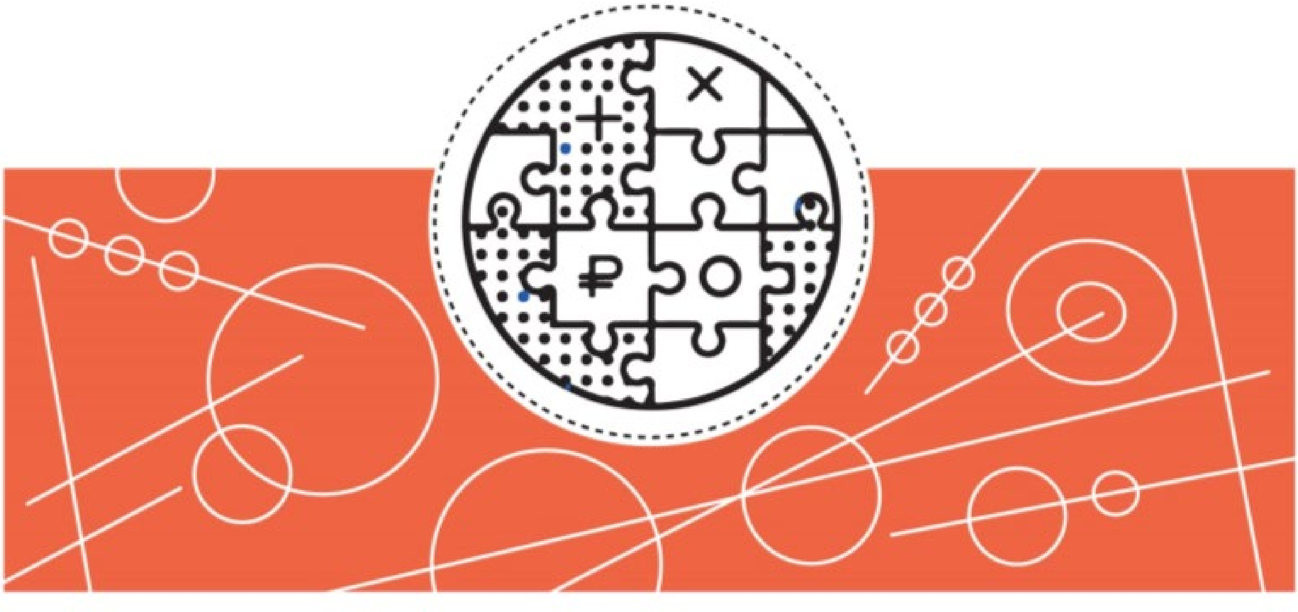
ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ.
ЧАСТЬ 1



Санкт-Петербург
2026

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ. ЧАСТЬ I

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УНИВЕРСИТЕТЕ ИТМО
по направлению подготовки 09.03.02 Информационные системы и технологии в качестве Учебно-методического пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования бакалавриата

Материалы разработаны для реализации образовательной программы топ-уровня в области информационных технологий «Разработка программного обеспечения / Software Engineering»

ИТМО

Санкт-Петербург
2026

Основы линейной алгебры. Часть 1 / Бакеева Л.В., Брылевская Л.И., Гончар Л.И. [и др.] – СПб: Университет ИТМО, 2026. 98 с.

Рецензент(ы):
Попков Роман Андреевич, кандидат физико-математических наук, доцент (квалификационная категория «ординарный доцент») факультета технологий искусственного интеллекта, Университета ИТМО.

Учебно-методическое пособие адресовано студентам бакалавриата по направлению подготовки 09.03.02. Содержит теоретические сведения, примеры решения задач основных типов по темам «Матрицы и определители», «Системы линейных алгебраических уравнений», «Линейные пространства». Приведены задачи и упражнения для самостоятельного решения, которые могут быть использованы как для аудиторной работы, так и для индивидуальных заданий. В пособие включены как типовые, так и содержательные задачи, решение которых позволит студенту углубить понимание курса и расширить свой математический кругозор.

ИТМО (Санкт-Петербург) — национальный исследовательский университет, научно-образовательная корпорация. Альма-матер победителей международных соревнований по программированию. Приоритетные направления: IT и искусственный интеллект, фотоника, робототехника, квантовые коммуникации, трансляционная медицина, Life Sciences, Art&Science, Science Communication. Лидер федеральной программы «Приоритет-2030», в рамках которой реализовывается программа «Университет открытого кода». С 2022 ИТМО работает в рамках новой модели развития — научнообразовательной корпорации. В ее основе академическая свобода, поддержка начинаний студентов и сотрудников, распределенная система управления, приверженность открытому коду, бизнес-подходы к организации работы. Образование в университете основано на выборе индивидуальной траектории для каждого студента. ИТМО пять лет подряд — в сотне лучших в области Automation & Control (кибернетика) Шанхайского рейтинга. По версии SuperJob занимает первое место в Петербурге и второе в России по уровню зарплат выпускников в сфере IT. Университет в топе международных рейтингов среди российских вузов. Входит в топ5 российских университетов по качеству приема на бюджетные места. Рекордсмен по поступлению олимпиадников в Петербурге. С 2019 года ИТМО самостоятельно присуждает ученые степени кандидата и доктора наук.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие охватывает ключевые разделы модуля 1 дисциплины «Линейная алгебра»: «Матрицы и определители», «Системы линейных алгебраических уравнений» и «Линейные пространства» и имеет своей целью способствовать формированию у обучающихся компетенций:

ОПК-1 – Способен применять математические, естественнонаучные и общепрофессиональные знания для понимания окружающего мира и для решения задач профессиональной деятельности:

ОПК-1.1: Планирует самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач;

ОПК-1.2: Обосновывает и использует положения, законы и методы естественных наук и математики при решении задач профессиональной деятельности,

предусмотренных рабочей программой дисциплины в соответствии с требованиями СУОС Университета ИТМО по направлению подготовки 09.03.02 Информационные системы и технологии с учетом специфики направленности подготовки – «Разработка программного обеспечения».

В пособии представлены теоретические сведения, разобранные примеры типовых и содержательных задач, а также подборка заданий для самостоятельной работы. Такой подход позволяет организовать как аудиторную, так и индивидуальную работу студентов, способствуя углубленному пониманию дисциплины и расширению математического кругозора.

Вклад в формирование компетенции ОПК-1 – в процессе изучения дисциплины «Линейная алгебра» с использованием данного пособия обучающийся сможет:

Знать: основные алгебраические структуры; числовые множества; основные понятие о матрицах, виды матриц; определители, их свойства и способы вычисления; понятие о ранге матрицы; методы решения систем линейных алгебраических уравнений; определение линейного пространства, понятия о размерности и базисе; основные понятия векторной алгебры и правила выполнения линейных операций над векторами.

Уметь: выполнять действия над матрицами; находить ранг матрицы; решать системы линейных алгебраических уравнений; использовать скалярное, векторное, смешанное произведения векторов для решения прикладных задач; оценивать результаты решения задач.

Владеть: навыками вычисления определителей; навыками построения систем линейных алгебраических уравнений для решения прикладных задач; методами векторной алгебры построения математических моделей прикладных задач и содержательной интерпретацией полученных результатов; навыками анализа, исследования и решения прикладных задач в профессиональной области.

Рекомендации по работе с пособием.

Для преподавателя. В пособии выделены задачи разного уровня: *базовые* – на прямое применение определений и алгоритмов – обязательный минимум; с *параметрами* (на анализ), *прикладные* (на моделирование) и *теоретические* (на доказательство) – нацелены на углубленное изучение – можно ввести «весовые коэффициенты» на решение этих задач.

Исторические вставки можно использовать для мотивации и гуманитаризации курса: делать «исторические паузы» на занятиях или предложить студентам подготовить небольшие доклады, что будет способствовать развитию навыков научной коммуникации.

Задачи на доказательство также могут быть использованы как подготовка к научной работе. Такие задачи можно давать как *бонусные* или как *задания для мини-групп* (3-4 человека готовят письменное решение). При проверке (или публичной защите) оценивать результат, логику рассуждения и оформление.

Для студента. В пособии много строгих определений. Не заучивать определения, а для каждого приводить свой пример и свой контрпример (из того, что уже изучено). Например, «Множество квадратных матриц 2×2 – это кольцо? Почему?»

В пособии к большинству задач даны ответы: попытаться решить задачу *самостоятельно*; после решения – сверить ответ; если ответ не совпал, *не переписывать правильный*, а найти ошибку в решении. Если ошибка не найдена – обратиться к преподавателю или обсудить решение сокурсниками. *Важно*: ответы в пособии иногда даны в свернутом виде. Это сделано намеренно, чтобы научиться проверять решение задачи косвенными способами (например, умножив исходную матрицу на найденную обратную и проверив, получится ли единичная).

Задачи с параметром не просто решить, а проанализировать, как меняется ответ в зависимости от параметра. Прикладные задачи – это модели реальных ситуаций. Решая такую задачу, обязательно формулировать содержательный ответ (не только числа, но и их интерпретацию)

Пособие можно использовать для повторения при подготовке к экзамену: просмотреть определения и формулировки теорем; решать задачи из «Задач для самостоятельного решения» с ответами, выбирая те, которые кажутся наиболее сложными, обратить особое внимание на прикладные задачи на составление математической модели.

Хорошо построенными обозначениями нужно стремиться выразить математическую суть задачи, и не в коем случае не затемнять её и не отвлекать от неё. Сделав такое вступление, мы теперь выскажем очень простой силлогизм: матрицы являются наиболее важными преобразованиями – линейными преобразованиями: преобразования образуют сердцевину математики ...

Р. Беллман

«Введение в теорию матриц»

1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Матрицы, впервые появившиеся в середине 19-го века в работах английских математиков У. Гамильтона (1805-1865) и А. Кэли (1821-1895), в настоящее время весьма широко используются не только при моделировании и исследовании процессов и систем, но и в задачах корреляционного и регрессионного анализа, задачах классификации, снижения размерности и визуализации данных. Использование математического аппарата матричной алгебры значительно упрощает решение сложных систем уравнений, в том числе и с использованием компьютерных технологий.

Матрицы как структуры данных представляют собой мощный инструмент для систематизации и анализа информации. Их основная особенность заключается в двумерной организации данных, где информация распределяется по двум осям: вертикальной (Y) и горизонтальной (X). Такая структура позволяет не только компактно хранить данные, но и обеспечивает удобный доступ к ним, а также упрощает их обработку и интерпретацию.

Такая организация позволяет:

1. Упорядочить данные: каждая строка и столбец могут представлять определённую категорию или характеристику данных.

2. Сгруппировать информацию: данные, относящиеся к одной категории, располагаются в одной строке или столбце, что облегчает их анализ.

3. Обеспечить наглядность: двумерная структура позволяет визуализировать данные, что особенно полезно для выявления закономерностей [21].

Преимущества использования матриц для представления данных:

1. Компактность: матрицы позволяют хранить большие объёмы данных в структурированном виде, что экономит память и упрощает доступ.

2. Универсальность: матрицы могут содержать данные любого типа: числовые, текстовые, логические и т.д.

3. Гибкость: матрицы могут быть легко преобразованы для решения различных задач, таких как фильтрация, сортировка или агрегация данных.

4. Масштабируемость: матрицы могут быть расширены за счёт добавления новых строк или столбцов, что делает их пригодными для работы с растущими объёмами данных [21].

С точки зрения теории информации, матрицы обеспечивают оптимальное кодирование данных за счёт их двумерной структуры. Это позволяет:

1. Минимизировать избыточность: данные организуются таким образом, чтобы избежать дублирования информации.

2. Упростить поиск: доступ к данным осуществляется за счёт индексации строк и столбцов, что делает поиск информации быстрым и эффективным.

3. Обеспечить интерпретируемость: двумерная структура позволяет легко интерпретировать данные, выявляя взаимосвязи между различными характеристиками.

Для изложения материала будем использовать некоторые понятия, подробное изучение которых выходит за рамки данного пособия. Приведем здесь их определения.

Алгебраической структурой называется упорядоченная пара (M, Ω), где M – непустое множество, а Ω – набор операций и отношений, определенных на M, удовлетворяющих заданной системе аксиом. Например, $(\boldsymbol{N}, +)$ – множество натуральных чисел с операцией сложения.

Группой называется множество G с бинарной операцией $\circ : G \times G \to G$, которой выполняются аксиомы:

ассоциативность: $\forall a,b,c \in G : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;

нейтральный элемент: $\exists e \in G : \forall a \in G, a \circ e = e \circ a = a$;

обратный элемент: $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Если дополнительно выполняется коммутативность $(a \circ b = b \circ a)$, группа называется *абелевой*. Например, $(\boldsymbol{Z}, +)$ – аддитивная группа целых чисел (абелева) с нейтральным элементом 0 и обратным элементом $-a$.

Кольцом называется множество K с двумя бинарными операциями $(+, \cdot)$, такими что $(K, +)$ – абелева группа с нейтральным элементом 0, для которой выполняются аксиомы:

ассоциативность умножения: $\forall a,b,c \in K : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

дистрибутивность: $\forall a,b,c \in K : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (правая),

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (левая).

Например, $(\boldsymbol{Z},+,\cdot)$ – кольцо целых чисел. Умножение есть, но обратного элемента по умножению (кроме ± 1) нет.

Полем называется множество F с двумя бинарными операциями $(+,\cdot)$, такими что $(F,+)$ – абелева группа с нейтральным элементом 0, а $(F \setminus \{0\},\cdot)$ – абелева группа с нейтральным элементом 1. Дистрибутивность связывает сложение и умножение как в кольце. Иными словами, поле есть коммутативное кольцо, в котором каждый ненулевой элемент имеет мультипликативный обратный (разрешено деление). Например, $(\boldsymbol{Q},+,\cdot)$ – поле рациональных чисел, $(\boldsymbol{R},+,\cdot)$ – поле действительных чисел, $(\boldsymbol{C},+,\cdot)$ – поле комплексных чисел.

Алгеброй над полем называется структура $(A,+,\cdot,\circ)$, где $(A,+,\circ)$ – ***векторное (линнейное) пространство*** над полем F ($\circ$ – умножение на скаляр из F), $(A,+,\cdot)$ – кольцо. Другими словами, это векторное пространство, в котором векторы можно не только складывать и умножать на числа, но и перемножать между собой [24]. Но об этом подробнее в пункте 3.

1.1. Матрицы и операции над ними

Рассмотрим конечные множества I и J элементов любой природы и числовое поле F.

Матрицей будем называть отображение A декартова произведения двух множеств $I \times J$ в некоторое поле F:

$$A : I \times J \to F,$$

т.е. отображение, которое каждой паре (i, j), $i \in I$, $j \in J$, ставит в соответствие некоторый элемент a_{ij} поля F: $(i, j) \mapsto a_{ij}$.

Примеры.

1. В экономике и статистике для представления данных: множество I может задавать временной ряд, $I = \{2001, 2002, ..., 2025\}$, а множество J – регионы какой-нибудь страны или страны какого-нибудь континента, $J = \{$ Алжир, …, Буркина-Фасо, …, Египет, …, ЮАР, $\ldots \}$ – страны африканского континента, a_{ij} – численность населения. Тогда матрица $A = (a_{ij})_{25\times 54}$ будет хранить сведения о численности населения за 25 лет в 54 странах: строки будут соответствовать годам от 2001 до 2025, столбцы 54-м странам, на пересечении i-ой строки и j-го столбца значение элемента a_{ij} будет соответствовать численности населения. Например, $a_{2025\,\text{Марокко}} = 38{,}3$ млн человек.

2. В компьютерной графике: изображения представляются в виде матриц, где каждый элемент соответствует пикселю, а его значение – цвету или интенсивности.

3. В биологии: матрицы используются для хранения генетических данных, т.е. информации о генах и их экспрессии в различных условиях.

4. В коммуникационной среде: для представления связей между пользователями на различных интернет-платформах, например, социальные сети используют графы, а для описания графов – матрицы смежности [21].

Если каждую единицу информации множеств I и J заменить порядковым номером, то получим натуральные конечные множества. Пусть $I=\{1,2,...,m\}$, $J=\{1,2,...,n\}$, тогда матрицу можно записать в виде таблицы чисел. Числа, образующие матрицу, называются ее ***элементами***.

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n},$$

Здесь числа a_{ij} – элементы матрицы A; индексы i и j – номер строки и номер столбца матрицы A, на пересечении которых находится элемент a_{ij}; $m\times n$ – размерность матрицы A; m – число строк матрицы A; n – число столбцов матрицы A; $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$. Нумерация строк производится сверху вниз, столбцов – слева направо. Очевидно, что в матрице размерности $m\times n$ всего $m\times n$ элементов. $\dim A=m\times n$ (от слова *dimension*) или $A_{m\times n}$ [2, 7, 13].

Матрица называется ***квадратной матрицей*** ***n-го порядка***, если $m=n$ (число строк равно числу столбцов) и ***прямоугольной матрицей размерности m на n***, если $m\neq n$. Для квадратной матрицы слово размерность обычно заменяют словом *порядок*: матрица n-го порядка имеет размерность $\dim A=n\times n$ или A_n [13].

Две матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и $B=(b_{ij})_{m'\times n'}$ называются ***равными***, если они одинаковой размерности ($m=m'$; $n=n'$), и соответствующие их элементы равны: $a_{ij}=b_{ij}, i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$.

Матрица $A=(a_{ij})_{m\times n}$ называется ***нулевой*** и обозначается прописной латинской буквой O, если все ее элементы равны нулю, то есть $a_{ij}=0$, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$ [13].

Для квадратных матриц вводятся понятия главной и побочной диагоналей: элементы матрицы $a_{11},a_{22},...,a_{nn}$ образуют ***главную диагональ***;

элементы матрицы $a_{n1}, a_{(n-1)2}, ..., a_{1n}$ – ***побочную***. Сумма элементов на главной диагонали квадратной матрицы называется следом матрицы (*trace*), обозначается $tr(A)$, т.е. [13]

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

Квадратная матрица A порядка n, все элементы которой, находящиеся ниже главной диагонали, равны нулю, называется ***верхней треугольной***. Аналогично, вводится понятие ***нижней треугольной*** матрицы [9, 13].

Квадратная матрица n-го порядка называется ***диагональной***, если все ее элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю, обозначается [5, 7, 17]

$$A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix},$$

у которой все элементы, находящиеся на главной диагонали, равны одному и тому же числу α, называется ***скалярной***.

Скалярная матрица порядка n называется ***единичной*** и обозначается прописной латинской буквой E, если $\alpha = 1$. Таким образом, единичная матрица n-го порядка имеет вид

$$E = (\delta_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ Символ δ_{ij} называется символом Кронекера [11, 13, 17].

Матрицы $A=(a_{11}\ \ a_{12}\ \ \dots\ \ a_{1n})$ и $B=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ размерностей $1\times n$ и $m\times 1$ называют ***матрицей-строкой*** (вектором-строкой) и ***матрицей-столбцом*** (вектором-столбцом), соответственно.

Матрица A^{T} называется транспонированной по отношению к матрице A, если каждый столбец матрицы A^{T} является соответствующей строкой с тем же номером матрицы A. Если A – матрица размерности $m\times n$, то матрица A^{T} имеет размерность $n\times m$. В частности, операция транспонирования квадратной матрицы равносильна повороту элементов матрицы относительно своей главной диагонали. Элементы, находящиеся на главной диагонали, своего положения не меняют [17, 24].

Если в результате транспонирования для квадратной матрицы A выполняется соотношение $A=A^T$, то матрица называется ***симметрической*** ($a_{ij}=a_{ji}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$). Квадратная матрица A называется ***кососимметрической***, если $A=-A^T$ ($a_{ij}=-a_{ji}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$). У кососимметрических матриц все элементы главной диагонали равны нулю, так как $a_{ii}=-a_{ii}$, $2a_{ii}=0$, $a_{ii}=0$, $i=\overline{1,m}$ [6, 17].

К ***линейным операциям*** над матрицами относят ***сложение (вычитание)*** матриц и ***умножение на число***.

Суммой (разностью) матриц одинаковой размерности $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и $B=(b_{ij})_{m\times n}$ называется матрица $C=(c_{ij})_{m\times n}$ той же размерности, все элементы которой вычисляются по формуле: $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$).

Очевидно, что $A+O=O+A=A$, где O – нулевая матрица той же размерности, что и матрица A.

Можно показать, что для любой квадратной матрицы A матрицы $S=A+A^T$ и $K=A-A^T$ будут соответственно симметрической и кососимметрической, то есть любая квадратная матрица A всегда может быть представлена в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц.

Умножением матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ на вещественное число α называется матрица $B=(b_{ij})_{m\times n}$, все элементы которой вычисляются по формуле: $b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$, $\forall\ \ i\,,j$.

При умножении матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ на число (-1) получим матрицу, ***противоположную*** данной: $(-1)\cdot A=-A=(-a_{ij})_{m\times n}$. Имеют место равенства: $A+(-1)\cdot A=O$, $1\cdot A=A\cdot 1=A$, $0\cdot A=A\cdot 0=O$ [6,13, 17].

Пусть A, B, C – произвольные матрицы одинаковой размерности, а α и β – произвольные вещественные числа, тогда имеют место следующие ***свойства линейных операций***:

1. $A+B=B+A$;
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$;
3. $\alpha A=A\alpha$;
4. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
5. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
6. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$;
7. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$;
8. $(\alpha A)^{\mathrm{T}}=\alpha A^{\mathrm{T}}$;
9. $(\alpha A+\beta B)^{\mathrm{T}}=\alpha A^{\mathrm{T}}+\beta B^{\mathrm{T}}$.

Даны две матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и $B=(b_{ij})_{p\times q}$. Количество столбцов матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ равно количеству строк матрицы $B=(b_{ij})_{p\times q}$, то есть $n=p$ (матрица B ***согласована*** с матрицей A).

Произведением матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ на согласованную матрицу $B=(b_{ij})_{p\times q}$ называется матрица $C=(c_{ij})_{m\times q}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B, то есть $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$, для всех i, j.

В результате произведения матрицы A размерности $m\times n$ на согласованную матрицу B размерности $p\times q$ получим матрицу C размерности $m\times q$, число строк в которой равно числу строк матрицы A, а число столбцов равно числу столбцов матрицы B.

