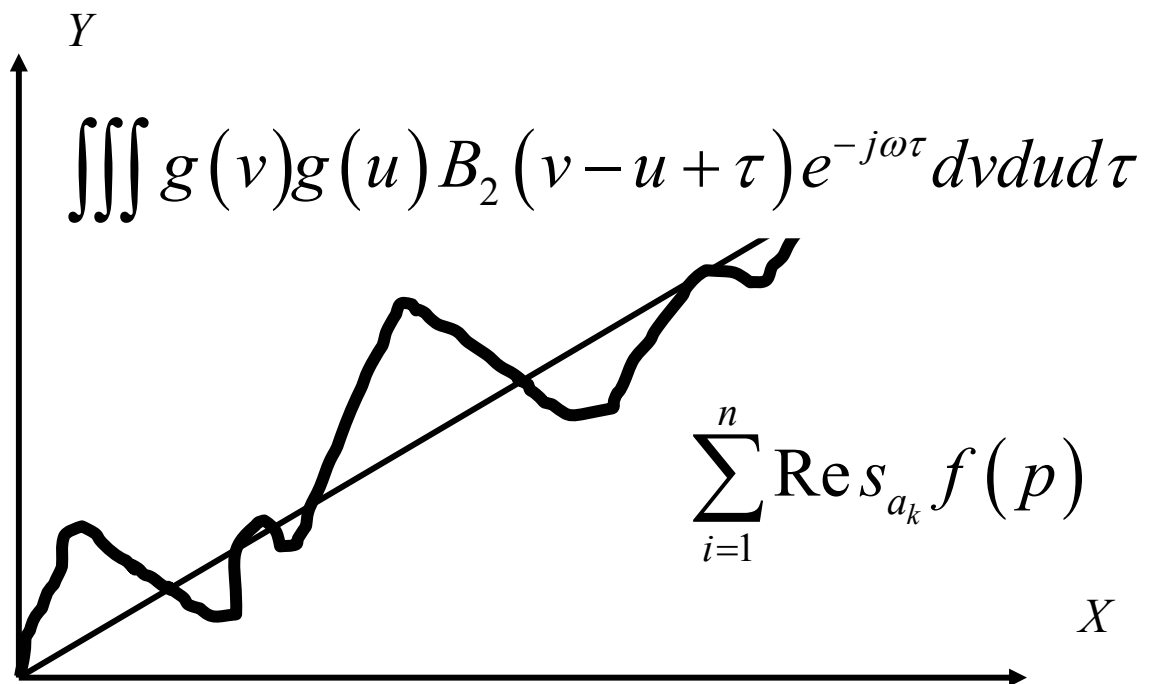


Е.Г.Лебедько

**Математические
основы передачи информации**
(часть 1 и 2)



Санкт-Петербург
2005

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию**

**Санкт – Петербургский государственный университет
информационных технологий, механики и оптики**

Е.Г.Лебедько

**Математические
основы передачи информации
(Часть 1 и 2)**

Учебное пособие



Санкт-Петербург
2004

Лебедько Е.Г. Математические основы передачи информации (Часть 1 и 2). Учебное пособие. – СПб.: СПбГУИТМО, 2005. -91 с.

В первой части настоящего учебного пособия излагаются аналитические методы представления детерминированных и случайных процессов. Вторая часть посвящена преобразованию этих процессов в линейных и нелинейных устройствах. Все теоретические положения иллюстрируются примерами.

Учебное пособие предназначено для студентов оптических и приборостроительных направлений подготовки, а также может быть полезно для инженерно-технических работников.

Рекомендовано УМО по образованию в области приборостроения и оплотехники в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки бакалавров и магистров 551900 – Оплотехника и направлению подготовки дипломированных специалистов 654000 –Оплотехника, протокол № 26 от 18.01.05.

© Санкт-Петербургский государственный
университет информационных технологий,
механики и оптики, 2005
© Е.Г..Лебедько, 2005

Задачи, которые приходится решать в современном оптикоэлектронном приборостроении столь сложны и разнообразны, что на сегодняшний день нет такого более или менее значительного раздела математики, который не нашел применение при разработке оптикоэлектронных приборов и систем.

Проектирование оптико-электронных приборов состоит из трех основных фаз: функционального, конструкторского и технологического. В процессе функционального проектирования закладывается принцип построения прибора, осуществляется на основе анализа детерминированных и случайных исходных данных синтез оптимальной структуры его, определяются энергетические, точностные и габаритные характеристики. Функциональное проектирование базируется на прикладных методах теории случайных процессов, теории статистических решений и теории информации.

В настоящем учебном пособии в сжатой форме изложены основные положения этих теорий применительно к инженерным задачам функционального проектирования оптикоэлектронных приборов и систем. В первую часть пособия вошли два раздела: 1- аналитическое представление сигналов и помех, 2-преобразование сигналов и помех в линейных и нелинейных системах.

Часть 1. Аналитическое представление сигналов и помех

Встречающиеся в современной радиоэлектронных и оптикоэлектронных приборах сигналы и помехи математически описываются различного вида функциями, основным аргументом которых обычно является время. Сигналы являются переносчиками полезной информации, которая заложена в параметрах сигналов (величина, длительность, время запаздывания, частота заполнения). При этом не все параметры сигнала могут являться информационными. Помехи разрушают полезную информацию посредством искажения тех или иных информационных параметров сигналов. Все виды сигналов и помех можно разделить на две группы: детерминированные (точно заданные или регулярные) и случайные (подчиняющиеся вероятностным законам).

Детерминированные сигналы – такие, параметры и мгновенные значения которых могут быть предсказаны с вероятностью, равной единице, если стали известны параметры и мгновенные значения их в предшествующие моменты времени.

Детерминированный сигнал можно задать определенной функцией, таблицей, графиком.

К основным типам детерминированных сигналов относятся: периодические, почти-периодические и непериодические.

Периодическим сигналом называется такой, значения которого повторяются через интервал T , называемый периодом (рис 1.1):

$$y(t)=y(t+mT) \text{ при } -\infty < t < +\infty, \quad (1.1)$$

где m – любое целое число.

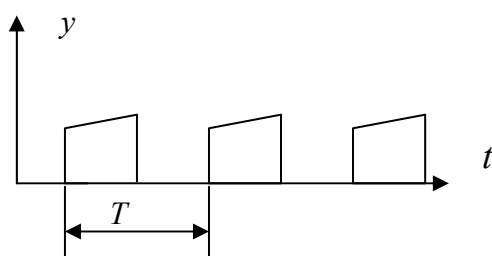


Рис.1.1

Колебания конечной энергии, отличные от нуля в течении ограниченного интервала времени называются импульсными. Все реальные колебания являются импульсными. Однако в ряде случаев, когда время наблюдения много меньше продолжительности колебания, их можно считать бесконечно продолжающимися.

В зависимости от законов изменения параметров колебаний может быть получено большое разнообразие форм внутри каждого вида колебаний. Среди них следует выделить модулированные колебания, которые можно записать в наиболее общем виде:

$$Y(t) = Y_m(t) \cos \varphi(t).$$

$Y_m(t)$ - называется амплитудой, $\varphi(t)$ - полной фазой колебания.

Изменяя по некоторому закону амплитуду, можно получить амплитудно-модулированные колебания, а изменяя полную фазу, - фазо-модулированные и частотно-модулированные колебания.

Случайными колебаниями называются такие, параметры и мгновенные значения которых могут быть предсказаны в последующие моменты времени с вероятностью, меньшей единицы, если были известны параметры и мгновенные значения этих колебаний в один из предшествующих моментов времени. Такие процессы (колебания) нельзя представить функцией, таблицей, графиком, они описываются вероятностными характеристиками.

1.1 Подходы к задаче об аналитическом представлении детерминированных процессов

Аналитическое представление детерминированных процессов с математической точки зрения есть задача аппроксимации (приближения) функций. Она может решаться по-разному в зависимости от положенных в ее основу критериев.

1. Заданный формулой, таблицей или графиком детерминированный процесс можно приближенно представить в виде комбинации простых функций $f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t), \dots$, таких, что $f_k(t)$ все более точно передает заданный процесс $s(t)$ по мере увеличения индекса k . При этом говорят о сходимости последовательности функций $f_k(t)$ к $s(t)$.

а) Сходимость в каждой точке означает требование

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t) = s(t). \quad (1.2)$$

Это требование обычно является неоправданно жестким с практической точки зрения.

б) **Равномерная сходимость** означает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Max} |s(t) - f_k(t)| = 0, \quad (1.3)$$

т.е. означает стремление к нулю абсолютного значения наибольшего расхождения между $s(t)$ и $f_k(t)$ при $k \rightarrow \infty$. При этом сходимость в каждой точке по-прежнему имеет место.

в) **Сходимость в среднем** или **сходимость в среднеквадратическом** означает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} [s(t) - f_k(t)]^2 dt = 0. \quad (1.4)$$

В последнем случае аппроксимирующая функция $f_k(t)$ может кратковременно значительно отклоняться от $s(t)$, но существенным является интегральный эффект. Этот критерий является наиболее удобным.

Заметим здесь, что функция $s(t)$ называется интегрируемой с квадратом, если

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt < \infty, \quad (1.5)$$

т.е. интеграл является конечной величиной.

2. Точность представления заданного детерминированного процесса $s(t)$ аппроксимирующей функцией $f(t)$ также может быть определена требованием, чтобы они совпадали в $n+1$ точках $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots, t_n$:

$$s(t_k) = f(t_k) \quad (1.6)$$

Задача отыскания функции $f(t)$ называется интерполяционной задачей. Значения аргумента t_k называются узлами интерполяции.

Интерполяционную задачу можно решить и путем отыскания $f(t)$ в виде комбинации линейно-независимых функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ так, что

$$f(t) = a_0 \varphi_0(t) + a_1 \varphi_1(t) + \dots + a_n \varphi_n(t).$$

Задача состоит в нахождении коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n , при которых $f(t_k) = s(t_k)$.

3. Для многих практических задач аппроксимация по критериям сходимости и интерполяция приводят почти к равноценным результатам. Так, интерполяция тригонометрическими многочленами при количестве узлов $n \rightarrow \infty$ дает ряд Фурье, т.е. аппроксимирует детерминированный процесс рядом.

Пусть задан детерминированный процесс $s(t)$. Отыщем степенной полином

$$f_m(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_m t^m = \sum_{k=0}^m a_k t^k. \quad (1.7)$$

Этот полином – степени m , который при заданных $n+1$ значениях аргумента t_0, t_1, \dots, t_n принимал бы значения, по возможности, близкие к $s(t)$. Критерием близости $f_m(t)$ и $s(t)$ пусть является сумма квадратов отклонения $f_m(t)$ и $s(t)$

$$\delta_{\Sigma} = \sum_{i=0}^n [s(t_i) - f_m(t_i)]^2. \quad (1.8)$$

Величина δ_{Σ} как сумма квадратов некоторых чисел может быть положительной или равной нулю. Последнее бы означало, что разности $s(t_i) - f_m(t_i) = 0$ во всех $n+1$ точках.

Рассматривая δ_{Σ} как функцию m переменных (коэффициентов a_k), найдем условия ее минимума, приравнявая нулю частные производные:

$$\frac{\partial \delta_{\Sigma}}{\partial a_l} = \frac{\partial}{\partial a_l} \sum_{i=0}^n \left[s(t_i) - \sum_{k=0}^m a_k t_i^k \right]^2 = 0 \quad (1.9)$$

Учитывая, что при дифференцировании по a_l остальные величины (в том числе коэффициенты a_k , кроме $a_k = a_l$) следует рассматривать как константы, получим

$$\frac{\partial \delta_{\Sigma}}{\partial a_l} = - \sum_{i=0}^n 2 \left[s(t_i) - \sum_{k=0}^m a_k t_i^k \right] t_i^l = 0 \quad (1.10)$$

Таким образом, мы получили систему m линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_k . Определитель этой системы не равен нулю, и она имеет единственное решение.

Если число точек, взятых в интервале задания, неограниченно растет, то сумма δ_{Σ} сводится к интегралу

$$\delta_l = \int [s(t) - f_m(t)]^2 dt. \quad (1.11)$$

Требование, чтобы величина δ_l стремилась к минимуму (нулю), есть среднеквадратический критерий сходимости.

Функция $f_m(t)$ не обязательно должна быть комбинацией возрастающих степеней t . Ее можно искать в виде линейной комбинации заданной совокупности линейно независимых функций $\varphi_k(t)$ так, чтобы

$$f_m(t) = a_0 \varphi_0(t) + a_1 \varphi_1(t) + \dots + a_m \varphi_m(t) = \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(t). \quad (1.12)$$

Заметим, что линейно независимой называется такая система функций $\varphi_k(t)$, при которой никакая из функций не может быть выражена в виде линейной комбинации остальных. Условием линейной независимости является невозможность тождества

$$\sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(t) \equiv 0, \quad (1.13)$$

если хотя бы два числа из a_k не равны нулю. Система степенных функций $1, t, t^2, \dots, t^m$ является лишь одной из возможных систем линейно независимых функций.

Задача представления заданного процесса решается особенно просто, если система независимых функций является ортогональной.

Если совокупность функций $C_0(t), C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$ удовлетворяет на отрезке $[t_1, t_2]$ условиям

$$\int_{t_1}^{t_2} C_i(t) C_k(t) dt = 0, \quad (1.14)$$

где $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ и $i \neq k$, то она называется системой ортогональных на отрезке $[t_1, t_2]$ функций. Если при этом также

$$\int_{t_1}^{t_2} C_i^2(t) dt \equiv N_i = 1 \quad (1.15)$$

$(i = 0, 1, 2, \dots, n),$

то система называется ортонормированной.

Если для заданной системы функций $N_i \neq 1$, то ее можно нормировать, умножив $C_i(t)$ на $\frac{1}{\sqrt{N_i}}$.

Заданный детерминированный процесс называется разложимым по системе ортогональных функций, если можно записать

$$s(t) = \sum a_i C_i(t). \quad (1.16)$$

Если для непрерывной функции $s(t)$ можно выбрать a_i так, что путем увеличения количества членов в ряде δ_l можно сделать сколь угодно малым, то совокупность ортогональных функций называется полной. Ряд в этом случае является сходящимся в среднем. Для определения коэффициентов a_i , обеспечивающих минимум δ_l , приравняем к нулю частные производные по этим коэффициентам:

$$\frac{\partial \delta_l}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_i} \int \left[s(t) - \sum_i a_i C_i(t) \right]^2 dt = 0. \quad (1.17)$$

Произведя дифференцирование (1.17) и решив уравнение относительно a_i , получим

$$a_i = \int s(t) C_i(t) dt \quad (1.18)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

Интегралы берутся по области задания процесса, которая должна находиться внутри отрезка ортогональности. Коэффициенты, определенные таким образом, обеспечивают наилучшее приближение к заданному процессу.

Выяснение условий, при которых ряд (1.16) сходится во всех или почти во всех точках к заданной функции $s(t)$, является важной задачей математического анализа. Имеет место следующая теорема Дирихле. Для всякого колебания, описываемого функцией, имеющей конечное число точек разрыва первого рода, можно построить ряд по заданной системе ортогональных функций вида (1.16), если существуют интегралы

$$\int_{t_1}^{t_2} |s(t)| dt \text{ и } \int_{t_1}^{t_2} |s'(t)| dt.$$

Для аналитического представления детерминированных процессов можно использовать элементарные функции, а также ряд специальных систем функций, обладающих свойством ортогональности на различных отрезках. Обычно для анализа целесообразно выбрать систему функций, обеспечивающую наиболее быструю сходимость ряда (1.16). Однако в ряде случаев решающим является простота физического создания функций $C_i(t)$.

1.2 Разложение периодических детерминированных процессов в ряд Фурье

Рядом Фурье называется разложение периодического процесса в ряд (1.16) по системе тригонометрических функций $\cos(k\Omega t)$ и $\sin(k\Omega t)$, которая является ортонормированной с весом $\sqrt{2}$. Различают две формы записи ряда Фурье: тригонометрическая и комплексная.

Тригонометрическая форма записи имеет вид

$$s(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \cos k\Omega t + S_k \sin k\Omega t), \quad (1.19)$$

где C_0 - постоянная составляющая процесса $s(t)$ и коэффициенты ряда C_k и S_k определяются по формулам

$$C_0 = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) dt, \quad C_k = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(k\Omega t) dt, \quad S_k = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(k\Omega t) dt. \quad (1.20)$$

Здесь $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, T - период процесса.

Объединим в ряде (1.19) попарно члены с косинусами и синусами:

$$C_k \cos(k\Omega t) + S_k \sin(k\Omega t) = D_k \cos(k\Omega t + \varphi_k).$$

Раскрыв скобки в правой части этого выражения и приравняв коэффициенты при косинусах и синусах, получим, что $C_k = D_k \cos(\varphi_k)$, $S_k = -D_k \sin(\varphi_k)$.

Следовательно,

$$D_k = \sqrt{C_k^2 + S_k^2}, \text{ а } \varphi_k = -\arctg(S_k / C_k).$$

Теперь, используя формулу Эйлера

$$\cos(k\Omega t + \varphi_k) = \frac{e^{j(k\Omega t + \varphi_k)} + e^{-j(k\Omega t + \varphi_k)}}{2},$$

получим запись ряда Фурье в комплексной форме:

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \dot{D}_k e^{jk\Omega t}, \quad (1.21)$$

где $\dot{D}_k = D_k e^{j\varphi_k}$ - называется комплексной амплитудой k гармоники и содержит данные об амплитуде и начальной фазе ее.

Комплексная амплитуда легко определяется:

$$\begin{aligned} \dot{D}_k &= D_k e^{j\varphi_k} = D_k [\cos(\varphi_k) + j \sin(\varphi_k)] = C_k - jS_k = \\ &= \frac{2}{T} \left\{ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(k\Omega t) dt - j \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(k\Omega t) dt \right\} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-jk\Omega t} dt. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Формулы (1.21) и (1.22) можно назвать парой преобразования Фурье. Формула (1.22) позволяет определить совокупность гармонических составляющих (спектр), образующих в сумме $s(t)$, а формула (1.21) - вычислить $s(t)$, если известны эти гармонические составляющие.

Разложение в ряд Фурье не только точно представляет периодические функции при неограниченном числе членов, но и обеспечивает наименьшую среднеквадратическую ошибку аппроксимации по сравнению с любым тригонометрическим рядом, если их обрывать на произвольном конечном числе слагаемых.

Однако следует иметь в виду, что представление разрывных функций рядом Фурье в окрестности точек разрыва не вполне удовлетворительно из-за явления Гиббса. Явление Гиббса заключается в том, что функция, представленная рядом, переходя через точку разрыва, делает скачек на 17,9% больший, чем исходный детерминированный процесс. В качестве примера проявления этого явления рассмотрим разложение в ряд Фурье процесса вида:

$$\begin{aligned} s(t) &= 1 \text{ при } 2m \frac{T}{2} < t < (2m+1) \frac{T}{2}, \\ s(t) &= -1 \text{ при } (2m+1) \frac{T}{2} < t < 2(m+1) \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

Графически такой процесс будет иметь вид, представленный на рис.1.2а

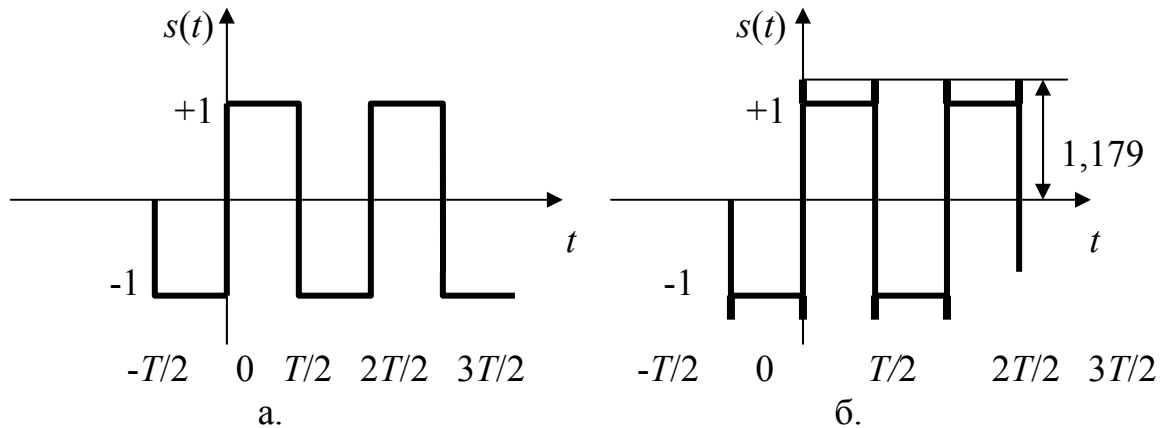


Рис.1.2

Представленная функция в точках $m\frac{T}{2}$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) имеет разрыв первого рода, принимая в них значение ± 1 в зависимости от того, как t стремится к этим точкам.

В соответствии с формулой (1.22) определим комплексную амплитуду гармоник

$$\dot{D}_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-jk\Omega t} dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-jk\Omega t} dt - \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 e^{-jk\Omega t} dt = \frac{2}{jk\pi} [1 - \cos(k\pi)].$$

Так как при $k=0, 2, 4, 6, \dots$ $\cos(k\pi)$ равен единице, то нулевой составляющей и четных гармоник данный процесс не содержит.

При $k=1$ - $\dot{D}_1 = \frac{2}{j\pi}(1+1) = \frac{4}{\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}}$, так как $\frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$.

Аналогично при $k=3, 5, \dots$ имеем $\dot{D}_3 = \frac{4}{3\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}}$, $\dot{D}_5 = \frac{4}{5\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \dots$

Переходя от комплексных амплитуд к мгновенным значениям гармоник, получим

$$s(t) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin(\Omega t)}{1} + \frac{\sin(3\Omega t)}{3} + \frac{\sin(5\Omega t)}{5} + \dots + \frac{\sin\{(2k-1)\Omega t\}}{2k-1} \right] \quad (1.23)$$

Сумма этого ряда Фурье в точках разрыва функции $s(t)$ стремится к единственному значению – нулю, так как ряд (1.23) непрерывная функция t и не может иметь двух разных значений при переменной $t = m\frac{T}{2}$, где $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Для графического представления зависимости (1.23) рассмотрим ее производную:

$$s'(t) = \frac{4}{\pi} \left[\cos(\Omega t) + \cos(3\Omega t) + \dots + \cos\{(2k-1)\Omega t\} \right]. \quad (1.24)$$

Суммирование тригонометрических функций, аргументы которых составляют арифметическую прогрессию, можно осуществить, используя формулу [2]:

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2k-1)x = \frac{\cos kx \cdot \sin kx}{\sin x} = \frac{1}{2} \frac{\sin 2kx}{\sin x}. \quad (1.25)$$

Следовательно, выражение (1.24) с учетом (1.25) примет вид

$$s'(t) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin(2k\Omega t)}{\sin(k\Omega t)}$$

Отсюда

$$s(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\sin(2k\Omega x)}{\sin(k\Omega x)} dx. \quad (1.26)$$

Максимумы и минимумы $s(t)$ при изменении t от 0 до $T/4$ определяются равенством $\sin(2k\Omega t) = 0$. Откуда $t = \frac{lT}{4k}$. Кривая функции $s(t)$ совершает колебания вокруг ординаты $s(t) = +1$ или -1 . При этом первый максимум наибольший (при $l = 1$). Его ордината равна

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{T}{4k}} \frac{\sin(2k\Omega x)}{\sin(k\Omega x)} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\sin(y)}{2k \cdot \sin \frac{y}{2k}} dy, \quad (1.27)$$

где обозначили $y = 2kx$.

При больших значениях k в выражении (1.27) $\sin \frac{y}{2k}$ можно заменить на $\frac{y}{2k}$.

В пределе при $k \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow 0$) имеем

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{2}{\pi} Si(\pi) = 1,179\dots, \quad (1.28)$$

где $Si(z)$ - интегральный синус.

Мы получили 1,179..., а должна быть единица.

На рис.1.2б представлен график аппроксимирующей функции нашего процесса при $k \rightarrow \infty$, из которого видно, что в точках разрыва процесса имеется всплеск функции. Следует отметить, что независимо от вида исходного процесса в точках разрыва первого рода ряд Фурье будет давать скачек на ~18% превышающий значения исходного процесса.

