

Введение

Мир, окружающий нас, – это, прежде всего, мир физических величин, реально существующих в широчайшем диапазоне их значений от микромира до макромира в масштабе Вселенной. Физические величины являются характеристиками объектов материального мира и процессов, характеризующих различные взаимодействия этих объектов между собой или их изменения во времени.

Вся история человеческой цивилизации – это история становления и развития измерительной культуры, это процесс непрерывного совершенствования методов и средств измерения и систем обеспечения единства измерений на основе повышения их необходимой точности, единообразия мер, постоянного укрепления положения служб образцовых измерений как необходимого базиса не только экономики, но и государственной власти.

Оценка роли метрологии как науки об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности в научно-техническом прогрессе современного общества раскрывает широкую панораму ее возможностей и проблем.

Измерения являются одним из основных способов познания природы, ее явлений и законов. Каждому новому открытию в области естественных и технических наук предшествует большое число различных измерений. Возможности ученого исследовать, анализировать, контролировать и использовать явления природы полностью зависят от имеющихся в его распоряжении средств и методов измерений.

Измерения служат как получению научных знаний, так и получению информации в общем смысле. Если в исследовательском процессе путем измерений могут обнаруживаться совершенно новые физические и математические зависимости, то, например, измерение характеристик продукции и технологических процессов дают измерительную информацию, необходимую для управления этими процессами, качеством продукции, обеспечения надежности процессов и организации производства.

Обширная область работ в области измерений свидетельствует об их значительной роли в науке и технике, в жизни современного общества. По состоянию и возможности измерительной службы и ее метрологического обеспечения можно судить об общем уровне развития общества. Однако весь тот огромный массив измерительной информации, который мы получаем в результате измерений, будет общественно значимым и полезным только при обязательном условии обеспечения их единства и требуемой точности независимо от места, времени и условий, в которых они проведены. Обеспечение единства измерений является одной из важнейших задач метрологии.

Прогресс в развитии средств измерительной техники в последние годы был обеспечен в результате бурного развития теории измерений и разработки на ее основе новых методов измерения, широкого применения в

конструкциях средств измерений последних достижений микроэлектроники, автоматике, вычислительной техники, а также успешного решения ряда технологических задач.

Накопление новых научных знаний и опыта в области измерений величин, определения зависимостей и генерирования сигналов с заданными характеристиками приводят к тому, что современная метрология становится наукой не только об измерении величин, но и об определении зависимостей. Современная метрология, развиваясь, использует сложные эмпирические методы познания, а также различные методы других наук.

Данные методические рекомендации разработаны в рамках общепрофессиональной дисциплины ОПД.Ф.05 «Метрология, стандартизация и сертификация» учебного плана по ряду специальностей и направлений подготовки дипломированных специалистов и подготовки бакалавров и магистров и содержат обширный материал для практических занятий по вопросам прикладной метрологии, способствующий усвоению студентами умений и навыков теоретического курса «Метрология, стандартизация и сертификация».

**Решение задач по теме
«Единицы физических величин. Система Си»**

Задача 1. Автомобиль движется по городу со скоростью 60 км/ч. После выключения двигателя и торможения автомобиль останавливается через 2 с. Определить силу торможения, если масса автомобиля 1,2 т.

Решение: Сила определяется по формуле $F t = m v$, где F – сила, m – масса, t – время, v – скорость. Переводим все величины в единицы СИ:

$m=1,2 \text{ т}=1200 \text{ кг}$; $v=60 \text{ км/ч}=16,66 \text{ м/с}$. Находим значение силы торможения

$$F = \frac{1200 \cdot 16,66}{2} = 9996 \text{ Н} \approx 10 \text{ кН}.$$

Задача 2. Допускаемая угловая скорость в зубчатых передачах в прежних единицах равна 1650 об/мин. Выразить угловую скорость в единицах системы СИ.

Решение: $\omega = \frac{1650 \cdot 2\pi}{60} = 55\pi \text{ рад/с} = 173 \text{ рад/с}.$

Задача 3. Сила давления на ролик при накатывании резьбы составляет 305 кгс. Выразить силу в единицах системы СИ.

Решение: $F=305 \cdot 9,80665=2991 \text{ Н} \approx 3 \text{ кН}.$

Задача 4. Выразить кинетическую энергию маховика, составляющую 12,5 кгс·м в единицах системы СИ.

Решение: $K=12,5 \cdot 9,80665=122,6 \text{ Дж}.$

Задача 5. Работа, выполненная мотором мощностью 5 кВт за 7 ч, составляет 35 кВт·ч. Выразить работу в единицах системы СИ.

Решение: $A=35 \cdot 10^3 \cdot 3,6 \cdot 10^3=126 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 126 \text{ МДж}.$

Задача 6. Расшифруйте международные и русские обозначения относительных и логарифмических единиц: процент (%), промилле (‰), миллионная доля (ppm, млн⁻¹).

