

# Глава 1

## Континуальная модель спирально-анизотропного стержня и ее применение в статике кабелей

### 1.1. Обзор подходов к моделированию статки кабелей

В современных конструкциях наряду с материалами, обычно при расчетах принимаемыми за однородные и изотропные, используются анизотропные материалы, у которых наблюдается различие в упругих свойствах для разных направлений. В частности, анизотропией упругих свойств обладают кристаллы и некоторые горные породы [3]. Анизотропными являются композиционные и синтетические материалы, применяемые, например в самолетостроении [41].

В современных конструкциях используются элементы с так называемой конструктивной или искусственной анизотропией. К последним относятся пластинки и оболочки из изотропного материала, которым придана волнистость путем гофрирования или усиления часто поставленными ребрами, а также канаты и различные кабельные конструкции.

Упругие постоянные кристаллических веществ - монокристаллов, минералов, горных пород определялись экспериментальным путем многими исследователями. В обзорной статье [3] приведены упругие постоянные более двухсот кристаллических веществ, указаны методы их определения. Актуальна задача определения упругих характеристик композиционных материалов, о чем свидетельствует большое число работ, посвященных этой теме [71, 31, 68, 23, 7, 11, 28].

Классические задачи теории упругости анизотропного тела ставились, в основном, для простейших типов прямолинейной анизотропии. В работах С.Г. Лехницкого [35,36], П.Н.Житкова [25], С.А.Амбарцумяна [4], А.А. Баблюяна [8], Е.К.Ашкенази [6] и других ученых рассмотрены различные задачи теории упругости анизотропного тела такого типа.

Для многих анизотропных материалов экспериментальные значения упругих характеристик пока не определены, и это сдерживает внедрение теоретических разработок в расчетную практику. В особенности это касается непрерывно-

неоднородных материалов, когда упругие коэффициенты в уравнениях обобщенного закона Гука являются непрерывными функциями координат. Такого рода анизотропия наблюдается в анизотропных материалах, прошедших термическую обработку или приобретших непрерывную неоднородность вследствие несовершенной технологии. Практика показывает, что изменение упругих модулей по координатам наблюдается во многих анизотропных материалах, обычно принимаемых за однородные [36].

Большой интерес с теоретической точки зрения и с точки зрения практических приложений имеет направление исследований напряженно-деформированного состояния криволинейно-анизотропных тел. Одним из важных, но мало изученных типов криволинейно-анизотропных тел является спирально-анизотропное тело САТ – далее для краткости будем использовать это сокращение. Впервые термин “спирально-анизотропный стержень” (a rod with helical anisotropy) употребляется в работе [73], датированной 1977 годом. В ней исследовалась задача о растяжении и кручении сильно закрученной пряжи, которая моделировалась упругим спирально-анизотропным цилиндром. Рассматривались пряжи с внешним углом закрутки порядка  $55^\circ$ . Ранее подобные задачи решались лишь для слабозакрученных прядей или прядей, состоящих из параллельных волокон. Следуя [74], автор работы использует систему координат, оси которой ориентированы в соответствии с направлением касательной к данному волокну в данной точке (helical coordinate system). Отметим терминологическую неточность. Ранее такая система координат использовалась лишь для локального исследования в данной точке. Глобальная система координат с координатными линиями, ориентированными вдоль волокон и перпендикулярно волокнам, а также по радиальным направлениям цилиндра не существует. Легко проверить, что названные три семейства линий не образуют систему координат, так как эти семейства невозможно параметризовать таким образом, чтобы при перемещении вдоль линии одного семейства две другие координаты не изменялись. Под “геликоидальной системой координат” здесь следует понимать локальную декартову систему координат, свою в каждой точке рассматриваемого тела. Далее термин “геликоидальная система коор-

динат” с указанными оговорками, мы будем использовать постоянно.

В [41] отмечалось, что такие конструкции как пряжи, канаты, сердечники кабеля геометрически эквивалентны, если иметь ввиду их спиральную структуру. При всем различии механические свойства этих конструкций определяются геометрией расположения отдельных волокон и прежде всего, шагом скрутки, а также упругими свойствами материала составных элементов конструкций. Работа [43] развивает подход, предложенный для изучения механического поведения крученых пряж, на проволочные кабели. Решается задача об осевом растяжении и кручении при малых деформациях. Отмечается, что поперечным сжатием и поперечными силами можно пренебречь. Результаты дают удовлетворительное совпадение с экспериментами.

В настоящее время наибольшее развитие в расчетах спирально-анизотропных структур (канатов, кабелей, крученых пряж) получили две расчетные модели - это стержневая (дискретная) модель и непрерывная модель.

До начала 60-х годов прошлого века в силовом расчете каната использовалась, в основном, теория гибкой нити [56], то есть канат отождествлялся с некоторой эквивалентной по внешним свойствам нитью без структурных особенностей. Упругие модули этой идеализированной нити подбирались эмпирическим путем. При этом наблюдался значительный разброс в значениях упругих характеристик каната, предлагаемых различными авторами. Например, значение отношения обобщенного осевого модуля упругости каната  $E_k$  к модулю Юнга отдельной проволоки  $E$  колебалось от 4/9 до 7/8. Между тем, теория гибкой нити сыграла в силовом расчете канатов свою прогрессивную роль, особенно в задачах динамики шахтного подъема. А.Н. Динник [21] впервые связал внешние упругие характеристики каната с внутренней его геометрией. В результате многолетних исследований им была получена формула, связывающая отношение обобщенного осевого модуля растяжения каната  $E_k$  к модулю Юнга отдельной проволоки  $E$  с углом крутки каната  $\alpha_0$ . Под углом крутки каната подразумевается угол винта поверхностных спиральных проволок каната. Эта формула имеет вид:

$$\frac{E_k}{E} = \cos^4 \alpha_0$$

Сравнивая результаты своих вычислений с многочисленными опытными данными А.Н. Динник показал, что в среднем эта формула дает ошибку 5%. Однако, при всех достоинствах теории гибкой нити, вытекающих из простоты и наглядности расчетной модели, эта теория оказалась малоэффективной при оценке прочности каната, т.к. не давала реальной картины распределения напряжений по сечению каната. Согласно этой теории напряжения в канате распределяются равномерно по поперечному сечению каната, а это противоречит многочисленным опытными данным по анализу разрушения каната при растяжении [51,52].

В работах М.Ф. Глушко [17] и его учеников [18,27,47] было развито перспективное направление в механике канатов, способное противопоставить теории гибкой нити точность расчета и максимальную его приближенность к конструкции реального каната. В основе этого направления лежит дискретная модель каната: канат представляется сложной статически неопределимой стержневой системой, в общем, поддающейся расчету методами строительной механики.

Однако, дискретная модель не универсальна. Во-первых, потому, что размерность задач существенно зависит от числа проволок в пряди. Во-вторых, дискретная модель предусматривает точечное контактирование составляющих конструкции.

Альтернативным является новое направление в механике канатов и кабелей, основанное на континуальном подходе, принципиально отличное и от дискретной модели и от теории гибкой нити. Непрерывная модель подразумевает представление каната и кабеля сплошным анизотропным цилиндром с анизотропией, соответствующей конструкции. При этом подходе точность расчетной модели (в отличие от дискретной) повышается с увеличением плотности упаковки проволок в пакете, а форма поперечного сечения отдельной проволоки не имеет значения.

Как было отмечено, подобный подход к исследованию напряженного состояния конструкции имеет место в механике крученых пряж.

Определяющие принципы построения механики крученых пряж заложены в работах Херла [69, 70]. Уравнения равновесия в этих работах составляются для характерного элемента пряжи, находящегося под действием лишь нормальных к граням элемента сил контактного взаимодействия. Условия совместности деформаций строятся из геометрических соображений. Иными словами, во всех уравнениях основной системы фигурируют лишь осевые напряжения, действующие вдоль волокон и нормальные к осям волокон напряжения. Касательные напряжения не учитываются. Это, безусловно, обедняет возможности применения расчетной модели, а также ограничивает круг задач лишь задачами, связанными с растяжением пряжи.

Таким образом, теория гибкой нити сыграла свою положительную роль в развитии статики канатов и кабелей, но в настоящее время не удовлетворяет современным требованиям к точности расчета, так как не отражает действительного распределения напряжений в канате. Дискретная модель канатов и кабелей более соответствует действительности.

Уровень развития теории упругости анизотропного тела позволяет на основе разработанных к настоящему времени общих методов исследования провести анализ напряженно-деформированного состояния спирально-анизотропного тела, соответствующего непрерывной модели канатов и кабелей. В настоящее время решен ряд задач для упругого спирально-анизотропного тела САТ, имеющий приложение к механике деформируемого кабеля [38, 39, 41, 43] Разработаны методы экспериментального определения жесткостей и последующего расчета упругих характеристик кабельных конструкций. Исходные данные для определения упругих характеристик, получаются в результате измерений. Любому измерению, как непосредственному (прямому), так и косвенному, как бы тщательно оно ни было произведено, обязательно присущи ошибки.

По своему характеру каждая из ошибок может быть отнесена к систематической или случайной. Систематическая ошибка вызывается действием факторов, которые не меняются на протяжении эксперимента и при повторении наблюдений [так называемых "мешающих" факторов]. Случайные ошибки возникают под действием факторов, которые невозможно точно воспроизвести при повторной организации на-

блюдения. Четкую грань между случайными и систематическими ошибками провести невозможно. Иногда действие "мешающего" фактора удастся изучить и соответствующую ошибку учесть. В этом случае систематическую ошибку можно исключить из рассмотрения. Иногда действием "мешающего" фактора пренебрегают и тогда ошибка, которая неизбежно возникает, считается случайной. В каждой конкретной задаче имеется свой механизм возникновения ошибок измерения, поэтому закон распределения ошибок в каждой задаче должен быть весьма индивидуален. На практике часто применяется гауссовская модель погрешности в задании ошибок измерения, которая считается наиболее адекватной для многих реальных физических шумов, сопутствующих измерениям [15, 16]. В пользу гауссовской модели погрешности можно привести соображения, использующие центральную предельную теорему теории вероятностей и некоторые представления теории информации. Эти соображения связаны с тем, что, во-первых, распределение суммы большего числа "малых" случайных величин согласно центральной предельной теореме стремится к нормальному закону [к гауссовскому распределению], а, во-вторых, нормальный закон имеет максимальную энтропию среди возможных законов распределения с одинаковыми первыми двумя моментами, т.е. при нормальном законе распределения ошибок измерения значение измеряемой величины в максимальной степени не определено.

Ввиду того, что исходные данные задач содержат случайные погрешности, при реализации этих задач возможны как детерминированный, так и вероятностный [статистический] подходы. Разница между этими подходами заключается в различной интерпретации ошибок в задании исходных данных. Вместо точного значения исходных данных  $y$  из пространства измерений  $Y$  нам обычно задается его приближенное значение  $\tilde{y} = y + \xi$ , где элемент  $\xi$  представляет собой случайные погрешности в исходных данных. Причем зачастую элемент  $\xi$  не принадлежит исходному пространству измерений  $Y$ , а принадлежит некоторому расширению пространства  $\tilde{Y}$ .

### Детерминированный подход

Интерпретация ошибок при детерминированном подходе заключается в следующем. Предполагается, что для любого процесса измерения существует такое число  $\delta > 0$ , что исходные данные задачи удовлетворяют неравенству:

$$\|y - \tilde{y}\| \leq \delta.$$

Считается, что число  $\delta$  не зависит от постановки задачи, а определяется только точностью проводимых измерений.

### Вероятностный подход

Несмотря на то, что современная теория вероятности дает более адекватное описание погрешностей в задании исходных данных, вероятностный (или статистический) подход развит в значительной мере слабее детерминированного. Вероятностный подход требует задания некоторых статистических характеристик ошибок, возникающих при измерении исходных данных. Обоснованный выбор функции распределения случайной величины приводит к уточнению решения рассматриваемой задачи [53].

## 1.2 Упругое равновесие тела, обладающего спиральной анизотропией

### 1.2.1 Определение спирально-анизотропного тела

Материальное упругое тело называют спирально-анизотропным, если с ним связана некоторая ось анизотропии  $z$ , а кривые с упруго-эквивалентными свойствами представляют собой семейство винтовых линий шага  $h$  с осью  $z$  [73]. Эквивалентность понимается в смысле тождественности упругих свойств в каждой точке кривой. Кривые с упруго-эквивалентными свойствами в дальнейшем будем называть волокнами, хотя это не всегда будет означать, что тело имеет волокнистую структуру. Ось анизотропии не обязательно проходит внутри тела, она может лежать на поверхности или проходить вне его (например, в полости). Рассматривается модель, для которой через каждую точку тела проходит одно единственное волокно, представляющее собой винтовую линию (спираль) шага  $h$ . Все волокна, лежащие на некотором внутреннем цилиндрическом слое  $r = const$  ( $r$  - расстояние

до оси анизотропии), имеют один и тот же угол винта  $\alpha$  ( $\alpha$  - угол между осью анизотропии и касательной к волокну). А при переходе от слоя к слою угол  $\alpha$  изменяется, причем  $\alpha = 0$  при  $r = 0$ ,  $\alpha \rightarrow \pi/2$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Предполагая линейную связь между напряжениями  $\sigma_{ij}$  и деформациями  $\varepsilon_{kl}$ , закон Гука запишем в виде:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.1)$$

Как отмечал Лехницкий С.Г. [36], в случае криволинейной анизотропии целесообразно закон Гука (1.1) записывать в системе криволинейных ортогональных координат, выбранной так, чтобы координатные направления ее в каждой точке совпадали с эквивалентными (в отношении упругих свойств). Можно, конечно, пользоваться записью обобщенного закона Гука в прямолинейной декартовой системе координат, но тогда в уравнениях обобщенного закона Гука коэффициенты  $C_{ijkl}$  уже не будут постоянными и будут меняться от точки к точке.

Рассматриваемый случай спиральной анизотропии позволяет связать с телом криволинейную ортогональную систему координат, обладающую отмеченным выше качеством, а именно - совпадением координатных линий с упруго-эквивалентными направлениями.

Выберем в пространстве  $x, y, z$  некоторую прямую  $Oz$  в качестве оси геликоидальной системы координат. Свяжем с осью  $Oz$  семейство круговых цилиндров. На каждом цилиндре  $r = const$  выберем семейство винтовых линий [спиралей] шага  $h$ . Через каждую точку пространства пройдет одна единственная спираль шага  $h$ . Причем угол винта всех спиралей, лежащих на одном и том же цилиндре будет одинаков, но будет различен для спиралей, принадлежащих разным цилиндрам, т.е. угол винта а есть функция расстояния от спирали до оси  $Oz$ . Для того, чтобы найти эту зависимость, воспользуемся разверткой цилиндра радиуса  $r$  и высоты  $h$  (рис.1.1).

