Смирнов С.А. Преобразования оптических сигналов. Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2008. – 113с.

В учебном пособии, являющемся разделом модуля инновационного учебно-методического комплекса по дисциплине «Лазерные информационно-измерительные технологии», рассмотрены основные типы непрерывных интегральных преобразований часто используемых в когерентной оптике при описании оптических явлений, их основные свойства, позволяющие достаточно просто «конструировать» искомые решения, примеры интегральных образов типовых оптических сигналов, а также пример использования интегральных преобразований в задаче исследования фазовых объектов методами пространственной оптической фильтрации. Рассмотрены примеры решений и представлен ряд задач для самостоятельной работы, а также приведены основные термины и определения, используемые в когерентной оптике. Пособие содержит: стр. -113, илл. - 24, табл. - 3.

Учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов, обучающихся в магистратуре по программам «Лазерные биомедицинские технологии» и «Лазерные микро- и нанотехнологии», а также бакалавров и специалистов по направлению подготовки 200200 «Оптотехника» и специальности 200201 «Лазерная техника и лазерные технологии».

Рекомендовано к печати решением Ученого Совета Инженерно-физического факультета от 13 мая 2008г., протокол № 9.

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

©Санкт-Петербургский государственный университет

информационных технологий, механики и оптики, 2008

© С.А. Смирнов, 2008

ВВЕДЕНИЕ

Спектральный анализ сигналов и систем их обработки уже достаточно давно и прочно занял свое место в разнообразных оптических задачах, связанных с исследованием методов и созданием оптико-электронных приборных комплексов информационно-измерительного назначения. В основе такого подхода лежит предположение, сделанное французским математиком Жаном Батистом Жозефом Фурье о возможности представления функций, описывающих сложный колебательный процесс, в виде совокупности отдельных гармонических составляющих со своими амплитудами и фазами. В период с 1802 г. по 1807 г., занимаясь проблемой распространения тепла в твердом теле, он вывел уравнение теплопроводности и нашел метод его решения в форме интегрального преобразования получившего его имя [ ]. В начале XIX века многие выдающиеся математики, в том числе, такие как Лагранж, Лаплас, Лежандр, Био и Пуассон, не принимали утверждения Фурье о том, что любое исходное распределение температуры можно разложить на составляющие в виде главной гармоники и гармоник высших частот. Когда Фурье огласил свое утверждение на одном из заседаний Французской академии наук, Лежандр заявил, что это невозможно. Тем не менее, академия не могла игнорировать значение результатов, полученных Фурье, и удостоила его премии за математическую теорию законов теплопроводности и сравнение результатов его теории с точными физическими экспериментами, сопроводив следующей ремаркой: «…Исходя из новизны предмета исследований и его важности, мы решили присудить премию, отмечая в то же время, что путь, которым автор приходит к своим уравнениям, не свободен от затруднений, и что анализ, проведенный им при их интегрировании, оставляет желать несколько большей общности, равно как и строгости». В подходе Фурье основное возражение было связано с тем, что функция, имеющая разрыв первого рода может быть представлена суммой синусоидальных функций, являющихся непрерывными. Современники Фурье никогда не сталкивались с ситуацией, когда разрывная функция описывалась бы комбинацией обычных, непрерывных функций, таких как линейная, квадратичная, экспонента или синусоида. Однако если Фурье был прав в своих предположениях, то сумма бесконечного ряда тригонометрических функций должна сходиться к точному представлению ступенчатой функции, даже тогда, когда у функции много таких ступенек. В то время это утверждение казалось абсурдным. Тем не менее, несмотря на эти сомнения, многие исследователи начали расширять сферу исследований Фурье, выведя их за пределы анализа теплопроводности. Вопрос о сходимости рядов Фурье в очередной раз возник в конце XIX века в связи с попытками предсказания интенсивности приливов и отливов. Лорд Кельвин изобрел аналоговое вычислительное устройство, позволяющее механически определять наборы амплитуд и фаз по таблице

приливных высот и соответствующих моментов времени, замеренных на протяжении года в конкретной гавани. Каждая амплитуда и фаза представляли синусоидальную компоненту функции высоты прилива и были одной из периодических составляющих. Результаты вводились в вычислительное устройство, которое синтезировало кривую, предсказывающую высоту прилива как функцию времени. Вскоре подобные кривые приливов были составлены для всех портов мира.

Анализ Фурье остается неприменимым к необычным функциям, в частности к таким, которые содержат бесконечное количество конечных скачков на конечном интервале задания. Однако, в общем ряд Фурье всегда сходится, если исходная функция представляет собой результат реального физического измерения. Вопрос о сходимости рядов Фурье для тех или иных классов функций привел к появлению новых областей в математике. Одним из примеров является теория обобщенных функций (распределений), сформировавшаяся в 60-х годах XX века. В рамках этой теории были четко определены такие сингулярные функции, как дельта-функция Дирака, ступенька Хевисайда и другие, которые появились значительно ранее и «незаконно» использовались в радиотехнике, электротехнике, теории связи. Благодаря этой теории преобразование Фурье стало применимым для решения уравнений, в которых фигурируют такие абстрактные понятия, как точечная масса, точечный заряд, точечный источник света, магнитные диполи, сосредоточенная нагрузка на балке, идеальная граница раздела двух сред со скачкообразным изменением их свойств и т.п.

Развивавшаяся на протяжении почти двух столетий теория, связанная с преобразованием Фурье, почти окончательно сформировалась. При помощи анализа Фурье пространственная или временная функция разбивается на синусоидальные составляющие, каждая из которых имеет свою частоту, амплитуду и фазу. Преобразование Фурье – это функция, представляющая амплитуду и фазу, соответствующие каждой частоте («временной» или «пространственной»). Преобразование можно получить двумя различными математическими методами, один из которых применяется, когда исходная функция непрерывна, а другой – когда она состоит из множества отдельных дискретных измерений. Независимо от способа получения преобразования, для каждой частоты необходимо указать два действительных числа, которые можно выразить в виде одного комплексного числа. Таким представлением пользуются очень широко, так как оно позволяет использовать математический аппарат алгебры комплексных чисел. Теория функций комплексных переменных и преобразование Фурье стали необходимыми в численных расчетах, моделирующих процессы в цепях электрических сигналов, механические колебания твердого тела, распространение электромагнитных волн в различных средах, в цифровой обработке изображений и т.п. В настоящее время изучение преобразования Фурье главным образом сводится к поиску эффективных способов перехода от самой функции к ее интегральному образу и обратно. Чтобы вычислить интеграл Фурье и произвести преобразование, можно воспользоваться

аналитическими методами, и, хотя при этом могут возникнуть определенные трудности, многие интегралы Фурье уже найдены и присутствуют в математических справочниках. Кроме того, эти методы существенно упрощаются при изучении и использовании свойств преобразования Фурье. С их помощью можно сводить сложные решения к известным, более простым. Современные математические пакеты позволяют эффективно реализовать численные методы расчета для функций, форма которых основана на экспериментальных данных, или не являющихся аналитическими. Один такой метод был разработан в 1965 г. Джеймсом У. Кули и Джоном У. Тьюки. Их работа привела к созданию алгоритма и программы, получившей известность как быстрое преобразование Фурье.

Наряду с упомянутым и самым известным интегральным преобразованием, в когерентной оптике достаточно часто встречаются и другие, например, преобразование Гильберта, давшее название целому оптическому направлению. Поэтому в данном учебном пособии на основе подобранных материалов рассмотрены общие свойства интегральных преобразований с ядром класса Фурье, которые обладают свойством обратимости и допускают построение многокаскадных оптических систем обработки информации. Принцип изложения является традиционным и основан на свойствах преобразования оптических сигналов в линейных системах, которые в общем случае могут быть стохастическими в связи с процессами формирования оптического поля источниками излучения, а также наличием шумов и помех в трактах передачи и приемных устройствах.

Пособие предназначено для самостоятельной работы студентов и преследует цель, если не восполнить пробел в области математического аппарата, необходимого для изучения специальных дисциплин направления подготовки, то, по крайней мере, помочь сформировать индивидуальную траекторию обучения в данной области.

1. СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ

Начиная с 30-х годов XX века постепенно расширялись и крепли связи между оптикой и электротехническими дисциплинами: теорией информации и теорией связи. Эта тенденция понятна, так как системы связи, аналогично системам, создающим изображения, предназначены для накопления или передачи информации. В первом случае информация носит обычно временную природу, в то время как во втором случае она имеет пространственную природу, но это отличие, если подходить к вопросу с абстрактной точки зрения, довольно несущественно. Вероятно, более глубокая связь заключена в сходстве используемого математического аппарата, а именно анализа Фурье и теории систем. Основной причиной такого сходства служит не только общий интерес к информации, но и существование определенных фундаментальных свойств, присущих как системам связи, так и системам, создающим изображение. Например, многим электронным схемам, так же как и приборам, создающим изображение, присущи такие свойства, как линейность и инвариантность. Любую схему или прибор (электронный, оптический, акустический или иного типа), обладающий этими двумя свойствами можно довольно просто описать математически, используя, например методы спектрального анализа. Таким образом, если усилитель низкой частоты удобно описывать, пользуясь его временной частотной характеристикой, то систему, создающую изображение столь же удобно описывать, пользуясь ее пространственной частотной характеристикой. Сходство между системами не исчезает, если они не обладают свойствами линейности и инвариантности. У некоторых нелинейных оптических элементов соотношение между входным и выходным сигналами совершенно аналогичны соответствующим характеристикам нелинейных элементов электронных схем, так что и в этом случае могут быть использованы близкие математические методы. Особенно важно подчеркнуть, что сходство математических методов можно использовать не только для анализа, но и синтеза систем с заданными свойствами. Подобно тому, как сознательно в соответствии с заданной программой можно управлять спектром временной функции, можно любым наперед заданным образом изменять спектр пространственной функции.

Кратко рассмотрим основные понятия и определения, впервые введенные в теории связи, точнее, в ее составной части – теории сигналов. Термин «сигнал» является общепринятым для характеристики формы представления данных, при которой данные рассматриваются как результат некоторых измерений объекта исследований в виде последовательности значений скалярных величин (аналоговых, числовых, графических и пр.) в зависимости от изменения каких-либо переменных значений (времени, энергии, температуры, пространственных координат, и пр.). С учетом этого, в дальнейшем под термином «сигнал» в узком смысле этого слова будем

понимать ***отображение*** в изменении физического состояния какого-либо объекта – материального носителя сигнала, определенных данных о характере изменения в пространстве, во времени или по любой другой переменной физических величин, физических свойств или физического состояния объекта исследований. А так как данные содержат информацию, как об основных целевых параметрах объекта исследований, так и о различных сопутствующих и мешающих факторах измерений, то в широком смысле этого слова можно считать, что сигнал является носителем общей измерительной информации. При этом материальная форма носителей сигналов (механическая, электрическая, магнитная, акустическая, оптическая и любая другая), равно как и форма отображения в каких-либо физических параметрах или процессах носителей, значения не имеет. Информативным параметром сигнала может являться любой параметр носителя сигнала, функционально связанный со значениями информационных данных.

Сигнал, в самом общем смысле, это зависимость одной величины от другой, и с математической точки зрения представляет собой функцию. Наиболее распространенное представление сигналов - в электрической форме в виде зависимости напряжения от времени U(t).

Рис. 1.1 Сигнал

Сигнал - это информационная функция, несущая сообщение о физических свойствах, состоянии или поведении какой-либо физической системы, объекта или среды, а целью обработки сигналов можно считать извлечение определенных информационных сведений, которые отображены в этих сигналах и преобразование этих сведений в форму, удобную для восприятия и дальнейшего использования.

Под «анализом» сигналов имеется в виду не только их чисто математические преобразования, но и получение на основе этих преобразований выводов о специфических особенностях соответствующих процессов и объектов. Целями анализа сигналов обычно являются:

- определение или оценка числовых параметров сигналов (энергия, средняя мощность, среднее квадратическое значение и т.п.).
- разложение сигналов на элементарные составляющие для сравнения свойств различных сигналов.
- сравнение степени близости, «схожести», различных сигналов, в том числе с определенными количественными оценками.

Математический аппарат анализа сигналов весьма обширен, и широко применяется на практике во всех без исключения областях науки и техники.

С понятием сигнала неразрывно связан термин ***регистрации*** сигналов, использование которого также широко и неоднозначно, как и самого термина сигнал. В наиболее общем смысле под этим термином можно понимать операцию выделения сигнала и его преобразования в форму, удобную для дальнейшего использования. Так, при получении информации о физических свойствах каких-либо объектов, под регистрацией сигнала понимают процесс измерения физических свойств объекта и перенос результатов измерения на материальный носитель сигнала или непосредственное энергетическое преобразование каких-либо свойств объекта в информационные параметры материального носителя сигнала (как правило - электрического). Но так же широко термин регистрации сигналов используют и для процессов выделения уже сформированных сигналов, несущих определенную информацию, из суммы других сигналов (радиосвязь, телеметрия и пр.), и для процессов фиксирования сигналов на носителях долговременной памяти, и для многих других процессов, связанных с обработкой сигналов.

Шумы и помехи. При приеме сигналов, несущих целевую информацию, в сумме с основным сигналом одновременно регистрируются и мешающие сигналы - шумы и помехи самой различной природы (рис. 1.2). К помехам относят также искажения полезных сигналов при влиянии различных дестабилизирующих факторов. Выделение полезных составляющих из общей суммы зарегистрированных сигналов или максимальное подавление шумов и помех в информационном сигнале при сохранении его полезных составляющих является одной из основных задач первичной обработки сигналов (результатов наблюдений).

Рис.1.2 Сигнал с шумами

Типы помех разделяют по источникам их возникновения, по энергетическому спектру, по характеру воздействия на сигнал, по вероятностным характеристикам и другим признакам. Источники помех бывают внутренние и внешние. Внутренние шумы могут быть присущи физической природе источников сигналов, как, например, тепловые шумы электронных потоков в электрических цепях или дробовые эффекты в электронных приборах, или возникают в измерительных устройствах и системах передачи и обработки сигналов от влияния различных дестабилизирующих факторов - температуры, повышенной влажности,

нестабильности источников питания, влияния механических вибраций на гальванические соединения, и т.п.

Внешние источники шумов бывают искусственного и естественного происхождения. К искусственным источникам помех относятся индустриальные помехи - двигатели, переключатели, генераторы сигналов различной формы и т.д. Естественными источниками помех являются молнии, флуктуации магнитных полей, всплески солнечной энергии, и т.д.

Электрические и магнитные поля различных источников помех вследствие наличия индуктивных, емкостных и резистивных связей создают на различных участках и цепях сигнальных систем паразитные разности потенциалов и токи, накладывающиеся на полезные сигналы.

Помехи подразделяются на флуктуационные, импульсные и периодические. Флуктуационные или шумовые помехи представляют хаотический и беспорядочный во времени процесс в виде нерегулярных случайных всплесков различной амплитуды. Как правило, флуктуационные помехи распределены по нормальному закону с нулевым средним и оказывают существенное влияние только на сигналы низкого уровня.

Импульсные помехи во многом похожи на шумовые помехи и проявляются как в виде отдельных импульсов, так и в виде последовательности импульсов, форма и параметры которых имеют случайный характер. Причинами импульсных помех являются резкие броски тока и напряжения в промышленных установках, транспортных средствах, а также природные электрические явления. Распределение импульсных помех симметричное с произвольной плотностью распределения.

Периодические помехи вызываются периодическими низкочастотными или высокочастотными полями линий электропередач, силовых электроустановок и др. Если основная мощность помех сосредоточена на отдельных участках диапазона частот, например, на частоте напряжения промышленной сети или кратна этой частоте, то такие помехи называют сосредоточенными.

В зависимости от характера воздействия на сигнал помехи разделяют на аддитивные и мультипликативные. Аддитивные помехи суммируются с сигналом, не зависят от его значений и формы и не изменяют информативной составляющей самого сигнала. Мультипликативные или деформирующие помехи могут изменять форму информационной части сигнала, иметь зависимость от его значений и от определенных особенностей в сигнале.

Следует заметить, что деление сигналов на полезные и мешающие (шумовые) является достаточно условным. Источниками мешающих сигналов также являются определенные физические процессы, явления или объекты. При выяснении природы мешающих сигналов они могут переводиться в разряд информационных.

Размерность сигналов. Простейшими сигналами являются одномерные сигналы, как, например, измерения каких-либо параметров геофизических полей (электрических, магнитных, и пр.) по профилям на поверхности земли. Значения одномерных сигналов зависят только от одной

независимой переменной, как, например, на рис. 1.1 и 1.2.

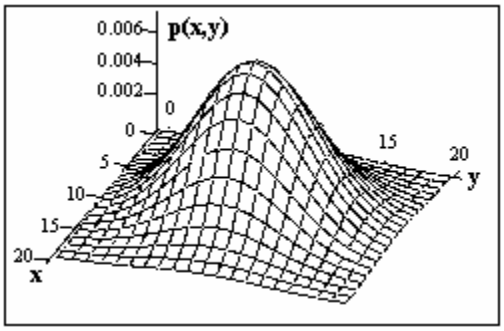


Рис.1.3 Двумерный сигнал

В общем случае сигналы являются многомерными функциями пространственных, временных и прочих независимых переменных.

Многомерный сигнал может рассматриваться, как упорядоченная совокупность одномерных сигналов. С учетом этого при анализе и обработке сигналов многие принципы и практические методы обработки одномерных сигналов, математический аппарат которых развит достаточно глубоко, распространяются и на многомерные сигналы. Физическая природа сигналов для математического аппарата их обработки значения не имеет.

Вместе с тем обработка многомерных сигналов имеет свои особенности, и может существенно отличаться от одномерных сигналов в силу большего числа степеней свободы.

Математическое описание сигналов. Сигналы могут быть объектами теоретических исследований и практического анализа только в том случае, если указан способ их математического описания - математическая модель сигнала. Математическое описание позволяет абстрагироваться от физической природы сигнала и материальной формы его носителя, проводить классификацию сигналов, выполнять их сравнение, устанавливать степень тождества, моделировать системы обработки сигналов. Как правило, описание сигнала задается функциональной зависимостью определенного информационного параметра сигнала от независимой переменной (аргумента) – *s(x), y(t)* и т.п. Такая форма описания и графического представления сигналов называется динамической (сигнал в реальной динамике его поведения по аргументам). Функции математического описания сигналов могут быть как вещественными, так и комплексными. Выбор математического аппарата описания определяется простотой и удобством его использования при анализе и обработке сигналов.

Отметим двойственность применения описания сигналов функциями типа *s(t)* и т.п. С одной стороны *s(t)* – это величина, равная значению функции в момент времени *t*. С другой стороны мы обозначаем через *s(t)* и саму функцию, т.е. то правило, по которому каждому значению *t* ставится в соответствие определенная величина *s*. В большинстве аналитических выражений это не вызывает недоразумений и при однозначном соответствии значений сигналов их аналитическим выражениям принимается по

умолчанию.

Сделаем также одно замечание по терминологии описания сигналов. В теоретических работах по анализу сигналов конкретные значения величины сигнала (отсчеты значений по аргументу) часто именуют координатами сигнала. В оптике этот термин используется по своему прямому смысловому назначению – пространственных координат результатов измерений. Условимся применять термин «координата» по своему традиционному смысловому назначению в качестве обобщающего термина для независимых переменных сигнальных функций. При этом под понятием ***координат*** значений сигнала будем понимать не только какие-либо пространственные координаты, но и любые другие аргументы (например, время), на числовой оси которых отложены значения или отсчеты сигнала и рассматривается динамика его изменения.

Спектральное представление сигналов. Кроме привычного динамического представления сигналов и функций в виде зависимости их значений от определенных аргументов (времени, линейной или пространственной координаты и т.п.) при анализе и обработке данных широко используется математическое описание сигналов по аргументам, обратным аргументам динамического представления. Так, например, для времени обратным аргументом является частота. Возможность такого описания определяется тем, что любой сколь угодно сложный по своей форме сигнал, не имеющий разрывов второго рода (бесконечных значений на интервале своего задания), можно представить в виде суммы более простых сигналов, и, в частности, в виде суммы простейших гармонических колебаний, что выполняется при помощи преобразования Фурье. Соответственно, математически разложение сигнала на гармонические составляющие описывается функциями значений амплитуд и начальных фаз колебаний по непрерывному или дискретному аргументу – частоте изменения функций на определенных интервалах аргументов их динамического представления. Совокупность амплитуд гармонических колебаний разложения называют ***амплитудным спектром*** сигнала, а совокупность начальных фаз – ***фазовым спектром***. Оба спектра вместе образуют полный частотный спектр сигнала, который по точности математического представления тождественен динамической форме описания сигнала.

Линейные системы преобразования сигналов описываются дифференциальными уравнениями, причем для них верен принцип суперпозиции, согласно которому реакция систем на сложный сигнал, состоящий из суммы простых сигналов, равна сумме реакций от каждого составляющего сигнала в отдельности. Это позволяет при известной реакции системы на гармоническое колебание с определенной частотой определить реакцию системы на любой сложный сигнал, разложив его в ряд гармоник по частотному спектру сигнала. Широкое использование гармонических функций при анализе сигналов объясняется тем, что они являются достаточно простыми ортогональными функциями и определены при всех

значениях непрерывных переменных. Кроме того, они являются собственными функциями времени, сохраняющими свою форму при прохождении колебаний через любые линейные системы и системы обработки данных с постоянными параметрами (изменяются только амплитуда и фаза колебаний). Немаловажное значение имеет и то обстоятельство, что для гармонических функций и их комплексного анализа разработан мощный математический аппарат.

Кроме гармонического ряда Фурье применяются и другие виды разложения сигналов: по функциям Уолша, Бесселя, Хаара, полиномам Чебышева, Лаггера, Лежандра и др. Главное условие однозначности и математической идентичности отображения сигналов - ортогональность функций разложения. Но при качественном анализе сигналов могут применяться и неортогональные функции, выявляющие какие-либо характерные особенности сигналов, полезные для интерпретации физических данных.

Математические модели сигналов. Теория анализа и обработки физических данных базируется на математических моделях соответствующих физических полей и физических процессов, на основе которых создаются математические модели сигналов. Математические модели сигналов дают возможность обобщенно, абстрагируясь от физической природы, судить о свойствах сигналов, предсказывать изменения сигналов в изменяющихся условиях, заменять физическое моделирование процессов математическим. С помощью математических моделей имеется возможность описывать свойства сигналов, которые являются главными, определяющими в изучаемых процессах, и игнорировать большое число второстепенных признаков. Знание математических моделей сигналов дает возможность классифицировать их по различным признакам, характерным для того или иного типа моделей. Так, сигналы разделяются на неслучайные и случайные в зависимости от возможности точного предсказания их значений в любые моменты времени, в любой точке пространства. Сигнал является неслучайным и называется ***детерминированным,*** если математическая модель позволяет осуществлять такое предсказание с единичной вероятностью. Математическое описание не может быть всеобъемлющим и идеально точным и, по существу, всегда отображает не реальные объекты, а их упрощенные (гомоморфные) модели. Модели могут задаваться таблицами, графиками, функциональными зависимостями, уравнениями состояний и переходов из одного состояния в другое и т.п. Формализованное описание может считаться математической моделью оригинала, если оно позволяет с определенной точностью прогнозировать состояние и поведение изучаемых объектов путем формальных процедур над их описанием.

Неотъемлемой частью любой математической модели сигнала является область определения сигнала, которая устанавливается интервалом задания независимой переменной. Примеры задания интервала для переменных:

$$a \le x \le b, \qquad x \in [a, b].$$

$$a < y \le b, \quad y \in (a, b].$$
$$a < z < b, \quad z \in (a, b).$$

Пространство значений независимой переменной обычно обозначается через индекс R. Так, например, $R:=(-\infty , +\infty)$, $x \in R$.

Кроме задания области определения сигнала могут быть также заданы виды численных значений переменных (целые, рациональные, вещественные, комплексные).

Математические модели полей и сигналов на первом этапе обработки и анализа результатов наблюдений должны позволять в какой-то мере игнорировать их физическую природу и возвращать ее в модель только на заключительном этапе интерпретации данных.

Виды моделей сигналов. При анализе физических данных используются два основных подхода к созданию математических моделей сигналов. Первый подход оперирует с ***детерминированными*** сигналами, значения которых в любой момент времени или в произвольной точке пространства (а равно от любых других аргументов) являются априорно известными или могут быть достаточно точно определены (вычислены). Такой подход удобен в прямых задачах расчета полей для заданных моделей сред, в задачах активных воздействий на среду при заранее известных параметрах и форме сигнала воздействия. Для описания неслучайных сигналов используются также ***квазидетерминированные*** модели, в которых значения одного или нескольких параметров априорно неизвестны, и считаются случайными величинами с малой случайной компонентой, влиянием которой можно пренебречь.

Второй подход предполагает случайный характер сигналов, закон изменения которых во времени (или в пространстве) носит случайный характер, и которые принимают конкретные значения с некоторой вероятностью. Модель такого сигнала представляет собой описание статистических характеристик случайного процесса путем задания законов распределения вероятностей, корреляционной функции, спектральной плотности энергии и др.

Случайность может быть обусловлена как собственной физической природой сигналов, что характерно, например, для волнового поля лазерного пучка, так и вероятностным характером регистрируемых сигналов как по времени или месту их появления, так и по содержанию. С этих позиций случайный сигнал может рассматриваться как отображение случайного по своей природе процесса или физических свойств объекта (процесса), которые определяются случайными параметрами или сложной физической природой среды, результаты измерений в которой трудно предсказуемы.

Между этими двумя видами сигналов нет резкой границы. Строго говоря, детерминированных процессов и отвечающих им детерминированных сигналов в природе не существует. Даже сигналы, хорошо известные на входе в среду (при внешнем воздействии на нее), по месту их регистрации всегда осложнены случайными помехами, влиянием дестабилизирующих факторов и априорно неизвестными параметрами и

строением самой среды. С другой стороны, модель случайного поля часто аппроксимируется методом суперпозиции (сложения) сигналов известной формы. Детерминированные модели могут использоваться и для изучения чисто случайных процессов, если уровень полезного сигнала в этом процессе значительно выше уровня статистических флуктуаций.

На выбор математической модели в немалой степени влияет также сложность математического аппарата обработки сигналов. Не исключается и изменение модели, как правило, с переводом из стохастической в детерминированную, в процессе накопления информации об изучаемом явлении или объекте.

Классификация сигналов осуществляется на основании существенных признаков соответствующих математических моделей сигналов**.** Все сигналы разделяют на две крупных группы: детерминированные и случайные.

Классификация детерминированных сигналов. При графическом представлении сигналы изображаются сложной совокупностью точек, кривой в простой области - в двумерном пространстве. В отличие от этого, обычно вводят более сложные пространства – пространства сигналов, в которых каждый сигнал изображается простейшим элементом – точкой. В качестве первого шага в этом направлении рассмотрим сигнал как элемент множества *S*. Само множество определяется некоторым свойством *P*, которое представляет утверждение, справедливое для любого элемента множества. Условно это изображается в виде $S = \{x; P\}$, т.е. *S* есть множество всех *x*, для которых справедливо *P*. Определив свойство *P*, мы задаем тем самым множество сигналов. Обычно проще иметь дело со сравнительно «узким» множеством, ограниченным жестким условием. При этом, когда ограничение слишком «жесткое», множество содержит мало полезных сигналов. Выбор свойства *P* представляет собой довольно сложную задачу. Рассмотрим несколько примеров, с которыми часто имеют дело в теории сигналов.

Гармонические сигналы. Обозначим через S_c множество всех гармонических сигналов, т.е.

$$S_c = \left\{x, x(t) = \mathrm{Re}\left[e^{\alpha + j(\theta + 2\pi f t)}\right], -\infty \le t \le \infty, \alpha, \theta, f \in R\right\} \qquad (1.1)$$

Утверждение $\alpha, \theta, f \in R$ в (1.1) означает, что эти параметры могут произвольно выбираться из множества всех действительных чисел *R*. Поэтому множество S_c содержит гармонические колебания со всевозможными амплитудами, фазами и частотами. Часто свойство *P* для конкретного множества можно указать в другой форме, например

$$S_c = \left\{x, \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \lambda^2 x(t) = 0, -\infty \le t \le \infty, \lambda \in R\right\} \qquad (1.2)$$

Периодические сигналы. Обозначим через $S_R(T)$ множество периодических сигналов с периодом *T*, т.е.

$$S_R(T) = \{x, x(t+T) = x(t), -\infty \le t \le \infty\} \qquad (1.3)$$

Ограниченные сигналы. Множество сигналов, мгновенные значения которых ограничены по величине некоторым вещественным положительным числом *K*, обозначается

$$S_M(K) = \{x, |x(t)| \le K, -\infty \le t \le \infty\} \qquad (1.4)$$

Ясно, что $x \in S_M(K_1) \Rightarrow x \in S_M(K_2)$, если $K_2 \ge K_1$

Сигналы с ограниченной энергией. О сигналах из множества

$$S_E(U) = \left\{ x, \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) \le K \right\} \qquad (1.5)$$

говорят, что их энергия ограничена величиной *K*, где *K* – положительное вещественное число. Интеграл в (1.5) физически трактуют как энергию выделяющуюся на нагрузке. В этом случае функция $x(t)$ относится к классу функций с интегрируемым квадратом.

Сигналы ограниченной длительности. Пусть $S_D(T)$ - это множество сигналов, которые равны нулю за пределами интервала $-T \le t \le T$ (финитные функции):

$$S_D(T) = \{x, x(t) = 0, |t| \ge T\} \qquad (1.6)$$

Заметим, что $x \in S_D(T_1) \Rightarrow x \in S_D(T_2)$, если $T_2 \ge T_1$.

Сигналы с ограниченной полосой. Пусть $S_B(W)$ - это множество сигналов с полосой, ограниченной некоторой частотой *W*, т.е.

$$S_B(W) = \left\{ x, X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft)dt = 0, для |f| \ge W \right\} \qquad (1.7)$$

где $X(f)$ - Фурье-образ функции $x(t)$.

Классификация случайных сигналов. Случайным сигналом называют функцию времени или координат, значения которой заранее неизвестны, и могут быть предсказаны лишь с некоторой вероятностью. Случайный сигнал отображает случайное физическое явление или физический процесс, причем зарегистрированный в единичном наблюдении сигнал не воспроизводится при повторных наблюдениях и не может быть описан явной математической зависимостью. При регистрации случайного сигнала реализуется только один из возможных вариантов (исходов) случайного процесса, а достаточно полное и точное описание процесса в целом можно произвести только после многократного повторения наблюдений и вычисления определенных

статистических характеристик ансамбля реализаций сигнала. В качестве основных статистических характеристик случайных сигналов принимают:

а) закон распределения вероятности нахождения величины сигнала в определенном интервале значений;

б) спектральное распределение мощности сигнала.

Случайные сигналы подразделяют на стационарные и нестационарные. Случайные стационарные сигналы сохраняют свои статистические характеристики в последовательных реализациях случайного процесса. Что касается случайных нестационарных сигналов, то их общепринятой классификации не существует. Как правило, из них выделяют различные группы сигналов по особенностям их нестационарности.

Сигналы, в любой форме материального представления, содержат определенную полезную информацию. Если при преобразованиях сигналов происходит нарушение заключенной в них информации (частичная утрата, количественное изменение соотношения информационных составляющих или параметров, и т.п.), то такие изменения называются искажениями сигнала. Если полезная информация остается неизменной или адекватной содержанию во входном сигнале, то такие изменения называются преобразованиями сигнала.