Произведением матрицы-строки $A=(a_{1j})_{1\times n}$ на согласованную матрицу-столбец $B=(b_{j1})_{n\times 1}$ является матрица $C=(c_{11})_{1\times 1}$, состоящая из одного элемента, равного сумме произведений соответствующих элементов [6, 13, 17]

$$C=A\cdot B=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+...+a_{1n}b_{n1}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}b_{j1}=\left(c_{11}\right)_{1\times 1}.$$

Замечание. Данную матрицу нельзя отождествлять с числом, так как полученную матрицу можно умножить только на матрицу-столбец, а вещественное число, равное по значению c_{11}, можно умножить на матрицу любой размерности.

Свойства операции произведения матриц:

1. $A \cdot B \neq B \cdot A$, то есть произведение матриц некоммутативно, но для квадратных матриц A и B $tr(AB) = tr(BA)$;

2. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;

3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;

4. $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$;

5. $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$,

где A, B, C – согласованные матрицы; α – произвольное вещественное число.

Если для квадратных матриц A и B одного порядка выполняется равенство $A \cdot B = B \cdot A$, то они называются ***перестановочными***. Например, выполняются соотношения: $A \cdot O = O \cdot A = O$, $A \cdot E = E \cdot A = A$.

Произведение матриц может быть нулевой матрицей. $A \cdot B = O$, хотя оба сомножителя не являются нулевыми матрицами.

Для квадратных матриц A_n определяется ***операция возведения в степень***: $(A_n)^k = \underbrace{A_n \cdot A_n \cdot \ldots \cdot A_n}_{k \text{ множителей}}$

По аналогии с числами можно предположить, что для некоторых матриц A существует такая матрица A^{-1}, что выполняются равенства $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Тогда матрица A^{-1} называется ***обратной*** к матрице A. Легко видеть, что указанное двойное равенство возможно только для квадратных матриц A_n. При этом обратная матрица существует не для любой квадратной матрицы [13].

Из истории

Сначала матрицы называли таблицами (см. работы О.-Л. Коши, Ш. Эрмита, 1854, 1858). Современный термин происходит от латинского «matrix» – матка-производитель, источник [1]. *Первые матрицы, изученные Дж. Сильвестром и А. Кэли, порождали линейные преобразования. Обозначение матрицы круглыми скобками введено английским математиком К.Э. Каллисом (1913). К. Гаусс однозначно задавал линейное преобразование матрицей (1801), но не оперировал матрицами как математическими объектами.*

К середине XIX века исследования в различных областях математики привели к построению исчисления или алгебры матриц. В 1858 году Кэли рассматривал матрицу как математический объект, определил сумму и произведение *матриц, умножение матрицы на число, установил свойства ассоциативности и некоммутативности умножения матриц* [1]. *Первыми источниками алгебры матриц были теория определителей и теория систем линейных алгебраических уравнений. Исследования неравенства Чебышева для простых чисел и по теории инвариантов привели Дж. Сильвестра к развитию теории матриц, которая стала центральной в его творчестве. Исследования У.Р. Гамильтона и У. Гиббса по теории кватернионов также привели их к алгебре матриц. В 1880 году Б. Пирс показал, что система гиперкомплексных чисел эквивалентна алгебре матриц. Теория матриц развивалась в работах по квадратичным и билинейным формам и линейным преобразованиям К. Вейерштрасса, его коллег и учеников, а также основывалась на трудах К.Г. Якоби по линейными преобразованиями n переменных и теории детерминантов. В итоге к концу XIX века алгебра матриц сформировалась как самодостаточная теория.*

Задачи для самостоятельного решения

1. (Далевская О.П.) Найти матрицу X, если

$$3\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} - 2X - 2\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Ответ. $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 1 & -7 \\ 10 & -2{,}5 & -6{,}5 & -1{,}5 \\ -4 & -0{,}5 & 6{,}5 & 5 \end{pmatrix}.$

2. Решить систему матричных уравнений

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Ответ. $X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

3. (Далевская О.П.) Найти матрицу X, если $X = A \cdot B^T$.

$$A = \begin{pmatrix} i & 2-i \\ 4 & -4i \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1+2i & 2-i \\ 2i & 1-i \end{pmatrix}.$$

Ответ. $X=\begin{pmatrix} 1-3i & 0 \\ -1-3i & -4+4i \end{pmatrix}.$

4. (Далевская О.П.) Найти все возможные произведения матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$

5. (Магин М.И.) Найти матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^4$, *б)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, *в)* $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, *г)* $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$.

Ответ. а) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *б)* $\begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} 1 & na & nb+\dfrac{n(n-1)}{2}ac \\ 0 & 1 & nc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & \sin(n\alpha) \\ -\sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{pmatrix}$.

6. (Бакеева Л.В.) Найти

а) A^{100}, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указания. Представить матрицу $A=E+B$, где B – симметричная матрица, и показать, что, начиная с определенного n, B^n есть нулевая матрица.

б) A^{30}, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. а) $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & -200 & 100 \\ -100 & 9901 & -4950 \\ -200 & 19800 & -9989 \end{pmatrix}$;

б) $A^{30} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 44 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. (Магин М.И.) Дана матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. При каких условиях на $a, b, c, d \in R$ существует обратная матрица к матрице A? Если такие a, b, c, d существуют, найдите матрицу A^{-1}.

Комментарий. Напомним, что *обратной* к матрице $A \in M_n(R)$ называется такая матрица $B = A^{-1}$, что $A \cdot B = B \cdot A = E$, где E – единичная матрица.

Ответ. A^{-1} существует, если $ad - bc \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

8. (Магин М.И.) Дана матрица $A \in M_n(R)$. Как изменятся её элементы при домножении справа (слева) на:

а) матричную единицу E_{ij} – матрицу, у которой в позиции (i, j) стоит 1, а в остальных – нули;

б) квадратную матрицу $T_{ij}(\lambda) = E + \lambda E_{ij}$, где $i \neq j$.

Ответ. а) Справа: AE_{ij} – матрица, в которой только j-й столбец равен i-му столбцу матрицы A, остальные столбцы 0; слева: $E_{ij}A$ – матрица, в которой только i-я строка равна j-ой строке матрицы A, остальные строки 0.

б) Слева: i-я строка матрицы A заменяется на (i-я строка матрицы $A + \lambda$ (j-я строка матрицы A)), остальные строки не меняются; справа: j-й столбец матрицы A заменяется на (j-й столбец матрицы $A + \lambda \cdot$ (i-й столбец матрицы A)) остальные столбцы не меняются.

9. [20] В таблице указано количество единиц продукции, отгружаемой ежедневно на молокозаводах «Деп» и «Новый день» в магазины «Солнышко», «Спутник» и «Меркурий», причем доставка единицы продукции с каждого молокозавода в магазин «Солнышко» стоит

40 ден. ед., в магазин «Спутник» – 80, а в «Меркурий» – 120 ден. ед. Подсчитать ежедневные транспортные расходы каждого завода.

Молокозавод	Магазин		
	Солнышко	Спктник	Меркурий
Деп	25	45	15
Новый день	20	37	18

Решение. Обозначим через A матрицу, данную в условии, а через B – матрицу, характеризующую стоимость доставки единицы продукции в магазины, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 45 & 15 \\ 20 & 37 & 18 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица затрат на перевозки есть произведение матриц A и B:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 25 & 45 & 15 \\ 20 & 37 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \cdot 40 + 45 \cdot 80 + 15 \cdot 120 \\ 20 \cdot 40 + 37 \cdot 80 + 18 \cdot 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6400 \\ 5920 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Молокозавод «Деп» ежедневно тратит на перевозки 6400 ден.ед., а молокозавод «Новый день» – 5920 ден.ед. [20]

10. [20] Швейное ателье «Твой стиль» производит платья, блузки и юбки. Плановый выпуск за декаду характеризуется матрицей $X = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 23 \end{pmatrix}$. Используются ткани четырех типов: шелк, шифон, трикотаж, жаккард. В таблице приведены нормы расхода ткани (в метрах) на каждое изделие. Матрица $C = \begin{pmatrix} 40 & 35 & 24 & 16 \end{pmatrix}^T$ задает стоимость (руб.) метра ткани каждого типа, а матрица $P = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T$ – стоимость (руб.) перевозки метра ткани каждого вида.

Вид изделия	Магазин			
	Шелк	Шифон	Трикотаж	Жаккард
Платья	5	1	0	3
Блузки	3	2	0	2
Юбки	0	0	4	3

а) определить, сколько метров ткани каждого типа потребуется для выполнения плана;

б) найти стоимость ткани, расходуемой на пошив изделия каждого вида;

в) определить стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана.

г) подсчитать стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана с учетом ее транспортировки.

Решение. Обозначим данную в условии матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

а) Для нахождения количества метров ткани, необходимой для выполнения плана, надо матрицу X умножить на матрицу A:

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95 & 40 & 92 & 129 \end{pmatrix}.$$

б) Стоимость ткани, расходуемой на пошив изделия каждого вида, можно найти, перемножив матрицу A и матрицу C:

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ 24 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 283 \\ 222 \\ 144 \end{pmatrix}.$$

в) Стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана, есть произведение матрицы X на матрицу $A \cdot C$:

$$X \cdot (A \cdot C) = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 283 \\ 222 \\ 144 \end{pmatrix} = 9472.$$

г) Стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана, с учетом транспортных расходов есть произведение матрицы $X \cdot A$ на матрицу P:

$$(X \cdot A) \cdot P = \begin{pmatrix} 95 & 40 & 92 & 129 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1037.$$

Получим:

$$X \cdot A \cdot C + X \cdot A \cdot P = 9472 + 1037 = 10509 \text{ ден.ед.}$$

Ответ. а) Для выполнения плана потребуется 95 метров шелка, 40 метров шифона, 92 метра трикотажа и 129 метров жаккарда.

б) Стоимость всей ткани, расходуемой на пошив одного платья – 283 руб, одной блузки – 222 руб, одной юбки – 144 руб.
в) Стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана равна 9472 руб.
г) Стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана с учетом ее транспортировки равна 10509 руб. [20]

11. [20] Два комбината выпускают четыре вида консервированной продукции. В матрицах поквартальных выпусков за один отчетный год A_k (где k – номер квартала в году) элементы a_{ij} представляют объемы выпуска на i-м комбинате j-го вида продукции:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 45 & 78 & 50 & 53 \\ 64 & 60 & 25 & 60 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 50 & 75 & 55 & 53 \\ 50 & 60 & 35 & 66 \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 50 & 60 & 59 & 55 \\ 45 & 60 & 45 & 70 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 53 & 62 & 65 & 56 \\ 40 & 60 & 50 & 72 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу годового выпуска продукции и матрицы прироста объемов производства за каждый квартал, проанализировать полученные результаты.

Ответ. $A_{год} = \begin{pmatrix} 198 & 275 & 229 & 217 \\ 199 & 240 & 155 & 268 \end{pmatrix},$

$$A_2 - A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 5 & 0 \\ -14 & 0 & 10 & 6 \end{pmatrix},$$
$$A_3 - A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -15 & 4 & 2 \\ -5 & 0 & 10 & 4 \end{pmatrix},$$
$$A_4 - A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 1 \\ -5 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. [20] Предприятие производит колбасные изделия трех видов: салями, сервелат и докторскую колбасу. Для изготовления он использует мясо двух типов: свинина и говядина. Нормы затрат мяса на единицу продукции каждого вида заданы матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Стоимость 1кг мяса каждого типа задана матрицей $B = (10 \ 15)$. Каковы общие затраты предприятия на производство 100; 200 и 150 ед. салями, сервелата и докторской колбасы соответственно?

Ответ. 28000.

13. (Далевская О.П.) Матрица $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ описывает миграцию между двумя популяциями: элемент m_{ij} – часть (доля от общего числа) особей i-ой популяции, мигрировавших в j-ую популяцию. Вектор $n = (n_1, n_2)$ – вектор численности: n_i – число особей i-ой популяции. Первый этап миграции описывается умножением слева миграционной матрицы на вектор численности. Результатом является новый вектор численности n'.

Дана матрица $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ и вектор $n = (18,36)$.

1) Установите, на каком этапе миграции численность популяций сравняется (дробные значения в векторе численности округлите до целых).

2) Сделайте вывод о дальнейшем влиянии миграции на численность популяций.

Ответ. 4; численности стремятся к равновесию $(27,27)$ и далее остаются постоянными.

14. (Далевская О.П.) Матрица $Q = \begin{pmatrix} q_{1A} & q_{1a} \\ q_{2A} & q_{2a} \end{pmatrix}$ задает распределение генотипа в двух популяциях: в первой строке указаны доля особей 1-ой популяции, обладающих генами A и a, во второй строке – те же данные для второй популяции.

Матрица $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ описывает воздействие на популяции (миграция со случайным скрещиванием), изменяющее их распределения генотипов. Результатом умножения матриц M и Q является матрица Q', содержащая новые распределения генотипов.

Даны матрицы $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ и $Q' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$.

1) Найдите матрицу исходных распределений генов в популяциях.

2) Сделайте вывод о качественных изменениях в генотипах популяций.

Ответ. $Q=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; В популяции 1 доля гена A уменьшилась с $\frac{3}{4}$ до $\frac{2}{3}$, доля а выросла с $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{3}$. В популяции 2 частота гена А выросла с $\frac{1}{2}$ до $\frac{7}{12}$, частота а снизилась с $\frac{1}{2}$ до $\frac{5}{12}$. Миграция привела к сближению генетических составов популяций (первоначально сильно различались по A в популяции 1, после миграции различия уменьшились).

1.2. Ранг матрицы

Пусть φ_1, $\varphi_2, \ldots$, φ_n набор некоторых элементов одинаковой природы, для которых определены понятия равенства, сложения элементов, умножения элемента на число и нулевого элемента (будем его обозначать θ) [13].

Тогда, умножив каждый из этих элементов на некоторые числа λ_i и сложив полученные произведения, получим выражение, называемое ***линейной комбинацией*** элементов:

$$\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\ldots+\lambda_n\varphi_n.$$

Набор элементов φ_1, φ_2, … , φ_n называется ***линейно зависимым*** **(ЛЗ)**, если можно найти такой набор чисел λ_1, $\lambda_2 \ldots$, λ_n, содержащий хотя бы одно ненулевое число, при котором линейная комбинация была бы равна нулевому элементу [13]:

$$\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\ldots+\lambda_n\varphi_n=\theta,$$

где некоторые (хотя бы одно) $\lambda_i \neq 0$.

Если указанное равенство возможно только тогда, когда $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$, набор элементов φ_1, φ_2, … , φ_n называется ***линейно независимым*** **(ЛНЗ)**.

1. Если набор элементов ЛЗ, то один из элементов можно выразить через линейную комбинацию остальных элементов.

2. Если в наборе элементов есть нулевой элемент, то весь набор ЛЗ.

3. Если к набору ЛЗ элементов добавить еще несколько элементов, получится ЛЗ набор.

4. Если при добавлении элемента φ_{n+1} к ЛНЗ набору φ_1, φ_2, … , φ_n получается ЛЗ набор φ_1, φ_2, … , φ_n, φ_{n+1}, то элемент φ_{n+1} выражается как ЛК элементов φ_1, φ_2, … , φ_n [6, 13].

Определение ранга матрицы: рангом матрицы называется количество ЛНЗ строк (или столбцов) матрицы и обозначается:

$$r(A), \text{ или } rk(A), \text{ или } rg(A), \text{ или } rank(A), \text{ или } rang(A).$$

Утверждение. Количество ЛНЗ строк матрицы равно ее рангу.

Утверждение. Количество ЛНЗ строк матрицы равно количеству ее ЛНЗ столбцов.

Утверждение. Максимально возможное число ЛНЗ строк матрицы не больше числа ее столбцов (если в матрице строк больше, чем столбцов, то они ЛЗ) – и наоборот.

Понятие ЛЗ и ЛНЗ элементов очень важно, но решать эту проблему непосредственно очень трудоемко. Однако существует вид матриц, в котором количество ЛНЗ строк (или столбцов) определяется очень легко. Такие матрицы называются ступенчатыми (трапецеидальными) [13, 17].

Матрица называется ***ступенчатой*** (*трапецеидальной*), если она удовлетворяет следующим условиям:

– ***нулевые*** строки, если они есть, располагаются ниже ненулевых строк;

– в каждой ненулевой строке первый слева ненулевой элемент называется ***базисным*** *(главным)*; столбцы, в которых стоят базисные элементы – ***базисные***; все элементы, расположенные в одном столбце ***ниже*** базисного, равны нулю;

– номера столбцов базисных элементов образуют строго возрастающую последовательность, т.е. для любых двух ненулевых строк $i < j$ номер столбца, в котором стоит базисный элемент i-ой строки строго меньше номера столбца, в котором стоит базисный элемент j-ой строки [3, 13].

Пример ступенчатой матрицы:

$$A_{4\times 8} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} \\ 0 & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a_{35}} & a_{36} & a_{37} & a_{38} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a_{47}} & a_{48} \end{pmatrix}.$$

Здесь: a_{11}, a_{22}, a_{35} и a_{47} – базисные элементы, не равные нулю; все элементы, стоящие ниже и левее (под чертой) равны нулю, все остальные элементы (a_{ij}) произвольны. Базисные строки – s_1, s_2, s_3, s_4; небазисные (нулевые) строки вычеркнуты. Базисные столбцы – c_1, c_2, c_5, c_7.

Утверждение: Базисные строки и столбцы ступенчатой матрицы ЛНЗ.

Элементарные преобразования строк (или столбцов) матрицы не изменяют ее ранга.

К **элементарным преобразованиям** относятся:

– $s_i \leftrightarrow s_j$ (перемена местами двух строк матрицы);

– $s_i \to k\,s_i$, $k \neq 0$ (умножение элементов строки на число $k \neq 0$);

– $s_i \to s_i + k\,s_j$, $k \neq 0$ (прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число $k \neq 0$).

Теорема *(об инвариантности ранга матрицы*). Ранг матрицы инвариантен относительно элементарных преобразований (или элементарные преобразования не меняют ранга матрицы) [13, 17].

Определение ранга матрицы: рангом матрицы называется количество ненулевых строк в ступенчатой матрице, эквивалентной исходной матрице.

Полученная ступенчатая матрица не равна исходной, но их ранги совпадают. Матрицы, полученные одна из другой с помощью элементарных преобразований, называются *эквивалентными*.

Ступенчатая матрица называется *главной ступенчатой*, если базисные элементы ненулевых строк равны 1, а остальные элементы базисных столбцов равны 0.

Теорема Гаусса. Любую матрицу с помощью элементарных преобразований над ее строками можно привести к главному ступенчатому виду (при этом ЛНЗ строки станут базисными, а все ЛЗ – нулевыми) [13].

Алгоритм метода Гаусса (Жордана-Гаусса) приведения матрица к главному ступенчатому виду.

Если данная матрица нулевая, то она уже ступенчатая.

Если матрица ненулевая, то пусть j_1 – номер ее первого ненулевого столбца. Если необходимо, перестановкой строк можно добиться, чтобы $a_{1j_1} \neq 0$, т.е. чтобы в первой строке на месте первого ненулевого столбца стоял ненулевой элемент. После этого прибавить к каждой строке, начиная со второй, первую строку, умноженную на подходящее число, так, чтобы все элементы j_1-го столбца, кроме первого, стали равны нулю. В результате матрица приводится к виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{1j_1} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначить подматрицу, полученную отбрасыванием первой строки и первых столбцов до j_1 включительно, как A_1:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ a'_{32} & a'_{33} & \dots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m2} & a'_{m3} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}.$$

Далее применить те же преобразования к матрице A_1, и так далее. Продолжая этот процесс, будет получена матрица ступенчатого вида, эквивалентная исходной матрице A. Этот алгоритм называется ***прямым ходом метода Гаусса***.

Обратный ход метода Гаусса реализует алгоритм обнуления элементов, расположенных выше базисных в базисных столбцах. Для этого: каждую строку с базисным элементом умножить на число, обратное этому базисному элементу. В результате все базисные элементы становятся равными 1. Затем последовательно, начиная с последней ненулевой строки и поднимаясь вверх, текущую строку умножить на подходящее число и прибавить к строкам, расположенным выше, так, чтобы все элементы базисных столбца, кроме самого базисного элемента, стали равными нулю. В итоге получается матрица главного ступенчатого вида, эквивалентная исходной, например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a''_{13} & a''_{14} & 0 & a''_{16} & 0 & a''_{18} \\ 0 & 1 & a''_{23} & a''_{24} & 0 & a''_{26} & 0 & a''_{28} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a''_{36} & 0 & a''_{38} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a''_{48} \end{pmatrix}.$$

Замечание. Если алгоритм Жордана-Гаусса применить к квадратной матрице A_n, все строки (столбцы) которой ЛНЗ, прямым ходом матрица преобразуется к треугольной, а обратным ходом – к единичной матрице E_n [13].

Квадратная матрица A_n называется *невырожденной*, если $r(A) = n$.

Из истории

Понятие ранга матрицы было введено Дж. Сильвестром около 1850 года, но он не дал ему названия. В 1877-1879 годах термин «ранг» (от немецкого «Rang» - степень, разряд) ввел Ф. Фробениус.

Задачи для самостоятельного решения

1. (Магин М.И.) Найти ранг матрицы

$$а)\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix},\ б)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

Ответ. а) 2; *б)* 1.

2. (Магин М.И.) Найти ранг матрицы в зависимости от значений параметра (λ или α):

$$а)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix};\ б)\ \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 17 & 7 & 1 \\ 1 & 10 & 4 & \alpha \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix};\ в)\ \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Ответ. а) $r = \begin{cases} 2, \alpha = 0, \\ 3, \alpha \neq 0; \end{cases}$ *б)* $r = \begin{cases} 2, \alpha = 0, \\ 4, \alpha \neq 0; \end{cases}$ *в)* $r = \begin{cases} 0, \lambda = 0, \\ 4, \lambda \neq 0. \end{cases}$

3. (Далевская О.П.) Какому элементарному преобразованию рядов матрицы A_4 равносильно умножение *а)* $P \cdot A$; *б)* $A \cdot P$, если

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. а) перестановка 2-ой и 3-ей строк;
б) перестановка 2-го и 3-го столбцов.

4. (Далевская О.П.) Какому элементарному преобразованию рядов матрицы A_4 равносильно умножение

а) $P \cdot A$;

б) $A \cdot P$, если

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \lambda \neq 0.$$

Ответ. а) умножение 2-ой строки на λ;
б) умножение 2-го столбца на λ.