Линия разворачивается в прямую, поэтому, как видно из рисунка 1.1:

$$\operatorname{tg} \alpha = kr \quad (1.2)$$

где  $k = 2\pi/h$  - показатель анизотропии среды.

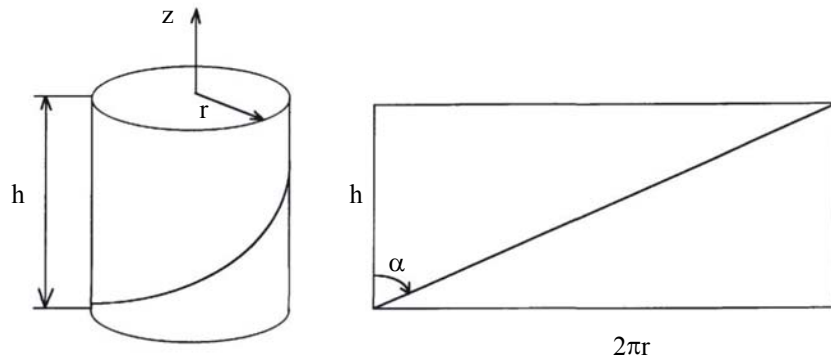


Рис.1.1. Винтовая линия шага  $h$  на развертке цилиндра радиуса  $r$ .

Геликоидальной системой координат будем называть репер Френе, построенный на семействе соосных винтовых линий одинакового шага  $h$ .

На рис.1.2 изображены координатные поверхности цилиндрических координат:  $r = \text{const}$  (цилиндр),  $z = \text{const}$  (плоскость, перпендикулярная  $Oz$ ),  $\theta = \text{const}$  (плоскость, содержащая  $Oz$ ), и триэдр единичных векторов  $\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_z$ . Из рисунка видно, что единичные векторы геликоидальной системы координат:  $\hat{\mathbf{e}}_\xi, \hat{\mathbf{e}}_\eta, \hat{\mathbf{e}}_\zeta$  получены поворотом триэдра  $(\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_z)$  вокруг оси  $\hat{\mathbf{e}}_r$  против хода часовой стрелки на угол  $(\pi/2 - \alpha)$ , где  $\alpha$  - угол винта соответствующей спирали. Координатными линиями геликоидальной системы координат, таким образом, являются:

- ( $r$ ) - радиальные прямые, перпендикулярные оси  $Oz$ ;
- ( $\xi$ ) - винтовые линии шага  $h$ ;
- ( $\eta$ ) - винтовые линии с круткой, противоположной линиям  $\xi$ ;

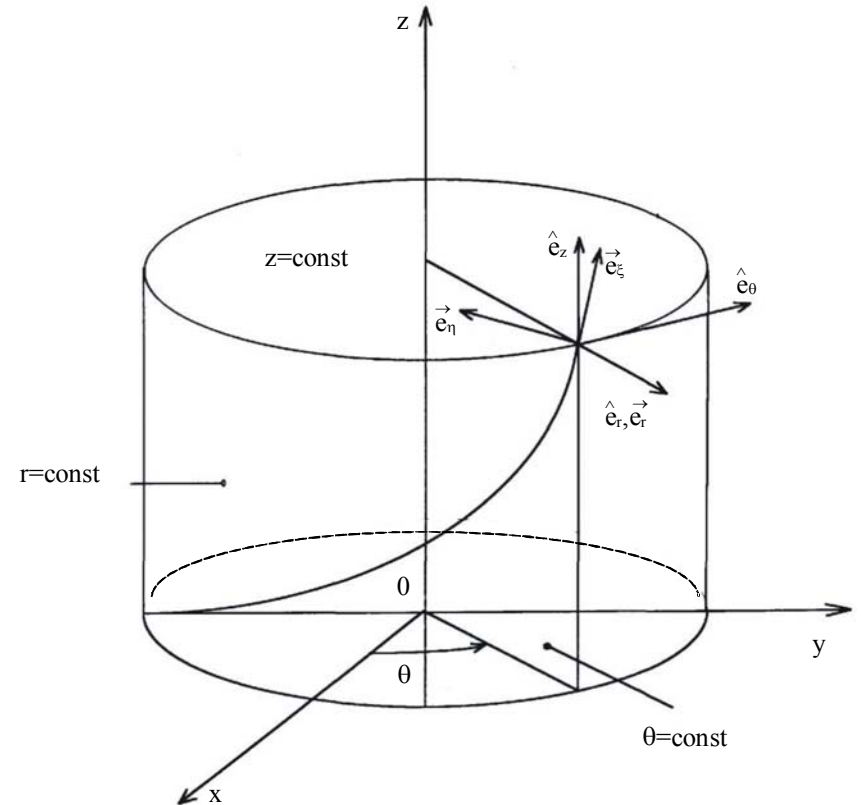


Рис.1.2. Координатные векторы геликоидальной системы координат:

- $\hat{\mathbf{e}}_r$  - вектор нормали к винтовой линии;
- $\hat{\mathbf{e}}_\xi$  - вектор касательной к винтовой линии;
- $\hat{\mathbf{e}}_\eta$  - вектор бинормали к винтовой линии.

Координатные тройки цилиндрической  $(\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_z)$  и геликоидальной  $(\hat{\mathbf{e}}_\xi, \hat{\mathbf{e}}_\eta, \hat{\mathbf{e}}_\zeta)$  систем координат связаны зависимостью

$$\hat{\mathbf{e}}_i = C_{ij} \hat{\mathbf{e}}_j \quad (1.3)$$

$$i \in \{r, \xi, \eta\}, j \in \{r, \theta, z\}$$

где

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \\ 0 & -\cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

### 1.2.2 Напряжения и деформации в геликоидальной системе координат

Компоненты тензора напряжений в двух системах координат связаны соотношением

$$\sigma_{ij} = C_{ip} C_{jq} \sigma_{pq}, \quad (1.5)$$

что дает следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r \\ \sigma_\xi &= \sigma_\theta \sin^2 \alpha + 2\tau_{\theta z} \sin \alpha + \sigma_z \cos^2 \alpha; \\ \sigma_\eta &= \sigma_\theta \cos^2 \alpha - 2\tau_{\theta z} \sin \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha; \\ \tau_{r\xi} &= \tau_{rz} = \tau_{r\theta} \sin \alpha + \tau_{rz} \cos \alpha; \\ \tau_{r\eta} &= \tau_{r\theta} = -\tau_{r\theta} \cos \alpha + \tau_{rz} \sin \alpha; \\ \tau_{\xi\eta} &= \tau_{\eta\xi} = (\sigma_z - \sigma_\theta) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{\theta z} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

В правые части равенств системы (1.6) входят компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат:  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}, \tau_{r\theta}$ . В левых частях равенств системы (1.6) представлены компоненты тензора напряжений в геликоидальной системе координат:  $\sigma_r, \sigma_\xi, \sigma_\eta, \tau_{\xi\eta}, \tau_{r\eta}, \tau_{r\xi}$ . Сопоставления геликоидальной системы координат с теоретической моделью спирально-анизотропной среды убеждает нас в том, что всегда можно подобрать геликоидальную систему координат так, чтобы координатные линии совпадали с упруго-эквивалентными направлениями среды. Для этого нужно совместить оси координатной системы с осью анизотропии

среды, а шаг координатных геликоидов взять равным шагу винта упруго-эквивалентных спиралей.

На рис. 1.3 показан материальный объем спирально-анизотропной среды. На гранях криволинейного параллелепипеда показаны компоненты тензора напряжений в геликоидальной системе координат. Нормальные компоненты  $\sigma_r, \sigma_\xi, \sigma_\eta$  определяют упруго-эквивалентные направления в среде.

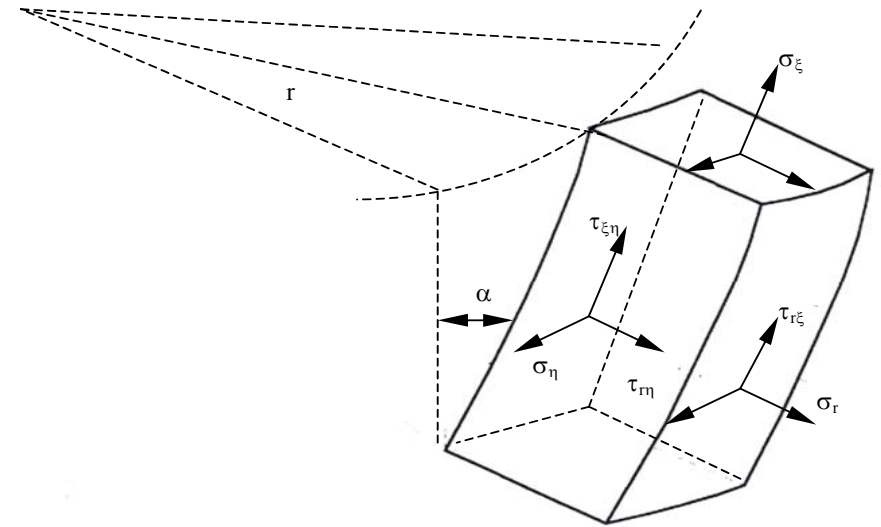


Рис. 1.3. Элемент спирально-анизотропной среды

Легко получить обратные соотношения, выражающие компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат через компоненты тензора напряжений в геликоидальной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\gamma &= \sigma_\gamma; \\ \sigma_\theta &= \sigma_\xi \sin^2 \alpha - 2\tau_{\xi\eta} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_\eta \cos^2 \alpha; \\ \sigma_z &= \sigma_\xi \cos^2 \alpha + 2\tau_{\xi\eta} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_\eta \sin^2 \alpha; \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = \tau_{r\xi} \sin \alpha - \tau_{r\eta} \cos \alpha; \\ \tau_{rz} &= \tau_{zr} = \tau_{r\xi} \cos \alpha - \tau_{r\eta} \sin \alpha; \\ \tau_{\theta z} &= \tau_{z\theta} = (\sigma_\xi - \sigma_\eta) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{\xi\eta} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \end{aligned} \right\} (1.7)$$

В дальнейшем будут рассматриваться только малые деформации среды, поэтому введем в рассмотрение Эйлерав тензор бесконечно малых деформаций  $\|\varepsilon_{ij}\|$ , компоненты которого в декартовой ортогональной системе координат  $x_l, l = \{1, 2, 3\}$ , выражаются в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.8)$$

где  $u_k, k = \{1, 2, 3\}$  - компоненты вектора перемещений.

Ниже используются компоненты тензора деформаций в цилиндрической системе координат:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \varepsilon_r & \frac{1}{2}\gamma_{r\theta} & \frac{1}{2}\gamma_{rz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{r\theta} & \varepsilon_\theta & \frac{1}{2}\gamma_{\theta z} \\ \frac{1}{2}\gamma_{rz} & \frac{1}{2}\gamma_{\theta z} & \varepsilon_z \end{array} \right\| \quad (1.9)$$

и в геликоидальной системе координат:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \varepsilon_r & \frac{1}{2}\gamma_{r\xi} & \frac{1}{2}\gamma_{r\eta} \\ \frac{1}{2}\gamma_{r\xi} & \varepsilon_\xi & \frac{1}{2}\gamma_{\xi\eta} \\ \frac{1}{2}\gamma_{r\eta} & \frac{1}{2}\gamma_{\xi\eta} & \varepsilon_\eta \end{array} \right\| \quad (1.10)$$

Аналогичные (1.5) зависимости существуют между компонентами тензора деформаций в цилиндрической и геликоидальной системах координат:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\gamma &= \varepsilon_\gamma; \\ \varepsilon_\xi &= \varepsilon_\theta \sin^2 \alpha - \gamma_{\theta z} \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon_z \cos^2 \alpha; \\ \varepsilon_\eta &= \varepsilon_\theta \cos^2 \alpha + \gamma_{\theta z} \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon_z \sin^2 \alpha; \\ \gamma_{r\xi} &= \gamma_{\xi r} = \gamma_{r\theta} \sin \alpha - \gamma_{rz} \cos \alpha; \\ \gamma_{r\eta} &= \gamma_{\eta r} = -\gamma_{r\theta} \cos \alpha - \gamma_{rz} \sin \alpha; \\ \gamma_{\xi\eta} &= \gamma_{\eta\xi} = 2(\varepsilon_z - \varepsilon_\theta) \sin \alpha \cos \alpha + \gamma_{\theta z} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \end{aligned} \right\} (1.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \varepsilon_r; \\ \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\xi \sin^2 \alpha - \gamma_{\xi\eta} \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon_\eta \cos^2 \alpha; \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_\xi \cos^2 \alpha + \gamma_{\xi\eta} \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon_\eta \sin^2 \alpha; \\ \gamma_{r\theta} &= \gamma_{\theta r} = \gamma_{r\xi} \sin \alpha - \gamma_{r\eta} \cos \alpha; \\ \gamma_{rz} &= \gamma_{zr} = \gamma_{r\xi} \cos \alpha - \gamma_{r\eta} \sin \alpha; \\ \gamma_{\theta z} &= \gamma_{z\theta} = 2(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta) \sin \alpha \cos \alpha + \gamma_{\xi\eta} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \end{aligned} \right\} (1.12)$$

Известны [36] зависимости компонент тензора деформаций от компонент вектора перемещений в цилиндрической системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}; \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Получим аналогичные соотношения в геликоидальной системе координат. Найдем проекции вектора перемещений на геликоидальные оси  $\bar{e}_r, \bar{e}_\xi, \bar{e}_\eta$ :

$$\bar{u} = u_r \bar{\mathbf{e}}_r + u_\theta \bar{\mathbf{e}}_\theta + u_z \bar{\mathbf{e}}_z = u_r \bar{\mathbf{e}}_r + u_\xi \bar{\mathbf{e}}_\xi + u_\eta \bar{\mathbf{e}}_\eta \quad (1.14)$$

С учетом (1.3) тождество (1.14) принимает вид:

$$\bar{u} = u_r \bar{\mathbf{e}}_r + u_\xi (\bar{\mathbf{e}}_\theta \sin \alpha + \bar{\mathbf{e}}_z \cos \alpha) + u_\eta (-\bar{\mathbf{e}}_\eta \cos \alpha + \bar{\mathbf{e}}_z \sin \alpha) \quad (1.15)$$

Сравнение (1.14) и (1.15) приводит к

$$\left. \begin{aligned} u_r &= u_r; \\ u_\theta &= u_\xi \sin \alpha - u_\eta \cos \alpha; \\ u_z &= u_\xi \cos \alpha - u_\eta \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