Решение: Это обозначения относительных единиц, характеризующих, например, КПД, относительное удлинение и т.п., при этом принято выражение в процентах (%), когда отношение равно 10⁻²; в промилле (‰), когда отношение равно 10⁻³; в миллионных долях (ppm) при отношении, равном 10⁻⁶.

Примеры заданий для практических занятий

Задача 1. Мощность двигателя автомобиля составляет 75 л.с. Выразите мощность в единицах системы СИ.

Задача 2. Дюймовые доски длиной 3 м и шириной 20 см отпускаются со склада по цене 500 руб. за кубометр. Сколько стоят 10 досок?

Задача 3. Скорость автомобиля на прямолинейном участке трассы составила 175 км/ч. Перевести в единицы измерения системы СИ.

Задача 4. На мировом рынке нефть продается по цене 80 американских долларов за баррель. Оценить ежеквартальный объем выручки от экспорта 150 тыс. т нефти.

Задача 5. Во многих странах Европы температура измеряется по шкале Фаренгейта. Если в Париже 68°F , а в Москве 20°C , то где теплее?

Задача 6. Определить в единицах СИ среднюю скорость (V) объекта, если за время $t = 500$ мс им пройдено расстояние $S = 10$ см.

Задача 7. Угловая скорость электродвигателя составляет 1400 оборотов в минуту. Перевести в единицы измерения системы СИ.

Задача 8. Назовите приведенные значения физических величин, используя кратные и дольные приставки: $5,3 \cdot 10^{13}$ Ом, $10,4 \cdot 10^{13}$ Гц, $2,56 \cdot 10^7$ Па.

Задача 9. По размерности и обозначениям единиц определите, какие это физические величины и единицы: 1) L^2MT^{-2} , $\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$; 2) LT^{-1} , $\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$; 3) LT^{-2} , $\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$.

Задача 10. Напишите формулы размерности, выразите через основные и дополнительные единицы СИ и приведите наименования единиц следующих электрических величин: 1) частоты; 2) энергии, работы, количества теплоты; 3) количества электричества.

Задача 11. Для образования единицы энергии используется уравнение $E = \frac{1}{2}mv^2$, где E – кинетическая энергия, m – масса материальной точки, v – скорость движения точки. Требуется образовать когерентную единицу СИ.

Задача 12. Найдено выражение для определения скорости в момент времени t : $v_t = v_0 + at^2/2$, где v_0 – скорость в начальный момент времени; a – ускорение. Определить, верна ли формула.

Решение задач по теме
«Расчет погрешностей и округление результатов измерений. Оценка величины систематической погрешности (введение поправок)»

Задача 1. При поверке концевой меры длины номинального размера 100 мм получено значение 100,0006 мм. Определить абсолютную и относительные погрешности меры.

Решение: Абсолютная погрешность меры:

$$\Delta x = x - x_D = 100,0006 \text{ мм} - 100 \text{ мм} = 0,0006 \text{ мм} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Относительная погрешность меры:

$$\delta = \frac{\Delta x}{x_D} \cdot 100 \% = \frac{6 \cdot 10^{-7} \text{ м}}{10^{-1} \text{ м}} \cdot 100 \% = 6 \cdot 10^{-4} \%.$$

Решение: $\Delta x = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$; $\delta = 6 \cdot 10^{-4} \%$.

Задача 2. Температура в масляном термостате измеряется образцовым палочным стеклянным термометром и поверяемым парогазовым термометром. Первый показал 111 °С, второй 110 °С. Определите истинное (действительное) значение температуры, погрешность поверяемого прибора, поправку к его показаниям и оцените относительную погрешность термометра.

Решение: Действительное значение – это показания образцового прибора, т.е. $Q = 111^\circ\text{С}$. Погрешность поверяемого прибора: $\Delta x = 110^\circ\text{С} - 111^\circ\text{С} = -1^\circ\text{С}$.

Поправка – это погрешность измерения, взятая с обратным знаком: $\nabla x = +1^\circ\text{С}$.

Относительная погрешность термометра:

$$\delta = \frac{\Delta x}{Q} \cdot 100 \% = \frac{|110^\circ\text{С} - 111^\circ\text{С}|}{111^\circ\text{С}} \cdot 100 \% \approx 0,9 \%.$$

Ответ: $Q = 111^\circ\text{С}$; $\Delta x = -1^\circ\text{С}$; $\nabla x = +1^\circ\text{С}$; $\delta \approx 0,9 \%$.

Задача 3. Показания вольтметра с диапазоном измерений от 0 В до 150 В равны 51,5 В. Показания образцового вольтметра, включенного параллельно с первым – 50,0 В. Определить относительную и приведенную погрешности рабочего вольтметра.