5. (Далевская О.П.) Какому элементарному преобразованию рядов матрицы A_4 равносильно умножение

а) $P \cdot A$;

б) $A \cdot P$, если

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

Ответ. *а)* прибавление ко 2-ой строке соответствующих элементов 4-ой строки;

б) прибавление к 4-му столбцу соответствующих элементов 2-го столбца.

6. (Далевская О.П.) Какому элементарному преобразованию строк матрицы $A_{n\times m}$ равносильно ее умножение слева на матрицу $P_{n\times n}$, если

$$P_{n\times n}=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1&0&0&\dots&0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\dots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&1&\dots&1&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\dots&1&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\dots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\dots&0&0&1\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ i\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\\ \overline{\quad i\ \dots\ j\quad} & \end{array},$$

Ответ. Прибавление к i-ой строке соответствующих элементов j-ой строки.

7. Запишите матрицу P такую, что умножение на нее матрицы $A_{m\times n}$ равносильно перемене местами i-ой и j-ой строк матрицы $A_{m\times n}$.

Ответ. Умножение слева $P \cdot A$,

$$P_{m\times m}=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1&0&0&\dots&0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\dots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\dots&1&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&1&\dots&0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\dots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\dots&0&0&1\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ i\\ \\ j\\ \\ \\ \end{array}\end{array}.$$

8. Запишите матрицу P такую, что умножение на нее справа матрицы $A_{m\times n}$ равносильно прибавлению i-го столбца матрицы $A_{m\times n}$ к ее j-му столбцу.

Ответ. Умножение слева $P \cdot A$,

$$P_{n\times n} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & i & \dots & j & & \end{array} & \end{array}.$$

9. (Далевская О.П.) Умножением на какую матрицу P – матрицу элементарных преобразований – можно обнулить последнюю строку матрицы

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 12 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};\ б)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Ответ.\ a)\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix};\ б)\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

10. (Далевская О.П.) Найти матрицу элементарных преобразований, приводящих матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

а) к верхнетреугольной с единицами на главной диагонали;

б) к нижнетреугольной с единицами на главной диагонали.

$$Ответ.\ a)\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix};\ б)\ P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. (Магин М.И.) Пусть $A \in M_{m\times n}(F)$. Доказать, что A имеет ранг 1 тогда и только тогда, когда её можно представить в виде произведения

ненулевых столбца и строки, т.е. в виде $A = a \cdot b$, где $a \in M_{m\times 1}(F)$, $b \in M_{1\times n}(F)$.

Указания. Использовать определение ранга как размерности пространства столбцов. Ранг 1 означает, что все столбцы линейно зависимы и существует базис из одного вектора. Тогда любой столбец есть скаляр, умноженный на этот базисный вектор. Коэффициенты этих скаляров как раз и составляют строку b.

12. (Магин М.И., [23]) Пусть $A, B \in M_n(R)$. Доказать, что

а) $rank(A+B) \le rank(A) + rank(B)$;

б) $rank(AB) \le \min(rank(A), rank(B))$.

Указания. а) независимых столбцов матрицы $A+B$ не больше, чем сумма количеств независимых столбцов в матрицах A и B; б) $rank(AB)$ не превосходит ни числа независимых столбцов в A, ни числа независимых строк в B, следовательно не превосходит минимума этих двух чисел.

13. (Магин М.И.) Пусть $x_1,...,x_n$, $y_1,...,y_n$ – вещественные числа, а $A \in M_n(F)$ определяется так: $a_{ij} = x_i + y_j$. Доказать, что $rank(A) \le 2$.

Указания. Представить матрицу A как сумму двух матриц, каждая из которых имеет ранг не больше 1, и применить неравенство для ранга суммы.

1.3. Определитель матрицы

Для каждой квадратной матрицы A_n по определенному правилу можно вычислить <u>число</u>, называемое ***определителем*** этой матрицы. Обозначение определителя (от слова *determinant*) [13]:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta A = |A|.$$

Квадратная матрица A_n называется *невырожденной*, если ее $\det A_n \ne 0$. Если $\det A_n = 0$, то матрица A_n называется *вырожденной*.

Если в прямоугольной матрице $A_{m\times n}$ выделить k строк и k столбцов, то определитель, составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, называется ***минором*** k***-го порядка*** матрицы $A_{m\times n}$ [6, 13]. Обозначая миноры, номера выбранных строк принято указывать верхними индексами, выбранных столбцов – нижними, располагая их по возрастанию: $M_{\binom{i_1 i_2 \dots i_k}{j_1 j_2 \dots j_k}}$.

Пример. $A_{3\times4}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}$. Для этой матрицы можно найти:

1) Миноры **I** порядка, например $M_{\binom{2}{3}}=7$ или $M_{\binom{3}{4}}=12$. Здесь верхний индекс показывает выбранную строку и нижний – выбранный столбец. Всего можно составить 12 различных миноров **I** порядка для этой матрицы [13].

2)Миноры **II** порядка, например,

$$M_{\binom{12}{24}}=\begin{vmatrix}2&4\\6&8\end{vmatrix}=16-24=-8,$$

$$M_{\binom{13}{14}}=\begin{vmatrix}1&4\\9&12\end{vmatrix}=12-36=-24.$$

Всего миноров **II** порядка для этой матрицы можно составить:

$$C_4^2\cdot C_3^2=\frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{3!}{2!1!}=6\cdot3=18.$$

3) Миноры **III** порядка, например,

$$M_{\binom{123}{124}}=\begin{vmatrix}1&2&4\\5&6&8\\9&10&12\end{vmatrix}=0.$$

Всего миноров III порядка для данной матрицы можно составить: $C_4^3C_3^3=4$.

<u>*Определение ранга матрицы*</u>*:* рангом матрицы называется число, равное наивысшему порядку минора матрицы $A_{m\times n}$, отличного от нуля [13, 17].

В приведенном выше примере все миноры 3-го порядка будут равны нулю. Есть (по крайней мере один) минор второго порядка, отличный от нуля, следовательно $r(A)=2$.

Замечание: если в матрице все миноры k-го порядка равны нулю, то все миноры $(k+1)$-го порядка также будут равны нулю, так как минор $(k+1)$-го порядка можно представить как линейную комбинацию миноров k-го порядка (теорема разложения, стр. 41).

Утверждение: Если минор матрицы не равен нулю, то строки и столбцы, его образующие, ЛНЗ (и наоборот); если минор матрицы равен нулю, то строки и столбцы, его образующие, ЛЗ. Это утверждение объясняет равносильность трех определений ранга матрицы, сформулированных выше в пп. 1.2 и 1.3 [13].

Пусть дана квадратная матрица A_n порядка n и ее минор $M_{\binom{i_1 i_2 \dots i_k}{j_1 j_2 \cdots j_k}}$ порядка k. *Дополнительным (дополняющим) минором к минору* $M_{\binom{i_1 i_2 \dots i_k}{j_1 j_2 \cdots j_k}}$ называется определитель, полученный вычеркиванием тех k строк и k столбцов, которые образуют минор $M_{\binom{i_1 i_2 \dots i_k}{j_1 j_2 \cdots j_k}}$. Обозначают $\overline{M}_{\binom{i_1 i_2 \dots i_k}{j_1 j_2 \cdots j_k}} = M_{\binom{i_1 i_2 \dots i_{n-k}}{j_1 j_2 \cdots j_{n-k}}}$.

Миноры квадратной матрицы называют также минорами ее определителя.

Алгебраическим дополнением минора $M_{\binom{i_1 i_2 \dots i_k}{j_1 j_2 \cdots j_k}}$ называется дополнительный к нему минор, умноженный на $(-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_k+j_1+j_2+\ldots+j_k}$, и обозначается [13, 24]

$$A_{\binom{i_1 i_2 \dots i_k}{j_1 j_2 \cdots j_k}} = (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_k+j_1+j_2+\ldots+j_k} \cdot \overline{M}_{\binom{i_1 i_2 \dots i_k}{j_1 j_2 \cdots j_k}}.$$

Каждый элемент a_{ij} матрицы A_n есть минор 1-го порядка. Дополнительный к нему минор есть определитель $(n-1)$-го порядка, полученный вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца. Такой дополнительный минор называется *минором элемента* a_{ij} и обозначается M_{ij}. Тогда *алгебраическое дополнение элемента* a_{ij} обозначается A_{ij}, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

<u>*Вычисление определителя разложением по элементам строки или столбца*</u>

1. Определитель матрицы A_1 **I** порядка: $\det A_1 = |a_{11}| = a_{11}$.

2. Определитель матрицы A_n ***n*** порядка (<u>***теорема разложения***</u>):

$$\det A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj},$$

где i, j – любые числа от 1 до n [6, 13].

Иначе говоря, определитель ***n***-го порядка матрицы A_n равен сумме попарных произведений элементов какой-либо строки или столбца на их алгебраические дополнения. При этом результат не зависит от выбора строки или столбца.

Тогда определитель **II** порядка вычисляется по формуле:

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель **III** порядка вычисляется по формуле:

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}).$$

Замечание. Для составления формулы вычисления определителя **III** порядка можно использовать правила треугольника или Саррюса.

Свойства определителя.

Замечание: все свойства, сформулированные для строк определителя, остаются справедливыми и для его столбцов.

1. $\det A = \det(A^T)$.

2. Если в определителе поменять местами две строки, то знак определителя изменится на противоположный.

3. Если умножить каждый элемент некоторой строки определителя на число k, то определитель увеличится в k раз.

Следствие. Общий множитель всех элементов некоторой строки можно выносить за знак определителя.

4. Если в некоторой строке определителя каждый элемент представить в виде суммы двух чисел, то определитель будет равен сумме двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hline x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & \dots & x_n + y_n \\ \hline \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hline x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hline y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \hline \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

5. Определитель не изменится, если к элементам одной его строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

6. Сумма попарных произведений элементов какой-либо строки определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0, \quad i \neq j.$$

7. Если определитель содержит нулевую строку, то он равен нулю.

8. Если определитель содержит две одинаковые строки, то он равен нулю.

9. Если определитель содержит пропорциональные строки, то он равен нулю.

10. $\det(kA_n) = k^n \det A_n$.

11. $\det(A_n \cdot B_n) = \det A_n \cdot \det B_n$.

12. Определитель диагональной и треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов [2, 7, 13].

<u>Вычисление определителя по теореме Лапласа</u>

Теорема Лапласа. Определитель порядка n равен сумме произведений всевозможных миноров k-го порядка $(k < n)$, которые можно составить из произвольно выбранных k параллельных рядов (строк или столбцов), на алгебраические дополнения этих миноров.

Замечание. Теорема Лапласа позволяет свести вычисление определителя порядка n к вычислению определителей более низкого порядка. Этой теоремой удобно пользоваться тогда, когда в определителе имеются равные нулю миноры. В этом случае при вычислении определителя выделяют в нем те k строк или столбцов, которые содержат наибольшее число миноров k-го порядка, равных нулю [5, 9, 13].

Пример. Вычислить определитель $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. Применим теорему Лапласа по 2-му и 4-му столбцам, так как в этих столбцах в 1-ой, 3-ей и 5-ой строках нулевые элементы. Число всевозможных миноров в зафиксированных столбцах равно $C_5^2 = 10$. Но только один, $M_{\binom{24}{24}} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$, отличен от нуля (проверить самостоятельно). Поэтому

$$|A| = M_{\binom{24}{24}} \cdot A_{\binom{24}{24}} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+2+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (6-2)(-1)^{12}(2 + 3 + 12 - 2 - 6 - 6) = 6.$$

<u>Другие подходы к определению определителя.</u>

Пусть дана квадратная матрица

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим произведения элементов этой матрицы, взятых по одному и только по одному из каждой ее строки и каждого столбца. Любое такое произведение содержит n сомножителей и может быть записано в виде (упорядочены по номерам строк, номера столбцов образуют некоторую перестановку натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$):

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}.$$

Два произведения $a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ считаются различными, если соответствующие им перестановки вторых индексов различны. Различных произведений столько, сколько различных перестановок из n чисел, т.е. $n!$. *Два числа в перестановке* $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ *образуют инверсию*, если большее число стоит перед меньшим. Число инверсий в перестановке $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ обозначим $\alpha(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ [7, 9, 11]:

$$\alpha(j_1, j_2, \ldots, j_n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,$$

где α_i, $i = \overline{1, n}$ – число инверсий числа i в перестановке. Например, в перестановке $(2,5,1,4,3)$ число инверсий числа 2 равно $\alpha_2 = 1$ (только для пары $(2,1)$ большее число 2 стоит перед меньшим числом 1). Аналогично, $\alpha_5 = 3$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_4 = 1$, $\alpha_3 = 0$. Тогда

$$\alpha(2,5,1,4,3) = 0 + 1 + 0 + 1 + 3 = 5.$$

Определитель квадратной матрицы A_n равен сумме произведений всех слагаемых $(-1)^{\alpha(j_1, j_2, \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$, для которых перестановки $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ различны, т.е.

$$\det A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_n)} (-1)^{\alpha(j_1, j_2, \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}.$$

В силу свойства определителя о транспонировании, $\det A = \det(A^T)$, строки и столбцы матрицы равноправны в теории определителей. Если принять, что столбцы (строки) матрицы A_n – векторы пространства R^n, то определитель можно рассматривать как функцию от n векторных переменных: $\det A = \det(a_1, a_2, \ldots, a_3)$. Эта функция обладает свойством однородности (свойство 3)

$$\det(a_1, \ldots, \lambda a_i, \ldots, a_n) = \lambda \det(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n), \ \lambda \in R$$

и свойством аддитивности (свойство 4)

$$\det(a_1, \ldots, b_i + c_i, \ldots, a_n) = \det(a_1, \ldots, b_i, \ldots, a_n) + \det(a_1, \ldots, c_i, \ldots, a_n),$$

т.е. определитель матрицы как функция ее столбцов (строк) линеен по каждому переменному. Такие функции называются ***полилинейными***. Полилинейная функция называется ***кососимметрической***, если при перестановке любых двух аргументов функция меняет знак (свойство 2 определителя матрицы). Таким образом получаем, что *определитель есть кососимметрическая полилинейная функция столбцов (строк) матрицы*.

Из истории

Определитель (детерминант). *Термин происходит от латинского глагола determinare – ограничивать, определять. Первым к идее определителя пришел Г. Лейбниц, когда в конце XVII века занимался решением систем линейных алгебраических уравнений. Однако идеи Лейбница распространения не получили, и в 1750 году определители были заново открыты швейцарским математиком Габриэлем Крамером. Он же разработал метод решения систем линейных уравнений с помощью определителей, который сразу вошел в школьную программу. В 1772 году французский математик А.Т. Вандермонд опубликовал первое исследование, посвященное определителям* [1, 25]. *Первые достаточно полные изложения теории определителей принадлежат французским математикам О.-Л. Коши и Ж. Бине. Коши посвятил теории определителей большое число научных работ и, благодаря его усилиям, она стала самостоятельной дисциплиной. Рассматривались и различные обобщения понятия определителя. Например, решая задачи интегрального исчисления, К.Г. Якоби ввел функциональные определители. От определителей конечного порядка математики перешли к изучению бесконечных определителей. Первые шаги в этом направлении были сделаны еще в 1770 году Эрнстом Коттеричем, а общая теория начала создаваться спустя более чем столетие трудами А. Пуанкаре.*

Алгебраическое дополнение, минор. *Термин «минор» образован от латинского «minor» – меньший. Сначала под минором понимали меньшие детерминанты (определители). Затем в 1850 году Сильвестр ввел определение системы меньших миноров r-го порядка, полученных из исходного вычеркиванием строк и столбцов. В 1852 году он же ввел понятия окаймляющего и окаймленного миноров. До конца XIX века не разделяли четко понятия минора и алгебраического дополнения, и единых терминов для этих понятий в учебной литературе тоже не существовало. Наряду с термином «минор» использовались «младший детерминант» и «субдетерминант». Термины «алгебраическое дополнение» и «минор» входят в математический оборот с начала XX века.*

Способы вычисления определителей. *Наиболее общий способ вычислений определителей дает теорема Лапласа о разложении определителя по элементам строки (столбца), которая в частных случаях встречалась в работах Вандермонда, Безу и самого Лапласа конца XVIII века, однако в общем виде* *была сформулирована и доказана только Коши (1812)* [1]. *Якоби предпочитал предварительно преобразовывать определитель, добиваясь максимального количества нулей в строке (столбце) разложения в соответствии с правилами преобразований, не изменяющими значения определителя. Два простых мнемонических способа вычисления определителя 3-го порядка (по методу треугольников и приписыванием столбцов справа) принадлежат французскому математику Пьеру Саррюсу и носят его имя.*

Задачи для самостоятельного решения

1. (Далевская О.П.) Найти значение выражений

а) $\det A - M_{32} + A_{13}$;

б) $M_{21} + \det A - A_{23}$;

в) $A_{12} + \det A - M_{23}$, если

1.1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ -4 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; 1.2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ. 1.1. *а)* 16, *б)* 20; *в)* 16; 1.2. *а)* 16, *б)* 12; *в)* 8.

2. [10, 18] Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; *б)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & 1 & 1 \\ n & n & n & \dots & n & 1 \end{vmatrix}$; *в)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ n & n & n & \dots & n & 2n \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ . & . & . & \dots & . \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; *д)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ . & . & . & \dots & . \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$; *е)* $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}$;

$$ж)\ \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix};\ з)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix};\ и)\ \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ . & . & . & \dots & . \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Указания. а) представить матрицы, для которой вычисляется определитель, как произведение нижне- и верхнетреугольной матриц, все ненулевые элементы которых равны 1; б) из второй строки вычесть удвоенную первую, из третьей – утроенную первую и т.д.; в) элементы последней строки представить в виде сумм $0+n$, $0+n$, ..., $0+n$, $n+n$ *и представить определитель в виде суммы двух других; г) ко всем строкам, начиная со второй, прибавить первую; д) вычесть вторую строку из всех последующих, затем из второй вычесть первую, умноженную на 2; е) из каждого столбца вычесть последний, умноженный соответственно на* $a_1, a_2, \dots a_n$*; ж) ко второй строке прибавить первую, к третьей – получившуюся вторую и т.д.; з) все столбцы прибавить к первому, затем первую строку вычесть из всех остальных; и) вычесть последнюю строку из всех предыдущих.*

Ответ.а) 1; *б)* $(-1)^{n-1}(n-1)!$; *в)* $n!$; *г)* $n!$;
г) $-2(n-2)!$; *д)* $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$;
е) 1; *ж)* $(-1)^{n-1}(n-1)$; *и)* $(-1)^{n-1}n!$.

3. (Далевская О.П. – (ж)) Решить уравнения:

$$а)\ \begin{vmatrix} -3 & x & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 2x\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 4 = \begin{vmatrix} x & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix};\ б)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0;$$

$$в)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 0;\ г)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix} = 0;\ д)\ \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$е)\ \begin{vmatrix} x & -2 & 2 \\ 1 & x & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ ж)\ \begin{vmatrix} 1 & -3 & -x^3 \\ 2 & 4 & -4 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -278;\ з)\ \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0.$$

Ответ. а) -1.7; *б)* 0;1; *в)* -4; *г)* 1; -2; *д)* -1; 2;

е) 1;2; *ж)* $x_1 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i;\ x_2 = -3;\ x_3 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

з) $x_1 = 2;\ x_2 = 3;\ x_3 = 4$.

4. [19] Решить уравнение или неравенство:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$; *б)* $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \geq 0$;

в) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2x+3 \\ 3-x & 1 & 1 \\ 2x+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$; *г)* $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & x+5 & 2-x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \leq 5$;

д) $3x \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & x & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$.

Ответ. а) 5; *б)* $x \geq -\frac{41}{21}$; *в)* $x_1 = -3, x_2 = -\frac{5}{2}$;

г) $x \leq -7$; *д)* $x \leq -1$.

5. [19] Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; *б)* $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; *в)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$; *г)* $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; *е)* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$; *ж)* $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; *и)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; *к)* $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Указания. а) Выберем первые две строчки определителя и, используя теорему Лапласа, разложим определитель на сумму произведений определителей второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 17 .$$

Ответ. а) 17; *б)* 10; *в)* 100; *г)* 60; *д)* 10; *е)* -4; *ж)* -2; *з)* 90; *и)* 8; *к)* 4.

6. (Бакеева Л.В.) Даны матрицы A и B.

Не вычисляя, докажите, что

а) определитель матрицы A делится на 23, если числа 1081, 1403, 2093 и 1541 делятся на 23;

б) определитель матрицы B делится на 127, если числа 18161, 18669, 21717, 14097 и 23241 делятся на 127.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 8 & 8 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 7 & 0 & 2 \\ 6 & 6 & 1 & 9 & 4 \\ 1 & 9 & 7 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указания. Представить столбец (строку) как линейную комбинацию всех столбцов (строк) матрицы, чтобы элементы этого столбца (строки) делились на 23 или 127.

7. Объясните, как изменится определитель матрицы порядка n, если его строки написать в обратном порядке.

8. (Филимонова А.Н.) Пусть у матрицы A_n сумма элементов в каждой строке равна нулю. Чему может быть равен определитель матрицы A?

Ответ. $\det A_n = 0$.

9. (Филимонова А.Н.) Пусть A_n – квадратная матрица n-го порядка с целыми коэффициентами, у которой на главной диагонали все коэффициенты нечетные, а вне нее – четные. Каким может быть ранг такой матрицы?

Указание. Вычислить определитель матрицы, например, используя определение, в основе кторого лежит понятие «перестановка».

Ответ. $r(A) = n$.

10. (Филимонова А.Н.) Пусть A_n – квадратная матрица n-го порядка с целыми коэффициентами, у которой на главной диагонали все коэффициенты четные, а вне нее – нечетные. Каким может быть ранг такой матрицы?

Решение. Заметим, что, если к такой матрице прибавить матрицу ранга 1, состоящую из всех единиц, то получится матрица, ранг которой равен n. Значит, матрица имеет или ранг n или ранг $(n-1)$, меньше не может.

Ранг n достижим, если рассмотреть матрицу n-го порядка с нулями на главной диагонали и единицами вне главной диагонали.

Если n нечетное, можно получить ранг $(n-1)$. Для этого рассмотрим матрицу n-го порядка с нулями на главной диагонали и единицами вне главной диагонали, в которой последнюю строку заменили на сумму всех остальных строк.