элементарно получают обратные зависимости:

$$\left. \begin{aligned} u_r &= u_r; \\ u_\xi &= u_\theta \sin \alpha - u_z \cos \alpha; \\ u_\eta &= -u_\theta \cos \alpha - u_z \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Подставляя теперь (1.16) и (1.13) в (1.11) и учитывая (1.2), получаем связь между компонентами тензора деформаций и вектора перемещений в геликоидальной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \varepsilon_\xi &= \frac{\partial u_\xi}{\partial \theta} \frac{\sin \alpha}{r} + \frac{\partial u_\xi}{\partial z} \cos \alpha + \\ &\quad + \frac{u_r}{r} \sin^2 \alpha; \\ \varepsilon_\eta &= -\frac{\partial u_\eta}{\partial \theta} \frac{\cos \alpha}{r} \cos^2 \alpha + \\ &\quad + \frac{\partial u_\eta}{\partial z} \sin \alpha + \frac{u_r}{r} \cos^2 \alpha; \\ \gamma_{r\xi} &= \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \frac{\sin \alpha}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \cos \alpha + \frac{\partial u_\xi}{\partial r} - \\ &\quad - u_\xi \frac{\sin^2 \alpha}{r} + u_\eta \cos \alpha \left( k \cos \alpha + \frac{1}{r} \sin \alpha \right); \\ \gamma_{r\eta} &= \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \frac{\cos \alpha}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \sin \alpha + \frac{\partial u_\eta}{\partial r} - \\ &\quad - u_\eta \frac{\cos^2 \alpha}{r} + u_\xi \cos \alpha \left( k \cos \alpha - \frac{1}{r} \sin \alpha \right); \\ \gamma_{\xi\eta} &= \frac{\partial u_\xi}{\partial z} \sin \alpha + \frac{\partial u_\eta}{\partial z} \cos \alpha - \frac{\partial u_\xi}{\partial \theta} \frac{\cos \alpha}{r} + \\ &\quad + \frac{\partial u_\eta}{\partial \theta} \frac{\sin \alpha}{r} - u_\gamma \frac{\sin 2\alpha}{r} \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$



Используя в формулах (1.18) соотношения (1.17) между компонентами вектора перемещений в геликоидальной и цилиндрической системах координат, получим:

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\
 \varepsilon_\xi &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \sin^2 \alpha + \\
 &\quad + \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \sin \alpha + \frac{\partial u_z}{\partial z} \cos^2 \alpha; \\
 \varepsilon_\eta &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \cos^2 \alpha - \\
 &\quad - \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial u_z}{\partial z} \sin^2 \alpha; \\
 \gamma_{r\xi} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \sin \alpha + \\
 &\quad + \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \cos \alpha; \\
 \gamma_{r\eta} &= - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \cos \alpha + \\
 &\quad + \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \sin \alpha; \\
 \gamma_{\xi\eta} &= 2 \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} \right) \sin \alpha \cos \alpha + \\
 &\quad + \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)
 \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Для полного суждения о напряженно-деформированном состоянии тела, находящегося под действием внешних сил, необходимо знать девять функций: шесть составляющих напряжения и три проекции смещения.

Для определения этих девяти функций строится система уравнений, включая шесть физических уравнений, связывающих напряжения с деформациями, и три уравнения равновесия.

### 1.2.3 Уравнения равновесия в геликоидальной системе координат

Запишем известные (41) уравнения равновесия в цилиндрической системе координат:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + X_r &= 0; \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\alpha \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + X_\theta &= 0; \\
 \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + X_z &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Здесь  $X_r, X_\theta, X_z$  - компоненты объемных сил.

Дифференцируя выражение (1.7) с учетом (1.2) и подставляя полученные производные в (2.20), получим уравнения равновесия в геликоидальных координатах:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\xi \sin^2 \alpha + 2\tau_{\xi\eta} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_\eta \cos^2 \alpha) + \\
 + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \tau_{r\xi}}{\partial \theta} \sin \alpha - \frac{\partial \tau_{r\eta}}{\partial \theta} \cos \alpha \right) + \frac{\partial \tau_{r\xi}}{\partial z} \cos \alpha + \\
 + \frac{\partial \tau_{r\eta}}{\partial z} \sin \alpha + X_r &= 0; \\
 \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \theta} \sin^2 \alpha - 2 \frac{\partial \tau_{r\eta}}{\partial \theta} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial \theta} \cos^2 \alpha + 2\tau_{r\xi} \sin \alpha - \right. \\
 \left. - 2\tau_{r\eta} \cos \alpha \right) + \frac{\partial \tau_{r\xi}}{\partial r} \sin \alpha - \frac{\partial \tau_{r\eta}}{\partial r} \cos \alpha + \tau_{r\xi} k \cos^3 \alpha +
 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \tau_{r\eta} k \sin \alpha \cos^2 \alpha + \left( \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial z} \right) \sin \alpha \cos \alpha + \\
& + \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial z} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + X_\xi \sin \alpha - X_\eta \cos \alpha = 0; \\
& \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial z} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial z} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial z} \sin^2 \alpha + \frac{\partial \tau_{r\xi}}{\partial r} \cos \alpha + \\
& + \frac{\partial \tau_{r\eta}}{\partial r} \sin \alpha - \tau_{r\xi} k \sin \alpha \cos^2 \alpha + \tau_{r\eta} k \cos^3 \alpha + \\
& + \frac{1}{r} \left( \left( \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \theta} - \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial \theta} \right) \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \theta} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \right. \\
& \left. + \tau_{r\xi} \cos \alpha + \tau_{r\eta} \sin \alpha \right) + X_\xi \cos \alpha + X_\eta \sin \alpha = 0
\end{aligned} \tag{1.21}$$

#### 1.2.4 Физические уравнения САТ

Построенная теоретическая модель спирально-анизотропного тела, предполагает наличие в каждой точке тела трех упруго-эквивалентных направлений, определяемых векторами  $\vec{e}_r, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta$ .

Так как упруго-эквивалентные направления совпадают с координатными, физически управления (1.1) в геликоидальных координатах будут содержать лишь двенадцать не зависимых упругих констант. В технических обозначениях эти уравнения примут вид:

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} \sigma_r - \frac{\nu_{\xi r}}{E_\xi} \sigma_\xi - \frac{\nu_{\eta r}}{E_\eta} \sigma_\eta; \nu_{\xi\eta} = \frac{1}{G_{\xi\eta}} \tau_{\xi\eta}; \\
\varepsilon_\xi &= \frac{\nu_{r\xi}}{E_r} \sigma_r + \frac{1}{E_\xi} \sigma_\xi - \frac{\nu_{\eta\xi}}{E_\eta} \sigma_\eta; \nu_{r\eta} = \frac{1}{G_{r\eta}} \tau_{r\eta}; \\
\varepsilon_\eta &= \frac{\nu_{r\eta}}{E_r} \sigma_r - \frac{\nu_{\xi\eta}}{E_\xi} \sigma_\xi - \frac{1}{E_\eta} \sigma_\eta; \nu_{r\xi} = \frac{1}{G_{r\xi}} \tau_{r\xi}.
\end{aligned} \right\} \tag{1.22}$$

Входящие в (1.22) упругие константы имеют следующий физический смысл:

$E_r, E_\xi, E_\eta$  – модули продольной упругости материала соответственно в направлении осей  $r, \xi, \eta$ ;

$G_{\xi\eta}, G_{r\eta}, G_{r\xi}$  – модули сдвига материала в указанных плоскостях:

$\nu_{ij}$ , где  $i, j = \{r, \xi, \eta\}$  – коэффициенты Пуассона, указывающие на величину относительного сужения материала в направлении оси  $i$  под действием растягивающей силы, совпадающей по направлению с осью  $j$ .

Во многих реальных конструкциях типа канатов, кабелей, крученых пруж, направления  $r$  и  $\eta$  – упруго-эквивалентны, все радиальные направления в поперечном сечении тождественны в отношении упругих свойств. Этот факт накладывает на упругие константы следующие ограничения:

$$\left. \begin{aligned}
\nu_{r\xi} = \nu_{\xi\xi} = \nu_1; E_r = E_\eta = E_2; \\
\nu_{r\eta} = \nu_{r\eta} = \nu_2; E_\xi = E_1; \\
G_{\xi\eta} = G_{r\xi} = G_1; G_{r\eta} = G_2
\end{aligned} \right\} \tag{1.23}$$

Задача при этом существенно упрощается – в определяющих уравнениях остается лишь шесть упругих констант материала и теперь уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}
E_2 \varepsilon_r &= \sigma_r - \nu_1 \sigma_\xi - \nu_2 \sigma_\eta; \gamma_{\xi\eta} = \frac{1}{G_1} \tau_{\xi\eta}; \\
E_2 \varepsilon_\xi &= -\nu_1 \sigma_r - \frac{E_2}{E_1} \sigma_\xi - \nu_1 \sigma_\eta; \gamma_{r\xi} = \frac{1}{G_1} \tau_{r\xi}; \\
E_2 \varepsilon_\eta &= -\nu_2 \sigma_r - \nu_1 \sigma_\xi + \sigma_\eta; \gamma_{r\eta} = \frac{1}{G_2} \tau_{r\eta}.
\end{aligned} \right\} \tag{1.24}$$

### 1.2.5 Уравнения равновесия спирально-анизотропного тела при осесимметричном нагружении

Построим уравнения равновесия при осесимметричном нагружении, когда ось анизотропии Oz является силовой осью симметрии. Осесимметричность напряжений приводит к системе равенства:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial \theta} = \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \theta} = \frac{\partial \tau_{r\xi}}{\partial \theta} = \frac{\partial \tau_{r\eta}}{\partial \theta} = 0. \quad (1.25)$$

Система уравнений (1.21) при этом принимает вид::

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\xi \sin^2 \alpha + 2\tau_{\xi\eta} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_\eta \cos^2 \alpha) + \\ & + \frac{\partial \tau_{r\xi}}{\partial z} \cos \alpha + \frac{\partial \tau_{r\eta}}{\partial z} \sin \alpha + X_r = 0; \\ & \frac{\partial \tau_{r\xi}}{\partial r} \sin \alpha - \frac{\partial \tau_{r\eta}}{\partial r} \cos \alpha + \frac{\tau_{r\xi}}{r} (2 \sin \alpha + kr \cos^3 \alpha) - \\ & - \frac{\tau_{r\eta}}{r} (2 \cos \alpha - kr \sin \alpha \cos^2 \alpha) + \left( \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial z} \right) \sin \alpha \cos \alpha + \\ & + \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial z} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + X_\xi \sin \alpha - X_\eta \cos \alpha = 0; \\ & \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial z} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial z} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial z} \sin^2 \alpha + \frac{\partial \tau_{r\xi}}{\partial r} \cos \alpha + \\ & + \frac{\partial \tau_{r\eta}}{\partial r} \sin \alpha + \frac{\tau_{r\xi}}{r} \cos \alpha (1 - kr \sin \alpha \cos \alpha) + \\ & + \frac{\tau_{r\eta}}{r} (\sin \alpha + kr \cos^3 \alpha) + X_\xi \cos \alpha + X_\eta \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Примем, что напряжения не меняются вдоль оси симметрии, тогда

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{r\xi}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{r\eta}}{\partial z} = 0. \quad (1.27)$$

Уравнения равновесия (1.26) упрощаются и принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\xi \sin^2 \alpha + 2\tau_{\xi\eta} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_\eta \cos^2 \alpha) + X_r = 0; \\ & \frac{\partial \tau_{r\xi}}{\partial r} \sin \alpha - \frac{\partial \tau_{r\eta}}{\partial r} \cos \alpha + \frac{\tau_{r\xi}}{r} (2 \sin \alpha + kr \cos^3 \alpha) - \\ & - \frac{\tau_{r\eta}}{r} (2 \cos \alpha - kr \sin \alpha \cos^2 \alpha) + X_\xi \sin \alpha - X_\eta \cos \alpha = 0; \\ & \frac{\partial \tau_{r\xi}}{\partial r} \cos \alpha + \frac{\partial \tau_{r\eta}}{\partial r} \sin \alpha + \frac{\tau_{r\xi}}{r} \cos \alpha (1 - kr \sin \alpha \cos \alpha) + \\ & + \frac{\tau_{r\eta}}{r} (\sin \alpha + kr \cos^3 \alpha) + X_\xi \cos \alpha + X_\eta \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

В работе [70] Херл и Конопасек, анализируя напряжения в крученной пряже при растяжении, доказывают, что касательные Напряжения  $\tau_{r\xi}$  и  $\tau_{r\eta}$  пренебрежимо малы по сравнению с остальными компонентами тензора напряжений. Тогда в системе (1.28) в отсутствие массовых сил второе и третье уравнения удовлетворяются тождественно, а оставшееся уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\xi \sin^2 \alpha + 2\tau_{\xi\eta} \sin \alpha - \sigma_\eta \cos^2 \alpha) = 0. \quad (1.29)$$

### 1.2.6. Растяжение спирально-анизотропного цилиндрического стержня (САС)

Рассмотрим круговой цилиндр радиуса R из спирально-анизотропного материала с показателем анизотропии k, находящийся в равновесии в условиях оссимметричного нагружения, когда ось цилиндра совпадает с силовой осью симметрии. Будем считать, что длина цилиндра достаточно велика для выполнения принципа Сен-Венана. Запишем граничные условия:

$$u_r|_{r=0} = 0 \quad (1.30)$$

$$\sigma_r|_{r=R} = 0 \quad (1.31)$$

Условие (1.30) означает, что радиальные перемещения точек, лежащих на оси цилиндра, отсутствуют, т.е., что ось цилиндра при растяжении (сжатии) не изгибается. Условие (1.31) означает, что боковая поверхность цилиндра свободна от нагрузок. Как уже отмечалось, касательные напряжения  $\tau_{r\xi}$  и  $\tau_\eta$  при растяжении пренебрежимо малы по сравнению с оставшимися четырьмя компонентами тензора напряжений, то есть

$$\tau_{r\xi} = \tau_{r\eta} = 0. \quad (1.32)$$

Подставляя (1.32) в (1.24), получим, что  $y_{r\xi} = y_{r\eta} = 0$  и следовательно, в силу соотношений (1.12) будут отсутствовать и компоненты  $\gamma_{rz} = \gamma_{r\theta}$ :

$$\gamma_{rz} = \gamma_{r\theta} = 0. \quad (1.33)$$

Учет осимметричности дает значения:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0. \quad (1.34)$$

Тогда последнее из соотношений (1.13) сформирует равенство:

$$r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - u_\theta = 0$$

откуда после интегрирования получим:

$$u_\theta = Cr. \quad (1.35)$$

Тогда соотношения (1.13) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}; \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = e; \\ \gamma_{r\theta} = \gamma_{rz} = 0; \gamma_{\theta z} = \frac{\partial(Cr)}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

В зависимости от того, каким принять коэффициент С, будем различать задачи:

- *стесненное растяжение* при  $C = \text{const}$  и, следовательно,

$$\gamma_{\theta z} = 0; \quad (1.37)$$

- *свободное растяжение* при  $C = \hat{\theta} z$  и, следовательно,

$$\gamma_{\theta z} = \hat{\theta} r. \quad (1.38)$$

Поскольку условие (1.37) получается из условия (1.38)

при  $\hat{\theta} = 0$  рассмотрим более общий случай свободного растяжения.