1.3 Интегральное преобразование Фурье

Импульсный процесс $s(t)$ можно представить рядом Фурье, однако это представление будет верно лишь на интервале существования импульса, в остальные моменты времени, когда $s(t) = 0$, ряд будет давать другие значения. Если необходимо получить аналитическое представление импульсного детерминированного процесса, верное в любой момент времени, следует пользоваться интегральным преобразованием Фурье.

Пусть задан импульс $s(t)$. Мысленно образуем периодическую последовательность таких импульсов с периодом T . Такая последовательность будет описываться зависимостью

$$s_n(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} s(t + mT), \text{ где } m - \text{целое число.}$$

Такой периодический процесс можно разложить в ряд Фурье и вычислить комплексные амплитуды. Обозначив $k\Omega = \omega$, получим

$$\overset{\text{г}}{D}(\omega) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_n(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.29)$$

Так как интегрирование проводится в пределах от $-T/2$ до $+T/2$, то величина $\overset{\text{г}}{D}(\omega)$ не изменится, если вместо $s_n(t)$ представить $s(t)$, а интегрирование проводить в бесконечных пределах:

$$\overset{\text{г}}{D}(\omega) = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{2}{T} S(j\omega). \quad (1.30)$$

Величину

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.31)$$

называют спектральной функцией, соответствующей импульсу $s(t)$.

Вид спектральной функции зависит только от аналитического выражения импульса $s(t)$, т.е. от формы импульса. Отметим, что

$$\overset{\text{г}}{D}_k = \overset{\text{г}}{D}(k\Omega) = \frac{2}{T} S(jk\Omega), \quad (1.32)$$

т.е. для вычисления комплексной амплитуды любой гармоники периодической последовательности импульсов достаточно вычислить спектральную функцию $S(j\omega)$ исходного импульса, взять ее значение на частоте искомой гармоники $S(jk\Omega)$ и умножить на $\frac{2}{T}$.

Выразим теперь импульс $s(t)$ через его спектральную функцию.

$$s_n(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} s(t+mT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k e^{jk\Omega t} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{T} S(jk\Omega) e^{jk\Omega t}. \quad (1.33)$$

Устремим T к бесконечности. При этом все импульсы, кроме исходного $s(t)$, отодвинутся в бесконечность и при конечных значениях t останется импульс $s(t)$. Таким образом,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} s(t+mT) = s(t).$$

С другой стороны, учтя, что $\frac{2}{T} = \frac{\Omega}{\pi}$ и, обозначив $\Omega = \omega_{k+1} - \omega_k$, получим новую запись правой части выражения (1.33):

$$\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} S(j\omega_k) e^{j\omega_k t} (\omega_{k+1} - \omega_k).$$

Если теперь $T \rightarrow \infty$, то $\omega_{k+1} - \omega_k \rightarrow 0$, а сумма в пределе превращается в интеграл:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(j\omega_k) e^{j\omega_k t} (\omega_{k+1} - \omega_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.34)$$

Таким образом,

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.35)$$

Формулы (1.31) и (1.35) называются парой преобразования Фурье. Первая осуществляет прямое преобразование и позволяет найти спектральную функцию, вторая осуществляет обратное преобразование Фурье и дает возможность вычислить значение импульса в любой момент времени.

Из приведенного рассмотрения ясно, что интеграл Фурье представляет собой импульс в виде бесконечной суммы бесконечно малых гармонических составляющих, расположенных на всех частотах. На этом основании говорят о сплошном (непрерывном) спектре, которым обладает импульсный процесс. Необходимо, однако, помнить, что $S(j\omega)$ не спектр, а спектральная функция импульса, ибо на каждой данной частоте энергия импульса равна нулю.

Спектральную функцию можно представить в виде действительной $A(\omega)$ и мнимой $B(\omega)$ части:

$$S(j\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = S(\omega) e^{-j\beta(\omega)}, \quad (1.36)$$

где: $A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(\omega t) dt$ и $B(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sin(\omega t) dt$, а

$$S(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \quad - \quad \text{модуль спектральной}$$

функции,

$$\beta(\omega) = \arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)} - \text{фаза спектральной функции.}$$

Модуль спектральной функции есть функция четная, фаза – нечетная относительно частоты ω .

Пример. Определить спектральную функцию экспоненциального импульса

$$s(t) = \begin{cases} ue^{-\alpha t} & t > 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}.$$

Спектральная функция будет равна

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} ue^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{u}{\alpha + j\omega} = \frac{u}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} e^{-j\arctg \omega/\alpha} = \\ &= S(\omega) e^{-j\beta(\omega)} \end{aligned}$$

Здесь $S(\omega) = \frac{u}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$ - модуль и $\beta(\omega) = \arctg \omega/\alpha$ - фаза спектральной функции экспоненциального импульса.

В табл. 1.1 приведены спектральные функции некоторых, часто встречающихся на практике импульсных процессов.

Таблица 1.1

№ п/п.	Временная функция	Спектральная функция
1	$s(t) = \delta(t - t_0)$	$S(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$
2	$s(t) = \begin{cases} u & \text{при } t \leq \tau/2 \\ 0 & \text{при } t > \tau/2 \end{cases}$	$S(j\omega) = u\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$
3	$s(t) = ue^{-\frac{t^2}{\tau^2}}$	$S(j\omega) = u\tau \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2 \tau^2}{4}}$
4	$s(t) = \begin{cases} ue^{-\alpha t} & \text{при } t > 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$	$S(j\omega) = \frac{u}{\alpha + j\omega}$
5	$s(t) = \begin{cases} u \cos \frac{\pi t}{\tau} & \text{при } t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{при } t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$	$S(j\omega) = \frac{2u\tau}{\pi} \cdot \frac{\cos \frac{\omega\tau}{2}}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}$
6	$s(t) = \begin{cases} u \cos^2 \frac{\pi t}{\tau} & \text{при } t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{при } t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$	$S(j\omega) = u \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\omega \left[1 - \left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)^2 \right]}$

7	$s(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{\tau}{2} \\ u\left(1 + \frac{2t}{\tau}\right) & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq 0 \\ u\left(1 - \frac{2t}{\tau}\right) & 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & t > \frac{\tau}{2} \end{cases} \text{ при}$	$S(j\omega) = u\tau \frac{1 - \cos\frac{\omega\tau}{2}}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}$
8	$s(t) = ue^{-\alpha t }$	$S(j\omega) = u\left(\frac{1}{\alpha + j\omega} + \frac{1}{\alpha - j\omega}\right) = \frac{2u\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$

1.4. Свойства преобразования Фурье

Рассмотрим некоторые простые свойства преобразования Фурье.

1. Преобразование Фурье четной и нечетной функций

Если $s(t)$ четная функция, то ее преобразование Фурье дает также четную функцию. Действительно:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\sin(\omega t) dt.$$

При четной $s(t)$ второй интеграл равен нулю и функция $S(j\omega)$, определяемая первым интегралом, есть функция вещественная и четная относительно ω .

Если $s(t)$ - нечетная относительно t , то в ноль обращается первый интеграл и

$$S(j\omega) = -j \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\sin(\omega t) dt.$$

В этом случае $S(j\omega)$ - нечетная и чисто мнимая функция ω .

2. Линейность преобразования Фурье

Докажем, что оператор Фурье линеен. Линейным называется оператор (обозначим его буквой \mathcal{F}), для которого выполняется равенство

$$\mathcal{F}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{F}f_1 + c_2 \mathcal{F}f_2, \quad (1.37)$$

где: c_1 и c_2 - произвольные постоянные; f_1 и f_2 - произвольные функции.

Линейность оператора Фурье вытекает из того, что интеграл от суммы функций равен сумме интегралов и, что постоянную величину можно вынести за знак интеграла.

3. Сдвиг процессов во времени

Пусть процессу $s_1(t)$ произвольной формы, существующему на интервале $[t_1, t_2]$, соответствует спектральная функция $S_1(j\omega)$. Задержим этот процесс на время t_0 так, чтобы новый процесс $s_2(t)$ существовал на интервале $[t_1 + t_0, t_2 + t_0]$, т.е. $s_2(t) = s_1(t - t_0)$.

Найдем спектральную функцию $S_2(j\omega)$ процесса $s_2(t)$:

$$S_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t - t_0) e^{-j\omega t} dt,$$

введем новую переменную $\tau = t - t_0$, тогда:

$$S_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} S_1(j\omega). \quad (1.38)$$

Таким образом, смещению процесса на величину t_0 в сторону запаздывания (опережения) соответствует сдвиг фазы спектральной функции, т.е. сдвиг всех спектральных составляющих на величину $e^{-j\omega t_0}$ в сторону отставания (опережения). Модуль спектральной функции при этом не меняется.

4. Изменение масштаба времени

Рассмотрим процесс $s_1(t)$, существующий на интервале $[0, T]$ и имеющий спектральную функцию $S_1(j\omega)$. Сожмем процесс во времени в n раз так, что новый процесс $s_2(t)$ окажется заданным в интервале $[0, T/n]$ и $s_2(t) = s_1(nt)$.

Спектральная функция этого процесса будет

$$S_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(nt) e^{-j\omega t} dt.$$

Введем новую переменную $\tau = nt$ и получим

$$S_2(j\omega) = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) e^{-j\frac{\omega}{n}\tau} d\tau = \frac{1}{n} S_1(j\omega) \quad (1.39)$$

Из соотношения (1.39) следует, что сжатие процесса во времени в n раз приводит к растяжению (по частоте) ширины спектральной функции в n раз и к уменьшению в n раз ее модуля.

5. Дифференцирование и интегрирование

Пусть процессу $s_1(t)$ соответствует спектральная функция $S_1(j\omega)$ так что

$$S_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) e^{-j\omega t} dt, \quad s_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Продифференцируем процесс $s_1(t)$ по времени и найдем его спектральную функцию

$$\frac{ds_1(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega S_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Это выражение можно рассматривать как обратное преобразование Фурье для процесса $s_2(t) = \frac{ds_1(t)}{dt}$, имеющего спектральную функцию $S_2(j\omega) = j\omega S_1(j\omega)$.

Таким образом, для производной детерминированного процесса по времени спектральная функция будет равна

$$S_2(j\omega) = j\omega S_1(j\omega). \quad (1.40)$$

Пусть процесс $s_1(t)$ имеет спектральную функцию $S_1(j\omega)$, а процесс $s_2(t)$ - $S_2(j\omega)$. Положим, что $s_2(t) = \int_{-\infty}^t s_1(\tau) d\tau$. Теперь

продифференцируем по времени процесс $s_2(t)$ и получим $\frac{ds_2(t)}{dt} = s_1(t)$. Из этого равенства с учетом выражения (1.40) следует, что $S_1(j\omega) = j\omega S_2(j\omega)$. Поэтому спектральная функция процесса $s_2(t)$, равного интегралу от процесса $s_1(t)$, определяется выражением

$$S_2(j\omega) = \frac{S_1(j\omega)}{j\omega}. \quad (1.41)$$

6. Спектральная функция произведения двух временных функций

Пусть процесс $s(t)$ образован произведением двух функций $f(t)$ и $g(t)$, имеющих спектральные функции $F(j\omega)$ и $G(j\omega)$ соответственно. Спектральная функция такого процесса будет иметь вид

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.42)$$

Представим процесс $g(t)$ в виде обратного преобразования Фурье и подставим в выражение (1.42):

$$S(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] e^{-j\omega t} dt =$$

Во внутреннем интеграле заменим ω на Ω и получим

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} G(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \right] e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\Omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j(\omega-\Omega)t} dt \right] d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\Omega) F[j(\omega-\Omega)] d\Omega.$$

$F[j(\omega - \Omega)]$ - спектральная функция процесса $f(t)$ при частоте $\omega - \Omega$.

Таким образом, с точностью до постоянного множителя $1/2\pi$ спектральная функция произведения двух функций времени $f(t)$ и $g(t)$ равна интегральной свертке спектральных функций $F(j\omega)$ и $G(j\omega)$ перемножаемых временных функций.

Полученное равенство справедливо при любой частоте ω , в том числе и при $\omega = 0$, когда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\Omega)F(-j\Omega)d\Omega. \quad (1.43)$$

Заменив Ω на ω , получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)F(-j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)F^*(j\omega)d\omega, \quad (1.44)$$

где $F^*(j\omega) = F(-j\omega)$ - функция, комплексно сопряженная спектральной функции $F(j\omega)$. Из выражения (1.44) имеем при $g(t) = f(t)$ равенство Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega. \quad (1.45)$$

Выражение (1.45) определяет электрическую энергию процесса (выделяемую на единичном сопротивлении), а значение $\frac{|F(j\omega)|^2}{2\pi} d\omega$ - энергия этого процесса в бесконечно узкой полосе частот.

1.5 Энергия взаимодействия двух процессов. Равенство Рэлея

Определим энергию взаимодействия двух процессов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, имеющих спектральные функции $S_1(j\omega)$ и $S_2(j\omega)$ соответственно. Воспользуемся равенством Парсеваля и найдем энергию суммы двух процессов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_1(j\omega) + S_2(j\omega)|^2 d\omega. \quad (1.46)$$

Квадрат модуля подынтегрального выражения правой части равенства можно записать в виде:

$$|S_1(j\omega) + S_2(j\omega)|^2 = [S_1(j\omega) + S_2(j\omega)][S_1^*(j\omega) + S_2^*(j\omega)].$$

С учетом записанного раскроем скобки в левой и правой частях равенства (1.46):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_1^2(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} s_2^2(t) dt + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_1(j\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_2(j\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [S_1(j\omega) S_2^*(j\omega) + S_1^*(j\omega) S_2(j\omega)] d\omega. \quad (1.47)$$

Согласно равенству Парсеваля левые и правые слагаемые в обеих частях уравнения (1.47) попарно должны быть равны. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t) dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [S_1(j\omega) S_2^*(j\omega) + S_1^*(j\omega) S_2(j\omega)] d\omega. \quad (1.48)$$

Представим комплексные спектральные функции через их модули и фазы:

$$S_1(j\omega) = |S_1(j\omega)| e^{-j\varphi_1}; \quad S_2(j\omega) = |S_2(j\omega)| e^{-j\varphi_2}; \\ S_1^*(j\omega) = |S_1(j\omega)| e^{j\varphi_1}; \quad S_2^*(j\omega) = |S_2(j\omega)| e^{j\varphi_2}.$$

Подставим указанные значения спектральных функций в выражение (1.48)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t) dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [|S_1(j\omega) S_2(j\omega)| e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)} + |S_1(j\omega) S_2(j\omega)| e^{-j(\varphi_2 - \varphi_1)}] d\omega = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_1(j\omega) S_2(j\omega)| \cos(\varphi_2 - \varphi_1) d\omega \quad (1.49)$$

Соотношения (1.48) и (1.49) называют равенствами Рэлея. Равенство Парсеваля вытекает из них как частный случай при $S_1(j\omega) = S_2(j\omega)$.

Окончательно для нашей задачи равенство (1.47) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_1(j\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_2(j\omega)|^2 d\omega + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_1(j\omega) S_2(j\omega)| \cos(\varphi_2 - \varphi_1) d\omega \quad (1.50)$$

Из выражения (1.50) следует, что общая энергия, создаваемая совместно двумя процессами, может превышать сумму энергий отдельных независимых процессов. Эта дополнительная составляющая создается теми спектральными составляющими двух процессов, сдвиг фаз между которыми меньше $\pi/2$. При фазовом сдвиге более $\pi/2$ общая энергия может уменьшиться. Естественно, что это имеет место для когерентных колебаний, т.е. таких колебаний, между которыми существует функциональная зависимость. Некогерентными называются колебания, значения которых не связаны. Энергия взаимодействия некогерентных колебаний равна нулю. Некогерентные колебания всегда ортогональны, т.е. для них выполняется условие:

$$\int_{t_1}^{t_2} s_1(t)s_2(t)dt = 0.$$

Однако ортогональные колебания не обязательно некогерентны. Например, процессы $s_1(t) = a \cos(\omega t)$ и $s_2(t) = b \sin(\omega t)$ являются ортогональными, но и когерентными, так как $s_2(t) = b \sqrt{1 - \frac{s_1^2(t)}{a^2}}$, т.е. между ними существует функциональная зависимость.

1.6 Преобразование Лапласа

Некоторые процессы, не удовлетворяющие определенным условиям, например условиям Дирихле, не могут быть представлены обратным преобразованием Фурье, так как для них не существует или не определена спектральная функция. Например, процесс, описываемый функцией Хевисайда (функцией единичного скачка), не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости. Для анализа таких процессов используются методы операционного исчисления, связанные с интегральными преобразованиями Карсона и Лапласа. Рассмотрим преобразование Лапласа.

Умножим функцию процесса $s(t)$ на e^{-ct} , где c - положительная константа, выбранная так, чтобы новая функция $s(t)e^{-ct}$ удовлетворяла условию абсолютной интегрируемости. Теперь спектральная функция нового процесса будет иметь вид

$$S(j\omega, c) = \int_{-\infty}^{+\infty} [s(t)e^{-ct}] e^{-j\omega t} dt. \quad (1.51)$$

Для обеспечения существования этого интеграла будем задавать все процессы $s(t)$ так, чтобы $s(t) = 0$ при $t < 0$. При этом

$$S(j\omega, c) = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-(c+j\omega)t} dt = S(c + j\omega). \quad (1.52)$$

Проведем над $S(c + j\omega)$ обратное преобразование, т.е.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(c + j\omega) e^{j\omega t} d\omega = s(t) e^{-ct}. \quad (1.53)$$

Умножим обе части выражения (1.53) на e^{ct} , объединим степенные множители под интегралом и заменим переменную интегрирования ω на $c + j\omega$. Получим

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S(c + j\omega) e^{(c+j\omega)t} d(c + j\omega) = s(t). \quad (1.54)$$

Обозначим в выражениях (1.52) и (1.54) комплексное число $c + j\omega = p$. Тогда:

$$L[s(t)] = S(p) = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt; \quad (1.55)$$

$$L^{-1}[S(p)] = s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S(p)e^{pt} dp. \quad (1.56)$$

Соотношения (1.55) и (1.56) называются парой преобразования Лапласа. Зависимость (1.56) также называют формулой Меллина-Фурье или формулой обращения. При этом говорят, что $S(p)$ - изображение $s(t)$ и, наоборот, $s(t)$ - оригинал $S(p)$, (p - комплексная, а t - вещественная переменные)

Основные свойства преобразования Лапласа:

1) линейность - $L[s_1(t) + s_2(t)] = L[s_1(t)] + L[s_2(t)]$,

$$L[cs(t)] = cL[s(t)];$$

2) линейное изменение масштаба - $L[s(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} S\left(\frac{p}{\alpha}\right)$;

3) сдвиг во времени - $L[s(t - t_0)] = e^{-pt_0} L[s(t)]$, ($t_0 > 0$);

4) сдвиг спектральной функции - $L[s(t)e^{-\alpha t}] = S(p + \alpha)$;

5) свертка преобразований - $L[s_1(t)s_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S_1(p^*)S_2(p - p^*)dp^*$;

6) свертка оригиналов - $L\left[\int_0^t s_1(\tau)s_2(t - \tau)d\tau\right] = L[s_1(t)]L[s_2(t)]$;

7) правило производной - $L[s'(t)] = pL[s(t)] - pS(0)$;

8) правило интеграла - $L\left[\int_0^t s(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{p} L[s(t)]$.

При проведении расчетов полезно использовать интегрирование по методу вычетов. Согласно теореме о вычетах интеграл функции $f(p)$ комплексного переменного по любому замкнутому контуру C , лежащему внутри односвязной области, равен $2\pi j$, умноженному на сумму вычетов $\text{Res}_{a_k} f(p)$ в особых точках a_k подынтегральной функции:

$$\oint_C f(p)dp = 2\pi j \sum_{k=1}^n \text{Res}_{a_k} f(p). \quad (1.57)$$

Вычет функции $f(t)$ в полюсе $p = a_k$ кратности m вычисляется по формуле

$$\text{Res}_{a_k} f(p) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{p \rightarrow a_k} \frac{d^{(m-1)}}{dp^{m-1}} \left[f(p)(p - a_k)^m \right], \quad (1.58)$$

в частности, в полюсе первого порядка имеем

$$\operatorname{Res}_{a_k} f(p) = \lim_{p \rightarrow a_k} f(p)(p - a_k). \quad (1.59)$$

Применяя теорему о вычетах к формуле обращения (1.56) и образуя замкнутый контур интегрирования окружностью бесконечно большого радиуса, получим следующее выражение для определения оригинала:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S(p)e^{pt} dp = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{a_k} [S(p)e^{pt}]. \quad (1.60)$$

Пример. Найдем оригинал детерминированного процесса, изображение которого определяется зависимостью $S(p) = 1/p$.

Так как функция $f(p) = \frac{e^{pt}}{p}$ имеет один полюс $a = 0$ первого порядка,

то

$$\operatorname{Res}_0 \frac{e^{pt}}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} (p - 0) = 1.$$

Следовательно, $s(t) = 1 = e(t)$. Таким образом, искомый оригинал представляет собой функцию Хевисайда.

Изображение $S(p)$ можно представить в виде рациональной дроби $S(p) = \frac{f(p)}{F(p)}$, где $F(p)$ - полином n -й степени, а $f(p)$ - любой полином низшей степени. Знаменатель $F(p)$ имеет M корней, которые можно найти из уравнения $F(p) = 0$, причем корень p_k имеет кратность m_k . В этом случае в соответствии с (1.58) имеем

$$\operatorname{Res}_{p_k} \left[\frac{f(p)}{F(p)} e^{pt} \right] = \frac{1}{(m_k - 1)!} \cdot \frac{d^{(m_k-1)}}{dp^{m_k-1}} \left[\frac{f(p)}{F'(p)} (p - p_k)^{m_k} e^{pt} \right]_{p=p_k}.$$

Тогда согласно (1.60) выражение для оригинала принимает вид:

$$s(t) = \sum_{k=1}^M \frac{1}{(m_k - 1)!} \cdot \frac{d^{(m_k-1)}}{dp^{m_k-1}} \left[\frac{f(p)}{F'(p)} (p - p_k)^{m_k} e^{pt} \right]_{p=p_k}. \quad (1.61)$$

В случае простых корней знаменателя ($m_1 = m_2 = \dots = 1$) формула (1.61) упрощается:

$$s(t) = \sum_{k=1}^M \frac{f(p_k)}{F'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (1.62)$$

Зависимости (1.61) и (1.62) называются обобщением формулы разложения Хевисайда.

Пример. Следует определить оригинал процесса, изображение которого равно:

$$S(p) = \frac{up}{p^2 + \omega_0^2}.$$

Для данного примера $f(p) = up$, $F(p) = p^2 + \omega_0^2$, $F'(p) = 2p$, Из уравнения $p^2 + \omega_0^2 = 0$ находим корни знаменателя: $p_1 = j\omega_0$ и $p_2 = -j\omega_0$. Теперь по формуле (1.62) определяем оригинал:

$$s(t) = \frac{f(p_1)}{F'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{f(p_2)}{F'(p_2)} e^{p_2 t} = \frac{uj\omega_0}{2j\omega_0} e^{j\omega_0 t} + \frac{-uj\omega_0}{-2j\omega_0} e^{-j\omega_0 t} = u \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}.$$

Используя формулу Эйлера $\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$, окончательно получим

$$s(t) = u \cos(\omega_0 t) \text{ при } t > 0.$$

1.7 Корреляционный анализ детерминированных процессов

Спектральный анализ позволяет оценить соотношение между различными гармоническими составляющими в спектре детерминированного процесса и вклад, вносимый каждой гармоникой. В ряде случаев для описания свойств сигналов желательно оперировать такой характеристикой, которая без разложения в спектр позволяет оценить временные параметры его, в частности, скорость его изменения во времени. К таким характеристикам относятся автокорреляционная и взаимокорреляционная функции.

Автокорреляционная функция характеризует степень связи (корреляции) детерминированного процесса $s(t)$ и его копии, сдвинутой на временной интервал τ . Для детерминированного процесса $s(t)$ конечной длительности автокорреляционная функция $K(\tau)$ определяется соотношением

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s(t-\tau)dt, \quad (1.63)$$

где τ - временной интервал, на который смещена относительно исходного положения какая-либо точка функции $s(t)$.