Любые изменения сигналов сопровождаются изменением их спектра, и по характеру этого изменения разделяются на два вида: линейные и нелинейные. К нелинейным относят изменения, при которых в составе спектра сигналов появляются новые гармонические составляющие, отсутствующие во входном сигнале. При линейных изменениях сигналов изменяются амплитуды и/или начальные фазы гармонических составляющих спектра. И линейные, и нелинейные изменения сигналов могут происходить как с сохранением полезной информации, так и с ее искажением. Это зависит не только от характера изменения спектра сигналов, но и от спектрального состава самой полезной информации.

Комплексный сигнал в оптике. Выражение ***оптический сигнал*** используется для описания пространственной и временной структуры световой волны. Оптический сигнал определяется следующим образом. Рассмотрим электромагнитные колебания, возбуждаемые стационарным квазимонохроматическим источником света в неподвижной точке P ($\boldsymbol{r}$) с координатами $\boldsymbol{r}$ (x, y, z) в момент времени t. Квазимонохроматический источник света характеризуется эффективной шириной частот $Дщ$, которая значительно меньше средней частоты $щ_0$ испускаемого света (так называемое приближение узкополосных сигналов, хорошо аппроксимирующее временной спектр излучения лазерных источников):

$$Дщ/щ_0 << 1. \qquad (1.8)$$

Предположим для простоты, что свет линейно поляризован. Тогда электрическое поле в точке P описывается некоторой действительной функцией координат и времени $E(\mathbf{r}, t)$, которую можно записать в виде

$$E(\mathbf{r},t) = a(\mathbf{r},t)\cos\left[\varphi(\mathbf{r},t) - \omega_0 t\right], \qquad (1.9)$$

где $a(\boldsymbol{r}, t)$ и $\varphi(\boldsymbol{r}, t)$ — медленно меняющиеся действительные функции. Вместо тригонометрических функций *cos* и *sin* удобно ввести комплексные экспоненциальные функции. Переход к такой записи осуществляется несколькими путями. В первом из них гармонические функции заменяются действительной частью комплексной экспоненты:

$$\cos(\varphi - \omega_0 t) = \mathrm{Re}\, e^{j(\varphi-\omega_0 t)}. \qquad (1.10)$$

После проведения всех математических преобразований из результата произведенных операций выделяется действительная часть Re. Следуя этому правилу, можно вместо действительной функции $E(\boldsymbol{r}, t)$ оперировать с комплексной функцией

$$E_k(r,t) = a(r,t)\, e^{j[\varphi(r,t)-\omega_0 t]}. \qquad (1.11)$$

Так как по условию ω_0 — постоянная величина, то множитель $e^{-j\omega_0 t}$, являющийся общим для всех точек пространства, можно выделить и записать (1.11) в виде

$$E_k(r,t) = f(r,t)\, e^{-j\omega_0 t}. \qquad (1.12)$$

Комплексная функция

$$f(r,t) = a(r,t)\, e^{j\varphi(r,t)} \qquad (1.13)$$

называется ***оптическим сигналом***. Это, по существу, комплексная амплитуда электромагнитных колебаний или огибающая квазигармонических колебаний $E(\boldsymbol{r}, t)$.

Условие узкополосности, накладываемое на электромагнитные колебания, означает, что оптический сигнал $f(\boldsymbol{r}, t)$ изменяется весьма мало за время периода $T_0 = 2p/\omega_0$.

Оптический сигнал называется стационарным, если функция не зависит от времени:

$$f(\mathbf{r},t) \equiv f(\mathbf{r}). \qquad (1.14)$$

Существенное различие между оптическим сигналом $f(\boldsymbol{r}, t)$ и радиосигналом состоит в том, что любой детектор света, являющийся квадратичным приемником с большой постоянной времени, регистрирует непосредственно только среднюю интенсивность

$$\overline{I(\mathbf{r})} = \frac{1}{2\Phi}\int_{-\Phi}^{\Phi} |E|^2\, dt = \frac{1}{2\Phi}\int_{-\Phi}^{\Phi} |f(\mathbf{r})|^2 dt = \overline{|f(\mathbf{r})^2|}, \qquad (1.15)$$

$$\Phi \gg T_0 \qquad \Phi \gg T_0$$

т. е. квадрат абсолютного значения сигнала $f(\boldsymbol{r})$. В противоположность этому радиосигнал в данной точке пространства можно, как правило,

полностью зарегистрировать непосредственно, например, с помощью электронно-лучевой трубки, снабженной временной разверткой.

Оптический сигнал f (***r***) задается в общем случае как функция трех координат точки наблюдения. Для простоты рассуждений и компактности выкладок, как правило, будем рассматривать в дальнейшем одномерный сигнал f (x).

Второй метод удобного представления оптического сигнала с помощью экспоненциальных функций состоит в чисто формальной замене тригонометрических функций на экспоненциальные:

$$\text{f(t)} = \cos\text{щt} = \frac{1}{2}\left[\text{e}^{j\text{щt}} + \text{e}^{-j\text{щt}}\right]. \qquad (1.16)$$

Здесь возникают положительные и отрицательные частоты. Два единичных комплексных вектора $\text{e}^{j\text{щt}}$ и $\text{e}^{-j\text{щt}}$ вращаются в противоположных направлениях. На примере простых механических моделей можно представить физический смысл биполярных частот: направление вращения вала должно быть отмечено знаком. Физический смысл биполярных частот оптического сигнала будет рассмотрен позже.

Первый метод представления сигнала в экспоненциальной форме состоит, по существу, в том, что вместо действительного сигнала, описывающего реальный физический процесс,

$$f(t) = a\cos\text{щ}t + b\sin\text{щ}t \equiv A\cos(\text{щ}t + \varphi_0), \qquad (1.17)$$

и содержащего как положительные, так и отрицательные частоты,, вводится комплексный сигнал

$$\text{V(t)} = \text{f(t)} + j\text{ч(t)} \qquad (1.18)$$

который содержит только положительные частоты. Сигнал V (t) получается из действительного сигнала f (t) путем добавления к нему чисто мнимого сигнала jч(t). При этом функция ч(t) однозначно задается функцией f (t) и образуется по следующему правилу:

$$\text{ч}(t) = \frac{P}{\text{p}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\text{ф})\,d\,\text{ф}}{\text{ф} - t}, \qquad (1.19)$$

где интегрирование ведется в смысле главного значения Коши. Интегральное преобразование, определяемое этим правилом, называется ***преобразованием Гильберта*** и не изменяет спектра сигнала, а только подавляет отрицательные частоты, которые в случае действительного сигнала f (t), фактически не несут никакой дополнительной информации. Сигнал V (t) содержит только положительные частоты, а его амплитуда оказывается увеличенной вдвое по сравнению с амплитудой исходного сигнала f (t). Функция V (t) называется ***аналитическим сигналом***. При анализе процессов, происходящих в когерентных оптических системах в любых диапазонах длин волн, встречаются линейные преобразования, которые описывают прохождение

оптического сигнала через различные их элементы. Перечисленные ниже линейные преобразования отвечают вполне определенным физическим процессам, происходящим в оптико-информационных системах. Охарактеризуем основные черты этих линейных преобразований.

Преобразование Фурье. Описывает дифракцию света в дальней зоне (дифракцию Фраунгофера) при прохождении когерентного пучка света через оптическую систему с достаточно малой угловой апертурой. Преобразование Фурье используется в теории голографии Фурье, в бесщелевой спектроскопии Фурье, в когерентных оптических корреляторах и т. д.

$$F(\text{щ}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\,\text{щ}x}\, dx.$$

Преобразование Френеля. Описывает процесс дифракции света в ближней зоне (дифракцию Френеля). Используется при анализе свойств широкополосной частотно-модулированной несущей, которая обладает оптимальной информационной емкостью. Преобразование Френеля описывает свойства голографии Френеля, трафаретной голографии, спектроскопии высокой светосилы и свойства антенн с синтезированной апертурой.

$$\text{Ц}(\text{x}) = \text{щ}_0 \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{f}(\text{о})\, \text{e}^{j\text{щ}_0^2(\text{x}-\text{о})^2}\, \text{d}\,\text{о}.$$

Преобразование Дирака. Выделяет эффект единичного точечного источника света. Свертка и преобразование Дирака являются тождественными преобразованиями. Преобразования Дирака обычно появляются в результате двух последовательных линейных операций с ядром типа Фурье.

$$g(x) = g(x) \otimes \text{д}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\text{о})\,\text{д}(x-\text{о})\, d\,\text{о}.$$

Преобразование отсчетов. Описывает свойства оптического сигнала, поступающего из системы с конечной апертурой или ограниченной полосой пространственных частот.

$$S(\text{щ}, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\text{о})\, \frac{\sin \text{рщ}_0 (x-\text{о})}{\text{р}(x-\text{о})}\, d\,\text{о} = f(x) \otimes \frac{\sin \text{рщ}_0\, x}{\text{р}\, x}.$$

Встречается при оценке разрешающей способности и информационной емкости оптического сигнала. Является типичной функцией рассеяния когерентных оптических систем.

Интегральная операция свертки. Используется для описания кратных процессов дифракции или последовательного наложения нескольких взаимно подобных процессов. Связывает сигналы на выходе и входе оптической системы с ее аппаратной функцией.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\text{о})\, f_2(x - \text{о})\, d\,\text{о}.$$

Ф у н к ц и я к о р р е л я ц и и . Используется для описания наблюдаемых величин случайных процессов. Встречается в теории когерентности света и в общей теории голографических процессов.

$$\varphi_{12}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x')\, f_2^*(x' + x)\, dx'.$$

П р е о б р а з о в а н и е Г и л ь б е р т а . Не изменяет спектрального состава сигнала. Выделяет только положительные частоты. Определяет свойства сигнала в однополосной голограмме. Встречается при рассмотрении принципа причинности в оптике.

$$\text{ч}(t) = \frac{P}{\text{р}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\text{ф})\, d\,\text{ф}}{\text{ф} - t}.$$

Общее понятие систем. Преобразование и обработка сигналов осуществляется в системах. Понятия сигнала и системы неразрывно связаны, так как любой сигнал существует в пределах какой-либо системы. Система обработки сигналов может быть реализована как в материальной форме (специальное устройство, измерительный прибор, совокупность физических объектов с определенной структурой взаимодействия и т.п.), так и программно на любом специализированном вычислительном устройстве. Форма реализации системы существенного значения не имеет, и определяет только ее возможности при анализе и обработке сигналов. Безотносительно к своему назначению система всегда имеет ***вход*****,** на который подается внешний входной сигнал, в общем случае многомерный, и ***выход***, с которого снимается обработанный выходной сигнал. Собственно система представляет собой ***системный оператор*** (алгоритм) преобразования входного сигнала *s(t)* – воздействия или возбуждения, в сигнал на выходе системы *y(t*) – отклик или выходную реакцию системы. Символическое обозначение операции преобразования (трансформации сигнала): *y(t) = T* [*s(t)*]. ***Системный оператор T*** - это закон соответствия между двумя функциональными множествами сигналов *s(t)* и *y(t)*.

Для детерминированных входных сигналов соотношение между выходными и входными сигналами всегда однозначно задается системным оператором. В случае реализации на входе системы случайного входного процесса происходит изменение статистических характеристик сигнала (математического ожидания, дисперсии, корреляционной функции и пр.), которое также определяется системным оператором.

Для полного определения системы необходимо задание характера, типа и области допустимых величин входных и выходных сигналов. Совокупность системного оператора *T* и областей входных и выходных сигналов образует математическую модель системы.

Линейные и нелинейные системы составляют два основных класса систем обработки сигналов. Термин линейность означает, что система

преобразования сигналов должна иметь произвольную, но в обязательном порядке линейную связь между входным сигналом (возбуждением) и выходным сигналом (откликом) с определенным изменением спектрального состава входного сигнала (усиление или подавление определенных частотных составляющих сигнала. Система считается линейной, если ее реакция на входные сигналы аддитивна (выполняется принцип суперпозиции сигналов) и однородна (выполняется принцип пропорционального подобия). Другими словами, ***отклик линейной системы на взвешенную сумму входных сигналов должен быть равен взвешенной сумме откликов на отдельные входные сигналы независимо от их количества и для любых весовых коэффициентов,*** в том числе комплексных. Иными словами, если $f_1(x_1, y_1)$ и $f_2(x_1, y_1)$ - любые входные функции, а a_1 и a_2 произвольные комплексные постоянные, то для линейной системы справедливо следующее свойство суперпозиции

$$T\{a_1 f_1(x_1, y_1) + a_2 f(x_1, y_1)\} = a_1 T\{f_1(x_1, y_1)\} + a_2 T\{f_2(x_1, y_1)\} \qquad (1.20)$$

Основное преимущество линейной системы заключается в том, что для системы, обладающей этим свойством, ее отклик на произвольный входной сигнал можно представить в виде откликов на определенные «элементарные» функции, на которые следует разложить входной сигнал. В этом случае задача заключается в том, чтобы найти простой и удобный способ разложения входного сигнала. Такое разложение можно получить, используя т.н. фильтрующее свойство δ-функции, что более подробно будет рассмотрено далее в связи со свойствами обобщенных функций. В этом случае входной сигнал $g_1(x_1, y_1)$ можно представить в виде

$$g_1(x_1, y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta)\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)d\xi d\eta \qquad (1.21)$$

Можно считать, что это соотношение является представлением объектной функции $g_1(x_1, y_1)$ в виде линейной комбинации взвешенных и смещенных δ-функций, которые и являются элементарными функциями разложения. Применительно к изображающей оптической системе эту процедуру можно трактовать как представление распределения освещенности в плоскости объектов в виде совокупности распределенных «точечных» источников излучения с различными яркостями $g_1(\xi, \eta)$. В этом случае выходной сигнал можно представить в виде

$$g_2(x_2, y_2) = T\left\{\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta)\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)d\xi d\eta\right\} \qquad (1.22)$$

и используя свойство линейности,

$$g_2(x_2, y_2) = \left\{ \int\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta) T\{\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)\} d\xi d\eta \right\} \qquad (1.23)$$

Обозначим через $h(x_2, y_2, \xi, \eta)$ отклик системы на выходе (в плоскости изображения) в точке с координатами (x_2, y_2) на сигнал вида δ-функции в точке с координатами (ξ, η) на входе (в плоскости предметов), т.е.

$$h(x_2, y_2, \xi, \eta) = T\{\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)\} \qquad (1.24)$$

и назовем эту функцию импульсным откликом системы.
Входной и выходной сигнал системы можно связать теперь простым соотношением

$$g_2(x_2, y_2) = \left\{ \int\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta) h(x_2, y_2, \xi, \eta) d\xi d\eta \right\} \qquad (1.25)$$

которое носит название интеграла суперпозиции.

Инвариантные линейные системы. В классе линейных систем можно выделить более узкий подкласс линейных инвариантных систем. Применительно к электронным системам говорят о временной инвариантности, подразумевая, что импульсный отклик системы $h(t, \tau)$ (т.е. импульсный отклик системы в момент времени t на воздействие единичного импульса в момент времени τ) зависит только от промежутка времени $(t - \tau)$. Аналогично, рассматривая линейную оптическую систему, говорят о пространственной инвариантности (или изопланарности), если ее импульсный отклик $h(x_2, y_2, \xi, \eta)$ зависит только от расстояний (приращений) $(x_2 - \xi)$ и $(y_2 - \eta)$. Для таких систем можно записать

$$h(x_2, y_2, \xi, \eta) = h(x_2 - \xi, y_2 - \eta) \qquad (1.26)$$

т.е. система создающая изображение, считается пространственно инвариантной, если изображение точечного источника (описываемое в дифракционно ограниченной системе функцией Эйри) меняет только положение, но не свою функциональную форму при перемещении точечного источника в плоскости предметов.

Для линейной инвариантной системы интеграл суперпозиции (1.25) принимает простой вид

$$g_2(x_2, y_2) = \left\{ \int\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta) h(x_2 - \xi, y_2 - \eta) d\xi d\eta \right\} \qquad (1.27)$$

и представляет двумерную свертку предметной функции и функции

импульсного отклика оптической системы, которую в символьной форме можно записать в виде $g_2(x,y) = g_1(x,y) \otimes h(x,y)$. Для класса линейных инвариантных систем математический аппарат интегральных преобразований разработан существенно полнее, чем для более общего класса всех линейных систем. Простота инвариантных систем выявляется особенно наглядно, если применить преобразование Фурье к свертке двух функций. Используя прямую теорему свертки, рассмотренную далее, можно увидеть, что пространственные спектры входного $G_1(f_x, f_y)$ и выходного $G_2(f_x, f_y)$ сигналов связаны простым соотношением

$$G_2(f_x, f_y) = H(f_x, f_y) G_1(f_x, f_y) \qquad (1.28)$$

Функция $H(f_x, f_y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int h(\xi, \eta) \exp\left[-j2\pi(f_x \xi + f_y \eta)\right] d\xi d\eta$ представляет двумерный Фурье-образ функции импульсного отклика оптической системы. Функция $H(f_x, f_y)$ называется передаточной функцией системы и показывает, как действует система в частотном пространстве. Достаточно трудоемкой в координатном пространстве операции двумерной свертки соответствует более просто реализуемая в частотном пространстве операция умножения Фурье-образов исходных сигналов. Можно сделать вывод о том, что для линейных инвариантных систем входной сигнал (объектную функцию) можно разлагать на элементарные функции, более удобные чем δ-функции, в качестве которых могут быть выбраны комплексные экспоненциальные функции разных пространственных частот (f_x, f_y). В этом случае, преобразуя входной сигнал на ортонормированном базисе комплексных экспоненциальных функций разных пространственных частот, мы переходим от рассмотрения задачи в координатном пространстве к эквивалентному рассмотрению в частотном пространстве. Умножая спектр пространственных частот входного сигнала на передаточную функцию, мы учитываем воздействие оптической системы на каждую элементарную функцию, которое приводит к изменению амплитуды и фазы каждой пространственной гармоники. Обратное преобразование полученного спектра приводит к восстановлению выходного сигнала путем сложения всех видоизмененных элементарных функций.

В нелинейных системах связь между входным и выходным сигналом определяется произвольным нелинейным законом с дополнением частотного состава входного сигнала частотными составляющими, отсутствующими во входном сигнале.

Стационарные и нестационарные системы. Система считается стационарной и имеет постоянные параметры, если ее свойства (оператор преобразования) в пределах заданной точности не зависят от входного и выходного сигналов и не изменяются во времени и пространстве при действии каких-либо других внешних факторов. В противном случае система

является нестационарной, и называется параметрической или системой с переменными параметрами. Среди последних большое значение имеют так называемые адаптивные системы обработки данных. В этих системах производится, например, оценивание определенных параметров входных и выходных сигналов, по результатам сравнения которых осуществляется подстройка параметров преобразования (переходной характеристики системы) таким образом, чтобы обеспечить оптимальные по производительности условия обработки сигналов или минимизировать погрешность обработки.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ЕГО СВОЙСТВА

2.1 Преобразование Фурье абсолютно интегрируемых функций

По определению преобразованием Фурье функции $f(x)$ называется интегральная операция

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx. \qquad (2.1)$$

Обратное преобразование Фурье записывается следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega x} d\omega. \qquad (2.2)$$

Сокращенно эти соотношения выражаются с помощью операторных символов преобразования Фурье F и F^{-1}:

$$f(x) \xrightarrow{F} F(\omega) \qquad (2.3)$$

и

$$F(\omega) \xrightarrow{F^{-1}} f(x). \qquad (2.4)$$

Функцию $F(\omega)$ называют ***Фурье-образом*** функции $f(x)$. В свою очередь функция $f(x)$ называется ***инверсным Фурье-образом*** функции $F(\omega)$ или ***прообразом.*** Различие между прямым Фурье-образом и инверсным Фурье-образом заключается в различных знаках, содержащихся в экспонентах выражений (2.1) и (2.2), а также в наличии множителя $1/2\pi$ в формуле обратного преобразования. В литературе встречаются также и другие определения преобразования Фурье, отличающиеся от принятого здесь как знаком в экспоненте, так и численными коэффициентами, стоящими перед интегралом.

Иногда пишут

$$F(\omega) = F[f(x)], \qquad (2.5)$$

$$f(x) = F^{-1}[F(\omega)]. \qquad (2.6)$$

Очень часто различием между символами F и F^{-1} пренебрегают, а множитель $1/2\pi$ ради простоты опускают.

Для того чтобы Фурье-образ сигнала (2.1) и прообраз (2.2) существовали, достаточно, чтобы функции $f(x)$ и $F(\omega)$ были абсолютно интегрируемы, т.е. чтобы значения интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)dx| \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| d\omega \qquad (2.7)$$

были конечными. Однако это условие не является необходимым и имеются функции, которые не относятся к классу абсолютно интегрируемых, но

имеют Фурье-образы. Рассмотрение вопроса о существовании Фурье-образа здесь полностью опускается, и приводятся только наиболее важные результаты и пояснения без строгих математических доказательств.

Свойства преобразования Фурье. Рассмотрим основные свойства преобразования Фурье.

Линейность. Это свойство – общее для всех линейных преобразований. Если $F_1(\omega)$ и $F_2(\omega)$ – Фурье-образы функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно, а a_1 и a_2 - произвольные комплексные числа, то Фурье-образ функции $f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$, являющейся линейной комбинацией функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, равен $F(\omega) = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$, т.е. линейной комбинации соответствующих Фурье-образов:

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \xrightarrow{F} F(\omega) = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega). \qquad (2.8)$$

Таким образом, процессу суперпозиции функций $f_k(x)$ отвечает эквивалентный процесс суперпозиции Фурье-образов $F_k(\omega)$. Это свойство играет в когерентной оптике и голографии очень важную роль.

Свойства симметрии. Вычислим Фурье-образ функции $f^*(x)$, т.е. функции, комплексно-сопряженной с $f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) e^{-j\omega x} dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j(-\omega)x} dx\right)^* = F^*(-\omega). \qquad (2.9)$$

Таким образом

$$f^*(x) \xrightarrow{F} F^*(-\omega). \qquad (2.10)$$

Рассмотрим несколько полезных случаев.

а) Если $f(x)$ - действительная функция, т.е. $f(x) = f^*(x)$, то

$$F^*(-\omega) = F(\omega), \qquad F^*(\omega) = F(-\omega). \qquad (2.11)$$

б) Если $f(x)$ - действительная и четная функция

$$f(x) = f^*(x) = f^*(-x), \qquad (2.12)$$

то

$$F(\omega) = -F^*(-\omega) = F^*(\omega). \qquad (2.13)$$

Функция $F(\omega)$ - действительная и четная.

в) Если $f(x)$ - действительная и нечетная функция, т.е.

$$f(x) = -f(-x) = f^*(x), \qquad (2.14)$$

то

$$F(\omega) = -F(-\omega) = F^*(-\omega) \qquad (2.15)$$

или

$$F^*(\omega) = -F(\omega). \qquad (2.16)$$

Таким образом, $F(\omega)$ - чисто мнимая нечетная функция и ее можно записать в виде

$$F(\omega) = jG(\omega), \qquad (2.17)$$

где $G(\omega)$ - действительная и нечетная функция ω.

г) Если $f(x)$ - чисто мнимая функция, т.е. $f^*(x) = -f(x)$,

то

$$F^*(\omega) = -F(-\omega), \qquad F(\omega) = -F^*(-\omega). \qquad (2.18)$$

Изменение масштаба (теорема подобия). Если a - действительное число, то

$$f(ax) \xrightarrow{F} \frac{1}{|a|} F(\frac{\omega}{a}). \qquad (2.19)$$

Пусть $a > 0$. Тогда по определению

$$F[f(ax)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-jwx}\, dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-j\frac{\xi\omega}{a}}\, d\xi = \frac{1}{a} F(\frac{\omega}{a}).$$

Аналогично, если $a < 0$, то

$$F[f(ax)] = -\frac{1}{a} F(\frac{\omega}{a})$$

и окончательно

$$f(ax) \xrightarrow{F} \frac{1}{|a|} F(\frac{\omega}{a}).$$

Особый интерес представляет случай $a = -1$:

$$f(-x) \xrightarrow{F} F(-\omega). \qquad (2.20)$$

Инверсии сигнала в координатном пространстве соответствует инверсия его Фурье-образа в частотном пространстве.

Свойство трансляции (теорема о переносе). Если функцию $f(x)$ сдвинуть на величину x_0, то Фурье-образ новой функции $f(x - x_0)$ окажется равным

$$F[f(x - x_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0) e^{-jwx} dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jw(x + x_0)} dx = e^{-jwx_0} F[f(x)]. \qquad (2.21)$$

Таким образом, при трансляции функции $f(x)$ на величину x_0 ее Фурье-образ умножается на $e^{-j\omega x_0}$, что приводит к появлению фазового «искривления» по линейному закону, а модуль остается без изменения.

Сдвиг Фурье-образа по частоте. Если ω_0 - действительное число, то

$$F(\omega-\omega_0)=\int e^{-j(\omega-\omega_0)x}f(x)dx=F[f(x)e^{j\omega_0 x}], \qquad (2.22)$$

т.е. сдвиг Фурье-образа по частоте приводит к появлению дополнительного множителя $e^{j\omega_0 x}$ перед функцией исходного сигнала.

Последние два свойства преобразования Фурье и некоторые полезные следствия из них можно представить в виде таблицы 2.1.

Соотношение взаимности. Если $F(\omega)$ - Фурье-образ функции $f(x)$, то в результате прямого преобразования Фурье получим

$$F(x)\xrightarrow{F}2\pi f(-\omega). \qquad (2.23)$$

Это соотношение вытекает из равенства

$$2\pi f(-x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-j\omega x}d\omega. \qquad (2.24)$$

Таблица 2.1

Исходный сигнал	Фурье-образ сигнала
$f(x)$	$F(\omega)$
$f(x\pm x_0)$	$e^{\pm j\omega x_0}F(\omega)$
$f(x+x_0)+f(x-x_0)$	$2\cos\omega x_0 F(\omega)$
$f(x+x_0)-f(x-x_0)$	$2j\sin\omega x_0 F(\omega)$
$2f(x)-f(x+x_0)-f(x-x_0)$	$4\sin^2\frac{\omega x_0}{2}F(\omega)$
$f(x)e^{\pm j\omega_0 x}$	$F(\omega\mp\omega_0)$
$f(x)\cos\omega_0 x$	$\frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)]$
$f(x)\sin\omega_0 x$	$\frac{1}{2j}[F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)]$
$f(x)\sin^2\frac{\omega_0 x}{2}$	$\frac{1}{4}[2F(\omega)-F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)]$

Дифференцирование по координате. Выполняя дифференцирование обеих сторон равенства

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega x}d\omega \qquad (2.25)$$

n раз по координате x, получаем

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(j\omega)^n F(\omega)e^{ji\omega x}d\omega=F^{-1}[(j\omega)^n F(\omega)],$$

или

$$(j\omega)^n F(\omega) \xrightarrow{F^{-1}} \frac{d^n f(x)}{dx^n}. \qquad (2.26)$$

Соотношение (2.26) справедливо только в том случае, если производная $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ существует. Для этого достаточно, чтобы функция $x^n f(x)$ была абсолютно интегрируема.

Рассмотрим пример функции, представляющей интеграл с переменным верхним пределом

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi) d\xi. \qquad (2.27)$$

Если $\Phi(\omega)$ - ее Фурье-образ, то

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = f(x), \qquad (2.28)$$

а

$$j\omega\Phi(\omega) = F(\omega). \qquad (2.29)$$

Если, кроме того, функция $\Phi(x)$ абсолютно интегрируема, то

$$\Phi(\infty) = 0. \qquad (2.30)$$

Действительно,

$$\Phi(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\Big|_{(\omega_0=0)} e^{j\omega_0\xi} d\xi = F(\omega_0)\Big|_{\omega_0=0},$$

а, кроме того, в силу конечности $\Phi(\omega)$

$$F(\omega) = j\omega\Phi(\omega) \xrightarrow[\omega\to 0]{} 0.$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0. \qquad (2.31)$$

В этом случае

$$\int_{-\infty}^{x} f(\xi) d\xi \xrightarrow{F} \frac{F(\omega)}{j\omega} \ . \qquad (2.32)$$

Условие $F(0) = 0$ является достаточным, но не необходимым условием того, чтобы имело место соотношение (2.32).

Дифференцирование по частоте. Дифференцируя равенство

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \qquad (2.33)$$

n раз по частоте, получаем

$$\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-jx)^n e^{-j\omega x} dx = F[(-jx)^n f(x)],$$

или

$$x^n f(x) \xrightarrow{F} \frac{1}{(-j)^n} \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}, \qquad (2.34)$$

если только $\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$ существует.

Теорема моментов. Эта теорема связывает производные от $F(\omega)$ при $\omega = 0$ с моментами инверсного Фурье-образа, т.е. исходной функции $f(x)$. По определению n-м моментом m_n функции $f(x)$ называется интеграл

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx, \qquad n = 0,1,2,... \tag{2.35}$$

Теорема моментов утверждает, что

$$m_n = \frac{1}{(-j)^n}\frac{d^n F(0)}{d\omega^n}, \qquad n = 0,1,2,... \tag{2.36}$$

Случай $n = 0$ непосредственно следует из (2.1):

$$m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(0). \tag{2.37}$$

Для того, чтобы доказать общую формулу (2.36), разложим $e^{-j\omega x}$ и $F(\omega)$ в ряды:

$$e^{-i\omega x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-j\omega x)^n}{n!}\ , \tag{2.38}$$

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^n F(0)}{d\omega^n}\frac{\omega^n}{n!}\ . \tag{2.39}$$

Тогда

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-j\omega x)^n}{n!}]dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-j)^n m_n\frac{\omega^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^n F(0)}{d\omega^n}\frac{\omega^n}{n!} \tag{2.40}$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях ω, получим (2.36).

Соотношение (2.36) справедливо при условии, если частичные интегралы в (2.40) существуют, а это в свою очередь возможно только в том случае, если моменты функции $f(x)$ конечны. Обратное утверждение неверно: существование производной $\frac{d^n F(0)}{d\omega^n}$ не гарантирует конечности m_n.

Свойства симметрии модуля и фазы Фурье-образа. Пусть Фурье-образ действительной функции $f(x)$ равен

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)}, \tag{2.41}$$

где $A(\omega)$- модуль, а $\Phi(\omega)$- фаза. Докажем, что функция $A(\omega)$ четная, а $\Phi(\omega)$ нечетная и, таким образом, фаза нулевой частоты равна нулю: $\Phi(0) = 0$. Действительно, если совершить переход $\omega \to (-\omega)$:

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{j\omega x}dx = A(-\omega)e^{j\Phi(-\omega)}, \tag{2.42}$$

то видно, что модуль интеграла в силу действительности $f(x)$ при таком преобразовании не меняется, т.е. $F^*(\omega) = F(-\omega)$, и

$$A(\omega) = A(-\omega), \qquad (2.43)$$

а фаза меняется на обратную:

$$\Phi(\omega) = -\Phi(-\omega). \qquad (2.44)$$

Именно из этих двух свойств (2.43) и (2.44) Фурье-образа следует вывод о том, что отрицательные частоты действительной функции не несут никакой дополнительной информации по сравнению с положительными частотами.

Связь между поведением Фурье-образа при нулевой частоте и моментами исходной функции. Моменты функции $f(x)$ связаны со значениями наклона фазовой функции $\Phi(\omega)$ и кривизны модуля $A(\omega)$ Фурье-образа при нулевой частоте. Докажем это утверждение.