Решение: Относительная погрешность рабочего вольтметра:

$$\delta = \frac{\Delta x}{x_D} \cdot 100 \% = \frac{51,5 \text{ В} - 50,0 \text{ В}}{50,0 \text{ В}} \cdot 100 \% \approx 3 \%.$$

Приведенная погрешность рабочего вольтметра (x_N – нормирующее значение

(верхний предел измерений): $\gamma = \frac{\Delta x}{x_N} \cdot 100 \% = \frac{51,5 \text{ В} - 50,0 \text{ В}}{150 \text{ В}} \cdot 100 \% \approx 1 \%$.

Решение: $\delta \approx 3 \%$; $\gamma \approx 1 \%$.

Задача 4. Пользуясь правилами округления, запишите результаты измерений 148935 м; 575,4555 м; 575,450 м; 575,55 м; 325,6798, если первая из заменяемых цифр является пятой по счету (слева направо).

Решение: 148900 м; 575,5 м; 575,4 м; 575,6 м; 325,7 м.

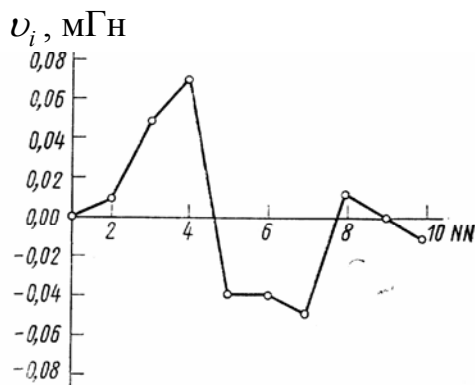
Задача 5. В таблице приведены результаты наблюдений и неисправленные отклонения результатов наблюдений, которые были получены при сравнении индуктивности катушки с индуктивностью двух образцовых катушек, равной 50 Гн. Причём первые четыре наблюдения были проведены с первой образцовой катушкой, а шесть последующих со второй образцовой катушкой.

*Результаты наблюдений x_i и
неисправленные отклонения результатов наблюдений ν_i*

1 образцовая катушка		2 образцовая катушка	
x_i , мГн	ν_i , мГн	x_i , мГн	ν_i , мГн
50,82	0,00	50,78	-0,04
50,83	+0,01	50,78	-0,04
50,87	+0,01	50,75	-0,05
50,89	+0,07	50,85	+0,01
		50,82	0,00
		50,81	-0,01

Определить присутствуют ли систематические погрешности в результатах наблюдений.

Решение: Построим график последовательности неисправленных отклонений результатов наблюдений.



При замене образцовой катушки отклонения результатов резко меняются. Скачок составляет 0,11 мГн, что намного больше максимального из остальных скачков (0,06 мГн при переходе от 7 к 8-му измерению). Следовательно, какая-то из образцовых катушек индуктивности вносила погрешность в результаты наблюдений, но не ясно, какая. График лишь обращает внимание на необходимость правильной аттестации образцовых катушек, но не дает никаких сведений о значениях систематических погрешностей.

Ответ: Систематические погрешности присутствуют в результатах наблюдений.

Примеры заданий для практических занятий

Задача 1. Определите действительное значение тока I_d в электрической цепи, если стрелка миллиамперметра отклонилась на $\alpha_0 = 37$ делений, его цена деления $C_{I_0} = 2$ мА/дел., а поправка для этой точки $\Delta = -0,3$ мА.

Задача 2. Измеряется мощность трехфазного тока двумя ваттметрами. Какова наибольшая погрешность измерения, если стрелка первого ваттметра показывает 120 делений и погрешность этого прибора не более 0,5%, а стрелка второго ваттметра показывает 40 делений и погрешность прибора 1%.

Задача 3. Определить относительную и приведенную погрешности вольтметра, если его диапазон измерений от -12 В до $+12$ В, значение поверяемой отметки шкалы равно 8 В. Действительное значение измеряемой величины 7,97 В.

Задача 4. Определите суммарное сопротивление двух последовательно соединенных образцовых катушек сопротивления при $R_1 = (10 \pm 0,05)$; $R_2 = (1 \pm 0,02)$ Ом.

Задача 5. Определите абсолютную погрешность измерения постоянного тока амперметром, если он в цепи с образцовым сопротивлением 5 Ом показал ток 5 А, а при замене прибора образцовым амперметром для получения тех же показаний пришлось уменьшить напряжение на 1 В.

Задача 6. Определить погрешность при измерении тока амперметром класса точности 1,5, если номинальный ток амперметра 30А, а показание амперметра 15А.

Задача 7. Показания вольтметра с диапазоном измерений от 0 В до 200 В равны 140 В. Образцовый вольтметр, включенный параллельно, показывает 143 В. Определите относительную и приведенную погрешности рабочего вольтметра.

Задача 8. Найденное значение тока $I_1 = 26$ А, а его действительное значение $I = 25$ А. Определить абсолютную и относительную погрешность измерения.