Если n четное, ранг не может быть равен $(n-1)$. Пусть n четное и пусть A_n – наша матрица, докажем, что определитель матрицы A_n нечетный (следовательно, не равен нулю). Четность определителя матрицы A_n совпадает с четностью определителя матрицы B_n, у которой нули на главной диагонали, единицы вне главной диагонали и определитель равен $(-1)^{n-1}(n-1)$.

1.4. Обратная матрица

Если для матрицы A существует такая матрица A^{-1}, что выполняется двойное равенство $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, то матрица A^{-1} называется ***обратной матрицей*** к матрице A [13].

Двойное равенство требует, чтобы матрицы A и A^{-1} были квадратными одного порядка. Это требование является необходимым, но не достаточным для существования обратной матрицы. Для того, чтобы сформулировать достаточное свойство существования обратной матрицы, введем следующее определение:

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$. В противном случае матрица называется *вырожденной*.

Теорема . Любая невырожденная матрица A имеет обратную.

Доказательство (доказательство конструктивное и реализует один из способов нахождения обратной матрицы):

Пусть квадратная матрица A невырожденная. Составим матрицу S, элементы которой есть алгебраические дополнения к соответствующим элементам матрицы A. Матрица S называется матрицей ***алгебраических дополнений*** или ***союзной*** (***присоединенной***) для матрицы A и имеет вид:

$$S=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Докажем, что матрица $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}S^T$ является обратной к матрице A (таким образом мы докажем, что обратная существует). Для этого надо доказать, что $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$. Докажем первую часть этого равенства, вторая доказывается аналогично.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\det A}\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{21} & \vdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \vdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \vdots & A_{nn} \end{array}\right).$$

Если элементы произведения обозначить буквами c_{ij}, то все диагональные элементы $c_{ii}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=\det A$ (по теореме разложения), а все недиагональные $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{i1}A_{jk}=0$ (по свойству 6 определителей).

Таким образом, в результате перемножения матриц получим

$$A\cdot A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A & 0 & ... & 0 \\ 0 & \det A & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \det A \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Что требовалось доказать [13].

Теорема. Если для матрицы A существует обратная, то она единственная.

Для прямоугольной матрицы двойное равенство $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$ невозможно. В некоторых случаях можно найти прямоугольную матрицу, называемую *псевдообратной*, которая является обратной исходной матрице только слева или только справа, но общего алгоритма поиска такой матрицы нет.

Обратную матрицу A^{-1} для данной матрицы A можно получить *с помощью элементарных преобразований (метод «перегонки»).*

Для этого *расширить матрицу* A_n*, присоединив к ней единичную матрицу* E_n:

$$(A|E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

Далее реализовать алгоритм метода Жордана-Гаусса и привести матрицу $(A|E)$ к главному ступенчатому виду, т.е. к виду

$$(E|A^{-1})\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{array}\right), \text{ где } A^{-1}=\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица тесно связана с задачей нахождения неизвестного множителя в матричном уравнении вида $A \cdot X = B$ или $X \cdot A = B$, где матрицы A и B известны, а матрица X – искомая .

Если $A_{m\times m} \cdot X_{m\times n} = B_{m\times n}$ и $\det A_m \neq 0$, то $X_{m\times n} = A^{-1}_{m\times m} \cdot B_{m\times n}$.

Если $X_{m\times n} \cdot A_{n\times n} = B_{m\times n}$ и $\det A_n \neq 0$, то $X_{m\times n} = B_{m\times n} \cdot A^{-1}_{n\times n}$ [13].

Задачи для самостоятельного решения

1. (Магин М.И. – (*а–г*)) Найти обратную матрицу к данной матрице:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; *б)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$; *в)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$; *д)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$; *е)* $\begin{pmatrix} r & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r \end{pmatrix}$, $r \neq 0$.

Ответ. а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$; *б)* $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$; *г)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-2} & (-1)^{n-3} & \dots & -1 & 1 & 0 \\ (-1)^{n-1} & (-1)^{n-2} & \dots & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$;

д) элементы обратной матрицы определяются так: $\frac{1}{n-1}$, если $i \neq j$, и $-\frac{n-2}{n-1}$, если $i = j$;

е) $\begin{pmatrix} \frac{1}{r} & -\frac{1}{r^2} & \frac{1}{r^3} & \dots & (-1)^{n-1}\frac{1}{r^n} \\ 0 & \frac{1}{r} & -\frac{1}{r^2} & \dots & (-1)^{n-2}\frac{1}{r^{n-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & \dots & (-1)^{n-3}\frac{1}{r^{n-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{r} \end{pmatrix}_{n\times n}$.

2. Решить уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 2 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & n \\ 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Ответ. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$

3. Доказать, что композиция элементарых преобразований, которая приводит невырожденную матрицу A к единичной матрице, приводит единичную матрицу к матрице, обратной к A (матрице A^{-1}).

4. Изменится ли матрица A^{-1}, если в матрице A переставить две

строки? Обоснуйте ответ.

5. Изменится ли матрица A^{-1}, если в матрице A умножить строку на число, отличное от нуля? Обоснуйте ответ.

6. Изменится ли матрица A^{-1}, если в матрице A к одной строке прибавить другую строку, умноженную на число? Обоснуйте ответ.

7. Матрица A квадратная, и $A^2 + 2A + E = 0$. Доказать, что матрица A невырожденная, и найти A^{-1}.

8. Доказать, что если матрица $E + AB$ обратима, то матрица $E + BA$ обратима.

9. Пусть A и $B-$ целочисленные матрицы 10 порядка, для которых выполнено следующее условие: все матрицы $A+B$, $A+2B$, $A+3B$, …, $A+25B$ обратимы и имеют целочисленные обратные. Доказать, что матрица $A+2010B$ обратима и имеет целочисленную обратную матрицу.

Решение. Сначала заметим, что $\det(A+kB)^{-1} = \dfrac{1}{\det(A+kB)}$, и так как по условию оба определителя целые числа, то

$$\det(A+kB)^{-1} = \det(A+kB) = \pm 1 \text{ для } k = \overline{0,25}.$$

Рассмотрим функцию $D(x) = \det(A + xB)$, $x \in R$. Выражение $D^2(x) - 1$ представляет собой многочлен не выше, чем 20 степени, который по условию имеет по крайней мере 25 корней $x = 0,\ 1, ...,\ 25$. Это означает, что многочлен тождественно равен 0, и, следовательно,

$$\det(A+2010B)^{-1} = \det(A+2010B) = \pm 1.$$

Так как определитель матрицы $A+2010B$ не равен 0, обратная существует, и по формуле

$$(A+2010B)^{-1} = \frac{1}{\det(A+2010B)}(A+\tilde{2010B})$$

целочисленная.

2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

Рассмотрим произвольную систему из m линейных уравнений относительно n неизвестных $x_1,\ x_2,...,\ x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где числа a_{ij} называются коэффициентами системы, а числа b_i – свободными членами [2, 7].

Набор чисел $x_1,\ x_2,...,\ x_n$ называется ***решением*** системы, если при подстановке этих чисел в <u>каждое</u> уравнение системы все уравнения системы обращаются в тождества.

Система линейных уравнений называется ***совместной***, если у нее существует хотя бы одно решение, т.е. хотя бы один набор чисел $x_1,\ x_2,...,$ x_n. Если не существует такого набора чисел $x_1,\ x_2,...,\ x_n$, при подстановке которого выполнялось бы <u>каждое</u> уравнение системы, система называется ***несовместной*** (система не имеет решения). Если совместная система уравнений имеет единственное решение, она называется ***определенной***, иначе – ***неопределенной***.

Две системы называются ***равносильными***, если они имеют одно и то же множество решений.

Представим систему из m линейных уравнений и n неизвестных $x_1,\ x_2,...,\ x_n$ в матричном виде:

$$A_{m\times n} \cdot X_{n\times 1} = B_{m\times 1},$$

где $A_{m\times n}$ – матрица коэффициентов при неизвестных системы, $X_{n\times 1}$ – матрица-столбец неизвестных системы, $B_{m\times 1}$ – матрица-столбец свободных членов системы [13]:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix};\ X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};\ B_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

2.1. Матричный метод. Формулы Крамера

Пусть в системе уравнений число неизвестных равно числу уравнений и матрица коэффициентов A_n невырожденная, т.е. $\det A_n \neq 0$, и система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Если составить матричное уравнение $A_n \cdot X_{n\times1} = B_{n\times1}$ с неизвестной матрицей-столбцом $X_{n\times1}$, то для решения системы справедлива формула $X_{n\times1} = A_n^{-1} \cdot B_{n\times1}$, где A_n^{-1} – обратная матрица к матрице A_n. Эта формула реализует *матричный* метод решения систем линейных уравнений с невырожденной матрицей коэффициентов [13, 22].

На основе формулы $X_{n\times1} = A_n^{-1} \cdot B_{n\times1}$ можно получить еще один метод решения систем линейных уравнений с невырожденной матрицей коэффициентов.

Пусть $A_n \cdot X_{n\times1} = B_{n\times1}$ и $\det A_n = \Delta \neq 0$. Тогда существует обратная матрица A_n^{-1} для матрицы A_n, причем единственная:

$$A_n^{-1} = \frac{1}{\Delta} S^T = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Вычислим $X_{n\times1}$ по формуле $X_{n\times1} = A_n^{-1} \cdot B_{n\times1}$:

$$X_{n\times1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ \hdashline A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \hdashline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hdashline A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определитель матрицы A_n, разложенный по первому столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1}.$$

Легко увидеть, что если заменить в этом определителе первый столбец на столбец свободных членов $B_{n\times 1}$, а все остальные элементы оставить такими же, получим такое же выражение, что стоит в первой строке вычисленной матрицы:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1}.$$

Если то же самое проделать по очереди со всеми остальными столбцами определителя Δ, называемого главным, то получим, что неизвестные можно определять по формулам

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta},\ k = 1,\dots,n,$$

где для нахождения каждого вспомогательного определителя Δ_k k-й столбец в определителе Δ заменяется на столбец свободных членов системы уравнений. Полученные формулы называют ***формулами Крамера.*** Таким образом, доказана следующая теорема [7, 13]:

Теорема Крамера. Система n линейных уравнений с n неизвестными, главный определитель которой Δ отличен от нуля, имеет единственной решение, определяемое по формулам Крамера $x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$, $k = 1,\dots,n$, где Δ – главный определитель системы, а Δ_k – вспомогательные определители, получаемые из главного путем замены k-го столбца на столбец свободных членов.

Замечание. Применять метод Крамера имеет смысл, если система небольшого размера или абстрактно необходима формула, выражающая решения через параметры системы, так как метод трудоемкий и время работы вычисления значения одной неизвестной составляет $O(n!)$, а на все вычисления необходимо $O((n+1)!)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти значения параметров a и b, при которых системы линейных уравнений нельзя решить по правилу Крамера.

а) $\begin{cases} 2ax - 3by = 0, \\ 3ax - 6by = ab; \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} ax - by = f_1, \\ bx + ay = f_2. \end{cases}$.

Ответ. а) $x = -b,\quad y = -\dfrac{2}{3}a$, если $ab \neq 0$, нет решений, если $ab = 0$;

б) $x = \dfrac{f_1 d - f_2 b}{ad - bc}$, $y = \dfrac{af_1 - cf_2}{ad - bc}$, если $ad - bc \neq 0$,

нет решений, если $ad - bc = 0$.

2. Найти неизвестные коэффициенты многочлена или функции, удовлетворяющего условиям:

а) $f(x) = ax^2 + bx + c$; $f(-2) = -8, \quad f(1) = 4, \quad f(2) = -4$;

б) $f(x) = a \cdot 3^x + bx^2 + c$; $f(0) = 2, \quad f(1) = -1, \quad f(2) = 4$;

в) $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$; $f(-1) = 3, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = -15$;

г) $f(x) = a \cdot \log_3 x + bx + c$; $f(1) = 5, \quad f(3) = 8, \quad f(9) = 19$.

Ответ. а) $a = -3, b = 1, c = 6$; *б)* $a = -2, b = 3, c = 2$;
в) $a = -1, b = -3, c = 5$; *г)* $a = -1, b = 2, c = 3$.

3. [14] Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 10 млн. условных денежных единиц. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения на 60 %, второго – на 45 %. В результате суммарная прибыль должна вырасти в 1,5 раза. Какова величина прибыли каждого из отделений: а) в прошлом году; б) в нынешнем году.

Ответ. а) $3\frac{1}{3}$ млн. усл.ден.ед. – величина прибыли первого отделения в прошлом году; $6\frac{2}{3}$ млн. усл.ден.ед. – величина прибыли второго отделения в прошлом году.

б) $5\frac{1}{3}$ млн. усл.ден.ед. – величина прибыли первого отделения в нынешнем году; $9\frac{2}{3}$ млн. усл.ден.ед. – величина прибыли второго отделения в нынешнем году.

4. [14] Перед торговым предприятием возникла проблема – в каком соотношении закупить оборудование *A* и *B*: можно закупить 5 единиц оборудования *A* и 8 единиц оборудования *B* – всего за 92 тыс. руб., а можно, наоборот, закупить 8 единиц оборудования *A* и 5 единиц оборудования *B*. Торговое предприятие остановилось на первом варианте, так как при этом экономится сумма, достаточная для закупки двух единиц оборудования *A*. Какова цена оборудования *A* и оборудования *B*?

Ответ. 12 тыс. руб. – цена оборудования *A*,
4 тыс.руб. – цена оборудования *B*.

5. [14] Фирмой было выделено 236 тыс. у. е. на покупку 29 предметов для оборудования офиса: нескольких компьютеров по цене 20 тыс. у. е. за компьютер, офисных столов по 8,5 тыс. у. е. за стол, стульев по 1,5 тыс. у. е. за стул. Позже выяснилось, что в другом месте компьютеры можно приобрести по 19,5 тыс. у.е., а столы по 8 тыс. у.е. (стулья по той же цене), благодаря чему на ту же сумму было куплено на 1 стол больше. Выясните, какое количество единиц каждого вида оборудования было приобретено.

Ответ. Фирмой было приобретено
7 компьютеров, 10 столов и 13 стульев.

6. [14] Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года 3/8 вклада, который составляет 800 тыс.руб., вложили в первый банк, 1/8 во второй банк и оставшуюся часть вклада в третий банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 907 тыс.руб. Если бы первоначально 1/8 вклада положили в первый банк, 4/8 вклада во второй банк, оставшуюся часть вклада в третий банк, то к концу года сумма этих вкладов стала бы равна 894 тыс.руб. Если бы 4/8 вклада положили в первый банк, 3/8 вклада – во второй банк, оставшуюся часть вклада – в третий банк, то к концу года сумма этих вкладов была бы равна 903 тыс. руб. Какой процент начисляет каждый банк?

Ответ. Первый банк выплатил 15% годовых,
второй – 10% годовых, третий – 13% годовых.

7. (Далевская О.П.) Дана математическая модель:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 = 62, \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 69, \\ \frac{2}{9}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{4}{9}x_3 = 50. \end{cases}$$

а) Определите, какая из ниже приведенных задач *А* и *В* описывается этой моделью.

б) Для задачи, которой не соответствует данная модель, постройте верную модель.

в) Переведите обе системы в матричный вид и преобразуйте их к целочисленным.

г) Решите одну из систем методом Крамера, а другую – матричным методом. Проверьте правильность решения его подстановкой в систему уравнений.

Задача А.

Наблюдается миграция в трех популяциях:

- в 1-ой популяции половина особей не мигрировала, а вторая половина мигрировала во 2-ую и 3-ю популяции в отношении 3:1*;*

- во 2-ой популяции также не мигрировала половина особей, а вторая половина распределилась по 1-ой и 3-ей популяции в отношении 2:1*;*

- в 3-ей популяции осталось $\frac{4}{9}$ *особей, а другие мигрировали в 1-ю и 2-ю популяции в отношении* 2:3.

Новая численность популяций составила в порядке их нумерации 62, 69 и 50 особей.

Найти начальные численности популяций.

Задача В

Лаборант, взяв три водных раствора А, В и С разной концентрации одной кислоты и смешав их в некоторых объемных отношениях (см. табл.), получил растворы I, II и III с новыми концентрациями. Найти концентрации растворов А, В и С.

	Отношения объемов		
	Раствор А	Раствор В	Раствор С
Раствор I – 62%	1	3	1
Раствор II – 69%	2	3	1
Раствор III – 50%	2	3	4

2.2. Однородная система линейных алгебраических уравнений.

Система уравнений $A_{m\times n}\cdot X_{n\times 1}=B_{m\times 1}$, в которой $B_{m\times 1}=O$, т.е. $A_{m\times n}\cdot X_{n\times 1}=O$, называется однородной системой линейных алгебраических уравнений [2, 7]:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ \quad\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как существует тривиальное решение: $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

Теорема. Однородная система линейных уравнений имеет единственное (тривиальное) решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен числу неизвестных: $r(A)=n$; хотя бы одно нетривиальное решение (бесконечное множество нетривиальных решений) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы меньше числа неизвестных: $r(A) < n$.

Следствие. Если число уравнений однородной системы меньше числа неизвестных $(m < n)$, то система имеет нетривиальные решения.

Теорема. Если число уравнений однородной системы равно числу неизвестных $(m = n)$, то нетривиальные решения существуют тогда и только тогда, когда определитель системы $\det A_n = \Delta = 0$.

Частным решением системы уравнений будем называть матрицу-столбец $X_{част}$ значений $x_1,\ x_2,...,\ x_n$, при подстановке которых в каждое уравнение системы все уравнения системы обращаются в тождества. Совокупность всех частных решений системы уравнений называется ***общим решением***.

Решения $X_1,\ X_2,...,\ X_n$, называются ЛЗ, если существуют такие константы $\lambda_1,\ \lambda_2,...,\ \lambda_n$, что выполняется следующее равенство: $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_n X_n = 0$ при условии, что среди коэффициентов λ_i есть хотя бы один, не равный нулю. Если же указанное выше равенство возможно лишь при условии $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, то система решений $X_1,\ X_2,...,\ X_n$, называется ЛНЗ [2, 7].

Свойства решений однородной системы уравнений:

1. Сумма решений однородной системы уравнений также является решением этой системы.

2. Произведение решения однородной системы уравнений на любое число также является решением этой системы.

Замечание. Любая линейная комбинация решений однородной системы уравнений также является решением этой однородной системы.

Пусть ранг матрицы однородной системы уравнений равен r, $r(A) = r$. Значит, есть хотя бы один минор порядка r, который не равен нулю (*базисный минор*). При этом все миноры, порядок которых выше r, равны нулю или не существуют.

Если коэффициенты при r переменных совместной системы уравнений образуют базисный минор матрицы системы $A_{m\times n}$, то эти r переменных называются ***базисными***. Остальные $n - r$ переменных называются ***свободными***.

Теорема. Если ранг матрицы однородной системы уравнений равен r, то такая системы уравнений имеет $n - r$ линейно независимых решений: $X_1,\ X_2,...,\ X_{n-r}$.

Любая совокупность $n - r$ линейно независимых решений однородной системы алгебраических уравнений называется

фундаментальной системой решений (ФСР) данной системы.

Фундаментальная система решений определяется неоднозначно, т.е. однородная система может иметь разные фундаментальные системы, состоящие из $n-r$ линейно независимых решений [2,7, 11].

Теорема *(об общем решении однородной системы).*

Если решения $X_1,\ X_2,...,\ X_{n-r}$.образуют фундаментальную систему решений, то общее решение однородной системы алгебраических уравнений имеет вид:

$$X_{общ}=c_1X_1+c_2X_2+...+c_{n-r}X_{n-r},\text{ где } c_i\in R,\ i=\overline{1,.n-r}.$$

Замечание. Любое решение однородной линейной системы является линейной комбинацией решений фундаментальной системы.

Пусть $r(A)=r<n$. Чтобы построить фундаментальную систему решений однородной системы линейных алгебраических уравнений, необходимо привести матрицу системы к главному ступенчатому виду, например,

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1r+1}\dots a'_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2r+1}\dots a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots\ \ddots\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{rr+1}\dots a'_{rn} \end{pmatrix}.$$

Далее, выписать в соответствии с ней систему уравнений, эквивалентную исходной системе

$$\begin{cases} x_1+a'_{1r+1}x_{r+1}+...+a'_{1n}x_n=0, \\ x_2+a'_{2r+1}x_{r+1}+...+\dot{a}_{2n}x_n=0, \\ \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ x_r+a'_{rr+1}x_{r+1}+...+.a'_{rn}x_n=0. \end{cases}$$

Разрешить каждое уравнение относительно базисной переменной

$$\begin{cases} x_1=-a'_{1r+1}x_{r+1}-...-a'_{1n}x_n, \\ x_2=-a'_{2r+1}x_{r+1}-...-\dot{a}_{2n}x_n, \\ \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ x_r=-a'_{rr+1}x_{r+1}-...-.a'_{rn}x_n. \end{cases}$$

Выписать общее решение системы

$$X_{общ}=\begin{pmatrix} -a'_{1r+1}x_{r+1}-\ldots-a'_{1n}x_n \\ -a'_{2r+1}x_{r+1}-\ldots-\dot{a}_{2n}x_n \\ \vdots \\ -a'_{rr+1}x_{r+1}-\ldots-.a'_{rn}x_n \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ x_{r+1},\ldots,x_n\in R.$$

Полагая, например, $x_{r+1}=-\alpha_1,\ldots,x_n=-\alpha_{n-r}$, где $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-r}\in R$ некоторые параметры, общее решение можно записать в виде

$$X_{общ}=\alpha_1\begin{pmatrix} a'_{1r+1} \\ a'_{2r+1} \\ \vdots \\ a'_{rr+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\ldots+\alpha_{n-r}\begin{pmatrix} a'_{1n} \\ \dot{a}_{2n} \\ \vdots \\ a'_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},\ \text{где}$$

$\left(a'_{1r+1}\ \ a'_{2r+1}\ \ldots\ a'_{rr+1}\ \ 1\ \ldots\ 0\right)^T$, …, $\left(a'_{1n}\ \ a'_{2n}\ \ldots\ a'_{rn}\ \ 0\ \ldots\ 1\right)^T$ – фундаментальная система решений однородной системы уравнений, соответствующая данной неоднородной системе уравнений.

Задачи для самостоятельного решения

1. Общее решение некоторой однородной СЛАУ имеет вид: $\alpha(1,1,2,-1)^T+\beta(3,0,-2,1)^T$. Какое наименьшее число уравнений может иметь такая система? Приведите пример системы с таким решением.