Для простоты предположим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = A(0) = 1. \qquad (2.45)$$

Разлагая четную функцию $A(\omega)$ и нечетную функцию $\Phi(\omega)$ в ряды, получим

$$\left.\begin{aligned} A(\omega) &= 1 + \frac{a_2}{2!}\omega^2 + ..., \\ \Phi(\omega) &= b_1\omega + \frac{b_3}{3!}\omega^3 + ... \end{aligned}\right\} \qquad (2.46)$$

Следовательно,

$$e^{j\Phi(\omega)} = 1 + jb_1\omega - \frac{b^2{}_1}{2!}\omega^2 + ...,$$

а

$$F(\omega) = (1 + \frac{a_2}{2!}\omega^2 + ...)(1 + jb_1\omega - \frac{b_1}{2!}\omega^2 + ...) = 1 + jb_1\omega + \frac{a_2 - b^2{}_1}{2!}\omega^2 + ...$$

С учетом (2.39) находим

$$b_1 = -m_1, \quad a_2 = m^2{}_1 - m_2. \qquad (2.47)$$

Если ввести обозначения для величин

$$x_0 = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \qquad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 f(x)dx, \qquad (2.48)$$

где x_0 - координата центра тяжести сигнала $f(x)$, или средняя эпоха, а σ^2 - среднеквадратичное отклонение от средней эпохи, или дисперсия, то

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 2x_0 \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + x_0{}^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = m_2 - m_1{}^2.$$

Таким образом, координата центра тяжести сигнала, или средняя эпоха, равна взятой с обратным знаком производной по частоте от фазы Фурье-образа при нулевой частоте:

$$x_0 = -b_1 = -\frac{d\Phi(0)}{d\omega}, \qquad (2.49)$$

а дисперсия сигнала равна взятой с обратным знаком второй производной по частоте от модуля Фурье-образа при нулевой частоте, или кривизне, так как $\frac{dA(0)}{d\omega} = 0$:

$$\sigma^2 = -a_2 = -\frac{d^2 A(0)}{d\omega^2}. \qquad (2.50)$$

2.2 Примеры преобразования Фурье типичных функций

Рассмотрим преобразование Фурье нескольких простейших функций, которые часто встречаются в практике математического моделирования.

Прямоугольный импульс. Прямоугольный импульс (рис.2.1) представляется функцией

$$\prod_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{2A}, & |x| < A, \\ 0, & |x| > A. \end{cases} \qquad (2.51)$$

Фурье – образ этой функции равен

$$F(\omega) = F\left[\Pi_A(x)\right] = \int_{-A}^{A} \frac{1}{2A} e^{-j\omega x} dx = \frac{\sin \omega A}{\omega A} = \sin c \frac{\omega A}{\pi}. \qquad (2.52)$$

Функция $\sin c \frac{x}{\pi} = \frac{\sin x}{x}$ называется ***функцией отсчетов.***

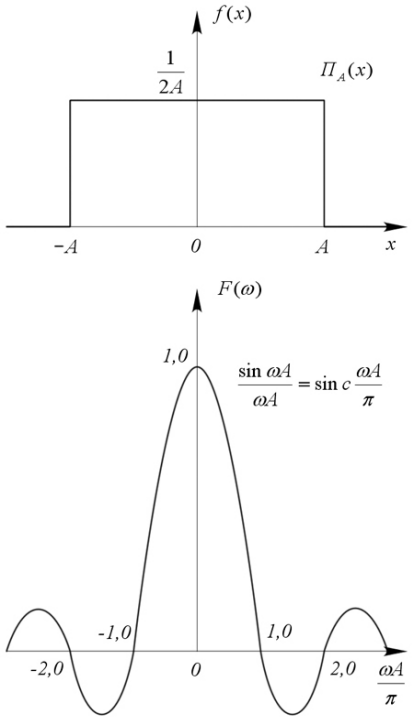


Рис.2.1 Графики функции «прямоугольный импульс» $\Pi_A(x)$
и ее Фурье-образа $\sin \frac{\omega A}{\pi}$, где 2А – ширина прямоугольного импульса

Если прямоугольный импульс (2.51) сдвинуть на величину x_0 (рис.2.2), то согласно (2.21)

$$F[\Pi_A(x-x_0)] = e^{-j\omega x_0}\frac{\sin \omega A}{\omega A} = e^{-j\omega x_0}\sin c\frac{\omega A}{\pi}. \qquad (2.53)$$

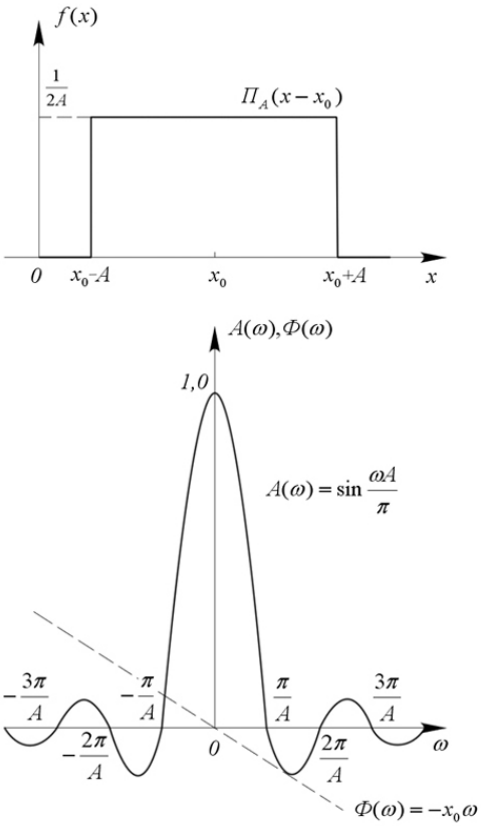


Рис.2.2 График транслированного прямоугольного импульса и его Фурье-образа

Функция отсчетов. Функция отсчетов произвольной частоты ω_0 запишется так:

$$\sin c\frac{\omega_0 x}{\pi} = \frac{\sin \omega_0 x}{\omega_0 x}. \qquad (2.54)$$

Фурье-образ функции отсчетов имеет вид

$$F(\omega) = F\left[\sin c\frac{\omega_0 x}{\pi}\right] = 2\pi\Pi_{\omega_0}(\omega) = \begin{cases}\dfrac{\pi}{\omega_0}, & |\omega| < \omega_0,\\ 0, & |\omega| > \omega_0.\end{cases}$$

и равен прямоугольному импульсу (рис.2.3), что с очевидностью следует из соотношения взаимности (2.23).

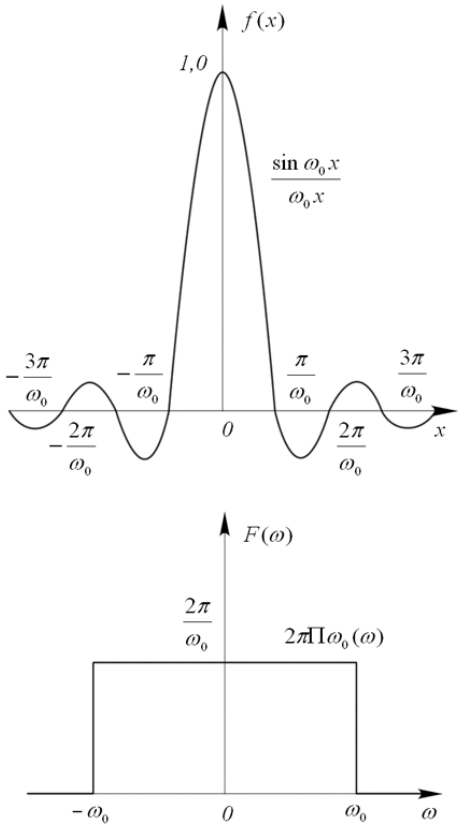


Рис. 2.3 Графики функции отсчетов и ее Фурье-образа

Гармонический сигнал, промодулированный прямоугольным импульсом, может быть представлен функцией

$$f(x) = \Pi_A(x)\cos\omega_0 x \qquad (2.55)$$

где $П_A(x)$ - прямоугольный импульс (2.51). Для нахождения Фурье-образа этой функции воспользуемся свойством (2.22).
Если

$$f_0(x) \xrightarrow{F} F_0(\omega),$$

то

$$e^{j\omega_0 x} f_0(x) \xrightarrow{F} F_0(\omega - \omega_0),$$

а также

$$f_0(x)\cos\omega_0 x = \frac{f_0(x)}{2}\left[e^{j\omega_0 x} + e^{-j\omega_0 x}\right] \xrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[F_0(\omega-\omega_0) + F_0(\omega+\omega_0)\right]. \qquad (2.56)$$

В нашем случае $f_0(x)$ равна прямоугольному импульсу $П_A(x)$, и поскольку известен ее Фурье-образ (2.52), то (рис. 2.4)

$$F(\omega)=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\omega-\omega_0)A}{(\omega-\omega_0)A}+\frac{\sin(\omega+\omega_0)A}{(\omega+\omega_0)A}\right]. \qquad (2.57)$$

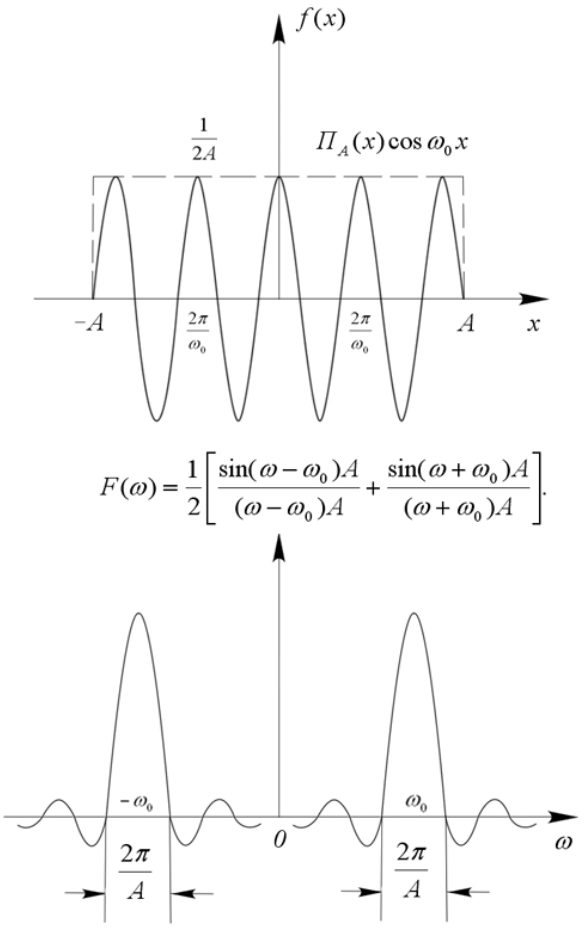


Рис. 2.4 Графики гармонического сигнала, промодулированного прямоугольным импульсом, и его Фурье-образа

Два прямоугольных импульс одной полярности. Эта функция запишется так:

$$f(x)=\Pi_A(x+2A)+\Pi_A(x-2A). \qquad (2.58)$$

Фурье-образ этой функции равен

$$F(\omega)=\frac{\sin\omega A}{\omega A}\left(e^{-j2A\omega}+e^{j2A\omega}\right)=2\cos 2\omega A\frac{\sin\omega A}{\omega A}. \qquad (2.59)$$

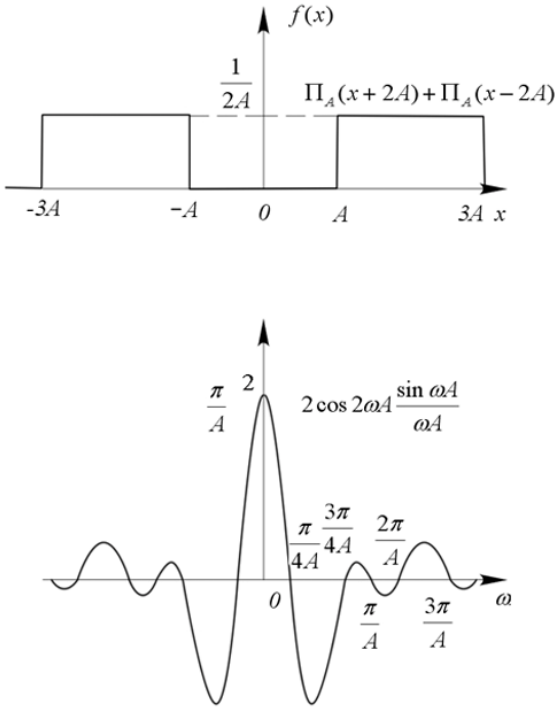


Рис.2.5 График функции из двух прямоугольных импульсов одной полярности и ее Фурье-образа

Два прямоугольных импульса разной полярности. Функция $f(x)$ в этом случае имеет вид

$$f(x) = \Pi_A(x - A) - \Pi_A(x + A). \qquad (2.60)$$

Фурье-образ такой функции равен

$$F(\omega) = \frac{\sin \omega A}{\omega A}(e^{j\omega A} - e^{-j\omega A}) = 2j\frac{\sin^2 \omega A}{\omega A}. \qquad (2.61)$$

Треугольный импульс. Функцию треугольного импульса можно записать в виде

$$\Lambda_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{A}\left(1 - \frac{|x|}{A}\right), |x| < A, \\ 0, \qquad\qquad |x| > A. \end{cases} \qquad (2.62)$$

Легко убедиться в том, что треугольный импульс представляет собой интеграл от двух прямоугольных импульсов разной полярности, деленный на A. Интегрированию исходной функции (см. (2.27-2.32))

$$\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi$$

соответствует операция

$$F(\omega) \to \Phi(\omega) = \frac{F(\omega)}{j\omega}$$

над Фурье-образом $F(\omega)$ исходной функции $f(x)$. Таким образом, с помощью (2.61) получаем

$$\Lambda_A(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2j\frac{\sin^2 \omega A}{\omega A}\frac{1}{j\omega}\cdot\frac{1}{A} = 2\frac{\sin^2 \omega A}{\omega^2 A^2} = 2\sin c^2 \frac{\omega A}{\pi}. \quad (2.63)$$

Квадрат функции отсчетов. Эта функция обладает следующим свойством:

$$\frac{\sin^2 \omega_0 x}{\omega_0^2 x^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\Lambda_{\omega_0}(\omega). \quad (2.64)$$

Воспользовавшись теоремой моментов (2.36), легко убедиться в том, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 \omega_0 x}{\omega_0^2 x^2}dx = \mathcal{F}\left[\frac{\sin^2 \omega_0 x}{\omega_0^2 x^2}\right]_{\omega=0} = \pi\Lambda\omega_0(0) = \frac{\pi}{\omega_0}. \quad (2.65)$$

По аналогии с (2.56) находим

$$\frac{\sin^2 \omega_0 x}{\omega_0^2 x^2}\cos\Omega x \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{2}\left[\Lambda_{\omega_0}(\omega+\Omega) + \Lambda_{\omega_0}(\omega-\Omega)\right] \quad (2.66)$$

Экспоненциальный спад. Эта функция отлична от нуля только при $x>0$:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, x > 0, \\ 0, \quad x < 0. \end{cases} \quad (2.67)$$

Имеем

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}e^{-j\omega x}dx = \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad (2.68)$$

или

$$e^{-\alpha x}(x>0) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}e^{-j\arctg\frac{\omega}{\alpha}}. \quad (2.69)$$

Из (2.69) легко можно получить Фурье-образ функции $e^{-\alpha|x|}$. Действительно, любую функцию можно представить в виде суммы четной и нечетной функций:

$$f(x) = f_{\oplus}(x) + f_{\ominus}(x). \quad (2.70)$$

Далее, воспользовавшись свойствами симметрии Фурье-образов четной и нечетной действительных функций, обнаруживаем, что

$$\mathcal{F}[f(x)] = F(\omega) = \mathrm{Re}\,F(\omega) + \mathrm{Im}\,F(\omega) = \mathcal{F}[f_{\oplus}(x)] + j\mathcal{F}[f_{\ominus}(x)]. \quad (2.71)$$

Поскольку функция

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-\alpha|x|} \qquad (2.72)$$

является четной частью функции $e^{-\alpha x}$ $(x>0)$, то для определения ее Фурье-образа достаточно взять действительную часть Фурье-образа функции $e^{-\alpha x}$ $(x>0)$. Следовательно,

$$e^{-\alpha|x|} \xrightarrow{F} \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} \qquad (2.73)$$

Далее легко можно получить

$$\frac{x^{n-1}e^{-\alpha x}}{(n-1)!}(x>0) \xrightarrow{F} \frac{1}{(\alpha+j\omega)^n} \qquad (2.74)$$

А также найти Фурье-образ функции

$$e^{-\alpha x}\sin\beta x(x>0) \xrightarrow{F} \frac{\beta}{(\alpha+j\omega)^2+\beta^2} \qquad (2.75)$$

Функция Гаусса. По определению

$$f(x)=e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} \qquad (2.76)$$

Для того чтобы определить ее Фурье-образ, воспользуемся свойством моментов. Сначала определим момент нулевого порядка

$$m_0=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}dx=\alpha\sqrt{\pi}. \qquad (2.77)$$

Дифференцируя последнее выражение n раз по α, находим

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}x^{2n}e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}dx&=\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2^n}\alpha^{2n+1}\sqrt{\pi},\\ \int_{-\infty}^{\infty}x^{2n-1}e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}dx&=0,\end{aligned}\right\} \qquad (2.78)$$

так как моменты нечетного порядка от четной функции равны нулю. Таким образом,

$$F(\omega)=\alpha\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)(2\alpha^2)^n}{(2n)!}(-j\omega)^{2n}=\alpha\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2\alpha^2}{4}} \qquad (2.79)$$

или

$$e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} \xrightarrow{F} \alpha\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2\alpha^2}{4}}. \qquad (2.80)$$

Для $\alpha^2=2$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \xrightarrow{F} \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}} \qquad (2.81)$$

Косинусный и синусный Фурье-образы. Фурье-образ действительной функции (2.1) можно разложить на действительную и мнимую части:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx - j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx. \qquad (2.82)$$

Первое слагаемое,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx = F_c(\omega) \qquad (2.83)$$

называется *косинусным* Фурье-образом, а второе

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx = F_s(\omega) \qquad (2.84)$$

- синусным Фурье-образом. Функция $\cos\omega x$ может иметь некоторый сдвиг фаз, и ее можно записать так: $\cos(\omega x + \varphi)$. Легко видеть, что косинусный Фурье-образ получается в случае, если фаза $\varphi = 0$, а синусный Фурье-образ соответствует фазе $\varphi = \pi/2$. Случай произвольной фазы соответствует линейной комбинации косинусного и синусного Фурье-образов.

2.3 Интегральные операции свертки и корреляции абсолютно интегрируемых функций

Следующим классом интегральных преобразований, имеющим большое значение в оптике является интегральная операция свертки.

Если функция $f_1(x)$ абсолютно интегрируема, т. е. интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)| dx$ существует и конечен, а функция $f_2(x)$ ограничена на интервале $(-\infty, \infty)$, то существует функция

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi, \qquad (2.85)$$

которая называется сверткой двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и обозначается с помощью операторного символа $\otimes$:

$$f(x) = f_1(x) \otimes f_2(x). \qquad (2.86)$$

Для дискретных функций f_i и g_i операция свертки записывается следующим образом:

$$[f_i \otimes g_i] = \sum f_i g_{j-i} \qquad (2.87)$$

Переменная x в (2.85) задает последовательность сдвигов функции $f_2(x)$ относительно $f_1(x)$. Подынтегральное выражение интеграла (2.85) равно произведению функции $f_1(\xi)$ на перевернутую функцию $f_2(x-\xi)$, сдвинутую относительно первой функции на величину x. Если ξ заменить на $x-\xi$ в (2.85) , то, изменив пределы и дифференциал, получим

$$f(x)=f_1(x)\otimes f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x-\xi)f_2(\xi)d\xi=f_2(x)\otimes f_1(x). \qquad (2.88)$$

Таким образом, операция свертки является коммутативной: результат свертки не зависит от порядка «сомножителей». Если $f_1(x)=f_2(x)$, то интегральная операция (2.85) называется автосверткой двух функций.

Прямая теорема свертки. Фурье-образ $F(\omega)$ ***свертки двух функций*** $f_1(x)$ ***и*** $f_2(x)$ ***равен произведению Фурье-образов*** $F_1(\omega)$ *и* $F_2(\omega)$ ***исходных функций.***

Действительно, используя соотношение для обратного преобразования Фурье функции $f_2(x)$, получаем

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)f_2(x-\xi)d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)\int_{-\infty}^{\infty}F_2(\omega)e^{j(x-\xi)\omega}d\omega d\xi\ . \qquad (2.89)$$

Изменим порядок интегрирования в (2.89). Для этого необходимо, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty}F_2(\omega)e^{j(x-\xi)\omega}d\omega \qquad (2.90)$$

равномерно сходился по ξ. Если воспользоваться (2.2), то

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_2(\omega)e^{j\omega x}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)e^{-j\xi\omega}d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}F_2(\omega)F_1(\omega)e^{j\omega x}d\omega. \qquad (2.91)$$

Соотношение (2.91) иначе можно записать следующим образом:

$$F[f(x)]=F(\omega)=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$$

или

$$f_1(x)\otimes f_2(x)\xrightarrow{F}F_1(\omega)\cdot F_2(\omega) \qquad (2.92)$$

Обратная теорема свертки. Произведению исходных функций $f_1(x)$ ***и*** $f_2(x)$ ***соответствует свертка Фурье-образов*** $F_1(\omega)$ ***и*** $F_2(\omega)$ ***этих функций.***

Из соотношения взаимности

$$F(x)\xrightarrow{F}2\pi f(-\omega)$$

И прямой теоремы свертки

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi\xrightarrow{F}F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$$

следует, что

$$F_1(\omega)\otimes F_2(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(u)F_2(\omega-u)du\xrightarrow{F^{-1}}2\pi f_1(x)\cdot f_2(x), \qquad (2.93)$$

или

$$f_1(x)\cdot f_2(x)\xrightarrow{\hat{F}}\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)\otimes F_2(\omega). \qquad (2.94)$$

Из полезных частных случаев рассмотрим значение свертки в нуле, т.е. рассмотрим свертку *f(x)* при $x = 0$:

$$f(0)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)f_2(-x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)d\omega. \qquad (2.95)$$

Получаем следующее фундаментальное следствие:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(-x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)d\omega \qquad (2.96)$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2(-\omega)d\omega\,. \qquad (2.97)$$

Условие применимости соотношения (2.96.) состоит в том, что функции $f_1(x)$ и $F_2(w)$ должны быть абсолютно интегрируемы.

Учитывая, что замена $f_2(x)$ на $f_2^{\,*}(-x)$ влечет за собой замену $F_1(\omega)$ на $F_2^*(\omega)$, находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2^*(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2^*(\omega)d\omega\,. \qquad (2.98)$$

Пользуясь теоремой свертки, можно доказать, что свертка двух функций Гаусса также есть функция Гаусса

$$e^{\frac{-x^2}{\alpha^2}} \otimes e^{\frac{-x^2}{\beta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\xi^2}{\alpha^2}} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{\beta^2}} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}\alpha\beta e^{\frac{-x^2}{\gamma^2}} \qquad (2.99)$$

с дисперсией γ^2, которая равна

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2\,. \qquad (2.100)$$

Если $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$, то из (2.97) получаем соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw, \qquad (2.101)$$

известное в литературе как ***формула Парсеваля***.

Кроме интегральной операции свертки двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ существует интегральная операция ***кросс-корреляции*** этих функций:

$$\varphi_{12}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') f_2^{\,*}(x'+x)dx', \qquad (2.102)$$

которая обозначается операторным символом *:

$$\varphi_{12}(x) = f_1(x) * f_2(x). \qquad (2.103)$$

В то время как свертка коммутативна относительно перестановки функций f_1 и f_2, кросс-корреляция подобным свойством не обладает. Действительно,

$$\varphi_{21}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x') f_1^{\,*}(x'+x)dx' = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x'-x) f_1^{\,*}(x')dx' = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') f_2^{\,*}(x'-x)dx'\right]^* = \varphi_{12}^{\,*}(-x)\,.$$

Таким образом,

$$\varphi_{21}(x) = \varphi^*_{12}(-x)\,. \qquad (2.104)$$

Кросс-корреляцию можно свести к свертке функций:

$$\varphi_{12}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') f_2^{\,*}(x'+x)dx' = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') f_2^{\,*}[x'-(-x)]dx' = f_1(x)\otimes f_2^{\,*}(-x)\,. \qquad (2.105)$$

Таким образом,

$$f_1(x) * f_2(x) = f_1(x)\otimes f_2^{\,*}(-x) \qquad (2.106)$$

Это соотношение позволяет перенести все свойства свертки двух функций, рассмотренные ранее, на кросс-корреляцию этих функций.

Если $f_1(x) = f_2(x)$, то интегральная операция (2.102) называется ***автокорреляцией.***

Определение свертки (2.85) или корреляции (2.102) для функций одной переменной можно обобщить на двумерный случай. При этом двумерной сверткой называется интеграл

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi,\eta) f_2(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta, \quad (2.107)$$

где $x(x,y)$, $\xi(\xi,\eta)$ - координаты фиксированной и текущей точек на плоскости. Далее вместо (2.92) и (2.94) получаем

$$f_1(x) \otimes f_2(x) \overset{F}{\rightarrow} F_1(\omega) F_2(\omega) \quad (2.108)$$

и

$$f_1(x) f_2(x) \overset{F}{\rightarrow} \frac{1}{(2\pi)^2} F_1(\omega) \otimes F_2(\omega). \quad (2.109)$$

Аналогичные соотношения существуют и для кросс-корреляции.

2.4 Скалярное произведение и его свойства

Ранее было отмечено, что достаточным условием существования Фурье-образа является абсолютная интегрируемость исходной функции, т. е. конечность интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Однако преобразование Фурье можно рассматривать на другом классе функций, т.н. функций с интегрируемым квадратом. По определению функция *f(x)* называется ***функцией с интегрируемым квадратом***, если существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx, \quad (2.110)$$

который иначе называется ***квадратом нормы функции f(x)*** и обозначается

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \|f\|^2 \quad (2.111)$$

Требование конечности нормы функции $\|f\|$ позволяет существенно расширить класс функций, над которыми можно совершать преобразования Фурье и свертки. В частности, этому требованию удовлетворяют так называемые ***обобщенные функции*** или ***распределения.*** Действительно, если функция *f(x)* имеет конечную норму $\|f\|$, из формулы Парсеваля $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$, следует, что Фурье-образ также является функцией

с интегрируемым квадратом, а его норма с точностью до множителя $\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$ равна норме исходной функции:

$$\|f\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,\|F\|\,, \qquad (2.112)$$

из чего следует важный вывод . Если две произвольные функции *f(x)* и *g(x)* имеют конечные нормы $\|f\|$ и $\|g\|$, то их сумма *f(x)* + *g(x)* также имеет конечную норму, что можно представить виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f+g|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F+G|^2\,d\omega \qquad (2.113)$$

или более подробно

$$\|f\|^2 + \|g\|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\|F\|^2 + \|G\|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G^*(\omega)d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega)G(\omega)d\omega\right\} \qquad (2.114)$$

Используя (2.112), находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} fg^*dx + \int_{-\infty}^{\infty} f^*gdx = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} FG^*d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} F^*Gd\omega\right\}. \qquad (2.115)$$

Если аналогичные рассуждения повторить для функции $f(x) + jg(x)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f+jg)(f^*-jg^*)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (F+jG)(F^*-jG^*)d\omega$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(f^*g - fg^*\right)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(F^*G - FG^*\right)d\omega \qquad (2.116)$$

Из чего следует, что если *f(x)* и *g(x)* имеют конечные нормы, то справедливо следующее соотношение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G^*(\omega)d\omega \qquad (2.117)$$

Его можно сформулировать следующим образом: если две произвольные функции *f(x)* и *g(x)* имеют конечные нормы, т.е. являются функциями с интегрируемым квадратом, то в результате преобразования Фурье

сохраняется интеграл, который называется ***скалярным произведением*** двух функций *f(x)* и *g(x)* и имеет смысл перекрестной нормы этих функций:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \qquad (2.118)$$

Ниже используется следующее общепринятое обозначение:

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \qquad (2.119)$$

Понятие скалярного произведения двух функций, так же как и понятие нормы, аналогично понятиям скалярного произведения и нормы в векторной алгебре. Одно из наиболее фундаментальных свойств преобразования Фурье состоит в том, что скалярное произведение двух функций при этом сохраняется с точностью до постоянного множителя.

Отметим основные свойства скалярного произведения.

Если скалярное произведение существует, то операция скалярного умножения двух функций является коммутативной и ассоциативной по отношению к сложению:

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \langle g(x), f(x)\rangle, \qquad (2.120)$$

$$\langle a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x), g(x)\rangle = a_1\langle f_1(x), g(x)\rangle + a_2\langle f_2(x), g(x)\rangle, \qquad (2.121)$$

где a_1 и a_2 - постоянные комплексные числа.

Далее,

$$\begin{aligned}\langle f(x), g(x)\rangle &= \frac{1}{2\pi}\langle F(\omega), G(-\omega)\rangle,\\ \langle f(x), g^*(x)\rangle &= \frac{1}{2\pi}\langle F(\omega), G^*(\omega)\rangle.\end{aligned} \qquad (2.122)$$

Если скалярное произведение функции *f(x)h(x)* на функцию *g(x)* существует, то

$$\langle f(x)h(x), g(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(x)g(x)dx = \langle f(x), g(x)h(x)\rangle. \qquad (2.123)$$

При трансляции одной функции на величину x_0 получаем

$$\begin{aligned}\langle f(x-x_0), g(x)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)g(x)dx =\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x+x_0)dx = \langle f(x), g(x+x_0)\rangle.\end{aligned} \qquad (2.124)$$

При масштабировании одной из функций в *a* раз имеем

$$\begin{aligned}\langle f(ax), g(x)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)g(x)dx =\\ &= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g\left(\frac{x}{a}\right)dx = \frac{1}{|a|}\left\langle f(x), g\left(\frac{x}{a}\right)\right\rangle.\end{aligned} \qquad (2.125)$$

2.5 Обобщенные функции. Свойства и примеры.

Представление о непрерывной среде или непрерывном поле, вытекающее из основных понятий классической математики, было тормозом при формулировке принципов математической физики. Фактически математика игнорировала дискретное строение материи, выступившее на передний план после создания квантовой механики и фундаментальных открытий современной физики. Обобщенная функция или распределение — математическое понятие, обобщающее классическое понятие функции. Потребность в таком обобщении уже достаточно давно возникла во многих физических и математических задачах. С другой стороны, в понятии обобщенной функции нашел отражение тот факт, что реально нельзя измерить значение физической величины в точке, а можно измерять лишь ее средние значения в малых окрестностях данной точки. Таким образом, техника обобщенных функций служит удобным и адекватным аппаратом для описания распределений различных физических величин. Обобщенные функции были введены впервые в конце 20-х годов XX века Дираком в его исследованиях по квантовой механике, где он систематически использует понятие дельта-функции и ее производных. В дальнейшем теория обобщенных функций интенсивно развивалась многими математиками и физиками-теоретиками, главным образом в связи с потребностями теоретической и математической физики и теории дифференциальных уравнений.

Формально обобщенная функция $f(x)$ определяется как линейный непрерывный функционал над тем или иным векторным пространством достаточно «хороших функций» (так называемых ***основных функций***) – такая функция $g(x)$ точки x, которая имеет непрерывные производные всех порядков и финитна, то есть, отлична от нуля только в конечной области независимой переменной x.

Рассмотрим определение обобщённой функции на примере смещенной дельта-функции. Для этого достаточно указать результат операции

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) g(x) dx = g(x_0)$$

для любой достаточно «хорошей» функции $g(x)$. Данный интеграл при заданной функции $g(x)$ представляет собой число. Если взять другую достаточно «хорошую» функцию $g_1(x)$, то получим другое число. Правило, по которому каждой функции $g(x)$ из класса «хороших» функций приписывается некоторое число, и называется функционалом. Функционалом данного примера является скалярное произведение двух функций

$$\langle \delta(x - x_0), g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) g(x) dx .$$

То есть задание числа, определенного для любой «хорошей» функции $g(x)$, достаточно, чтобы полностью определить свойства обобщенной

функции, не определяя ее непосредственно. Нужно учесть, что такая запись с помощью интеграла является чисто условной, так как значение интеграла зависит от последовательности устремления к пределу, то есть, строго говоря, интеграл не имеет смысла.