Основные свойства автокорреляционной функции

1. Автокорреляционная функция максимальна при отсутствии временного сдвига

$$K(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)dt = E. \quad (1.64)$$

Иными словами, при $\tau = 0$ значение автокорреляционной функции определяет полную энергию E детерминированного процесса. С увеличением временного сдвига автокорреляционная функция убывает. При

сдвиге τ , превышающем длительность сигнала $s(t)$, автокорреляционная функция обращается в ноль.

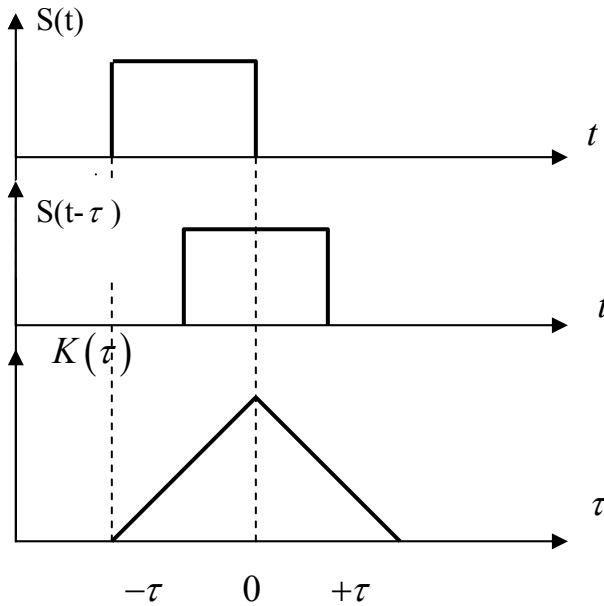


Рис.1.3

энергию перекрывающихся частей процесса и его копии, сдвинутой на интервал τ . При этом автокорреляционная функция имеет размерность энергии.

Нормированная автокорреляционная функция, называемая коэффициентом автокорреляции, будет иметь вид

$$k(\tau) = \frac{K(\tau)}{K(0)}.$$

2. Автокорреляционная функция – четная функция и может быть определена по любому из следующих соотношений:

$$K(\tau) = K(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s(t+\tau)dt. \quad (1.65)$$

3. Для неограниченных во времени процессов соотношение (1.64) не имеет смысла, так как такие процессы обладают бесконечно большой энергией, однако средняя мощность их всегда имеет конечное значение. Поэтому для таких процессов автокорреляционная функция может быть найдена с помощью предельного перехода:

$$K(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)s(t-\tau)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)s(t+\tau)dt \quad (1.66)$$

и приобретает размерность мощности при $\tau = 0$, характеризуя среднюю мощность процесса, если он не содержит постоянной составляющей.

В случае периодического процесса с периодом T достаточно усреднить произведение $s(t)s(t-\tau)$ за один период:

Физический смысл автокорреляционной функции поясним на примере прямоугольного импульса. Из приведенного построения (Рис.1.3) видно, что автокорреляционная функция характеризуется ординатой, равной численному значению площади под графиком $s(t)s(t-\tau)$ при данном временном сдвиге τ . Другими словами, автокорреляционная функция ограниченного во времени детерминированного процесса определяет

и его копии, сдвинутой на интервал τ . При этом автокорреляционная функция имеет размерность энергии.

Нормированная автокорреляционная функция, называемая

коэффициентом автокорреляции,

будет иметь вид

$$K(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)s(t-\tau)dt. \quad (1.67)$$

4. Периодическому процессу соответствует и периодическая автокорреляционная функция, имеющая период, равный периоду самого процесса. Покажем это на примере простейшего гармонического процесса с амплитудой u и периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$s(t) = u \cos(\omega t - \varphi), \text{ где } \varphi - \text{ начальная фаза колебания.}$$

Используя выражение (1.67), получим:

$$\begin{aligned} K(\tau) &= \frac{u^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\omega t - \varphi) \cos[\omega(t - \tau) - \varphi] dt = \\ &= \frac{u^2}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\omega t - \varphi - \omega t + \omega \tau + \varphi) dt + \frac{u^2}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos[2(\omega t - \varphi) - \omega \tau] dt = \\ &= \frac{u^2 t}{2T} \cos(\omega \tau) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{u^2}{2T 2\omega} \sin[2(\omega t - \varphi) - \omega \tau] \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{u^2}{2} \cos(\omega \tau). \end{aligned}$$

При $\tau = 0$ $K(\tau) = \frac{u^2}{2}$, т.е. средняя за период мощность гармонического процесса.

Из приведенного примера вытекает важный вывод: автокорреляционная функция периодического процесса не зависит от начальной фазы этого процесса.

Интервал, при котором автокорреляционная функция или коэффициент автокорреляции уменьшается до некоторой величины, например, до нуля, называется интервалом корреляции.

$$\tau_k = \int_0^{\infty} k(\tau) d\tau.$$

Пример. Определить автокорреляционную функцию, коэффициент автокорреляции и интервал корреляции для прямоугольного импульса величиной u и длительностью τ_u

$$K(\tau) = \int_{|\tau|}^{\tau_u} u^2 dt = u^2 (\tau_u - |\tau|); \quad K(0) = u^2 \tau_u; \quad k(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{\tau_u}; \quad \tau_k = \int_0^{\tau_u} k(\tau) d\tau = \frac{\tau_u}{2}.$$

Связь двух различных процессов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ характеризуется взаимно-корреляционной функцией:

$$K_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t+\tau) s_2(t) dt. \quad (1.68)$$

Взаимнокорреляционную функцию можно рассматривать как обобщение автокорреляционной функции на случай двух различных процессов. В качестве иллюстрации рассмотрим взаимнокорреляционную функцию двух гауссовых импульсов.

Пример. Заданы два процесса вида:

$$s_1(t) = \frac{1}{a} e^{-\frac{t^2}{a^2}} \quad \text{и} \quad s_2(t) = \frac{1}{b} e^{-\frac{t^2}{b^2}}. \quad \text{Определим взаимнокорреляционную}$$

функцию этих процессов.

$$K_{12}(\tau) = \frac{1}{ab} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ - \left[\frac{t^2}{a^2} + \frac{(t-\tau)^2}{b^2} \right] \right\} dt.$$

Показатель подынтегральной функции при помощи дополнения до квадрата можно преобразовать к виду:

$$\left(\frac{t}{a} \right)^2 + \left(\frac{t-\tau}{b} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} t - \frac{a}{b} \cdot \frac{\tau}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} K_{12}(\tau) &= \frac{1}{ab} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ - \left[\left(\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} t - \frac{a}{b} \cdot \frac{\tau}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 \right] \right\} dt = \\ &= \frac{1}{ab} \exp \left(- \frac{\tau^2}{a^2 + b^2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[- \left(\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} t - \frac{a}{b} \cdot \frac{\tau}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 \right] dt. \end{aligned}$$

Обозначим $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} t - \frac{a}{b} \cdot \frac{\tau}{\sqrt{a^2 + b^2}} = y$, получим:

$$K_{12}(\tau) = \frac{1}{ab} \exp \left(- \frac{\tau^2}{a^2 + b^2} \right) \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \exp \left(- \frac{\tau^2}{a^2 + b^2} \right),$$

так как $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$.

Таким образом, взаимнокорреляционная функция двух гауссовых импульсов представляет собой также гауссов импульс с новым постоянным параметром $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Свойства взаимнокорреляционной функции отличаются от автокорреляционной функции. При $\tau = 0$ взаимнокорреляционная функция не обязательно достигает максимума. Также взаимнокорреляционная функция не обязательно является четной (или нечетной) относительно τ .

Было отмечено, что автокорреляционная функция не дает никакой информации о начальной фазе гармонического процесса. Иначе обстоит дело с взаимокорреляционной функцией двух гармонических процессов с одинаковыми частотами, но различными начальными фазами.

Пусть $s_1(t) = a \cos(\omega t - \varphi_1)$, а $s_2(t) = b \cos(\omega t - \varphi_2)$.

$$K_{12}(\tau) = \frac{ab}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\omega t - \varphi_1) \cos[\omega(t - \tau) - \varphi_2] dt = \frac{ab}{2} \cos[\omega\tau - (\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (1.69)$$

Из выражения (1.69) видно, что взаимокорреляционная функция двух гармонических процессов зависит от разности фаз этих процессов. Максимум функции $K_{12}(\tau)$ получается при $\tau = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\omega}$, а не при $\tau = 0$.

Рассмотрим взаимокорреляционную функцию двух гармонических процессов с кратными частотами ω_1 и $\omega_2 = n\omega_1$ при $n = 1, 2, 3, \dots$ и начальными фазами φ_1 и φ_2 . В этом случае имеем

$$K_{12}(\tau) = \frac{ab}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\omega_1 t - \varphi_1) \cos[n\omega_1(t - \tau) - \varphi_2] dt =$$

$$= \frac{ab}{T} \left\{ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos[\omega_1 t - \varphi_1 - n\omega_1(t - \tau) + \varphi_2] dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos[\omega_1 t - \varphi_1 + n\omega_1(t - \tau) - \varphi_2] dt \right\}.$$

при $n \neq 1$ оба интеграла этого выражения обращаются в нуль и, следовательно, можно сделать важное заключение: гармонические процессы с кратными частотами некоррелированы независимо от начальных фаз.

Коэффициент взаимной корреляции определяется выражением

$$k_{12}(\tau) = \frac{K_{12}(\tau)}{\sqrt{K_1(0)K_2(0)}}, \quad (1.70)$$

где $K_1(0)$ и $K_2(0)$ значения автокорреляционных функций процессов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ при $\tau = 0$.

Связь между автокорреляционной функцией и спектральной функцией детерминированного процесса

Рассмотрим две временные функции $s(t)$ и $s(t - \tau)$. Процессу $s(t)$ соответствует спектральная функция $S(j\omega)$, а процессу $s(t - \tau)$ соответствует спектральная функция $S_2(j\omega) = S(j\omega)e^{-j\omega\tau}$. Известно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s(t - \tau) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega)S_2^*(j\omega) d\omega.$$

Комплексно-сопряженная функция $S_2^*(j\omega)$ будет выражена

$$S_2^*(j\omega) = S_2(-j\omega) = S(-j\omega)e^{j\omega\tau} = S^*(j\omega)e^{j\omega\tau}.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s(t-\tau)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega)S^*(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau}d\omega. \quad (1.71)$$

Таким образом, автокорреляционная функция $K(\tau)$ и квадрат модуля спектральной функции $|S(j\omega)|^2$ детерминированного процесса связаны парой преобразования Фурье:

$$|S(j\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau, K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau}d\omega \quad (1.72)$$

1.8 Дельта-функция и ее свойства

Дельта-функция $\delta(t-t_0)$ - такая функция, которая для любого параметра t_0 равна нулю при $t \neq t_0$ и неограниченна при $t = t_0$, а площадь этой функции равна единице, т.е.

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq t_0 \\ \infty & \text{при } t = t_0 \end{cases},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)dt = 1. \quad (1.73)$$

Дельта-функция получается как предельная семейства непрерывных функций. Возьмем некоторую функцию $y = \phi(t)$, имеющую максимум при $t = 0$, и быстро убывающую в обе стороны от $t = 0$, и притом такую, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt = 1.$$

В качестве такой функции можно взять, например, функцию $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$,

Интеграл от этой функции равен единице. Рассмотрим семейство функций $y = \phi_m(t) = m\phi(mt)$, т.е. такие функции, которые увеличиваются по высоте и сужаются по длительности. При этом значение интеграла останется без изменения, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_m(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} m\phi(mt)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(mt)dmt = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt.$$

При $m \rightarrow \infty$ придем к дельта-функции.

Свертка дельта-функции с любой ограниченной и непрерывной в точке t_0 функцией $\varphi(t)$ обладает следующим замечательным свойством:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \delta(t-t_0) dt = \varphi(t_0). \quad (1.74)$$

Это свойство называется **фильтрующим свойством дельта-функции**. Дельта-функция действует как фильтр. Умножая произвольную функцию $\varphi(t)$ на $\delta(t-t_0)$ и интегрируя по t , выделяем одно значение этой функции, т.е. то значение, которое соответствует нулю аргумента дельта-функции ($t-t_0$).

Отметим, что дельта-функция имеет размерность величины $1/t$.

Определим спектральную функцию дельта-функции, используя ее фильтрующее свойство (1.74):

$$S_\delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}. \quad (1.75)$$

Если $t_0 = 0$, то, как видно из полученного выражения, спектральная функция дельта-функции равномерна на всех частотах с интенсивностью, равной единице.

Определим теперь спектральную функцию полусуммы двух дельта-функций. Получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} [\delta(t+t_0) + \delta(t-t_0)] e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} (e^{j\omega t_0} + e^{-j\omega t_0}) = \cos(\omega t_0). \quad (1.76)$$

Проведем обратное преобразование Фурье для функций $S_\delta(j\omega) = 1$ и $S(j\omega) = \cos(\omega t_0)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega = \delta(t) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega t_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2} [\delta(t+t_0) + \delta(t-t_0)].$$

Производные от дельта-функции определяются как пределы соответствующих производных от аппроксимирующих функций. Например:

$$\delta^{(n)}(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(m \frac{d^n}{dt^n} e^{-m^2 t^2} \right).$$

Также как и сама дельта-функция, ее производные равны нулю при $t \neq 0$. Поведение производных при $t = 0$ сложное. Первая производная, например, имеет вид

$$\delta'(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(-2tm^3 e^{-m^2 t^2} \right),$$

она равна $+\infty$ при подходе к началу координат слева ($t = 0^-$) и равна $-\infty$ при подходе справа ($t = 0^+$). В окрестностях $t = 0$ поведение $\delta'(t)$ сравнимо с поведением функции $1/t$.

Фильтрующее свойство дельта-функции распространяется также и на ее производные. Свертка производной дельта-функции с любой функцией, имеющей непрерывную производную n -го порядка в точке t_0 , равна

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \delta^{(n)}(t-t_0) dt = \varphi^{(n)}(t_0). \quad (1.77)$$

Найдем спектральную функцию производной дельта-функции:

$$S_{\delta^{(n)}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = \left(\frac{d^n}{dt^n} e^{-j\omega t} \right)_{t=t_0} = (-j\omega)^n e^{-j\omega t_0}.$$

Если $t_0 = 0$, то $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t) e^{-j\omega t} dt = (-j\omega)^n$.

Рассмотрим еще некоторые интересные формулы, связанные с дельта-функцией:

1. $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$;
2. $\delta[\varphi(t)] = \frac{1}{|\varphi'(0)|} \delta(t)$;
3. $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$.

С помощью дельта-функции легко записываются некоторые другие функции. Например, функция Хевисайда (функция единичного скачка)

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t > 0 \end{cases}. \quad \text{Эту функцию можно записать в виде}$$

$e(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$. Ясно, что функция $e(t)$ равна нулю при $t < 0$ и при $t > 0$ -

$e(t) = 1$. Производная $e(t)$ будет $e'(t) = \delta(t)$. При интегрировании функции $e(t)$ получим непрерывную функцию

$$\int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ t & \text{при } t > 0 \end{cases}.$$

1.9 Классификация и функции распределения случайных процессов

Случайный процесс, для которого характерно изменение физической величины во времени (или в пространстве), описывается случайной функцией.

Различают четыре основных вида случайных процессов:

- 1) случайный процесс общего типа: t и $\xi(t)$ может принимать любые значения на отрезке действительной оси;

- 2) дискретный случайный процесс: t - непрерывно, а величины $\xi(t)$ - дискретны;
- 3) случайный поток общего типа: t - дискретно, $\xi(t)$ может принимать любое значение;
- 4) дискретный случайный поток: t и $\xi(t)$ оба дискретны.

Особым классом являются квазидетерминированные случайные процессы, которые описываются функцией времени заданного типа $\xi(t) = s(t, \alpha, \beta, \gamma, \dots)$, один или несколько параметров $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, которой являются случайными величинами. В качестве примера можно привести процесс вида $\xi(t) = u \cos(\omega t + \varphi)$, где u и ω фиксированы, а φ - случайная

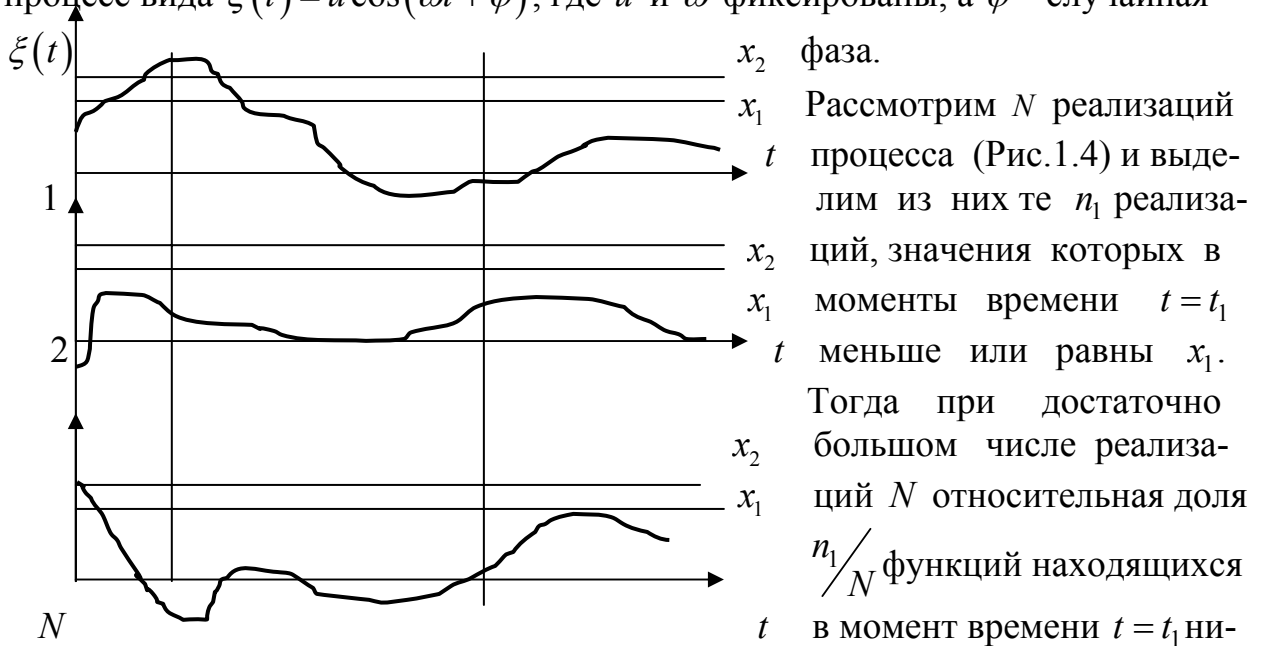


Рис.1.4

обладать статистической устойчивостью, т.е. будет оставаться приблизительно постоянным числом. Это число является вероятностью того, что в момент времени $t = t_1$ случайная функция $\xi(t)$ находится ниже уровня x_1 . Указанная вероятность будет зависеть как от фиксированного момента времени, так и от выбранного уровня, т.е. будет функцией двух переменных t_1 и x_1 . Функция

$$F_1(x_1, t_1) = P\{\xi(t_1) \leq x_1\} \quad (1.78)$$

называется одномерной интегральной функцией распределения случайного процесса. Если интегральная функция распределения имеет частную производную по x_1

$$\frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1} = W_1(x_1, t_1), \quad (1.79)$$

то эта производная называется одномерной плотностью вероятности или одномерной функцией распределения случайного процесса. Характеристики (1.78) и (1.79) дают представление о случайном процессе лишь в отдельные

моменты времени. Они характеризуют процесс статистически и не дают представления о динамике его развития.

Для более полной характеристики случайного процесса необходимо знать связь между вероятностными значениями его при двух произвольных моментах времени.

Для этого снова рассмотрим N реализаций случайного процесса и выделим из них n_2 реализаций, значения которых в моменты времени $t = t_1$ меньше уровня x_1 , а в моменты $t = t_2$ меньше x_2 . Получим по аналогии с предыдущим рассмотрением вероятность $P\{\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2\}$, которая является функцией четырех переменных x_1, x_2, t_1, t_2 . Теперь

$$F_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2\} \quad (1.80)$$

называется двумерной интегральной функцией распределения вероятностей случайного процесса, а значение

$$\frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = W_2(x_1, x_2, t_1, t_2) \quad (1.81)$$

называется двумерной плотностью вероятностей.

Таким же образом можно определить вероятность того, что случайная функция $\xi(t)$ при моментах времени t_1, t_2, \dots, t_n будет находиться ниже уровней соответственно x_1, x_2, \dots, x_n . Тогда

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} \quad (1.82)$$

называется n -мерной интегральной функцией распределения вероятностей случайного процесса, а

$$\frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = W_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) \quad (1.83)$$

называется n -мерной плотностью вероятностей случайного процесса.

Многомерная плотность вероятностей почти полностью характеризует (описывает) случайный процесс.

Из функции распределения n -го порядка могут быть получены все функции распределения более низких порядков вплоть до первого, т.е.:

$$W_m(x_1, x_2, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (n-m) \dots W_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) dx_{m+1} \dots dx_n,$$

Иногда достаточно знать о случайном процессе меньше, чем дают функции распределения. Можно ограничиться моментными функциями, которые в общем виде определяются выражением:

$$\begin{aligned} m_{k_1 k_2 \dots k_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= m_1 \left\{ [\xi(t_1)]^{k_1} [\xi(t_2)]^{k_2} \dots [\xi(t_n)]^{k_n} \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} W_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Некоторые свойства случайных процессов описываются небольшим количеством моментных функций, наиболее распространенными из них являются:

- среднее значение (математическое ожидание) случайного процесса (или первая начальная моментная функция)

$$m_1(t) = m_1\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} xW_1(x,t)dx = a(t); \quad (1.85)$$

- дисперсия (мощность) случайного процесса (или вторая центральная моментная функция)

$$M\{\xi(t)\} = m_1\left\{\left[\xi(t) - m_1\{\xi(t)\}\right]^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - m_1\{\xi(t)\}\right]^2 W_1(x,t)dx = \sigma^2(t); \quad (1.86)$$

- корреляционная функция (второго порядка) случайного процесса (или смешенная вторая начальная моментная функция)

$$m_1\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2W_2(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2 = B_2(t_1,t_2). \quad (1.87)$$

Как видно из приведенных формул (1.85), (1.86) и (1.87) среднее значение и дисперсия случайного процесса в общем случае являются функциями времени, а корреляционная функция зависит от двух временных параметров.

1.10 Стационарные и нестационарные случайные процессы. Эргодические случайные процессы

Стационарные случайные процессы

Случайный процесс $\xi(t)$ называется стационарным в узком смысле (или строго стационарным), если его функция распределения $W_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$ произвольного порядка n не меняется при любом сдвиге всей группы точек t_1, t_2, \dots, t_n вдоль временной оси (для любых n и τ), т.е.

$$W_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = W_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1 - \tau, t_2 - \tau, \dots, t_n - \tau).$$

Другими словами, случайный процесс будет строго стационарным, если выражения для функций распределения любого порядка не зависят от положения начала отсчета времени.

Если вероятностные характеристики случайного процесса не инвариантны по отношению к произвольному смещению начала отсчета времени, то процесс – нестационарный.

Из приведенного определения следует, что для стационарного случайного процесса:

- одномерная функция распределения имеет один и тот же вид в любой момент времени (т.е. не зависит от времени)

$$W_1(x,t) = W_1(x,t-\tau) = W_1(x); \quad (\tau = t)$$

- двумерная функция распределения может зависеть лишь от разности $t_2 - t_1$

$$W_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = W_2(x_1, x_2, t_2 - t_1);$$

- трехмерная функция распределения может зависеть лишь от двух разностей $t_2 - t_1$ и $t_3 - t_1$, т.е.

$$W_3(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3) = W_3(x_1, x_2, x_3, t_2 - t_1, t_3 - t_1)$$

и т.д.

Так как одномерные функции распределения стационарных случайных процессов не зависят от времени, то среднее значение и дисперсия этих процессов не зависят от времени. Поскольку двумерная функция распределения зависит только от разности $\tau = t_2 - t_1$, то и корреляционная функция такого процесса зависит от одного временного параметра τ :

$$B_2(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 W_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2.$$

Случайные процессы, у которых среднее значение и дисперсия не зависят от времени, а корреляционная функция второго порядка зависит только от одного временного параметра, называются стационарными в широком смысле. Следует отметить, что стационарность в широком смысле не тождественна строгой стационарности. Случайные процессы, стационарные строго, всегда стационарны в широком смысле, но не наоборот.