Ответ. $\begin{cases} x_1-4x_2-3x_4=0, \\ x_3+2x_4=0. \end{cases}$

2. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей A.

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; *б)* $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ. а) $\begin{pmatrix} -\alpha+\beta & \frac{2}{3}\alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$; *б)* $\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

3. Найти фундаментальную систему решений (ФСР) однородной системы уравнений в зависимости от значений параметра λ:

$$\begin{cases} -4x_1+(2+2\lambda)x_2+2\lambda x_3+2\lambda x_4=0, \\ \lambda x_1+(1+\lambda)x_2+\lambda x_3+\lambda x_4=0, \\ \lambda x_1+(1+\lambda)x_2+2x_3+\lambda x_4=0, \\ -\lambda x_1-(1+\lambda)x_2-\lambda x_3-(2+2\lambda)x_4=0. \end{cases}$$

Ответ. При $\lambda=-1$ ФСР: $(0,\ 1,\ 0,\ 0)^T$;

при $\lambda=2$ ФСР: $(-3,\ 2,\ 0,\ 0)^T$, $(-2,\ 0,\ 2,\ 0)^T$;

при $\lambda=-2$ ФСР: $(1,\ -2,\ 0,\ 0)^T$, $(0,\ -2,\ 0,\ 1)^T$;

в остальных случаях только тривиальное решение.

4. Найти, при каких значениях параметра a совместна система

$$\begin{cases} x+2y+(a-1)z=4, \\ 3x+7y+a^2z=-3, \\ 4x+9y+a^2z=a. \end{cases}$$

Ответ. $a\in R$.

5. Образуют ли строки каждой из матриц

$$A=\begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3+x_4+6x_5=0, \\ 5x_1+9x_2+7x_3+4x_4+7x_5=0, \\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4+11x_5=0, \\ x_1+6x_2+8x_3+5x_4-4x_5=0. \end{cases}$$

Указание. Если ранг матрицы коэффициентов при неизвестных системы равен r, то необходимо проверить, что ранг матрицы A (соответственно B) равен $(5-r)$ и строки матрицы A (соответственно B) являются решениями исходной системы.

Ответ. Строки матрицы A не образуют, а строки матрицы B образуют.

6. (Далевская О.П., Бакеева Л.В.) *Модель международной торговли.* Часть бюджета страны (торговый бюджет) расходуется только на закупки внутри страны и вне ее. Пусть a_{ij} – доля торгового бюджета x_j, которую j-я страна тратит на закупку товаров у i-й страны. Коэффициенты a_{ij} составляют структурную матрицу торговли.

Для i-й страны общая выручка от внутренней и внешней торговли выражается формулой:

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 .$$

Торговля будет сбалансированной (бездефицитной), если выручка страны от торговли равна торговому бюджету этой страны $\left(A \cdot X = X,\ X = (x_1, x_2, x_3)\right)$.

Структурная матрица торговли трех стран имеет вид:

$$а)\ A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix};\ б)\ A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix};$$

$$в)\ A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix};\ г)\ A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Найти соотношение бюджетов стран, удовлетворяющее сбалансированной торговле.

Ответ. а) Матрица не сбалансирована, решений нет;
б) Бюджеты всех стран равны;
в) $x_1 : x_2 : x_3 = 5:7:4$; *г)* $x_1 : x_2 : x_3 = 30:32:21$.

2.3. Неоднородная система линейных алгебраических уравнений

Неоднородной системой линейных алгебраических уравнений называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m . \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы $(A|B)$:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Методом Гаусса приведем матрицу системы к ступенчатому виду, найдем ранги матрицы коэффициентов $r(A)$ и расширенной матрицы $r(A|B)$. Исследование рангов позволяет сделать вывод о наличии решений системы [7, 13, 17]:

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранги матрицы коэффициентов и расширенной матрицы равны.

Расширенная матрица получается из матрицы коэффициентов путем добавления столбца свободных членов. Этот столбец может быть ЛЗ с остальными столбцами матрицы A и тогда $r(A) = r(A|B)$, или быть ЛНЗ с ними – тогда $r(A|B) = r(A) + 1$. Таким образом, при приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому виду может получиться одна из трех ситуаций:

1) $r(A) \neq r(A|B)$, следовательно, система несовместна, решений нет.

2) $r(A) = r(\overline{A}) = n$, следовательно, система совместная и определенная, т.е. имеет единственное решение.

3) $r(A) = r(\overline{A}) < n$, следовательно, система совместная и неопределенная, т.е. имеет бесконечное множество решений.

Если система уравнений совместная и неопределенная, необходимо выделить базисные неизвестные, их количество равно $r(A)$, и свободные неизвестные, их количество равно $n - r$. Важно помнить при выборе базисных неизвестных, что минор, составленный из столбцов базисных неизвестных должен быть, отличен от нуля. Базисные неизвестные выразить через свободные неизвестные. Свободные неизвестные при этом могут принимать любые значения [7, 13, 17].

Общим решением системы уравнений называются такие соотношения между базисными и свободными неизвестными, из которых можно получить любое частное решение системы. Таким образом, в случае существования бесконечного множества решений системы ***общее решение*** представляет собой формулы, в которых каждая базисная неизвестная выражена через свободные неизвестные.

Если расширенную матрицу совместной и неопределенной системы методом Жордана-Гаусса привести к главному ступенчатому виду, например,

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & a'_{13} & \dots & 0 & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & \dots & 0 & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{rn} & b'_r \end{array}\right),$$

выписать в соответствии с ней систему уравнений, эквивалентную исходной системе

$$\begin{cases} x_1 + a'_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ x_2 + a'_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + \dot{a}_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad x_r + .a'_{rn}x_n = b'_r, \end{cases}$$

разрешить каждое уравнение относительно базисной переменной

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 - a'_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{1n}x_n, \\ x_2 = b'_2 - a'_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - \dot{a}_{2n}x_n, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_r = b'_r - .a'_{rn}x_n, \end{cases}$$

будет получено общее решение системы

$$X_{общ} = \begin{pmatrix} b'_1 - a'_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{1n}x_n \\ b'_2 - a'_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - \dot{a}_{2n}x_n \\ \vdots \\ b'_r - .a'_{rn}x_n \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ x_{r+1}, \ldots, x_n \in R.$$

Полагая, например, $x_{r+1} = -\alpha_1, \ldots, x_n = -\alpha_{n-r}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r} \in R$ – некоторые параметры, общее решение можно записать в виде

$$X_{общ} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} a'_{1r+1} \\ a'_{2r+1} \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_{n-r} \begin{pmatrix} a'_{1n} \\ \dot{a}_{2n} \\ \vdots \\ a'_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $(b'_1 \ b'_2 \ \ldots \ b'_r \ \ 0 \ \ldots \ 0)^T$ – частное решение системы уравнений, полученное при $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_{n-r} = 0$;

$(a'_{1r+1} \ a'_{2r+1} \ \ldots \ 0 \ \ 1 \ \ldots \ 0)^T, \ \ldots, \ (a'_{1n} \ a'_{2n} \ \ldots \ a'_{rn} \ \ 0 \ \ldots \ 1)^T$ – фундаментальная система решений однородной системы уравнений, соответствующая данной неоднородной системе уравнений.

Из истории

Теорема Кронекера-Капелли. *Эта теорема должна была бы называться теоремой Кронекера-Доджсона. Л. Кронекер не* *публиковал этот результат, но излагал его в своем курсе лекций по теории систем линейных уравнений примерно с 60-х годов XIX века. Ч.Л. Доджсон, автор книг «Алиса в стране чудес» и «Алиса в зазеркалье», занимался математикой. В 1867 голу он опубликовал курс лекций под названием «Трактат по теории детерминантов», в котором независимо от Кронекера была изложена теорема о решении системы линейных алгебраических уравнений. Капелли слушал лекции Кронекера, а после привел эту теорему в своей статье в математическом журнале, издаваемом Пеано в Турине в 1892 году* [1]. *Таким образом публикация появилась почти через 30 лет после появления теоремы Кронекера, и Капелли на нее никак не претендовал.*

Задачи для самостоятельного решения

1. (Магин М.И.) Решить систему линейных уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ -6x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -2, \\ 6x_1 - 6x_2 + 10x_3 = 11; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + -3x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -4. \end{cases}$$

Ответ. а) $x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{1}{2},\ x_3 = \frac{7}{5}$;

б) $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = -1$.

2. Найти общее решение системы $Ax = b$.

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & -2 & -4 & -5 \\ 3 & -6 & -4 & -8 & -13 \\ 2 & -4 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. а) система несовместна;

б) $x_1 = 1 + 2\alpha - \beta,\ x_2 = \alpha,\ x_3 = 3 - 4\beta,\ x_4 = 0,\ x_5 = \beta$,

$\alpha, \beta \in R$.

3. [4, 8] Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; *б)* $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 2 & 9 & 8 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; *г)* $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$; *е)* $X \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 8 & 9 & 6 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. а) $X = \begin{pmatrix} 14-22\alpha & 1-22\beta \\ -4+5\alpha & 5\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in R$;

б) уранение не имеет решения;

в) уранение не имеет решения;

г) $X = \begin{pmatrix} 1+8\alpha & 1+8\beta \\ -1-5\alpha & 1-5\beta \\ 1-2\alpha & -1-2\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in R$;

д) $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; *е)* $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

4. [10] Решить систему матричных уравнений:

а) $\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} -9 & -8 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}; \end{cases}$

$$б)\ \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Ответ. а) $X = (1\ \ 2), \quad Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 5 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix};$

б) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

5. (Магин М.И.) Доказать, используя метода Гаусса, что линейная независимость строк в квадратной матрице равносильна линейной независимости столбцов.

6. Общее решение некоторой СЛАУ имеет вид:

$$(3\alpha + \beta,\ \alpha + \beta,\ -2\alpha - \beta,\ 3\beta + 1)^T.$$

Какое наименьшее число уравнений может иметь такая система? Приведите пример системы с таким решением.

Ответ. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -6x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

7. (Магин М.И.) 24 студента решали 25 задач. У преподавателя есть таблица размером 24×25, в которой записано, кто какие задачи решил. Оказалось, что каждую задачу решил хотя бы один студент. Докажите, что

а) можно отметить некоторые задачи «галочкой» так, что каждый из студентов решил чётное число (в частности, может быть, нуль) отмеченных задач;

б) можно отметить некоторые из задач знаком «$+$», а некоторые из остальных – знаком «$-$» и приписать каждой задаче некоторое натуральное число баллов так, чтобы каждый студент набрал поровну баллов за задачи, отмеченные знаками «$+$» и «$-$».

8. (Филимонова А.Н.) Пусть многогранник задан набором неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

где a_{ij}, $b_i \in Z$. И пусть у всякой квадратной подматрицы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

определитель равен 0, 1 или −1. Докажите, что вершины заданного многогранника имеют целочисленные координаты.

Решение. В вершинах многогранника ранг неравенств, обращающихся в равенства, равен n. Получаем СЛАУ с невырожденной квадратной подматрицей матрицы A и с целочисленным вектором в правой части. Систему можно решить, например, методом Крамера. По условию определитель всякой квадратной подматрицы матрицы A равен 1 или −1, значит, система имеет целочисленные решения, т.е. координаты вершин заданного многогранника целочисленные.

3. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

3.1. Линейные пространства и подпространства

Пусть дано множество $L = \{a, b, c, ...\}$, элементы которого $a, b, c, ...$. Пусть в множестве определены операции:

- операция *сложения,* которая всякой паре элементов a, b из множества L ставит в соответствие однозначно определенный элемент $a + b$ из L, называемый их суммой;

- операция *умножения на действительное число* λ, причем произведение λa элемента a на число λ однозначно определено и принадлежит к L [6, 9].

Линейным пространством $L = \{a, b, c, ...\}$ называется множество элементов, относительно которых определены операции сложения и умножения на действительное число, причем результаты этих операций принадлежат этому же множеству. Таким образом, множество L замкнуто относительно операций сложения и умножения на число: $a + b \in L, \quad \lambda a \in L \; \forall \lambda \in R$.

Элементы множества L будут называться векторами, а само множество L – линейным (или векторным или аффинным) пространством, если указанные операции обладают следующими свойствами. Для $\forall a, b, c \in L$ и $\forall \alpha, \beta \in R$ выполняются следующие аксиомы [6, 9, 11]:

1. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения);

2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения);

3. $\exists 0 \in L \Rightarrow a + 0 = a$ (существование нулевого элемента;

4. $\exists \overline{a} \in L \Rightarrow a + \overline{a} = 0$ (существование противоположного элемента);

5. $1 \cdot a = a$;

6. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;

7. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ (дистрибутивность);

8. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ (дистрибутивность).

Теорема. Нулевой элемент единственен.

Теорема. Для $\forall a \in L$ противоположный элемент единственен.

Теорема. $0 \cdot a = 0$.

Теорема. $\overline{a} = (-1) \cdot a$.

Примером линейного пространства является ***n*-мерное *векторное пространство***. n-мерным вектором называется упорядоченная система n чисел $a = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Числа α_i, $i = \overline{1, n}$ называются компонентами вектора a.

Векторы $a=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ и $b=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$ считаются равными в том случае, если совпадают их компоненты, стоящие на одинаковых местах $\alpha_i=\beta_i$, $i=\overline{1,n}$. Например,

1. Векторы – направленные отрезки (геометрические векторы), выходящие из начала координат на плоскости или в трехмерном пространстве, будут при фиксированной системе координат соответственно двух- и трехмерными векторами.

2. Коэффициенты всякого линейного уравнения с n неизвестными составляют n-мерный вектор.

3. Всякое решение любой системы линейных уравнений с n неизвестными представляет собой n-мерный вектор.

4. Если дана матрица из m строк и n столбцов, ее строки будут n-мерными векторами, а столбцы m-мерными векторами.

5. Сама матрица из m строк и n столбцов может рассматриваться как mn-мерный вектор, если записать элементы матрицы подряд строчку за строчкой [9, 11].

Суммой векторов называется вектор, компоненты которого являются суммой соответствующих компонент слагаемых векторов:

$$a+b=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,....\alpha_n+\beta_n).$$

Сложение векторов коммутативно: $a+b=b+a$ и ассоциативно: $(a+b)+c=a+(b+c)$.

Нулевым вектором, $0=(0,0,...,0)$, называется вектор, все компоненты которого равны нулю. При этом выполняется равенство:

$$a+0=(\alpha_1+0,\alpha_2+0,....\alpha_n+0)=a.$$

Противоположным вектору $a=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ называется вектор $-a=(-\alpha_1,-\alpha_2,...,-\alpha_n)$, для которого выполняется равенство:

$$a+(-a)=0.$$

Произведением вектора $a=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ ***на число*** k называется вектор, компоненты которого равны произведению на число k соответствующих компонент вектора a:

$$ka=ak=(k\alpha_1,k\alpha_2,...,k\alpha_n).$$

Из этого определения вытекают следующие важные свойства:

1. $k(a\pm b)=ka\pm kb$;
2. $(k\pm l)a=ka\pm la$;
3. $k(la)=(kl)a$;
4. $1\cdot a=a$;
5. $0\cdot a=0$;
6. $(-1)\cdot a=-a$;
7. $k\cdot 0=0$;

8. если $k \cdot a = 0$, то или $k = 0$, или $a = 0$.

Совокупность всех n-мерных векторов с действительными компонентами, рассматриваемая с определенными в ней операциями сложения векторов и умножения вектора на число, называется *n-мерным векторным пространством* [6, 7, 9].

Вектор $b = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ из n-мерного векторного пространства называется *пропорциональным* вектору $a = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, если существует такое число k, что $b = ka$. В частности, нулевой вектор пропорционален любому вектору a, поскольку $0 = 0 \cdot a$. Если $b = ka$ и $b \neq 0$, откуда $k \neq 0$, то $a = k^{-1}b$, т.е. для ненулевых векторов пропорциональность обладает свойством симметричности.

Непустое подмножество L_1 линейного пространства L называется ***линейным подпространством*** этого пространства, если само оно является линейным пространством по отношению к определенным в L операциям сложения векторов и умножения вектора на число. Для того, чтобы непустое подмножество L_1 пространства L было его линейным подпространством, достаточно выполнения следующих требований:

1. Если векторы a и b принадлежат к L_1, то и вектор $a + b$ также содержится в L_1;

2. Если вектор a принадлежат к L_1, то и вектор αa также содержится в L_1 при любом значении числа α [6, 7, 9].

Например, множество всех векторов, параллельных одной и той же плоскости, является подпространством всех геометрических векторов пространства.

Множество, состоящее из одного нулевого вектора, называется ***нулевым подпространством***.

Из истории

Линейное пространство. *Теория линейного пространства сформировалась на базе исследований по алгебре и векторному анализу Дедекинда, Кронекера, Фробениуса, Сильвестра, Лагерра, Пеано и др. В 1888 году Дж. Пеано первым дал определение n-мерного линейного пространства, сформулировал систему аксиом линейного пространства в приложении к «Геометрическому исчислению…». Именно Джузеппе Пеано разработал новую концепцию, согласно которой основными понятиями теории стали вектор и точка. Аксиоматика Пеано была воспроизведена в книге Г. Вейля «Пространство. Время. Материя» (1918) и с тех пор стала называться «аксиоматикой Вейля».*

Аксиома. *Греческое слово «αξιομα» означает уважение, достоинство, авторитет. Под аксиомой понимали очевидное утверждение, не требующее доказательства. Математика в Древней Греции была частью философии. Термин «аксиома» стал известен из трудов греческого философа и создателя формальной логики Аристотеля (4 в. до РХ), сформулировавшего логические принципы дедуктивного построения математики. Эти принципы были реализованы в «Началах» Евклида, в первой книге которых сформулированы 5 постулатов и 4 аксиомы, на основе которых логически выводились все теоремы геометрии. Пятый постулат книги обладал более сложной формулировкой, отличавшей его от других постулатов и аксиом. Он формулировался так: нужно потребовать чтобы, когда прямая, пересекая две прямые, образует внутренние односторонние углы, составляющие в сумме меньше двух прямых углов, эти прямые при продолжении пересекались в точке, лежащей с той стороны, где расположены эти углы. Возникло подозрение, что это скорее теорема, и пятый постулат можно доказать, опираясь на остальные постулаты и аксиомы. Над этой задачей сотни лет безуспешно работали многие геометры. Работа по проблеме пятого постулата не была абсолютно бесполезной, благодаря ей появилась неевклидова геометрия и постепенно формировались представления об основных понятиях и принципах аксиоматического метода (Н.И. Лобачевский, Я. Бойяи, Дж. Саккери, Е. Бельтрами и др.).*

С конца XIX века, с появлением работ М. Паша и Дж. Пеано, начал активно развиваться аксиоматический метод построения теории. Были введены неопределяемые понятия и основные предположения (аксиомы), а также понятия независимости, полноты и непротиворечивости системы аксиом. Аксиомы линейного векторного пространства впервые были сформулированы итальянским математиком Дж. Пеано в 1888 году.

Коммутативность – т*ермин, который происходит от латинского «commutatio» – перемена, обмен.* ***Ассоциативность*** *– термин, который происходит от латинского глагола «associare» – сочетать, группировать. Был введен У.Р. Гамильтоном в 1843 году.* ***Дистрибутивность*** *– термин, который происходит от латинского «distributio» – разделение. Основные законы сложения и умножения были введены при разработке новых исчислений – теории комплексных и гиперкомплексных чисел. В XIX веке коммутативность и* *ассоциативность сложения были включены в систему аксиом* [1]. *Термины «коммутативность» и «дистрибутивность» ввел французский артиллерийский офицер и преподаватель Артиллерийской школы Франсуа-Жозеф Сервуа.*

Задачи для самостоятельного решения

1. [18] Являются ли следующие множества линейными пространствами?

а) Множество направленных отрезков плоскости с общим началом;

б) Множество решений однородной системы линейных алгебраических уравнений;

в) Множество квадратных матриц порядка n.

Ответ. *а)*, *б)*, *в)* Являются.

2. [18] Являются ли следующие множества подпространствами соответствующего линейного пространства V:

а) Решения однородной системы линейных алгебраических уравнений; (m уравнений, n неизвестных). (пространство V – пространство R^n);

б) Решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений (m уравнений, n неизвестных) (пространство V – пространство R^n);

в) Множество многочленов $P_n(t)$, где $t \in [a,b]$ (пространство V – пространство $C_{[a,b]}$);

г) Множество направленных отрезков прямой с началом 0 (пространство V – пространство R^2 (геометрическое));

д) Множество квадратных матриц порядка n, у которых определитель равен единице;

е) Множество квадратных матриц порядка n, у которых сумма элементов равна нулю (пространство V – пространство M_n).

Ответ. *а)*, *в)*, *г)*, *е)* Да; *б)*, *д)* Нет.

3. (Далевская О.П.) Доказать, что линейное пространство решений однородной системы линейных алгебраических уравнений – это линейная оболочка этого пространства.

4. (Далевская О.П.) Доказать, что линейное пространство решений однородной системы линейных алгебраических уравнений – это линейная оболочка фундаментальной системы решений этой системы.

5. (Далевская О.П.) Доказать, что фундаментальная система решений однородной системы линейных алгебраических уравнений – это базис пространства ее решений.

6. (Далевская О.П.) Доказать, что линейное пространство V – это линейная оболочка системы $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}_{a_i \in V}$ тогда и только тогда, когда $\dim V = rang\{a_i\}_{i=1}^n$.

7. (Далевская О.П.) Доказать, что ранг любой системы векторов пространства V не превосходит размерности V.

8. [18] Доказать, что коммутативность сложения векторов ($x + y = y + x$ для любых $x, y \in V$) является следствием остальных условий, наложенных на операции в определении линейного пространства, и, следовательно, может быть вычеркнута из определения.

9. [18] Доказать, что $1 \cdot x = x$, для любых $x \in V$, не является следствием остальных условий, наложенных на операции в определении линейного пространства.

10. [16] Будет ли множество $V = \{x = (x_1, x_2, \ldots) | x_i \in R\}$ всех вещественных последовательностей с обычными (поэлементными) операциями сложения и умножения на скаляр являться линейным пространством?

Ответ. Да.

11. [16] Будет ли множество

$$V = \{x = (x_1, x_2, \ldots) | x_i \in R, \exists M > 0 \ \forall i \ |x_i| < M\}$$

всех вещественных ограниченных последовательностей с обычными (поэлементными) операциями сложения и умножения на скаляр являться линейным пространством?