Все «хорошие» функции допускают преобразования Фурье. Действительно, достаточным условием существования Фурье-образа является абсолютная интегрируемость исходной функции. Поскольку «хорошие» функции отличны от нуля только на конечной области независимой переменной, то они, в силу непрерывности, абсолютно интегрируемы.

Обобщенные функции, определяемые локально суммируемыми функциями $f(x)$ по формуле

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \qquad (2.126)$$

называются ***регулярными,*** остальные обобщенные функции называются ***сингулярными***. Обобщая выше сказанное, можно сделать вывод, что к понятию обобщенной функции следует обращаться в следующих случаях:

- исходная функция не является абсолютно интегрируемой;
- исходная функция входит в класс сингулярных функций;
- необходимо осуществить дифференцирование функций абсолютно интегрируемых, но имеющих разрывы.

Примеры обобщенных функций.

Обобщенная дельта-функция Дирака.

Любой «хорошей» функции $g(x)$ можно приписать число $g(0)$, равное значению этой функции в нуле

$$\langle \delta(x), g(x)\rangle = g(0). \qquad (2.127)$$

Аналогичный функционал записывается и для смещенной дельта-функции $g(x-x_0)$:

$$\langle \delta(x-x_0), g(x)\rangle = \langle \delta(x), g(x+x_0)\rangle = g(x_0). \qquad (2.128)$$

Дельта-функцию $\delta(x-x_0)$ можно определить как точечную единичную массу (или точечный источник), расположенную на прямой - оси *OX* в точке $x = x_0$.

Для произведения двух «хороших» функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$ имеем:

$$\begin{aligned}&\langle \delta(x-x_0), g_1(x)g_2(x)\rangle = \langle \delta(x-x_0), g_1(x)g_2(x_0)\rangle \\ &= \langle \delta(x-x_0), g_1(x_0)g_2(x)\rangle = g_1(x_0)g_2(x_0)\end{aligned}. \qquad (2.129)$$

Дельта-функция от сложного аргумента равна

$$\delta(\phi(x-x_0)) = \frac{\delta(x-x_0)}{\left|\frac{d}{dx}\right|\phi(x_0)} \qquad (2.130)$$

В простейшем частном случае $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$

Если уравнение $\varphi(x) = 0$ имеет счетное число корней x_i, то

$$\delta(\phi(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|\phi'(x_i)|} \qquad (2.131)$$

Иначе говоря, функция $\delta(\phi(x))$ состоит из последовательности точечных масс, значение каждой из которых равно $m_i = \frac{1}{\phi'(x_i)}$, то есть величине, обратной значению производной функции $\varphi(x)$ в точках x_i, являющихся корнями уравнения $\varphi(x) = 0$.

Свойства обобщенных функций.

1. Функционал (2.126) является линейным, если

$\langle a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x), g(x)\rangle = a_1\langle f_1(x), g(x)\rangle + a_2\langle f_2(x), g(x)\rangle$, где a_1, a_2 – постоянные комплексные числа.

2. Если функционал (2.126) равен нулю: $\langle f(x), g(x)\rangle = 0$, для любой функции $g(x)$, то обобщенная функция $f(x) = 0$.

3. По определению две обобщенные функции равны, если их разность равна нулю.

$$\langle f_1(x) - f_2(x), g(x)\rangle = 0$$

$$\langle f_1(x), g(x)\rangle - \langle f_2(x), g(x)\rangle = 0$$

$$\langle f_1(x), g(x)\rangle = \langle f_2(x), g(x)\rangle$$

И наоборот, если выполняется последнее равенство для любой $g(x)$, то две обобщенные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ равны друг другу. Но это не означает равенство во всех точках задания этих функций, то есть они могут отличаться в некотором числе изолированных точек.

4. Произведение любой обобщенной функции $f(x)$ на бесконечно дифференцируемую функцию $a(x)$ равно по определению

$$\langle a(x)f(x), g(x)\rangle = \langle f(x), a(x)g(x)\rangle$$

Перемножить две произвольные обобщенные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в общем случае нельзя. Так как выражение $f^2(x)$ не имеет смысла. Таким образом, теория обобщенных функций допускает только операции умножения типа $a(x)f(x)$.

Если для известной обобщенной функции $f(x)$ имеет место равенство $\langle xf(x), g(x)\rangle = \langle f(x), xg(x)\rangle = 0$, то $f(x) = a\delta(x)$, где a – комплексное число.

5. Для обобщенных функций справедлива формула трансляции для обычных функций:

$$\langle f(x - x_0), g(x)\rangle = \langle f(x), g(x + x_0)\rangle$$

6. Отражение (инверсия) в начале координат:

$$\langle f(-x), g(x)\rangle = \langle f(x), g(-x)\rangle$$

7. Обобщенные функции имеют производные всех порядков, которые также являются обобщенными функциями.

Доказательством служит пример обычной функции. Если эта функция непрерывна и обладает непрерывной производной, то можно построить ее функционал. Проинтегрировав по частям этот функционал и учтя, что функция $g(x)$ обращается в нуль вне конечного отрезка $[a,b]$, можно получить формулу, применимую и к обобщенным функциям.

Для случая многих независимых переменных x $(x,y,z,...)$ последовательность дифференцирования при получении смешанных производных можно менять.

Лапласиан от распределения $f(x)$ определяется $\langle \Delta f, g\rangle = \langle f, \Delta g\rangle$, где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Обобщенная функция Хевисайда условно обозначаемая символом $\mathrm{Y}(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ и называемая единичной ступенькой, имеет производную $\mathrm{Y}'(x)$, определяемую функционалом

$$\left\langle \frac{d\mathrm{Y}(x)}{dx}, g(x)\right\rangle = \left\langle \mathrm{Y}(x), \frac{-dg(x)}{dx}\right\rangle = -\int_0^\infty \frac{dg(x)}{dx}dx = g(0) = \langle \delta(x), g(x)\rangle, \qquad (2.132)$$

откуда $\dfrac{d\mathrm{Y}(x)}{dx} = \delta(x).$

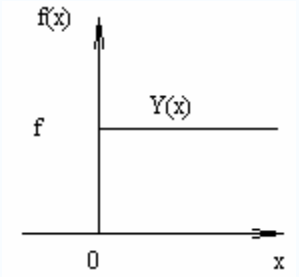


Рис. 2.6 Функция Хевисайда

Таким образом, скачок единичной ступеньки равен единичному импульсу, то есть дельта-функции. Дальнейшее дифференцирование позволяет определить производные от дельта-функции:

$$\langle \delta'(x), g(x)\rangle = -\langle \delta(x), g'(x)\rangle = \frac{-dg(0)}{dx}. \qquad (2.133)$$

Функция $\delta'(x)$ означает «единичное биение». Ее можно интерпретировать, например, как единичный диполь с моментом $\rho = -1$, помещенный в начало координат.

Если $f(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция при $x < 0$ и при $x > 0$, но она сама и ее производные в точке $x = 0$ имеют скачки первого рода $\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_m$, то

$$\langle f'(x), g(x)\rangle = -\langle f(x), g'(x)\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} fg'\,dx = -\int_{-\infty}^{0} f(x)g'(x)dx - \int_0^{\infty} f(x)g'(x)dx$$

$$-\int_0^\infty fg'\,dx = -\left[f(x)g(x)\right]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty f'(x)g(x)dx = f(+0)g(0) + \int_0^\infty f'(x)g(x)dx,$$ где $f(+0)$ - предел функции при ее стремлении к нулю справа.

$$\int_{-\infty}^0 f(x)g'(x)dx = -f(-0)g(0) + \int_{-\infty}^0 f'(x)g(x)dx \quad \text{и} \quad -\langle fg'\rangle = \sigma_0 g(0) + \int_{-\infty}^\infty f'(x)g(x)dx$$

Из чего следует

$f' = \{f'\} + \sigma_0\delta$, где $\{f'\}$ – обобщенная функция, определяемая функциями, которые равны обычным производным при $x < 0$ и при $x > 0$ и не определены в точке $x = 0$. Продолжая далее, можно найти $f'' = \{f''\} + \sigma_0\delta' + \sigma_1\delta$ и т.д. В качестве примера можно предложить найти самостоятельно первую производную обобщенной функции $Y(x)\cos x$ или $Y(x)\sin x$.

2.6 Преобразование Фурье обобщенных функций.

Основное соотношение, задающее свойства Фурье-образа обобщенных функций, имеет вид

$$\langle f(x), g^*(x)\rangle = \frac{1}{2\pi}\left\langle \hat{F}\{f(x)\}, \hat{F}^*\{g(x)\}\right\rangle \qquad (2.134)$$

и называется равенством Парсеваля. Это же соотношение является определением Фурье-образа $F(\omega) = \hat{F}\{f(x)\}$ обобщенной функции $f(x)$. Функция $g(x)$ по прежнему является основной или «хорошей» функцией. Равенство Парсеваля применимо, однако, не к любой обобщенной функции и Фурье-образ произвольной обобщенной функции не существует. Таким образом, можно выделить класс ***«умеренных»*** обобщенных функций, которые имеют Фурье-образ. К ним относятся:

- функции, абсолютно интегрируемые;
- ограниченные функции;
- обобщенные функции, имеющие ограниченную область задания.

(Функция ℓ^x – пример функции, не являющейся умеренной.)

Свойство 1: Если умеренную обобщенную функцию $f(x)$ умножить на конечную степень x^m, то полученная обобщенная функция $x^m f(x)$ является умеренной.

Свойство 2: Любые производные умеренных обобщенных функций – также умеренные обобщенные функции.

Свойство 3: Фурье-образ умеренной обобщенной функции – также умеренная обобщенная функция.

Можно утверждать, что преобразование Фурье умеренных обобщенных функций взаимно обратимо. Нужно отметить, что преобразование Фурье-функции с ограниченной нормой имеет ту же норму с точностью до $\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$.

Класс умеренных обобщенных функций гораздо более широкий, чем класс нормальных функций.

Рассмотрим несколько полезных примеров.

Пример 1. Найдем Фурье-образ дельта-функции. Из равенства Парсеваля следует, что

$$2\pi\langle\delta(x),g(x)\rangle=\left\langle F\{\delta(x)\},G(\omega)\right\rangle=\left\langle\delta(x),\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega x}G(\omega)d\omega\right\rangle=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)d\omega=\langle 1(\omega),G(\omega)\rangle$$

т.е. $F\{\delta(x)\}=1(\omega)$ (2.135)

Аналогично доказывается следующее утверждение

$\left\langle F\{\delta(x-x_0\},G(\omega)\right\rangle=\left\langle e^{j\omega x_0},G(\omega)\right\rangle$, из чего следует

$$F\{\delta(x-x_0\}=e^{j\omega x_0} \quad (2.136)$$

Требуется самостоятельно доказать, что

$$F\{1(x)\}=2\pi\delta(\omega)$$

$$F\{(-jx)^n\}=2\pi\delta^{(n)}(\omega)$$

$$F\{e^{j\omega_0 x}\}=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

Пример 2. Найдем Фурье-образ гармонических функций *cos* $\omega_0 x$ и *sin* $\omega_0 x$. Очевидно,

$$\cos\omega_0 x=\frac{e^{j\omega_0 x}+e^{-j\omega_0 x}}{2}\xrightarrow{F}\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

и (2.137)

$$\sin\omega_0 x=\frac{e^{j\omega_0 x}-e^{-j\omega_0 x}}{2j}\xrightarrow{F}j\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$$

Пример 3. Вычислим Фурье-образ ***знаковой функции*** (рис. 2.7)

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases} \quad (2.138)$$

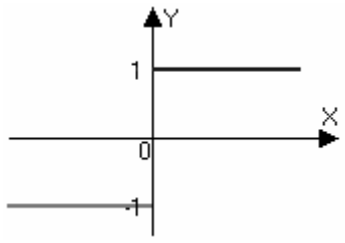


Рис. 2.7 Знаковая функция $\mathrm{sgn}(x)$

Легко проверить, что

$$\mathrm{sgn}\,x=2Y(x)-1 \quad (2.139)$$

где *Y(x)* – единичный скачок, или обобщенная функция Хевисайда. Таким образом, задача сводится к определению Фурье-образа обобщенной функции Хевисайда.

Как было отмечено выше, $Y'(x)=\delta(x)$ а поэтому

$$F\{Y(x)\} = F[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx] = \frac{F\{\delta(x)\}}{j\omega} = \frac{1(\omega)}{j\omega} \qquad (2.140)$$

а отсюда следует уравнение $F\{Y(x)\}j\omega = 1(\omega)$, решение которого

$$F\{Y(x)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \qquad (2.141)$$

$$F\{\mathrm{sgn}(x)\} = F\{2Y(x) - 1(x)\} = 2[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)] - 2\pi\delta(\omega) = \frac{2}{j\omega} = -\frac{2}{\omega}j \qquad (2.142)$$

Пример 4. Ступенчато-модулированная гармоника

$$f_1(x) = Y(x)\cos\omega_0 x = Y(x)\frac{e^{j\omega_0 x} + e^{-j\omega_0 x}}{2} \qquad (2.143)$$

имеет Фурье-образ

$$\frac{1}{2}F\{Y(x)\}_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{2}F\{Y(x)\}_{\omega=-\omega_0}$$

Используя (2.140), находим

$$F_1(\omega) = \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)] + \frac{1}{2j}(\frac{1}{\omega+\omega_0} + \frac{1}{\omega-\omega_0}) = \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad (2.144)$$

Аналогично, обобщенная функция $f_2(x) = Y(x)\sin\omega_0 x$ имеет Фурье-образ

$$F_2(\omega) = j\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad (2.145)$$

2.7 Усеченное преобразование Фурье

Очень часто оказывается невозможным осуществить полное обратное преобразование Фурье, и линейная система осуществляет так называемое ***усеченное*** обратное преобразование Фурье:

$$f_{yc}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega)e^{j\omega x}dx \qquad (2.146)$$

Физически это связано, в первую очередь, с конечным размером зрачка оптической системы или принудительным вмешательством в спектр пространственных частот сигнала, что характерно, например, при визуализации фазовых объектов. Иначе говоря, в системе используется только часть спектра, и внешняя отсеченная часть его пропадает. Можно доказать, что :

$$\lim_{\Omega\to\infty} f_{yc}(x) = f(x) \qquad (2.147)$$

Преобразуем выражение (2.146) следующим образом. Подставим в него выражение для $F(\omega)$:

$$f_{yc}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\left[\int_{-\Omega}^{\Omega}e^{j\omega(x-\xi)}d\omega\right]d\xi=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\frac{\sin\Omega(x-\xi)}{\pi(x-\xi)}d\xi=f(x)\otimes\frac{\sin\Omega x}{\pi x} \qquad (2.148)$$

Вторая функция в свертке при $\Omega\to\infty$ является дельта-образующей функцией

т.е $$\frac{\sin\Omega x}{\pi x}\to\delta(x) \qquad (2.149)$$

Поэтому

$$\lim_{\Omega\to\infty}f_{yc}(x)=\lim_{\Omega\to\infty}\left[f(x)\otimes\frac{\sin\Omega x}{\pi x}\right]=$$
$$=f(x)\otimes\left[\lim_{\Omega\to\infty}\frac{\sin\Omega x}{\pi x}\right]=f(x)\otimes\delta(x)=f(x) \qquad (2.150)$$

Рассмотрим класс функций *f(x)*, которые имеют разрывы первого рода в точке *x=0* и которые можно записать в виде:

$$f(x)=f_0(x)+\left[f(0^+)-f(0^-)\right]\mathrm{Y}(x)\ , \qquad (2.151)$$

где *Y(x)*- функция Хэвисайда, а $f_0(x)$ - непрерывная функция, $f(0^+)$, $f(0^-)$ - пределы справа и слева, к которым стремится обобщенная функция в точке разрыва. Осуществляя сначала прямое преобразование Фурье, а затем обратное усеченное преобразование Фурье, восстанавливающее исходный сигнал, находим согласно (2.148):

$$f_\Omega(x)=f_0(x)\otimes\frac{\sin\Omega x}{\pi x}+\left[f(0^+)-f(0^-)\right]\mathrm{Y}(x)\otimes\frac{\sin\Omega x}{\pi x} \qquad (2.152)$$

второе слагаемое можно преобразовать следующим образом:

$$\mathrm{Y}(x)\otimes\frac{\sin\Omega x}{\pi x}=\int_0^{\infty}\frac{\sin\Omega(x-\xi)}{\pi(x-\xi)}d\xi=\int_{-\infty}^{\Omega x}\frac{\sin x}{\pi x}dx=$$
$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{\pi x}dx+\int_0^{\Omega x}\frac{\sin x}{\pi x}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si(\Omega x) \qquad (2.153)$$

где

$Si(\Omega x)=\int_0^{\Omega x}\frac{\sin x}{\pi x}dx$ - интегральный синус

Функция (2.153) показана на рис. 2.8.

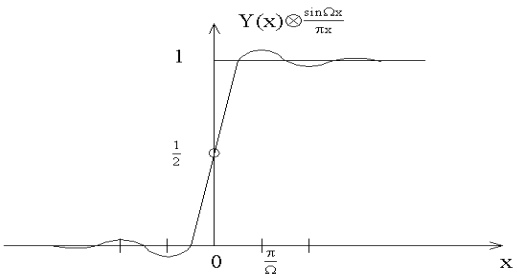


Рис. 2.8 График функции $Y(x) \otimes \frac{\sin \Omega x}{\pi x}$

Легко увидеть, что при $\Omega \to \infty$

$$f_\Omega(0) = f_0(0) + \frac{1}{2}\left[f(0^+) - f(0^-)\right] = \frac{f(0^+) - f(0^-)}{2} \qquad (2.154)$$

Предположим теперь, что Ω конечно (оптическая система пропускает ограниченный спектр пространственных частот с предельной частотой Ω). Если при этом Ω достаточно велико, то первое слагаемое (2.152) стремится к $f_0(x)$

$$f_0(x) \otimes \frac{\sin \Omega x}{\pi x} \approx f_0(x) \qquad (2.155)$$

Однако второе слагаемое при конечном Ω всегда имеет вид, приведенный на рис 2.9.

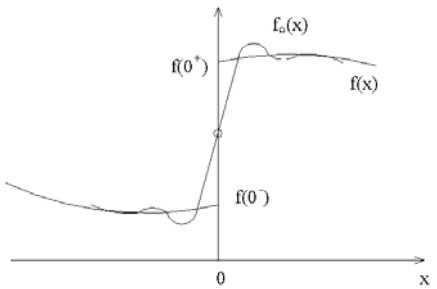


Рис.2.9 График усеченной функции $f_\Omega(x)$ вблизи точек разрыва исходной функции *f(x)*.

Увеличение Ω лишь изменяет масштаб шкалы вдоль оси *x*, не влияя на глубину осцилляций. Такое поведение восстановленной (усеченной) функции вблизи точек разрыва функции *f(x)* называется ***эффектом Гиббса***. Таким образом, усеченная функция не может удовлетворительно аппроксимировать исходную функцию вблизи точек разрыва, каким бы большим ни было Ω.

Возникает закономерный вопрос, можно ли найти другую функцию $\Phi(\omega)$ с той же предельной частотой Ω, чтобы получить лучшую аппроксимацию исходной разрывной функции *f(x)*. Напомним, что процесс дискриминации высоких частот $\omega \geq \Omega$ сводится практически к умножению Фурье-образа $F(\omega)$ исходной функции $f(x)$ на прямоугольный импульс $\Pi_\Omega(\omega)$ Действительно, по определению

$$\Pi_\Omega(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, |\omega| < \Omega \\ 0, \quad |\omega| > \Omega \end{cases}$$

и поэтому усеченный Фурье-образ равен

$$F_{yc}(\omega) = F(\omega) \cdot \Pi_\Omega(\omega) \cdot 2\Omega \qquad (2.156)$$

При обратном преобразовании получаем

$$f_{yc}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{yc}(\omega) e^{j\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) e^{j\omega x} dx$$

Появление эффекта Гиббса непосредственно связано с формой отсекающей функции, и если взять другую отсекающую функцию, например, треугольный импульс (аналог мягкой диафрагмы), то эффект Гиббса исчезнет. В этом случае усеченный Фурье-образ равен

$$\Phi_\Omega(\omega) = F(\omega) \cdot \Lambda_\Omega(\omega) \cdot \Omega \ , \qquad (2.157)$$

где

$$\Lambda_\Omega(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Omega}\left(1 - \dfrac{|\omega|}{\Omega}\right), |\omega| < 0 \\ 0, \qquad\qquad |\omega| > 0 \end{cases}$$

и аппроксимирующая функция равна

$$\Phi_\Omega(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \Lambda_\Omega(\omega) \cdot \Omega e^{j\omega x} d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{j\omega\xi} d\xi \cdot \Lambda_\Omega(\omega) \cdot \Omega e^{j\omega x} d\omega = \qquad (2.158)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{2\sin^2\left[\Omega \dfrac{(x-\xi)}{2}\right]}{\Omega(x-\xi)^2} d\xi = f(x) \otimes \mathrm{K}_\Omega(x)$$

Здесь $K_\Omega(x)$- ядро Фежера (см. 2.64). Так как функция униполярна, то функция $\Phi_\Omega(x)$ возрастает около точки разрыва монотонно (рис.2.10), и выбросы Гиббса пропадают.

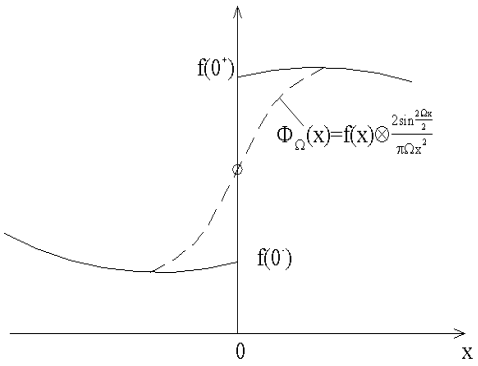


Рис.2.10. График аппроксимирующей функции $\Phi_\Omega(x)$
вблизи точек разрыва исходной функции *f(x)*.

Поскольку при $\Omega \to \infty$

$$\frac{2\sin^2\frac{\Omega x}{2}}{\pi\Omega x^2} \to \delta(x), \qquad (2.159)$$

то

$$\Phi_\Omega(x) \xrightarrow[\Omega\to\infty]{} f(x) \qquad (2.160)$$

Введение отсекающего треугольного импульса не единственный метод аппроксимации исходной функции без выбросов.

При рассмотрении вопроса, связанного с альтернативным выбором других отсекающих функций не было сформулировано никаких общих требований. Можно сформулировать задачу иначе. А именно, найти вид отсекающей функции, которая давала бы наилучшее среднеквадратичное приближение восстановленной функции, т.е. чтобы среднеквадратичное отклонение

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x) - \psi(x)\right]^2 dx \qquad (2.161)$$

было минимальным.

Докажем, что величина минимальна, когда отсекающая функция равна прямоугольному импульсу. Раскрывая выражение (2.161), получим

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dx + \int_{-\infty}^{-\infty} |\psi|^2 dx - 2\int_{-\infty}^{\infty} f\psi dx \qquad (2.162)$$

Воспользовавшись соотношением Парсеваля, находим

$$2\pi\cdot\varepsilon=\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega+\int_{-\Omega}^{\Omega}|\Psi(\omega)|^2d\omega-\int_{-\Omega}^{\Omega}F^*(\omega)\Psi(\omega)d\omega-$$

$$-\int_{-\Omega}^{\Omega}F(\omega)\Psi^*(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{-\Omega}|F(\omega)|^2d\omega+\int_{\Omega}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega+ \qquad (2.163)$$

$$+\int_{-\Omega}^{\Omega}[F(\omega)-\Psi(\omega)]\left[F^*(\omega)-\Psi^*(\omega)\right]d\omega$$

Первые два интеграла не зависят от $\Psi(\omega)$, а последний интеграл неотрицателен, так как подынтегральное выражение равно $|F(\omega)-\Psi(\omega)|^2$. Поэтому ε минимально, если только

$$\Psi(\omega)=F(\omega) \text{ при } |\omega|\le\Omega \mid \qquad (2.164)$$

В этих условиях последний интеграл обращается в нуль. При этом минимальное значение равно

$$\varepsilon_{мин}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\Omega}|F(\omega)|^2d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega \qquad (2.165)$$

Таким образом, показано, что именно прямоугольный отсекающий импульс обеспечивает среднеквадратичное приближение, а соответствующей аппроксимирующей функцией является функция

$$f_\Omega(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\Omega}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

Эффект отсекающей функции обычно рассматривается в связи с известной оптической проблемой аподизации.

3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА, ФРЕНЕЛЯ, ОТСЧЕТОВ, ДИРАКА

3.1 Преобразование Гильберта

По определению преобразованием Гильберта действительной функции $f(t)$ (где аргументом функции в общем случае может быть как координата точки наблюдения, так и время) называется интегральная операция

$$\chi(t)=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t')dt'}{t'-t}, \qquad (3.1)$$

где интегрирование ведется в смысле главного значения по Коши, т.е.

$$\chi(t)=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{t-\varepsilon}\frac{f(t')dt'}{t'-t}+\int_{t+\varepsilon}^{\infty}\frac{f(t')dt'}{t'-t}\right]. \qquad (3.2)$$

Функция $\chi(t)$ называется ***гильберт-образом*** функции $f(t)$. Операцию (3.1) обозначим, например, операторным символом $\hat{\Re}$:

$$\chi(t)=\hat{\Re}\{f(t)\}=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t')dt'}{t'-t}. \qquad (3.3)$$

Преобразование Гильберта является линейной операцией и представляет собой свертку исходной функции $f(t)$ с обобщенной функцией «главное значение $1/t$» или «$P\frac{1}{t}$»:

$$\chi(t)=\hat{\Re}\{f(t)\}=\frac{1}{\pi}f(t)\otimes\frac{1}{t}. \qquad (3.4)$$

Подействуем оператором Гильберта на гильберт-образ $\chi(t)$:

$$\hat{\Re}\{\chi(t)\}=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi(t')dt'}{t'-t}=\frac{1}{\pi}\chi(t)\otimes\frac{1}{t}=\frac{1}{\pi^2}f(t)\otimes\frac{1}{t}\otimes\frac{1}{t}. \qquad (3.5)$$

Можно доказать, пользуясь методами теории комплексных функций, что

$$\frac{1}{t}\otimes\frac{1}{t}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}\frac{dt'}{t'-t}=-\pi^2\delta(t). \qquad (3.6)$$

Тогда

$$\hat{\Re}\{\hat{\chi}(t)\}=\hat{\Re}\left\{\hat{\Re}\{f(t)\}\right\}=\hat{\Re}\hat{\Re}\{f(t)\}=-f(t), \qquad (3.7)$$

или в операторном виде

$$\hat{\Re}\hat{\Re}=-1.$$

Таким образом реализуется пара взаимообратных преобразований, переводящих исходную функцию в ее гильберт-образ и восстанавливающих из гильберт-образа исходный сигнал.

$$f(t) \overset{\Re}{\rightarrow} \chi(t), \qquad \chi(t) \overset{\Re}{\rightarrow} [-f(t)]. \tag{3.8}$$

Можно также доказать, что имеют место следующие соотношения, близкие к свойствам преобразования Фурье, приведенные в табл. 2.1:

$$f(t+t_0) \overset{\Re}{\rightarrow} \chi(t+t_0), \tag{3.9}$$

$$f(\pm at) \overset{\Re}{\rightarrow} \pm \chi(\pm at), \tag{3.10}$$

$$(t+t_0) f(t) \overset{\Re}{\rightarrow} (t+t_0)\chi(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt, \tag{3.11}$$

$$\frac{df(t)}{dt} \overset{\Re}{\rightarrow} \frac{d\chi(t)}{dt}. \tag{3.12}$$

Кросс-корреляция исходных действительных функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ связана с кросс-корреляцией их гильберт-образов $\chi_1(t)$ и $\chi_2(t)$ следующим соотношением:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_1(t)\chi_2(t+\tau)dt. \tag{3.13}$$

Для того чтобы доказать это, вспомним, что кросс-корреляцию $f_1(t) * f_2(t)$ можно свести к свертке $f_1(t) \otimes f_2(-t)$. Тогда

$$\begin{aligned} &\Re\Re\{f_1(t) \otimes f_2(-t)\} = \Re\{f_1(t)\} \otimes \Re\{f_2(-t)\} \\ &= \chi_1(t) \otimes \{-\chi_2(-t)\} = -\chi_1(t) \otimes \chi_2(-t) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Здесь использовано то, что действие линейного оператора на свертку эквивалентно линейному преобразованию одного из сомножителей свертки, а также учтено соотношение

$$\Re\{f(-t)\} = -\chi(-t). \tag{3.15}$$

Принимая далее во внимание соотношение (3.7), окончательно находим

$f_1(t) \otimes f_2(-t) = \chi_1(t) \otimes \chi_2(-t)$, т.е. (3.13).

Совершенно аналогично доказывается, что

$$f_1(t) \otimes \chi_2(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\chi_2(t+\tau)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \chi_1(t) f_2(t+\tau)dt = -\chi_1 \otimes f_2(-t),$$

или

$$f_1(t) \otimes \chi_2(-t) = -\chi_1(t) \otimes f_2(-t). \tag{3.16}$$

Преобразование Гильберта используется в теории аналитического сигнала, содержащего только положительные частоты, и в теории

когерентности света. При этом свойства гильберт-образа с неизбежностью выступают при различных операциях усечения, как, например, в спектроскопии Фурье и во многих других разделах когерентной оптики и голографии. Не затрагивая математической стороны вопроса теории преобразования Гильберта, отметим здесь, что аналитический сигнал

$$V(t) = f(t) + j\mathfrak{H}\{f(t)\} = f(t) + j\chi(t),$$

рассматриваемый как функция комплексной переменной $V(z)$, является аналитической функцией в нижней половине комплексной плоскости, если только исходная функция $f(t)$ удовлетворяет некоторым довольно общим условиям регулярности.

3.2 Преобразование Френеля

По определению ***преобразованием Френеля*** называется интегральное преобразование вида

$$\Phi(x) = \omega_0\sqrt{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{j\omega_0^2(x-\xi)^2}d\xi, \qquad (3.17)$$

Где *f(x)* – исходная функция, а *Φ(x)* – ее ***френелевский образ***. Функция

$$z(x) = \omega_0\sqrt{2}e^{j\omega_0^2x^2} \qquad (3.18)$$

называется ***функцией Френеля***. Выражаясь нестрого, ее можно получить из гармонической функции $e^{j\omega_0^2x^2}$, если пространственную частоту ω изменять по линейному закону:

$$\omega(x) = \omega_0(\omega_0 x). \qquad (3.19)$$

Преобразование Френеля (3.17) играет в оптике и в голографии такую же фундаментальную роль, как и преобразование Фурье. Основные свойства преобразования Френеля будут рассмотрены ниже.