Задача 9. При проверке концевой меры длины размера 20 мм получено значение 20,0005 мм. Определить абсолютную и относительную погрешности.

Задача 10. Найти относительную погрешность вольтметра класса точности 1,0 с диапазоном измерений от 0 до 120 В, в точке шкалы 40 В.

Задача 11. Показание вольтметра с диапазоном измерений от 0 до 200 В равно 161,5 В. Показание образцового вольтметра, подключенного параллельно равно 160 В. Определите относительную и приведенную погрешности рабочего вольтметра.

Задача 12. Измерение напряжения в цепи производят образцовым и поверяемым вольтметрами. Первый показал напряжение 46 В, второй 47 В. Определите погрешность поверяемого прибора и поправку к его показаниям.

Задача 13. Какова относительная погрешность измерения напряжения переменного тока электромагнитным вольтметром при положении переключателя рода работы на постоянном токе, если прибор показывает 128 В при напряжении 127 В.

Задача 14. Вольтметр имеет абсолютную погрешность $\Delta = \pm 0,1 \text{ В}$, из-за влияния температуры имеется дополнительная погрешность $D = 0,06 \text{ В}$. Определите суммарную погрешность.

Задача 15. Результат измерения тока $I_x = 49,9 \text{ А}$, а его действительное значение $I = 50,0 \text{ А}$. Определить относительную погрешность измерения и поправку, которую следует ввести в результат измерения.

Задача 16. Напишите округленные до целых следующие результаты измерений: 1234,50 мм; 8765,50 кг; 43210,500 с.

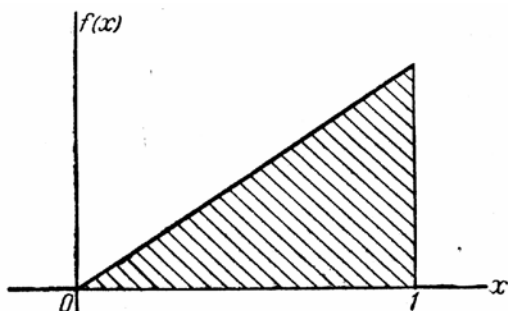
Задача 17. Пользуясь правилами округлений, запишите результат измерений 13,7645 м, 324,5 м, 2753,1 м, сохранив три значащих цифры.

Задача 18. Результат измерения сопротивления 17,1 Ом, погрешность результата $\pm 0,005 \text{ Ом}$. Запишите результат измерения сопротивления, пользуясь правилами округлений.

Задача 19. В обиходе нередко можно встретить металлические линейки до 300 мм с ценой деления 1 мм. С какой погрешностью можно осуществлять измерения такой линейкой?

Решение задач по теме
«Формирование дифференциального закона распределения.
Гистограмма. Моменты распределений случайных погрешностей.
Точечные оценки результатов измерений»

Задача 1. Случайная величина x подчинена закону распределения, плотность которого задана графически на рис. Записать выражение для плотности распределения $f(x)$, найти математическое ожидание m_x , дисперсию D_x , среднее квадратическое отклонение σ случайной величины x .



Решение: Выражение плотности распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{при } 0 < x < t, \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } x > t. \end{cases}$$

Пользуясь свойством плотности распределения

$$\int_0^t f(x) dx = 1; \quad \int_0^t ax dx = a \frac{x^2}{2} \Big|_0^t = \frac{a}{2} t^2 = 1, \text{ находим } a = \frac{2}{t^2}.$$

Математическое ожидание величины x :

$$m_x = \int_0^t 2x^2 dx = \frac{2x^3}{3} \Big|_0^t = \frac{2}{3} t.$$

Дисперсию найдем через второй центральный момент:

$$\begin{aligned} D_x &= \int_0^t \left(x - \frac{2}{3}t\right)^2 \cdot 2x dx = 2 \int_0^t \left(x^2 - \frac{4x}{3}t + \frac{4}{9}t^2\right) \cdot x dx = 2 \int_0^t \left(x^3 - \frac{4}{3}tx^2 + \frac{4}{9}t^2x\right) dx = \\ &= 2 \left(\frac{x^4}{4} \Big|_0^t - \frac{4}{3} \frac{tx^3}{3} \Big|_0^t + \frac{4}{9} \frac{t^2x^2}{2} \Big|_0^t \right) = \frac{1}{18} t^2, \end{aligned}$$

отсюда

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{1}{3\sqrt{2}} t.$$

Ответ: $m_x = \frac{2}{3} t; \quad D_x = \frac{1}{18} t^2; \quad \sigma_x = \frac{1}{3\sqrt{2}} t.$

Задача 2. Найти вероятность того, что случайная величина x с центром распределения $m_x = 2,0$ и $\sigma = 1,5$ находится в пределах $-1 \leq x \leq 5$.