Нестационарные случайные процессы

1. Аддитивные нестационарные процессы. К аддитивным нестационарным процессам относятся процессы вида $\eta(t) = \xi(t) + \varphi(t)$, где $\xi(t)$ - стационарный случайный процесс; $\varphi(t)$ - некоторая детерминированная функция при условии $\varphi(t) \neq const$.

2. Мультипликативные нестационарные процессы. Такие процессы описываются одним из следующих соотношений: $\eta(t) = \xi(t)\varphi(t)$ или $\eta(t) = \xi(t)\gamma(t)$, где $\xi(t)$ и $\gamma(t)$ - некоторые случайные функции, в том числе и стационарные; $\varphi(t)$ - произвольная детерминированная функция.

3. Квазистационарные (почти стационарные) процессы. Это такие случайные процессы, для которых справедливы соотношения

$$m_1\{\xi(t)\} = \begin{cases} m_1 & \text{при } t_0 - T/2 \leq t \leq t_0 + T/2; \\ 0 & \text{других } t \end{cases}$$

$$B_2(t_1, t_2) = \begin{cases} B_2(t_2 - t_1) & \text{при } t_0 - T/2 \leq (t_1, t_2) \leq t_0 + T/2. \\ 0 & \text{других } (t_1, t_2) \end{cases}$$

Здесь T - интервал фактического существования случайной функции $\xi(t)$; t_0 - некоторый произвольный момент времени.

4. Периодические и почти периодические нестационарные процессы. Такие процессы определяются по условию:

- для периодических процессов

$$W_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = W_n(x_1, t_1 + T; x_2, t_2 + T; \dots; x_n, t_n + T),$$

т.е. n - мерная плотность вероятностей является периодической функцией с периодом T от каждого из аргументов t_1, t_2, \dots, t_n ;

- для почти периодических процессов

$$\left| W_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) - W_n(x_1, t_1 + T_\varepsilon; x_2, t_2 + T_\varepsilon; \dots; x_n, t_n + T_\varepsilon) \right| < \varepsilon,$$

где ε - некоторая положительная сколь угодно малая величина.

Параметр T_ε носит название «почти период».

Эргодические случайные процессы

А.Я.Хинчиным установлено свойство эргодичности у стационарных случайных процессов.

Эргодическими процессами называют такие стационарные случайные процессы вероятностные характеристики которых, полученные по ансамблю реализаций в какой - либо момент времени (в одном сечении), с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, совпадают с аналогичными характеристиками, полученными усреднением по времени на одной единственной реализации за достаточно большой промежуток.

Условием эргодичности стационарного случайного процесса является требование, чтобы функция корреляции процесса с увеличением $\tau = t_2 - t_1$ стремилась к нулю.

Из эргодичности случайных процессов следует возможность ограничиться при вычислении моментных функций только одной реализацией процесса:

$$m_k \{ \xi(t) \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t)]^k dt, \quad (1.88)$$

$$B_2(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) \xi(t + \tau) dt. \quad (1.89)$$

1.11 Функциональное преобразование случайных процессов

Исходный случайный процесс $\xi(t)$ имеет функцию распределения $W(x, t)$. Новый случайный процесс $\eta(t)$ связан с $\xi(t)$ детерминированной функциональной зависимостью $\eta(t) = f[\xi(t)]$. Требуется определить плотность вероятности и моментные функции этого процесса $\eta(t)$. Предположим, что существует обратная функция $\xi(t) = \varphi[\eta(t)]$, т.е. случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ связаны между собой взаимно однозначным

соответствием. Из того факта, что $x_0 < \xi(t_1) \leq x_0 + dx$, достоверно следует, что $y_0 < \eta(t_1) \leq y_0 + dy$, $[y_0 = f(x_0)]$, и наоборот. Поэтому вероятности выполнения этих неравенств равны между собой. При достаточно малых dx и dy имеем:

$$W(x, t_1) dx = W(y, t_1) dy.$$

Следовательно

$$W(y, t_1) = W(x, t_1) \left| \frac{dx}{dy} \right|. \quad (1.90)$$

Отношение $\frac{dx}{dy}$ в (1.90) берется по абсолютному значению, так как функции распределения всегда неотрицательны.

Если функция $y = f(x)$ такова, что обратная ей функция $x = \varphi(y)$ неоднозначна, то одному значению y соответствует несколько ветвей функции $\varphi(y)$. Обозначим их через $x_1(y), x_2(y), \dots$. Тогда из того факта, что $y_0 < \eta(t_1) \leq y_0 + dy$, следует одна из взаимно независимых возможностей: $x_1 < \xi(t_1) \leq x_1 + dx_1$, либо $x_2 < \xi(t_1) \leq x_2 + dx_2$ и т.д.

Применяя правило сложения вероятностей, получим

$$W(y, t_1) = W(x_1, t_1) \left| \frac{dx_1}{dy} \right| + W(x_2, t_1) \left| \frac{dx_2}{dy} \right| + \dots = \sum_k W(x_k, t_1) \left| \frac{dx_k}{dy} \right|, \quad (1.91)$$

Рассмотрим в качестве иллюстрации примеры, когда преобразование осуществляется элементарными функциями.

Пример. Осуществляется линейное преобразование $\eta(t) = a\xi(t) + b$. Это преобразование является однозначным, поэтому:

$$W(y, t) = \frac{1}{|a|} W(x, t) = \frac{1}{|a|} W\left(\frac{y-b}{a}, t\right).$$

Как видно, при линейном преобразовании случайного процесса кривая распределения смещается на величину b , а масштаб вдоль координатной оси изменяется в a раз.

Пример. Квадратичное преобразование. В данном случае каждому значению случайного процесса $\eta(t)$, которое всегда положительно, соответствуют два значения процесса $\xi(t)$: $\xi_1(t_1) = \sqrt{\eta(t_1)}$ и $\xi_2(t_1) = -\sqrt{\eta(t_1)}$. Тогда

$$W(y, t) = \frac{1}{2\sqrt{y}} W(\sqrt{y}, t) + \frac{1}{2\sqrt{y}} W(-\sqrt{y}, t) \quad \text{при } y > 0,$$

$$W(y, t) = 0 \quad \text{при } y < 0.$$

Для случая, когда исходный случайный процесс являлся стационарным и нормальным, получим:

$$W(y) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi y}} \left[e^{-\frac{(\sqrt{y}-a)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(\sqrt{y}+a)^2}{2\sigma^2}} \right] = \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y+a^2}{2\sigma^2}} \operatorname{ch}\left(\frac{a\sqrt{y}}{\sigma^2}\right).$$

Для нахождения моментных функций нет необходимости определять $W(y, t)$. Начальные моментные функции вычисляются по формуле

$$m_k \{ \eta(t) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} y^k W(y, t) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f^k(x) W(x, t) dx. \quad (1.92)$$

В частности, среднее значение функционально преобразованного процесса определяется зависимостью

$$m_1 \{ \eta(t) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) W(x, t) dx = a_\eta(t). \quad (1.93)$$

Центральные моментные функции находятся из выражения

$$M_k \{ \eta(t) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - m_1 \{ \eta(t) \}]^k W(x, t) dx. \quad (1.94)$$

В частности, для дисперсии имеем

$$M_2 \{ \eta(t) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - m_1 \{ \eta(t) \}]^2 W(x, t) dx = \sigma^2(t). \quad (1.95)$$

Корреляционную функцию можно определить по формуле

$$B_{2\eta}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1) f(x_2) W_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (1.96)$$

Если исходный случайный процесс – стационарный, то среднее значение, дисперсию и корреляционную функцию после функционального преобразования можно представить выражениями:

$$m_1 \{ \eta(t) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) W(x) dx = a_\eta; \quad (1.97)$$

$$M_2 \{ \eta(t) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - a_\eta]^2 W(x) dx = \sigma_\eta^2; \quad (1.98)$$

$$B_{2\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1) f(x_2) W_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2. \quad (1.99)$$

Для эргодических случайных процессов можно использовать усреднение во времени:

$$B_{2\eta} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f[x(t)] f[x(t+\tau)] dt. \quad (1.100)$$

1.12 Характеристическая функция и ее свойства

Для практических приложений большое значение имеет специальный вид функционального преобразования случайной величины ξ . Именно:

$$\eta = e^{jv\xi},$$

где v - произвольный вещественный параметр.

Среднее значение случайной величины $e^{jv\xi}$ называется характеристической функцией случайной величины ξ :

$$\Xi_1(v) = m_1 \{e^{jv\xi}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} W_1(x) e^{jvx} dx. \quad (1.101)$$

Выражение (1.101) следует рассматривать как обратное преобразование Фурье. Следовательно, имеет место и прямое преобразование Фурье, которое позволяет по заданной характеристической функции определить функцию распределения:

$$W_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_1(v) e^{-jvx} dv. \quad (1.102)$$

Зависимость (1.101) можно распространить и на дискретные случайные величины:

$$\Xi_1(v) = \sum_k P_k e^{jvx_k}, \quad (1.103)$$

так как для дискретной случайной величины плотность вероятности можно выразить, введя дельта - функцию, а именно:

$$W(x) = \sum_k P_k \delta(x - x_k).$$

Попутно заметим, что плотность вероятности постоянной величины равна дельта - функции, т.е. $W(x) = \delta(x - a)$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) dx = 1$.

Рассмотрим некоторые свойства характеристической функции.

1. Модуль характеристической функции равен или меньше единицы. Действительно:

$$|\Xi_1(v)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} W_1(x) e^{jvx} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |W_1(x) e^{jvx}| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} W_1(x) dx = 1, \text{ так как } |e^{jvx}| = 1.$$

Таким образом, интеграл выражения (1.101) сходится при любых вещественных v .

$$2. \Xi_1(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_1(x) dx = 1$$

3. $\Xi_1(-v) = \Xi_1^*(v)$, где $\Xi_1^*(v)$ - функция, комплексно сопряженная характеристической функции.

4. Если $\Xi_{1\xi}(v)$ характеристическая функция случайной величины ξ , то для случайной величины η , получаемой линейным преобразованием $\eta = a\xi + b$, характеристическая функция равна

$$\Xi_{1\eta}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jv(ax+b)} W_1(x) dx = \Xi_{1\xi}(av) e^{jbv}.$$

Одним из видов полезного применения характеристической функции является упрощение вычислений моментов распределения.

Если существует k -й начальный момент распределения случайной величины ξ , то характеристическая функция этой величины имеет производную k -го порядка, причем

$$\frac{d^k \Xi_1(v)}{dv^k} = j^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k W_1(x) e^{jvx} dx,$$

откуда

$$m_k \{\xi\} = \frac{1}{j^k} \cdot \left[\frac{d^k \Xi_1(v)}{dv^k} \right]_{v=0}. \quad (1.104)$$

При $k=1$ получим выражение для среднего значения случайной величины:

$$m_1 \{\xi\} = -j \Xi_1'(0). \quad (1.105)$$

Если существуют начальные моменты любого порядка, то характеристическую функцию можно представить рядом Маклорена

$$\Xi_1(v) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k}{k!} (jv)^k. \quad (1.106)$$

Центральные моменты распределения связаны простыми соотношениями с производными от логарифма характеристической функции

$$\phi(v) = \ln \Xi_1(v). \quad (1.107)$$

Функция $\phi(v)$ называется кумулянтной функцией.

Последовательным дифференцированием кумулянтной функции находим:

$$\phi'(v) = \frac{\Xi_1'(v)}{\Xi_1(v)}. \text{ Отсюда имеем } m_1 \{\xi\} = -j\phi'(0) = -j\Xi_1'(0);$$

$$\phi''(v) = \frac{\Xi_1''(v)\Xi_1(v) - [\Xi_1'(v)]^2}{\Xi_1^2(v)}; \quad \phi''(0) = \Xi_1''(0) - [\Xi_1'(0)]^2 = -M_2 \{\xi\}.$$

Следовательно, дисперсия случайной величины будет равна

$$M_2 \{\xi\} = \sigma^2 = -\phi''(0). \quad (1.107)$$

Аналогично получим выражения для центральных моментов третьего $M_3 \{\xi\}$ и четвертого $M_4 \{\xi\}$ порядка, а также коэффициентов асимметрии k и эксцесса γ :

$$M_3\{\xi\} = -j^3\phi'''(0); \quad M_4\{\xi\} = j^4\phi^{(4)}(0) + 3M_2^2;$$

$$k = \frac{\phi'''(0)}{\sqrt{[\phi''(0)]^3}}; \quad \gamma = \frac{\phi^{(4)}(0)}{[\phi''(0)]^2}.$$

Производная k -го порядка кумулянтной функции в точке $v=0$, поделенная на j^k , называется кумулянтном или семиинвариантом k -го порядка случайной величины.

Характеристической функцией совокупности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ является математическое ожидание случайной величины $\exp[j(v_1\xi_1 + v_2\xi_2 + \dots + v_n\xi_n)]$, где v_1, v_2, \dots, v_n - вещественные параметры.

Если известна n -мерная плотность вероятности случайных величин $W_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то посредством n -кратного обратного преобразования Фурье получим n -мерную характеристическую функцию

$$\Xi_n(v_1, v_2, \dots, v_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} W_n(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{j(v_1x_1 + v_2x_2 + \dots + v_nx_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (1.108)$$

И наоборот, многомерная плотность вероятности совокупности n случайных величин может быть получена из характеристической функции прямым n -кратным преобразованием Фурье:

$$W_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_n(v_1, v_2, \dots, v_n) e^{-j(v_1x_1 + v_2x_2 + \dots + v_nx_n)} dv_1 dv_2 \dots dv_n \quad (1.109)$$

Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ взаимно независимы, то плотность вероятностей будет определяться зависимостью

$$W_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n W_{1k}(x_k), \quad (1.110)$$

а характеристическая функция выражением

$$\Xi_n(v_1, v_2, \dots, v_n) = \prod_{k=1}^n \Xi_{1k}(v_k). \quad (1.111)$$

Следует отметить, что характеристическая функция суммы независимых случайных величин $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ равна произведению характеристических функций слагаемых

$$\Xi_{\Sigma}(v) = \prod_{k=1}^n \Xi_{1k}(v). \quad (1.112)$$

В частном случае, когда слагаемые имеют одинаковые функции распределения, $\Xi_{\Sigma}(v) = \Xi_1^n(v)$.

На основании изложенного свойства случайного процесса также могут описываться последовательностью характеристических функций:

$$\begin{aligned}\Xi_1(v_1, t_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} W_1(x_1, t_1) e^{jv_1 x_1} dx_1; \\ \Xi_2(v_1, v_2, t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_2(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{j(v_1 x_1 + v_2 x_2)} dx_1 dx_2; \\ &\dots\dots\dots \\ \Xi_n(v_1, v_2, \dots, v_n, t_1, t_2, \dots, t_n) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} W_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) e^{j(v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_n x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n.\end{aligned}$$

Можно построить характеристику случайного процесса в целом, увеличивая неограниченно число n моментов времени. Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \Xi_n(v_1, v_2, \dots, v_n, t_1, t_2, \dots, t_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} m_1 \left\{ \exp \left[j \sum_{k=1}^n v_k \xi(t_k) \right] \right\} = \\ &= m_1 \left\{ \exp \left[j \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \xi(t) dt \right] \right\} = \Xi[v(t)].\end{aligned}\quad (1.113)$$

$\Xi[v(t)]$ - называется характеристическим функционалом процесса $\xi(t)$.

Моментные функции определяются в соответствии с соотношением

$$m_n(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n \Xi_n(v_1, v_2, \dots, v_n, t_1, t_2, \dots, t_n)}{j^n \partial v_1 \partial v_2 \dots \partial v_n} \Big|_{v_1=v_2=\dots=v_n=0}, \quad (1.114)$$

а корреляционные функции – по формуле

$$B_n(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n \phi_n(v_1, v_2, \dots, v_n, t_1, t_2, \dots, t_n)}{j^n \partial v_1 \partial v_2 \dots \partial v_n} \Big|_{v_1=v_2=\dots=v_n=0}. \quad (1.115)$$

Располагая последовательностью корреляционных функций

$$B_1(t_1), B_2(t_1, t_2), B_3(t_1, t_2, t_3), \dots,$$

можно представить характеристическую функцию случайного процесса согласно (1.115) в виде

$$\Xi_n(v_1, v_2, \dots, v_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = \exp \left[\sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{i, \dots, k=1}^n B_s(t_i, \dots, t_k) v_i \dots v_k \right]. \quad (1.116)$$

Пример. Одномерная плотность вероятностей стационарного случайного процесса имеет вид

$$W_1(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}.$$

Определить характеристическую функцию этого процесса и среднее значение.

Характеристическая функция будет равна:

$$\Xi_1(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_1(x) e^{jvx} dx = \alpha \int_0^{+\infty} e^{jvx - \alpha x} dx = \frac{\alpha}{\alpha - jv}.$$

Производная характеристической функции при $v=0$ будет $\Xi_1'(0) = \frac{j}{\alpha}$.

Следовательно, среднее значение определится как $m_1 = \frac{\Xi_1'(0)}{j} = \frac{1}{\alpha}$.

1.13 Энергетические характеристики случайного процесса

Корреляционной функции и ее свойства

Корреляционная функция второго порядка случайного процесса, или смешанная начальная функция двумерного распределения, имеет вид

$$m_1 \{ \xi(t_1) \xi(t_2) \} = B_2(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 W_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2.$$

Данное равенство устанавливает реальный физический смысл корреляционной функции как функции, которая определяет статистическую связь между предшествующими и последующими значениями случайного процесса $\xi(t)$. Следует отметить, что $B_2(t_1, t_2) = B_2(t_2, t_1)$.

Для стационарного случайного процесса

$$B_2(\tau) = m_1 \{ \xi(t) \xi(t + \tau) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 W_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2, \quad (1.117)$$

где x_1 - значение случайной функции в момент времени t , x_2 - в момент $t + \tau$.

Часто автокорреляционную функцию определяют как смешанную двумерную центральную моментную функцию. Для стационарного случайного процесса она записывается в виде:

$$B_{2\phi} = m_1 \{ [\xi(t) - m_1][\xi(t + \tau) - m_1] \} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_1)(x_2 - m_1) W_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 \quad (1.118)$$

Функция $B_{2\phi}$ называется корреляционной функцией флуктуаций.

Легко убедиться в том, что $B_{2\phi}(\tau) = B_2(\tau) - m_1^2$, где m_1 - среднее значение случайного процесса. По существу эти две корреляционные функции для стационарного процесса отличаются только квадратом постоянной составляющей m_1 и при нулевом среднем значении они совпадают.

Основные свойства корреляционной функции стационарного случайного процесса.

1. Корреляционная функция стационарного случайного процесса является четой функцией .

$$B_2(\tau) = B_2(-\tau). \quad (1.119)$$

Это свойство вытекает из определения стационарности:

$$B_2(\tau) = m_1 \{ \xi(t) \xi(t + \tau) \} = m_1 \{ \xi(t) \xi(t - \tau) \} = B_2(-\tau).$$

2. При $\tau \rightarrow \infty$ значение корреляционной функции $B_2(\tau)$ равно квадрату среднего значения случайного процесса. Действительно, при $\tau \rightarrow \infty$ зависимость между $\xi(t)$ и $\xi(t + \tau)$ должна ослабевать и в пределе эти процессы должны быть независимы. Так как среднее значение произведения независимых случайных величин равно произведению средних значений сомножителей и поскольку для стационарного процесса среднее значение не зависит от времени, то

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} B_2(\tau) = B_2(\infty) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} m_1 \{ \xi(t) \xi(t + \tau) \} = m_1^2$$

или

$$m_1 = \sqrt{B_2(\infty)}, \quad (1.120)$$

т.е. среднее значение стационарного случайного процесса равно корню квадратному из асимптотического значения корреляционной функции при $\tau \rightarrow \infty$.

Корреляционная функция флуктуаций - $B_{2\phi}(\infty) = 0$.

3. Значение корреляционной функции при $\tau = 0$ равно средней мощности случайного процесса

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} B_2(\tau) = B_2(0) = m_1 \{ [\xi(t)]^2 \} = m_2 \{ \xi(t) \} = m_2. \quad (1.121)$$

Поскольку $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$ и для стационарного процесса дисперсия не зависит от времени, то

$$\sigma^2 = B_2(0) - B_2(\infty) = B_{2\phi}(0), \quad (1.122)$$

так как корреляционная функция флуктуаций при $\tau = 0$ равна

$$B_{2\phi}(0) = m_2 - m_1^2$$

и определяет среднюю мощность процесса за вычетом среднего значения.

4. Значение корреляционной функции стационарного случайного процесса при $\tau = 0$ всегда больше или равно значению при $\tau \neq 0$, т.е.

$$B_2(0) \geq B_2(\tau) \text{ и } B_{2\phi}(0) \geq B_{2\phi}(\tau), \quad (1.123)$$

т.е. любое значение корреляционной функции не может превышать значение этой функции при $\tau = 0$. Типичная кривая корреляционной функции приведена на рис 1.5

$b_2(\tau) = \frac{B_2(\tau) - B_2(\infty)}{B_2(0)}$ - называется коэффициентом корреляции или

нормированной корреляционной функцией. Время корреляции τ_k

определяется как половина ширины основания прямоугольника единичной высоты

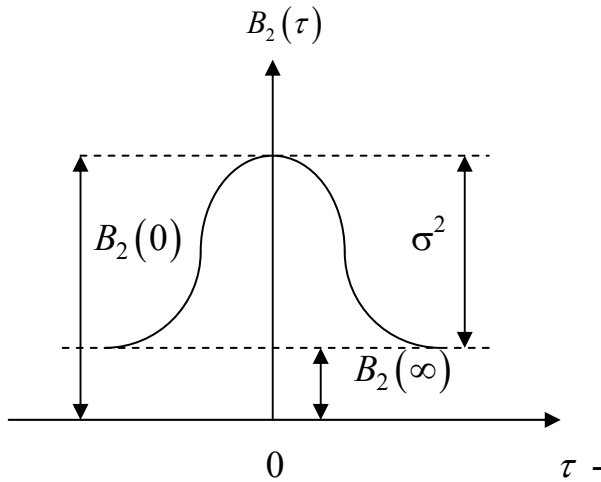


Рис.1.5

площадь которого равна площади под кривой коэффициента корреляции:

$$\sigma^2 \tau_k = \int_0^{\infty} b_2(\tau) d\tau \quad (1.124)$$

Отметим, что наряду с корреляционной функцией пользуются также **статистической структурной функцией** или **корреляционной функцией приращений**, которая определяется выражением:

$$D_2(t_1, t_2, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\xi(t_1 + \tau) - \xi(t_1)][\xi(t_2 + \tau) - \xi(t_2)] W_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2.$$

Энергетический спектр стационарного случайного процесса

Выделим из реализации случайного процесса $\xi(t)$ отрезок этого процесса $\xi_T(t)$, ограниченный интервалом времени T . Применим к этой функции $\xi_T(t)$ преобразование Фурье и найдем спектральную функцию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_T(t) e^{-j\omega t} dt = \chi_T(j\omega).$$

Используя равенство Парсеваля, запишем энергию этого отрезка процесса $\xi_T(t)$

$$E_T = \int_0^T \xi_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi_T(j\omega)|^2 d\omega.$$

Если теперь устремить $T \rightarrow \infty$, то энергия E_T будет бесконечно увеличиваться, однако средняя мощность реализации за время T будет конечной и равной:

$$P_c = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_T}{T} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\chi_T(j\omega)|^2}{T} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) d\omega,$$

где $G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\chi_T(j\omega)|^2}{T}$ - энергетический спектр стационарного случайного процесса.

Энергетический спектр $G(\omega)$ есть средняя мощность, приходящаяся на единицу полосы частот. Полная же средняя мощность случайного процесса будет

$$P_c = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) d\omega. \quad (1.125)$$

Для процесса с нулевым средним значением $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) d\omega = \sigma^2$.

Поскольку выражение для энергетического спектра получено на основе равенства Парсеваля, не учитывающего фазовых соотношений, то по спектру $G(\omega)$ невозможно восстановить исходную реализацию.