Начнем со свойств функции Френеля и вычислим ее Фурье-образ:

$$Z(\omega) = \omega_0\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0^2x^2}e^{-j\omega x}dx = \omega_0\sqrt{2}e^{-j\frac{\omega^2}{4\omega_0^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\left[\omega_0 x-\frac{\omega}{2\omega_0}\right]^2}dx = \sqrt{2}e^{-j\frac{\omega^2}{4\omega_0^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{jt^2}dt, \qquad (3.20)$$

где $t = \omega_0 x - \dfrac{\omega}{2\omega_0}$. Можно доказать, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{jt^2}dt = \sqrt{\pi j}$. Тогда

$$Z(\omega) = \sqrt{2\pi}\exp j\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\omega^2}{4\omega_0^2}\right], \qquad (3.21)$$

или, в символической записи,

$$z(x) = \omega_0\sqrt{2}\exp j\omega_0^2x^2 \xrightarrow{F} Z(\omega) = \sqrt{2\pi j}\exp(-j\frac{\omega^2}{4\omega_0^2}); \qquad (3.22)$$

иначе (3.22) для одномерного случая можно записать так:

$$\exp j\omega_0^2 x^2 \xrightarrow{F} \frac{\sqrt{\pi j}}{\omega_0^2}\exp(-j\frac{\omega^2}{4\omega_0^2}), \qquad (3.23)$$

и для двумерного случая $\bar{x}$ *(x, y)* и $\bar{\omega}$ *(ω_x, ω_y):*

$$\exp i\omega_0^2 \bar{x}^2 \xrightarrow{F} \frac{\pi j}{\omega_0}\exp(-i\frac{\bar{\omega}^2}{4\omega_0^2}). \qquad (3.24)$$

Таким образом, Фурье образ функции Френеля в координатах пространственных частот ($\omega/2\omega_0$) равен функции Френеля, умноженной на комплексный коэффициент $\sqrt{2\pi}e^{j\pi/4} = \sqrt{2\pi j}$. Аналогичным свойством обладает лишь функция Гаусса $e^{-\omega_0^2 x^2}$, Фурье-образ которой равен самой функции Гаусса.

Из определения преобразования Френеля (3.17) следует, что это преобразование является сверткой исходной функции *f(x)* с функцией Френеля *z (x)*. Таким образом,

$$\Phi(x) = f(x) \otimes z(x). \qquad (3.25)$$

Каждое значение функции *f (x)* в точке *x* «размывается» в функцию Френеля, и затем все непрерывно смещенные картины Френеля суммируются.

Подобно преобразованию Фурье, интегральное преобразование Френеля является операцией, которая допускает восстановление исходной функции при повторном или обратном преобразовании Френеля. Действительно, если френелевский образ *Ф (x)* функции *f (x)* равен

$$\Phi(x) = f(x) \otimes z(x),$$

то френелевский образ функции *Ф (x),* согласно определению, равен

$$\begin{aligned}&\Phi(x) \otimes z^*(x) = \left[f(x) \otimes z(x)\right] \otimes z^*(x) = \\ &f(x) \otimes z(x) \otimes z^*(x) = f(x) \otimes \left[z(x) \otimes z^*(x)\right]\end{aligned} \qquad (3.26)$$

Найдем свертку $z(x) \otimes z^*(x)$. Согласно определению свертки

$$\begin{aligned}&z(x) \otimes z^*(x) = 2\omega_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0^2 \xi^2} e^{j\omega_0^2 (x-\xi)^2} d\xi = \\ &2|\omega_0| e^{j\omega_0^2 x^2} dx = e^{j\omega_0^2 x^2} \delta(x) = \delta(x)\end{aligned} \qquad (3.27)$$

Таким образом,

$$z(x) \otimes z^*(x) = \delta(x) \qquad (3.28)$$

Свертка двух функций Френеля равна дельта-функции Дирака. Отсюда

$$f(x) \otimes z(x) \otimes z^*(x) = f(x)$$

Таким образом, в результате двух последовательных преобразований Френеля получается исходная функция. Или, иначе, соотношение (3.29) означает, что функция *f (x)* и ее френелевский образ *Ф (x)* образуют пару, связанную соотношениями

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) z(x-\xi) d\xi = f(x) \otimes z(x)$$
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) z^*(x-\xi) d\xi = \Phi(x) \otimes z^*(x) \qquad (3.29)$$

Свойство (3.28) можно получить также с помощью теоремы о Фурье-образе свертки двух функций. Действительно,

$$F\left[z \otimes z^*\right] = \frac{1}{2\pi} Z \cdot Z^* = \frac{1}{2\pi} \left| \sqrt{2\pi} \exp j\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega^2}{4\omega_0^2} \right) \right|^2 = 1, \qquad (3.30)$$

откуда следует $z \otimes z^* = \delta(x)$.

Аналогично, френелевский образ можно найти по формуле

$$\Phi(x) = f(x) \otimes z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) Z(\omega) e^{j\omega x} d\omega, \qquad (3.31)$$

где *F(ω)* – Фурье-образ функции *f(x)*, а *Z(ω)* - Фурье-образ функции Френеля. Этой формулой, естественно, следует пользоваться в том случае, если *F (ω)* – функция более простая, чем *f (x)*.

Продолжим рассмотрение свойств функции Френеля. Свертка функции Френеля *z (x)* с единицей 1 *(x)* равна

$$z(x) \otimes 1(x) = \omega_0 \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0^2 x^2} dx = \sqrt{2\pi j} = \sqrt{2\pi} e^{j\frac{\pi}{4}}. \qquad (3.32)$$

При $\omega_0 \to \infty$ функция Френеля *z (x)* ведет себя интересным образом. Для уяснения этого свойства функции Френеля вычислим предел

$$\lim_{\omega_0 \to \infty} f(x) \otimes z(x). \qquad (3.33)$$

Воспользовавшись (3.31), получим

$$\lim_{\omega_0 \to \infty} f(x) \otimes z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) Z(\omega) e^{j\omega x} dx. \qquad (3.34)$$

Поскольку *Z (ω)* при $\omega_0 \to \infty$ стремится к постоянному значению $\sqrt{2\pi j}$ (см. (3.22), то

$$\lim_{\omega_0 \to \infty} f(x) \otimes z(x) = \sqrt{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega x} dx = 2\pi \sqrt{2\pi j} f(x). \qquad (3.35)$$

Вспомним, что аналогичным свойством обладает дельта-функция:

$$f(x) \otimes \delta(x) = f(x).$$

Было бы, однако, ошибочно из этих сравнений сделать вывод о том, что

$$\lim_{\omega_0 \to \infty} z(x) = 2\pi \sqrt{2\pi i} \cdot \delta(x).$$

Не существует однозначного решения сверточного уравнения. Единственное, что можно утверждать, это то, что при $\omega_0 \to \infty$ функция *z(x)* содержит бесконечно высокие пространственные частоты.

Из соотношения (3.31) следует, что френелевский образ существует всегда, когда существует Фурье-образ исходной функции. Таким образом, все теоремы об условиях существования преобразования Фурье и свертках полностью применимы к анализу преобразования Френеля. Это позволяет

достаточно определенно очертить класс функций, для которых существуют прямое и обратное преобразования Френеля.

Для функций f_1 (x) и f_2 (x), имеющих френелевские образы $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$, справедливы следующие соотношения:

$$f_1(x) \otimes f_2^*(x) = \frac{1}{2\pi} \Phi_1(x) \otimes \Phi_2^*(x)$$
$$f_1(x) \otimes f_2^*(-x) = \frac{1}{2\pi} \Phi_1(x) \otimes \Phi_2^*(-x) \qquad (3.36)$$

Если $\xi = 0$, то получаем соотношение Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2^*(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(x) \Phi_2^*(x) dx . \qquad (3.37)$$

Необходимо подчеркнуть, что при преобразовании Френеля, которое является сверткой, все операции производятся в обычном, координатном пространстве. В этом оно качественно отличается от преобразования Фурье, в результате которого предмет превращается в частотно-спектральный образ, заданный в пространстве Фурье-координат или пространственных частот.

3.3 Преобразования Дирака и отсчетов

Как было показано ранее обобщенная функция Дирака $\delta(x-x_0)$ определяется функционалом

$$\langle \delta(x - x_0), g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \delta(x - x_0) dx = g(x_0).$$

Соотношение

$$g(x) = g(x) \otimes \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \delta(x - \xi) d\xi \qquad (3.38)$$

задает интегральное ***преобразование Дирака*** типа свертки. Функцию $g(x)$ можно рассматривать как «дираковский» образ. В результате преобразования Дирака исходной функции получается значение исходной функции для заданного значения независимой переменной. Совокупность таких значений определяет исходную функцию. Дираковский образ совпадает с исходной функцией. Получается своеобразная тавтология. Однако, несмотря на это, преобразование Дирака имеет вполне определенный физический смысл и описывает идеализированную операцию сканирования или развертки сигнала вдоль координаты x с помощью бесконечно острого луча.

Если вместо дельта-функции Дирака ввести интегральное ядро вида

$$\frac{\sin \pi \omega_0 x}{\pi x} = \omega_0 \sin c \omega_0 x, \qquad (3.39)$$

то получим интегральное преобразование вида

$$S(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{\sin \pi \omega_0 (x - \xi)}{\pi (x - \xi)} d\xi = f(x) \otimes \frac{\sin \pi \omega_0 x}{\pi x}, \qquad (3.40)$$

которое называется ***преобразованием отсчетов,*** поскольку ядро интегрального преобразования вида (3.39) в радиооптике называется функцией отсчетов. При $\omega \to \infty$ функция отсчетов стремится к δ - функции:

$$\frac{\sin \omega x}{x} \xrightarrow[\omega \to \infty]{} \delta(x), \text{ а } \quad S(\omega, x) \xrightarrow[\omega \to \infty]{} f(x). \qquad (3.41)$$

Преобразование отсчетов (3.40) весьма похоже на преобразование Дирака, но, в отличие от последнего, функция *f(x)* сканируется не бесконечно узким лучом, а лучом, размытым вдоль координаты *x*. При таком преобразовании происходит процесс сглаживания исходной функции. Интервал Δx, на котором эффективно происходит процесс сглаживания, зависит от ω_0 – предельной пространственной частоты системы; чем больше частота ω_0, тем уже интервал Δx.

Преобразование отсчетов, таким образом, приводит к обрезанию или сужению эффективного спектра пространственных частот исходного сигнала *f(x)*. Свойства преобразования отсчетов (3.40) обычно используются при анализе информационной структуры оптического сигнала.

Сделаем краткий обзор всех рассмотренных выше интегральных преобразований, играющих в оптике немаловажное значение.

● ***Преобразование Фурье.*** Исходная функция представляется в виде бесконечной суммы многих гармоник последовательно возрастающих частот. Фурье-образ исходной функции совсем не похож на исходную функцию, однако изображает ее однозначно, так что при повторном преобразовании Фурье исходная функция полностью восстанавливается.

● ***Преобразование Френеля***. Исходная функция преобразуется в сумму последовательно смещенных картин Френеля соответствующей интенсивности. Каждая компонента френелевского образа определяется операцией свертки исходной функции с функцией Френеля. Френелевский образ редко похож на исходную функцию. Подобно преобразованию Фурье, преобразование Френеля дает однозначное восстановление исходной функции: при повторном преобразовании Френеля исходная функция полностью восстанавливается.

● ***Преобразование Дирака***. Дираковский образ состоит из последовательности дельта-функций, умноженных на значение исходной функции в соответствующих точках.

● ***Преобразование отсчетов.*** Отображается совокупность средних значений исходной функции на интервале эффективной длины $\Delta x \approx 1/\omega_0$. Происходит сглаживание функции. Преобразование в общем случае — необратимое. Однако если исходный сигнал имеет максимальную пространственную частоту $\omega_{\text{макс}}$, то при $\omega_0 >> \omega_{макс}$ преобразование становится обратимым.

Преобразования Дирака, Фурье и Френеля являются взаимно обратными интегральными преобразованиями. Эти свойства, однако, возникают по разным причинам.

В случае преобразования Фурье это - результат того, что гармонические функции $\ell^{j\omega x}$ являются взаимно ортогональными:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} e^{j\omega' x} dx = \delta(\omega - \omega') \qquad (3.42)$$

В случае же преобразования Дирака это — следствие того, что свертка двух дельта-функций Дирака равна дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi)\delta(x-\xi)d\xi = \delta(x) \otimes \delta(x) = \delta(x). \qquad (3.43)$$

Аналогично, при преобразовании Френеля свертка двух функций Френеля

$$z(x) \otimes z^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0^2 \xi^2} e^{j\omega_0^2 (x-\xi)^2} d\xi = \delta(x)$$

также равна дельта-функции Дирака.

В теории интегральных уравнений встречается проблема разрешения уравнений вида

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)K(x,\omega)dx. \qquad (3.44)$$

В результате такого интегрального преобразования исходная функция *f(x)* переходит в интегральный образ *F(ω)*. Здесь *K(x,ω)* - ядро интегрального преобразования, зависящее от параметра *ω*.

Задача формулируется так: по интегральному образу *F(ω)* найти прообраз *f(x),* т. е. исходную функцию. Решение сводится к нахождению интегрального ядра *H(x, ω)*, с помощью которого можно осуществить обратный переход к прообразу

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)H(\omega,x)d\omega. \qquad (3.45)$$

Существует класс интегральных ядер *K(x, ω)*, которые обладают таким свойством, что *H=K* или *H=K*,* т. е. прямое и обратное преобразования осуществляются с помощью одного и того же интегрального ядра. Интегральные ядра, обладающие таким свойством, называются ***ядрами Фурье.*** Каким же требованиям должно удовлетворять ядро *K(x, ω)*, чтобы входить в класс ядер Фурье? Ответ получен для класса интегральных ядер *K(x, ω)*, имеющих вид

$$K(x,\omega) = K(x\omega), \qquad (3.46)$$

т. е. когда параметр *ω* и координата *x* входят в виде сомножителей и ядро *K* зависит фактически от одной переменной. Согласно общей теореме для этого необходимо, чтобы интегральные преобразования Меллина ядра *K*

$$K(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)x^{s-1}dx,$$
$$K(1-s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)x^{-s-2}dx \qquad (3.47)$$

удовлетворяли соотношению $K(s)K(1-s) = 1.$

Эта теорема не распространяется на случай, когда интегральное ядро *K(x, ω)* имеет вид

$$K(x,\omega) = K(x-\omega), \qquad (3.48)$$

т. е. когда параметр ω входит в аргумент функции K в виде разности с координатой x. Общей теоремы для этого случая, охватывающего класс преобразований свертки, не существует. Достаточным условием обратимости интегрального преобразования свертки

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)K(x-\omega)dx = f(x) \otimes K(x) \qquad (3.49)$$

является условие

$$K^*(x) \otimes K(x) = \delta(x), \qquad (3.50)$$

т. е. свертка интегрального ядра с самим собой равна дельта-функции Дирака.

Из класса интегральных операций типа свертки (3.49) до сих пор рассматривались только преобразование Дирака и преобразование Френеля. Этот класс можно расширить. Например, следует упомянуть преобразования Голея и Жирара, которые используются в спектроскопии. В случае необходимости можно изобрести свое собственное преобразование, удовлетворяющее требованию (3.50). Рецепт введения новых интегральных преобразований типа свертки задан соотношением (3.50) и весьма прост: свертка ядра *K(x-ω)* с самим собой должна равняться дельта-функции. Для того чтобы ядро *K(x-ω)* могло обладать этим свойством, оно должно содержать достаточно высокие пространственные частоты. Согласно теореме Винера — Хинчина (см. далее) любой белый шум содержит широкий спектр частот и по этому признаку может быть взят в качестве взаимно обратного ядра *K(x-ω)*.

Таким образом, любой импульс «шипения», являющийся частным случаем белого шума, годится в качестве преобразующего ядра. Необходимо, однако, помнить, что при повторном преобразовании с целью восстановления исходной функции необходимо использовать тот же импульс «шипения» или, более точно, комплексно-сопряженный импульс.

Резюмируя, можно сказать, что наличие в преобразующем ядре высоких пространственных частот является необходимым и достаточным условием для достоверного кодирования и декодирования оптических сигналов. В противном случае, если пространственные частоты обрываются раньше максимальной пространственной частоты, содержащейся в оптическом сигнале, в процессе декодирования происходит безвозвратное

искажение исходного сигнала, что, например, имеет место в преобразовании отсчетов, не согласованном по максимальной частоте с сигналом.

Свойства взаимно обратных интегральных преобразований используются в голографии Фурье и в методах компенсации протяженного источника с целью сохранения высокого пространственного разрешения, в безлинзовой схеме голографии Фурье, а также в спектроскопии Фурье. Рассмотренные интегральные преобразования, обладающие свойством восстанавливать исходный сигнал при повторном преобразовании, дают средство для выбора представления, в котором можно задать одну и ту же исходную функцию, т. е. одно и то же сообщение, заданное в виде оптического сигнала. Переход от одного представления к другому осуществляется с помощью линейных преобразований и в этом смысле напоминает различные представления одной и той же системы векторов в некотором многомерном пространстве. Физические свойства векторов при переходе от одной системы координат к другой остаются, разумеется, неизменными — инвариантными относительно любого линейного преобразования.

Рассмотренные выше интегральные преобразования с ядром K типа Фурье обладают очень важным свойством обратимости. После осуществления повторного преобразования, как правило, определяемого комплексно-сопряженным ядром K^*, вновь возвращаются к исходной функции, а это означает, что информация, содержащаяся в исходном оптическом сигнале, не искажается в результате осуществления взаимно обратных преобразований, таких, как преобразование Фурье, преобразование Гильберта, преобразование Френеля, а также любых их сочетаний. Таким образом, процесс повторных преобразований происходит по цепочке, изображенной схематически на рис. 3.1. Начало цепочки таких преобразований может быть расположено в любом месте и не обязательно должно совпадать со ступенью, соответствующей заданию исходного оптического сигнала. В устройство обработки оптических сигналов можно вводить не только исходный сигнал, но и любой его образ класса Фурье.

Заканчивая рассмотрение основных интегральных преобразований и их свойств, рассматриваемых применительно к когерентным системам обработки оптических сигналов, необходимо отметить, что, в отличие от радиосигнала, оптический сигнал, переносящий информацию, обладает рядом особенностей, вызванных тем, что когерентная оптическая

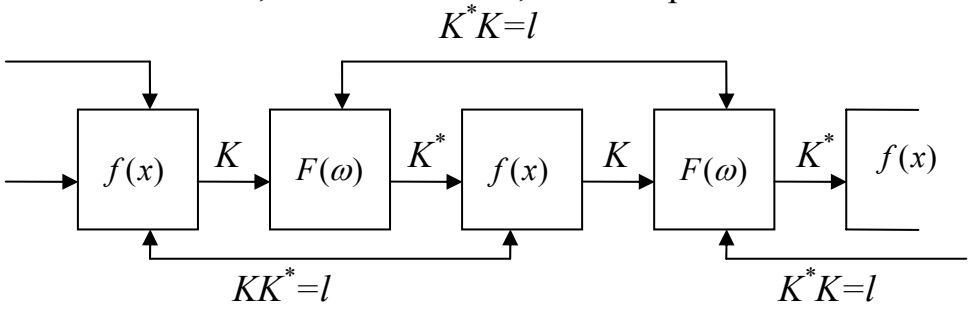


Рис.3.1 Блок-схема последовательности взаимно обратных интегральных преобразований.

система даже в отсутствие шумов представляет собой более сложную систему, чем узлы аппаратуры, используемые в классической радиотехнике. Причина, которая приводит к качественному различию между ними, связана с тем, что излучение, используемое в когерентной оптике, как правило, не является единым и непрерывным процессом, и это обусловлено природой процессов испускания света атомами. В результате случайные функции приходится вводить на гораздо более ранней стадии, чем это требуется, когда учитывают шумы. Возникает такое сложное и многогранное понятие, как когерентность света.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

4.1 Случайная функция и случайный сигнал

Ранее были рассмотрены основные свойства оптического сигнала, несущего определенное сообщение. Такой оптический сигнал рассматривался как детерминированный сигнал, который можно однозначно задать в пространстве и времени. В реальных системах передача и прием сообщения происходят на фоне случайных помех (например, влияние атмосферы, случайные фоновые засветки и т.п.) в результате чего возникают неконтролируемые отклонения фактического сигнала от заданного значения. Сигнал, который появляется на приемном устройстве, уже нельзя рассматривать как детерминированный оптический сигнал. В общем случае это - случайный сигнал. В ряде частных случаев - наложение детерминированного сигнала и случайного сигнала.

В этом разделе будут рассмотрены свойства и методы описания случайных процессов, введено понятие функции взаимной интенсивности, рассмотрены ее свойства и Фурье-преобразование корреляционных функций.

Природа и техника изобилуют примерами случайных процессов. Простейшие из них — это акты испускания квантов света отдельными атомами. Процесс излучения разыгрывается в условиях, когда невозможно указать моменты излучения, направление импульса испущенных квантов и значения других параметров, определяющих это явление. Наблюдатель видит некоторую усредненную картину электромагнитного поля и, как правило, зная протекание процесса в прошлом, не может точно предсказать развитие процесса в будущем. Среди многочисленного класса совершенно недетерминированных процессов можно выделить такие случайные процессы, которые допускают детерминированно-статистическое описание. Эти процессы подчиняются вполне определенным статистическим закономерностям. Функции, описывающие случайный процесс, называются ***случайными функциями***. Эти функции могут зависеть от нескольких аргументов, в частности пространственных координат и времени.

Случайным сигналом назовем комплексную амплитуду электромагнитных колебаний, или огибающую случайной функции, описывающую данный случайный электромагнитный процесс. Случайные сигналы, как и оптический сигнал, отвечают классу квазимонохроматических процессов. Случайная квазимонохроматическая функция $V(\mathrm{r}, t)$ и случайный сигнал $v\ (r, t)$ связаны соотношением

$$V(r,t) = v(r,t)e^{-jw_0 t}, \qquad (4.1)$$

приходится вводить на гораздо более ранней стадии, чем это требуется, когда учитывают шумы. Возникает такое сложное и многогранное понятие, как когерентность света.

где ω_0 — средняя частота квазимонохроматической случайной функции.

Для того чтобы исчерпывающе охарактеризовать произвольный случайный процесс, необходимо задать бесконечную совокупность функций $V_i\ (\mathrm{r}, t)\ (i = 1, 2, \ldots)$, являющихся всеми возможными реализациями (репликациями) изучаемого процесса. Эти реализации, наблюдаемые в одних и тех же условиях опыта, различаются

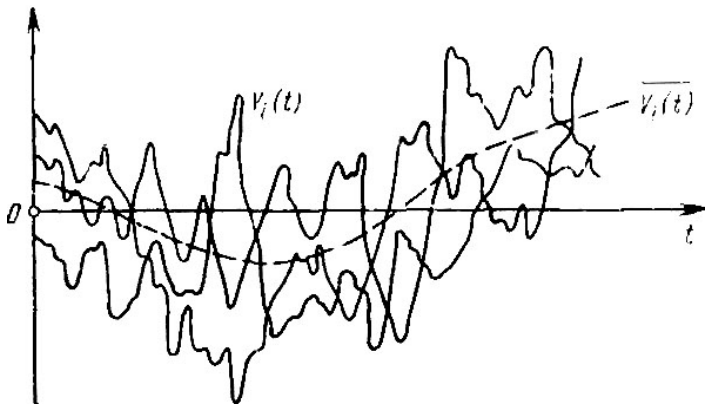


Рис. 4.1. Усредненная функция $\overline{\mathrm{V_i(t)}}$ многих реализаций $\mathrm{V_i}(t)$ случайного процесса.

между собой, и в этом проявляется случайный характер изучаемого процесса. Очевидно, что в практических приложениях такое описание случайного процесса непригодно ввиду его исключительной громоздкости. Также неудобным и громоздким оказывается метод, заключающийся в том, что вместо совокупности случайных реализаций $V_i\ (\mathrm{r}, t)$ вводятся функции распределения этих значений для всех возможных значений аргументов $r = r_k,\ t = t_k$.. Наиболее удобный метод описания случайного процесса состоит в том, что бесконечная совокупность реализаций случайного процесса заменяется несколькими усредненными характеристиками: ***средним значением*** функций, или математическим ожиданием, ***дисперсией*** и ***корреляционными моментами различных порядков.***

Математическое ожидание простейшего случайного процесса, описываемого случайной функцией $V_i\ (t)$, зависящей только от времени, представляет собой усредненную неслучайную функцию $\overline{V_i(t)}$, около которой группируются все реализации случайного процесса $V_i\ (t)$ (рис. 4.1). Мерой рассеяния, или разброса, значений случайной функции $V_i\ (t)$ относительно усредненной функции $\overline{V_i(t)}$ служит дисперсия, или среднеквадратичное отклонение всевозможных реализаций от усредненной функции. Однако для характеристики истинного разброса случайной функции недостаточно знать только дисперсию случайной функции. Так, например, возможные реализации, приведенные в виде кривых на рис. 4.2, существенно отличаются друг от друга, хотя математические ожидания и дисперсии у этих двух случайных процессов одинаковы. В первом случае зависимость между значениями случайной функции, взятыми при двух произвольных значениях независимой переменной t, гораздо более слабая, чем во втором случае. Если бы нам пришлось дифференцировать или интегрировать по t эти два случайных процесса или же осуществлять какие-либо другие линейные преобразования, то в этих двух случаях были бы получены совершенно различные результаты на выходе, несмотря на то, что математические ожидания этих двух случайных процессов одинаковы.

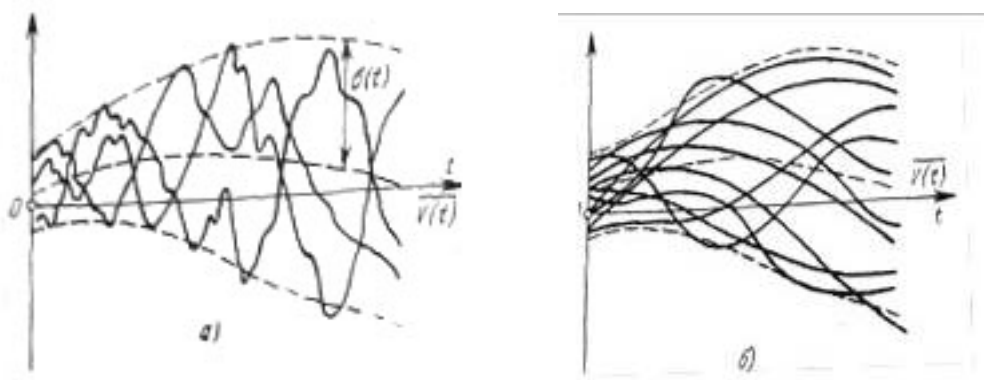


Рис. 4.2 Два случайных процесса с одинаковыми мат. ожиданиями и дисперсиями

Для того чтобы отразить связь между значениями случайной функции $V_i(t)$ в различные моменты времени, т. е. задать характер изменения случайной функции во времени, необходимо кроме математического ожидания и дисперсии знать так называемые корреляционные моменты.

Простейший корреляционный момент — это корреляция второго порядка, равная

$$K(t_1, t_2) = \overline{V_i(t_1) V_i^*(t_2)}. \qquad (4.2)$$

Здесь усреднение проводится по всем возможным реализациям. Кроме того, возможны корреляционные моменты более высоких порядков, например:

$$K(t_1,t_2,\ldots t_n)=\overline{V_i(t_1)V_i^*(t_2)..V_i^*(t_n)} \qquad (4.3)$$

Если бы для описания случайного процесса потребовались ***корреляционные моменты всех порядков,*** от первого до какого-то очень высокого, то и здесь не было бы никаких преимуществ. Однако в большинстве встречающихся случаев, особенно в линейных системах, описание случайного процесса существенно упрощается и корреляционные моменты выше второго (4.2) либо выражаются через корреляционные моменты второго порядка, либо не наблюдаются вообще. Следует, однако, отметить, что такое компактное описание случайного процесса возможно при условии, если случайный процесс является стационарным и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям.

Стационарный случайный сигнал. Случайный сигнал $v_i\ (r,\ t)$ называется стационарным, если все его статистические свойства, описываемые, например, с помощью корреляционных моментов, инвариантны относительно произвольного изменения начала отсчета времени. Стационарный случайный сигнал описывает установившийся случайный квазимонохроматический процесс, например излучение света атомами, находящимися длительное время в строго постоянных условиях. Если случайный процесс стационарен, то корреляционный момент $K(t_i,\ t_2)$ инвариантен относительно произвольного изменения отсчета времени, т. е.

$$K(t_1,t_2) = K(t_1 + t_0, t_2 + t_0), \qquad (4.4)$$

где t_0 — произвольное число, определяющее новый отсчет времени. Если взять $t_0 = -t_1$, то

$$K(t_1,t_2) = K(0, t_2 - t_1) \equiv \Gamma(\tau), \qquad (4.5)$$

где $\tau = t_2 - t_1$. Таким образом, корреляционный момент второго порядка стационарного случайного процесса зависит только от одной переменной τ-разности между моментами времени t_1 и t_2. Аналогичными свойствами должны обладать корреляционные моменты более высоких порядков. Можно, однако, привести примеры случайных функций, у которых корреляционные моменты второго порядка стационарны в смысле (4.5), а корреляционные моменты более высокого порядка не инвариантны относительно сдвига начала отсчета времени. Классическим примером такого типа является случайная функция

$$x(t) = X(t)\cos\omega t + Y(t)\sin\omega t, \qquad (4.6)$$

где случайные сигналы $X(t)$ и $Y(t)$ не зависят друг от друга, но обладают одинаковыми математическими ожиданиями

$$\overline{X_i(t)} = \overline{Y_i(t)} = 0 \qquad (4.7)$$

и дисперсиями

$$\overline{X_i^2(t)} = \overline{Y_i^2(t)} = D^2 \qquad (4.8)$$

Легко проверить, что корреляционный момент второго порядка случайного процесса (4.6) зависит только от разности $t_2 - t_1 = \tau$:

$$\overline{x(t_1)x(t_2)} = \overline{X^2(t)}\cos\omega(t_2 - t_1) = D^2\cos\omega\tau. \qquad (4.9)$$

В то же время усредненная величина $\overline{X^4(t)}$, которая появится при вычислении корреляционных моментов четвертого порядка, зависит в общем виде не только от разности $\tau = t_2 — t_1$, но также и от моментов времени t_1 и t_2 непосредственно. И только в частных случаях эта зависимость исчезает.

Случайная функция $V(t)$ называется ***стационарной в широком смысле***, если ее математическое ожидание постоянно, а корреляционный момент второго порядка зависит только от разности времени $\tau = t_2 — t_1$. Случайная функция $V(t)$ называется ***стационарной в узком смысле***, если корреляционные моменты любого высокого порядка n зависят только от интервалов времени $t_2 - t_1 = \tau_1$, $t_3 - t_1 = \tau_2$, $t_n - t_1 = \tau_{n-1}$ и не зависят от абсолютного значения моментов времени t_n.

Практическое значение имеет класс случайных функций, стационарных в широком смысле. Причина этого состоит в том, что корреляционные моменты второго порядка имеют энергетический смысл. В частности, в оптике при рассмотрении интерференционных явлений, а также в голографии возникают корреляционные функции второго порядка. При описании прохождения случайных сигналов через линейные фильтры корреляционные моменты выше второго порядка отсутствуют.

Стационарный случайный процесс называется ***эргодическим*,** если операцию усреднения по множеству всех реализаций для заданного, а следовательно, любого момента времени можно заменить операцией усреднения по времени для одной реализации. Таким образом, в случае эргодического стационарного процесса среднее по множеству реализаций равно среднему по времени для произвольно выбранной реализации $V_i(t)$:

$$\Gamma(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} V_i(t)V_i(t+\tau)dt, \qquad (4.10)$$

а результат такого усреднения не зависит от того, какая именно реализация была выбрана. Это правило было использовано выше при вычислении средних значений сигналов $X(t)$ и $Y(t)$ в (4.7) и (4.8).

4.2 Функция взаимной интенсивности

Если не принимать во внимание нелинейные оптические эффекты, наблюдаемые при очень сильных полях в световой волне, когда они становятся соизмеримыми с внутренними полями излучательной системы, то с достаточной степенью приближения можно считать, что электромагнитное

поле обладает свойством ***суперпозиции***. Два пучка света, пересекаясь в некоторой области пространства — свободного или заполненного средой, распространяются, не воздействуя друг на друга. Следствием свойства суперпозиции является то, что результирующее поле E_0, существующее в области взаимного пересечения двух пучков света, равно простой сумме полей в каждом из пучков:

$$E_0 = E_1 + E_2, \qquad (4.11)$$

где E_1 и E_2 — векторы электрического поля в каждом из пучков света в отсутствие соответствующего другого пучка.