Ответ. Да.

12. [16] Будет ли множество $V = \{x = (x_1, x_2, \ldots) | x_i \in R, \forall i \ |x_i| < M\}$ вещественных ограниченных числом $M > 0$ последовательностей с обычными (поэлементными) операциями сложения и умножения на скаляр являться линейным пространством?

Ответ. Нет.

13. [16] Будет ли множество $V = \{x = (x_1, x_2, \ldots) | x_i \in R, \forall i \ x_{i+N} = x_i\}$ всех вещественных периодических с натуральным периодом последовательностей с обычными (поэлементными) операциями сложения и умножения на скаляр являться линейным пространством?

Ответ. Да.

14. [16] Будет ли множество всех вещественнозначных функций, определенных на отрезке $[a, b]$, $a < b$ с обычными (поэлементными) операциями сложения и умножения на скаляр являться линейным пространством?

Ответ. Да.

15. [16] Будет ли множество всех непрерывных вещественнозначных функций, определенных на множестве всех

вещественных чисел и периодических с периодом T с обычными (поэлементными) операциями сложения и умножения на вещественное число являться линейным пространством?

Ответ. Да.

16. [16] Будет ли множество всех непрерывных периодических вещественнозначных функций, определенных на множестве всех вещественных чисел, с обычными (поэлементными) операциями сложения и умножения на вещественное число являться линейным пространством?

Ответ. Нет.

17. [18] Пусть множество V совпадает с множеством R^n, то есть состоит из всех вектор-столбцов с n вещественными элементами. Операция умножения на скаляр определена так же, как в R^n. Будет ли множество V с определенной ниже операцией сложения векторов является линейным пространством? Если нет, то укажите, какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

а) $\forall a, b \in R^n$ сумма $a + b = (a_n + b_n, ..., a_2 + b_2, a_1 + b_1)$;

б) $\forall a, b \in R^n$ сумма $a + b = (0, a_2 + b_2, ...a_n + b_n)$;

в) $\forall a, b \in R^n$ сумма $a + b = (a_1 - b_1, ...a_n - b_n)$;

г) $\forall a, b \in R^n$ сумма $a + b = (a_1 + 2b_1, ...a_n + 2b_n)$.

Ответ. Не выполняются условия:
а) 2, 3, 4, 6 при $n > 1$;
б) 3, 6; *в)* 1, 2, 6; *г)* 1, 2, 6.

18. [16] Будут ли подпространствами линейного пространства R^n, $n \geq 2$, следующие множества векторов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$?

а) Множество всех векторов с первым элементом, равным квадрату второго: $x_1 = x_2^2$.

б) Множество всех векторов, у которых второй элемент в два раза больше первого: $x_2 = 2x_1$.

в) Множество всех векторов, у которых второй элемент на два больше первого: $x_2 = x_1 + 2$.

г) Множество всех векторов, у которых абсолютные величины первого и второго элементов равны: $|x_1| = |x_2|$.

д) Множество всех векторов, у которых первый элемент равен второму: $x_1 = x_2$.

е) Множество всех векторов, у которых произведение первого и второго элементов неотрицаьельно: $x_1 x_2 \geq 0$.

Ответ. *а*), *в)*, *г)*, *е)* Нет. *б)*, *д)* Да.

19. [16] Будут ли подпространствами линейного пространства $M_n(R)$, $n \geq 2$, следующие множества матриц n-го порядка $A = (a_{ij})$?

а) Множество всех трехдиагональных матриц, у которых $a_{ij} = 0$ при $|i - j| > 1$.

б) Множество всех матриц, квадрат которых равен нулю $A^2 = 0$.

в) Множество всех вырожденных матриц.

г) Множество всех матриц, след которых равен нулю:
$tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = 0$

д) Множество всех матриц, у которых угловые элементы равны: $a_{11} = a_{1n} = a_{n1} = a_{nn}$.

е) Множество всех симметричных (кососимметричных) матриц $A^T = A$, $(A^T = -A)$.

Ответ. а), г), д), е) Да; *б), в)* Нет.

20. [16] Будут ли подпространствами линейного пространства $R[x]_n$, следующие множества многочленов?

а) Множество всех $R[x]_m$ многочленов степени не выше m, $m < n$, с вещественными коэффициентами.

б) Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n с вещественными коэффициентами, для которых числа 2 и 3 являются корнями.

в) Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n с вещественными коэффициентами, для которых хотя бы одно из чисел 2, 3 было бы корнем.

г) Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n с вещественными коэффициентами, для которых число 2 является корнем производной: $f'(2) = 0$.

д) Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n с вещественными коэффициентами, для которых $f(0) = f(1)$.

е) Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n с вещественными коэффициентами, для которых $f'(0) = 1$.

Ответ. а), б), г), д) Да; *в), е)* Нет.

3.2. Линейная зависимость и независимость векторов

Системой векторов называется любая конечная последовательность элементов линейного пространства, в которой элементы могут повторяться, но важен порядок их следования.

Вектор b называется ***линейной комбинацией*** векторов системы

$a_1, a_2, ... a_s$ линейного пространства L, если существуют такие числа $l_1, l_2, ... l_s$, что $b = l_1 a_1 + l_2 a_2 + ... + l_s a_s$. Представление вектора в виде линейной комбинации не единственно. Если вектор есть линейная комбинация векторов подсистемы, то он есть линейная комбинация векторов системы. Любая линейная комбинация векторов подпространства L_1 принадлежит этому подпространству [6,13].

Пример. Найти все значения параметра λ, при которых вектор $b = (1,\ 0,\ 4)^T$ является линейной комбинацией векторов $a_1 = (4,\ 1,\ 2)^T$, $a_2 = (-3,\ -2,\ -2)^T$, $a_3 = (-1,\ \lambda,\ 4)^T$.

Решение. Вектор b можно представить в виде линейной комбинации $b = k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3$, если существуют такие числа k_1, k_2, k_3, при которых выполняется равенство:

$$b = k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = k_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Это матричное уравнение равносильно системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4k_1 - 3k_2 - k_3 = 1, \\ k_1 - 2k_2 + \lambda k_3 = 0, \\ 2k - 2k_2 + 4k_3 = 4. \end{cases}$$

Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -9 & -7 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -9 & -7 \\ 0 & 0 & \lambda - 11 & -9 \\ 1 & 0 & -7 & -5 \end{array}\right).$$

Система несовместна при $\lambda - 11 = 0$, следовательно, при $\lambda = 11$ вектор $b = (1,\ 0,\ 4)^T$ нельзя представить в виде линейной комбинации векторов $a_1 = (4,\ 1,\ 2)^T$, $a_2 = (-3,\ -2,\ -2)^T$, $a_3 = (-1,\ \lambda,\ 4)^T$.

Пусть $\lambda \neq 11$, тогда получим систему и ее решение:

$$\begin{cases} k_2 - 9k_3 = -7, \\ (\lambda - 11)k_3 = -9, \\ k_1 - 7k_3 = -5; \end{cases} \quad \begin{cases} k_2 = -\dfrac{7\lambda + 4}{\lambda - 11}, \\ k_3 = -\dfrac{9}{\lambda - 11}, \\ k_1 = -\dfrac{5\lambda + 8}{\lambda - 11}. \end{cases}$$

Следовательно, при $\lambda \neq 11$ линейная комбинация имеет вид:

$$b = -\frac{5\lambda + 8}{\lambda - 11} a_1 - \frac{7\lambda + 4}{\lambda - 11} a_2 - \frac{9}{\lambda - 11} a_3 .$$

Система векторов $a_1, a_2, ..., a_{r-1}, a_r$, $(r \geq 2)$, называется линейно зависимой если хотя бы один из этих векторов является линейной комбинацией остальных векторов системы $a_1, a_2, ..., a_{r-1}, a_r$, и линейно независимой – в противоположном случае. Таким образом, система векторов $a_1, a_2, ..., a_{r-1}, a_r$ линейно зависима, если существуют такие числа $k_1, k_2, ...k_{r-1}, k_r$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, что имеет место равенство

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + ... + k_r a_r = 0 .$$

В случае, если система состоит из одного вектора a, эта система будет тогда и только тогда линейно зависима, когда $a = 0$. Действительно, если $a = 0$, то, например при $k = 1$ получим $ka = 0$. И наоборот, если $ka = 0$ и $k \neq 0$, то $a = 0$ [6, 7, 9].

Если некоторая подсистема системы векторов $a_1, a_2, ...a_{r-1}, a_r$ *линейно зависима, то и вся система* $a_1, a_2, ..., a_{r-1}, a_r$ *линейно зависима*.

Всякая система векторов, содержащая два равных или два пропорциональных вектора, а также всякая система, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой.

Если система векторов линейно независима, то и всякая ее подсистема также линейно независима.

Рассмотрим систему *единичных векторов* n-мерного векторного пространства

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 0, 0, ..., 0), \\ \varepsilon_2 = (0, 1, 0, ..., 0), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \varepsilon_n = (0, 0, 0, ..., 1). \end{cases}$$

Система единичных векторов является линейно независимой, так как в выражении $k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + ... + k_n\varepsilon_n = 0$ вектор коэффициентов равен нулевому вектору: $(k_1, k_2, ...k_n) = 0$, т.е. $k_1 = k_2, = ... = k_n = 0$ [9].

Теорема. Всякие s векторов n-мерного пространства составляют при $s > n$ линейно зависимую систему.

Пример. Выяснить, будет ли система векторов $a_1 = (1,\ -1,\ -2,\ 3)^T$, $a_2 = (3,\ 2,\ -2,\ -3)^T$, $a_3 = (-1,\ 2,\ 0,\ -3)^T$, $a_4 = (-4,\ -1,\ 4,\ 0)^T$ линейно независимой в линейном пространстве R^4.

Решение. Запишем линейную комбинацию этих векторов

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + k_4 a_4 = 0,$$

$$k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\2\\-2\\-3\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\-3\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}-4\\-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Получим однородную систему уравнений:

$$\begin{cases}k_1+3k_2-k_3-4k_4=0,\\-k_1+2k_2+2k_3-k_4=0,\\-2k_1-2k_2+4k_4=0,\\3k_1-3k_2-3k_3=0.\end{cases}$$

Расширенная матрица этой системы:

$$\begin{pmatrix}1&3&-1&-4\\-1&2&2&-1\\-2&-2&0&4\\3&-3&-3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&-1&-4\\0&5&1&-5\\0&4&-2&12\\0&-12&0&12\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&8&0&-9\\0&5&1&-5\\0&14&0&2\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&16&0&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение системы единственное и тривиальное: $k_1=k_2=k_3=k_4=0$. Значит, заданная система векторов линейно независима.

Линейно независимая система n-мерных векторов $a_1,a_2,...,a_{r-1},a_r$ называется ***максимальной линейно независимой системой (полной системой)***, если добавление к этой системе любого n-мерного вектора b дает уже линейно зависимую систему. В этом случае вектор b линейно выражается через векторы $a_1,a_2,...,a_{r-1},a_r$. В n- мерном пространстве всякая линейно независимая система, состоящая из n векторов, будет максимальной. Любая максимальная линейно независимая система векторов этого пространства состоит не более, чем из n векторов. Всякая линейно независимая система n-мерных векторов содержится хотя бы в одной максимальной линейно независимой системе [7, 13, 9].

Так как всякая система, состоящая из одного ненулевого вектора, линейно независима, то всякий ненулевой вектор содержится в некоторой максимальной линейно независимой системе, поэтому в n-мерном векторном пространстве существует бесконечно много различных максимальных линейно независимых систем векторов.

Если вектор b линейно выражается через векторы $a_1, a_2, ..., a_{r-1}, a_r$, то выполняется $b = \sum_{i=1}^{r} k_i a_i$. Тогда вектор b линейно выражается и через некоторую подсистему $a_1, a_2, ..., a_s$ системы векторов $a_1, a_2, ..., a_{r-1}, a_r$, ($s < r$). Следовательно, система векторов $b_1, b_2, ..., b_s$ линейно выражается через систему $a_1, a_2, ..., a_{r-1}, a_r$, если всякий вектор b_i, ($i = \overline{1, s}$) является линейной комбинацией этой системы.

Теорема (*свойство транзитивности*). Если система $b_1, b_2, ..., b_s$ линейно выражается через систему $a_1, a_2, ..., a_{r-1}, a_r$, а система векторов $c_1, c_2, ..., c_t$ линейно выражается через систему $b_1, b_2, ..., b_s$, то система $c_1, c_2, ..., c_t$ будет линейно выражаться и через систему $a_1, a_2, ..., a_{r-1}, a_r$.

Две системы векторов называются ***эквивалентными***, если каждая из них линейно выражается через другую. Из транзитивности свойства систем векторов линейно выражаться друг через друга следует транзитивность понятия эквивалентности систем векторов. *Если две системы векторов эквивалентны и если некоторый вектор линейно выражается через одну из этих систем, то он будет линейно выражаться и через другую.* Однако нельзя утверждать, что если одна из двух эквивалентных систем векторов линейно независима, то этим же свойством обладает и другая система [6, 7, 9].

Основная теорема. Если в n-мерном пространстве даны две системы векторов: $a_1, a_2, ..., a_r$ и $b_1, b_2, ..., b_s$, из которых $a_1, a_2, ..., a_r$ линейно независима и линейно выражается через $b_1, b_2, ..., b_s$, то число векторов в первой системе не больше, чем во второй, т.е. $r \leq s$.

Следствие 1. Всякие две эквивалентные линейно независимые системы векторов содержат равное число векторов.

Следствие 2. Всякая максимальная линейно независимая система векторов n-мерного векторного пространства состоит из n векторов. Число векторов, входящих в любую максимальную линейно независимую подсистему данной системы векторов, называется ***рангом*** этой ***системы***.

Следствие 3. Пусть даны две системы n-мерных векторов, не обязательно линейно независимые: $a_1, a_2, ..., a_r$ (ранг системы равен k) и $b_1, b_2, ..., b_s$ (ранг системы равен l). Если система $a_1, a_2, ..., a_r$ линейно выражается через систему $b_1, b_2, ..., b_s$, то $k \leq l$. Если же эти системы эквивалентны, то $k = l$ [6, 17].

Линейной формой от неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется выражение вида

$$f = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n.$$

Линейная форма f вполне определяется вектором $(a_1, a_2, ..., a_n)$ из своих коэффициентов. И обратно, всякий n-мерный вектор однозначно определяет некоторую линейную форму. Таким образом, сложение векторов и умножение вектора на число обобщаются как соответствующие операции над линейными формами [7].

Пример. Данной система линейных форм:

$$f_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4,$$
$$f_2 = 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 6x_4,$$
$$f_3 = x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 7x_4,$$
$$f_4 = 2x_1 + x_2 - x_3.$$

Выделить в ней максимальную линейно независимую подсистему.

Решение. Составим матрицу из коэффициентов этих форм и найдем ее ранг, используя элементарные преобразования:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили, что ранг матрицы равен 2, следовательно, первые две строки матрицы линейно независимы, а третья и четвертая являются их линейными комбинациями. Система f_1, f_2 будет искомой подсистемой заданной системы линейных форм.

Из истории

Вектор. *Термин происходит от латинского «vector» – несущий.*

Векторы как направленные отрезки плоскости появились в работах сразу нескольких математиков начала XIX века (Ч. Грейвс, Арган, Монж, К. Гаусс, Ашет, У.Р. Гамильтон и др.). Векторы рассматривали как геометрическую интерпретацию комплексных чисел и операций над ними. Геометрической интерпретацией гиперкомлексных чисел $x + iy + jz$ *(где* $x, y, z \in \boldsymbol{R}$*;* i, j *– мнимые единицы* $i^2 = j^2 = -1$*) стали направленные отрезки пространства.*

Дальнейшее развитие этого направления привело к созданию ирландским математиком Гамильтоном в 1843 году теории кватернионов $ix + jy + kz + u$. *Гамильтон ввел термины:* u *– скалярная часть (scale),* $ix + jy + kz$ *– векторная часть (vector), поясняя, что вектор можно рассматривать как перенос или работу при переходе от начальной точки A в конечную точку*

B, поэтому слово vector образовано от латинского глагола vehere – нести [1].

Наиболее распространенные обозначения векторов: символ $\bar{a}$ для направленного отрезка плоскости ввел Арган в 1806 году; Мёбиус ввел обозначение с указанием начала и конца вектора AB; Хевисайд в работе 1896 года стал выделять обозначения векторов жирным шрифтом.

Задачи для самостоятельной работы

1. [16] Проверить векторы $a_1 = (2,\ 1,\ 0)$, $a_2 = (3,\ 0,\ 1)$, $a_3 = (8,\ 1,\ 2)$ и $a_4 = (-4,\ 1,\ -2)$ на линейную зависимость. Если они линейно зависимы, то найти два разных набора коэффициентов, для которых линейная комбинация этих векторов равна 0.

Ответ. Векторы a_1, a_2, a_3 и a_4 линейно зависимы.
Равные нулю линейные комбинации:
$$-a_1 + 2a_2 + 0a_3 + a_4 = 0,$$
$$-a_1 - 2a_2 + a_3 + 0a_4 = 0.$$

2. [16] Используя определение, проверить, будут ли следующие системы многочленов линейно независимыми в линейном пространстве P_2:

а) $p_1(x) = 1,\quad p_2(x) = x - 1,\quad p_3(x) = (x+3)^2$;

б) $p_1(x) = x^2 + 4x,\quad p_2(x) = 2x^2 - x + 4,\quad p_3(x) = 4x^2 - 4x + 1$;

в) $p_1(x) = 4x^2 - 3x - 1,\quad p_2(x) = 4x - 3,\quad p_3(x) = 4x^2 + 9x - 10$;

г) $p_1(x) = 4x^2 - 3x + 2,\ p_2(x) = -3x^2 + 2x + 3,\ p_3(x) = 7x^2 - 5x - 1$;

д) $p_1(x) = 3x - 4,\ p_2(x) = 3x^2 - 2x - 3,\ p_3(x) = x^2 + 3x + 3$.

Ответ.а), *б)*, *д)* независимы; *в)*, *г)* зависимы.

3. [16] Найти все значения λ, при которых вектор bявляется линейной комбинацией векторов a_1, a_2, a_3:

а) $a_1 = (-2,\ 0,\ 2),\ a_2 = (\lambda,\ -1,\ -4),\ a_3 = (0,\ -3,\ 3),\ b = (2,\ 3,\ -1)$;

б) $a_1 = (3,\ -1,\ 2),\ a_2 = (\lambda,\ -1,\ 2),\ a_3 = (1,\ 3,\ -1),\ b = (4,\ 2,\ 1)$;

в) $a_1 = (4,\ 2,\ 0),\ a_2 = (-2,\ -4,\ 4),\ a_3 = (-2,\ 2,\ \lambda),\ b = (-8,\ 2,\ -8)$;

г) $a_1 = (4,\ 1,\ 2),\ a_2 = (-3,\ -2,\ -2),\ a_3 = (-1,\ \lambda,\ 4),\ b = (1,\ 0,\ 4)$.

Ответ. а) при $\lambda \neq 5$ вектор $b = \dfrac{\lambda+5}{\lambda-5}a_1 + \dfrac{4}{\lambda-5}a_2 - \dfrac{3\lambda-11}{3\lambda-15}a_3$,
при $\lambda = 5$ разложить нельзя; *б)* при $\lambda \neq 3$ вектор $b = a_1 + a_3$,
при $\lambda = 3$ вектор $b = (1-t)a_1 + ta_2 + a_3$ для любого t;

в) при $\lambda \ne -4$ вектор $b = -3a_1 - 2a_2$, при $\lambda = -4$ вектор $b = (t-3)a_1 + (t-2)a_2 + ta_3$ для любого t;

г) при $\lambda = 11$ разложить нельзя; при $\lambda \ne 11$ вектор
$$b = \frac{-5\lambda + 8}{\lambda - 11}a_1 + \frac{7\lambda + 4}{\lambda - 11}a_2 - \frac{9}{\lambda - 11}a_3.$$

4. [16] Установить линейную независимость следующих систем функций в линейном пространстве непрерывных функций на $(0, \infty)$:

а) $\sin x, \quad \cos x, \quad \sin 2x$; *б)* $|x-1|, \quad |x-2|, \quad |x-3|$;

в) $e^x, \quad x^{-1}, \quad e^{2x}$; *г)* $\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$;

д) $|\sin x|, \quad |\cos x|, \quad |\cos 2x|$; *е)* $(x^2+1)x^{-1}, \quad x(x^2+1)^{-1}, \quad 1$.

Ответ. Все системы линейно независимы.

5. (Магин М.И.) Рассмотрим векторы $w = (1,1,0,0)$, $x = (1,0,1,0)$, $y = (0,0,1,1)$, $z = (0,1,0,1)$.

а) Доказать, что система w, x, y, z не является полной, найдя вектор $u \in R^4$, не представимый в виде линейной комбинации w, x, y, z.

б) Показать, что w, x, y, z линейно зависимы, найдя их нулевую нетривиальную линейную комбинацию.

в) Выразить z через w, x, y.

Ответ. *б)* $w - x + y - z = 0$; *в)* $z = w - x + y$.

6. (Магин М.И.) Из 5 векторов в R^5 любые 4 линейно независимы. Верно ли, что все 5 векторов линейно независимы? Почему?

Ответ. Не верно.

7. (Магин М.И.) Из n векторов в R^n любые $(n-1)$ линейно независимы. Верно ли, что все n векторов линейно независимы? Почему?

Ответ. Верно.

8. (Магин М.И.) Пусть u, v, w – линейно независимые векторы. Всегда ли линейно независимы следующие наборы? Почему?

а) $v - w, w - u, u - v$;

б) $u + v, v + w, w + u$;

в) $u + v + w, v + w, u$.

Ответ. *а)* нет, линейно зависимы;
б) да, линейно независимы;
в) нет, линейно зависимы.

9. Используя определение, доказать, что для любых векторов x, y, z и чисел α, β, γ векторы $\alpha x - \beta y, \quad \gamma y - \alpha z, \quad \beta z - \gamma x$ линейно зависимы.

10. (Магин М.И.) Доказать, что для попарно различных $a, b, c \in R$

векторы $(1,1,1)$, (a,b,c) и $\left(a^2,b^2,c^2\right)$ линейно независимы в R^3.

