1) $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 19 & -7 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -56 & 22 \\ 23 & -9 \end{pmatrix}$.

8.2. 1) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 13 \\ 4 & 7 & 17 \\ 11 & 19 & 25 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 8 & 9 & 19 \\ 13 & 17 & 25 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 18 & 17 & 51 \\ 18 & 9 & 71 \\ 49 & 67 & 87 \end{pmatrix}$.

8.3. 1) $(\alpha_{ijk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 11 & 18 & 39 & 17 \\ 5 & 8 & 17 & 7 \end{array}\right)$; 2) $(\alpha^{ij}_{\cdot\cdot k}) = \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 8 & -1 & 5 \\ -5 & 14 & 5 & -9 \end{array}\right)$;

3) $(\alpha^{i\cdot k}_{\cdot j \cdot}) = \left(\begin{array}{cc|cc} -9 & -4 & 23 & 11 \\ -11 & 2 & 29 & -3 \end{array}\right)$, здесь i – номер строки, j – номер столбца, k – номер слоя (в других ответах – согласно договоренности, принятой в параграфе 1 данного пособия);

4) $\left(\alpha^{ijk}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & 1 & 9 \\ -15 & 32 & 35 & -73 \end{array}\right)$.

8.4. 1) $\left(\begin{array}{cc|cc} 39 & 17 & 39 & 17 \\ 16 & 7 & 16 & 7 \\ \hline 117 & 51 & 39 & 17 \\ 48 & 21 & 16 & 7 \end{array}\right)$; 2) $\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \\ \hline 7 & 7 & -11 & -11 \\ 0 & 7 & 0 & -11 \end{array}\right)$.

Ответы на задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. 6.
2. Тип тензора – $(0,2)$; $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
3. $\left(\begin{array}{cc|cc} 39 & 101 & 39 & 101 \\ 100 & 259 & 100 & 259 \\ \hline 39 & 101 & 78 & 202 \\ 100 & 259 & 200 & 518 \end{array}\right)$.

Вариант 2

1. $(2,0), (1,1), (0,2)$
2. Тип тензора – $(1,1)$; $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
3. $\left(b_{ijkl}\right) = \left(a_{kjli}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 13 & 14 \\ \hline 3 & 4 & 11 & 12 \\ 7 & 8 & 15 & 16 \end{array}\right)$, $\left(c_{ijkl}\right) = \left(a_{lkji}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 9 & 3 & 11 \\ 5 & 13 & 7 & 15 \\ \hline 2 & 10 & 4 & 12 \\ 6 & 14 & 8 & 16 \end{array}\right)$.

Вариант 3

1. $(3,0), (2,1), (1,2), (0,3)$.
2. Тип тензора – $(1,1)$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
3. $\left(b_{ijk}\right) = \left(a_{jki}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 9 & 4 & 2 & 7 & 2 & 3 & 8 & 3 \\ 7 & 3 & 8 & 9 & 1 & 6 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 1 & 6 & 4 & 9 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right)$.

   $\left(c_{ijk}\right) = \left(a_{ikj}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 7 & 4 & 2 & 9 & 6 & 3 & 8 & 5 \\ 9 & 3 & 6 & 7 & 1 & 4 & 8 & 2 & 5 \\ 4 & 8 & 1 & 2 & 6 & 9 & 3 & 7 & 5 \end{array}\right)$.

Вариант 4

1. $(4,0), (3,1), (2,2), (1,3), (0,4)$.
2. Тип тензора – $(2,0)$; $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
3. $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 6 & 8 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \end{array}\right)$.

Вариант 5

1. 9 двумерных сечений третьего порядка.
2. Тип тензора – $(3,0)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} 12 & 20 & -6 & -10 \\ 20 & 36 & -10 & -18 \end{array}\right)$.
3. $\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 6 & 21 & -21 & 20 & 70 & -70 & -18 & -63 & 63 \\ -3 & -12 & 15 & -10 & -40 & 50 & 9 & 36 & -45 \\ -3 & -9 & 6 & -10 & -30 & 20 & 9 & 27 & -18 \end{array}\right)$.