Электрическое поле E световой волны как функцию координат и времени измерить невозможно. Любой приемник света реагирует только на интенсивность света — суммарную или среднюю — в данной точке или объеме пространства, и поэтому наблюдаемой величиной является.

$$I_{набл} = \int_0^T |E|^2 \, dt \qquad (4.12)$$

где T — время измерения, или же, иначе,

$$\frac{dI_{набл}}{dt} = |E|^2 \qquad (4.13)$$

Если поля E_1 и E_2 зависящие от координаты *x* и времени *t*, описываются нетождественными функциями указанных аргументов, то в области пересечения двух пучков света возникает явление ***интерференции,*** которое состоит в том, что поля двух световых волн складываются либо со взаимным усилением, либо со взаимным ослаблением, в зависимости от *x* и *t.*

Если же это условие не соблюдено, т. е. функции E_1 и E_2 подобны или же тождественны друг другу:

$$E_2 = AE_1 \qquad (4.14)$$

где A — постоянное комплексное число, то

$$\frac{dI}{dt} = |E_1 + E_2|^2 = |E_1 + AE_1|^2 = |E_1|^2 |1 + A|^2 = B|E_1|^2 . \qquad (4.15)$$

Из этого соотношения видно, что интерференция здесь отсутствует. Поля E, и E_2 повсюду складываются с неизменной степенью усиления или ослабления. Так, например, если $A = 1$, то

$$\frac{dI}{dt} = 4 \mid E_1 \mid^2 = 4\frac{dI_1}{dt} \qquad (4.16)$$

Явление интерференции проще всего наблюдать в случае, когда свет линейно поляризован, причем одинаково во всех точках оптической системы. Тогда поле E можно описать скалярной функцией. Поэтому, если $f_1 \neq f_2$, т. е. функции f_1 и f_2 не тождественны друг другу, то

$$\frac{dI}{dt} = \mid f_1 + f_2 \mid^2 = \mid f_1 \mid^2 + \mid f_2 \mid^2 + f_1^* f_2 + f_1 f_2^* . \qquad (4.17)$$

Эффект интерференции создают перекрестные члены. Поскольку

$$\frac{dI_1}{dt} = \mid f_1 \mid^2, \quad \frac{dI_2}{dt} = \mid f_2 \mid^2, \qquad (4.18)$$

то (4.17) запишется в виде

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} + f_1^* f_2 + f_1 f_2^* \qquad (4.19)$$

и аналогичное соотношение для интенсивности:

$$I = I_1 + I_2 + \int_0^T (f_1^* f_2 + f_1 f_2^*) dt \qquad (4.20)$$

Таким образом, интенсивность света при интерференции не является аддитивной функцией координат и времени.

Рассмотрим простейший эксперимент по наблюдению интерференции света, осуществляемый с мощью интерферометра Ллойда (рис. 4.3). В точку S помещен неподвижный источник света, испускающий монохроматический свет длиной волны λ.

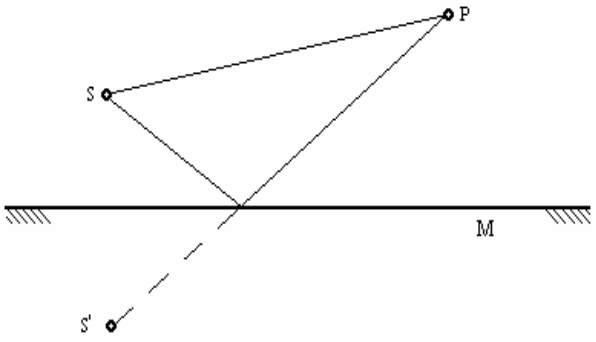


Рис.4.3 Интерферометр Ллойда

В точку наблюдения P луч света может прийти двумя путями: непосредственно вдоль прямой, соединяющей точку S с P, а также отразившись от зеркала M. Суммарное поле в точке P равно

$$E_p(t) = f_1(t) + f_2(t) \qquad (4.21)$$

или

$$E_p(t) = f(t) + f(t-\tau), \qquad (4.22)$$

где $f(t)$ — амплитуда волны, создаваемая точечным источником S, а τ — время запаздывания луча, отраженного от зеркала, по сравнению с прямым лучом. Относительное ослабление поля, обусловленное различием длин двух лучей света от точки S до точки P, как правило, весьма мало, и им можно пренебречь.

Приемник света в точке P зарегистрирует среднюю интенсивность

$$I(t,\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T |E_p(t)|^2\, dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T [|f(t)|^2 + |f(t-\tau)|^2 + f^*(t)f(t-\tau) + f(t)f^*(t-\tau)]dt. \qquad (4.23)$$

Легко видеть, что интегралы

$$\int_0^T f^*(t)f(t-\tau)dt \quad \text{и} \quad \int_0^T f(t)f^*(t-\tau)dt \qquad (4.24)$$

имеют структуру, близкую к функции автокорреляции (раздел 2). Если предположить, что поле $f(t)$ является стационарным, т. е. интегралы (4.24) зависят только от времени измерения T и времени запаздывания τ, то в пределе, при $T \to \infty$,

$$I(t,\tau) = I(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |E_p(t)|^2\, dt = \qquad (4.25)$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, dt + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^t |f(t-\tau)|^2 +$$

$$+ \lim_{T\to\infty}\frac{2}{T}\int_0^T |f^*(t)f(t-\tau)|\, dt = 2R(0) + 2R(\tau),$$

где $R(\tau)$ — нормированная функция автокорреляции:

$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T | f^*(t) f(t-\tau) | dt \qquad (4.26)$$

Если излучение точечного источника является строго монохроматическим, то поле *f (t)* равно

$$f(t) = a_0 \cos(\varphi_0 - \omega_0 t), \qquad (4.27)$$

где a_0 и φ_0 — действительные числа, ω_0 — частота излучаемой волны света. Нормированная функция автокорреляции в этом случае равна

$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T a_0^2 \cos(\varphi_0 - \omega_0 t) \cos[\varphi_0 - \omega_0 (t-\tau)] dt = \frac{a_0^2}{2} \cos \omega_0 \tau, \qquad (4.28)$$

а интенсивность света (рис. 4.4)

$$I(\tau) = I_0 [1 + \cos \omega_0 \tau]. \qquad (4.29)$$

Контраст интерференционных полос γ в этом случае равен

$$\gamma = \frac{I_{макс} - I_{мин}}{I_{макс} + I_{мин}} = \frac{1-0}{1+0} = 1. \qquad (4.30)$$

В действительности электромагнитные волны, испускаемые атомом, не могут быть строго монохроматическими. Главная из причин состоит в том, что свет

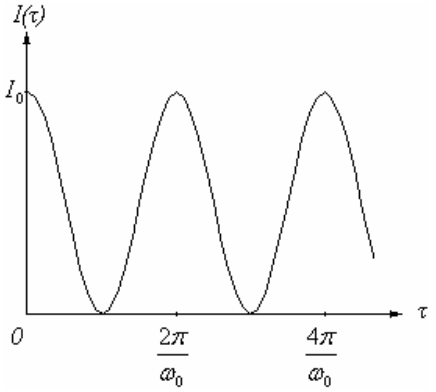


Рис 4.4. Интенсивность света в точке *P* (рис 4.3) в зависимости от времени запаздывания τ для точечного монохроматического источника

излучается короткими цугами, а в процессе излучения атом движется вдоль изломанной траектории. Эти, а также и другие факторы приводят к возникновению целого спектра частот.

Запишем Фурье-образ поля световой волны *f(t)*:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \qquad (4.31)$$

а также обратный образ:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \qquad (4.32)$$

Интеграл (4.32) можно разбить на две части:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \qquad (4.33)$$

Если в первом интеграле сделать замену $\omega \to -\omega'$ и изменить пределы интегрирования, то

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} [F(-\omega) e^{-j\omega t} + F(\omega) e^{j\omega t}] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} [F^*(\omega) e^{-j\omega t} + F(\omega) e^{j\omega t}] dt = \frac{1}{2\pi} \mathrm{Re} \int_{0}^{\infty} 2F(\omega) e^{j\omega t} dt. \qquad (4.34)$$

Учитывая, что

$$F(\omega) = A(\omega) e^{j\Phi(\omega)} \qquad (4.35)$$

где $A(\omega)$ и $\Phi(\omega)$ — действительные функции частот, находим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} 2A(\omega) \cos[\omega t - \Phi(\omega)] d\omega \qquad (4.36)$$

Кроме косинусного Фурье-образа можно ввести синусный Фурье-образ:

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} 2A(\omega) \sin[\omega t - \Phi(\omega)] d\omega. \qquad (4.37)$$

Тогда аналитический сигнал *V (t):*

$$V(t) = f(t) + j\,\chi(t) \qquad (4.38)$$

Легко доказать, что аналитический сигнал V (t) содержит только положительные частоты. По определению

$$V(t) = f(t) + j\chi(t)\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty 2A(\omega)e^{j\omega t}e^{-j\Phi(\omega)}d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \qquad (4.39)$$

Следовательно, Фурье-образ аналитического сигнала $V(t)$ равен

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t)e^{I\varpi t}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\int_0^\infty F(\omega')\exp[i(\omega'-\omega)t]d\omega' =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(\omega')d\omega'\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i(\omega'-\omega)t]dt = 2\int_0^\infty F(\omega')\delta(\omega'-\omega)d\omega'. \qquad (4.40)$$

Из свойств дельта-функции следует, что

$$V(\omega) = \begin{cases} 2F(\omega), & \omega > 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases} \qquad (4.41)$$

Таким образом, аналитический сигнал содержит только положительные частоты. Это означает, что функция $\chi(t)$ равна гильбертовскому образу исходной действительной функции $f(t)$:

$$\chi(t) = \Im[f(t)] = \frac{P}{\pi}\int\frac{f(t')dt}{t'-t}, \qquad (4.42)$$

где операторный символ $\Im$ обозначает преобразование Гильберта, или гильбертовский образ, а интеграл берется в смысле главного значения. Итак, аналитический сигнал определяется соотношением

$$V(t) = f(t) + j\chi(t) = f(t) + j\Im[f(t)] \qquad (4.43)$$

Рассмотрим свойства аналитического сигнала для квазимонохроматического излучения (приближение узкополосных сигналов), характеризующегося тем, что ширина спектра частот $\Delta\omega$ значительно меньше средней частоты ω_0 ($\Delta\omega < \omega_0$). Введя в выражение (4.39) среднюю частоту ω_0, получим

$$V(t) = \frac{1}{\pi}e^{j\omega_0 t}\int_0^\infty A(\omega)e^{-j\Phi(\omega)}\exp[j(\omega-\omega_0)t]d\omega = a(t)e^{j\omega_0 t}, \qquad (4.44)$$

где

$$a(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A(\omega)\exp[j(\omega-\omega_0)t]d\omega = A(t)e^{j\alpha(t)}. \qquad (4.45)$$

Функцию *a(t)* можно рассматривать как мгновенную амплитуду поля световой волны, описываемой квазимонохроматическим аналитическим сигналом *V (t)* со средней частотой ω_0.

Рассмотрим поле в точке *P,* возбуждаемое двумя неподвижными точечными источниками S_1 и S_2, световые колебания в которых определяются аналитическими сигналами $V_1(t)$ и $V_2(t)$, где t — момент времени, когда волны покидают источники. Пусть τ_1 и τ_2 — интервалы времени, которые требуются для того, чтобы свет пробежал вдоль отрезков S_1P и S_2P соответственно. Для свободного пространства

$$\tau_1 = \frac{S_1P}{c}, \qquad \tau_2 = \frac{S_2P}{c} \qquad (4.46)$$

где c — скорость света.

Аналитический сигнал в точке P в момент времени t равен

$$V(t) = V_1(t-\tau_1) + V_2(t-\tau_2) \qquad (4.47)$$

Наблюдаемая интенсивность равна

$$I_P = \overline{V(t)V^*(t)} \qquad (4.48)$$

где черта сверху обозначает усреднение по бесконечно большому интервалу времени:

$$\overline{V(t)V^*(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T V(t)V^*(t)dt. \qquad (4.49)$$

Если ввести

$$\tau = \tau_2 - \tau_1 \quad , \qquad (4.50)$$

то

$$\begin{aligned} I_p &= \overline{V(t)V^*(t)} = \overline{[V_1(t-\tau_1)+V_2(t-\tau_2)][V_1^*(t-\tau_1)+V_2^*(t-\tau_2)]} = \\ &= \overline{V_1(t-\tau_1)V_1^*(t-\tau_1)} + \overline{V_2(t-\tau_2)V_2^*(t-\tau_2)} = \\ &\overline{V_1(t-\tau_1)V_2^*(t-\tau_2)} + \overline{V_2(t-\tau_2)V_1^*(t-\tau_1)} = \\ &= \overline{V_1V_1^*} + \overline{V_2V_2^*} + \overline{V_1(t+\tau)V_2^*(t)} + \overline{V_1^*(t+\tau)V_2(t)}. \end{aligned} \qquad (4.51)$$

Теперь можно определить ***функцию взаимной интенсивности*** $\Gamma_{12}(\tau)$ колебаний волны от источников S_1 и S_2 в точке *P:*

$$\Gamma_{12}(\tau) = V_1(t+\tau)V_2^*(t) \qquad (4.52)$$

Нормированная величина

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\overline{V_1V_1^*}}\sqrt{\overline{V_2V_2^*}}} = \frac{\overline{V_1(t-\tau)V_2^*(t)}}{\sqrt{\overline{V_1V_1^*}}\sqrt{\overline{V_2V_2^*}}} \qquad (4.53)$$

называется ***комплексной степенью когерентности*** световых колебаний. Если, далее, обозначить

$$I_1 = \overline{V_1V_1^*}, \qquad I_2 = \overline{V_2V_2^*}, \qquad (4.54)$$

то (4.51) можно записать в виде

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\,\mathrm{Re}(\gamma_{12}(\tau)). \qquad (4.55)$$

Это фундаментальное выражение гласит: интенсивность света в точке *P,* в которой складываются поля двух произвольных источников света, равна сумме интенсивностей света от каждого источника, включенного в отдельности, сложенной с действительной частью комплексной степени когерентности.

4.3 Свойства корреляционных функций

Перейдём теперь к рассмотрению основных свойств интегральной операции вида $\Gamma(\tau) = \lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} V_i(t)V_i(t+\tau)dt$. Напомним понятие функции корреляции (раздел 2). Если задана исходная функция $f_1(t)$, то автокорреляцией этой функции называется интегральная операция

$$\varphi_{11}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_1^*(t+\tau)dt\,.$$

Здесь указаны бесконечные пределы интегрирования, а также комплексное сопряжение второго сомножителя подынтегрального выражения, так как функция $f_1(t)$ в общем случае является комплексной.

Если заданы две функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то кросс-корреляцией или перекрестной корреляцией называется функция

$$\varphi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t+\tau) dt .$$

Легко видеть, что функции корреляции имеют смысл скалярного произведения соответствующих функций, что позволяет записать эти определения в виде

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{11}(\tau) &= \langle f_1(t), f_1^*(t+\tau)\rangle, \\ \varphi_{12}(\tau) &= \langle f_1(t), f_2^*(t+\tau)\rangle. \end{aligned}\right\} \qquad (4.56)$$

Напомним, что функция автокорреляции обладает следующим свойством:

$$\varphi_{11}(\tau) = \varphi_{11}^*(-\tau) .$$

Действительно,

$$\varphi_{11}(\tau) = \langle f_1(t), f_1^*(t+\tau)\rangle = \langle f_1(t-\tau), f_1^*(t)\rangle = \langle f_1(t), f_1^*(t-\tau)\rangle^* = \varphi_{11}^*(-\tau) ,$$

Если $f_1(t)$ - действительная функция, то

$$\varphi_{11}(\tau) = \varphi_{11}(-\tau) . \qquad (4.57)$$

Если функция $f(t)$ действительная, то функция автокорреляции имеет абсолютный максимум при $\tau = 0$. Значение функции автокорреляции нигде не превосходит ее значения в начале координат $\tau = 0$. Если же $f(t)$ - комплексная функция, то

$$|\varphi_{11}(\tau)| \le \varphi_{11}(0) . \qquad (4.58)$$

Таким образом, ***функция автокорреляции нигде не превосходит по модулю своего значения в начале координат***. Соотношение $|\varphi_{11}(\tau)| \le \varphi_{11}(0)$ имеет очень большое практическое значение, так как позволяет указать место на двухлучевой интерферограмме точки, которая соответствует оптической разности хода, равной нулю. Абсолютный максимум кривой сигнала интерференции всегда располагается при $\tau = 0$. Если

$$f_1(t) = x_1(t) + jy_1(t) , \text{ а } f_2(t) = x_2(t) + jy_2(t) ,$$

то функцию автокорреляции можно представить в виде

$$\varphi_{f_1 f_2}(\tau) = \varphi_{x_1 x_2}(\tau) + \varphi_{y_1 y_2}(\tau) + j\left[\varphi_{y_1 x_2}(\tau) - \varphi_{x_1 y_2}(\tau)\right]. \qquad (4.59)$$

Если функция $f(t)$ равна сумме элементарных функций $f_k(t)$: $f(t) = \sum_k f_k(t)$,

Причём сами элементарные функции являются статистически независимыми друг от друга, то функция автокорреляции равна

$$\varphi_{11}(\tau)=\left\langle f(t),f^{*}(t+\tau)\right\rangle=$$
$$\sum_{\alpha=\beta}\left\langle f_{\alpha}(t),f_{\beta}^{*}(t+\tau)\right\rangle+\sum_{\alpha\neq\beta}\left\langle f_{\alpha}(t),f_{\beta}^{*}(t+\tau)\right\rangle. \qquad (4.60)$$

В силу независимости элементарных составляющих второе слагаемое суммы обращается в нуль:

$$\sum_{\alpha\neq\beta}\left\langle f_{\alpha}(t),f_{\beta}^{*}(t+\tau)\right\rangle=0, \quad \text{если только} \quad \int_{-\infty}^{\infty}f_{\alpha}(t)dt=0$$

для любого α. Таким образом, после введения некоторых средних уровней смещения элементарных функций получаем

$$\varphi_{11}(\tau)=\sum_{\alpha}\left\langle f_{\alpha}(t),f_{\alpha}^{*}(t+\tau)\right\rangle=\sum_{\alpha}\varphi_{11}^{\alpha}(\tau). \qquad (4.61)$$

Следовательно, ***автокорреляция суммы взаимно некоррелированных элементарных функций равна сумме автокорреляций элементарных функций***.

Если использовать тот факт, что автокорреляция обладает свойствами скалярного произведения двух функций $f(t)$ и $f(t+\tau)$, то можно непосредственно найти правила дифференцирования функции автокорреляции. Действительно, если

$$\varphi_{11}(\tau)=\left\langle f(t),f^{*}(t+\tau)\right\rangle,$$

то

$$\frac{d\varphi_{11}(\tau)}{d\tau}=\left\langle f^{'}(t),f^{*}(t+\tau)\right\rangle=-\left\langle f(t),f^{'*}(t+\tau)\right\rangle, \qquad (4.62)$$

а также

$$\frac{d^{2}\varphi_{11}(\tau)}{d\tau^{2}}=\left\langle f^{''}(t),f^{*}(t+\tau)\right\rangle=-\left\langle f^{'}(t),f^{'*}(t+\tau)\right\rangle=\left\langle f(t),f^{''*}(t+\tau)\right\rangle. \qquad (4.63)$$

Если вместо $\varphi_{11}(\tau)$ взять $\varphi_{11}(-\tau)$, то

$$\varphi_{11}(-\tau)=\left\langle f(t),f^{*}(t-\tau)\right\rangle,$$

$$\frac{d\varphi_{11}(-\tau)}{d\tau}=\left\langle f^{'}(t),f^{*}(t-\tau)\right\rangle=-\left\langle f(t),f^{'*}(t-\tau)\right\rangle,$$

$$\frac{d^{2}\varphi_{11}(-\tau)}{d\tau^{2}}=\left\langle f^{''}(t),f^{*}(t-\tau)\right\rangle=-\left\langle f^{'}(t),f^{'*}(t-\tau)\right\rangle=\left\langle f(t),f^{''*}(t-\tau)\right\rangle$$

и так далее. В частности при $\tau=0$ получаем

$$\varphi_{11}(0)=\left\langle f(t),f^{*}(t)\right\rangle,$$

$$\frac{d\varphi_{11}(0)}{d\tau} = \left\langle f\ (t), f'^{*}(t) \right\rangle = -\left\langle f'(t), f^{*}(t) \right\rangle = 0,$$

$$\frac{d^2\varphi_{11}(0)}{d\tau^2} = \left\langle f''(t), f^{*}(t) \right\rangle = -\left\langle f'(t), f'^{*}(t) \right\rangle = \left\langle f(t), f''^{*}(t) \right\rangle.$$

Равенство $\frac{d\varphi_{11}(0)}{d\tau} = \left\langle f\ (t), f'^{*}(t) \right\rangle = -\left\langle f'(t), f^{*}(t) \right\rangle = 0$ следует из свойства скалярного произведения $\left\langle f', g \right\rangle = -\left\langle f, g' \right\rangle$, которое для $f = g$ приводит к $\frac{d\varphi_{11}(0)}{d\tau} = \left\langle f\ (t), f'^{*}(t) \right\rangle = -\left\langle f'(t), f^{*}(t) \right\rangle = 0$. Следовательно, функция автокорреляции $\varphi_{11}(\tau)$ имеет экстремум при $\tau = 0.$

Из равенства следует важный вывод о том, что ***функция*** $f(t)$ ***и её производная*** $f'(t)$***, взятые в один и тот же момент времени, не могут никогда коррелировать между собой***:

$$\left\langle f(t), f'^{*}(t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f'^{*}(t) dt = \left\langle f'(t), f^{*}(t) \right\rangle = 0. \qquad (4.64)$$

Формулу $\frac{d^2\varphi_{11}(\tau)}{d\tau^2} = \left\langle f''(t), f^{*}(t+\tau) \right\rangle = -\left\langle f'(t), f'^{*}(t+\tau) \right\rangle = \left\langle f(t), f''^{*}(t+\tau) \right\rangle$ можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2\varphi_f(t)}{d\tau^2} = -\left\langle f'(t), f'^{*}(t+\tau) \right\rangle = \varphi_{f',f'}(\tau),$$

т. е. функция автокорреляции производной $f'(t)$ некоторой функции $f(t)$ равна второй производной по τ, взятой с обратным знаком, от функции автокорреляции исходной функции $f(t)$.

Функцию кросс-корреляции

$$\varphi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^{*}(t+\tau) dt,$$

как уже отмечалось выше, можно свести к интегральной операции свертки:

$$f_1(\tau) \otimes f_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(\tau - t) dt.$$

Напомним также, что операция свертки коммутативна относительно перестановки «сомножителей» f_1 и f_2. Подобным свойством кросс-корреляция не обладает. Действительно,

$$\varphi_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) f_1^{*}(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) f_1^{*}(t) dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^{*}(t-\tau) dt \right]^{*} = \varphi_{12}^{*}(-\tau).$$

Таким образом,

$$\varphi_{21}(\tau) = \varphi_{12}^{*}(-\tau).$$

Вместо функций корреляций $\varphi_{11}(\tau)$ и $\varphi_{12}(\tau)$ обычно рассматривают нормированные функции корреляции на симметричном интервале $[-T,\ T]$.

$$R_{11}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)f^{\bullet}(t+\tau)dt=\overline{f(t)f^{*}(t+\tau)},$$

$$R_{12}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f_1(t)f_2^{\bullet}(t+\tau)dt=\overline{f_1(t)f_2^{*}(t+\tau)}. \qquad (4.65)$$

Рассмотрим примеры вычисления нормированных корреляционных функций.

Периодический сигнал. Пусть задана функция $f(t)=ae^{j(\omega_0 t+\varphi_0)}$. Тогда

$$R_{11}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}a^2\exp j(\omega_0 t+\varphi_0)\exp-j\left[\omega_0(t+\tau)+\varphi_0\right]dt=$$
$$a^2\ell^{-j\omega_0\tau}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt=a^2e^{-j\omega_0\tau}. \qquad (4.66)$$

Функция автокорреляции является периодической с периодом, равным периоду исходной функции.

Сигнал вида $f(t)=C+f_1(t),$ где C - постоянная составляющая, а $f_1(t)$ постоянной составляющей не имеет. В этом случае

$$R_{11}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)f^{*}(t+\tau)dt=\left|C\right|^2+C\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f_1^{*}(t+\tau)dt+C^{*}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f_1(t)dt+$$

$$+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f_1(t)f_1^{*}(t+\tau)dt=\left|C\right|^2+R_{f_1f_1}(\tau), \qquad (4.67)$$

поскольку среднее значение функции $f_1(t)$ равно нулю.

Кросс-корреляция между функциями. Пусть заданы функции $f_1(t)=\sin\omega_0 t$ и $f_2(t)=\cos\omega_0 t$. Тогда

$$R_{12}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau)dt=-\frac{\sin\omega_0\tau}{2}. \qquad (4.68)$$

Таким образом, нормированная кросс-корреляция функций $\sin\omega_0 t$ и $\cos\omega_0 t$ имеет период исходных функций.

Кросс-корреляция между гармоническими функциями разных частот:

$$f_1(t) = a_1 e^{j\omega_1 t} \qquad \text{и} \qquad f_2(t) = a_2 e^{j\omega_2 t}, \qquad \omega_1 \neq \omega_2.$$

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{j\omega_1 t} \exp - j\omega_2 (t+\tau) \cdot a_1 a_2^{\ *} dt = e^{-j\omega_2 \tau} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \exp jt(\omega_1 - \omega_2) \cdot a_1 a_2^* dt =$$

$$= e^{-j\omega_2 \tau} a_1 a_2^* \lim_{T\to\infty} \frac{\sin(\omega_1 - \omega_2)T}{(\omega_1 - \omega_2)T} = \begin{cases} a_1 a_2^* e^{-j\omega_0 \tau}, \omega_1 = \omega_2 = \omega_0, \\ 0, \qquad \omega_1 \neq \omega_2. \end{cases} \qquad (4.69)$$

Кросс-корреляция между гармоническими функциями разных частот обращается в нуль. Также обращается в нуль кросс-корреляция между их обертонами. Важно подчеркнуть здесь то, что кросс-корреляция обращается в нуль только в пределе, при усреднении на достаточно большом интервале времени $2T$. При конечном значении T кросс-корреляция отлична от нуля даже при $\omega_1 \neq \omega_2$.

Для периодических функций

$$f_1(t) = \sum_n \alpha_n e^{jn\omega_1 t}, \qquad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

$$f_2(t) = \sum_n \beta_n e^{jn\omega_2 t}, \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}.$$

В этом случае: если $\omega_1 \neq \omega_2$, то $R_{12}(\tau) = 0$; если $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$, то

$$R_{12}(\tau) = \sum_n \alpha_n \beta_n^* e^{jn\omega_0 t}.$$

Применение находит также следующее соотношение между нормированными корреляциями:

$$\overline{\left|f_1(t) \pm f_2(t+\tau)\right|^2} = \overline{\left|f_1(t)\right|^2} + \overline{\left|f_2(t+\tau)\right|^2} \pm \left[f_1(t) f_2^*(t+\tau) + f_1^*(t) f_2(t+\tau)\right] =$$

$$R_{11}(0) + R_{22}(0) \pm \left[R_{12}(\tau) + R_{12}^*(\tau)\right], \qquad (4.70)$$

причем $\left|R_{12}(\tau)\right|^2 \leq R_{11}(0) R_{22}(0) \leq \dfrac{\left[R_{11}(0) + R_{22}(0)\right]^2}{4}$.

4.4 Преобразование Фурье корреляционных функций

В разделе 2 было доказано, что операция свертки двух функций соответствует умножения Фурье образов этих функций, а умножение самих функций соответствует свертке Фурье-образов. Аналогичными свойствами обладают операции корреляции.

Рассмотрим произведение Фурье-образов двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ в виде

$$F_1(\omega)\cdot F_2^*(\omega),$$

где

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\ .$$

Используя свойство свертки, находим

$$f_1(t)\otimes f_2^*(-t)\xrightarrow{\hat{F}} F_1(\omega)\cdot F_2^*(\omega), \qquad (4.71)$$

где использовано

$$F^*(\omega)=\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\right]^*=\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)e^{j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(-t)e^{-j\omega t}dt=\hat{F}\left[f^*(-t)\right].$$

Поскольку, далее,

$$f_1(t)\otimes f_2^*(-t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2^*[t-(-\tau)]d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2^*(t+\tau)d\tau=\varphi_{12}(\tau),$$

то

$$\varphi_{12}(\tau)\xrightarrow{\hat{F}} F_1(\omega)\cdot F_2^*(\omega), \qquad (4.72)$$

откуда

$$\varphi_{12}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega)F_2^*(\omega)e^{j\omega t}d\omega\ , \qquad (4.73)$$

Иначе (4.72) можно записать в виде

$$f_1(t)* f_2^*(t)\xrightarrow{\hat{F}} F_1(\omega)F_2^*(\omega)\ . \qquad (4.74)$$

Аналогично доказывается, что

и

$$\left.\begin{aligned} f_1(t)\cdot f_2^*(t)&\xrightarrow{\hat{F}}\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)* F_2^*(\omega)\\ f_1^*(t)\cdot f_2(t)&\xrightarrow{\hat{F}}\frac{1}{2\pi}F_1^*(\omega)* F_2(\omega). \end{aligned}\right\} \qquad (4.75)$$

Для функции автокорреляции сразу получаем

$$|f_1(t)|^2\xrightarrow{\hat{F}}\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)* F_1^*(\omega). \qquad (4.76)$$

Иногда встречается преобразование функции $F(\omega)$ в функцию $f(x)$ с помощью прямого, а не обратного преобразования Фурье. В этих случаях соотношения будут другими. А именно, если использовать теорему взаимности:

$$F(x) \xrightarrow{\hat{F}} 2\pi f(-\omega), \quad \text{то}$$

$$F_1(x) \cdot F_1^*(x) \xrightarrow{\hat{F}} (2\pi) f_1(-\omega) * f_1^*(-\omega). \qquad (4.77)$$

Выше были рассмотрены основные свойства корреляционных функций. Теперь воспользуемся этими свойствами и рассмотрим ***спектральную плотность мощности случайного процесса***, а также докажем теорему Винера-Хинчина.

Введем понятие средней мощности и спектра мощности случайного процесса. Закономерности, характеризующие преобразование Фурье случайного сигнала, обычно используются при рассмотрении когерентности света и процессов оптической фильтрации.

Средней мощностью сигнала $f(t)$ называется предел

$$\overline{f^2(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 \, dt. \qquad (4.78)$$

Случайный сигнал описывает стационарный и эргодический процесс, и фактически в выражении (4.78) подразумевается усреднение по всем возможным реализациям случайного процесса, которое на основе ***гипотезы*** об эргодичности процесса заменено усреднением во времени для произвольной реализации $f(t)$.

Если в класс рассматриваемых функций включить обобщенные функции или распределения, например ***гребенку Дирака***

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(t - t_n) \qquad (4.79)$$

со случайными значениями t_n и α_n, то средней мощностью такого сигнала будем называть предел суммы

$$\overline{f^2(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \sum_n |\alpha_n|^2 , \qquad (4.80)$$

где суммирование распределяется на те индексы n, для которых t_n попадает в интервал $(-T, +T)$.

Ограничимся рассмотрением класса таких функций $f(t)$, которые имеют конечную среднюю мощность, определенную выражениями (4.78) и (4.80).