Решение: Найдем значение нормированной случайной величины $t = \frac{x - m_x}{\sigma}$:

$$t_1 = \frac{x_1 - m_x}{\sigma} = \frac{-1 - 2}{1,5} = -2,0;$$

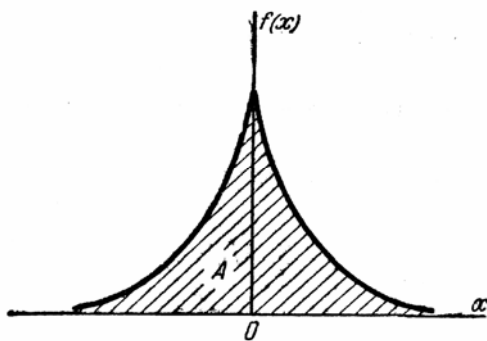
$$t_2 = \frac{x_2 - m_x}{\sigma} = \frac{5 - 2}{1,5} = 2,0.$$

Откуда $P[-1 \leq x \leq 5] = P[-2 < t < 2] = 2\Phi(2)$.

Воспользовавшись таблицей Лапласа (Приложение 1), находим $\Phi(2) = 0,477$, тогда $P[-1 \leq x \leq 5] = 0,954 = 95,4\%$.

Ответ: $P = 95,4\%$

Задача 3. Непрерывная случайная величина x (рис.) подчинена закону



распределения с плотностью: $f(x) = A e^{-|x|}$. Найти коэффициент A , математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Ответ:

$$A = \frac{1}{2}; \quad m_x = 0; \quad D_x = 2; \quad \sigma_x = \sqrt{2}.$$

Задача 4. По результатам пяти наблюдений была найдена длина стержня. Итог измерений составляет $L = (15,785 \pm 0,005)$ мм, $S_{\bar{x}} = 0,005$ мм, причем существует достаточно обоснованные предположения о том, что распределение результатов наблюдений было нормальным. Требуется оценить вероятность того, что истинное значение длины стержня отличается от среднего арифметического из пяти наблюдений не больше чем на 0,01 мм.

Решение: Из условия задачи следует, что имеются все основания для применения распределения Стьюдента.

$$\text{Вычисляем значение дроби Стьюдента: } t_p = \frac{\bar{X} - Q}{S_{\bar{x}}} = \frac{0,010}{S_{\bar{x}}} = \frac{0,010}{0,005} = 2,$$

и число степеней свободы: $k = n - 1 = 5 - 1 = 4$.

По данным распределения Стьюдента находим значение доверительной вероятности для $t_p = 2$ и $k = 4$:

$$P\{|\bar{X} - Q| < t_p S_{\bar{x}}\} = P\{|\bar{X} - Q| < 2 S_{\bar{x}}\} = P\{|\bar{X} - Q| < 0,010\} = 88,38\%.$$

Для $t_q = 3$ эта вероятность составляет

$$P\{|\bar{X} - Q| < 3 S_{\bar{x}}\} = P\{|\bar{X} - Q| < 0,015\} = 96\%,$$

т.е. несколько меньше 99,73%, как и при нормальном распределении.

Итог измерений удобно записать в виде

$$Q = \bar{X} \pm t S_{\bar{x}}; \quad L_{\text{ист}} = 15,785 \pm 0,010 \text{ мм}; \quad P = 88,38\%.$$

Для $t_p = 1$ доверительная вероятность составляет приблизительно 62 %, поэтому итог измерений можно представить также в виде
 $L_{уст} = 15,785 \pm 0,005$ мм; $P=62$ % или
 $L_{уст} = 15,785 \pm 0,015$ мм; $P=96$ % .
Ответ: $P=88,38$ %.

Задача 5. В условиях предыдущей задачи найти доверительную границу погрешности результата измерений для доверительной вероятности $P=99,0$ %.

Решение: По данным значений коэффициента Стьюдента при $k = 4$ находим $t_p = 4,604$, и, следовательно, доверительная граница составляет:

$$\varepsilon_{99,0\%} = \pm t_{99,0\%} S_{\bar{x}} = \pm 4,604 \cdot 0,005 = \pm 0,023 \text{ мм.}$$

Итог измерений $L_{уст} = 15,785 \pm 0,023$ мм; $P=99,0$ % .

Ответ: $\varepsilon = \pm 0,023$ мм.

Примеры заданий для практических занятий

Задача 1. В результате пяти измерений физической величины x одним прибором, не имеющим систематической погрешности, получены следующие результаты: 92; 94; 103; 105; 106. Определите:

- 1) выборочное среднее M^*_x измеряемой величины;
- 2) выборочную D^*_x и исправленное S^2 дисперсии погрешностей прибора.