Так как скорость протекания случайного процесса во времени может быть определена, с одной стороны, корреляционной функцией, а с другой – энергетическим спектром, то между ними должна существовать связь. Эта связь устанавливается теоремой Винера – Хинчина, согласно которой энергетический спектр и корреляционная функция стационарного случайного процесса связаны парой преобразования Фурье:

$$B_2(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega; \quad (1.126)$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_2(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} B_2(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (1.127)$$

Однако так как преобразование Фурье возможно только при условии абсолютной интегрируемости функций, то формулы (1.126) и (1.127) справедливы при условии, что входящие в них несобственные интегралы являются сходящимися. Поэтому эти выражения можно использовать, когда стационарные случайные процессы не содержат постоянных и периодических составляющих.

Рассмотрим следствия, вытекающие из формул (1.126) и (1.127):

$$B_2(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega; \quad G(0) = 2 \int_0^{\infty} B_2(\tau) d\tau.$$

Время корреляции можно вычислить по формуле

$$\tau_k = \frac{G(0)}{2B_2(0)}. \quad (1.128)$$

Ширина энергетического спектра определяется зависимостью

$$V\omega_3 = \frac{\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega}{G(0)} \quad \text{или} \quad V\omega_3 = \frac{\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega}{G(\omega_0)}, \quad (1.129)$$

где ω_0 - частота, на которой энергетический спектр имеет максимальное значение.

Основные свойства энергетического спектра стационарного случайного процесса.

1. Энергетический спектр не отрицателен при любых значениях ω :

$$G(\omega) \geq 0.$$

2. При ограниченной дисперсии случайного процесса $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(\omega) = 0$.

3. Энергетический спектр является вещественной функцией ω .

4. Энергетический спектр – четная функция: $G(\omega) = G(-\omega)$.

Для нестационарных случайных процессов энергетический спектр может быть определен как преобразование Фурье от усредненной по времени корреляционной функции этого процесса

$$G_n(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2} + T} B_2(t, t - \tau) dt \right] \exp(-j\omega\tau) d\tau.$$

В качестве иллюстрации к этому параграфу рассмотрим два примера.

Пример. Определить корреляционную функцию $B_2(\tau)$ стационарного случайного процесса, если энергетический спектр его задан в виде

$$G(\omega) = \begin{cases} G_0 & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_1 \\ 0 & \text{при } \omega > \omega_1 \end{cases}.$$

Согласно формуле (1.126) получим

$$B_2(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega = \frac{G_0}{\pi} \int_0^{\omega_1} \cos(\omega\tau) d\omega = \frac{G_0}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_1\tau)}{\tau} = \frac{G_0\omega_1}{\pi} Sa(\omega_1\tau).$$

Пример. Определить соотношение между шириной энергетического спектра $V\omega_3$ и шириной энергетического спектра $V\omega_{31}$ на уровне $0,5G(0)$, если энергетический спектр стационарного случайного процесса задан соотношением

$$G(\omega) = \begin{cases} \frac{4\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} & \text{при } \omega \geq 0 \\ 0 & \text{при } \omega < 0 \end{cases}.$$

Ширина энергетического спектра определяется выражением (1.129)

$$V\omega_3 = \frac{1}{\pi G(0)} \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{4\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\alpha}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{\alpha}{2}$$

Ширина энергетического спектра $V\omega_{31}$ на уровне $0,5G(0)$ находится по формуле

$$G(V\omega_{31}) = \frac{4\alpha}{\alpha^2 + (V\omega_{31})^2} = 0,5G(0) = 0,5 \frac{4\alpha}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha},$$

откуда $V\omega_{31} = \alpha$.

Окончательно получаем .

$$\frac{V\omega_3}{V\omega_{31}} = \frac{1}{2}.$$

1.14 Совместное распределение случайных процессов

Статистические свойства одновременно действующих двух случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ полностью определяются $(n+m)$ -мерной интегральной функцией распределения

$$\begin{aligned} F_{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m, t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_m) &= \\ &= P\left\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n, \eta(t'_1) \leq y_1, \dots, \eta(t'_m) \leq y_m\right\} \end{aligned}$$

или $(n+m)$ -мерной плотностью вероятностей

$$\begin{aligned} W_{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_m) &= \\ &= \frac{\partial^{(n+m)} F_{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n \partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_m}. \end{aligned}$$

Случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ являются статистически независимыми, если для любых n и m выполняется соотношение

$$W_{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_m) = W_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) W_m(y_1, \dots, y_m, t'_1, \dots, t'_m)$$

Взаимные начальные моментные функции определяются зависимостью:

$$\begin{aligned} m_{k_1 \dots k_n l_1 \dots l_m}(t_1, t_2, \dots, t_n, t'_1, t'_2, \dots, t'_m) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (n+m) \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} y_1^{l_1} \dots y_m^{l_m} W_{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_m) dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_m. \end{aligned}$$

Простейшей совместной моментной функцией является взаимная корреляционная функция

$$\begin{cases} B_{xy}(t_1, t_2) = m_1 \{\xi(t_1)\eta(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy W_2(x, y, t_1, t_2) dx dy \\ B_{yx}(t_1, t_2) = m_1 \{\eta(t_1)\xi(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yx W_2(x, y, t_1, t_2) dx dy \end{cases} \quad (1.130)$$

Для независимых случайных процессов имеем:

$$B_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x W(x, t_1) dx \int_{-\infty}^{+\infty} y W(y, t_2) dy = a_x(t_1) a_y(t_2),$$

где $a_x(t)$ и $a_y(t)$ средние значения случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ соответственно.

Случайные процессы, взаимные корреляционные функции которых равны постоянной величине, называются некогерентными процессами.

Корреляционные свойства двух случайных процессов в два момента времени описываются корреляционной матрицей

$$\begin{vmatrix} B_{2x}(t_1, t_2) & B_{xy}(t_1, t_2) \\ B_{yx}(t_1, t_2) & B_{2y}(t_1, t_2) \end{vmatrix},$$

где $B_{2x}(t_1, t_2)$ и $B_{2y}(t_1, t_2)$ - корреляционные функции процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Например, корреляционная функция суммы двух случайных процессов $\gamma(t) = \xi(t) + \eta(t)$ будет иметь вид:

$$B_{2z}(t_1, t_2) = B_{2x}(t_1, t_2) + B_{2y}(t_1, t_2) + B_{xy}(t_1, t_2) + B_{yx}(t_1, t_2).$$

Два процесса называются стационарно связанными, если их совместная функция распределения вероятностей любого порядка не зависит от начала отсчета времени.

Взаимная корреляционная функция двух стационарно связанных случайных процессов зависит только от разности моментов времени $t_2 - t_1 = \tau$:

$$B_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} xy W_2(x, y, \tau) dx dy. \quad (1.131)$$

При этом

$$B_{xy}(\tau) = B_{yx}(-\tau). \quad (1.132)$$

Однако в отличие от корреляционной функции взаимная корреляционная функция не является четной, т.е.

$$B_{xy}(\tau) \neq B_{xy}(-\tau).$$

Взаимная корреляционная функция двух стационарно связанных процессов удовлетворяет неравенству:

$$|B_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{B_{2x}(0)B_{2y}(0)}.$$

Зависимость $b_{xy}(\tau) = \frac{B_{xy}(\tau)}{\sqrt{B_{2x}(0)B_{2y}(0)}}$ называется коэффициентом

взаимной корреляции.

Взаимные энергетические спектры двух случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ определяются выражениями:

$$G_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \chi_{xT}(-j\omega) \chi_{yT}(j\omega), \quad (1.133)$$

$$G_{yx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \chi_{xT}(j\omega) \chi_{yT}(-j\omega). \quad (1.134)$$

Из соотношений (1.133) и (1.134) видно, что взаимные энергетические спектры $G_{xy}(\omega)$ и $G_{yx}(\omega)$ являются комплексно сопряженными величинами.

Связь между взаимными энергетическими спектрами и взаимными корреляционными функциями двух стационарно связанных случайных процессов устанавливается посредством пары преобразования Фурье:

$$G_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad G_{yx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{yx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau;$$

$$B_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad B_{yx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{yx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

1.15 Некоторые свойства случайных процессов

Непрерывность стационарного случайного процесса

Стационарный случайный процесс является непрерывным в среднеквадратическом в точке t , если имеет место равенство:

$$\lim_{T \rightarrow 0} m_1 \left\{ \left| \xi(t+T) - \xi(t) \right|^2 \right\} = 0. \quad (1.135)$$

Необходимым и достаточным условием непрерывности стационарного случайного процесса всюду при любых t является непрерывность корреляционной функции этого процесса в точке $\tau = 0$.

Дифференцируемость

Случайный процесс дифференцируем в среднеквадратическом в точке t , если выполняется равенство

$$\lim_{T \rightarrow 0} m_1 \left\{ \left| \frac{\xi(t+T) - \xi(t)}{T} - \xi'(t) \right|^2 \right\} = 0,$$

где $\xi'(t)$ - производная процесса $\xi(t)$ в среднеквадратическом в точке t .

Рассмотрим некоторые характеристики производной $\xi'(t)$.

1. Среднее значение производной случайного процесса равно производной от среднего значения самого случайного процесса, для которого это среднее значение дифференцируемо:

$$m_{1\xi'}(t) = m'_{1\xi}(t). \quad (1.136)$$

Отсюда следует, что среднее значение производной стационарного случайного процесса всегда равно нулю.

2. Корреляционная функция производной случайного процесса определяется выражением

$$B_{2\xi'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 B_{2\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}. \quad (1.137)$$

Для стационарного случайного процесса имеем

$$B_{2\xi'}(\tau) = -B''_{2\xi}(\tau), \quad (1.138)$$

т.е. корреляционная функция производной случайного процесса равна второй производной корреляционной функции самого процесса, взятой с обратным знаком.

3. Энергетический спектр производной стационарного случайного процесса равен:

$$G_{\xi'}(\omega) = \omega^2 G_{\xi}(\omega). \quad (1.139)$$

4. Мощность производной стационарного случайного процесса определяется формулой

$$B_{2\xi'}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 G_{\xi}(\omega) d\omega. \quad (1.140)$$

5. Отношение средних мощностей производной $\xi'(t)$ и самого процесса $\xi(t)$ равно

$$\omega_1^2 = \frac{B_{2\xi'}(0)}{B_{2\xi}(0)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 G_{\xi}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} G_{\xi}(\omega) d\omega}. \quad (1.141)$$

Корень квадратный из последнего соотношения называется **средней квадратической частотой спектра случайного процесса**.

Пример. На вход идеальной дифференцирующей цепи поступает случайный процесс со средним значением $m_{1\xi}(t) = u \sin(\alpha t)$ и корреляционной функцией

$$B_{2\xi}(t_1, t_2) = \sigma_{\xi}^2 e^{-\beta(t_1 - t_2)},$$

где σ_{ξ}^2 - дисперсия случайного процесса.

Определить среднее значение и дисперсию случайного процесса на выходе цепи.

Среднее значение случайного процесса на выходе цепи согласно (1.136) будет равно $m_{1\xi'}(t) = m_{1\xi}'(t) = \alpha \cos(\alpha t)$.

Корреляционная функция на выходе цепи будет определяться выражением

$$B_{2\xi'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 B_{2\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = 2\sigma_{\xi}^2 \beta e^{-\beta(t_1 - t_2)} [1 - 2\beta(t_1 - t_2)^2].$$

Положив в последнем выражении $t_1 = t_2 = t$, получим величину дисперсии $\sigma_{\xi'}^2(t) = \sigma_{\xi'}^2 = 2\beta\sigma_{\xi}^2$.

Интегрирование

Интеграл в среднеквадратическом случайного процесса $\xi(t)$ можно представить в виде

$$\eta(t) = \int_a^b h(t, v) \xi(v) dv, \quad (1.142)$$

где $h(t, v)$ - заданная детерминированная функция, a и b - произвольные постоянные величины.

Этот интеграл является новым случайным процессом, среднее значение которого равно

$$m_{1\eta}(t) = \int_a^b h(t, v) m_{1\xi}(v) dv. \quad (1.143)$$

Если исходный процесс $\xi(t)$ являлся стационарным,

$$m_{1\eta}(t) = m_{1\xi} \int_a^b h(t, v) dv. \quad (1.144)$$

Корреляционная функция проинтегрированного процесса определяется выражением

$$B_{2\eta}(t_1, t_2) = \int_a^b \int_a^b h(t_1, v_1) h(t_2, v_2) B_{2\xi}(v_1, v_2) dv_1 dv_2. \quad (1.145)$$

Для стационарного исходного случайного процесса имеем

$$B_{2\eta}(t_1, t_2) = \int_a^b \int_a^b h(t_1, v_1) h(t_2, v_2) B_{2\xi}(v_2 - v_1) dv_1 dv_2. \quad (1.146)$$

Как видно из выражения (1.146) проинтегрированный процесс в общем случае уже является нестационарным случайным процессом.

Для определения энергетического спектра интеграла стационарного случайного процесса можно использовать выражение

$$G_\eta(\omega) = \frac{1}{\omega^2} G_\xi(\omega). \quad (1.147)$$

Умножение случайного процесса на детерминированную функцию

Имеется случайный процесс $\xi(t)$ со средним значением $m_{1\xi}(t)$ и корреляционной функцией $B_{2\xi}(t_1, t_2)$. Новый случайный процесс $\eta(t)$ связан с процессом $\xi(t)$ соотношением $\eta(t) = \varphi(t)\xi(t)$, где $\varphi(t)$ - детерминированная функция.

Среднее значение процесса $\eta(t)$ будет определяться соотношением

$$m_{1\eta} = \varphi(t) m_{1\xi}(t), \quad (1.148)$$

т.е. при умножении случайного процесса на детерминированную функцию среднее значение этого нового процесса равно математическому ожиданию исходного процесса, умноженному на детерминированную функцию.

Корреляционная функция нового процесса будет равна

$$B_{2\eta}(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)B_{2\xi}(t_1, t_2). \quad (1.149)$$

Таким образом, при умножении случайного процесса на детерминированную функцию корреляционная функция этого нового процесса равна

корреляционной функции исходного процесса на детерминированную функцию для аргументов t_1 и t_2 .

Если $\varphi(t) = \varphi$ - постоянная, то:

$$m_{1\eta}(t) = \varphi m_{1\xi}(t) \text{ и } B_{2\eta}(t_1, t_2) = \varphi^2 B_{2\xi}(t_1, t_2).$$

Сложение случайных процессов

Рассмотрим случайный процесс $\eta(t)$, представляющий собой сумму

$$\text{случайных процессов } \eta(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t).$$

Среднее значение этого процесса равно

$$m_{1\eta}(t) = \sum_{i=1}^n m_{1\xi_i}(t), \quad (1.150)$$

т.е. при сложении случайных процессов их средние значения складываются.

Корреляционная функция процесса $\eta(t)$ определяется соотношением

$$B_{2\eta}(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n B_{2\xi_i}(t_1, t_2) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{\xi_i \xi_j}(t_1, t_2), \quad (1.151)$$

где $B_{2\xi_i}(t_1, t_2)$ - корреляционные функции процессов $\xi_i(t)$, а $B_{\xi_i \xi_j}(t_1, t_2)$ - взаимные корреляционные функции.

Таким образом, при сложении случайных процессов корреляционная функция равна сумме корреляционных функций каждого слагаемого плюс сумма всех взаимных корреляционных функций, которые могут быть образованы из любой пары суммируемых случайных процессов.

Для некогерентных независимых случайных процессов имеем

$$B_{2\eta}(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n B_{2\xi_i}(t_1, t_2) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{1\xi_i} m_{1\xi_j}.$$

1.16 Узкополосные и широкополосные случайные процессы

Случайные процессы с шириной энергетического спектра $\Delta\omega$, много меньшей некоторой фиксированной частоты ω_0 , около которой сосредоточен энергетический спектр, называют узкополосными процессами.

Корреляционная функция узкополосного процесса определяется зависимостью:

$$B_{2y}(\tau) = \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega \right] \cos(\omega_0\tau). \quad (1.152)$$

Как видно из выражения (1.152), корреляционная функция узкополосного случайного процесса, энергетический спектр которого расположен симметрично около частоты ω_0 , равна умноженной на $\cos(\omega_0\tau)$

корреляционной функции, которая соответствует энергетическому спектру, полученному из исходного смещением на величину ω_0 в сторону низких частот.

Время корреляции узкополосного случайного процесса определяется формулой

$$\tau_k = \frac{1}{\pi B_{2y}(0)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} G(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega d\tau.$$

Широкополосные случайными процессы – такие процессы, у которых ширина энергетического спектра больше или сопоставима со среднеквадратической частотой спектра процесса, т.е. $\Delta\omega_s \geq \omega_1$.

Среди широкополосных процессов особое место занимает **белый шум**. Белым шумом называется чисто случайный процесс, энергетический спектр которого равномерен во всем диапазоне частот, а корреляционная функция пропорциональна дельта – функции, т.е.

$$G(\omega) = G = const \text{ и } B_2(\tau) = \frac{G}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = G\delta(\tau).$$

Коэффициент корреляции для белого шума равен

$$b(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau = 0 \\ 0 & \text{при } \tau \neq 0 \end{cases}$$

Таким образом, белый шум характеризуется тем, что значения его в любые два (даже сколь угодно близкие) моменты времени некоррелированы.

Белый шум является математической идеализацией. Реальные случайные процессы с равномерным энергетическим спектром имеют ограниченную его протяженность. Однако вследствие ограниченности полос пропускания устройств приема и обработки информации использование белого шума в качестве модели процессов на входе этих устройств не вносит сколь-нибудь существенных погрешностей, но значительно упрощает математический анализ.

Дробовой шум электронных устройств и тепловой шум проводников можно рассматривать как белый шум. Энергетические спектры этих шумов постоянные величины и соответственно равны

$$G_\delta = 2eI \text{ и } G_T = 4kT^0R,$$

где: e - заряд электрона, I - среднее значение тока, протекающего через электронный прибор, k - постоянная Больцмана, T^0 - температура окружающей среды, R - активное сопротивление проводника.

Следует отметить, что широкополосность и узкополосность процесса определяются не величиной ширины энергетического спектра. Ширина энергетического спектра узкополосного процесса может по величине быть больше ширины энергетического спектра широкополосного процесса.

1.17 Нормальный случайный процесс и его производная

Наиболее часто в приложениях встречается так называемый **нормальный случайный процесс**.

Нормальным случайным процессом называется такой процесс, корреляционные функции которого выше второго порядка равны нулю для любых t

$$B_3(t_1, t_2, t_3) = B_4(t_1, t_2, t_3, t_4) = \dots = 0. \quad (1.153)$$

Характеристическая функция такого процесса с учетом (1.153) и в соответствие с (1.116) определяется соотношением

$$\begin{aligned} \Xi_m(v_1, \dots, v_n, t_1, \dots, t_n) &= \exp \left[\sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{i, \dots, k=1}^n B_s(t_i, \dots, t_k) v_i \dots v_k \right] = \\ &= \exp \left[j \sum_{i=1}^n B_1(t_i) v_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n B_2(t_i, t_k) v_i v_k \right]. \end{aligned} \quad (1.154)$$

Напомним, что корреляционная функция первого порядка есть математическое ожидание случайного процесса, т.е.

$$B_1(t) = m_1(t).$$

Зная характеристическую функцию (1.154), посредством многократного преобразования Фурье определим многомерную плотность вероятностей нормального случайного процесса

$$\begin{aligned} W_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_n(v_1, \dots, v_n, t_1, \dots, t_n) \exp \left(-j \sum_{i=1}^n v_i x_i \right) dv_1 \dots dv_n = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[j \sum_{i=1}^n B_1(t_i) v_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n B_2(t_i, t_k) v_i v_k \right] \exp \left(-j \sum_{i=1}^n v_i x_i \right) dv_1 \dots dv_n = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \Delta^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_{ik} [x_i - B_1(t_i)] [x_k - B_1(t_k)] \right\}, \end{aligned} \quad (1.155)$$

где: Δ - определитель корреляционной матрицы $\|B_2(t_i, t_k)\|$,

$$\|B_2(t_i, t_k)\| = \begin{vmatrix} B_2(t_1, t_1) & B_2(t_1, t_2) & \dots & B_2(t_1, t_n) \\ B_2(t_2, t_1) & B_2(t_2, t_2) & \dots & B_2(t_2, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_2(t_n, t_1) & B_2(t_n, t_2) & \dots & B_2(t_n, t_n) \end{vmatrix},$$

β_{ik} - элементы обратной корреляционной матрицы $\|B_2(t_i, t_k)\|^{-1}$, которые определяются формулой Крамера

$$\beta_{ik} = \frac{A_{ik}}{\Delta},$$

$A_{ik} = (-1)^{i+k} \Delta_{ik}$ - алгебраическое дополнение элемента $B_2(t_i, t_k)$ определителя Δ ;

Δ_{ik} - минор элемента $B_2(t_i, t_k)$, т.е. определитель $(n-1)$ порядка, образованный из основного определителя Δ зачеркиванием i строки и k столбца.

Если нормальный процесс стационарен, то характеристическая функция будет выражаться зависимостью

$$\Xi_n(v_1, \dots, v_n, t_1, \dots, t_n) = \exp \left[jm_1 \sum_{i=1}^n v_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n B_2(t_i - t_k) v_i v_k \right], \quad (1.156)$$

а многомерная плотность вероятностей формулой

$$W_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = (2\pi)^{-n/2} \Delta^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_{ik}(x_i - m_1)(x_k - m_1) \right]. \quad (1.157)$$

Следует заметить, что, как следствие (1.153), из стационарности в широком смысле нормального случайного процесса вытекает и строгая стационарность.

Первые две функции распределения стационарного нормального случайного процесса имеют следующий вид:

$$W_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - m_1)^2}{2\sigma^2} \right]; \quad (1.158)$$

$$W_2(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-b_2^2(\tau)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2[1-b_2^2(\tau)]} \left[(x_1 - m_1)^2 - 2b_2(\tau)(x_1 - m_1)(x_2 - m_1) + (x_2 - m_1)^2 \right] \right\}, \quad (1.159)$$

где m_1 - математическое ожидание процесса, σ^2 - дисперсия процесса, $b_2(\tau)$ - коэффициент корреляции.

Если любые два значения нормального случайного процесса в несовпадающие моменты времени не коррелированы, то n -мерная плотность вероятностей будет определяться выражением

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m_1)^2 \right] = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x_i - m_1)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (1.160)$$

т.е. является произведением n одномерных нормальных функций распределения, что соответствует независимости мгновенных значений процесса в любые два момента времени.

Примером нормального белого шума может служить тепловой шум проводников, или шум Джонсона.

Линейная комбинация нормальных случайных процессов представляет собой также нормальный случайный процесс. При этом для суммы двух нормальных случайных процессов среднее значение и дисперсия соответственно равны $m_{1\Sigma} = m_{11} + m_{12}$ и $\sigma_{\Sigma}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

Производная нормального случайного процесса также является нормальным случайным процессом, одномерная плотность вероятностей которого имеет вид:

$$W_1(y) = \frac{1}{\sigma_{\xi'}(t)\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\left[y - m_1\{\xi'(t)\}\right]^2}{2\sigma_{\xi'}^2(t)}\right\}, \quad (1.161)$$

где $\sigma_{\xi'}^2(t)$ и $m_1\{\xi'(t)\}$ - соответственно дисперсия и среднее значение производной нормального случайного процесса.

Если исходный нормальный случайный процесс является стационарным, то плотность вероятностей производной принимает вид

$$W_1(y) = \frac{1}{\omega_1\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\omega_1^2\sigma^2}\right), \quad (1.162)$$

где $\omega_1 = \left[\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 G(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) d\omega} \right]^{\frac{1}{2}}$ - средняя квадратическая частота спектра самого

нормального случайного процесса, а σ^2 - его дисперсия.

Совместная плотность вероятностей стационарного нормального случайного процесса и его производной в совпадающие моменты времени определяется соотношением

$$W_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\omega_1\sigma^2} \exp\left(-\frac{\omega_1^2 x^2 + y^2}{2\omega_1^2\sigma^2}\right). \quad (1.163)$$

В несовпадающие моменты времени нормированная корреляционная матрица имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cc} 1 & b_{xy}(\tau) \\ b_{yx}(\tau) & \omega_1^2 \end{array} \right\|, \text{ при этом } b_{xy}(\tau) = b_{yx}(\tau).$$

Следовательно совместная плотность вероятностей примет вид

$$W_2(x, y, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{\omega_1^2 - b_{xy}(\tau)}} \exp\left\{-\frac{\omega_1^2 x^2 - 2b_{xy}(\tau)xy + y^2}{2\sigma^2\left(\omega_1^2 - [b_{xy}(\tau)]^2\right)}\right\}. \quad (1.164)$$

При $\tau = 0$ коэффициент взаимной корреляции $b_{xy}(0) = 0$ и формула (1.164) переходит в формулу (1.163).