Вариант 6

1. $4! = 24$
2. Тип тензора – $(3,0)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} 12 & 20 & 20 & 36 \\ -6 & -10 & -10 & -18 \end{array}\right)$.
3. $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array}\right)$.

Вариант 7

1. $4! = 24$.
2. Тип тензора – $(2,1)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -2 & -4 \end{array}\right)$.
3. $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \end{array}\right)$.

Вариант 8

1. $(1,1)$ – нет, $(2,0)$ – да.
2. Тип тензора – $(1,2)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -4 & 4 \end{array}\right)$.
3. $(a_{ij}^{\cdot}) = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 11 \\ 10 & 17 & 24 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $(a_{i\cdot}^{\cdot j}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -16 & 33 & 18 \\ 43 & -21 & -9 \end{pmatrix}$.

Вариант 9

1. $f(x,y) = g(y,x)$.
2. Тип тензора – $(0,3)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$.
3. $(a_{ij}^{\cdot}) = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -23 & 1 \end{pmatrix}$, $(a_{i\cdot}^{\cdot j}) = \begin{pmatrix} 42 & 16 \\ -113 & -45 \end{pmatrix}$.

Вариант 10

1. $(a_{lmk}) = (g_{l_i})(g_{m_j})(a^{ij}_{..k})$.
2. Тип тензора – $(1,2)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$.
3. $(a^{i\cdot k}_{\cdot j\cdot}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 19 & 30 & 8 & 13 \\ 17 & 41 & 11 & 17 \end{array}\right)$, $(a^{ijk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 155 & 68 & 66 & 29 \\ 167 & 75 & 89 & 39 \end{array}\right)$.

Вариант 11

1. δ_j^i.
2. Тип тензора – $(4, 0)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ \hline 2 & -2 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{array}\right)$.
3. $\left(a_{ijk}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} -7 & -10 & 0 & -1 \\ 19 & 27 & 1 & 5 \end{array}\right)$, $\left(a^{ij}_{\cdot\cdot}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} -23 & 10 & 20 & 9 \\ 39 & 17 & 11 & 5 \end{array}\right)$.

Вариант 12

1. $\left(g^{ij}\right)$.
2. Тип тензора – $(4, 0)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 & -4 \end{array}\right)$.
3. $\left(a^{i\cdot k}_{\cdot j\cdot}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right)$, $\left(a^{ijk}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 41 & 17 & 17 & 7 \\ 41 & 17 & 17 & 7 \end{array}\right)$.

Вариант 13

1. $\left(\delta_j^i\right)$.
2. Тип тензора – $(3, 1)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & -4 & 3 & 4 \\ -5 & -7 & 5 & 7 \\ \hline -2 & -5 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$.
3. $\left(a^{ij}_{\cdot\cdot k}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right)$, $\left(a_{ijk}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$.

Вариант 14

1. $\left(g_{ij}\right)$.
2. Тип тензора – $(3, 1)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 3 & -2 & 2 \\ -5 & 5 & -1 & 1 \\ \hline -4 & 4 & -5 & 5 \\ -7 & 7 & -3 & 3 \end{array}\right)$.
3. $\left(a_{ijk}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$, $\left(a^{ij}_{\cdot\cdot k}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right)$.

Вариант 15

1. $\left(g_{ij}\right)$.
2. Тип тензора – $(2, 2)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 6 & 10 \\ 5 & 9 & 10 & 18 \\ \hline 9 & 15 & 12 & 20 \\ 15 & 27 & 20 & 36 \end{array}\right)$.
3. $\left(a^{i\cdot k}_{\cdot j\cdot}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 3 & -3 & 0 & 10 & -10 & 0 & -9 & 9 \\ -3 & 0 & 3 & -10 & 0 & 10 & 9 & 0 & -9 \\ 3 & -3 & 0 & 10 & -10 & 0 & -9 & 9 & 0 \end{array}\right)$,

$$(a^{ijk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 6 & 21 & -21 & 20 & 70 & -70 & -18 & -63 & 63 \\ -3 & -12 & 15 & -10 & -40 & 50 & 9 & 36 & -45 \\ -3 & -9 & 6 & -10 & -30 & 20 & 9 & 27 & -18 \end{array}\right).$$