Задача 2. Случайная величина x – погрешность измерительного прибора распределена по нормальному закону с дисперсией 16 мВ^2 . Систематическая погрешность прибора отсутствует. Вычислите вероятность того, что в пяти независимых измерениях погрешность x :

- 1) превзойдет по модулю 6 мВ не более трех раз;
- 2) хотя бы один раз окажется в интервале $0,5 \text{ мВ} - 3,5 \text{ мВ}$.

Задача 3. Обработка наблюдений, полученных при калибровке образцовой многогранной призмы, дала следующие результаты для отклонения одного из углов (α) призмы от номинального значения: $\bar{x} = 1,98''$; $\bar{S}_x = 0,05''$; $\Theta = 0,03''$; $n = 20$. Представьте запись результата измерения.

Задача 4. Проведены три группы измерений сопротивления одной и той же образцовой катушки и получены следующие результаты, Ом: $\bar{x}_1 = 100,145 \pm 0,005$; $\bar{x}_2 = 100,115 \pm 0,20$; $\bar{x}_3 = 100,165 \pm 0,010$. Путем дальнейшей обработки результатов найдите погрешность среднего взвешенного.

Задача 5. Показания счётчика Гейгера, регистрирующего количество пролетевших сквозь него за 1 секунду элементарных частиц, подчиняются распределению $\varphi(N) \approx 0,00127 e^{-\frac{(N-1000)^2}{5000}}$. Найдите математическое ожидание показаний счётчика.

Задача 6. Произведя 10 измерений длины l_i металлического стержня, получили следующие результаты, см: 30,45; 30,52; 30,43; 30,49; 30,48; 30,50; 30,46; 30,51; 30,47; 30,49. Проведите обработку результатов измерений и приведите значение длины стержня, наиболее приближенное к истинному.

Задача 7. Найдите математическое ожидание и дисперсию для случайной величины, распределенной по биномиальному закону, если $n = 100$, $p = 0,8$.

Задача 8. Ошибка измерителя дальности подчинена нормальному закону с систематической ошибкой $\mu = 20 \text{ м}$ и $\sigma = 60 \text{ м}$. Найти вероятность того, что измеренное значение дальности будет отклоняться от истинного не более, чем на 30 м.

Задача 9. Монета подбрасывается $n = 1000$ раз. Пусть X – число выпавших гербов – случайная величина. Определить интервал возможных значений X , симметричный относительно математического ожидания, внутри которого X находится с вероятностью $P = 0,997$.

Задача 10. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[-3;7]$. Найдите математическое ожидание и дисперсию.

Задача 11. Найти математическое ожидание $M[e^X]$ и дисперсию $D[e^X]$, если X имеет нормальное распределение с параметрами (a, σ^2) .

Задача 12. На сборку попадают детали из трех автоматов. Известно, что первый автомат дает брака 0,3%, второй – 0,2% и третий – 0,4%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если из первого автомата поступило 1000 деталей, из второго – 2000, из третьего – 2500.

Задача 13. Случайная величина X имеет нормальное распределение с $m_x = 0$ и $\sigma_x^2 = 1$. Найти $M[\cos X]$ и $D[\cos X]$.

Задача 14. По результатам 2-х выборок объемами $n_1 = 25$ и $n_2 = 30$ были вычислены оценки дисперсий $S_1^2 = 63,68$ и $S_2^2 = 32,60$. Для уровня значимости $\alpha = 0,05$ (доверительная вероятность 95%) решить, одинаковы ли дисперсии, соответствующие выборкам?

Задача 15. Среднее квадратическое отклонение радиовысотомера $\delta = 15$ м. Сколько потребуется таких высотомеров, чтобы с надежностью 0,99 погрешность средней высоты M^*_x была не больше 30 м, если погрешности радиовысотомеров имеют нормальное распределение, а систематические погрешности отсутствуют?

Решение задач по теме
«Интервальные оценки результатов измерений.
Доверительные границы погрешности.
Исключение грубых погрешностей»

Задача 1. Даны результаты двадцати измерений длины l_i , мм, детали:
18,305; 18,306; 18,306; 18,309; 18,308; 18,309; 18,313; 18,308; 18,312 18,310;
18,305; 18,307; 18,309, 18,303; 18,307; 18,309; 18,304, 18,308; 18,308; 18,310.
Определить границы доверительного интервала для среднего квадратического отклонения СКО результатов наблюдений.

Решение: В качестве оценки математического ожидания длины детали принимаем ее среднее арифметическое $\bar{L} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} l_i = 10,3078$ мм.

Точечная оценка среднего квадратического отклонения результатов наблюдений составляет $S_l = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{20} (l_i - \bar{L})^2} = 0,0025$ мм.