1.18 Задача о выбросах случайного процесса

При решении ряда прикладных задач требуется знать функцию распределения для длительности выбросов случайного процесса $\xi(t)$, либо интервалов между выбросами процесса, превышающими заданный уровень $x = x_0$. Иногда рассматривают распределение нулей случайного процесса. В общем случае может рассматриваться задача о нахождении распределения точек пересечения случайной функции $\xi(t)$ с заданной функцией $f(t)$, которая, в частности, также может являться случайным процессом. Полное решение указанных задач очень сложное. Поэтому в настоящем разделе ограничимся простейшей задачей – определения среднего числа пересечений случайным процессом заданного уровня $x = x_0$ в единицу времени.

Вероятность пересечения уровня $x = x_0$ с положительной производной при достаточно малом Δt совпадает с вероятностью выполнения неравенств

$$x_0 - \Delta x < \xi(t) < x_0, \quad \frac{d\xi(t)}{dt} > 0.$$

Если $W_2(x, y, t)$ совместная плотность вероятности случайного процесса $\xi(t)$ и его производной $\frac{d\xi(t)}{dt}$, то при достаточно малом Δt имеем

$$P \left\{ x_0 - \Delta x < \xi(t) < x_0, \frac{d\xi(t)}{dt} > 0 \right\} = \int_0^{\infty} \int_{x_0 - \Delta x}^{x_0} W_2(x, y, t) dx dy = \Delta t \int_0^{\infty} y W_2(x_0, y, t) dy.$$

Среднее число пересечений уровня $x = x_0$ с положительной производной на интервале $(t, t + T)$ определяется соотношением

$$m_1(x_0, t, T) = \int_t^{t+T} \int_0^{\infty} y W_2(x_0, y, t) dy dt, \quad (1.165)$$

а среднее число пересечений в единицу времени

$$N_1(x_0, t) = \frac{m_1(x_0, t, T)}{T} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_0^{\infty} y W_2(x_0, y, t) dy dt. \quad (1.166)$$

Для стационарного случайного процесса совместное распределение с производной в совпадающие моменты времени не зависит от t , а среднее число пересечений с положительной производной уровня x_0 в единицу времени постоянно и определяется зависимостью

$$N_1(x_0) = \int_0^{\infty} y W_2(x_0, y) dy. \quad (1.167)$$

Аналогичной формулой определяется и среднее число пересечений уровня $x = x_0$ с отрицательной производной.

Для нормального стационарного случайного процесса среднее число пересечений уровня $x = x_0$ в единицу времени с положительной производной с учетом (1.163) равно

$$N_1(x_0) = \frac{1}{2\pi\sigma\omega_1} \int_0^{\infty} y \exp\left(-\frac{\omega_1^2 x_0 + y^2}{2\omega_1^2 \sigma^2}\right) dy = \frac{\omega_1}{2\pi} e^{-\frac{x_0}{2\sigma^2}}. \quad (1.168)$$

Так как $\omega_1 = \left[\frac{\int_0^{\infty} \omega^2 G(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} G(\omega) d\omega} \right]^{\frac{1}{2}}$, то среднее число пересечений случайным

процессом уровня $x = x_0$ с положительной производной прямо пропорционально ширине энергетического спектра процесса.

Определим также среднее значение интервала между выбросами эргодического случайного процесса над уровнем $x = x_0$. Среднее время пребывания эргодического случайного процесса ниже уровня x_0 совпадает с вероятностью того, что значение случайного процесса в любой момент времени не превосходит x_0 т.е.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} e[x_0 - \xi(t)] dt = P\{\xi(t) \leq x_0\} = F_1(x_0),$$

где $e(x)$ - функция Хевисайда, $F_1(x)$ - одномерная интегральная функция распределения случайного процесса.

За достаточно длительное время T общее число интервалов, на которых $\xi(t) < x_0$, равно среднему числу пересечений случайного процесса уровня x_0 за это время, т.е. равно $N_1(x_0)T$. Тогда среднее значение длительности интервалов между выбросами случайного процесса за уровень x_0 будет определяться зависимостью

$$m_1\{\xi_u\} = \frac{F_1(x_0)T}{N_1(x_0)T} = \frac{F_1(x_0)}{N_1(x_0)}. \quad (1.169)$$

Для нормального случайного процесса имеем

$$m_1\{\xi_u\} = \frac{2\pi}{\omega_1} F\left(\frac{x_0}{\sigma}\right) \exp\left(\frac{x_0^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.170)$$

где $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ - интеграл вероятностей

Аналогично можно получить выражение для среднего значения длительности выброса над уровнем $x = x_0$ эргодического случайного процесса

$$m_1\{\xi_\varepsilon\} = \frac{1 - F_1(x_0)}{N_1(x_0)}. \quad (1.171)$$

Для нормального случайного процесса имеем

$$m_1\{\xi_\varepsilon\} = \frac{2\pi}{\omega_1} \left[1 - F\left(\frac{x_0}{\sigma}\right) \right] \exp\left(\frac{x_0^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.172)$$

При $x_0 \gg \sigma$ получим

$$m_1\{\xi_\varepsilon\} \approx \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{x_0\omega_1},$$

так как при достаточно большом аргументе интеграл вероятностей можно представить в виде асимптотического разложения:

$$\begin{aligned} F(x) &: 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5} - \frac{15}{x^7} + \dots \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{(2i)!}{2^i i!} \cdot \frac{1}{x^{2i+1}} \right]. \end{aligned}$$

Часто вместо функции $F(x)$ используются функция Крампа

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

или интегральная функция Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Часть 2. Прохождение сигнала и шума через линейные и нелинейные устройства

Электронный тракт оптико-электронных приборов представляет собой сочетание линейных и нелинейных устройств. Эти устройства разделяются на следующие категории.

1. Пассивные линейные устройства с постоянными параметрами;
2. Активные линейные устройства с постоянными параметрами;
3. Линейные устройства с переменными параметрами;
4. Нелинейные устройства с постоянными параметрами;
5. Нелинейные устройства с изменяющимися параметрами.

В настоящем разделе рассмотрим преобразование детерминированных и случайных процессов в линейных и нелинейных устройствах электронного тракта.

2.1. Краткие сведения о линейных устройствах

Выходной сигнал $y(t)$ линейного устройства определяется в общем случае линейным дифференциальным уравнением

$$a_n(t) \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dy(t)}{dt} + a_0(t) y(t) = f(t),$$

где $f(t) = L[x(t)]$ - результат преобразований входного сигнала $x(t)$, определяемых оператором L . Переменные коэффициенты $a(t)$ отвечают случаю линейного устройства с переменными параметрами (параметрами, изменяющимися во времени). Линейные устройства с постоянными параметрами описываются линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t).$$

Основными свойствами линейных устройств, вытекающими из линейности описывающих их дифференциальных уравнений, являются линейная связь между изменениями входного сигнала $x(t)$ и выходного сигнала $y(t)$ и справедливость принципа суперпозиции, который можно сформулировать следующим образом:

если входной сигнал представить в виде суммы элементарных сигналов $x(t) = \sum_{i=1}^m x_i(t)$, то выходной сигнал будет представлять сумму

соответствующих им элементарных выходных сигналов $y(t) = \sum_{i=1}^m y_i(t)$.

Эти два свойства, присущие только линейным устройствам и цепям, резко упрощают как реализацию, так и математическое их описание.

Принцип суперпозиции позволяет определить характеристики линейных устройств по отклику на некоторые сигналы стандартной формы - базисные функции, по которым может быть разложен входной сигнал. В качестве базисных функций при линейных преобразованиях обычно используются либо собственные функции, либо дельта- функция и ее производные.

Функция $\mathcal{G}(\omega, t)$ называется собственной, если она проходит через линейную цепь, не искажаясь по форме, а лишь меняя масштаб или претерпевая задержку по времени.

Реакция линейного устройства на воздействие собственной функции $\mathcal{G}(\omega, t)$ определяется собственным значением $H(\omega)$, характеризующим масштаб ее линейного преобразования и задержку. Для линейного устройства с постоянными параметрами собственными функциями являются $\mathcal{G}(\omega, t) = e^{j\omega t}$, а собственными значениями – комплексные величины

$$H(\omega) = K(j\omega) = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.1)$$

определяющие отклик устройства на экспоненциальный комплексный сигнал $e^{j\omega t}$.

Величина $K(j\omega)$ называется передаточной функцией линейного устройства, а $K(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ - амплитудно-частотной и фазочастотной характеристиками соответственно.

Помимо собственных функций в качестве элементарных сигналов удобно использовать простейшие временные сигналы: $\delta(t)$ - функцию и функцию Хевисайда $e(t)$. Дельта – функция и функция Хевисайда (функция единичного скачка) удобны для определения импульсной и переходной характеристик линейных устройств.

Импульсной характеристикой называется реакция линейного устройства на входное воздействие в виде дельта – функции, т.е. это функция $g(t, t')$, определяющая отклик в момент t на дельта – функцию, приложенную в момент t' .

Используя принцип суперпозиции, можно получить выходной сигнал как сумму откликов на воздействие элементарных входных сигналов, предшествующих моменту t :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')g(t, t')dt'.$$

Для линейных устройств с постоянными параметрами отклик на дельта – функцию зависит только от интервала $t - t' = \tau'$, В этом случае связь между входным и выходным сигналами устанавливается посредством интеграла Дюамеля

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)g(t-\tau)d\tau. \quad (2.2)$$

Передачная функция и импульсная характеристика связаны между собой парой преобразования Фурье:

$$\begin{cases} K(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt \\ g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \end{cases}. \quad (2.3)$$

Учитывая, что $K(\omega)$ - четная, а $\varphi(\omega)$ - нечетная функции, можно импульсную характеристику записать через амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega. \quad (2.4)$$

Если амплитудно-частотная характеристика имеет выраженную область резонанса на частоте ω_0 и ширина амплитудно-частотной характеристики много меньше этой частоты, то такое линейное устройство называется узкополосным.

Для узкополосных линейных устройств с симметричной амплитудно-частотными характеристиками выражение для импульсной характеристики можно записать в следующем виде

$$g_y(t) = g(t) \cos \omega_0 t,$$

т.е. представляет импульсную характеристику с высокочастотным заполнением.

Переходной характеристикой $h(t)$ называется реакция линейного устройства на входное воздействие в виде функции Хевисайда $e(t)$.

2.2. Преобразование детерминированных и случайных процессов в линейных устройствах электронного тракта

Первоначально рассмотрим линейное преобразование детерминированных процессов.

Пусть на вход линейного устройства, которое характеризуется передачной функцией $K(j\omega)$ и импульсной характеристикой $g(t)$, поступает детерминированный процесс $s_1(t)$ со спектральной функцией $S_1(j\omega)$.

Сигнал на выходе линейного устройства при заданной импульсной характеристике $g(t)$ определяется соотношением (2.2):

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Представим процесс $s_1(t-\tau)$ через его спектральную функцию

$$s_1(t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(j\omega)e^{-j\omega\tau}e^{j\omega t}d\omega.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} s_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(j\omega)e^{-j\omega\tau}e^{j\omega t}d\omega \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \right] e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega, \end{aligned} \quad (2.5)$$

так как
$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt.$$

Из соотношения (2.5) следует, что спектральная функция процесса на выходе линейного устройства равна произведению спектральной функции входного процесса и передаточной функции линейного устройства, т.е.

$$S_2(j\omega) = S_1(j\omega)K(j\omega). \quad (2.6)$$

Временную функцию выходного детерминированного процесса в таком случае можно представить обратным преобразованием Фурье:

$$s_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \quad (2.7)$$

Иными словами, процесс на выходе линейного устройства получается суммированием спектральной функции входного детерминированного процесса с весовым множителем $K(j\omega)$.

Передаточная функция $K(j\omega)$ определяет относительный вклад различных спектральных составляющих $S_1(j\omega)$ в формировании выходного процесса.

Если имеется последовательное соединение линейных устройств с передаточными функциями $K_1(j\omega), K_2(j\omega), \dots, K_n(j\omega)$, то передаточная функция всей системы определяется произведением:

$$K(j\omega) = K_1(j\omega)K_2(j\omega)\dots K_n(j\omega),$$

а временная функция процесса на выходе будет равна:

$$s_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(j\omega)K_1(j\omega)K_2(j\omega)\dots K_n(j\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Таким образом, для нахождения временной функции выходного детерминированного процесса можно воспользоваться как временным, так и спектральным методом.

При рассмотрении линейного преобразования случайных процессов ограничимся рамками корреляционной теории, когда требуется определить корреляционную функцию, мощность и энергетический спектр случайного процесса на выходе линейного устройства и не требуется знать, полностью определяющие его, многомерные законы распределения.

Положим, что на вход линейного устройства поступает случайный процесс $\xi(t)$ с корреляционной функцией $B_{2\xi}(t_1, t_2)$. Процесс на выходе $\eta(t)$ можно определить посредством интеграла Дюамеля

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t-\tau)g(\tau)d\tau,$$

т.е. он представляет собой интеграл от входного процесса. Следовательно, корреляционная функция такого выходного процесса будет определяться согласно (1.145) формулой

$$B_{2\eta}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_1, v)g(t_2, u)B_{2\xi}(v, u)dvdu.$$

Для линейных устройств с постоянными параметрами последнее выражение принимает вид

$$B_{2\eta}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(v)g(u)B_{2\xi}(t_1 - v, t_2 - u)dvdu.$$

Если входной процесс $\xi(t)$ стационарен, то корреляционная функция выходного процесса будет определяться выражением

$$B_{2\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(v)g(u)B_{2\xi}(v - u + \tau)dvdu. \quad (2.8)$$

Как видно из формулы (2.8) случайный процесс на выходе в этом случае также является стационарным в широком смысле. Следует заметить, что для линейных устройств с переменными параметрами выходной процесс будет нестационарным даже при стационарном входном случайном процессе.

В соответствии с теоремой Винера - Хинчина энергетический спектр выходного случайного процесса определяется интегралом Фурье

$$G_{\eta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{2\eta}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(v)g(u)B_{2\xi}(v - u + \tau)\exp(-j\omega\tau)dvdu d\tau =$$

Обозначим $v - u + \tau = z$, тогда

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(v)g(u)B_{2\xi}(z)\exp[-j\omega(z + u - v)]dvdu dz = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(v)e^{j\omega v}dv \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-j\omega u}du \int_{-\infty}^{+\infty} B_{2\xi}(z)e^{-j\omega z}dz = G_{\xi}(\omega)|K(j\omega)|^2 = \\ &= G_{\xi}(\omega)K^2(\omega) \end{aligned} \quad (2.9)$$

так как:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B_{2\xi}(z) e^{-j\omega z} dz = G_{\xi}(\omega)$$
 - энергетический спектр входного случайного процесса,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{-j\omega u} du = K(j\omega)$$
 - передаточная функция линейного устройства,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(v) e^{j\omega v} dv = K(-j\omega) = K^*(j\omega)$$
 - функция комплексно сопряженная

передаточной функции линейного устройства.

Формула (2.9) указывает на закон преобразования энергетического спектра стационарного случайного процесса при его прохождении через линейное устройство.

Как видим, энергетический спектр случайного процесса на выходе линейного устройства равен произведению энергетического спектра входного стационарного случайного процесса и квадрата амплитудно-частотной характеристики линейного устройства. Фазовая характеристика, как и следовало ожидать, не находит никакого отражения в формуле преобразования энергетического спектра случайного процесса.

Обратимся снова к корреляционной функции выходного случайного процесса и определим ее посредством обратного преобразования Фурье от энергетического спектра:

$$B_{2\eta}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\xi}(\omega) K^2(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (2.10)$$

Отсюда мощность выходного случайного процесса будет равна

$$B_{2\eta}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\xi}(\omega) K^2(\omega) d\omega. \quad (2.11)$$

Если имеется система последовательно соединенных линейных устройств с передаточными функциями $K_1(j\omega), K_2(j\omega), \dots, K_n(j\omega)$, то соответственно

$$G_{\eta}(\omega) = G_{\xi}(\omega) |K_1(j\omega) K_2(j\omega) \dots K_n(j\omega)|^2,$$

$$B_{2\eta}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\xi}(\omega) |K_1(j\omega) K_2(j\omega) \dots K_n(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega,$$

$$B_{2\eta}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\xi}(\omega) |K_1(j\omega) K_2(j\omega) \dots K_n(j\omega)|^2 d\omega.$$

Рассмотрим следующее соотношение:

$$\mu = \frac{s_2(t_0)}{\sqrt{B_{2\eta}(0)}} = \frac{\operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \right]}{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_\xi(\omega) K^2(\omega) d\omega \right]^{1/2}}. \quad (2.12)$$

Величина μ называется **отношением сигнал/шум** (по току или напряжению). Так как t_0 - момент времени, при котором сигнал на выходе линейного устройства достигает максимальной величины, то выражение (2.12) характеризует отношение максимума сигнала к среднеквадратическому значению шума на выходе линейного устройства.

Имеются также и другие определения отношения сигнал/шум, например, отношения мощности сигнала к мощности шума, энергии сигнала к энергетическому спектру шума. Однако следует иметь в виду, что в теории статистических решений нет такого критерия качества, как отношение сигнал/шум. Величина отношения сигнал/шум может являться статистическим критерием только в случае, если многомерные статистики шума и смеси сигнала с шумом - гауссовы. В остальных случаях использование величины отношения сигнала к шуму как критерия качества обнаружения является некорректным. Однако как качественная характеристика отношение сигнал/шум очень удобна про любой статистике.

2.3. Прохождение белого шума через линейное устройство

Рассмотрим важный для практики случай, когда на вход линейного устройства поступает стационарный случайный процесс с равномерным на всех частотах энергетическим спектром $G(\omega) = G$, т.е. белый шум.

Энергетический спектр случайного процесса на выходе линейного устройства согласно (2.9) будет равен

$$G_\eta(\omega) = GK^2(\omega). \quad (2.13)$$

Таким образом, энергетический спектр случайного процесса на выходе линейного устройства пропорционален квадрату амплитудно-частотной характеристики устройства.

Из соотношения (2.13) непосредственно находим корреляционную функцию выходного случайного процесса

$$B_{2\eta}(\tau) = \frac{G}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (2.14)$$

Корреляционную функцию выходного процесса можно вычислить также через импульсную характеристику линейного устройства, используя выражение (2.8):

$$B_{2\eta}(\tau) = \frac{G}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(v)g(u)B_{2\xi}(v-u+\tau)dvdu =$$

учитывая, что корреляционная функция белого шума пропорциональна дельта - функции $B_{2\xi}(\tau) = G\delta(\tau)$, и используя фильтрующее свойство дельта - функции, получим

$$= G \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(v-u+\tau)g(v)g(u)dvdu = G \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)g(u-\tau)du. \quad (2.15)$$

Таким образом, корреляционная функция случайного процесса (шумов) на выходе линейной системы с точностью до постоянного множителя совпадает с интегральной сверткой от импульсной характеристики устройства.

Для узкополосного линейного устройства с симметричной относительно высокой частоты ω_0 амплитудно-частотной характеристикой корреляционная функция выходного случайного процесса может быть представлена в виде

$$B_{2\eta}(\tau) = \left[\frac{G}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_1^2(\omega_0 - \omega) \cos(\omega\tau) d\omega \right] \cos(\omega_0\tau). \quad (2.16)$$

Из выражения (1.16) видно, что корреляционная функция случайного процесса, прошедшего через линейное устройство с резонансной частотой ω_0 , равна умноженной на $\cos(\omega_0\tau)$ корреляционной функции белого шума, прошедшего через линейное устройство с амплитудно-частотной характеристикой, полученной сдвигом ее в область низких частот на величину ω_0 .

С прохождением белого шума через линейные устройства связано определение ширины полосы пропускания амплитудно- частотной характеристики устройства. Эта ширина полосы пропускания называется также **эффективной шумовой полосой пропускания** линейного устройства. Эффективная шумовая полоса пропускания определяется из полной энергии прошедшего через линейное устройство случайного процесса, причем фактическая амплитудно-частотная характеристика заменяется эквивалентной по энергии шумов идеализированной прямоугольной характеристикой. Высота прямоугольника выбирается так, чтобы постоянная плотность энергетического спектра в пределах его ширины равнялась максимальной плотности действительного энергетического спектра на выходе линейного устройства. В соответствии с приведенным определением эффективная шумовая полоса пропускания линейного устройства вычисляется по формуле

$$\Delta f_{эфф} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} K^2(\omega) d\omega}{2\pi K^2(\omega_0)} - \quad (2.17)$$

- для узкополосного линейного устройства

и

$$\Delta f_{эфф} = \frac{\int_0^{\infty} K^2(\omega) d\omega}{\pi K^2(0)} \quad (2.18)$$

- для широкополосного линейного устройства.

Эффективную шумовую полосу пропускания линейного устройства можно также рассчитать по формулам:

$$\Delta f_{эфф} = \frac{B_{2\eta}(0)}{GK^2(\omega_0)} \quad \text{и} \quad \Delta f_{эфф} = \frac{B_{2\eta}(0)}{GK^2(0)}.$$

Время корреляции белого шума, прошедшего через линейное устройство, равно

$$\tau_k = \frac{G(0)}{2B_{2\eta}(0)} = \frac{1}{2\Delta f_{эфф}}. \quad (2.19)$$

Таким образом, время корреляции имеет порядок величины, обратной эффективной шумовой полосы пропускания линейного устройства.

Рассмотрим несколько примеров прохождения белого шума через линейные устройства.

Пример. Прохождение белого шума через идеальный линейный фильтр с полосой пропускания, равной $\Delta\omega$.

Амплитудно-частотная характеристика идеального фильтра имеет вид

$$K(\omega) = \begin{cases} K_0 & \text{при } |\omega - \omega_0| < \Delta\omega/2 \\ 0 & \text{при } |\omega - \omega_0| > \Delta\omega/2 \end{cases}.$$

Следовательно, энергетический спектр шумов на выходе идеального фильтра равен

$$G_{\eta}(\omega) = \begin{cases} GK_0^2 & \text{при } |\omega - \omega_0| < \Delta\omega/2 \\ 0 & \text{при } |\omega - \omega_0| > \Delta\omega/2 \end{cases}.$$

При $\Delta\omega = \omega_0$ шум на выходе идеального фильтра представляет случайный процесс, энергетический спектр которого расположен в узкой полосе частот около ω_0 и симметрично относительно последней.

Корреляционная функция шумов на выходе идеального фильтра согласно теореме Винера – Хинчина равна

$$\begin{aligned} B_{2\eta}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} GK_0^2 \cos(\omega\tau) d\omega = \frac{GK_0^2}{2\pi\tau} \left[\sin\left(\omega_0 + \Delta\omega/2\right)\tau - \sin\left(\omega_0 - \Delta\omega/2\right)\tau \right] = \\ &= \frac{GK_0^2}{\pi\tau} \sin\left(\tau\Delta\omega/2\right) \cos(\omega_0\tau). \end{aligned}$$

Мощность шума будет равна

$$B_{2\eta}(0) = \frac{GK_0^2}{\pi\tau} \sin\left(\frac{\tau\Delta\omega}{2}\right) \cos(\omega_0\tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{GK_0^2}{2\pi} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\tau\Delta\omega}{2}\right)}{\frac{\tau\Delta\omega}{2}} \cos(\omega_0\tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{GK_0^2}{2\pi}.$$

Пример. Прохождение белого шума через линейный усилитель с гауссовой амплитудно-частотной характеристикой

$$K(\omega) = k \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\beta^2}\right].$$

Энергетический спектр шумов на выходе такого усилителя также имеет форму гауссовой кривой:

$$G_\eta(\omega) = Gk^2 \exp\left[\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\beta^2}\right].$$

Корреляционная функция равна

$$B_{2\eta}(\tau) = \frac{Gk^2}{\pi} \cos(\omega_0\tau) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\omega^2}{\beta^2}\right) \cos(\omega\tau) d\omega = \frac{Gk^2}{2\sqrt{\pi}} \beta \exp\left(-\frac{\beta^2\tau^2}{4}\right) \cos(\omega_0\tau),$$

а мощность выходного шума определяется выражением

$$B_{2\eta}(0) = \frac{Gk^2\beta}{2\sqrt{\pi}}.$$

2.4 Преобразование случайных процессов в нелинейных устройствах

Рассмотрим преобразование случайных процессов в нелинейных безынерционных устройствах. Задача исследования прохождения случайных процессов через нелинейные устройства заключается в определении статистических характеристик выходных процессов по известным статистическим характеристикам входных процессов и заданных параметрах устройств. В основном поставленная задача совпадает с рассмотренной в разделе 1.11 функциональным преобразованием случайных процессов. Однако в нелинейных устройствах принцип суперпозиции неприменим и при определении таких важных характеристик, как корреляционная функция и энергетический спектр выходных случайных процессов, избежать использования двумерной плотности вероятностей нельзя.