Подставим в соотношения (1.36) равенство (1.38):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}; \varepsilon_z = e; \\ \gamma_{r\theta} = \gamma_{rz} = 0; \gamma_{\theta z} = \hat{\theta} r. \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

Соответствующие компоненты в геликоидальной системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \gamma_{r\xi} = 0; \gamma_{r\eta} = 0; \\ \varepsilon_\xi &= e \cos^2 \alpha + \frac{u_r}{r} \sin^2 \alpha + \hat{\theta} \sin^2 \alpha; \\ \varepsilon_\eta &= e \sin^2 \alpha + \frac{u_r}{r} \cos^2 \alpha - \hat{\theta} \sin^2 \alpha; \\ \gamma_{\xi\eta} &= 2 \left( e - \frac{u_r}{r} \right) \sin \alpha \cos \alpha + \hat{\theta} \operatorname{tg} \alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \end{aligned} \quad (1.40)$$

Как уже указывалось, в осесимметричной постановке задачи получено одно уравнение равновесия (1.29).

При малых деформациях реальные конструкции типа кабелей практически не меняют своего объема [58], т.е. выполняется условие:

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta = 0. \quad (1.41)$$

Физические уравнения, связывающие напряжения с деформациями, при этом условии принимают вид:

$$\begin{aligned}
2E_1\nu_1\varepsilon_r &= \sigma_r - \nu_1\sigma_\xi - (1-\nu_1)\sigma_\eta; \\
2E_1\nu_1\varepsilon_\xi &= -\sigma_r + 2\sigma_\xi - \sigma_\eta; \\
2E_1\nu_1\varepsilon_\eta &= -(1-\nu_1)\sigma_r - \nu_1\sigma_\xi + \sigma_\eta; \\
\gamma_{\xi\eta} &= \frac{1}{G_1}\tau_{\xi\eta}.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Здесь в силу условия (1.41)

$$\frac{1}{2} \frac{E_2}{E_1} = \nu_1 = 1 - \nu_2. \tag{1.43}$$

Рассматривая совместно (1.40) и (1.42), исключим из последних деформации. В результате получим три уравнения:

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_\xi - \sigma_r &= E_1 \left[ \left( 1 - 3 \frac{1-\nu_1}{2-\nu_1} \sin^2 \alpha \right) e + 2 \frac{1-\nu_1}{2-\nu_1} \theta \sin^2 \alpha \right]; \\
\sigma_\eta - \sigma_r &= E_1 \frac{\nu_1}{2-\nu_1} (3e - 2\theta) \sin^2 \alpha; \\
\tau_{\xi\eta} &= -G_1 \sin \alpha \left[ -3e + (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) \theta \right]
\end{aligned} \right\} \tag{1.44}$$

Подставляя выражения (1.44) в уравнение равновесия (1.29), сведем задачу к решению одного обыкновенного дифференциального уравнения относительно  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{E_1} \frac{d\sigma_r}{d\alpha} &= \left[ \frac{3}{2-\nu_1} (1 + \cos^2 \alpha) - 2 - \frac{6G_1}{E_1} \cos^2 \alpha \right] e + \\
&+ \left[ 2 - \frac{2}{2-\nu_1} (1 + \cos^2 \alpha) + \frac{2G_1}{E_1} (2 \cos^2 \alpha - 1) \right] \theta.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Интегрируя это уравнение с учетом граничного условия (1.31), получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_r}{E_1} &= \left[ \left( \frac{3}{2-\nu_1} - 2 \right) \ln \frac{\sec \alpha}{\sec \alpha_0} - \frac{3}{2} \left( \frac{1}{2-\nu_1} - m \right) (\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha_0) \right] e + \\
&+ \left[ \left( 2 \frac{1-\nu_1}{2-\nu_1} - m \right) \ln \frac{\sec \alpha}{\sec \alpha_0} + \left( \frac{1}{2-\nu_1} - m \right) (\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha_0) \right] \theta,
\end{aligned} \tag{1.46}$$

$$\text{где } m = \frac{2G_1}{E_1}.$$

Уравнение (1.46) выражает зависимость радиального напряжения  $\sigma_r$  от относительного удаления вдоль оси  $z$   $e$ , физических констант материала  $E_1, \nu_1$  и  $G_1$ , относительного угла закручивания вокруг оси  $z$   $\theta$  и геометрических параметров скрутки, определяемых углом наклона к оси анизотропии упруго-эквивалентных спиралей, образующих поверхностный слой стержня  $\alpha_0$ . Для того, чтобы получить зависимости внешних силовых факторов (Р-осевая нагрузка и М-скручивающий момент) от угла наклона  $\alpha_0$ , воспользуемся известными формулами [59]:

$$P = \int_F \sigma_z dF, \tag{1.47}$$

$$M_t = \int_F \tau_\alpha r dF. \tag{1.48}$$

Эффект возникновения крутящего момента в спирально-анизотропных стержнях при растяжении называется моторным эффектом [41]. Переходя под интегралами (1.47), (1.48) к переменной  $\alpha$  по формуле (1.2), получим:

$$P = \frac{2\pi}{k^2} \int_0^{\alpha_0} \sigma_z \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha, \tag{1.49}$$

$$M_t = \frac{2\pi}{k^3} \int_0^{\alpha_0} \tau_\alpha \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha. \tag{1.50}$$

Подынтегральные выражения в (1.49), (1.50) находятся после подстановки (1.46) в соответствующие выражения системы (1.7), связывающей компоненты тензора напряжений в цилиндрической и геликоидальной системах координат. Осевая нагрузка Р и скручивающий момент М при этом выражаются в виде:

$$P = \pi R^2 ctg^2 \alpha_0 \int_0^{\alpha_0} (\sigma_{\xi} \cos^2 \alpha + \sigma_{\eta} \sin^2 \alpha + 2\tau_{\xi\eta} \sin^2 \alpha \cos \alpha) 2tg \alpha \sec^2 \alpha d\alpha \quad (1.51)$$

$$M_t = \pi R^3 ctg^3 \alpha_0 \int_0^{\alpha_0} [(\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{\xi\eta} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)] \cdot 2tg^2 \alpha \sec^2 \alpha d\alpha \quad (1.52)$$

Интегрирование этих выражений приводит к следующим зависимостям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{\pi R^2 E_1^*} &= A_{11} e + A_{12} \theta, \\ \frac{M_t}{\pi R^3 E_1^*} &= A_{21} e + A_{22} \theta, \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= 1 - 3f_1(\alpha_0) - 9f_2(\alpha_0); \\ A_{12} &= A_{21} = f_1(\alpha_0) + 6f_2(\alpha_0); \\ A_{22} &= \frac{1}{4} m^* tg^2 \alpha_0 - 4f_2(\alpha_0); \\ f_1(\alpha_0) &= \left(1 - \frac{3}{2} m^*\right) (1 - 2ctg^2 \alpha_0 \ln \sec \alpha_0); \\ f_2(\alpha_0) &= \left(\frac{1}{2 - \nu_1^*} - m^*\right) \left(\frac{1}{2} \sin^2 \alpha_0 - 1 + 2ctg^2 \alpha_0 \ln \sec \alpha_0\right). \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$

Здесь  $E_1^*, G_1^*$  и  $\nu_1^*$  - интегральные упругие постоянные спирально-анизотропного стержня;  $m^* = \frac{2G_1^*}{E_1^*}$ .

Система уравнений (1.53) является основой для разработки метода определения интегральных упругих постоянных спирально-анизотропного стержня.

### 1.2.7 Упругий потенциал САТ

Пусть рассматриваемое тело идеально-упругое и W-упругий потенциал, отнесенный к единице объема недеформированного тела. Предположим, что W есть полином от  $l_{ij}$  (здесь и далее  $i, j=1, 2, 3$ ), где  $e_{ij}$  - компоненты тензора деформаций в локальной декартовой системе координат  $x^1, x^2, x^3$ . Применим технику построения полинома W, используемую в [14] для тела с прямолинейной анизотропией. Свяжем с рассматриваемым типом упругой симметрии группу преобразований. Будем требовать, чтобы упругий потенциал W был инвариантен по отношению к этой группе преобразований. Из величин  $e_{ij}$  сконструируем набор полиномов  $P_1, \dots, P_n$ , инвариантных относительно данной группы преобразований. Эти полиномы должны удовлетворять следующим двум свойствам (14).

Ни один из  $P_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) нельзя получить из оставшихся при помощи их сложения, перемножая их между собой и умножения на число. Любой другой полином, инвариантный относительно данной группы преобразований, можно получить при сложения, умножения на число перемножая между собой полиномов  $P_1, \dots, P_n$ . Будем говорить, что полиномы  $P_1, \dots, P_n$  образуют полиномиальный базис для W. Тогда  $W = W(P_1, \dots, P_n)$  есть полином. Отметим, что упруго эквивалентные направления спирально-анизотропного тела не являются координатными линиями какой-либо ортогональной системы координат. Поэтому в рассматриваемом случае при помощи (1.4) в выражениях для  $P_1, \dots, P_n$  необходимо перей-

ти от компонентов тензора деформаций  $e_{ij}$  в локальной декартовой системе координат  $x^1, x^2, x^3$  к физическим проекциям этого тензора  $\varepsilon_{ij}$  на оси цилиндрической системы координат  $r, \theta, z$ .

Для локально-ортотропного материала преобразование симметрии есть зеркальные отражения в плоскостях  $x^i = const (i = 1, 2, 3)$ . Получим, что полиномиальный базис для  $W$  состоит из семи базисных полиномов:

$$\begin{aligned} P_1 &= \varepsilon_{11}, \\ P_2 &= \varepsilon_{22} \cos^2 \alpha - \varepsilon_{33} \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \varepsilon_{23}, \\ P_3 &= \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha + \varepsilon_{33} \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \varepsilon_{23}, \\ P_4 &= (\varepsilon_{12} \cos \alpha - \varepsilon_{13} \sin \alpha)^2, \\ P_5 &= [(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) \sin \alpha \cos \alpha - \varepsilon_{23} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)]^2, \\ P_6 &= (\varepsilon_{12} \sin \alpha + \varepsilon_{13} \cos \alpha)^2, \\ P_7 &= I_3, \end{aligned} \quad (1.55)$$

где  $I_3$  - третий инвариант тензора деформации. Для несжимаемого материала  $I_3 = 1$ . Поэтому число базисных полиномов (1.55) равно шести. Итак, для сжимаемого материала

$$W = W(P_1, \dots, P_6, I_3) \text{ - есть полином.} \quad (1.56)$$

Для несжимаемого материала, соответственно

$$W = W(P_1, \dots, P_6) \quad (1.57)$$

Предположим, что в каждой точке рассматриваемого тела направления  $x^1$  и  $x^2$  упруго эквивалентны. Тогда группу преобразований следует дополнить преобразованием, представляющим собой зеркальное отражение в плоскости, проходящей через ось  $x^3$  и делящей пополам угол между осями  $x^1$  и  $x^2$ . В этом случае полиномиальный базис для  $W$  состоит из восьми полиномов:

$$\begin{aligned} P_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{33} \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \varepsilon_{23}, \\ P_2 &= \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha + \varepsilon_{33} \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \varepsilon_{23}, \\ P_3 &= [(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon_{23} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)]^2 + \\ &+ (\varepsilon_{12} \sin \alpha + \varepsilon_{13} \cos \alpha)^2, \\ P_4 &= (\varepsilon_{12} \cos \alpha - \varepsilon_{13} \sin \alpha)^2, \\ P_5 &= \varepsilon_{11} (\varepsilon_{22} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{33} \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \varepsilon_{23}), \\ P_6 &= \varepsilon_{11} [(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon_{23} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)]^2 + \\ &+ (\varepsilon_{22} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{33} \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \varepsilon_{23}) (\varepsilon_{12} \sin \alpha + \varepsilon_{13} \cos \alpha)^2, \\ P_7 &= [(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon_{23} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)]^2 (\varepsilon_{12} \sin \alpha + \varepsilon_{13} \cos \alpha)^2, \\ P_8 &= I_3, \\ P_9 &= I_3, \end{aligned} \quad (1.58)$$

Итак, для сжимаемого материала

$$W = W(P_1, \dots, P_9, I_3) \quad (1.59)$$

Для несжимаемого материала, т. к.  $I_3 = 1$

$$W = W(P_1, \dots, P_9) \quad (1.60)$$

Предположим, что все направления, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси  $x^3$ , упругоэквивалентны. Тогда рассматриваемое тело трансверсально-изотропно по отношению к направлению винтовой линии. В этом случае группа преобразований состоит из поворотов на любой угол оси  $x^3$  и зеркальных отражений в плоскости  $x_3 = const$ . Тогда полиномиальный базис для  $W$  включает пять полиномов:  $I_1, I_2, I_3$ ,

$$\begin{aligned} K_1 &= \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha + \varepsilon_{33} \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \varepsilon_{23}, \\ K_2 &= (\varepsilon_{12} \sin \alpha + \varepsilon_{13} \cos \alpha)^2 + [(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) \sin \alpha \cos \alpha + \\ &+ \varepsilon_{23} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)]^2 \end{aligned} \quad (1.61)$$

Здесь  $I_1, I_2, I_3$  - инварианты тензора деформации.

Итак, для сжимаемого материала

$$W=W(I_1, I_2, I_3, K_1, K_2) \quad (1.62)$$

Для несжимаемого материала

$$W=W(I_1, I_2, K_1, K_2) \quad (1.63)$$

Базисные полиномы (1.55), (1.58), (1.61) изменяются от точки к точке спирально-анизотропного тела, т.к. являются функциями угла  $\alpha$ , следовательно, функциями  $g$ . Для однородного тела упругий потенциал  $W$  выражается в виде полинома от переменных базисных полиномов  $P_1, \dots, P_n$ , коэффициенты которого есть абсолютные константы. Полученные соотношения [40] являются основой для постановки и решения задач о конечных деформациях спирально-анизотропных стержней из сжимаемого и несжимаемого материала соответственно.

### 1.3. Определение интегральных упругих постоянных спирально-анизотропного стержня (САС)

При практическом расчете любых конструкций необходимым является знание их упругих характеристик, которые, как известно, определяются экспериментально. Но не всегда возможно осуществить требуемый эксперимент. В частности, для определения интегральной упругой постоянной  $E_1^*$  предложенной модели спирально-анизотропного стержня требуется загрузить элемент вдоль оси  $\xi$  для реализации однородного напряженного состояния, что практически не осуществимо [42]. Следовательно, напрашивается вывод о возможном использовании для решения задачи комбинированного подхода. При этом некоторые вспомогательные характеристики получают экспериментально, а затем аналитически вычисляют упругие постоянные спирально-анизотропного элемента. Такой метод был предложен в работе [43] для определения упругих гибких интегральных постоянных кабелей на основе модели спирально-анизотропного стержня.