3.3. Базис. Размерность. Изоморфизм

Размерность линейного пространства равна наибольшему числу векторов в линейно независимых системах векторов этого пространства. Размерность линейного пространства обозначается через $\dim L$. Если $\dim L < \infty$, то пространство L называется ***конечномерным***. Если $\dim L = \infty$, то пространство L называется ***бесконечномерным.*** Линейное пространство L называется ***конечномерным,*** если в нем можно найти хотя бы одну конечную максимальную линейно независимую систему векторов, и его размерность равна числу векторов в полной линейно независимой системе. Пространство L ***бесконечномерно*** тогда и только тогда, когда в нем нет полных систем [6, 7, 9].

Два линейных пространства L и L' называются ***изоморфными***, если между их векторами установлено взаимно однозначное соответствие (изоморфное соответствие):

- всякому вектору a из L сопоставлен вектор a' из L', который является образом вектора a;

- различные векторы из L обладают различными образами, и всякий вектор из L' служит образом некоторого вектора из L;

- образом суммы двух векторов является сумма образов этих векторов $(a+b)' = a' + b'$;

- образом произведения вектора на число служит произведение образа этого вектора на то же число $(\lambda a)' = \lambda a'$.

Например, пространство векторов-отрезков на плоскости, выходящих из начала координат, изоморфно двумерному векторному пространству, составленному из упорядоченных пар действительных чисел. Изоморфное соответствие получится, если зафиксировать на плоскости систему координат, тогда каждому вектору-отрезку можно поставить в соответствие упорядоченную пару его координат.

Свойство изоморфизма линейных пространств: образом нуля пространства L при изоморфном соответствии между пространствами L и L' служит нуль пространства L'.

Замечание. Если линейные пространства L и L' изоморфны, то система векторов $a_1, a_2, ..., a_n$ из L тогда и только тогда линейно зависима, если линейно зависима система их образов $a_1', a_2', ..., a_n'$ в L'. Если для всех $a \in L$ соответствие $a \mapsto a'$ является изоморфным соответствием между L и L', то и обратное соответствие $a \mapsto a'$ также будет изоморфным [6, 7, 11].

Конечномерные линейные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда равны их размерности.

Всякая максимальная линейно независимая система (полная система) векторов называется ***базисом*** пространства L. В любом ненулевом конечномерном пространстве существует базис. Конечномерное линейное пространство может иметь множество различных базисов. Например, в пространстве векторов-отрезков на плоскости базисом служит любая пара векторов, отличных от нуля неколлинеарных векторов. Таким образом, ***базисом линейного пространства*** L называется система элементов (векторов) $e_1, e_2, ..., e_n$, принадлежащих L и удовлетворяющих условиям:

1. Система $e_1, e_2, ..., e_n$ линейно независима;

2. Любой элемент пространства L линейно выражается через базисные элементы, т.е. является их линейной комбинацией:

$$\forall a \in L\ \exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R \Rightarrow a = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k .$$

Если в линейном пространстве L имеется базис $e_1, e_2, ..., e_n$, то оно конечномерно и его размерность равна n. Любая система в n-мерном пространстве, состоящая из $k \neq n$ векторов, не является базисом. Любая линейно независимая система векторов конечномерного линейного пространства содержится в некотором его базисе [6, 7, 11].

При изоморфном соответствии между линейными пространствами линейно зависимая система векторов переходит в линейно зависимую и обратно, поэтому линейно независимая система переходит в линейно независимую. Следовательно, при изоморфном соответствии базис переходит в базис. Все базисы конечномерного линейного пространства L состоят из одного и того же числа векторов. Если это число равно n, то L называется n-мерным линейным пространством, а число n размерностью этого пространства [11].

Из истории

Базис. *Термин происходит от греческого «βασις» – основа. Греческие математики (Евклид, Архимед, Аристарх и др.) называли так горизонтальную линию, служившую основанием плоской фигуры, или плоскую фигуру, являвшуюся основанием пространственного тела* [1]. *Р. Дедекинд в 1885 году и Молин в 1893 году базисом стали называть систему векторов.*

Задачи для самостоятельной работы

1. [16] Проверить, является ли система многочленов f_1, f_2, f_3 базисом в линейном пространстве $R[x]_2$:

а) $f_1(x)=1-3x-2x^2$, $f_2(x)=2-4x+x^2$, $f_3(x)=2+3x+2x^2$;

б) $f_1(x)=-4+2x-x^2$, $f_2(x)=4+x+4x^2$, $f_3(x)=-3-3x-2x^2$;

в) $f_1(x)=3+2x-x^2$, $f_2(x)=1+2x+2x^2$, $f_3(x)=x-3x^2$.

Ответ. Все системы являются базисом.

2. [16] Проверить, является ли система матриц A_1, A_2, A_3, A_4 базисом в линейном пространстве $M_2(R)$:

а) $A_1=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 3\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}$;

в) $A_1=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -3 & 3\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -3\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

Ответ. *а)*, *в)* являются базисом,
б) не является базисом.

3. (Магин М.И.) Найти какой-нибудь базис векторного пространства $M_2(R)$, содержащий матрицы $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Найти координаты единичной матрицы $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ в этом базисе.

Ответ. Базис, например, $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$;
координаты E в этом базисе $(1,\ 0,\ -1,\ -1)$.

4. [16] Найти какой-нибудь базис и размерность линейного пространства V, заданного как:

а) пространство многочленов $p(x)\in P_4$ таких, что $p(1)+p(-1)=0$;

б) пространство многочленов $p(x)\in P_2$ таких, что $p(1)=0$;

в) пространство многочленов $p(x)\in P_4$ таких, что $p(2)=0$;

г) пространство симметричных матриц размерности 3×3;

д) пространство матриц (a_{ij}) размерности 2×3, элементы которых удовлетворяют условиям $a_{11}=0$, $a_{22}=a_{33}$;

е) пространство симметричных матриц размерности 3×3, диагональные элементы которых равны нулю.

Ответ. а) $\left(1-x^4, x, x^2-x^4, x^3\right)$, 4;

б) $\left(x-1, x^2-1\right)$, 2;

в) $\left(x-2, x^2-4, x^3-8, x^4-16\right)$, 4;

г) $\left(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}+E_{21}, E_{13}+E_{31}, E_{23}+E_{32}\right)$, 6;

д) $\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\right)$, 4;

е) $\left(E_{12}+E_{21}, E_{13}+E_{31}, E_{23}+E_{32}\right)$, 3.

5. (Далевская О.П.) Докажите утверждения:

а) у линейно зависимой системы ненулевых векторов есть два различных базиса;

б) если у системы векторов только один базис, то она линейно независима.

6. (Далевская О.П.) Вектор b разлагается по векторам $a_1, a_2, ..., a_n$. При этом векторы $a_1, a_2, ..., a_n$ разлагаются по векторам $a_1, a_2, ..., a_{k-1}$. Докажите, что вектор b разлагается по $a_1, a_2, ..., a_{k-1}$.

7. (Далевская О.П.) В системе векторов $\{a, b, c\}$ вектор $a \neq 0$, а векторы b и c не разлагаются по остальным векторам этой системы. Докажите, что система линейно независима.

8. (Далевская О.П.) Система векторов $\{a, b, c\}$ линейно зависима. Вектор a не разлагается по векторам b и c. Докажите, что векторы b и c пропорциональны.

9. (Далевская О.П.) В системе векторов $a_1, a_2, ..., a_n$ вектор $a \neq 0$. Докажите, что если вычеркнуть все векторы, которые разлагаются по предыдущим, то оставшийся набор будет базисом системы.

3.4. Координаты вектора. Связь координат вектора в разных базисах

Рассмотрим связь между базисами конечномерного пространства L. Пусть в n мерном пространстве L заданы базисы $e_1, e_2, ..., e_n$ и $e'_1, e'_2, ..., e'_n$. Каждый вектор базиса $e'_1, e'_2, ..., e'_n$, как и всякий вектор пространства L однозначно записывается через базис $e_1, e_2, ..., e_n$:

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} e_j \,,\ i = \overline{1, n}.$$

Матрица

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix},$$

строки которой являются координатами векторов $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$, называется ***матрицей перехода*** T от базиса $e_1, e_2, ..., e_n$ к базису $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ [6, 7, 9, 11].

Связь межу базисами и матрицей перехода имеет вид матричного равенства:

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ . \\ e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ e_n \end{pmatrix}, \text{ или } e' = Te.$$

С другой стороны, если матрица T' является матрицей перехода от базиса $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ к базису $e_1, e_2, ..., e_n$, то $e = T'e'$. Получим систему

$$\begin{cases} e = (T'T)e, \\ e' = (TT')e' \end{cases}$$

и, ввиду линейной независимости базисов, $T'T = TT' = E$. Следовательно, $T' = T^{-1}$ – матрица, обратная к T.

Таким образом, доказано, что матрица перехода от одного базиса к другому имеет обратную матрицу и является невырожденной. Всякая невырожденная квадратная матрица порядка n с действительными элементами служит матрицей перехода от данного базиса n-мерного действительного линейного пространства к некоторому другому базису. В n-мерном линейном пространстве имеется столь же много различных базисов, сколько существует невырожденных квадратных матриц порядка n. При этом два базиса, состоящие из одних и тех же векторов, но записанных в различном порядке, считаются различными [6, 7, 9].

Пусть в n-мерном линейном пространстве даны базисы $e_1, e_2, ..., e_n$ и $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ с матрицей перехода $T = \{\tau_{ij}\}$, такой, что $e' = Te$. Найдем связь между координатами произвольного вектора a в этих базисах.

Пусть $a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$, $j = \overline{1,n}$ и $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i e'_i$, $i = \overline{1,n}$. Используя связь между базисами $e'_i = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} e_j$, $i = \overline{1,n}$, получим:

$$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i e'_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i\left(\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}e_j\right)_i=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i\tau_{ij}\right)_i e_j .$$

С другой стороны, $a=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j$, и это разложение единственное, тогда получим:

$$\alpha_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i\tau_{ij},\ j=\overline{1,n}.$$

Таким образом, имеет место матричное равенство:

$$(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=(\alpha'_1,\alpha'_2,...,\alpha'_n)T .$$

Строка координат вектора a в базисе $e_1,e_2,...,e_n$ равна строке координат этого вектора в базисе $e'_1,e'_2,...,e'_n$, умноженной справа на матрицу перехода от базиса $e_1,e_2,...,e_n$ к базису $e'_1,e'_2,...,e'_n$.

Верно также равенство: $(\alpha'_1,\alpha'_2,...,\alpha'_n)=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)T^{-1}$ [7].

Пример. Известно разложение вектора $a=6e_1-e_2+3e_3$ по базисным векторам e_1,e_2,e_3 линейного пространства R^3. Найти координаты вектора a в новом базисе $e'_1=e_1+e_2+2e_3$, $e'_2=2e_1-e_2$, $e'_3=-e_1+e_2+e_3$ этого же пространства.

Решение.

<u>I способ. </u>Составим линейную комбинацию для определения координат вектора a в новом базисе и получим систему уравнений:

$$k_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-1\\3\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}k_1+2k_2-k_3=6,\\k_1-k_2+k_3=-1,\\2k_1+k_3=3.\end{cases}$$

Система совместная и определенная, решим ее методом Жордана-Гаусса, выполнив элементарные преобразования расширенной матрицы системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&6\\1&-1&1&-1\\2&0&1&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&6\\0&-3&2&-7\\0&-4&3&-9\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&6\\0&1&-1&2\\0&-4&3&-9\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\0&1&-1&2\\0&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&0&1&1\end{array}\right).$$

Откуда получим разложение вектора a в новом базисе:

$$a = e_1' + 3e_2' + e_3'.$$

<u>II способ.</u> Составим матрицу перехода, записав координаты векторов нового базиса по столбцам:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу T^{-1}, методом «перегонки»:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right),$$

т.е. обратная матрица имеет вид:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Заданный вектор $a = 6e_1 - e_2 + 3e_3$ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет строку координат $(6,-1,3)$, тогда, для определения его координат в базисе e_1', e_2', e_3' получим выражение:

$$(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3') = (6,-1,3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1,3,1).$$

Таким образом, разложение вектора a в базисе e_1', e_2', e_3' имеет вид:

$$a = e_1' + 3\,e_2' + e_3'.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. [16] Проверить, является ли система матриц A_1, A_2, A_3, A_4 базисом в линейном пространстве $M_2(R)$, и найти в этом базисе координаты матрицы Y. По известному координатному вектору X_A найти

матрицу X.

а) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$

$Y = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \ X_A = (-3, \ 2, \ -2, \ -2);$

б) $A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$

$Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ X_A = (4, \ 0, \ 12).$

Ответ. а) $X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \ Y_A = (-2, \ 2, \ -1, \ -1);$

б) $X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \ Y_A = (1, \ -1, \ 20).$

2. [16] Проверить, является ли система многочленов f_1, f_2, f_3 базисом в линейном пространстве $R[x]_2$, и найти в этом базисе координаты многочлена h. По известному координатному вектору g_f найти многочлен g.

а) $f_1(x) = 4 + 4x + 2x^2, \quad f_2(x) = -3 - 2x^2, \quad f_3(x) = -1 - x + x^2,$

$h(x) = 5 - 4x + 4x^2, \quad g_f = (0, \ -1, \ 2);$

б) $f_1(x) = -3 + 2x^2, \quad f_2(x) = 2 + x + 2x^2, \quad f_3(x) = 4 + 4x - 2x^2,$

$h(x) = 5 + x, \quad g_f = (-1, \ 2, \ -1);$

в) $f_1(x) = 2 + 4x - 2x^2, \quad f_2(x) = -1 + 2x + x^2, \quad f_3(x) = -2 - 2x - x^2,$

$h(x) = 2 + 4x^2, \quad g_f = (0, \ -1, \ -2).$

Ответ. а) $g(x) = 1 - 2x + 4x^2, \ h_f = (-1, \ -3, \ 0);$

б) $g(x) = 3 - 2x + 4x^2, \ h_f = (-1, \ 1 \ 0);$

в) $g(x) = 5 + 2x + x^2, \ h_f = (-1, \ 0, \ -2).$

3. [16] По элементам a, b, c линейного пространства R^3 и их координатным векторам a_e, b_e, c_e в базисе (e_1, e_2, e_3) найти векторы этого базиса.

а) $a = (-3, \ -3, \ -2), b = (-1, \ -2, \ -3), c = (-1, \ 0, \ 3)$

$a_e = (-2, \ -1, \ -1), b_e = (-2, \ -2, \ -1), c_e = (0, \ 2, \ 1);$

б) $a=(-1,\ 3,\ 3), b=(-1,\ -2,\ -1), c=(3,\ -2,\ -1)$

$a_e=(2,\ -1,\ 1), b_e=(1,\ 1,\ -2), c_e=(-1,\ -1,\ 0)$;

в) $a=(2,\ 1,\ 1), b=(1,\ 1,\ -3), c=(0,\ 3,\ -1)$

$a_e=(-2,\ 1,\ -1), b_e=(1,\ -1,\ -1), c_e=(2,\ 1,\ 2)$.

Ответ. а) $e_1=(1,\ 1,\ 0)$, $e_2=(-2,\ -1,\ 1)$, $e_3=(3,\ 2,\ 1)$;

б) $e_1=(-1,\ 1,\ 1)$, $e_2=(-2,\ 1,\ 0)$, $e_3=(-1,\ 2,\ 1)$;

в) $e_1=(1,\ 2,\ -2)$, $e_2=(2,\ 3,\ -1)$, $e_3=(-2,\ -2,\ 2)$.

3.5. Линейная оболочка

Возьмем в пространстве L любую конечную систему векторов $a_1, a_2, ..., a_k$. Множество всех векторов, которые являются их линейной комбинацией:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in R$, образуют подпространство пространства L, которое называется ***линейной оболочкой*** порожденной системой векторов $a_1, a_2, ..., a_k$ и обозначается $l(a_1, a_2, ..., a_k)$ [6, 16].

Система векторов $a_1, a_2, ..., a_k$ называется ***остовом*** этой линейно оболочки. Линейная оболочка $l(a_1, a_2, ..., a_k)$ является подпространством линейного пространства L.

Размерность линейной оболочки $l(a_1, a_2, ..., a_k)$ равна рангу системы векторов $a_1, a_2, ..., a_k$.

Любая максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $a_1, a_2, ..., a_k$ является базисом линейной оболочки $l(a_1, a_2, ..., a_k)$.

Пример. Найти базис и размерность линейной оболочки, порожденной системой векторов:

$$a_1=(0,\ 1,\ 5,\ 1)^T,\ a_2=(2,\ 3,\ -2,\ -3)^T,\ a_3=(2,\ 2,\ -7,\ -4)^T,$$

$$a_4=(-2,\ -2,\ 7,\ 4)^T,\ a_5=(4,\ 7,\ 1,\ -5)^T,\ a_6=(2,\ 4,\ 3,\ -2)^T.$$

Решение. Любая максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ является базисом линейной оболочки, порожденной этой системой. Чтобы найти одну такую подсистему, составим матрицу по столбцам из векторов данной системы и с помощью элементарных преобразований выделим максимальную линейно независимую подсистему.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 7 & 4 \\ 5 & -2 & -7 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -4 & 4 & -5 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & -17 & -17 & 17 & -34 & -17 \\ 0 & -6 & -6 & 6 & -12 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Максимальная линейно независимая подсистема содержит два вектора, поэтому базис линейной оболочки состоит, например, из векторов $a_1 = (0,\ 1,\ 5,\ 1)^T$ и $a_2 = (2,\ 3,\ -2,\ -3)^T$. Таким образом, получили, что размерность линейной оболочки, порожденной системой векторов $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ равна двум [6, 16].

В линейном пространстве F^n подпространство можно задавать с помощью однородной системы линейных уравнений.

Если подпространство задано с помощью системы уравнений, то фундаментальная система решений порождает линейную оболочку, совпадающую с исходным подпространством.

Если подпространство есть линейная оболочка, порожденная системой векторов пространства F^n, то можно задать это подпространство с помощью однородной системы уравнений [16].

Вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ принадлежит линейной оболочке $l(a_1, a_2, ..., a_k)$ тогда и только тогда, когда он является линейной комбинацией векторов системы $a_1, a_2, ..., a_k$:

$$X = k_1 a_1 + k_2 a_2 + ... + k_n a_n .$$

Пусть $a_s = (\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, ..., \alpha_{sn})^T$ для $s = \overline{1, m}$, тогда можно записать в виде:

$$X = k_1 a_1 + k_2 a_2 + ... + k_n a_n =$$
$$= k_1 (\alpha_{11}, \alpha_{12}, ..., \alpha_{1n})^T + k_2 (\alpha_{21}, \alpha_{22}, ..., \alpha_{2n})^T + ... + k_n (\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, ..., \alpha_{sn})^T .$$

Расширенная матрица соответствующей системы уравнений имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} & x_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} & x_n \end{array}\right).$$

Вектор $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ принадлежит линейной оболочке $l(a_1,a_2,...,a_k)$ тогда и только тогда, когда разрешима полученная система уравнений. Используя элементарные преобразования, расширенную матрицу системы можно привести к ступенчатому виду. Если расположить нулевые строки ниже ненулевых, то получим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & d_{12} & \dots & d_{1p} & c_{11}x_1+c_{12}x_2+...+c_{1n}x_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & c_{p1}x_1+c_{p2}x_2+...+c_{pn}x_n \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & c_{p+1,1}x_1+c_{p+1,2}x_2+...+c_{p+1,n}x_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & c_{n1}x_1+c_{n2}x_2+...+c_{nn}x_n
\end{array}\right).$$

Если после преобразований к ступенчатому виду основная матрица системы уравнений с расширенной матрицей содержит $(n-p)$ нулевых строк, то векторное уравнение для X имеет решение тогда и только тогда, когда элементы в правой части, соответствующие нулевым строкам основной матрицы, равны нулю:

$$\begin{cases}
c_{p+1,1}x_1+c_{p+1,2}x_2+...+c_{p+1,n}x=0, \\
\vdots \\
c_{n1}x_1+c_{n2}x_2+...+c_{nn}x_n=0.
\end{cases} \qquad (*)$$

Таким образом, вектор $X\in l(a_1,a_2,...,a_k)$ тогда и только тогда, когда его элементы $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ удовлетворяют однородной системе $(*)$ [6, 7, 16].

Пример. Найти однородную систему линейных уравнений, подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой $l(a_1,a_2,a_3,a_4)$, порожденной системой векторов:

$$a_1=(1,\ 3,\ 0,\ -3)^T,\ a_2=(0,\ 3,\ 3,\ -1)^T,$$
$$a_3=(1,\ 6,\ 3,\ -4)^T,\ a_4=(-1,\ 0,\ 3,\ 2)^T.$$

Решение. Составим основную матрицу системы уравнений из элементов заданных векторов, записав их по столбцам, и приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & -1 & x_1 \\
3 & 3 & 6 & 0 & x_2 \\
0 & 3 & 3 & 3 & x_3 \\
-3 & -1 & -4 & 2 & x_4
\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & -1 & x_1 \\
0 & 3 & 3 & 3 & x_2-3x_1 \\
0 & 3 & 3 & 3 & x_3 \\
0 & -1 & -1 & -1 & x_4+3x_1
\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & x_1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & x_3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & x_2-3x_1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & x_4+3x_1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & x_1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2-3x-x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4+3x_1+\dfrac{x_3}{3} \end{array}\right).$$

Таким образом, искомой является система уравнений:

$$\begin{cases} x_2-3x-x_3=0, \\ x_4+3x_1+\dfrac{x_3}{3}=0. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. [16] Найти максимальные линейно независимые подсистемы следующих систем векторов, многочленов или матриц.

а) $a_1=(2,\ 0,\ 0,\ -2), a_2=(-2,\ 0,\ 1,\ 0), a_3=(2,\ 0,\ 1,\ -4),$
$a_4=(-1,\ -1,\ 0,\ -2), a_5=(-2,\ 0,\ 2,\ -2), a_6=(5,\ -1,\ -1,\ -6);$

б) $a_1=(-1,\ 2,\ 3,\ -2),\ a_2=(1,\ -2,\ -3,\ 2),\ a_3=(2,\ 0,\ 1,\ 1),$
$a_4=(6,\ -4,\ -4,\ 6),\ a_5=(-2,\ 3,\ 2,\ -1),\ a_6=(3,\ 2,\ -1,\ 1);$

в) $f_1(x)=3x^2-x+1, f_2(x)=-x^2+3x+3, f_3(x)=-4x^2+4x+2,$
$f_4(x)=-6x^2+2x-2, f_5(x)=-x^2+x-2;$

г) $f_1(x)=-x^2+x-2, f_2(x)=2x^2-2x+4, f_3(x)=x^2-x+2,$
$f_4(x)=3x^2+2x-1, f_5(x)=10x^2+5x-1;$

д) $A_1=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A_5=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix};$

е) $A_1=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Ответ. а) a_1, a_2, a_4; *б)* a_1, a_3, a_5, a_6;
в) f_1, f_2, f_5; *г)* f_1, f_4;
д) A_1, A_3; *е)* A_1, A_2.