Для решения общей задачи нахождения корреляционной функции выходного случайного процесса используются специальные методы.

При заданном функциональном преобразовании нелинейного устройства $y = f(x)$ и известной двумерной плотности вероятностей $W_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$ случайного процесса на входе нелинейного устройства выражение для корреляционной функции случайного процесса на выходе определяется выражением

$$B_{2\eta}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1) f(x_2) W_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (2.20)$$

Если входной случайный процесс стационарен, то и процесс на выходе нелинейного устройства будет стационарным, а его корреляционная функция определяется зависимостью

$$B_{2\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1) f(x_2) W_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2. \quad (2.21)$$

По известной корреляционной функции выходного случайного процесса, используя теорему Винера – Хинчина, можно определить энергетический спектр. Однако непосредственное вычисление интегралов (2.20) и (2.21) часто наталкивается на непреодолимые трудности. Поэтому целесообразно преобразовать выражение для корреляционной функции к виду, для которого переменные интегрирования в двойном интеграле разделяются.

Рассмотрим два таких метода вычисления корреляционной функции выходного случайного процесса.

1. Прямой метод

Этот метод заключается в том, что двумерная плотность вероятностей представляется в виде ряда, который можно построить по одномерной функции распределения, т.е. двумерную плотность вероятностей можно записать в следующем виде

$$W_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = W_1(x_1, t_1) W_1(x_2, t_2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t_1, t_2) \mathcal{G}_n(x_1, t_1) \mathcal{G}_n(x_2, t_2), \quad (2.22)$$

где $\mathcal{G}_n(x, t)$ - система ортонормированных полиномов, а $c_n(t_1, t_2)$ равна

$$c_n(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_n(x_1, t_1) \mathcal{G}_n(x_2, t_2) W_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2.$$

Теперь выражение для корреляционной функции примет вид

$$B_{2\eta}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1) f(x_2) W_1(x_1, t_1) W_1(x_2, t_2) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t_1, t_2) \mathcal{G}_n(x_1, t_1) \mathcal{G}_n(x_2, t_2) dx_1 dx_2 \quad (2.23)$$

Поменяем местами значки суммы и интегралов и разделим переменные интегрирования:

$$B_{2\eta}(t_1, t_2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t_1, t_2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1) \mathcal{G}_n(x_1, t_1) W_1(x_1, t_1) dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_2) \mathcal{G}_n(x_2, t_2) W_1(x_2, t_2) dx_2 \quad (2.24)$$

Введем обозначение

$$\alpha_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathcal{G}_n(x, t) W_1(x, t) dx \quad (2.25)$$

и окончательно получим

$$B_{2\eta}(t_1, t_2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t_1, t_2) \alpha_n(t_1) \alpha_n(t_2). \quad (2.26)$$

Для стационарного случайного процесса получим

$$B_{2\eta}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\tau) \alpha_n^2, \quad (2.27)$$

где:
$$c_n(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_n(x_1) \mathcal{G}_n(x_2) W_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2, \quad (2.28)$$

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathcal{G}_n(x) W_1(x) dx. \quad (2.29)$$

2. Метод характеристических функций – метод Райса

Этот метод основан на замене плотности вероятностей характеристической функцией, а нелинейной зависимости $f(x)$ - ее Фурье преобразованием

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(jv) e^{jvx} dv,$$

где $F(jv) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-jvx} dx$ - спектральная функция $f(x)$.

В этом случае получим

$$\begin{aligned} B_{2\eta}(t_1, t_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(jv_1) e^{jv_1 x_1} dv_1 \int_{-\infty}^{+\infty} F(jv_2) e^{jv_2 x_2} W_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dv_2 dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(jv_1) F(jv_2) \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_2(x_1, x_2, t_1, t_2) \exp[j(v_1 x_1 + v_2 x_2)] dx_1 dx_2 dv_1 dv_2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Принимая во внимание, что двумерная характеристическая функция входного случайного процесса равна

$$\Xi_2(v_1, v_2, t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_2(x_1, x_2, t_1, t_2) \exp[j(v_1 x_1 + v_2 x_2)] dx_1 dx_2,$$

выражение (2.30) можно записать в виде

$$B_{2\eta}(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(jv_1) F(jv_2) \Xi_2(v_1, v_2, t_1, t_2) dv_1 dv_2. \quad (2.31)$$

Теперь аналогично формуле (2.22) двумерную характеристическую функцию $\Xi_2(v_1, v_2, t_1, t_2)$ можно представить в виде ряда

$$\Xi_2(v_1, v_2, t_1, t_2) = \Xi_1(v_1, t_1) \Xi_1(v_2, t_2) \sum_{n=0}^{\infty} d_n(t_1, t_2) P_n(v_1, t_1) P_n(v_2, t_2), \quad (2.32)$$

$$\text{где: } d_n(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_2(v_1, v_2, t_1, t_2) P_n(v_1, t_1) P_n(v_2, t_2) dv_1 dv_2, \quad (2.33)$$

$P_n(v, t)$ - система ортонормированных полиномов.

Подставляя (2.32) в (2.31) окончательно приходим к представлению корреляционной функции случайного процесса на выходе нелинейного устройства в виде ряда

$$B_{2n}(t_1, t_2) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(t_1, t_2) \beta_n(t_1) \beta_n(t_2), \quad (2.34)$$

$$\text{где } \beta_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(jv) P_n(v, t) \Xi_1(v, t) dv. \quad (2.35)$$

Для стационарного случайного процесса получим

$$B_{2n}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\tau) \beta_n^2, \quad (2.36)$$

$$\text{где: } d_n(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_2(v_1, v_2, \tau) P_n(v_1) P_n(v_2) dv_1 dv_2, \quad (2.37)$$

$$\beta_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(jv) P_n(v) \Xi_1(v) dv. \quad (2.38)$$

Следует отметить, что в обоих методах корреляционная функция случайного процесса на выходе нелинейного устройства определяется суммой сомножителей, первый из которых $[c_n(\tau)$ или $d_n(\tau)]$ зависит от свойств входного процесса и не зависит от нелинейности. Эти функции $c_n(t_1, t_2)$ и $d_n(t_1, t_2)$ [а при стационарных случайных процессах $c_n(\tau)$ и $d_n(\tau)$] для распространенных законов распределения и часто принимаемых полиномов $\mathcal{G}_n(x)$ и $P_n(v)$ протабулированы. В этом случае расчету подлежат только функции $\alpha_n(t)$ и $\beta_n(t)$ для нестационарных процессов и числа α_n , β_n для стационарных случайных процессов.

2.5. Вычисление корреляционной функции выходного процесса при стационарном гауссовом входном шуме

Приведенная общая методика определения корреляционной функции выходного процесса справедлива для входных шумов с любым законом распределения. Однако, когда входной процесс является стационарным гауссовым процессом, вычисления существенно упрощаются и по прямому методу и по методу характеристических функций.

Прямой метод

При стационарном входном процессе корреляционная функция выходного случайного процесса определяется формулой (2.27):

$$B_{2\eta}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\tau) \alpha_n^2.$$

Для определения функции $c_n(\tau)$ воспользуемся разложением двумерной плотности вероятностей стационарного гауссова процесса в ряд в соответствие с формулой (2.22). Для простоты написания формул будем считать, что входной процесс имеет нулевое среднее значение. В этом случае двумерная плотность вероятностей нормального случайного процесса имеет вид

$$W_2(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1-b_2^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{x_1^2 - 2b_2(\tau)x_1x_2 + x_2^2}{2\sigma^2[1-b_2^2(\tau)]}\right\},$$

где $b_2(\tau)$ - коэффициент корреляции.

Решим задачу, используя представления этой функции посредством двукратного прямого преобразования Фурье от двумерной характеристической функции этого процесса, которая записывается в следующем виде:

$$\Xi_2(v_1, v_2, \tau) = \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}[v_1^2 + 2b_2(\tau)v_1v_2 + v_2^2]\right\}.$$

Получим

$$\begin{aligned} W_2(x_1, x_2, \tau) &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-j(v_1x_1 + v_2x_2) - \frac{\sigma^2}{2}[v_1^2 + 2b_2(\tau)v_1v_2 + v_2^2]\right\} dv_1 dv_2 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Представим $e^{-\sigma^2 b_2(\tau)v_1v_2}$ с помощью разложения в степенной ряд

$$e^{-\sigma^2 b_2(\tau)v_1v_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} [\sigma^2 b_2(\tau)v_1v_2]^n. \quad (2.40)$$

Подставляя (2.40) в (2.39) и меняя местами значки суммы и интегралов, получим

$$\begin{aligned} W_2(x_1, x_2, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\sigma^{2n} b_2^n(\tau)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v_1^n \exp\left(-jv_1x_1 - \frac{\sigma^2}{2}v_1^2\right) dv_1 \times \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v_2^n \exp\left(-jv_2x_2 - \frac{\sigma^2}{2}v_2^2\right) dv_2. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Известен табличный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (jv)^n e^{-jxv - \frac{\sigma^2}{2}v^2} dv = 2^{-n/2} \sqrt{\pi} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{-(n+1)} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) D\left(\frac{x}{\sigma}\right), \quad (2.42)$$

где $D\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ - функция Вебера - Эрмита, которую можно выразить через полиномы Эрмита:

$$D\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) H_n\left(\frac{x}{\sigma}\right). \quad (2.43)$$

$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}$ - полиномы Эрмита.

С учетом (2.42) и (2.43) выражение (2.41) после простых выкладок принимает вид:

$$\begin{aligned} W_2(x_1, x_2, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_2^n(\tau)}{\sigma^2 n!} \left[\sqrt{2\pi} e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}} H_n\left(\frac{x_1}{\sigma}\right) \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma^2}} H_n\left(\frac{x_2}{\sigma}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_2^n(\tau)}{n!} H_n\left(\frac{x_1}{\sigma}\right) H_n\left(\frac{x_2}{\sigma}\right) = \\ &= W_1(x_1) W_1(x_2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\tau) \mathcal{G}_n(x_1) \mathcal{G}_n(x_2) \end{aligned}$$

Так как в приведенном выражении $W_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ - одномерная

плотность вероятностей нормального случайного процесса, а $\mathcal{G}_n(x) = H_n\left(\frac{x}{\sigma}\right)$

- полиномы Эрмита, то, следовательно, функция $c_n(\tau)$ равна

$$c_n(\tau) = \frac{b_2^n(\tau)}{n!}. \quad (2.44)$$

Таким образом, корреляционная функция случайного процесса на выходе нелинейного устройства при воздействии на его вход стационарного гауссова шума будет равна

$$B_{2\eta}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 \frac{b_2^n(\tau)}{n!}. \quad (2.45)$$

Число α_n определяется по формуле (2.29) и зависит от функционального преобразования нелинейного устройства.

Энергетический спектр выходного случайного процесса будет определяться выражением

$$G_{\eta}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} B_{2\eta}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{n!} \int_0^{\infty} b_2^n(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (2.46)$$

Следует отметить, что решение задачи может быть выражено в различных видах.

Переход от одного вида к другому можно осуществить на основе следующего соотношения:

$$\varphi^{(n)}(z) = F^{(n+1)}(z) = (-1)^n F'(z) H_n(z) = (-1)^n \varphi(z) H_n(z), \quad (2.47)$$

где $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ и $F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Метод характеристических функций

При воздействии на вход нелинейного устройства стационарного гауссова шума формула (2.31) принимает вид

$$B_{2n}(\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(jv_1)F(jv_2)\Xi_2(v_1, v_2, \tau) dv_1 dv_2. \quad (2.48)$$

Двумерная характеристическая функция гауссова процесса с нулевым средним значением равна

$$\Xi_2(v_1, v_2, \tau) = \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}\left[v_1^2 + 2b_2(\tau)v_1v_2 + v_2^2\right]\right\}.$$

Используя разложение экспоненты в степенной ряд (2.40), выражение для характеристической функции запишем в виде

$$\Xi_2(v_1, v_2, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b_2^n(\tau)\sigma^{2n}}{n!} \left[e^{-\frac{\sigma^2 v_1^2}{2}} v_1^n \right] \left[e^{-\frac{\sigma^2 v_2^2}{2}} v_2^n \right]. \quad (2.49)$$

Подставляя (2.49) в (2.48) получим формулу для расчета корреляционной функции случайного процесса на выходе нелинейного устройства при воздействии на входе стационарного гауссова шума

$$\begin{aligned} B_{2n}(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b_2^n(\tau)\sigma^{2n}}{n!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v_1^n F(jv_1) e^{-\frac{\sigma^2 v_1^2}{2}} dv_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v_2^n F(jv_2) e^{-\frac{\sigma^2 v_2^2}{2}} dv_2 = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} l_n(\tau) h_n^2, \end{aligned} \quad (2.50)$$

где:

$$l_n(\tau) = (-1)^n \frac{b_2^n(\tau)\sigma^{2n}}{n!}, \quad (2.51)$$

$$h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v^n F(jv) e^{-\frac{\sigma^2 v^2}{2}} dv. \quad (2.52)$$

Метод производных

Особенно просто решается задача нахождения корреляционной функции случайного процесса на выходе нелинейного устройства при входном стационарном гауссовом шуме методом производных. Пользуясь этим методом, находят производные корреляционной функции выходного процесса по коэффициенту корреляции входного случайного процесса, а затем путем интегрирования переходят к искомой корреляционной функции.

Проведем следующие рассуждения. В соответствие с методом характеристических функций корреляционную функцию выходного

случайного процесса при входном стационарном гауссовом процессе согласно (2.31) можно представить формулой

$$\begin{aligned} B_{2\eta}(\tau) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(jv_1)F(jv_2)\Xi_2(v_1, v_2, \tau)dv_1dv_2 = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(jv_1)F(jv_2)\exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}[v_1^2 + 2b_2(\tau)v_1v_2 + v_2^2]\right\}dv_1dv_2. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Продифференцируем (2.53) по параметру $b_2(\tau)$:

$$\begin{aligned} \frac{dB_{2\eta}(\tau)}{db_2(\tau)} &= -\frac{\sigma^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_1v_2F(jv_1)F(jv_2)\exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}[v_1^2 + 2b_2(\tau)v_1v_2 + v_2^2]\right\}dv_1dv_2 = \\ &= \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} jv_1F(jv_1)jv_2F(jv_2)\Xi_2(v_1, v_2, \tau)dv_1dv_2. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Корреляционную функцию выходного процесса можно также представить формулой

$$B_{2\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1)f(x_2)W_2(x_1, x_2, \tau)dx_1dx_2. \quad (2.55)$$

Сопоставление (2.53) и (2.55) с учетом, что $jvF(jv)$ является спектральной функцией производной от $f(x)$, позволяет сделать вывод, что

$$\frac{dB_{2\eta}(\tau)}{db_2(\tau)} = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x_1)f'(x_2)W_2(x_1, x_2, \tau)dx_1dx_2. \quad (2.56)$$

Следовательно, при входном стационарном гауссовом случайном процессе имеем:

$$\frac{dB_{2\eta}(\tau)}{db_2(\tau)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-b_2^2(\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x_1)f'(x_2)\exp\left\{-\frac{x_1^2 - 2b_2(\tau)x_1x_2 + x_2^2}{2\sigma^2[1-b_2^2(\tau)]}\right\}dx_1dx_2. \quad (2.57)$$

Аналогичные рассуждения для k производной приводят нас к формуле Прайса:

$$\frac{d^k B_{2\eta}(\tau)}{db_2^k(\tau)} = \frac{\sigma^{2k-2}}{2\pi\sqrt{1-b_2^2(\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)}(x_1)f^{(k)}(x_2)\exp\left\{-\frac{x_1^2 - 2b_2(\tau)x_1x_2 + x_2^2}{2\sigma^2[1-b_2^2(\tau)]}\right\}dx_1dx_2 \quad (2.58)$$

Формула Прайса лежит в основе метода производных.

Если представить функцию $f(x)$ из кусков полиномов, образующих в местах стыков угловые точки, то при достаточно большом k производная $f^{(k)}(x)$ будет равна сумме дельта – функций и вычисление интеграла (2.58) становится элементарным, используя фильтрующее свойство дельта – функции.

При использовании метода производных необходимо определять начальные условия. Например, при $k=1$ начальные условия определяются просто: в результате дифференцирования по формуле Прайса получаем некоторую функцию

$$\frac{dB_{2\eta}(\tau)}{db_2(\tau)} = \phi_1(b_2)$$

и далее находим

$$B_{2\eta}(\tau) = \int_0^{b_2(\tau)} \phi_1(b_2) db_2 + C,$$

причем $C = B_{2\eta}(\tau)|_{b_2=0} = B_{2\eta}(\infty) = m_{1\eta}^2$,

где $m_{1\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)W_1(x)dx$ - среднее значение выходного процесса.

При $k=2$ общее решение уравнения $\frac{d^2 B_{2\eta}(\tau)}{db_2^2(\tau)} = \phi_2(b_2)$ можно записать

в виде

$$B_{2\eta}(\tau) = \int_0^{b_2(\tau)} \phi_1(b_2) db_2 + \int_0^{b_2(\tau)} C db_2 + C_1,$$

где C - постоянная, появляющаяся после первого интегрирования.

$$\phi_1(b_2) = \int_0^{b_2(\tau)} \phi_2(b_2) db_2.$$

C и C_1 определяются из следующих соотношений:

$$B_{2\eta}(\tau)|_{b_2=0} = B_{2\eta}(\infty) = m_{1\eta}^2 = C_1 \quad \text{и} \quad B_{2\eta}(\tau)|_{b_2=1} = B_{2\eta}(0) = m_{1\eta}^2 + \sigma_\eta^2 = C,$$

где $\sigma_\eta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - m_1]^2 W_1(x) dx$ - дисперсия выходного процесса.

Пример. Определить корреляционную функцию случайного процесса на выходе идеального ограничителя при входном стационарном гауссовом шуме.

Для идеального ограничителя имеем

$$y = f(x) = \begin{cases} a_0 & \text{при } x \geq x_0 \\ 0 & \text{при } x < x_0 \end{cases}.$$

Однократное дифференцирование нелинейной зависимости дает дельта-функцию

$$f'(x) = a_0 \delta(x).$$

Используя формулу (2.58) при $k=1$, получим

$$\begin{aligned} \frac{dB_{2\eta}(\tau)}{db_2(\tau)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_0^2 \delta(x_1) \delta(x_2)}{2\pi \sqrt{1-b_2^2(\tau)}} \exp \left\{ -\frac{x_1^2 - 2b_2(\tau)x_1x_2 + x_2^2}{2\sigma^2 [1-b_2^2(\tau)]} \right\} dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{a_0^2}{2\pi \sqrt{1-b_2^2(\tau)}} \end{aligned}$$

При вычислении интегралов использовалось фильтрующее свойство дельта – функции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \delta(x - x_0) dx = \varphi(x_0) \quad \text{при } x_{01} = x_{02} = 0.$$

Определим начальные условия:

$$C = B_{2\eta}(\tau) \Big|_{b_2=0} = B_{2\eta}(\infty) = m_{1\eta}^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) W_1(x) dx \right]^2 = \left[\int_0^{\infty} \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \right]^2 = \frac{a_0^2}{4}.$$

Теперь определим корреляционную функцию выходного процесса

$$\begin{aligned} B_{2\eta}(\tau) &= C + \int_0^{b_2(\tau)} \frac{dB_{2\eta}(\tau)}{db_2} db_2 = \frac{a_0^2}{4} + \\ &+ \int_0^{b_2(\tau)} \frac{a_0^2}{2\pi \sqrt{1-b_2^2(\tau)}} db_2(\tau) = \frac{a_0^2}{4} \left[1 + \frac{2}{\pi} \arcsin b_2(\tau) \right]. \end{aligned}$$

Следует отметить, что при некоррелированном входном процессе $[b_2(\tau) = 0]$ корреляционная функция выходного процесса

$B_{2\eta}(\tau) = \frac{a_0^2}{4} = const$, коэффициент корреляции выходного процесса равен

нулю $\left[b_{2\eta}(\tau) = \frac{B_{2\eta}(\tau) - B_{2\eta}(\infty)}{B_{2\eta}(0)} = 0 \right]$, следовательно, выходной случайный

процесс также некоррелированный.

Пример. Определить корреляционную функцию случайного процесса на выходе линейного детектора, если на вход поступает стационарный гауссов шум с нулевым средним значением.

Характеристика детектора имеет вид

$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}.$$

Производная $f(x)$ в нашем случае обращается в нуль при повторном дифференцировании ($k = 2$), т.е.

$$f''(x) = \delta(x).$$

В соответствии с формулой (2.58) получаем

$$\frac{d^2 B_{2\eta}(\tau)}{db_2^2(\tau)} = \frac{\sigma^2}{2\pi\sqrt{1-b_2^2(\tau)}}.$$

После двукратного интегрирования имеем

$$B_{2\eta}(\tau) = \int_0^{b_2(\tau)} \frac{\sigma^2}{2\pi} \arcsin b_2(\tau) db_2(\tau) + \int_0^{b_2(\tau)} C db_2(\tau) + C_1 = \frac{\sigma^2}{2\pi} \sqrt{1-b_2^2(\tau)} + C b_2(\tau) + C_1$$

Начальные условия C и C_1 равны:

$$C = B_{2\eta}(0) = \frac{\sigma^2}{2} \quad \text{и} \quad C_1 = B_{2\eta}(\infty) = \frac{\sigma^2}{2\pi}.$$

Окончательно получаем

$$B_{2\eta}(\tau) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left\{ b_2(\tau) \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin b_2(\tau) \right] + \sqrt{1-b_2^2(\tau)} \right\}.$$

Пример. На вход устройства, состоящего из последовательно соединенных видеоусилителя с идеальной амплитудно-частотной характеристикой, ограниченной частотой ω_0 , и ограничителя, поступает белый гауссов шум с энергетическим спектром G . Коэффициент усиления видеоусилителя - k_0 . Определить корреляционную функцию на выходе устройства.

Корреляционная функция шума на выходе видеоусилителя будет равна

$$B_2(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} GK^2(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{k_0^2 G}{\pi} \int_0^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{k_0^2 G \omega_0}{\pi} \frac{\sin(\omega_0\tau)}{\omega_0\tau}.$$

Отсюда коэффициент корреляции и дисперсия на выходе видеоусилителя соответственно равны:

$$b_2(\tau) = \frac{\sin(\omega_0\tau)}{\omega_0\tau} \quad \text{и} \quad \sigma^2 = \frac{k_0^2 G \omega_0}{\pi}.$$

Используя решение предыдущей задачи с ограничителем, окончательно получим

$$B_{2\eta}(\tau) = \frac{a_0^2}{4} \left[1 + \frac{2}{\pi} \arcsin b_2(\tau) \right] = \frac{a_0^2}{4} \left[1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\sin(\omega_0\tau)}{\omega_0\tau} \right].$$

2.6. Огибающая и фаза случайного процесса

По заданному стационарному случайному процессу $\xi(t)$ можно с помощью преобразования Гильберта образовать новый, сопряженный $\xi(t)$, стационарный случайный процесс $\eta(t)$

$$\eta(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{\xi(t)}{t-\tau} d\tau. \quad (2.59)$$

Случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ можно представить в виде

$$\xi(t) = E(t) \cos \phi(t) \quad (2.60)$$

и
$$\eta(t) = E(t) \sin \phi(t). \quad (2.61)$$

Случайные процессы $E(t)$ и $\phi(t)$, в свою очередь, можно выразить через $\xi(t)$ и $\eta(t)$:

$$E(t) = \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}, \quad (2.62)$$

$$\phi(t) = \operatorname{arctg} \frac{\eta(t)}{\xi(t)}. \quad (2.63)$$

Эти случайные процессы $E(t)$ и $\phi(t)$ называются соответственно огибающей и фазой случайного процесса $\xi(t)$.