Однако, получаемые из экспериментов характеристики сильно отличаются порядком (одна из них имеет порядок  $10^9$ , две другие  $-10^6$  и  $10^5$ ) и небольшое отклонение в зада-

нии исходных данных приводит к существенным отклонениям в значениях искомых упругих постоянных (особенно это касается величины  $\nu_1$ ) [42]. Кроме того, как уже отмечалось, любым измерениям обязательно присущи ошибки.

Применим вероятностный подход к учету случайных ошибок в задании исходных данных при определении интегральных упругих постоянных САС. В решении поставленной задачи выделим два этапа: первый - получение аналитических выражений интегральных упругих постоянных спирально-анизотропного стержня в виде функций от некоторых экспериментально получаемых характеристик; второй - получение выражений для вычисления статистических оценок интегральных упругих постоянных при условии, что данные, полученные из экспериментов - случайные величины с заданным законом распределения.

#### 1.3.1. Аналитические выражения для определения интегральных упругих постоянных спирально-анизотропного стержня

Рассмотрим систему уравнений (1.53), (1.54) как исходную для определения интегральных упругих постоянных спирально-анизотропного стержня. Перепишем уравнения системы (1.53) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{\pi R^2} &= A_{11} E_1^* e + A_{12} E_1^* \theta, \\ \frac{M_1}{\pi R^3} &= A_{21} E_1^* e + A_{22} E_1^* \theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.64)$$

Введем следующие обозначения:

$$A_{11} E_1^* = \alpha_{11}, A_{12} E_1^* = \alpha_{12}, A_{21} E_1^* = \alpha_{21}, A_{22} E_1^* = \alpha_{22} \quad (1.65)$$

Тогда уравнения системы (1.54), с учетом новых обозначений, примут вид:



$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= G_1^*(9\varphi_1 + 18\varphi_2) - \frac{1}{2-v_1^*} 9\varphi_2 E_1^* + E_1^* - 3\varphi_1 E_1^*; \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} &= -G_1^*(3\varphi_1 + 12\varphi_2) + \frac{1}{2-v_1^*} 6\varphi_2 E_1^* + \varphi_1 E_1^*; \\ \alpha_{22} &= G_1^* \left( \frac{tg^2 \alpha_0}{2} + 9\varphi_2 \right) - \frac{1}{2-v_1^*} 4\varphi_2 E_1^*, \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= 1 - 2ctg^2 \alpha_0 \operatorname{Insec} \alpha_0; \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} \sin^2 \alpha_0 - \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.67)$$

Для конкретных конструкций, моделируемых спирально-анизотропным стержнем,  $\alpha_{ij}$  получают в результате экспериментальных исследований. В частности, способ определения  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$ , для гибких кабелей будет рассмотрен в следующей главе. При условии задания  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}$ , система уравнений (1.66) является нелинейной алгебраической системой уравнений относительно интегральных упругих постоянных  $E_1^*, G_1^*, v_1^*$ . Решив эту систему уравнений, запишем выражение для определения интегральной упругой постоянной  $E_1^*$  в виде [57]:

$$E_1^* = C_{11}\alpha_{11} + C_{12}\alpha_{12} + C_{13}\alpha_{22}, \quad (1.68)$$

где

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{8\varphi_1 - 2tg^2 \alpha_0}{8\varphi_1 - tg^2 \alpha_0 (2 - 3\varphi_1)}; \\ C_{123} &= \frac{24\varphi_1 - 3tg^2 \alpha_0}{8\varphi_1 - tg^2 \alpha_0 (2 - 3\varphi_1)}; \\ C_{13} &= \frac{18\varphi_1}{8\varphi_1 - tg^2 \alpha_0 (2 - 3\varphi_1)}. \end{aligned}$$

Выражение для определения интегральной постоянной  $G_1^*$  соответственно запишется:

$$G_1^* = C_{21}\alpha_{11} + C_{22}\alpha_{12} + C_{23}\alpha_{22}, \quad (1.69)$$

где

$$\begin{aligned} C_{21} &= \frac{8\varphi_1}{3(8\varphi_1 - tg^2 \alpha_0 (2 - 3\varphi_1))}; \\ C_{22} &= \frac{24\varphi_1 - 8}{3(8\varphi_1 - tg^2 \alpha_0 (2 - 3\varphi_1))}; \\ C_{23} &= \frac{6\varphi_1 - 4}{8\varphi_1 - tg^1 \alpha_0 (2 - 3\varphi_1)}. \end{aligned}$$

Интегральная упругая постоянная  $v_1^*$  при этом представляется в виде дробно-рациональной функции от  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$ :

$$v_1^* = \frac{C_{31}\alpha_{11} + C_{32}\alpha_{12} + C_{33}\alpha_{22}}{P_{31}\alpha_{11} + P_{32}\alpha_{12} + P_{33}\alpha_{22}}, \quad (1.70)$$

где

$$\begin{aligned} C_{31} &= tg^2 \alpha_0 (\varphi_1 + 3\varphi_2) + 4\varphi_1 \varphi_2; \\ C_{32} &= tg^2 \alpha_0 \left( 3\varphi_1 - 1 + \frac{9}{2} \varphi_2 \right) + 4\varphi_2 (3\varphi_1 - 4); \\ C_{33} &= 3(3\varphi_1 \varphi_2 - 8\varphi_2 - 2\varphi_1); \\ P_{31} &= \varphi_1 \left( \frac{tg^2 \alpha_0}{2} + 8\varphi_2 \right); \\ P_{32} &= (3\varphi_1 - 1) \left( \frac{tg^2 \alpha_0}{2} + 8\varphi_2 \right); \\ P_{33} &= 3(6\varphi_1 \varphi_2 - 4\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$

Из выражений (1.68) – (1.70) видно, что интегральные упругие постоянные  $E_1^*, G_1^*, \nu_1^*$  спирально-анизотропного стержня зависят от  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$ . Значения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  определяются из равенств (1.67) и зависят только от угла  $\alpha_0$  наклона упруго-эквивалентных спиралей, образующих поверхностный слой исследуемого цилиндрического стержня, к оси анизотропии.

Зависимости (1.68) - (1.70) представляют собой аналитические выражения интегральных упругих постоянных спирально-анизотропного цилиндрического стержня в виде функций от экспериментально получаемых характеристик  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$  исследуемой конкретной конструкции.

### 1.3.2. Вероятностное описание интегральных упругих постоянных спирально-анизотропного стержня

Итак, получены выражения для определения интегральных упругих постоянных спирально-анизотропного стержня через значения  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$ , которые определяются в результате эксперимента. Используем вероятностный подход к решению задачи определения интегральных упругих постоянных спирально-анизотропного стержня. Гистограммы, построенные по результатам проведенных опытов [41,43], позволяют рассматривать  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$  как независимые непрерывные случайные величины, распределенные по нормальному закону с математическими ожиданиями  $m_i$  и дисперсиями  $s_i^2$  ( $i = \{1, 2, 3\}$ ) соответственно.

Запишем плотности распределения случайных величин  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$ :

$$\begin{aligned} f_{\alpha_{11}}(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s_1^2}} \exp \left\{ -\frac{(u - m_1)^2}{2s_1^2} \right\}; \\ f_{\alpha_{12}}(v) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s_2^2}} \exp \left\{ -\frac{(v - m_2)^2}{2s_2^2} \right\}; \\ f_{\alpha_{22}}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s_3^2}} \exp \left\{ -\frac{(w - m_3)^2}{2s_3^2} \right\} \end{aligned} \quad (1.71)$$

Выражения (1.68)-(1.70) показывают зависимость интегральных упругих постоянных  $E_1^*, G_1^*, \nu_1^*$  спирально-анизотропного стержня от случайных величин  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$ . Следовательно, сами интегральные упругие постоянные  $E_1^*, G_1^*, \nu_1^*$  также являются случайными величинами [15].

Наиболее полную информацию о случайной величине дает ее функция распределения. Из теории вероятностей известно, что случайная величина, являющаяся линейной комбинацией независимых нормально распределенных случайных величин, также подчиняется нормальному закону распределения. Следовательно, случайные величины  $E_1^*$  и  $G_1^*$  распределены по нормальному закону и плотности их распределения имеют вид:

$$f_{E_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_{i=1}^3 C_{1i}^2 s_i^2}} \exp \left\{ -\frac{\left( x - \sum_{i=1}^3 C_{1i} m_i \right)^2}{2 \sum_{i=1}^3 C_{1i}^2 s_i^2} \right\} \quad (1.72)$$

$$f_{G_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_{i=1}^3 C_{2i}^2 s_i^2}} \exp \left\{ -\frac{\left( x - \sum_{i=1}^3 G_{2i} m_i \right)^2}{2 \sum_{i=1}^3 G_{2i}^2 s_i^2} \right\} \quad (1.73)$$

Запишем функцию распределения случайной величины  $\nu_1^*$ , исходя из формулы (1.70) и учитывая независимость случайных величин  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$

$$F_{v_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha_{11}}(u) f_{\alpha_{12}}(v) f_{\alpha_{22}}(w) dudvdw \quad (1.74)$$

Продифференцируем выражение (1.74), получим плотность распределения случайной величины  $v_1^*$ :

$$\begin{aligned} f_{v_1}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha_{11}}(u) f_{\alpha_{12}}(v) f_{\alpha_{22}} \left( \frac{C_{31} - P_{31}x}{P_{33}x - C_{33}} u + \frac{C_{32} - P_{32}x}{P_{33}x - C_{33}} v \right) \times \\ &\times \frac{(C_{31}P_{31} - C_{31}P_{33})u + (C_{33}P_{32} - P_{33}C_{32})}{(P_{33}x - C_{33})^2} dudv = \\ &= \frac{C_{33}P_{31} - C_{31}P_{33}}{(P_{33}x - C_{33})^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ u f_{\alpha_{11}}(u) f_{\alpha_{12}}(v) f_{\alpha_{22}} \left( \frac{C_{31} - P_{31}x}{P_{33}x - C_{33}} u + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{C_{32} - P_{32}x}{P_{33}x - C_{33}} v \right) \right] dudv + \\ &+ \frac{C_{33}P_{32} - P_{33}C_{32}}{(P_{33}x - C_{33})^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ v f_{\alpha_{11}}(u) f_{\alpha_{12}}(v) f_{\alpha_{22}} \left( \frac{C_{31} - P_{31}x}{P_{33}x - C_{33}} u + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{C_{32} - P_{32}x}{P_{33}x - C_{33}} v \right) \right] dudv \quad (1.75) \end{aligned}$$

При дальнейших расчетах воспользуемся тем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t \exp \{ -C_1 t^2 + 2C_2 t \} dt = \frac{C_2}{C_1} \sqrt{\frac{\pi}{C_1}} \exp \left\{ \frac{C_2^2}{C_1} \right\}, \quad (1.76)$$

где  $C_1 = const, C_2 = const$ .

Помним также о том, что

$$\int_{-x}^{+x} t \exp \{ -t^2 \} dt = 0, \quad (1.77)$$

поскольку  $\exp \{ -t^2 \}$  при  $t \rightarrow \infty$  убывает быстрее, чем возрастает любая степень  $t$ .

После ряда преобразований выражения (1.75) приходим к окончательному виду плотности распределения случайной величины  $v_1^*$ :

$$\begin{aligned} f_{v_1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \left[ \sum_{i=1}^3 s_i^2 (C_{3i} - P_{3i}x)^2 \right]^3}} \exp \left\{ - \frac{\left[ \sum_{i=1}^3 m_i (C_{3i} - P_{3i}x) \right]^2}{2 \sum_{i=1}^3 s_i^2 (C_{3i} - P_{3i}x)^2} \right\} \times \\ &\times \sum_{i=1}^3 s_i^2 (C_{3i} - P_{3i}x) \left[ \sum_{k=1, k \neq i}^3 m_k (C_{3i}P_{3k} - C_{3k}P_{3i}) \right]. \quad (1.78) \end{aligned}$$

Закон распределения представляет собой некоторую функцию; указание этой функции полностью описывает случайную величину с вероятностной точки зрения. Однако, во многих вопросах практики нет необходимости характеризовать случайную величину полностью, исчерпывающим образом. Зачастую достаточно бывает указать только отдельные числовые параметры, характеризующие существенные черты распределения случайной величины: например, среднее значение, около которого группируются возможные значения случайной величины; число, характеризующее степень разбросанности этих значений относительно средних и т.д. Пользуясь такими характеристиками, мы можем все существенные сведения относительно случайной величины, которыми мы располагаем, выразить наиболее компактно с помощью минимального количества числовых параметров. При этом весьма важную роль играет то обстоятельство, что когда в задаче фигурирует большое количество случайных величин каждая из которых оказывает известное влияние на численный результат опыта, то закон распределения этого результата в значительной мере можно считать независимым от законов распределения отдельных случайных величин (возникает нормальный закон распределения). В этих случаях по существу задачи для исчерпывающего суждения о ре-

зультирующем законе распределения не требуется знать законов распределения отдельных случайных величин, фигурирующих в задаче; достаточно знать лишь некоторые числовые характеристики этих величин.

Среди числовых характеристик случайных величин нужно прежде всего отметить те, которые характеризуют положение случайной величины на числовой оси, т.е. указывают некоторое среднее, ориентированное значение, около которого группируются все возможные значения случайной величины. Такой числовой характеристикой случайной величины является ее математическое ожидание, которое иногда называют просто средним значением случайной величины. Закон больших чисел констатирует факт устойчивости некоторых средних при большом числе опытов. Здесь речь идет об устойчивости среднего арифметического из ряда наблюдений одной и той же величины. При небольшом числе опытов среднее арифметическое их результатов случайно; при достаточном увеличении числа опытов оно становится "почти не случайным" и, стабилизируясь, приближается к постоянной величине - математическому ожиданию.

Зная законы распределения случайных величин  $E_1^*, G_1^*, v_1^*$  вычислим их средние значения.

Воспользуемся свойством линейности математического ожидания [53]. Согласно этому свойству математическое ожидание линейной функции случайных величин равно той же самой функции от их математических ожиданий. Следовательно, согласно выражениям (1.72) и (1.73) средние значения интегральных упругих постоянных  $E_1^*$  и  $G_1^*$  вычисляются по формулам:

$$\langle E_1^* \rangle = \sum_{i=1}^3 C_{1i} m_i \quad (1.79)$$

$$\langle G_1^* \rangle = \sum_{i=1}^3 C_{2i} m_i \quad (1.80)$$

где  $m_1, m_2, m_3$  - математические ожидания случайных величин  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$  соответственно.