Приняв уровень доверительной вероятности $P = 1 - q = 90\% = 0,90$, находим для числа степеней свободы $k = n - 1 = 20 - 1 = 19$ по таблице распределения Пирсона:

$$\chi_{k; \frac{1}{2}q}^2 = \chi_{19; 0,05}^2 = 10,117; \quad \chi_{19; 0,05} = 3,18;$$

$$\chi_{k; 1 - \frac{1}{2}q}^2 = \chi_{19; 0,95}^2 = 30,144; \quad \chi_{19; 0,95} = 5,49.$$

Границы доверительного интервала для среднего квадратического отклонения результатов наблюдений находим по формуле (5.5):

$$S_{l_1} = \frac{\sqrt{20-1} \cdot 0,0025}{3,18} = 0,0034 \text{ мм};$$

$$S_{l_2} = \frac{\sqrt{20-1} \cdot 0,0025}{5,49} = 0,0020 \text{ мм}.$$

Полученные результаты говорят о том, что истинное значение среднего квадратического отклонения СКО результатов наблюдений с вероятностью 90 % лежит в интервале (0,0020 – 0,0034) мм.

Ответ: $S_{l_1} = 0,0034$ мм ; $S_{l_2} = 0,0020$ мм.

Задача 2. После обработки результатов 25-ти наблюдений получена точечная оценка СКО результатов наблюдений $S_x = 0,0025$ мм. Приняв уровень доверительной вероятности $P = 1 - q = 90\%$, найти границы доверительного интервала для СКО.

Решение: По таблице распределения Пирсона найдем границы доверительного интервала для $k = n - 1 = 24$; $q = 0,10$:

$$\chi_{k; \frac{1}{2}q}^2 = \chi_{24; 0,05}^2 = 13,848; \quad \chi_{24; 0,05} \approx 3,72;$$

$$\chi_{k; 1-\frac{1}{2}q}^2 = \chi_{24; 0,95}^2 = 36,415; \quad \chi_{24; 0,95} \approx 6,03.$$

По формуле (5.5) найдем границы доверительного интервала для СКО результатов наблюдений:

$$S_{x_1} = \frac{\sqrt{25-1} \cdot \sqrt{6,25 \cdot 10^{-6}}}{3,72} \approx 0,0033 \text{ мм};$$

$$S_{x_2} = \frac{\sqrt{25-1} \cdot \sqrt{6,25 \cdot 10^{-6}}}{6,03} \approx 0,0020 \text{ мм}.$$

Полученные результаты говорят о том, что истинное значение СКО с вероятностью 90 % лежит в интервале (0,0020 – 0,0033) мм.

Ответ: $S_{x_1} \approx 0,0033$ мм ; $S_{x_2} \approx 0,0020$ мм.

Задача 3. При определении напряжения были получены следующие результаты: 180 В; 182 В; 183 В; 184 В; 196 В. Оценить пригодность последнего результата при заданной вероятности 0,95.

Решение: Число измерений $n=5$, следовательно для выявления грубых погрешностей можно применить критерий Романовского. Рассчитаем

отношение $\left| \frac{x_i - \bar{X}}{S_x} \right| = v$ и сравним его с критерием v_p , найденным по таблице (см. Приложение 3).

Результаты измерений и расчетов

x_i	180	182	183	184	196
$x_i - \bar{X}$	-5	-3	-2	-1	+11
$(x_i - \bar{X})^2$	25	9	4	1	121

Находим среднее арифметическое и среднее квадратическое отклонение результатов наблюдений:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i) = 185 \text{ В}; \quad S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{160}{4}} \approx 6,32.$$

Рассчитаем критерий v : $v = \left| \frac{185 - 196}{6,32} \right| = 1,74$.

При уровне значимости $q=0,05$ критерий Романовского для $n=5$ по таблице (Приложение 3) будет равен: $v_p = 1,869$.

Тогда $\nu = 1,74 < \nu_p = 1,869$, следовательно последний результат не содержит грубую погрешность.

Ответ: Последний результат при заданной вероятности пригоден.

Задача 4. При измерении температуры были получены результаты, представленные во второй графе таблицы.

Результаты измерений и расчетов

i	$t_i, ^\circ C$	$(t_i - \bar{t}), ^\circ C$	$(t_i - \bar{t})^2 \cdot 10^4$	$(t_i - \bar{t})', ^\circ C$	$((t_i - \bar{t})')^2 \cdot 10^4$
1	20,42	+0,016	2,56	-0,009	0,81
2	20,43	+0,026	2,75	-0,019	3,61
3	20,40	-0,004	0,16	-0,011	1,21
4	20,43	+0,026	6,76	+0,019	3,61
5	20,42	+0,016	2,56	+0,009	0,81
6	20,43	+0,026	6,76	+0,019	3,61
7	20,39	-0,014	1,96	-0,021	4,41
8	20,30	-0,104	108,16	—	—
9	20,40	-0,004	0,16	-0,011	1,21
10	20,43	+0,026	6,76	+0,019	3,61
11	20,42	+0,016	2,56	+0,009	0,81
12	20,41	+0,006	0,36	-0,001	0,01
13	20,39	-0,014	1,96	-0,021	4,41
14	20,39	-0,014	1,96	-0,021	4,41
15	20,40	-0,004	0,16	-0,011	1,21
$\bar{t} = 20,404^\circ C$			$S_t = 0,033^\circ C$		$S_t' = 0,016^\circ C$
$\bar{t}' = 20,411^\circ C$					

Требуется определить, не содержит ли результат восьмого наблюдения $t_8 = 20,30^\circ C$ грубой погрешности.