С помощью прямоугольного импульса $\Pi_T(t)$ соотношение (4.78) можно записать следующим образом:

$$\overline{f^2(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t)\Pi_T(t)dt = \lim_{T\to\infty}\left\langle f(t)f^*(t),\Pi_T(t)\right\rangle =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\left\langle F(\omega)\otimes F^*(-\omega),\frac{\sin\omega T}{\omega T}\right\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\left\langle F(\omega)\cdot F^*(\upsilon),\frac{\sin(\omega-\upsilon)T}{(\omega-\upsilon)T}\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\langle F(\omega)\cdot F^*(\omega)\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega,$$

так как

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\sin(\omega-\upsilon)T}{(\omega-\upsilon)} = \delta(\omega-\upsilon). \qquad (4.81)$$

Таким образом, средняя мощность выражается с помощью Фурье-образа функции $f(t)$. Поэтому величину

$$S_{11}(\omega) = F_1(\omega)\cdot F_1^*(\omega) \qquad (4.82)$$

можно назвать ***энергетическим спектром сигнала*** $f(t)$**.** Например, случайный процесс $f(t)$, Фурье-образ которого $F(\omega)$ имеет вид

$$F(\omega) = \begin{cases} a, & |\omega| < \omega_0, \\ 0, & |\omega| > \omega_0, \end{cases} \qquad (4.83)$$

называется белым или ***флуктационным шумом с ограниченной полосой частот.*** Его средняя мощность равна

$$\overline{f^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} a^2\,d\omega = \frac{1}{2\pi}a^2 2\omega_0. \qquad (4.84)$$

Случайный процесс называется просто белым шумом, если $\omega_0 \to \infty$ и его Фурье-образ отличен от нуля при всех частотах. Из (4.84) видно, что белый шум не может существовать в действительности, так как средняя мощность его была бы бесконечно большой. Однако белый шум с ограниченной полосой частот имеет конечную среднюю мощность и может описывать реальные помехи.

Рассмотрим два случайных процесса $f_1(t)$ и $f_2(t)$, Фурье-образы которых равны $F_1(\omega)$ и $F_2(\omega)$. По аналогии с (4.82) введем ***взаимный энергетический спектр***

$$S_{12}(\omega) = F_1(\omega) \cdot F_2^*(\omega). \qquad (4.85)$$

Совершив обратное преобразование Фурье взаимного энергетического спектра $S_{12}(\omega)$, находим

$$S_{12}(\omega) \xrightarrow{F^{-1}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{12}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2^*(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t+\tau) dt = \varphi_{12}(\tau) \quad ,$$

или

$$\varphi_{12}(\tau) \xrightarrow{\hat{F}} S_{12}(\omega). \qquad (4.86)$$

Теорема Винера – Хинчина гласит: ***взаимный энергетический спектр двух стационарно связанных и взаимно эргодических случайных процессов*** $f_1(t)$ ***и*** $f_2(t)$ ***равен Фурье-образу функции кросс-корреляции этих процессов.*** Развернуто теорему Винера – Хинчина можно написать следующим образом:

$$S_{12}(\omega) = F_1(\omega) \cdot F_2^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \,, \qquad (4.87)$$

$$\varphi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t+\tau) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{12}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \,. \qquad (4.88)$$

Такие же соотношения имеют место для нормированных кросс-корреляций и ***взаимного спектра мощности*** $W_{12}(\omega)$:

$$R_{12}(\tau) = \overline{\varphi_{12}(\tau)} \xrightarrow{\hat{F}} \overline{S_{12}(\omega)} = W_{12}(\omega), \qquad (4.89)$$

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \qquad (4.90)$$

$$W_{12}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \,, \qquad (4.91)$$

Где

$$R_{12}(\tau)=\overline{\varphi_{12}(\tau)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f_1(t)f_2^*(t+\tau)dt=\overline{f_1(t)f_2^*(t+\tau)},\qquad(4.92)$$

$$W_{12}(\omega)=\overline{S_{12}(\omega)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}F_1(\omega)F_2^*(\omega)d\omega=\overline{F_1(\omega)\cdot F_2^*(\omega)}.\qquad(4.93)$$

Спектр мощности $W_{11}(\omega)=W(\omega)$ сигнала $f(t)$ равен Фурье образу нормированной автокорреляции $R_{11}(\tau)=R(\tau)$:

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega,\qquad(4.94)$$

$$W(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau.\qquad(4.95)$$

Докажем, что спектр мощности $W(\omega)$ можно следующим образом выразить через функцию $f(t)$:

$$W(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|\int_{-T}^{T}f(t)e^{-j\omega t}dt\right|^2\qquad(4.96)$$

Рассмотрим усеченную функцию (раздел 2)

$$f_T(t)=f(t)\cdot\Pi_T(t)\cdot 2T,\qquad(4.97)$$

Фурье-образ которой равен

$$F_T(\omega)=\int_{-T}^{T}f(t)e^{-j\omega t}dt\qquad(4.98)$$

а средняя мощность ее на интервале $(-T,\ +T)$ равна

$$W_T(\omega)=\frac{1}{2T}|F_T(\omega)|^2.\qquad(4.99)$$

Если $R_T(\tau)$ - прообраз $W_T(\omega)$: $R_T(\tau)\xrightarrow{\hat{F}}W_T(\omega)$, то

$$R_T(\tau)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)f^*(t+\tau)dt=\frac{1}{2T}f_T(t)\otimes f_T(-t).\qquad(4.100)$$

В пределе, при $T\to\infty$, $R_T(\tau)\to R(\tau)$, а также $W_T(\omega)\to W(\omega)$. Таким образом,

$$W(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|\int_{-T}^{T}f(t)e^{-j\omega t}dt\right|^2. \qquad (4.101)$$

Формула (4.101) выражает теорему Хилли.

Рассмотрим ряд практически полезных примеров.

Пример 1. Как изменяется средняя мощность случайного процесса при прохождении сигнала $f(t)$ через линейный фильтр, имеющий частотно-фазовую характеристику $G(\omega)$? Известно, что отклик $r(t)$ на выходе линейного фильтра равен

$$r(t)=f(t)\otimes g(t), \qquad (4.102)$$

где $g(t)=F^{-1}[G(\omega)]$, а $G(\omega)$ - отклик линейного фильтра на гармонический сигнал частоты ω. Автокорреляция отклика $r(t)$ равна

$$\varphi_r(\tau)=r(t)*r^*(t)=[f(t)\otimes g(t)]*[f^*(t)\otimes g^*(t)].$$

Фурье-образ автокорреляции $\varphi_{11}(\tau)$ равен

$$S_r(\omega)=\hat{F}[\varphi_{11}(\tau)]=F[f(t)\otimes g(t)]F^*[f(t)\otimes g(t)]=$$
$$F_f(\omega)\cdot G(\omega)\cdot F_f^*(\omega)\cdot G^*(\omega)=S_f(\omega)\cdot|G(\omega)|^2,$$

или для среднего энергетического спектра

$$W_r(\omega)=W_f(\omega)\cdot|G(\omega)|^2, \qquad (4.103)$$

а для средней корреляции

$$R_r(t)=R_f(t)\otimes g(t)\otimes g(-t). \qquad (4.104)$$

Пример 2. Пусть автокорреляция на выходе равна дельта-функции:

$$R_f(t)=\delta(t), \qquad (4.105)$$

т.е энергетический спектр сигнала $f(t)$ простирается равномерно до бесконечности:

$$S_f(\omega)=1(\omega).$$

На выходе линейного фильтра $G(\omega)$ энергетический спектр

$$S_r(\omega)=|G(\omega)|^2, \qquad (4.106)$$

т.е равен просто квадрату передаточной характеристики $G(\omega)$ линейного фильтра. Это важное соотношение часто применяется в расчетах.

Пример 3. Рассмотрим сигнал вида

$$f(t) = AY(t). \tag{4.107}$$

Средняя функция автокорреляции равна (рис 4.5)

$$R(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{|A|^2}{2T} \int_{-T}^{T} |Y(t)|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T} \int_{0}^{T} dt = \frac{A^2}{2}, \tag{4.108}$$

а спектр мощности

$$S(\omega) = \pi A^2 \delta(\omega) \tag{4.109}$$

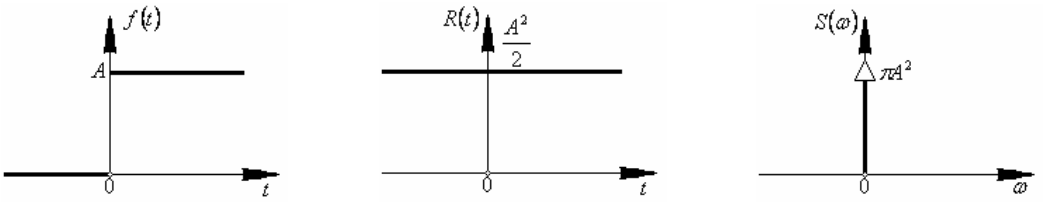


Рис. 4.5 Исходная функция $f(t) = AY(t)$, нормированная функция автокорреляции $R(t)$ и спектр мощности $S(\omega)$.

В качестве примеров для самостоятельной работы можно рассмотреть следующие задачи:

1. Задана бесконечная последовательность равностоящих узких импульсов (гребенка Дирака)

$f(t) = \sum_R \alpha_R \delta(t - \kappa T)$, где α_R – действительные коэффициенты

Тогда

$$R(t) = \sum_R A_R \delta(t - \kappa T),$$

где

$$A_R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2nT} \sum_{m=-n}^{n} \alpha_m \alpha_{m+n}.$$

Определить спектр мощности сигнала $f(t)$, который должен быть равен

$$S(\omega) = \sum_R A_R \cos \kappa T\omega = A_0 + 2\sum_{R=1}^{\infty} A_R \cos \kappa T\omega.$$

так как коэффициенты α_R действительны, и $A_R = A_{-R}$.

В частном случае $\alpha_R = 1$

$$f(t)=\sum_R \delta(t-\kappa T),\qquad A_R=\frac{1}{T},\qquad R(t)=\frac{f(t)}{T},$$

$$S(\omega)=\frac{1}{T}\sum_R e^{i\omega\kappa T}=\frac{2\pi}{T^2}\sum_R \delta(\omega-n_R\omega_0),\qquad \text{где } \omega_0=2\pi/T.$$

2. Задана периодическая функция

$$f(t)=\sum_n \alpha_n e^{in\omega_0 t},\qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T}.$$

Найти спектр мощности, который будет равен

$$S(\omega)=2\pi\sum_n |\alpha_n|^2\delta(\omega-n\omega_0)$$

и автокорреляцию $R(t)=\sum_n |\alpha_n|^2\cos n\omega_0 t$ для действительной функции $f(t)$, когда $|\alpha_{-n}|=|\alpha_n|$,

$$R(t)=|\alpha_0|^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2\cos n\omega_0 t.$$

Доказать, что в частном случае, когда $f(t)=a\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$, $\alpha_1=\alpha_{-1}^*=\frac{a}{2}e^{i\varphi_0}$,

$$S(\omega)=\frac{\pi}{2}a^2[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)],$$

$$R(t)=a^2\cos\omega_0 t/2.$$

3. Отклик линейного фильтра на импульс равен $r(t)=e^{-jt}Y(t)$ ($\alpha>0$). Автокорреляция импульса равна $R_f(t)=\delta(t)$. Определить автокорреляцию на выходе $R_r(t)$ и спектр мощности на выходе $S_r(\omega)$.

Ответ. $$S_r(\omega)=G(\omega)G^*(\omega)=\frac{1}{\alpha^2+\omega^2},$$

$$R_r(t)=e^{-\alpha|t|}/2\alpha.$$

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ФАЗОВЫХ ОБЪЕКТОВ МЕТОДАМИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В современной волновой оптике одними из центральных теоретических и прикладных задач являются проблемы регистрации волнового фронта (РВФ) и управления волновым фронтом (УВФ) когерентных пучков оптического излучения. Не смотря на близость этих задач, первая из них представляется более сложной и общей, чем вторая. Это связано с тем, что УВФ часто осуществляется в режиме «автокомпенсационного обращения», при котором анализ структуры волнового фронта играет промежуточную роль. Проблема же РВФ состоит не в компенсации фазовых искажений пучка (например, с помощью эффекта обращения волнового фронта), полученных при распространении в каком-либо оптическом тракте, а в выделении информации об этом тракте, заключенной в изменениях фазы волны электромагнитного излучения.

Сложность РВФ объясняется тем, что основные приемные устройства оптического сигнала, в том числе - человеческий глаз, не позволяют зарегистрировать непосредственно комплексную амплитуду поля, а реагируют лишь на усредненную интенсивность падающего излучения, т.е. фактически осуществляют косвенные измерения амплитуды оптического поля. По этой причине уже более семидесяти лет остается актуальной проблема эффективного восстановления фазовых характеристик световых полей на основании данных об интенсивности.

Значительный прогресс в этой области обозначился после возникновения лазерной когерентной оптики и разнообразных голографических методов, когда благодаря лазерному излучению появилась возможность регистрации и восстановления комплексной амплитуды поля. В этой связи выделим несколько принципиальных, а по состоянию на сегодняшний день - классических, техник РВФ.

Наиболее ранними техниками измерений малых изменений разности фаз являются интерференционные методы. Также отметим семейство вычислительных методов Герхберга-Сэкстона, основанных на быстрых алгоритмах воспроизведения фазовой структуры регистрируемой волны, исходя из значений ее интенсивности в нескольких плоскостях. Здесь же необходимо упомянуть типичные элементы адаптивных оптических систем - датчики волнового фронта, такие как датчики Гартмана-Шака и сдвиговые интерферометры.

Фазовые объекты, т.е. предметы которые не изменяют амплитуду световой волны, а изменяют пространственное распределение волнового фронта, невозможно обнаружить при обычных способах наблюдения, т.к. квадратичные приемники излучения реагируют на квадрат модуля комплексной амплитуды поля (интенсивность) и фазовая информация в этом случае теряется. С фазовыми объектами приходится встречаться, например,

в микроскопии, в акустике, при исследовании аэро- и гидродинамических потоков. Помимо традиционных интерференционных и голографических методов визуализации фазовых объектов можно использовать методы пространственной оптической фильтрации, из которых наиболее известными являются:

- метод дефокусировки восстановленного изображения,
- метод пространственного фильтра Цернике,
- метод пространственного фильтра Фуко,
- метод пространственного фильтра Гильберта.

Исторически методы наблюдения фазовых объектов часто называют теневыми методами, а соответствующие приборы – теневыми приборами, что не вполне корректно. Для простоты изложения будем придерживаться сложившейся терминологии.

Теневые методы (ТМ), за прошедшее с момента их появления время, заняли достойное место востребованных и эффективных методик в инструментальной оптике, технологическом контроле оптических деталей, диагностике прозрачных неоднородностей в различных средах. Кроме того, определенные подклассы теневых приборов широко используются в когерентных системах распознавания и классификации двумерных образов, одно- и многоволновой пространственной фильтрации, в оптико-электронных каскадах, работающих как датчики волнового фронта, когерентных вычислительных машинах, оптических блоках пространственно-временных модуляторов света и т.п.

Если сравнить с широко распространенными интерференционными или интерференционно-голографическими системами фазовой диагностики в оптике или микрорастровыми датчиками волнового фронта типа Гартмана-Шака, то основными достоинствами всего семейства теневых оптических устройств являются простота конструкции, высокая помехоустойчивость при нестационарной эксплуатации и наглядность результатов регистрации фазовых образований. Не смотря на это, к сожалению, повсеместно признанного статуса точных и строго количественных методов фазовых измерений ТМ не получили.

В данном разделе приведены результаты исследований, относящиеся, в основном, к проблематике корректного количественного анализа и сравнения различных теневых методик, минимальное множество которых составляют методы: дефокусировки изображения, Цернике, Фуко(-Теплера) и Гильберта (фазового ножа). Здесь не рассматриваются гибридные и специальные теневые схемы, подобные, например, теневому прибору со светоделительной пирамидой. В приведенном материале не рассматриваются также вопросы оценок практически важных характеристик ТМ, таких как локальные амплитудно-фазовая передаточная функция, майкельсоновский контраст, чувствительность методов, а также критерии сравнения ТМ друг с другом.

Оптическая система тройной дифракции. Основное изложение материала ведется в рамках, широко используемой в теории расчета

лазерных резонаторов, гибридной скалярно-матричной модели описания оптических систем: совокупности скалярного френелевского приближения волновой дифракционной теории Гельмгольца-Кирхгофа и приближения параксиальной (матричной) оптики. Не останавливаясь на стандартных предположениях обоих приближений, подчеркнем, что из рассмотрения исключаются оптические системы с малыми числами Френеля, поскольку для них требуются отдельные существенные уточнения дифракционной теории.

Связь между комплексными амплитудами поля в начальной $U_1 = U_1(\mathbf{x}_1)$ и конечной $U_2 = U_2(\mathbf{x}_2)$ опорных плоскостях, разнесенных на расстояние L, дается формулой

$$U_2(\eta_1,\eta_2) = \frac{k\mathrm{e}^{ikL}}{2\pi iB}\iint_{\square^2} U_1(\xi_1,\xi_2)\exp\left\{i\frac{k}{2B}\left(A\left[\xi_1^2+\xi_2^2\right]+D\left[\eta_1^2+\eta_2^2\right]\right)\right\}\mathrm{e}^{i\frac{k}{B}(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2)}\,d\xi_1 d\xi_2 = \qquad (5.1)$$

$$= U_2(\mathbf{x}_2) = \frac{k}{2\pi iB}\mathrm{e}^{ikL}\,\mathrm{F}\,(B/D;\mathbf{x}_2)\,\mathsf{F}_{\mathbf{x}_1}\left\{U_1(\mathbf{x}_1)\mathrm{F}\,(B/A;\mathbf{x}_1);\frac{k}{B}\mathbf{x}_2\right\},$$

где $\mathbf{x}_1 = (\xi_1,\xi_2)$, $\mathbf{x}_2 = (\eta_1,\eta_2)$ – декартовы координаты в начальной и конечной опорных плоскостях, $\mathsf{F}_{\mathbf{o}}\{g(\mathbf{o});\mathbf{x}\}$ – двумерное преобразование Фурье функции $g(\mathbf{o})$, $\mathrm{F}\,(\mathbf{z};\mathbf{x}) = \exp\left\{i\frac{k}{2z}\mathbf{x}^2\right\}$ – фазовая функция Френеля, A,B,C,D – элементы лучевой *ABCD*-матрицы M данной гауссовой оптической системы:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \qquad (5.2)$$

Отметим, что в данном тексте весь анализ и построение оптических систем, в указанном выше приближении, подчинены следующему алгоритму:

1. последовательное прохождение светом двух гауссовых оптических систем с лучевыми матрицами M_1 и M_2 соответственно эквивалентно действию на излучение одной системы с лучевой матрицей $M = M_2M_1$,
2. если оптическая система состоит из гауссовых и негауссовых элементов, например тонких линз и (жестких) диафрагм соответственно, то ее следует разделить на подсистемы, часть из которых являются строго гауссовыми, а остальные – негауссовыми. Гауссовы компоненты будут в этом случае описываться соответствующими лучевыми матрицами и к ним непосредственно применима формула (5.1), а влияние текущего негауссового компонента необходимо учесть с помощью умножения текущей амплитуды поля перед этим элементом на функцию амплитудно-фазовых искажений.

Все теневые методы, как часть более разнообразного семейства методов пространственной фильтрации, удобно рассматривать с единых позиций определенной последовательности преобразований комплексной

амплитуды поля в системе. Для описания ТМ такими преобразованиями служат: прямое преобразование Фурье F^{+1} входного поля, фильтрация пространственных частот спектра поля G и, наконец, обратное преобразование Фурье F^{-1} отфильтрованного поля, т.е., в соответствии с алгоритмом расчета сложных оптических систем, данным выше,

$$U_{\text{вых}}(\mathbf{x}_2) = \mathrm{e}^{i\bar{k}\cdot\text{const}}\,\mathsf{F}_{\mathbf{щ}}^{-1}\left\{\mathsf{F}_{\mathbf{x}_1}^{+1}\left\{U_{\text{вх}}(\mathbf{x}_1);\mathbf{щ}\right\}\cdot G(\mathbf{щ});\mathbf{x}_2\right\}, \qquad (5.3)$$

где $\bar{k}$ – среднее волновое число, которое мы будем считать приближенно равным $k = 2\pi/\lambda$, λ – длина волны освещающего излучения.

Предложим принципиальную схему оптической системы, осуществляющей поэтапное преобразование поля вида (5.3).

Из формулы (5.1) видно, что с точностью до постоянных фазового и масштабного множителей точное преобразование Фурье комплексной амплитуды U_1 будет иметь место при $A = D = 0$ и $B = b > 0$, т.е.

$$U_2\left([k/b]\mathbf{x}_2\right) = \frac{k\,\mathrm{e}^{ikl^{(1)}}}{2\pi ib}\mathsf{F}_{\mathbf{x}_1}\left\{U_1(\mathbf{x}_1);\frac{k}{b}\mathbf{x}_2\right\}. \qquad (5.4)$$

Очевидно, что первый компонент системы, проводящий F^{+1}- преобразование, есть обычная тонкая сферическая линза L_0 с фокусным расстоянием $f_0 = b$, когда поле $U_1(\mathbf{x}_1)$ задано в ее передней фокальной плоскости, а Фурье-спектр $U_2(\mathbf{щ})$ располагается в задней фокальной плоскости; здесь $\mathbf{щ} = [k/b]\mathbf{x}_2$ – пространственная частота, а $l^{(1)} = 2f_0$. Величина b играет роль масштабообразующего параметра пространственного спектра поля в системе.

Фильтрацию $G = G(\mathbf{щ})$, которая производиться в Фурье-плоскости запишем в стандартном виде

$$U_3(\mathbf{щ}) = U_3\left([k/b]\mathbf{x}_3\right) = U_2\left([k/b]\mathbf{x}_2\right)\cdot G\left([k/b]\mathbf{x}_2\right)\Big|_{\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_3}. \qquad (5.5)$$

Для построения последнего компонента системы, укажем на то обстоятельство, что при условии $A = D = 0$ и $B = -b < 0$, взяв за поле в начальной опорной плоскости амплитуду (5.5), мы получаем

$$U_4\left(\mathbf{x}_4\right) = -\frac{k}{2\pi ib}\mathrm{e}^{ikl^{(2)}}\frac{b^2}{k^2}4\pi^2\mathsf{F}_{\mathbf{щ}}^{-1}\left\{U_3(\mathbf{щ});\mathbf{x}_4\right\}. \qquad (5.6)$$

Можно проверить, что F^{-1}- каскадом будет система из двух тонких сферических линз L_1 и L_2 (см. рис. 5.1) с фокусными расстояниями f_1 и f_2, расположенных на расстояниях $l_{1,2,3}$ ($l^{(2)} = l_1 + l_2 + l_3$), которые вычисляются по формулам

$$l_1 = \frac{f_1}{f_2}\left(b + f_2\right), \qquad l_2 = f_1 + f_2 + \frac{f_1 f_2}{b}, \qquad l_3 = \frac{f_2}{f_1}\left(b + f_1\right), \tag{5.7}$$

Также можно убедиться, что полученная оптическая система будет телескопической с угловым увеличением $V = +1^{\times}$.

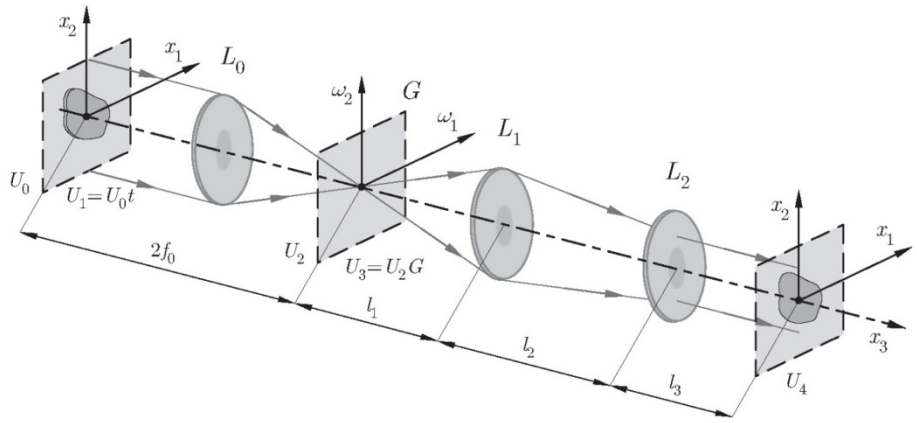


Рис.5.1 Оптическая система тройной дифракции

В результате мы построили оптический каскад, который осуществляет $\mathsf{F}^{-1}G\mathsf{F}^{+1}$-преобразование входного монохроматического поля. Будем называть его, следуя принятой в современной теории ТМ терминологии, оптической системой тройной дифракции (ОСТД). Модель системы тройной дифракции используется в работе в качестве унифицирующего конструктивного инварианта всех теневых приборов, разница между которыми оказывается сведенной к различию в типах используемых фильтров пространственных частот G в неизменной ОСТД.

Двумерный фильтр любого из четырех разбираемых нами теневых методов, в зависимости от конструктивной симметрии, можно представить одной из следующих комплекснозначных функций:

$$G_1(\mathbf{ш}) = \sum_{s=1}^{4} \tau_s \, \mathrm{e}^{i\theta_s(\mathbf{ш}-\mathbf{ш}_0)} \, H^{\chi_s}(\mathbf{ш}-\mathbf{ш}_0), \tag{5.8}$$

$$G_2(\mathbf{ш}) = \tau_1 \mathrm{e}^{i\theta_1(\mathbf{ш}-\mathbf{ш}_0)} \mathrm{cyl}_{\rho}^{(+1)}\left(\mathbf{ш}-\mathbf{ш}_0\right) + \tau_2 \mathrm{e}^{i\theta_2(\mathbf{ш}-\mathbf{ш}_0)} \mathrm{cyl}_{\rho}^{(-1)}\left(\mathbf{ш}-\mathbf{ш}_0\right) \mathrm{cyl}_{\mathrm{P}}^{(+1)}\left(\mathbf{ш}-\mathbf{ш}_0\right), \tag{5.9}$$

где $\chi_1 = (+1,+1)$, $\chi_2 = (-1,-1)$, $\chi_3 = (+1,-1)$, $\chi_4 = (-1,+1)$ – бииндексы Вейля, $H^{(\pm 1,\mp 1)}(\mathbf{ш}) = H\left((\pm 1)\cdot\omega_1\right) H\left((\mp 1)\cdot\omega_2\right)$ – квадрантная двумерная функция Хевисайда,

$$H(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1/2, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

– единичная функция Хевисайда,

$$\mathrm{cyl}_{\rho}^{(\pm1)}(\mathbf{щ})=\begin{cases}1, & |\mathbf{щ}|^{\pm1}\le\rho^{\pm1},\\ 0, & |\mathbf{щ}|^{\pm1}>\rho^{\pm1},\end{cases}$$

- радиальный аналог функции H,
$|\mathbf{щ}|=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}$, $\mathbf{щ}_0$ – координата центра составного фильтра, ρ, P – внутренний и внешний радиусы круговых компонентов, $\tau_s\le1$ – амплитудные коэффициенты прозрачности сегментов фильтра, θ,θ_s – фазовые сдвиги сегментов, $s=1,\ldots,4$. В табл. 5.1 указаны значения параметров соответствующих двумерных центрированных ($\mathbf{щ}_0=0$) фильтров (5.8) или (5.9) каждого из интересующих нас методов.

Таблица 5.1

Название метода	Тип фильтра	Значение параметров
дефокусировки изображения	G_1	$\tau_s=1$, $\theta_s(\mathbf{щ})=\dfrac{f_0f_2+f_1f_2-l_иf_1}{2kf_1}\mathbf{щ}^2$ $l_u=l_3+\Delta l$ $(\Delta l-$ *дефокусировка*$)$
Цернике	G_2	$\tau_1\le1,\ \tau_2=1,\ \theta_1=\pi/2,\ \theta_2=0$ (или $\theta_1=0,\ \theta_2=\pi/2$), ρ « 1 и P » ρ
Фуко	G_1	$\tau_{1,2}=1,\ \tau_{3,4}=0,\ \theta_s=0$
Гильберта	G_1	$\tau_s=1,\ \theta_{1,2}=\pi,\ \theta_{3,4}=0$

Приближение квазифинитных фазовых объектов.

Фазовые объекты (ФО) или фазовые предметы (ФП) представляют собой существенно двумерные образования в различных оптических средах (стекле, воздухе, воде, плазме и т.п.), которые не ослабляют амплитуду световой волны, а изменяют лишь ее фазовые характеристики.

В соответствии с принципами, изложенными ранее, всякий оптический, не обязательно фазовый, предмет мы можем ассоциировать с некоторым амплитудно-фазовым экраном и ввести для него в текущей плоскости соответствующий амплитудно-фазовый коэффициент пропускания (комплексную функцию пропускания)

$$t(\mathbf{x}) = \exp\{-\mu(\mathbf{x}) + i\varphi(\mathbf{x})\}, \qquad (5.10)$$

который определяет действие этой двумерной структуры на амплитудные (через бугеровский множитель $e^{-\mu(\mathbf{x})}$) и фазовые (через объектную фазовую функцию $\varphi(\mathbf{x}) = kl\ (\mathbf{x})$) характеристики падающей волны. Эффективная оптическая длина находится обычным образом: $l\ (\mathbf{x}) = h_o(\mathbf{x})\left[n_o(\mathbf{x}) - n_c\right]$, где $h_o(\mathbf{x})$ и $n_o(\mathbf{x})$ – толщина вдоль направления распространения излучения и показатель преломления ФП в точке $\mathbf{x}$, n_c – показатель преломления внешней среды. В случае непоглощающего (и нерассеивающего) объекта, т.е. $\mu \equiv 0$, приходим к чисто фазовому приближению

$$t(\mathbf{x}) = \exp\{i\varphi(\mathbf{x})\}. \qquad (5.11)$$

Теперь выделим класс квазифинитных фазовых объектов, которые мы отождествляем с множеством вещественнозначных функций с определенными свойствами. Будем предполагать, что для объектных функций φ выполняются следующие условия:

- $\varphi \in Q_{\Pi}^{n} \subset C^{n}(R^2),\ \Pi \subset R^2,\ n \geq 2,$ где Q_{Π}^{n} – множество функций $\varphi(\mathbf{x})$ с производными $\partial^{\alpha}\varphi$, непрерывными вплоть до n-го порядка включительно, и таких, что при $\mathbf{x} \in \Pi$ $\left|\varphi(\mathbf{x})\right| \leq \text{const}$, а при $\mathbf{x} \notin \Pi$ $\left|\partial^{\alpha}\varphi(\mathbf{x})\right| \leq a_{\alpha} \Big/ \left[1 + \left|\mathbf{x}\right|^{m}\right],\ a_{\alpha} > 0,\ 1 \ll m \subset N$ для всех индексов α,
- по каждому аргументу функция $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, x_2)$ удовлетворяет условию Гёльдера: $\left|\varphi(x_s^{\bullet}) - \varphi(x_s^{\bullet\bullet})\right| \leq C\left|x_s^{\bullet} - x_s^{\bullet\bullet}\right|^{p}$, *где* $x^{\bullet}, x^{\bullet\bullet} \in \Pi_{\varphi}, C \geq 0,\ 0 \leq p \leq 1$.

Под квазифинитностью, таким образом, мы понимаем очень быстрое убывание данной «хорошей» функции φ вне некоторой области $\Pi_{\varphi} \subset R^2$, которую можно назвать носителем этой квазифинитной функции. Формально, у квазифинитной функции допускается существование нескольких носителей, т.е. строго лежащая в R^2 область Π может быть несвязной.