Для определения среднего значения случайной величины  $v_1^*$  необходимо вычислить интеграл:

$$\begin{aligned} \langle v_1^* \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{v_1}(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{ax+b}{\sqrt{2\pi(Ax^2+Bx+C)^{3/2}}} \exp\left\{-\frac{(a_1x+b_1)^2}{2(Ax^2+Bx+C)}\right\} dx, \end{aligned} \quad (1.81)$$

где

$$a = -\sum_{i=1}^3 S_i^2 P_{3i} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 m_k (C_{3i} P_{3k} - C_{3k} P_{3i});$$

$$b = \sum_{i=1}^3 S_i^2 C_{3i} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 m_k (C_{3i} P_{3k} - C_{3k} P_{3i});$$

$$A = \sum_{i=1}^3 S_i^2 P_{3i}; \quad B = -2 \sum_{i=1}^3 S_i^2 P_{3i} C_{3i}; \quad C = \sum_{i=1}^3 S_i^2 C_{3i}^2;$$

$$a_1 = -\sum_{i=1}^3 m_i P_{3i}; \quad b_1 = \sum_{i=1}^3 m_i C_{3i}.$$

В процессе вычисления этот интеграл разбивается на два, один из которых равен нулю, поскольку подынтегральная функция является нечетной функцией вида  $y \cdot \exp(-y^2/2)$ , второй интеграл после замены переменных

$y = \frac{a_1x+b_1}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$ , запишется в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} \left[ \frac{a_1b+b_1a}{a_1(Ba_1+2Ab_1)} - \frac{(b_1B+2a_1C)a}{(Ba_1+2b_1A)^2} \right] dy, \quad (1.82)$$

Пользуясь известной формулой для вычисления интеграла Эйлера-Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-t^2\} dt = \sqrt{\pi},$$

окончательно получаем формулу для вычисления среднего значения интегральной упругой постоянной  $v_1^*$ :

$$\langle v_1^* \rangle = 2 \left[ \frac{a_1 b + b_1 a}{a_1 (B a_1 + 2 A b_1)} - \frac{(b_1 B + 2 a_1 C)}{(B a_1 + 2 b_1 A)^2} \right]. \quad (1.83)$$

Полученные формулы [39,57] (1.79), (1.80) и (1.83) представляют собой выражения для вычисления статистических оценок интегральных упругих постоянных спирально-анизотропного стержня.

#### 1.4. Определение характеристик упругих свойств кабелей на основе решения задачи определения интегральных упругих постоянных спирально-анизотропного стержня

Кабель представляет собой сложную механическую конструкцию, состоящую из резиновой или полимерной оболочки и комплекта токопроводящих и нейтральных жил. Сочетание конструктивных и технологических особенностей создает конструкцию, обладающую анизотропией механических свойств не только в силу геометрии, но и в силу анизотропии свойств отдельных элементов (жилы в сердечнике). Кроме того, анизотропию вносит и введение усиливающих и спиралеобразующих элементов. В работах [41, 42, 43] была успешно применена модель гибкого кабеля как упругого спирально-анизотропного стержня.

Большую часть всей кабельной продукции составляют гибкие кабели, предназначенные для работ в условиях, когда главную роль при оценке долговечности играет их механическая прочность [43]. При практическом расчете на прочность такого рода изделий возникают трудности в определении интегральной упругой постоянной  $E_1^*$ , соответствующей модулю продольной упругости винтового элемента кабеля вдоль осевого направления  $\xi$ , интегральной упругой постоянной  $G_1^*$ , аналогичной модулю сдвига в плоскости  $\xi\eta$  и интегральной упругой постоянной  $\nu_1^*$ , аналогичной коэффициенту Пуассона, указывающей на величину относительного сужения кабеля в направлении оси  $\eta$  под действием растягивающей силы, совпадающей по направлению с осью  $\xi$ . Это связано с отсутствием стандартных методов их определения, с невозможностью загрузки элемента вдоль оси

$\xi$  для реализации однородного напряженного состояния. Необходимость определения интегральных упругих постоянных  $E_1^*, G_1^*, \nu_1^*$  обусловлена тем, что они полностью характеризуют свойства условного спирального элемента кабеля.

При расчете конструкции конкретных кабелей в первую очередь интерес представляют характеристики кабеля как цельного конструктивного элемента. Поэтому наряду с интегральными упругими постоянными  $E_1^*, G_1^*, \nu_1^*$  для описания механических свойств кабеля важно знать его характеристики, аналогичные жесткостям цилиндрического изотропного стержня при растяжении EF, кручении GJ, изгибе EJ, сдвиге GF. Определение жесткостных характеристик путем простого умножения геометрических характеристик на соответствующие упругие постоянные для кабеля некорректно ввиду его конструктивных особенностей. Определение характеристик упругих свойств кабеля является сложной задачей, связанной с необходимостью учета анизотропии кабеля, разнородности свойств материалов, составляющих элементы кабеля, особенностей контакта этих элементов друг с другом.

С помощью экспериментальных устройств получают реальные количественные оценки жесткостных характеристик различных типов кабеля. Эти оценки лежат в основе расчетов и проектирования испытательного и эксплуатационного оборудования. По величине жесткостных характеристик гибкие кабели оказываются в промежуточном положении между жесткими материалами типа металлов, композитных материалов, жестких пластмасс и гибкими материалами типа резин, полимерных материалов.

Принципиальная основа эксперимента такова: для выбранной расчетной схемы установить коэффициент пропорциональности между внешним силовым воздействием и деформацией образца-интегральную жесткость образца с точностью до некоторого конструктивного множителя. Разработаны и используются приборы и устройства, позволяющие оценить интегральные жесткости кабеля при растяжении, кручении и изгибе [45, 46]. С помощью этих же устройств при схемах нагружения, реализующих поперечный изгиб, можно оценить и интегральную жесткость при сдвиге. Однако, опыт показывает, что результаты получаются недостаточно надежными [46], требуют проведения большого числа

экспериментов, что связано с большими материальными затратами. Все вышесказанное дает основание применить вероятностный подход к задаче определения интегральных жесткостных характеристик гибкого кабеля.

#### 1.4.1. Определение статистических оценок интегральных упругих постоянных кабеля

Основой для определения интегральных упругих постоянных  $E_1^*, G_1^*, \nu_1^*$  кабеля, моделируемого спирально-анизотропным стержнем, является система уравнений (1.64) с учетом обозначений (1.65) эта система имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{\pi R^2} &= a_{11}e + a_{12}\mathcal{E}, \\ \frac{M_1}{\pi R^3} &= a_{21}e + a_{22}\mathcal{E}. \end{aligned} \right\} \quad (1.84)$$

Здесь  $R$  - радиус кабеля,  $\alpha_0$  - угол наклона к оси анизотропии упруго-эквивалентных спиралей, образующих поверхностный слой кабеля,  $e$  - относительная осевая деформация (по оси анизотропии),  $\mathcal{E}$  - относительный угол закручивания кабеля.

Для определения  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$  с учетом равенства  $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ , которое следует из (1.54) и (1.65), необходимо проведение трех серий опытов на стесненное растяжение, стесненное кручение, свободное растяжение или свободное кручение.

##### Стесненное растяжение

Условия эксперимента таковы, что при приложении осевого усилия осевые направляющие не дают возможности кабелю вращаться вокруг оси, т.е. реализуется условие:  $\mathcal{E}_1 = 0$ . а система уравнений (1.84) преобразуется к виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_1}{\pi R^2} &= \alpha_{11}e_1; \\ \frac{M_{t1}}{\pi R^3} &= \alpha_{21}e_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.85)$$

где индекс 1 у  $P_1, M_1, e_1$  соответствует номеру первой серии экспериментов по определению упругих постоянных и номеру диаграммы испытаний кабеля.

Для слабой нелинейности, как это видно из рис. 1.4, примем:

$$\frac{dP}{de_1} \approx \operatorname{tg} \alpha_1 \quad (1.86)$$

и сразу же определим

$$\alpha_{11} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\pi R^2} \approx \frac{P_1^*}{\pi R^2 e_1^*}, \quad (1.87)$$

где  $P_1^*, e_1^*$  - предельные значения диаграммы 1.

##### Свободное растяжение

Условия эксперимента в этом случае предусматривают возможность раскручивания кабеля при растяжении, т. е. реализуются условия:  $e_2 \neq 0$ ;  $\mathcal{E}_2 \neq 0$ ; ( $e_2 \sim \mathcal{E}_2$ ; на рис. 1.4 - диаграмма 2), система уравнений (1.84) записывается в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{\pi R^2} &= a_{11}e + a_{12}\mathcal{E}, \\ \frac{M_1}{\pi R^3} &= a_{21}e + a_{22}\mathcal{E}. \end{aligned} \right\} \quad (1.88)$$

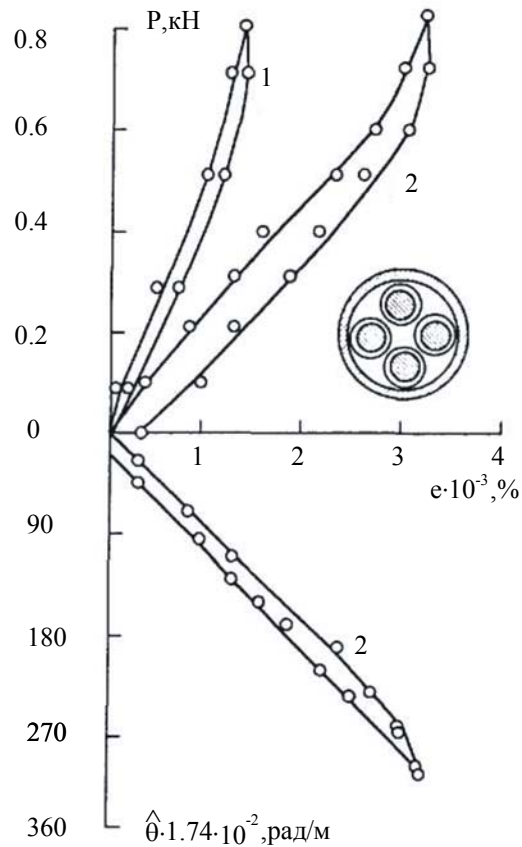


Рис. 1.4 Совмещенные диаграммы зависимостей  $P - e$  и  $e - \hat{\theta}$  кабеля КГ; 1 - стесненное растяжение-разгрузка; 2 - свободное растяжение-разгрузка.

Из рис. 1.4 видно, что диаграммы  $P_2 - e_2$  и  $e_2 \sim \hat{\theta}_2$  близки к линейным, а поэтому

$$\frac{dP_2}{de_2} \approx \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{P_2^*}{e_2^*};$$

$$\frac{d\hat{\theta}_2}{de_2} \approx \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{\hat{\theta}_2^*}{e_2^*},$$

эксперименты проводятся таким образом, чтобы  $P_1^* = P_2^*$ . Разделим первое уравнение системы (1.88) на  $e_2^*$

$$\frac{P_2^*}{\pi R^2 e_2^*} = \alpha_{11} + \alpha_{12} \frac{\hat{\theta}_2^*}{e_2^*}$$

Это равенство с учетом (1.87) переписывается в виде

$$\frac{P_2^*}{\pi R^2 e_2^*} = \frac{P_1^*}{\pi R^2 e_1^*} + \alpha_{12} \frac{\hat{\theta}_2^*}{e_2^*} \quad (1.89)$$

откуда

$$\alpha_{12} = \frac{\frac{P_2^*}{\pi R^2 e_2^*} - \frac{P_1^*}{\pi R^2 e_1^*}}{\frac{\hat{\theta}_2^*}{e_2^*}}, \quad (1.90)$$

где  $P_2^*, e_2^*, \hat{\theta}_2^*$  - предельные значения диаграмм 2.

### Стесненное кручение

При осуществлении этого эксперимента реализуется условие:  $e_1 = 0$ , а система уравнений (1.84) записывается в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_3}{\pi R^2} &= \alpha_{12} \theta_3, \\ \frac{M_{13}}{\pi R^3} &= \alpha_{22} \theta_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.91)$$

Здесь индекс 3 у  $P_3, M_{13}$ , и  $\theta_3$  соответствует номеру третьей серии экспериментов по определению упругих постоянных и номеру диаграммы испытаний кабеля. Конструкция испытательного устройства такова, что величина момента  $M_{13}$  пропорциональна величине нагрузки  $P_3$ , а специальные приборы позволяют замерить значения этих величин и соответствующий угол поворота  $\theta_3$  концевых сечений образца [42].

Слабая нелинейность, как это видно из рис.3.2, позволяет осуществлять линейную аппроксимацию зависимости  $M \sim \theta$ . Тогда вычисляется:

$$\alpha_{22} = \frac{M_{13}^*}{\pi R^3 \theta_3^*}, \quad (1.92)$$

где  $M_{13}^*, \theta_3^*$  - предельные значения диаграммы 3.

Свободное кручение полностью описывается той же системой уравнений, что и эксперимент на свободное растяжение. При этом рассчитывается значение  $\alpha_{21}$ . Расчеты и эксперименты показали, что с небольшой погрешностью  $\alpha_{21} = \alpha_{12}$  [43]. Это равенство является критерием правомерности использования для модели кабеля спирально-анизотропного цилиндрического стержня.

Техника проведения опытов и сами опытные установки, защищенные авторскими свидетельствами, подробно описаны в работах [41, 42].

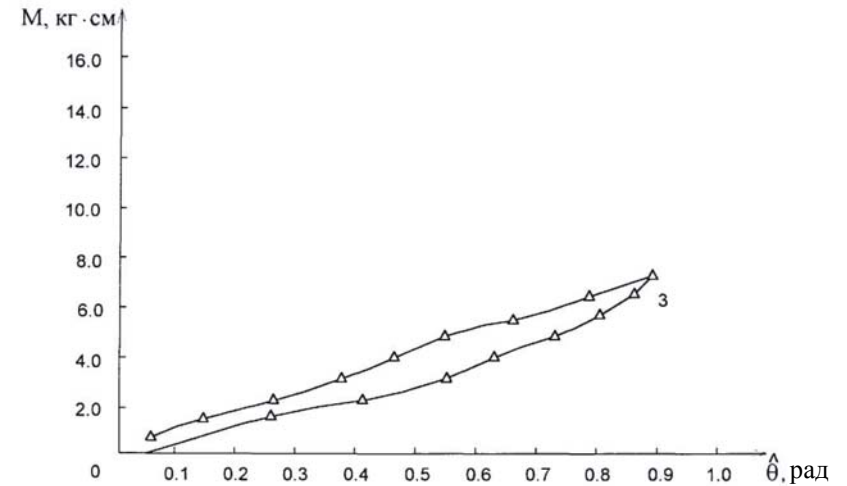


Рис.1.5. Диаграмма зависимости  $M \sim \theta$  кабеля КГ.

В итоге можно сформулировать алгоритм определения статистических оценок интегральных упругих постоянных гибкого кабеля:

1. Из трех серий экспериментов, описанных выше, получают опытные данные для определения  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$ .
2. С использованием методов математической статистики, получают математические ожидания этих величин  $m_1, m_2$ , и  $m_3$  соответственно.
3. Полученные значения подставляют в выражения (1.79), (1.80) и (1.83)- таким образом, получают статистические оценки интегральных упругих постоянных  $E_1^*, G_1^*, \nu_1^*$  гибкого кабеля.