Особый интерес рассмотренное представление приобретает для узкополосных случайных процессов. Будем считать, $\xi(t)$ - стационарный случайный процесс на выходе узкополосной линейной системы с резонансной частотой ω_0 . Представим $\phi(t)$ в виде

$$\phi(t) = \omega_0 t - \varphi(t). \quad (2.64)$$

Подставляя (2.64) в (2.60), получим следующее выражение для узкополосного случайного процесса

$$\xi(t) = E(t) \cos[\omega_0 t - \varphi(t)] = E(t) \cos \varphi(t) \cos(\omega_0 t) + E(t) \sin \varphi(t) \sin(\omega_0 t). \quad (2.65)$$

Обозначим: $A(t) = E(t) \cos \varphi(t)$, $C(t) = E(t) \sin \varphi(t)$, получим

$$\xi(t) = A(t) \cos(\omega_0 t) + C(t) \sin(\omega_0 t). \quad (2.66)$$

Из формулы (2.65) следует

$$E(t) = \sqrt{A^2(t) + C^2(t)}, \quad (2.67)$$

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{C(t)}{A(t)}. \quad (2.68)$$

При наличии детерминированной составляющей огибающую и фазу можно записать в виде

$$E(t) = \sqrt{[A(t) + u(t)]^2 + [C(t) + v(t)]^2}, \quad (2.69)$$

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{C(t) + v(t)}{A(t) + u(t)}, \quad (2.70)$$

где по аналогии со случайным процессом

$a(t) = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}$ - огибающая детерминированного узкополосного процесса.

Найдем одномерные функции распределения огибающей $E(t)$ и фазы $\varphi(t)$ стационарного нормального случайного процесса $\xi(t)$.

Если $\xi(t)$ - нормальный процесс, то $A(t)$ и $C(t)$ также нормальные случайные процессы, независимые в совпадающие моменты времени, а их

дисперсии совпадают с дисперсией σ^2 процесса $\xi(t)$. Следовательно, совместное распределение $A(t)$ и $C(t)$ равно произведению одномерных плотностей вероятностей этих случайных процессов

$$W_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.71)$$

Для определения функций распределения огибающей и фазы перейдем в соответствии с (2.69) и (2.70) к полярным координатам. Якобиан преобразования

$$\begin{aligned} A(t) &= E(t)\cos\varphi(t) - u(t), \\ C(t) &= E(t)\sin\varphi(t) - v(t) \end{aligned}$$

от переменных x и y к переменным ρ и ν равен

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \nu)} = \begin{vmatrix} \cos\nu & -\rho\sin\nu \\ \sin\nu & \rho\cos\nu \end{vmatrix} = \rho.$$

Таким образом, совместная плотность вероятностей огибающей и фазы узкополосного случайного процесса примет вид

$$\begin{aligned} W_2(\rho, \nu, t) &= \rho W_2(x, y) = \rho W_2(\rho\cos\nu, \rho\sin\nu) = \\ &= \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{[\rho\cos\nu - u(t)]^2 + [\rho\sin\nu - v(t)]^2}{2\sigma^2}\right\} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Из (2.72) путем интегрирования находим одномерные плотности вероятностей огибающей и фазы узкополосного случайного процесса.

$$\begin{aligned} W_1(\rho) &= \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \exp\left\{-\frac{[\rho\cos\nu - u(t)]^2 + [\rho\sin\nu - v(t)]^2}{2\sigma^2}\right\} d\nu = \\ &= \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2+a^2(t)}{2\sigma^2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{\rho a(t)}{\sigma^2} \cos(\nu - \theta)\right] d\nu, \quad \rho > 0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

где $\theta = \operatorname{arctg} \frac{v(t)}{u(t)}$.

Интеграл в формуле (2.73) путем замены $\nu - \theta = \zeta$ приводится к функции Бесселя первого рода нулевого порядка от мнимого аргумента

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{2\pi-\theta} e^{-j\left[\frac{\rho a(t)}{\sigma^2}\right] \cos\zeta} d\zeta = J_0\left[\frac{\rho a(t)}{\sigma^2} e^{j\frac{\pi}{2}}\right] = I_0\left[\frac{\rho a(t)}{\sigma^2}\right],$$

где $I_0(z)$ - модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Таким образом, одномерная плотность вероятностей огибающей узкополосного нормального случайного процесса принимает вид

$$W_1(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{\rho^2 + a^2(t)}{2\sigma^2}\right] I_0\left[\frac{\rho a(t)}{\sigma^2}\right], \quad \rho > 0,$$

$$W_1(\rho) = 0, \quad \rho < 0. \quad (2.74)$$

Из выражения (2.74) видно, что одномерная функция распределения огибающей узкополосного нормального случайного процесса совпадает с обобщенным законом Релея (законом Райса). С увеличением отношения a/σ функция распределения огибающей приближается к гауссову распределению.

При отсутствии детерминированного процесса функция распределения огибающей нормального узкополосного процесса переходит в обычный релеевский закон распределения:

$$W_1(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}, \quad \rho > 0,$$

$$W_1(\rho) = 0, \quad \rho < 0. \quad (2.75)$$

Начальные моменты огибающей вычисляются по формуле

$$m_k = m_1 \{E^k(t)\} = (2\sigma^2)^{k/2} \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) M\left[-\frac{k}{2}, 1, -\frac{a^2(t)}{2\sigma^2}\right], \quad (2.76)$$

где:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt - \text{гамма - функция,}$$

$$M(a, b, z) = 1 + \frac{a z}{b 1!} + \frac{a(a+1) z^2}{b(b+1) 2!} + \frac{a(a+1)(a+2) z^3}{b(b+1)(b+2) 3!} + \dots - \text{вырожденная}$$

(конфлюэнтная) гипергеометрическая функция Куммера.

При отсутствии детерминированной составляющей (при отсутствии сигнала) выражение (2.76) принимает вид

$$m_k = (2\sigma^2)^{k/2} \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right). \quad (2.77)$$

Функцию распределения фазы узкополосного нормального случайного процесса определим, проинтегрировав зависимость (2.72):

$$W_1(\nu) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{\infty} \rho \exp\left\{-\frac{[\rho \cos \nu - u(t)]^2 + [\rho \sin \nu - v(t)]^2}{2\sigma^2}\right\} d\rho =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{u^2(t)+v^2(t)}{2\sigma^2}} \int_0^{\infty} \rho \exp\left\{-\frac{\rho^2 - 2\rho[u(t)\cos \nu + v(t)\sin \nu]}{2\sigma^2}\right\} d\rho =$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{a^2(t)}{2\sigma^2}} \int_0^\infty \rho \exp\left[-\frac{\rho^2 - 2\rho a(t)\cos(\nu - \theta)}{2\sigma^2}\right] d\rho. \quad (2.78)$$

Дополним показатель экспоненты до полного квадрата и получим [3]:

$$\begin{aligned} W_1(\nu) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{a^2(t)}{2\sigma^2}} e^{\frac{a^2(t)}{2\sigma^2} \cos^2(\nu - \theta)} \int_0^\infty \rho \exp\left\{-\frac{[\rho - a(t)\cos(\nu - \theta)]^2}{2\sigma^2}\right\} d\rho = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{a^2(t)}{2\sigma^2} \sin^2(\nu - \theta)} \int_{-a(t)\cos(\nu - \theta)}^\infty [\rho + a(t)\cos(\nu - \theta)] e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\rho = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{a^2(t)}{2\sigma^2}} + \frac{a(t)\cos(\nu - \theta)}{\sigma\sqrt{2\pi}} F\left[\frac{a(t)}{\sigma}\cos(\nu - \theta)\right] e^{-\frac{a^2(t)}{2\sigma^2} \sin^2(\nu - \theta)}, \quad |\nu - \theta| \leq \pi, \end{aligned}$$

где $F[z]$ - интеграл вероятностей.

При отсутствии детерминированной составляющей $[a(t) = 0, \theta = 0]$ функция распределения фазы принимает вид

$$W_1(\nu) = \frac{1}{2\pi}, \quad |\nu| \leq \pi,$$

что соответствует равномерному распределению фазы узкополосного стационарного случайного процесса.

3. Приложение. Некоторые функции и определенные интегралы

Интеграл вероятностей и его модификации:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \text{интеграл вероятностей,}$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \text{интегральная функция Лапласа,}$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt - \text{функция Крампа,}$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf}(x), \quad \operatorname{erf}(x) = 2F(x\sqrt{2}) - 1,$$

$$\operatorname{erf}(x) = \int_0^{x^2} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right), \quad \text{где } \gamma(a, z) = \int_0^z e^{-t} t^{a-1} dt - \text{неполная}$$

гамма- функция,

$x e^{-x^2} \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$ - дополнительный интеграл вероятностей.

$$\left. \begin{aligned} \sigma(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau \\ s(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma(\tau)}{t-\tau} d\tau \end{aligned} \right\} \text{ пара преобразований Гильберта.}$$

Некоторые определенные интегралы:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}, \quad \int_0^{\infty} t^2 e^{-a^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-at} \cos(2xt) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{x^2}{a}}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\exp(-at)}{\sqrt{t+x^2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{ax^2} \operatorname{erfc}(x\sqrt{a}),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp(-at^2)}{t^2+x^2} dt = \frac{\pi}{2x} e^{ax^2} \operatorname{erfc}(x\sqrt{a}),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp(-at^2)}{t+x} dt = e^{-ax^2} \left[\sqrt{\pi} \int_0^{\sqrt{ax}} e^{t^2} dt - \frac{1}{2} Ei(ax^2) \right]$$

где

$$Ei(y) = \int_y^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \text{ - интегральная показательная функция.}$$

$$(|\arg y| < \pi)$$

Литература

1. Зиновьев А.Л., Филиппов Л.И. Методы аналитического выражения радиосигналов. - М.: Высшая школа, 1966. – 104 с.
2. Анго А. Математика для электро – и радиоинженеров. – М.: наука, 1965. – 780 с.
3. Левин Б.Р. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1960. – 663 с.
4. Лебедько Е.Г. Аналитическое представление сигналов и помех в оптико-электронных системах / Уч. Пособие. – Л.: 1983. – 60 с.
5. Заездный А.М. Основы расчетов по статистической радиотехнике.- М.: Связь, 1969. – 447 с.
6. Горяинов В.Т., Журавлев А.Г., Тихонов В.И. Примеры и задачи по статистической радиотехнике. – М.: Сов. Радио, 1970. – 598 с.
7. Липкин И.А. Основы статистической радиотехники, теории информации и кодирования. – М.: Сов. Радио, 1978. – 238 с.
8. Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. – М.: Сов. Радио, 1978. – 320 с.
9. Справочник по специальным функциям / Под ред. М Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
10. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1968. – 344 с.
11. Фельдбаум А.А. и др. Теоретические основы связи и управления. –М.: Физматгиз, 1963. – 932 с.
12. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1968. – 464 с.

Содержание

Часть 1. Аналитическое представление сигналов и помех	3
1.1. Подходы к задаче об аналитическом представлении детерминированных процессов.....	4
1.2. Разложение периодических детерминированных процессов в ряд Фурье.....	8
1.3. Интегральное преобразование Фурье.....	12
1.4. Свойства преобразование Фурье.....	15
1.5. Энергия взаимодействия двух процессов. Равенство Рэлея.....	18
1.6. Преобразование Лапласа.....	20
1.7. Корреляционный анализ детерминированных процессов.....	23
1.8. Дельта – функция и ее свойства.....	28
1.9. Классификация и функции распределения случайных процессов.....	30
1.10. Стационарные и нестационарные случайные процессы. Эргодические случайные процессы.....	33
1.11. Функциональное преобразование случайных процессов.....	35
1.12. Характеристическая функция и ее свойства.....	38
1.13. Энергетические характеристики случайного процесса.....	42
1.14. Совместное распределение случайных процессов.....	47
1.15. Некоторые свойства случайных процессов.....	49
1.16. Узкополосные и широкополосные случайные процессы.....	52
1.17. Нормальный случайный процесс и его производная.....	54
1.18. Задача о выбросах случайного процесса.....	57
Часть 2. Прохождение сигнала и шума через линейные и нелинейные устройства.....	60
2.1 Краткие сведения о линейных устройствах.....	60
2.2 Преобразование детерминированных и случайных процессов в линейных устройствах электронного тракта.....	62
2.3 Прохождение белого шума через линейное устройство.....	66
2.4 Преобразование случайных процессов в нелинейных устройствах.....	69
2.5 Вычисление корреляционной функции выходного процесса при стационарном гауссовом входном шуме.....	72
2.6. Огибающая и фаза случайного процесса.....	79
3. Приложение. Некоторые функции и определенные интегралы.....	83
Литература.....	85



КАФЕДРА ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ И СИСТЕМ (ОЭПиС)

История кафедры началась в 1936 году с организации в ЛИТМО кафедры военных оптических приборов. Первым заведующим кафедрой был К.Е. Солодилов, до этого возглавлявший ЦКБ ВООМП. Преподавателями кафедры стали сотрудники этого ЦКБ - М.А. Резунов, М.Я. Кругер, С.Т. Цуккерман, В.А. Егоров, Б.М. Кулижанов.

В годы Великой Отечественной войны кафедра была эвакуирована в Черепаново, где ее объединили с кафедрой оптико-механических приборов под руководством профессора А.И. Захарьевского. После возвращения в Ленинград кафедрой в 1945-46 годах по совместительству заведовал начальник КБ ГОИ М.А. Резунов.

В начале 1947 года кафедру возглавил профессор С.Т. Цуккерман, который руководил ею до 1972 года. В 1958 году кафедра была реорганизована в кафедру специальных оптических приборов, а в 1967 году в кафедру оптико-электронных приборов (ОЭП).

В предвоенные, военные и послевоенные годы С.Т. Цуккерман работал над созданием прицельных устройств для зенитной и авиационной артиллерии. Он был одним из создателей серийного авиационного гироскопического прицела АСП с автоматической выработкой поправки на упреждение, который устанавливался на истребителях МиГ, а также механического ракурсного прицела для мелкокалиберной зенитной артиллерии, широко применяемого во время войны во Вьетнаме.

В 1958 г. при кафедре была организована отраслевая лаборатория "Специальные оптические приборы" с достаточно сильной группой конструкторов-разработчиков.

С.Т. Цуккерман и А.С. Гридин руководили разработкой приборов управления по лучу (ПУЛ-ов), предназначенных для управления движением различных подвижных объектов по прямой линии или по программе.

В начале 60-х годов Г.Г. Ишанин занимался разработкой фотометрической аппаратуры предназначенной для паспортизации оптико-электронных приборов и систем различного назначения.

В 1965 году Г.Г. Ишаниным разработана теория, методы расчета и проектирования, технология и конструктивные решения приемников на основе термоупругого эффекта в кристаллическом кварце. Приемники на термоупругом эффекте внедрены в серийное производство. На основе этих приемников разработаны и внедрены в производство измерители параметров лазерного излучения. Научно-исследовательские работы, проведенные в указанном направлении, легли в основу учебной дисциплины "Источники и приемники излучения".

Значительное влияние на содержание подготовки специалистов и научных исследований оказало привлечение к работе на кафедре члена-корреспондента РАН, Героя Социалистического Труда, лауреата Ленинской премии профессора М.М. Мирошникова, который работал на кафедре ОЭП с 1969 года по 1976 год в

должности профессора по совместительству поставил и читал курс "Теория оптико-электронных приборов".

С 1972 года по 1992 год кафедрой ОЭП заведовал Заслуженный деятель науки и техники РСФСР, профессор Л.Ф. Порфирьев, известный специалист в области автоматических ОЭПиС в комплексах навигации и управления авиационной и космической техникой. Соответственно тематика выполнения научно-исследовательских работ на кафедре приобрела новые направления, существенно увеличилось число тем, носящих поисковый фундаментальный характер. Были разработаны новый учебный план и программы учебных дисциплин.

Л.Ф. Порфирьев как руководитель проводил достаточно жесткую кадровую политику, при которой на кафедре оставались работать только те сотрудники, которые отличались преданностью делу. При этом он оказывал всемерную поддержку сотрудникам кафедры по разработке ими различных направлений теории и практики оптико-электронного приборостроения.

По результатам научно-исследовательских работ в этот период защитили диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук Г.Н. Грязин (1983 г.), Е.Г. Лебедев (1985 г.), Э.Д. Панков (1986 г.), Г.Г. Ишанин (1988 г.), защищено много диссертаций на соискание ученой степени кандидата технических наук.

В этот период под руководством Э.Д. Панкова начали проводиться исследования по разработке новых оптико-электронных систем измерения взаимного положения разнесенных в пространстве объектов. Результаты указанных работ были использованы при постановке курса "Настройка и испытания оптико-электронных приборов".

Доцент Грязин Г.Н., перешедший на кафедру с радиотехнического факультета в 1972 году, продолжил свои работы в области прикладного телевидения, им были заложены основы телевидения быстропротекающих процессов.

С 1975 года заведующим отраслевой лабораторией стал А.Н. Тимофеев, который продолжил исследования по разработке методов и средств контроля пространственного положения объектов с помощью ОЭП с оптической равносигнальной зоной для машиностроения, энергетики, строительства, судостроения и железнодорожного транспорта.

С 1975 года, после увольнения в запас, из ЛВИКА им. А.Ф. Можайского на кафедру пришел работать в должности профессора С.П. Авдеев, известный специалист в области ОЭПиС космических аппаратов. Он поставил курсы и читал лекции по учебным дисциплинам "Оптико-электронные приборы", "Оптико-электронные приборы систем управления", "Оптико-электронные приборы для научных исследований".

Существенное влияние на содержание подготовки специалистов и научных исследований оказало привлечение к работе на кафедре лауреата Ленинской и Государственной премий профессора Б.А. Ермакова, известного специалиста в области физической оптики, и оптико-электронного приборостроения. Б.А. Ермаков работал на кафедре ОЭП с 1979 года по 1992 год в должности профессора по совместительству и поставил курс "Оптико-электронные приборы с лазерами".

В 70-80 годах под руководством Е.Г. Лебедева проводились исследования законов отражения лазерного излучения от нестационарных поверхностей и протяженных объектов, исследования в области теории идентификации объектов по их излучению в сложной фоновой ситуации. Создан комплекс для лазерной локации крупногабаритных морских объектов сложной конфигурации и водной поверхности. В этих работах принимали участие доценты О.П. Тимофеев и С.Б. Лукин. Результаты, полученные в

рамках этих исследований, нашли применение в учебных курсах: "Оптико-электронные системы локации и связи", "Оптоэлектронные системы автоматизации технологических процессов" и "Прикладная оптика".

В 70-90 годах под руководством Л.Ф. Порфирьева был разработан ряд астродатчиков, систем астроориентации и космической навигации (В.И. Калинин, А.Л. Андреев, С.Н. Ярышев).

С 1992 г. заведующим кафедрой является Заслуженный деятель науки Российской Федерации, профессор Э.Д. Панков. В 1992 году кафедра была переименована в кафедру оптико-электронных приборов и систем (ОЭПиС).

Под руководством Э.Д. Панкова в 70-90-х годах были проведены разработки ряда оптико-электронных приборов и систем специального и гражданского применения, нашедших практическое внедрение и способствующих научно-техническому прогрессу и укреплению обороноспособности нашей страны.

В частности исследования и разработки в области линейных и угловых измерений позволили приступить к решению общей проблемы согласования отсчетных баз на нестационарно деформируемых объектах с помощью оптико-электронных систем.

В рамках указанной проблемы И.А. Коняхиним проводились исследования, результаты которых можно классифицировать как разработку теории построения автоколлимационных систем с компонентами нарушенной типовой конфигурации.

В то же время В.В. Коротаяевым разработан ряд поляризационных приборов и измерительных установок. Теоретическим результатом работ явилась разработка методологии анализа поляризационных свойств оптических систем с изменяющейся ориентацией элементов.

По результатам указанных работ В.В. Коротаяев (в 1997 г.) и И.А. Коняхин (в 1998г.) защитили диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук.

Применение многоэлементных приемников в системах пеленгации дало толчок развитию телевизионных систем технического зрения, измерительных телевизионных систем и систем обработки изображений. Результаты этих исследований были использованы А.Л. Андреевым при постановке учебных курсов "Оптико-электронные системы с ЭВМ", "Специализированные аппаратные и программные средства ОЭП", "Автоматизированные телевизионные вычислительные комплексы", а также С.Н. Ярышевым при постановке им в 1993 году учебной дисциплины "Видеотехника".

В этот период Г.Н. Грязиним были подготовлены дисциплинам: "Телевизионные системы", "Прикладное телевидение и телевизионно-вычислительные комплексы" (совместно с А.Л. Андреевым).

На основе обобщения методик расчета оптико-электронных систем различного назначения и принципа действия в 1981 году были развернуты работы по созданию элементов систем автоматизированного проектирования ОЭП. За период с 1981 по 1987 год под руководством Коняхина И.А. были разработаны оригинальные пакеты прикладных программ расчета параметров систем измерения пространственного положения объектов.

Развитие компьютерной техники и программного обеспечения общего назначения позволило создать проблемно-ориентированное программное обеспечение поддержки проектирования ОЭП на системотехническом уровне. Указанные материалы легли в основу лекционного курса и лабораторного практикума "Компьютерные технологии проектирования ОЭС".

В 1992 году было принято решение об организации филиала кафедры ОЭПиС на базе ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, который в 1997 году вырос в базовую кафедру экологического приборостроения и мониторинга. К настоящему моменту осуществлено 3 выпуска по специализации «Опτικο-электронные методы и средства экологического мониторинга».

Совместными усилиями сотрудников кафедры ОЭПиС и базовой кафедры экологического приборостроения и мониторинга поставлен ряд учебных дисциплин, которые позволяют осуществлять экологическую подготовку как для выпускников кафедры ОЭПиС, так и для выпускников других кафедр университета. Для обеспечения экологической подготовки специалистов создана лаборатория "Опτικο-электронные приборы и системы экологического мониторинга".

По результатам научных работ сотрудниками кафедры ОЭПиС выпущено в свет 15 монографий, 11 учебников и учебных пособий. На кафедре подготовлено 14 докторов наук, а также более 110 кандидатов наук.

На разработки кафедры получены авторские свидетельства СССР и патенты Российской Федерации на более чем 200 изобретений. За все время существования кафедры подготовлено более 3000 инженеров.

Таким образом, трудом нескольких поколений сотрудников кафедры ОЭПиС в результате большой научно-исследовательской и научно-методической работы сформировалась современная система подготовки специалистов (инженеров) по специальности

19.07.00 - "Опτικο-электронные приборы и системы" по специализациям:

- 19.07.01 - опτικο-электронные информационно-измерительные и следящие приборы и системы;
- 19.07.02 - опτικο-электронные методы и средства экологического мониторинга;
- 19.07.08 - Техника оптической локации и связи;
- 19.07.27 - Опτικο-электронные приборы и системы обработки видеoinформации.

В связи с внедрением двухуровневой подготовки по схеме бакалавр-магистр кафедра ОЭПиС провела необходимую методическую работу и в настоящее время осуществляет подготовку бакалавров и магистров по направлению

55.19.00 - "Опготехника"

а также магистров по программам

- 551902 - Оптические и опτικο-электронные приборы,
- 551903 - Оптические системы локации, связи и обработки информации,
- 551915 – Опτικο-электронные методы и средства обработки видеoinформации

Сегодня кафедра ОЭПиС - это 7 учебных лабораторий, компьютерный класс с выходом в Internet, это, прежде всего, высококвалифицированный преподавательский коллектив, в котором 7 профессоров, докторов наук и 7 доцентов, кандидатов наук.

Лебедько Евгений Георгиевич

**Математические основы передачи информации
(Часть 1 и 2)**

Учебное пособие

В авторской редакции

Компьютерное макетирование

Зав. Редакционно-издательским отделом СПбГУИТМО

Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99

Подписано к печати 11.02.05

Отпечатано на ризографе. Тираж 100 экз. Заказ № _____

Е.Г.Лебедько

Н.Ф.Гусарова