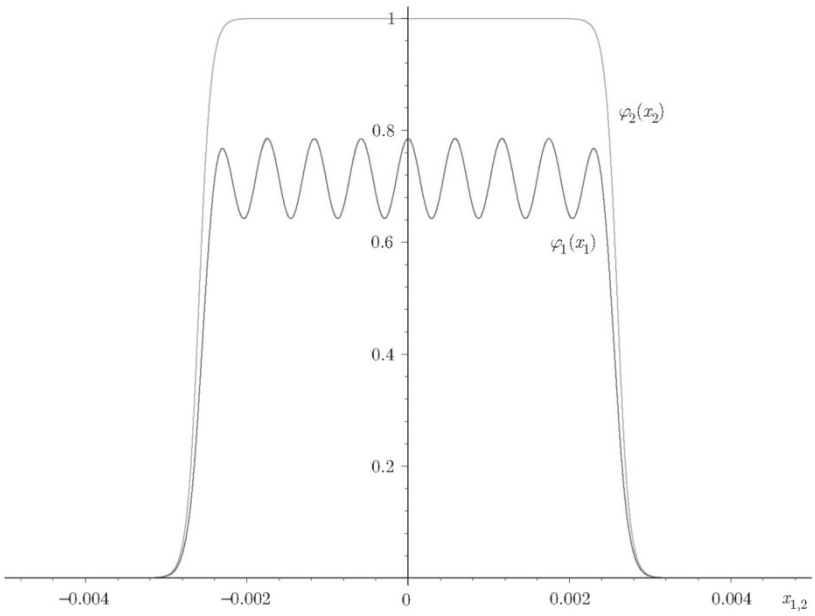
Приведенные только что ограничения относительно разновидности зависимостей φ и, следовательно, оптических объектов, не являются искусственным сужением множества рассматриваемых функций, а имеют сугубо прикладное обоснование. Дело в том, что обычные для анализа различных свойств ТМ модели бесконечно протяженных гармонических фазовых решеток являются слишком огрубленными, по отношению к реальным условиям наблюдения, поскольку в подавляющем числе случаев при исследовании одиночных фазовых образований с некоторой характерной границей объект не заполняет полностью поле зрения оптической системы. Поэтому логично ожидать появления некоторых новых специфических эффектов при визуализации квазифинитных ФП, в сравнении с классической ситуацией. Особенно важен учет квазифинитности в тех ТМ, которые

чувствительны к резким границам объектной функции, т.е. в методах Фуко и Гильберта.

В качестве примера иллюстрации визуализации фазового тест-объекта при наблюдении различными ТМ возьмем ФО $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, x_2)$ квазифинитного типа, а именно аподизированный параллелепипед, промодулированный по косинусоидальному закону только по одной переменной и имеющий конечные размеры в области полного углового поля оптической системы. Уточним, что здесь текущая система координат суть $\left(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)\right)$, где x_1, x_2 – декартовы координаты в плоскости, поперечной к оптической оси ОСТД, а $\varphi(x_1, x_2)$ – набег фазы (в радианах), ассоциированный с данной точкой плоскости. Аналитическое выражение этого ФО записывается в факторизованном виде:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, x_2) = C_{\text{н}} \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2), \qquad (5.12)$$

где $C_{\text{н}}$ – постоянная, связанная с типом нормировки функции (5.12), $\varphi_{1,2} \in Q_{\Pi}^2$ с носителями $\Pi = (-0{,}003;\ 0{,}003) \subset R$, графики которых представлены на рис.5. 2.



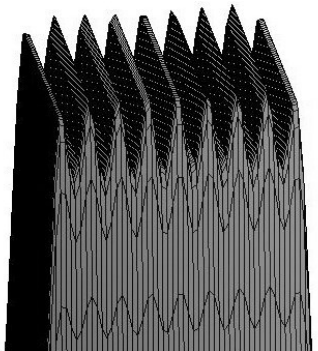


Рис. 5.2 Модель объектной фазовой функции

Численные результаты визуализации теневыми методами. Не вдаваясь в подробности вывода формул зависимостей интенсивности в плоскости регистрации $I = U_4 U_4^*$ (см. рис. 5.1) от объектной функции $\varphi(\mathbf{o})$ и прочих параметров при коллимированном освещении с амплитудой $U_{\text{пв}}$ для всех четырех ТМ, просто приведем эти выражения, сопровождая их комментариями (см. табл. 5.2).

Таблица 5.2

Название метода	Выражение для интенсивности $I(\mathbf{x})$	Комментарий
дефокусировки изображения	$U_{\text{пв}}^2 \left(\left[1 + \vartheta \cdot \overline{\nabla}^2 \varphi(\mathbf{x}) \right]^2 + \vartheta^2 \left| \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{x}) \right|^4 \right)$	$\vartheta = -\Delta l/(2k)$, $\left\| \vartheta \omega_{\max}^2 \right\| \ll 1$
Цернике	$U_{\text{пв}}^2 \tau^2 \left(1 + 2\varphi(\mathbf{x})/\tau \right)$	$\max\limits_{\mathbf{x} \in \Pi_\varphi} \left| \varphi(\mathbf{x}) \right| < 1$
Фуко	$\frac{U_{\text{пв}}^2}{4} \left| t(\mathbf{x}) - \mathsf{H}_{\mathbf{o}} \{ t(\mathbf{o}); \mathbf{x} \} \right|^2$	$\mathsf{H}_{\mathbf{o}} \{ t(\mathbf{o}); \mathbf{x} \}$ – преобразование Гильберта функции $t(\mathbf{o})$
Гильберта	$U_{\text{пв}}^2 \left| \mathsf{H}_{\mathbf{o}} \{ t(\mathbf{o}); \mathbf{x} \} \right|^2$	

Эти формулы легко получить, следуя цепочке преобразований поля (5.3) в ОСТД и используя табл. 5.1 для описания действия пространственных фильтров. При численных расчетах предполагалось, что ФП (5.12) освещался коллимированным пучком гелий-неонового лазера ($\lambda = 0.6328 \cdot 10^{-6}$ м, т.е. $k = 10^7\ м^{-1}$). За эффективную апертуру системы тройной дифракции (размер анализируемой области в плоскости входного зрачка), брался квадрат со стороной 10^{-2} м. Размер апертурной области был выбран сообразно средним габаритам фоточувствительных матриц распространенных современных ПЗС-камер, диагонали которых составляют от $8 \cdot 10^{-3}$ до $1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м.

Результаты одной из визуализаций ФО (5.12) приведены на рис. 5.3: (*a*) – метод дефокусировки, (*b*) – метод Цернике, (*c*) – метод Фуко, (*d*) – метод Гильберта. На рисунке показано распределение усредненной нормированной интенсивности в центральном поперечном сечении содержащем фазовую модуляцию исходного объекта, которое можно сравнить с видом функции модуляции $\varphi_1(x_1)$ показанном на рис. 5.2.

Отметим, что при численном анализе методов Фуко и Гильберта использовались одномерные пространственные фильтры (ножи), кромки которые помещались под различными углами к оси фазовой модуляции. Это было сделано, исходя и соображений большей практической значимости данных типов фильтров, тем более что обобщение на двумерный (квадрантный) случай не вносит никаких новых эффектов и является тривиальным.

На рис. 5.3 кромки ножей ориентированны перпендикулярно оси Ox_1. На основании полученных результатов можно сделать ряд выводов.

Во-первых, при визуализации ФО, имеющих в области эффективной апертуры системы конечные размеры, проявляются краевые эффекты, наиболее существенные для методов Фуко и Гильберта. Эти явления «оконтуривания» границ объекта уменьшают контраст картины внутренней структуры объекта.

Во-вторых, в методах Фуко и Гильберта присутствует сильная зависимость деформаций визуализированного образа квазифинитного фазового предмета от угловой ориентации пространственного фильтра относительно направления характерной модуляции фазы. Например, в теневом методе Гильберта в положении кромки ножа, перпендикулярном направлению модуляции, возникает существенное искажение структуры объекта (рис. 5.3, *d*).

С практической точки зрения, для любого из перечисленных методов необходима оценка влияния точности позиционирования пространственного фильтра на чувствительность, что немаловажно при проектировании конкретного теневого прибора. Задание в процентном соотношении области зрачка, перекрытой ножом, делает возможным моделирование ситуации линейной децентрировки фильтра пространственных частот. Иллюстрация такого случая представлена на рис. 5.4. Рисунки соответствуют перемещению ножа Фуко перпендикулярно световому пучку с шагом 1 мкм. Апертура оптической системы по прежнему представляет собой квадрат со стороной 10^{-2} м.

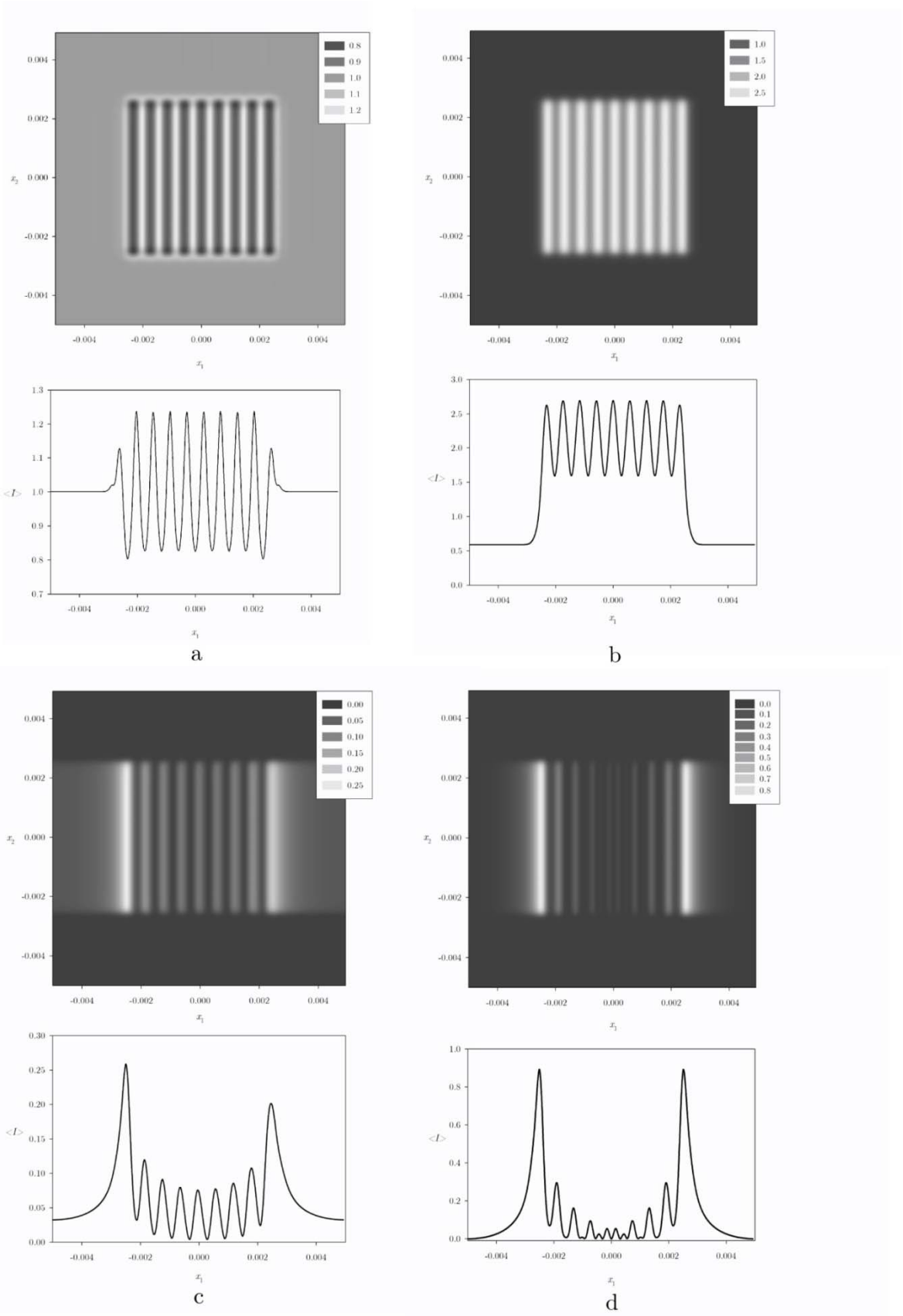
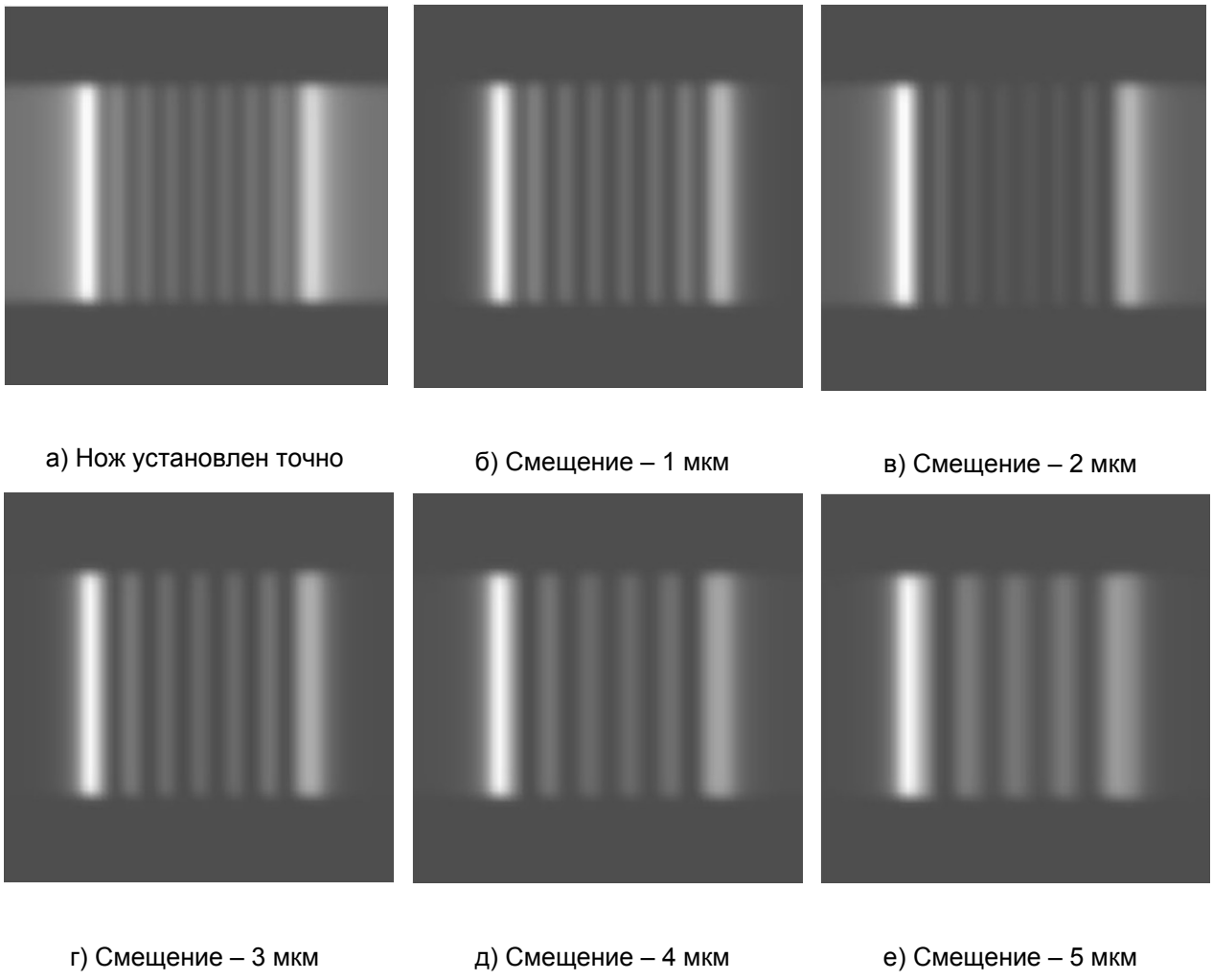

0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.0
1.5
2.0
2.5
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
x_2
x_1
$<I>$
a
b
c
d

Рис. 5.3

Метод Фуко (пространственный фильтр «срезает» половину спектра пространственных частот)



а) Нож установлен точно

б) Смещение – 1 мкм

в) Смещение – 2 мкм

г) Смещение – 3 мкм

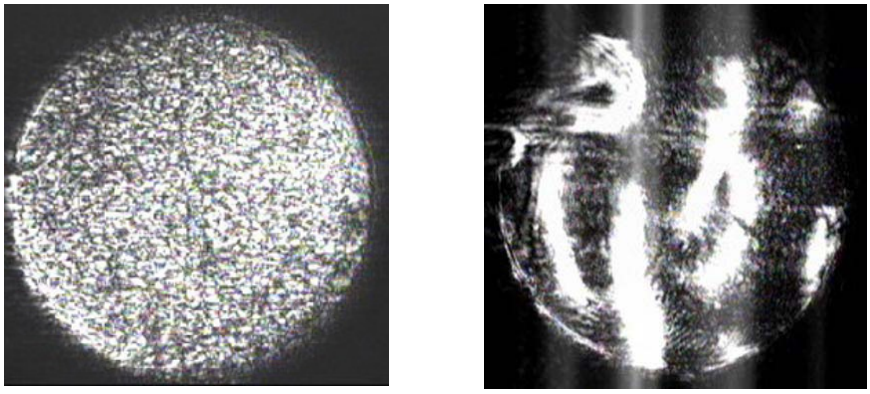
д) Смещение – 4 мкм

е) Смещение – 5 мкм

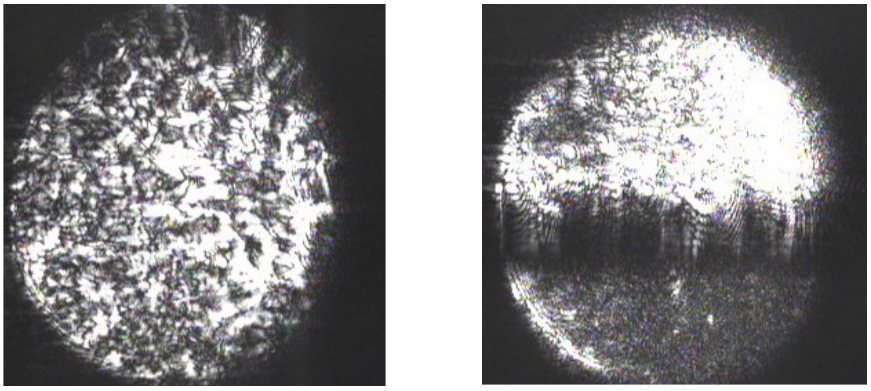
Рис. 5.4

В реальной практике приходится сталкиваться с объектами, форма, местоположение, количество и фазовый градиент которых являются случайными функциями зрачковых координат. В связи с этим представляется целесообразным деление объектов на кластеры и разработка статистических моделей теневых методов. Такое деление позволит в дальнейшем сопоставить каждый конкретный метод пространственной оптической фильтрации с определённым кластером наблюдаемых объектов для получения наилучших результатов, что может быть использовано при разработке количественной теории теневых измерений.

В заключение данного раздела можно привести несколько изображений различных фазовых объектов, полученных с использованием разработанного на кафедре Лазерной техники и биомедицинской оптики лазерного теневого прибора (диаметр зрачка 10 мм) с пространственным фильтром Фуко.



а) б)



в г

Рис. 5.5 Фотографии, сделанные при помощи ПЗС-камеры
а – водная среда с пузырьками газа, б – эффект оптической пересветки на ПЗС-приёмнике при наблюдении динамической фазовой неоднородности, в – картина растворения эфира в водной среде, г – граница раздела двух сред с разной оптической плотностью

ПОСЛЕСЛОВИЕ

С позиций анализа сигналов в частотной области и точного их восстановления после преобразований можно отметить ряд недостатков разложения сигналов в ряды Фурье:

- Особенности сигналов, связанные с разрывами (скачками) и острыми пиками, вызывают незначительные изменения их частотного образа, т.к. «размазываются» по всей частотной оси, что делает невозможным их обнаружение и анализ по спектрам.
- Гармонические базисные функции разложения, в принципе, не могут отображать перепады сигналов с бесконечной крутизной типа прямоугольных импульсов, т.к. это требует бесконечно больших значений числа членов ряда. При аппроксимации скачков нелокализованными во времени базисными функциями требуется, чтобы суперпозиция этих функций не только восстановила скачок, но и уничтожила друг друга за пределами скачка, что делает равнозначимыми все компоненты его спектра. При ограничении числа членов ряда Фурье в окрестностях скачков и разрывов восстановленного сигнала возникают осцилляции (эффект Гиббса).
- Преобразованием Фурье отображаются глобальные сведения о частотах исследуемого сигнала, поскольку базисные функции преобразования определены на бесконечном временном интервале. ПФ не дает представления о локальных свойствах сигнала при быстрых временных изменения его спектрального состава. Так, например, преобразование Фурье не различает сигнал с суммой двух синусоид, от сигнала с двумя последовательно следующими синусоидами с теми же частотами. Преобразование Фурье в принципе не имеет возможности анализировать частотные характеристики сигнала в произвольные моменты времени.

Частичным выходом из этой ситуации является так называемое оконное преобразование Фурье. В оконном преобразовании Фурье применяется вполне логичный (и обычный для математики) подход – если сигнал в целом нестационарный, то будем проводить его декомпозицию по времени пока каждый из декомпозированных участков сигнала не станет стационарным. Затем преобразуем каждый участок сигнала с помощью обычного преобразования Фурье.

Перечисленные недостатки очевидно заставляют использовать интегральные преобразования и других видов (не только рассмотренных в данной работе). Примерами может служить преобразование Хартли, характерной особенностью которого является преобразование только в вещественной области (отображает вещественные сигналы в вещественные же). Прямое и обратное преобразования Хартли полностью взаимно симметричны. Большой вклад в развитие преобразования внес Р. Брейсуэлл, разработавший основы теории непрерывного и дискретного преобразования Хартли, а также один из вариантов его быстрого преобразования. Применение преобразования перспективно для обработки изображений. В

течение последнего десятилетия активно ведутся работы, связанные с исследованием и использованием вейвлет-преобразований. Отметим, что при вейвлет - преобразовании в отличие от оконного преобразования Фурье изменяется сам базис целевого пространства преобразования. Другими словами вейвлет преобразование не основано на преобразовании Фурье и не использует разложение сигнала по гармоническим функциям. Вейвлет-преобразование действительно решает проблему разрешения, поскольку ширина оконной функции изменяется в течение преобразования и определяется параметром преобразования. Основным его преимуществом является возможность пространственного анализа деталей сигналов (как стационарных, так и не стационарных) при сохранении хорошего разрешения, как по времени, так и по масштабу (по частоте). Вейвлет-преобразование допускает использование разнообразных функций в качестве базисных. Выбор конкретного базиса зависит, разумеется, от конкретной прикладной задачи. Базисные функции конструируются из материнского (исходного) вейвлета $\Psi(t)$, обладающего определенными свойствами за счет операций сдвига во времени и изменения временного масштаба.

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Сороко Л. М.* Основы голографии и когерентной оптики. – М: Наука, 1971. – 616 с.
2. *Сороко Л. М.* Гильберт-оптика. – М: Наука, 1981. – 160 с.
3. *Ахманов С. А., Никитин С. Ю.* Физическая оптика. – М: Изд-во МГУ; Наука, 2004 – 656 с.
4. *Папулис А.* Теория систем и преобразований в оптике. – М :Мир;1971. – 495 с.
5. *Дж. Гудмен*. Статистическая оптика. – М: Мир, 1988, 527 с.
6. *Р. Брейсуэл.* Преобразование Хартли. – М: Мир, 1990
7. *Р. Брейсуэл*. Преобразование Фурье. /Scientific American. Издание на русском, №8, 1988, с. 48 -56
8. Интернет ресурсы - http://prodav.narod.ru/

СОДЕРЖАНИЕ

стр.

Введение 4
1. Сигналы и системы 7
2. Преобразование Фурье и его свойства 26
2.1 Преобразование Фурье абсолютно интегрируемых функций и его свойства 26
2.2 Примеры преобразования Фурье типичных сигналов 33
2.3 Интегральные операции свертки и корреляции абсолютно интегрируемых функций 40
2.4 Скалярное произведение и его свойства 43
2.5 Обобщенные функции. Свойства и примеры 46
2.6 Преобразование Фурье обобщенных функций 50
2.7 Усеченное преобразование Фурье 52
3. Интегральные преобразования Гильберта, Френеля, отсчетов, Дирака. 58
3.1 Преобразование Гильберта 58
3.2 Преобразование Френеля 60
3.3 Преобразования Дирака и отсчетов 63
4. Преобразования случайных сигналов 69
4.1 Случайная функция и случайный сигнал 69
4.2 Функция взаимной интенсивности 73
4.3 Свойства корреляционных функций 81
4.4 Преобразование Фурье корреляционных функций 86
5. Исследование фазовых объектов методами пространственной оптической фильтрации 94
Послесловие 106
Рекомендованная литература 108

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

КАФЕДРА ЛАЗЕРНОЙ ТЕХНИКИ И БИОМЕДИЦИНСКОЙ ОПТИКИ

Кафедра лазерной техники и биомедицинской оптики (первоначально - кафедра квантовой радиоэлектроники, затем в 1972 г. кафедра квантовой электроники и в 1993 г.- кафедра квантовой электроники и биомедицинской оптики) организована в 1963 году, всего через три года после создания первого лазера. Кафедра первой в России начала подготовку и выпуск специалистов по новому направлению в науке и технике - квантовой электронике, лазерной физике и технике.

Организовал и долгие годы (до 1987 года) возглавлял кафедру заслуженный деятель науки и техники РСФСР, доктор технических наук, профессор К.И. Крылов. С 1987 г. по 1997 г. кафедру возглавлял ее выпускник - д.т.н., профессор Г.Б. Альтшулер, а с 1997 г. заведующим кафедрой становится д.т.н., профессор В.Ю. Храмов.

Первыми сотрудниками кафедры были В.Т. Прокопенко (ныне д.т.н., профессор, заведующий кафедрой твердотельной оптоэлектроники), к.ф-м.н. доцент А.С. Тер-Погосян, ассистент С.Ф. Шарлай, с.н.с. В.И. Шабанов, а затем к.т.н. доцент Н.М. Фунтов и ассистент А.С. Митрофанов (ныне к.т.н. профессор, зам. декана инженерно-физического факультета).

С самого начала создания кафедры серьезное внимание было уделено фундаментальной подготовке в области математики и физики, физическому эксперименту, учебно-исследовательской работе студентов. В кратчайшие сроки была создана проблемная научно-исследовательская лаборатория, а затем и отраслевая лаборатория, что значительно расширило круг проводимых научных исследований и обеспечило их высокий научный

уровень. Основными научными направлениями кафедры стали оптика лазеров, силовая и нелинейная оптика, радиооптика, неразрушающий контроль материалов и изделий, биомедицинская оптика.

Интенсивные исследования последних лет по применению лазеров в медицине дали кафедре новое название "Кафедра лазерной техники и биомедицинской оптики".

За время существования кафедры подготовлено около полутора тысяч специалистов, свыше 50 выпускников и сотрудников кафедры защитили докторские диссертации и более 20 имеют ученое звание профессора. Наиболее известные выпускники: Альтшулер Г.Б. - д.т.н. профессор СПбГУИТМО, Карасев В.Б. - к.т.н. профессор, проректор СПбГУИТМО, Храмов В.Ю. - д.т.н. профессор, заведующий кафедрой квантовой электроники и биомедицинской оптики, Прокопенко В.Т. - д.т.н. профессор, заведующий кафедрой твердотельной оптоэлектроники, Балошин Ю.А. - д.т.н. профессор СПбГУИТМО, Яськов А.Д. - д.т.н. профессор СПбГУИТМО, Шляхтенко Н.В. заместитель директора ФГУП «НИИКИ ОЭП» (г. Сосновый Бор), Ушаков С.А. главный технолог ЛЗОС (г. Лыткарино), Никоноров Н.В. - д.ф-м.н. профессор, Горелик С.Л.- д.т.н., профессор начальник отделения НИИ телевидения, Алиев А.С.- д.т.н. профессор Государственного Дагестанского университета, Романов В.Г.- начальник НИЧ ИТМО, Козлов С.А.- д.ф-м.н. профессор СПбГУИТМО, декан факультета фотоники и оптоинформатики, Колесников Ю.Л. - д.ф-м.н. профессор, проректор СПбГУИТМО, Стафеев С.К. - д.т.н. профессор, декан естественнонаучного факультета СПбГУИТМО, заведующий кафедрой физики, Митрофанов А.С. – к.т.н. профессор СПбГУИТМО, Дубнищев Ю.Н. - д.т.н. заведующий кафедрой НГТУ, заведующий лабораторией оптических методов исследования потоков института теплофизики СО РАН, Студеникин Л.М- заместитель проректора СПбГУИТМО по НР, Шилов В.Б.- д.т.н. начальник отдела НПК «ГОИ им. С.И. Вавилова», Тарлыков В.А. - д.т.н. профессор СПбГУИТМО и другие.

При кафедре создан и функционирует с 1994 г. учебно-научно-производственный "Лазерный центр" ИТМО. Проводятся совместные исследования и выполняются различные проекты с такими странами, как США, Франция, Австрия, Австралия, Болгария, Германия, Китай, Корея.

На базе Научно-исследовательского института лазерной физики (НИИ ЛФ) создан филиал кафедры – заведующий филиалом кафедры квантовой электроники и биомедицинской оптики д.ф-м.н. профессор заслуженный деятель науки РФ А.А. Мак, научный руководитель «НИИ Лазерной физики». К научной работе и учебному процессу привлекаются ведущие специалисты института - д.ф-м.н. профессор Н.Н. Розанов, к.ф-м.н. доцент Л.Н. Сомс, В.Е. Яшин - д.ф-м.н., профессор, заведующий лабораторией ФГУП НПК «ГОИ им. С.И.Вавилова» , к.ф-м.н. доцент В.И. Купренюк и другие. Совместно кафедра ЛТБМО СПбГУИТМО и филиал кафедры создали научно-педагогическую школу "Оптика лазеров".

Занятия по основам биомедицинской оптики на кафедре КЭ и БМО проводят ведущие специалисты Санкт-Петербургского Государственного медицинского университета им академика И.П. Павлова: д.б.н. профессор И.А. Михайлова, д.м.н. профессор В.И.Томсон, к.б.н. доцент Л.А. Александрова. В проведении занятий участвуют также ведущие специалисты кафедры ЛТБМО и других медицинских учреждений.

Кафедра активно участвует в выполнении инновационной образовательной программы Университета «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» по научно-образовательному направлению «Лазерные технологии и системы». В рамках данного направления разработана инновационная магистерская программа «Лазерные биомедицинские технологии», на которую в 2008г. осуществлен первый набор магистрантов.

Кафедра готовит выпускников по специальности 200201 - Лазерная техника и лазерные технологии, а также осуществляет подготовку бакалавров и магистров по направлениям 140400 – «Техническая физика» и 200200 «Оптотехника», кандидатов и докторов наук по специальностям 05.11.07 "Оптические и оптико-электронные приборы", 05.11.27 «Квантовая электроника» и 01.04.05 "Оптика".

Сергей Александрович Смирнов
Преобразования оптических сигналов
Учебное пособие по дисциплине «Лазерные информационно-измерительные технологии»

В авторской редакции
Компьютерный набор, верстка, дизайн С.А. Смирнов.
Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского Государственного университета информационных технологий, механики и оптики.
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99.
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова.
Подписано к печати 01.12.08
Заказ № 1590. Тираж 100 экз.
Отпечатано на ризографе.

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского государственного
университета информационных
технологий, механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49