#### 1.4.2. Вероятностное описание интегральных жесткостных характеристик кабеля

В механике гибких кабелей задача изгиба является чрезвычайно важной, потому что этот вид эксплуатационной деформации доминирует [58]. Одними из основных и трудноопределяемых характеристик механических свойств гибкого кабеля являются его интегральные жесткостные характери-



стики при изгибе  $A^*$  и сдвиге  $B^*$ . Для экспериментального определения этих жесткостных характеристик разработаны и используются приборы [41, 42]. Рассмотрим две соответствующие схемы деформирования кабеля (рис. 1.6 а, б). Первая схема-это однопролетная двухопорная балка с равными сосредоточенными моментами в опорных сечениях. Вторая схема представляет собой однопролетную двухопорную балку с сосредоточенным моментом на одном конце. Для вычисления интегральных жесткостных характеристик кабеля воспользуемся известными формулами для определения углов поворота опорных сечений образца в плоскости действия изгибающих моментов, полученными с использованием интеграла Мора [63].

Для расчетной схемы, изображенной на рис. 1.6 а, угол  $\varphi$  равен

$$\varphi = \frac{M\lambda}{2A^*}. \quad (1.93)$$

Для расчетной схемы, изображенной на рис. 1.6 б, угол  $\gamma$  равен

$$\gamma = \frac{\lambda M}{3A^*} + \frac{\eta M}{\lambda B^*}, \quad (1.94)$$

где  $\eta$  - поправочный коэффициент, связанный с неравномерностью распределения касательного напряжения по площади поперечного сечения. Нагрузочные моменты и соответствующие им угловые деформации концевых (опорных) сечений образцов определяются из эксперимента.

Любой из приборов для определения механических характеристик имеет дело с образцами определенной длины, размеров и формы поперечного сечения, соотношение между которыми предварительно обосновывается [42]. Для гибкого кабеля, в силу особенности его конструкции, размеры и форма поперечного сечения, в основном, определены электротехническими требованиями. Минимальную длину образца определяет наибольший шаг свивки любого из элементов поперечного сечения. Максимальную длину образца определяет условие, чтобы взаимодействие элементов сечения как можно меньше отличалось от реальных условий работы достаточно длинного кабеля. В условиях эксперимента длина

образца принимается примерно равной шагу наружных токопроводящих жил.

Поскольку в любых опытных данных, как уже отмечалось, неизбежно присутствуют случайные погрешности, то к задаче определения интегральных жесткостных характеристик гибких кабелей возможно применение вероятностного подхода и решать ее следует с использованием теории вероятностей и математической статистики.

Получим выражения для определения статистических оценок жесткостных характеристик  $A^*$  и  $B^*$  кабеля. Из выражения (1.93) имеем:

$$A^* = \frac{M\lambda}{\varphi 2}. \quad (1.95)$$

Величина  $\frac{M}{\varphi}$  является случайной, т.к. определяется из

эксперимента, следовательно, и величина  $A^*$  тоже случайная. Как уже отмечалось, для описания ошибок измерения используется гауссовская модель, которая наиболее адекватна для многих реальных физических шумов, сопутствующих этим измерениям. Запишем плотность распределения нормальной случайной величины  $\frac{M}{\varphi}$  в точке  $x$ :

$$f_{\frac{M}{\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} \exp\left\{-\frac{(x - \tilde{m})^2}{2\tau^2}\right\} \quad (1.96)$$

Пользуясь законами теории вероятностей, из (1.95), (1.96) получаем, что случайная величина  $A^*$  имеет плотность распределения:

$$f_A(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{\lambda^2}{2} \tau^2}} \exp\left\{-\frac{\left(x - \tilde{m} \frac{\lambda}{2}\right)^2}{\frac{\lambda^2}{2} \tau^2}\right\}. \quad (1.97)$$

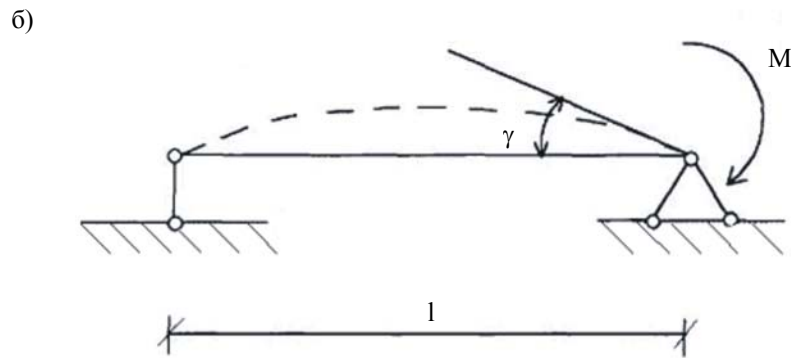
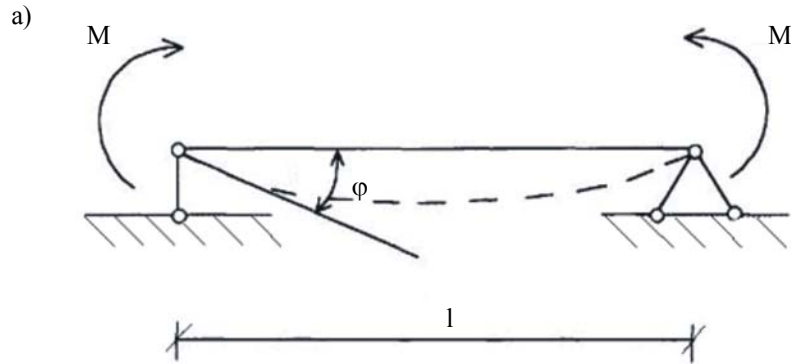


Рис. 1.6. Варианты схем нагружения образцов кабеля:  
 а - изгиб встречными моментами (прямой чистый изгиб);  
 б - изгиб сосредоточенным моментом (прямой поперечный изгиб).

Перейдем теперь к вероятностному описанию интегральной жесткой характеристики  $B^*$ . Из выражения (1.94) имеем:

$$B^* = \frac{K_1 A^*}{A^* - K_2 \frac{M}{\varphi}} \quad (1.98)$$

где

$$K_1 = \frac{M_{\max} \eta}{l \varphi_{\max}}, \quad K_2 = \frac{l}{3}.$$

Запишем плотности распределения независимых нормальных случайных величин  $A^*$  и  $\frac{M}{\varphi}$  в точках  $x$  и  $y$

$$f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_1^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a_1)^2}{2\delta_1^2}\right\}, \quad (1.99)$$

$$f_{\frac{M}{y}}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_2^2}} \exp\left\{-\frac{(y-a_2)^2}{2\delta_2^2}\right\}. \quad (1.100)$$

Определим функцию распределения случайной величины  $B^*$  в точке  $z$ :

$$F_B(z) = P(B^* < z) = \int_{-\infty}^{\frac{x(z-K_1)}{K_2-z}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx, \quad (1.101)$$

где  $f(x, y)$  - совместная плотность распределения случайных величин  $A^*$  и  $\frac{M}{\varphi}$ . Учитывая независимость случайных

величин  $A^*$  и  $\frac{M}{\varphi}$  и законы их распределения, после ряда преобразований из (1.101), получаем плотность распределения случайной  $B^*$  в точке  $z$ :

$$f_B(z) = \frac{K_1 K_2}{\sqrt{2\pi\delta_1^2\delta_2^2}} \frac{z(a_1\delta_2^2 K_2 + a_2\delta_1^2) - a_2 K_1 \delta_1^2}{(\delta_2^2 z^2 K_2 + \delta_1^2(z - K_1)^2)^{\frac{3}{2}}} \times \exp\left\{-\frac{(z(a_1 - a_2 K_2) - a_1 K_1)^2}{2(\delta_2^2 z^2 K_2 + \delta_1^2(z - K_1)^2)}\right\}. \quad (1.102)$$

Теперь мы имеем представление о законах распределения случайных величин  $A^*$  и  $B^*$ . В качестве статистической оценки интегральной жесткостной характеристики  $A^*$  примем математическое ожидание этой случайной величины, равное

$$\langle A^* \rangle = \frac{\lambda}{2} \tilde{m}, \quad (1.103)$$

где  $\lambda$  - длина кабеля, подвергаемого изгибу,

$\tilde{m}$  - среднее значение случайной величины  $\frac{M}{\varphi}$ .

Закон распределения случайной величины  $B^*$  имеет вид (1.102). Прямое вычисление математического ожидания этой величины затруднительно. Получим формулу для вычисления статистической оценки интегральной жесткостной характеристики  $B^*$ , используя полученные ранее оценки интегральных упругих постоянных  $E_1^*$  и  $G_1^*$ :

$$\langle B^* \rangle = \frac{P^* \langle G_1^* \rangle}{e^* \langle E_1^* \rangle} = \frac{P^* \sum_{i=1}^3 C_{2i} m_i}{e^* \sum_{i=1}^3 C_{1i} m_i}. \quad (1.104)$$

где  $P^*, e^*$  - предельные значения диаграммы зависимости  $P \sim e$  в опытах на стесненное растяжение,  $\langle E_1^* \rangle$  - среднее значение интегральной упругой постоянной  $E_1^*$ , вычисленное по формуле (1.79),  $\langle G_1^* \rangle$  - среднее значение интеграль-

ной упругой постоянной  $G_1^*$ , вычисленное по формуле (1.80). Таким образом, выражения (1.103), (1.104) представляют собой формулы для вычисления оценок интегральных жесткостных характеристики  $A^*$  и  $B^*$  гибкого кабеля.

## 1.5. Методика расчета статистических оценок упругих интегральных постоянных и жесткостных характеристик кабеля

### 1.5.1. Методика вычисления статистических оценок интегральных упругих постоянных кабеля

Моделируя кабель упругим сплошным однородным спирально-анизотропным цилиндрическим стержнем, получаем уравнение (1.46), из которого видно, что напряженное состояние кабеля характеризуется тремя интегральными упругими постоянными  $E_1^*, G_1^*, \nu_1^*$ . Ввиду невозможности постановки эксперимента для прямого вычисления этих упругих постоянных, предлагается вероятностный подход к их определению. В результате проведения трех серий опытов на стесненное растяжение, стесненное кручение и свободное растяжение получены диаграммы зависимостей  $P \sim e, M \sim \theta$  и  $e \sim \theta$ . По этим диаграммам определяются значения  $\alpha_{11}, \alpha_{12}$  и  $\alpha_{22}$ . Поскольку эти параметры определяются экспериментально, им обязательно присущи случайные ошибки измерений. Считая параметры  $\alpha_{11}, \alpha_{12}$  и  $\alpha_{22}$  случайными величинами, распределенными по нормальному закону, на основе упомянутых диаграмм, вычисляем средние значения этих параметров. Затем по формулам (1.79), (1.80) и (1.83) рассчитываются математические ожидания интегральных упругих постоянных  $E_1^*, G_1^*$  и  $\nu_1^*$  соответственно. В таблице 1.1 приведены статистические оценки интегральных упругих постоянных для кабеля КГ, полученные описанным выше способом. Для сравнения в скобках приводятся численные значения интегральных упругих постоянных, полученные на основе детерминированного подхода.

Существенную роль в оценке упругих постоянных детерминированным методом играют отклонения  $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{22}$  - погрешности вычислений  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$  соответственно, найденные с учетом погрешностей эксперимента погрешностей обработки диаграмм (рис. 1.4, 1.5) [43]. Максимальные отклонения составляли  $\pm 20\%$  Поэтому расчеты  $E_1^*, G_1^*$  и  $\nu_1^*$  осуществлялись при переборе значений  $\lambda_{ij}\Delta_{ij}$  (По индексам не суммировать), где  $0 < \lambda_{ij} \leq 1$  - величины дробления интервала. Для выбора конкретных из множества получаемых значений интегральных упругих постоянных были вычислены невязки

$$\sum_i = \sqrt{\frac{(\lambda_{11}\Delta_{11})_i^2 + (\lambda_{12}\Delta_{12})_i^2 + (\lambda_{22}\Delta_{22})_i^2}{3}} \quad (1.105)$$

с сортировкой по интервалам  $\Delta\Sigma$  от 0 до 0,2. Затем внутри каждого интервала для данных значений  $\nu_1^*$  находилось минимальное значение функционала

$$f = \sqrt{(E_1^*)^2 + (G_1^*)^2} \quad (1.106)$$

для значений  $E_1^*$  и  $G_1^*$ , которые вместе с  $\nu_1^*$  определяли тройку интегральных упругих постоянных, удовлетворяющих системе уравнений (1.66), (1.106) на соответствующем интервале  $\Delta\Sigma$ . На интервалах  $\Delta\Sigma$  от 0 до 0,1 не существует  $E_1^*, G_1^*$ .

В таблице 1.1 в скобках представлены значения интегральных упругих постоянных, найденные по требованию  $f = \min$  на интервалах  $\Delta\Sigma$ : 0,1+0,15 для первой строки таблицы и 0,15+0,20 для второй строки.

Для вычисления статистических оценок интегральных упругих постоянных кабеля с доверительной вероятностью 0,95 при степени точности  $10^{-2}$  необходимый объем выборки составляет 1415. Для вычисления значения интегральных упругих постоянных детерминированным методом проведено более 7000 испытаний. Из таблицы видно, что предложенный вероятностный метод определения интегральных упругих постоянных кабеля дает более устойчивые результаты

при широком разбросе исходных данных, особенно это касается упругих постоянных  $G_1^*$  и  $\nu_1^*$ . Так, различие между значениями  $G_1^*$ , определенными детерминированным методом для двух интервалов погрешностей составляет 48,95%, а для определенных вероятностным методом - 10,6%. Для интегральной упругой постоянной  $\nu_1^*$  эти значения составляют соответственно 60, 9% и 1,3%.

Таблица 1.1  
Статистические оценки интегральных упругих постоянных для кабеля КГ 3×4+1×2

Разброс исходных данных, %	$\langle E_1^* \rangle$ , /Па/	$\langle G_1^* \rangle$ , /Па/	$\langle \nu_1^* \rangle$
10÷15	2,38·10 <sup>9</sup> (2,42·10 <sup>9</sup> )	1,66·10 <sup>9</sup> (3,53·10 <sup>8</sup> )	0,300 (0,266)
15÷20	2,16·10 <sup>9</sup> (2,21·10 <sup>9</sup> )	1,50·10 <sup>9</sup> (2,37·10 <sup>8</sup> )	0,304 (0,428)

### 1.5.2. Методика вычисления статистических оценок интегральных жесткостных характеристик кабеля

Для кабельных конструкций особый интерес представляют характеристики кабеля как цельного конструктивного элемента. Одними из основных характеристик механических свойств гибкого кабеля являются интегральные жесткостные характеристики при изгибе  $A^*$  и сдвиге  $B^*$ .