2. [16] Проверить, являются ли системы векторов линейного пространства R^5 фундаментальными системами решений соответствующих систем уравнений:

а) $a_1 = (4,\ -7,\ 1,\ -2,\ 1),$
$a_2 = (-4,\ 3,\ 1,\ 2,\ -1),$
$a_1 = (1,\ 4,\ -2,\ -1,\ 0);$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$$

б) $a_1 = (2,\ 1,\ -2,\ -1,\ 2),$
$a_2 = (7,\ 2,\ -1,\ -2,\ 1),$
$a_1 = (6,\ 2,\ -2,\ -2,\ 2);$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$$

Ответ. *а)* является; *б)* не является.

3. Найти базис пространства решений однородной системы $Ax = 0$, если

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 & -1 & -4 \\ 7 & 3 & -4 & -1 & -4 \\ -3 & -2 & 6 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

4. (Магин М.И.) Найти базис линейной оболочки строк матрицы A.

$$а)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 3 \\ 7 & 9 & 9 & 6 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad б)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 10 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ. а) $(3,\ 5,\ 3,\ 2,\ 1),\ (5,\ 7,\ 6,\ 4,\ 3);$
б) $(3,\ 4,\ 1,\ 2,\ 3),\ (5,\ 7,\ 1,\ 3,\ 4),\ (7,\ 10,\ 1,\ 6,\ 5).$

5. [16] Найти базис и размерность линейной оболочки, порожденной следующими системами векторов:

а) $a_1 = (1,\ 2,\ 3,\ -1), a_2 = (0,\ 4,\ 4,\ -1), a_3 = (-2,\ 0,\ -2,\ 1),$
$a_4 = (1,\ -6,\ -5,\ 1), a_5 = (-1,\ 4,\ 1,\ -2), a_6 = (3,\ 2,\ 5,\ -2);$

б) $a_1 = (1,\ -1,\ -2,\ 2), a_2 = (4,\ -1,\ -2,\ 4), a_3 = (-7,\ 1,\ 2,\ -6),$
$a_4 = (6,\ -3,\ -6,\ 8), a_5 = (-3,\ 0,\ 0,\ -2), a_6 = (6,\ 0,\ 0,\ 4).$

Ответ. а) $a_1, a_2, a_5; 3$; *б)* $a_1, a_2; 2$.

6. (Далевская О.П.) Найти систему линейных уравнений, подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой системы векторов

$$\begin{aligned} &a)\ a_1 = (-1,\ 6,\ 1,\ -3), && б)\ a_1 = (2,\ -3,\ 2,\ 4), \\ &\quad a_2 = (1,\ 2,\ 5,\ -6), && \quad a_2 = (4,\ -1,\ 3,\ 4), \\ &\quad a_3 = (2,\ 0,\ 4,\ -3); && \quad a_3 = (0,\ 5,\ -1,\ -4). \end{aligned}$$

Ответ. В каждом случае это одно уравнение, потому что размерность оболочки данных векторов равна 3 в R^4, значит, ортогональное дополнение имеет размерность 1, т.е. описывается одним линейным уравнением:

а) $x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$,

б) $2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0$.

3.6. Сумма и пересечение подпространств

Всякое линейное подпространство конечномерного пространства образуется конечной системой векторов, и если оно не является нулевым, то имеет базис. Размерность линейного подпространства L_i не превышает размерности n самого пространства L_n. Размерность нулевого пространства равна нулю. Для всякого k, $0 < k < n$, в пространстве L_n существуют линейные подпространства размерности k. Это подпространство, порожденное любой системой из k линейно независимых векторов: $\dim(L_k) = k$ и $\dim(L_k) \le \dim(L_n)$.

Пусть в пространстве L даны линейные подпространства L_1 и L_2. Совокупность L_3 векторов, принадлежащих как к L_1, так и к L_2, называется ***пересечением подпространств*** L_1 и L_2, $L_3 = L_1 \cap L_2$ и также является линейным подпространством [6, 7].

Совокупность L_4 всех векторов из L, которые представимы в виде суммы двух слагаемых $a + b$, причем $a \in L_1$, $b \in L_2$, называется ***суммой подпространств*** L_1 и L_2, обозначается $L_4 = L_1 + L_2$ или $L_4 = L_1 \cup L_2$.

Если $\dim(L_1) = d_1$, $\dim(L_2) = d_2$, $\dim(L_3) = d_3$, $\dim(L_4) = d_4$, то размерность суммы двух подпространств равна сумме размерностей этих подпространств минус размерность их пересечения, т.е. выполняется следующее соотношение: $d_4 = d_1 + d_2 - d_3$, которое называется *формулой Грассмана* [7, 9].

Пример. Подпространство L_1 задано как линейная оболочка векторов $a_1 = (2,\ 1,\ 1,\ -1,\ 0)^T$, $a_2 = (1,\ 3,\ -1,\ 2,\ -1)^T$. Подпространство L_2 задано как линейная оболочка векторов: $b_1 = (2,\ 4,\ 7,\ -4,\ -1)^T$, $b_2 = (2,\ -2,\ -5,\ 2,\ 1)^T$, $b_3 = (4,\ -1,\ -4,\ 1,\ 1)^T$. Найти базис и размерность суммы и пересечения этих подпространств.

Решение. Сумма $L_4 = L_1 + L_2$ подпространств L_1 и L_2 содержит вектора a_1, a_2, b_1, b_2, b_3. Проверим, является ли система этих векторов линейно независимой. Условие линейной независимости:

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 b_1 + k_4 b_2 + k_5 b_3 = 0.$$

После подстановки координат векторов получим однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2k_1 + k_2 + 2k_3 + 2k_4 + 4k_5 = 0, \\ k_1 + 3k_2 + 4k_3 - 2k_4 - k_5 = 0, \\ k_1 - k_2 + 7k_3 - 5k_4 - 4k_5 = 0, \\ -k_1 + 2k_2 - 4k_3 + 2k_4 + k_5 = 0, \\ -k_2 - k_3 + k_4 + k_5 = 0. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы, которую затем элементарными преобразованиями приведем к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 7 & -5 & -4 \\ -1 & 2 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -6 & 6 & 6 \\ 0 & -4 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получен ранг матрицы, равный трем, а один из ее базисных векторов располагается на векторах a_1, a_2, b_1. Таким образом, эти векторы могут составлять базис суммы подпространств. Размерность $\dim(L_1 + L_2) = 3$.

Найдем базис подпространства L_3 пересечения подпространств L_1 и L_2. Для этого вначале необходимо найти условия, при которых произвольный вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}^T$ принадлежит линейным оболочкам L_1 и L_2, затем объединить эти условия.

Пусть $X \in L_1$, тогда $X = k_1 a_1 + k_2 a_2$, после подстановки получим в координатной форме:

$$\begin{cases} 2k_1 + k_2 = x_1, \\ k_1 + 3k_2 = x_2, \\ k_1 - k_2 = x_3, \\ -k_1 + 2k_2 = x_4, \\ -k_2 = x_5. \end{cases}.$$

Составим расширенную матрицу системы и элементарными преобразованиями приведем к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x_1 \\ 1 & 3 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ -1 & 2 & x_4 \\ 0 & -1 & x_5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x_2 \\ 2 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & x_3 \\ -1 & 2 & x_4 \\ 0 & -1 & x_5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x_2 \\ 0 & -5 & -2x_2 + x_1 \\ 0 & -4 & -x_2 + x_3 \\ 0 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & -1 & x_5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x_2 \\ 0 & 1 & -x_5 \\ 0 & -4 & -x_2 + x_3 \\ 0 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & -5 & -2x_2 + x_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 + 3x_5 \\ 0 & 1 & -x_5 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_3 - 4x_5 \\ 0 & 0 & x_2 + x_4 + 5x_5 \\ 0 & 0 & -2x_2 + x_1 - 5x_5 \end{array}\right).$$

Значит, $\dim(L_1) = 2$, а координаты вектора X должны удовлетворять линейной однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 - 4x_5 = 0, \\ x_2 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ -2x_2 + x_1 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Пусть теперь $X \in L_2$, тогда $X = k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2k_1 + 2k_2 + 4k_3 = x_1, \\ 4k_1 - 2k_2 - k_3 = x_2, \\ 7k_1 - 5k_2 - 4k_3 = x_3, \\ -4k_1 + 2k_2 + k_3 = x_4, \\ -k_1 + k_2 + k_3 = x_5. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы и элементарными преобразованиями приведем к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 2 & 2 & 4 & x_1 \\ 4 & -2 & -1 & x_2 \\ 7 & -5 & -4 & x_3 \\ -4 & 2 & 1 & x_4 \\ -1 & 1 & 1 & x_5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & -x_5 \\ 4 & -2 & -1 & x_2 \\ 7 & -5 & -4 & x_3 \\ -4 & 2 & 1 & x_4 \\ 2 & 2 & 4 & x_1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & -x_5 \\ 0 & 2 & 3 & x_2+4x_5 \\ 0 & 2 & 3 & x_3+7x_5 \\ 0 & -2 & -3 & x_4-4x_5 \\ 0 & 4 & 6 & x_1+2x_5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & -x_5 \\ 0 & 2 & 3 & x_2+4x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_3+3x_5-x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_4-4x_5+x_2+4x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_1+2x_5-2x_2-8x_5 \end{array}\right).$$

Откуда имеем, что $\dim(L_2)=2$ и координаты вектора X должны удовлетворять однородной системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_3+3x_5-x_2=0, \\ x_4+x_2=0, \\ x_1-2x_2-6x_5=0. \end{cases}$$

Объединив эти системы, получим систему уравнений для нахождения базиса подпространства $L_3 = L_1 \cap L_2$:

$$\begin{cases} -x_2+x_3-4x_5=0, \\ x_2+x_4+5x_5=0, \\ x_1-2x_2-5x_5=0, \\ -x_2+x_3+3x_5=0, \\ x_2+x_4=0, \\ x_1-2x_2-6x_5=0. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы и элементарными преобразованиями приведем к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&0&0&-5\\0&1&0&1&5\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&0&9\\0&0&0&0&-5\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&0&0&-5\\0&1&0&1&5\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&0&0&-5\\0&1&0&1&5\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&0&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Запишем однородную систему линейных уравнений, в соответствии с полученной ступенчатой матрицей, найдем ее фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases}x_1-2x_2=0,\\x_2+x_4=0,\\x_3+x_4=0,\\x_5=0;\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=-2x_4,\\x_2=-x_4,\\x_3=-x_4,\\x_5=0;\end{cases}\quad\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Если подпространство задано с помощью системы уравнений, то фундаментальная система решений порождает линейную оболочку, совпадающую с исходным подпространством. Таким образом, размерность пересечения подпространств $\dim(L_1\cap L_2)=1$. Базис подпространства L_3 пересечения подпространств L_1 и L_2 содержит один вектор:

$$e=(-2,\ -1,\ -1,\ 1,\ 0)^T.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. [16] Найти размерность s и базис суммы следующих двух подпространств $V_1=l(a_1,a_2,a_3)$ и $V_2=l(b_1,b_2,b_3)$ в R^4, а также размерность d и базис их пересечения.

а) $a_1=(2,\ -1,\ 0,\ -1)$, $a_2=(1,\ 3,\ 1,\ -2)$, $a_3=(-2,\ -6,\ -2,\ 4)$,
$b_1=(-2,\ -1,\ 3,\ 3)$, $b_2=(4,\ 2,\ -6,\ -6)$, $b_3=(0,\ 3,\ 1,\ 3)$;

б) $a_1=(2,\ -1,\ 1,\ 2)$, $a_2=(0,\ -1,\ -2,\ -2)$, $a_3=(2,\ -3,\ -3,\ -2)$,
$b_1=(-3,\ -1,\ 1,\ 0)$, $b_2=(2,\ 1,\ 5,\ 6)$, $b_3=(2,\ 2,\ -8,\ -8)$;

в) $a_1=(1,\ -1,\ 1,\ -1)$, $a_2=(2,\ -3,\ 3,\ 1)$, $a_3=(-1,\ 3,\ -3,\ -5)$,
$b_1=(1,\ -3,\ 1,\ 3)$, $b_2=(-1,\ 5,\ 1,\ -5)$, $b_3=(-1,\ 1,\ -3.\ -1)$.

Ответ. а) $s=4$, $d=0$; базис суммы, например, a_1,a_2,b_1,b_3 (или любой базис в R^4);
б) $s=3$, $d=2$; базис суммы, например,

b_1, b_2, b_3; базис пересечения – a_1, a_2;

в) $s = 3$, $d = 1$; базис суммы, например,

a_1, a_2, b_1; базис пересечения – $(1,\ -2,\ 2.\ 2)$.

2. [16] Для подпространства V_1, порожденного системой векторов a_1, a_2, a_3, и подпространства V_2 всех решений однородной системы уравнений найти размерность s и базис суммы $V_1 + V_2$, размерность d и базис пересечения $V_1 \cap V_2$.

а) $a_1 = (-1,\ 1,\ -3,\ 1)$, $a_2 = (1,\ 2,\ 1,\ 3)$, $a_3 = (1,\ -4,\ 5,\ -5)$,

$2x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 0,\quad 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0$;

б) $a_1 = (-2,\ 2,\ -1,\ 2)$, $a_2 = (3,\ 0,\ 1,\ -1)$, $a_3 = (-9,\ 6,\ -4,\ 7)$,

$6x_1 - 3x_2 - 18x_3 = 0,\quad 4x_1 - 3x_2 - 10x_3 + 2x_4 = 0$;

в) $a_1 = (0,\ 0,\ 3,\ -2)$, $a_2 = (3,\ 2,\ -2,\ -1)$, $a_3 = (3,\ -3,\ -2,\ -1)$,

$2x_1 - 3x_2 = 0$.

Ответ. а) $s = 3$, $d = 1$; базис суммы, например, a_1, a_2,

$(2,\ -2,\ -1,\ 0)$, базис пересечения – $(1,\ 2,\ 1,\ 3)$;

б) $s = 2$, $d = 2$; сумма и пересечение совпадают,

их базис, например, a_1, a_2;

в) $s = 4$, $d = 2$; базисом суммы является

любой базис в R^4, базис пересечения, например,

$(-9,\ -6,\ 9,\ 1)$, $(-3,\ -2,\ 2,\ 1)$.

3. [16] Проверить, совпадают ли подпространства V_1 и V_2 пространства R^4, заданные как линейные оболочки, порожденные системами векторов:

а) $a_1 = (1,\ 1,\ 3,\ 0)$, $a_2 = (-2,\ 2,\ 2,\ -1)$, $a_3 = (0,\ -1,\ 1,\ -1)$,

$b_1 = (1,\ 3,\ 1,\ -1)$, $b_2 = (0,\ 1,\ -2,\ -1)$, $b_3 = (0,\ 1,\ 3,\ 1)$;

б) $a_1 = (-1,\ 2,\ 2,\ -1)$, $a_2 = (-1,\ 0,\ 1,\ 1)$, $a_3 = (0,\ 1,\ -1,\ 2)$,

$b_1 = (1,\ 1,\ 1,\ -5)$, $b_2 = (0,\ 2,\ -2,\ 4)$, $b_3 = (1,\ -4,\ 0,\ -3)$;

в) $a_1 = (-1,\ 1,\ 0,\ 1)$, $a_2 = (2,\ -2,\ -2,\ 1)$, $a_3 = (3,\ 1,\ 0,\ -1)$,

$b_1 = (3,\ 2,\ 1,\ 2)$, $b_2 = (2,\ 2,\ 3,\ 2)$, $b_3 = (0,\ 1,\ 2,\ -3)$.

Ответ. а), в) Не совпадают;

б) Совпадают.

4. (Далевская О.П.) Докажите, что для подпространств L_1 и L_2 пространства V равносильны условия $L_1 + L_2 = L_2$ и $L_1 \cap L_2 = L_1$.

5. (Далевская О.П.) Докажите, что сумма линейных оболочек двух линейно независимых систем векторов пространства V является прямой суммой.

6. (Далевская О.П.) Докажите, что сумма подпространств одного пространства V будет прямой тогда и только тогда, когда объединение базисов подпространств – линейно независимая система.

«Линейно-алгебраические приложения»

1. (Магин М.И.) Будем называть *числами Фибоначчи* последовательность F_n, заданную рекуррентным соотношением $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ с начальными данными $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Докажите, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}.$$

Комментарий. Какой будет асимптотика алгоритма, вычисляющего n-е число Фибоначчи при помощи соображений задачи 3? Какая асимптотика динамического алгоритма для этой же задачи? (*Как (должно быть или будет) известно из курса теории алгоритмов, динамический алгоритм вычисляет n-е число Фибоначчи за линейное время, т.е. за $O(n)$. В то же время, возведение в n-ю степень матрицы 2×2 можно реализовать за $O(\log(n))$ аналогично быстрому возведению в степень чисел.*)

2. (Магин М.И.) Какова арифметическая сложность метода Гаусса? Иными словами, сколько приблизительно (в зависимости от n) операций потребуется для решения системы линейных уравнений $n \times n$ при помощи метода Гаусса?

Решение. Посмотрим на k-й шаг прямого хода метода Гаусса:

• Для i-й строки при $i = k+1,...,n$ мы считаем $\lambda = \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}$ – это $(n-k)$ делений;

• Потом мы вычитаем строку из строк, т.е. считаем $a_{ik} - \lambda a_{kj}$. Это по одному умножению и одному вычитанию для каждой пары (i,j). Так как i и j пробегают множество от $k+1$ до n, это $(n-k)^2$ операций.

• Итого, на k-м шаге мы делаем $(n-k)$ делений, $(n-k)^2$ вычитаний и $(n-k)^2$ умножений.

• Для матрицы $n \times n$ шагов у нас не более $(n-1)$, то есть нужно просуммировать по k от единицы до $(n-1)$:

- делений: $\sum\limits_{k=1}^{n-1}(n-k) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} k = \dfrac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$,

- умножений/вычитаний:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 = \sum_{k=1}^{n-1}k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = O(n^3).$$

Итого, асимптотика прямого хода – $O(n^3)$. На обратном ходе когда мы делаем подстановку, это занимает порядка $1+2+...+n-1=O(n^2)$ операций, поэтому вклада в асимптотику всего алгоритма не вносит.

Замечание. На самом деле, в рассуждении выше доказано несколько больше: что асимптотика имеет вид $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$, т.е. мы знаем точную константу.

Список литературы и интернет- ресурсов

1. Александрова Н.В. История математических терминов, понятий, обозначений. - Москва: Изд-во ЛИКИ, 2008. – 248 с.
2. Апатенок Р.Ф. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учеб. пособие для инж.-техн. спец. вузов. – Мн.: Выш.шк., 1986. – 272с.
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для. – СПб: Лань, 2024. – 448 с.
4. Беклемишева Л.А., Беклемишев Д.В., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – СПб: Лань, 2023. – 496 с.
5. Беллман Р. Введение в теорию матриц: пер. с англ. – М.: Наука, 1976. – 351 с.
6. Брылевская Л.И., Лапин И.А., Ратафьева Л.С. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: Учебное пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2008. – 156 с.
7. Бусяцкая Т.К. Линейная алгебра. Лекции: учебное пособие для вузов. – Спб.: Лань, 2024. – 268с.
8. Веретенников В.Н. Практикум по линейной алгебре. Учебное пособие. – СПб.: РГГМУ, 2015. – 140 с.
9. Винберг Э.Б. Курс алгебры. – М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2001. – 544с.
10. Волков В.А, Ефимова Т.А., Райнес А.А., Шмидт Р.А. Задачник-практикум по аналитической геометрии и высшей алгебре. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. – 262с.
11. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Изд-во КДУ, 2009. – 320 с.
12. Гиниятова Д.Х., Рунг Е.В. Сборник задач по лиейной алгебре: Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению информационные системы и технологии. – Казань, 2020. – 201 с.
13. Господариков А.П., Карпова Е.А., Карпухина О.Е., Мансурова С.Е. Высшая Математика. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Том 1: Конспект лекций. – СПб: Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2014. – 140с.
14. Ивин Е.А. Сборник задач с решениями по математическому анализу и линейной алгебре: Учебно-методическое пособие для социально-экономических специальностей. – М.: МАКС Пресс, 2015 – 90 с.
15. Колмогоров А.Н., Юшкевич А.П. Математика XIX века: Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей. – Москва: Наука, 1978. – 256 с.

16. Кряквин В.Д. Линейная алгебра в задачах и упражнениях: учебное пособие. – Спб.: «Лань», 2016. – 592с.

17. Курош А.Г. Курс высшей алгебры: учебник для вузов. – СПб: Лань, 2024. – 432 с.

18. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре: учебное пособие для. – СПб: Лань, 2022. – 476 с.

19. Рунг Е.В., Стехиа К.Н. Практикум по алгебре и геометрии. Часть 1: Учебное пособие. – Казань, 2020. – 158 с.

20. Сизова О.А. Линейная алгебра. Сборник задач и упражнений: Учебное пособие. – Костанай: Костанайский филиал ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет», 2019. – 65 с.

21. Тараненко Г. Матрицы. Первый принцип. Представление данных. Матрицы позволяют компактно хранить и организовывать данные. – https://gennadiitaranenko.ru/articles/matricy-predstavlenie-dannyh/

22. Татарникова О.В. Линейная алгебра: учебник и практикум для прикладного бакалавриата. – М: Юрайт, 2023. – 334 с.

23. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре: учебник. – СПб: Лань, 2021. – 288 с.

24. Хорн Р., Джонсона Ч. Матричный анализ: пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.

25. Юшкевич А.П. История математики. Т. 3. – М.: Наука, 1972. – 495 с.

Бакеева Лариса Викторовна
Брылевская Лариса Ивановна
Гончар Лариса Исхаковна
Далевская Ольга Петровна
Зубок Дмитрий Александрович
Магин Матвей Ильич
Филимонова Арина Николаевна

Основы линейной алгебры. Часть I

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Университета ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, литер А