Вариант 16

1. (g^{ij}).
2. Тип тензора – $(4,0)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & 5 & 10 \\ 9 & 12 & 15 & 20 \\ \hline 5 & 10 & 9 & 18 \\ 15 & 20 & 27 & 36 \end{array}\right)$.
3. $(a_{ijk}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -6 & -25 & 31 & 12 & 50 & -62 & -6 & -25 & 31 \\ 3 & 12 & -15 & -6 & 24 & 30 & 3 & 12 & -15 \\ 1 & 5 & -6 & -2 & 10 & 12 & 1 & 5 & -6 \end{array}\right)$,

   $(a^{ij}_{\cdot\cdot k}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -2 & -7 & 7 & 4 & 14 & -4 & -2 & -7 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & -2 & 8 & 10 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & -6 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$.

Вариант 17

1. а) нет, б) да.
2. Тип тензора – $(2,2)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$.
3. $(a^{\cdot}_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 11 \\ 10 & 17 & 24 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $(a^{\cdot j}_{i\cdot}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -16 & 33 & 18 \\ 43 & -21 & -9 \end{pmatrix}$.

Вариант 18

1. 6.
2. Тип тензора – $(1,3)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$.
3. $(a^{\cdot}_{ij}) = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -23 & 1 \end{pmatrix}$, $(a^{\cdot j}_{i\cdot}) = \begin{pmatrix} 42 & 16 \\ -113 & -45 \end{pmatrix}$.

Вариант 19

1. $(1,1)$ – нет, $(2,0)$ – да.
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -210 & 105 & 42 \\ 100 & -50 & -20 \\ 40 & -20 & -8 \end{pmatrix}$.
3. $\left(\begin{array}{cc|cc} 39 & 101 & 39 & 101 \\ 100 & 259 & 100 & 259 \\ \hline 39 & 101 & 78 & 202 \\ 100 & 259 & 200 & 518 \end{array}\right)$.

Вариант 20

1. $(a_{lmk}) = (g_{l_i})(g_{m_j})(a_k^{ij})$.

2. $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array}\right)$.

3. $(a_{ijkl}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 7 & 4 & 7 \\ 1 & 9 & 1 & 3 \\ \hline 3 & 7 & 12 & 19 \\ 15 & 24 & 27 & 42 \end{array}\right)$.

Вариант 21

1. $(g^{lj})(g_{ik})(a_j^i)$.
2. Тип тензора – $(4, 0)$; $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ \hline 2 & -2 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{array}\right)$.

3. $(a^{ijkl}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 5 & 2 & 2 \\ -15 & 18 & 2 & 2 \\ \hline -5 & -5 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Список литературы

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учеб. для вузов. – М.: Физматлит, 2009. – 312 с.
2. Беклемишев Д. В. Решение задач из курса аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Физматлит, 2014. – 192 с.
3. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учебн. пособие / под ред. Д. В. Беклемишева. – М.: Физматлит, 2012. – 496 с.
4. Винберг Э. Б. Курс алгебры. – М.: МЦНМО, 2013. – 592 с.
5. Гайфуллин А. А., Пенской А. В., Смирнов С. В. Задачи по линейной алгебре и геометрии. – М.: МЦНМО, 2014. – 152 с.
6. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра: учеб. для вузов. – М.: Физматлит, 2005. – 280 с.
7. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Ч. II. Линейная алгебра. – М.: МЦНМО, 2023. – 368 с.

Блейхер Оксана Владимировна
Исаева Татьяна Тимофеевна
Рванова Алла Сергеевна
Савченко Татьяна Владимировна

Тензоры. Задачи и упражнения

Учебное пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А