Для определения интегральной жесткостной характеристики  $A^*$  проводится эксперимент по схеме нагружения кабеля, представленной на рис. 1.6 а (прямой чистый изгиб). Полученные в результате этого эксперимента данные рассматриваются как значения случайной величины. Считая ее распределенной по нормальному закону, с помощью методов математической статистики, можно определить среднее значение случайной величины  $\frac{M}{\varphi}$

После этого по формуле (1.103) рассчитывается среднее значение интегральной жесткостной характеристики  $A^*$ .

Среднее значение интегральной жесткостной характеристики  $B^*$  при прямом поперечном изгибе предлагается рассчитывать по формуле (1.104) через полученные ранее статистические оценки интегральных упругих постоянных  $E_1^*$  и  $G_1^*$ .

В табл. 1.2 приведены статистические оценки интегральных жесткостных характеристик  $A^{**}$  и  $B^*$  для двух марок кабеля. Для сравнения в скобках приведены численные значения интегральных жесткостных характеристик, полученные детерминированным методом [42].

Для вычисления статистических оценок интегральных жесткостных характеристик кабеля с доверительной вероятностью 0,95 при степени точности  $10^{-2}$ , необходимый объем выборки составляет 500, при этом для определения значения показателей, устанавливаемых в стандартах или технических условиях на кабели конкретных марок число циклов изгиба варьируется от 3000 до 35000. Таким образом, использование вероятностного метода позволяет сократить число экспериментов, что приводит к существенной экономии материалов и затрат.

Вычисление интегральных жесткостных характеристик кабеля детерминированным методом связано с вычислением ряда вспомогательных характеристик и представляет собой достаточно трудоемкий процесс, особенно это касается жесткостной характеристики  $B^*$  [39-43]. Использование вероятностного подхода позволяет существенно упростить эти расчеты, а результаты, как это видно из табл. 1.2, отличаются незначительно [57].

Таблица 1.2

Статистические оценки интегральных жесткостных характеристик кабелей

Марка кабеля	$\langle A^* \rangle, / \text{Н} \cdot \text{М}^2 /$	$\langle B^* \rangle, / \text{Н} \cdot \text{М}^2 /$
КГ 3×4+1×2,5	6,142·10 <sup>7</sup> (6,260·10 <sup>7</sup> )	3,373·10 <sup>9</sup> (3,378·10 <sup>9</sup> )
КГШЭ 3×50+1×10	3,426·10 <sup>7</sup> (3,422·10 <sup>7</sup> )	1,910·10 <sup>9</sup> (1,913·10 <sup>9</sup> )

## Литература к главе 1

1. *Абрамян Б.Л., Баблюян А.А.* Кручение анизотропного цилиндра // ДАН Арм. ССР.-1958.- Т. 27, № 5.-С. 269-275.
2. *Абрамчук С.С., Булдаков В.П.* Допустимые значения коэффициентов Пуассона анизотропных материалов // Механика композитн. материалов. - 1979. - № 2. - С. 235-243.
3. *Александров К.С, Рыжова Т.В.* Упругие свойства кристаллов Обзор // Кристаллография. - 1961. - Т. 6, вып. 2. С. 289-314.
4. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. - М: Наука, 1974. - 324 с.
5. *Амбарцумян С.А.* Разномодульная теория упругости. - М: Наука, 1982. - 320 с.
6. *Ашкенази Е.К.* Анизотропия машиностроительных материалов. - Л: Машиностроение, 1969. - 240 с.
7. *Ашкенази Е.К., Морозов А.С.* Методика экспериментального исследования упругих свойств композиционных материалов // Заводская лаборатория. - 1976. - № 6. - С. 731-735
8. *Баблюян А.А.* Об одной задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра конечной длины из трансверсально-изотропного материала // ДАН Арм.ССР. - 1961. - т. 32, № 4. - С. 189-195.
9. *Бендат Дж., Пирсол А.* Измерение и анализ случайных процессов. - М: Мир, 1974. - 464 с.
10. *Благонадежны В.Л., Варушкин Е.М., Протасов В.А.* Экспериментальные исследования начального напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек // Механика композиты, материалов. - 1979. - № 4. - С. 634-640.
11. *Болотин В.В.* Плоская задача теории упругости для деталей из армированных материалов // Расчеты на прочность. - вып. 12. - М: Машиностроение, 1979. - С. 3-31.
12. *Бондаренко Л.Н.* Аналитическое определения коэффициента жесткости канатов // Механиз. стр-ва. - 1994. - № 12. С. 12-13.
13. *Веинский М.Н., Листратенков А.И., Тюрин А.В.* О рациональном конструировании токопроводящих жил силовых кабелей // Кабельная техника. - 1976. - вып. 1. - С. 4-6.

14. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. – М: Наука, 1947, 480 с.
15. Вудворт Ф.М. Теория вероятностей и теория информации с применением к радиолокации. – М: Сов. радио, 1955. – 228 с.
16. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь. – М: Сов. Радио, 1974. – 719 с.
17. Глушко М.Ф. Стальные подъемные канаты. – Киев: Техника, 1966. – 323 с.
18. Глушко М.Ф., Малиновский В.А., Шигарина Л.И., Кононенко Л.А. Нелинейные уравнения равновесия прямого каната // Прикл. механика. – 1979. – № 12. – С. 127-129.
19. Гренандер У. Случайные процессы и статистические выводы. М: ИЛ, 1961. – 167 с.
20. Деранже А.М., Кротов В.П., Повеличенко А.П., Рсянов Ю.А. Расчет натяжения грузонесущих кабелей для геофизических исследований // Кабельная техника. – 1976. – вып. 5. – С. 3-6.
21. Динник А.Н. Статьи по горному делу. – М: Углетехиздат СССР, 1957. – 202 с.
22. Долгих В.Н., Фильштинский Л.А. Модель анизотропной среды, армированной тонкими лентами // Прикл. механика. – 1979. – № 4. – С. 24-31.
23. Дружинина Т.В., Любимцева Е.М., Митюшов Е.А. Упругие характеристики многофазных систем волокнистой структуры / Урал. гос. техн. ун-т. – Екатеринбург, 1995. – 16 с. – Деп. В ВИНТИ 05.10.95, № 2690-В95.
24. Ефремов И.Н., Мамаев Л.М., Раров А.Н., Фролов В.Г. Расчет механических напряжений в кабелях, покрытых упругими оболочками // Электротехническая промышленность. Кабельная техника. – 1980. – вып. 7 (185). – С. 2-3.
25. Житков П.Н. Плоская задача теории упругости неоднородного ортотропного тела в полярных координатах // Тр. Воронежского госуниверситета. – 1954. – т. 27. – С. 20-29.
26. Ильин Л.А., Лобкова Н.А., Нехотящий В.А., Стариков Н.П. Схематизация многослойной рулонированной стенки сосуда анизотропным цилиндром // Прикл. механика. – 1979. – № 10. – С. 58-63.
27. Калиниченко П.М., Козовый СИ. Методика определения параметров вторичной деформации проволок при свивке

нераскручивающихся спиральных канатов // Стальные канаты. 1972. – Вып. 9. – С. 150-153.

28. Карпинос Д.М., Тучинский М.И., Вишняков Л.Р. Новые композиционные материалы. – Киев: Вища школа, 1911. – 312 с.

29. Крегер А.Ф., Тетере Г.А. Применение методов усреднения для определения вязко-упругих свойств пространственно-армированных композитов // Механика композитных материалов. – 1979. – № 4. – С. 617-624.

30. Кульбак С. Теория информации и статистика. – М: Наука, 1967. – 408 с.

31. Куц В.И. Напряженное состояние и эффективные упругие модули среды, армированной периодически-расположенными сфероидальными включениями // Прикладная механика. – 1995. – 31, № 3. – С. 32-39.

32. Лавендел Э.Э. Расчет резинотехнических изделий. М: Машиностроение, 1916. – 232 с.

33. Лапин А.А. Плоская деформация резинокордовой ткани // Расчеты на прочность в машиностроении. – М: Машгиз, 1955 – С. 46.

34. Леман Э. Проверка статистических гипотез. – М: Наука, 1964. – 489 с.

35. Лехницкий С.Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. – М: Наука, 1971. – 310 с.

36. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М: Наука, 1977. – 415 с.

37. Математическая статистика / Иванова В.М., Калинина В.Н., Нешумова Л.А. и др. – М.: Высш. школа, 1981.-371 с.

38. Мокряк С.Я. Исследование напряженно-деформированного состояния спирально-анизотропных стержней / Томск. инж.- строит. ин-т. – Томск, 1980.-120 с. – Деп в ВИНТИ 30.10.80, №4628-80Деп.

39. Мусалимов В.М. Механика деформируемого кабеля. 8 Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Пермь, 23-29 авг. 2001: Аннотации докладов, Екатеринбург: Изд-во УРО РАН; Пермь: Изд-во ин-та мех. сплошных сред УРО РАН, 2001, с.443.

40. Мусалимов В.М., Пестова И.А. Упругий потенциал спирально-анизотропных тел/ Томск. инж.- строит. ин-т. – Томск, 1987.-8 с. – Деп в ВИНТИ; №1547-1387.

41. Мусалимов В.М., Соханев Б.В., Мокряк С.Я. Элементы механики кабельных конструкций - Томск: Изд-во Томского ун-та, 1981. -120 с.

42. Мусалимов В.М., Соханев Б.В. Механические испытания гибких кабелей. - Томск: Изд-во Томского ун-та, 1984.-64 с.

43. Мусалимов В.М., Мокряк С.Я., Соханев Б.В., Шиянов В.Д. Определение упругих характеристик гибких кабелей на основе модели спирально-анизотропного тела // Механика композитных материалов.-1984.-№ 1.-С. 136-141.

44. Мусалимов В.М., Смолина И.Ю., Швецов М.А. Некорректные задачи определения упругих характеристик тел с криволинейной анизотропией // II Всесоюзная конференция по теории упругости. Тезисы докладов. Тбилиси, 1984.—С. 198.

45. Мусалимов В.М., Смолина И.Ю. Вероятностный метод решения некорректной задачи определения упругих характеристик спирально-анизотропного стержня / Томск, инж.-строит, ин-т.—Томск, 1987.-10 с.-Деп. в ВИНТИ 10.11.87, № 7874-В87.

46. Мусалимов В.М., Смолина И.Ю. Оценка механических характеристик гибких кабелей на основе решения некорректной задачи определения упругих характеристик спирально- анизотропного стержня / Томск, инж.-строит, ин-т. — Томск, 1988.-11 с. - Деп. в ВИНТИ 02.06.88, № 4370-В88.

47. Назаров Ю.И. Изгибная жесткость закрытых несущих канатов // Подъемно-трансп. оборуд. - Киев. - № 10.-С. 45-48.

48. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей.-М: Мир, 1969.-309 с.

49. Озерной М.И., Соболев В.Г. Шахтные гибкие кабели. - М: Недра, 1966.-288 с.

50. Павленко А.В. Плоская задача теории упругости для пластинок с криволинейной анизотропией // Изв. АН СССР, Мех. тверд, тела. - 1979. - № 3. - С. 70-82.

51. Понкратов С.А. Динамика машин для открытых горных и земляных работ (основы теории и расчета). - М: Машиностроение, 1967.- 447 с.

52. Понкратов С.А., Ряхин В.А. Основы расчета и проектирования металлических конструкций строительных и дорожных машин. М: Машиностроение, 1967.-27 6 с.

53. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. - М: Наука, 1979.-495 с.

54. Расчеты на прочность в машиностроении / Понаморов С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К. и др. - М.: Машиностроение, 1955- 1959, т. I-II.

55. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. - Ереван: Изд-во Ереванского ун-та, 1976.-310 с.

56. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. М: Машиностроение, 1978.-340 с.

57. Смолина И.Ю. Определение характеристик упругих свойств кабеля на основе вероятностного описания исходных данных. Автореф. дис. канд. техн. наук. – Томск: Том. политехн. универс., 1998, 19 с.

58. Сычев Л.И., Реут Л.З. Шахтные гибкие кабели. - М: Недра, 1971.-182 с.

59. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. - М: Наука, 1974.-575 с.

60. Турчин В.Ф., Козлов В.П., Малкевич М.С. Использование методов математической статистики для решения некорректных задач // Успехи физ. наук. - 1970. - т. 102, № 3. - С. 345-386.

61. Федотов А.М. Линейные некорректные задачи со случайными ошибками в данных. - Новосибирск: Наука, 1982.-189 с.

62. Чернявский Ю.Е Расчет напряженно - деформированного состояния кабеля управления робототехнических систем / Укр. гос. хим,- технол. ун-т. - Днепропетровск, 1994.-9 с. — Деп. в ГНТБ Украины 08.09.94, № 1860-Ук94.

63. Шпиро Г.С., Дарков А.В. Сопротивление материалов. - М: Высшая школа, 1965.-762 с.

64. Amattamong G., Burgoyne C.J. Probabilistic strength analysis of parallellay ropes // 33rd AIAA / ASME / ASCE / AMS /ASC Struct., Struct. Dyn. and Mater. Const., Dallas, Tex., Apr. 13-15., 1992. Collect. Techn. Pap. Pts. - Washington, 1992. P. 2864-2870

65. Amattamong G., Burgoyne C.J. Analysis of the tensive strength of parallellay ropes and bundies of parallel elements be

probability theory // Int. J. Solids and Struct. - 1995. - 32, № 24. - P. 2864-2870

66. *Baker C.R.* Calculation of Shannon information // J. of Math. Anal, and Appl. - 1979. - Vol. 69, № 1. - P. 115-123.

67. *Baker C.R.* Absolute Continuity and Applications to Information Theory // Lecture Notes in Math. - Berlin: Springer Verlag, 1976. - Vol. 526. - P. 1-11.

68. *Gibiasky L.V., Torquato S.* Geometrical parameter bounds on the effective moduli of composites // J. Mech. and Phys. Solids. - 1995. - 43, № 10. - P. 1587-1613.

69. *Hearl J.W.S.* // J. Textile Inst.-1958.-Vol. 389, № 49. - P. 113-115.

70. *Hearl J.W.S.* and Konopasek M. On unified approaches to twisted yarn mechanics // Appl. Polym. Symp.-1975. - № 27. - P. 255-273.

71. *Chui S.T., Hsu W.Y., Tian D.* Effective medium calculation of the anisotropic elastic moduli of composites with oriented ellipsoidal inclusions // J. Appl. Phys. - 1995.-78, № 7. - P. 4715-4722.

72. *Theocaris P.S.* The limits of Poisson's ratio in polycrystalline bodies // J. Mater. Sci. - 1994. - Vol. 29, № 13. - P. 3527-3534.

73. *Thwaites J.J.* The elastic deformation of a rod with helical anisotropy // Int. J. Mech. - 1977. Vol. 19, № 3. - P. 161-169.

74. *Treloar L.R.G.* // J. Textile Inst. - 1962. - Vol. 446, № 53. - P. 150-158.