Решение: Вначале обычными способами находим среднее арифметическое и среднее квадратическое отклонение результатов наблюдений: $\bar{t} = 20,404^\circ C$; $S_t = 0,033^\circ C$.

Если принять доверительную вероятность $P = 0,95$, то при $n = 15$, $\nu_{0,95} = 2,493$ и, поскольку

$$\nu = \left| \frac{t_{\min} - \bar{t}}{S_t} \right| = \left| \frac{t_8 - \bar{t}}{S_t} \right| = \left| \frac{20,30 - 20,404}{0,033} \right| = 3,16; \quad \nu > \nu_{0,95}, \quad \text{то} \quad \text{результат}$$

$t_8 = 20,30^\circ C$ содержит грубую погрешность.

Если отбросить этот результат и повторить вычисления, то среднее арифметическое окажется равным $\bar{t}' = 20,411^\circ C$, а среднее квадратическое отклонение уменьшится до $S'_t = 0,016^\circ C$. Расчет приведен в последних двух графах таблицы.

Ответ: Результат восьмого наблюдения содержит грубую погрешность.

Задача 5. По десяти наблюдениям было вычислено значение массы эталона килограмма. Результаты вычисления следующие:

$\bar{X} = 999,998721 \text{ г}$, $\sigma = 17 \cdot 10^{-6} \text{ г}$, $S_{\bar{x}} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ г}$. Найти границы доверительного интервала, если уровень значимости в процентах $q = 1\%$.

Решение: Доверительная вероятность $P = 1 - \frac{q}{100\%} = 1 - 0,01 = 0,99$.

Число степеней свободы $k = n - 1 = 10 - 1 = 9$.

Из таблицы значений коэффициента Стьюдента для указанных k и P находим $t_p = 3,25$.

Следовательно, $\varepsilon = t_p S_{\bar{x}} = 3,25 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 16 \cdot 10^{-6} \text{ г}$.

Истинное значение измеряемой величины с доверительной вероятностью $P=0,99$ лежит в интервале $\bar{X} - t_p S_{\bar{x}} < Q < \bar{X} + t_p S_{\bar{x}}$;

$999,998705 \text{ г} < Q < 999,998737 \text{ г}$.

Ответ: Границы доверительного интервала: $\varepsilon = \pm 16 \cdot 10^{-6} \text{ г}$.

Примеры заданий для практических занятий

Задача 1. Произведена выборка объемом $n=100$ из большой партии радиоламп. Средний срок службы радиоламп оказался равным 5000 ч. Найдите с надежностью 0,95 доверительный интервал для среднего срока службы радиолампы во всей партии, если среднее квадратическое отклонение срока службы составляет 40 ч.

Задача 2. Произведено 10 независимых измерений случайной величины x , подчиненной нормальному закону с неизвестными параметрами M_x и δ_x .

Результаты измерений

Номер измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Результат измерения	2,5	2	-2,3	1,9	-2,1	2,4	2,3	-2,5	1,5	-1,7

Найдите оценку M_x^* для математического ожидания и постройте доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности $\beta = 0.95$.

Задача 3. Произведено 12 измерений напряжения радиосигнала одним и тем же прибором, не имеющим систематической погрешности, причем выборочное среднее квадратическое отклонение S случайных погрешностей оказалось равным 0.6 В. Найдите границы погрешности этого прибора с вероятностью 0,99.

Задача 4. Определить границы доверительного интервала, если задана соответствующая ему доверительная вероятность $P = 0,99$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 0,015$.

Задача 5. При изготовлении измерительного прибора, исходя из конкретных условий производства, было признано удовлетворительным иметь значение доверительной вероятности того, что метрологические характеристики прибора не выйдут за пределы допуска, равным 0,995. На сколько выпущенных приборов приходится один забракованный?

Задача 6. Искомое сопротивление было измерено 8 раз, при этом получены результаты: $R_1 = 116,2$ Ом, $R_2 = 118,2$ Ом, $R_3 = 118,5$ Ом, $R_4 = 117,0$ Ом, $R_5 = 118,2$ Ом, $R_6 = 118,4$ Ом, $R_7 = 117,8$ Ом, $R_8 = 118,1$ Ом. Определите интервал, в котором находится значение измеряемого сопротивления, с доверительной вероятностью $P = 0,99$.

Задача 7. Найти вероятность того, что случайная величина x с центром распределения $m_x=6,0$ и $\sigma=1,6$ не находится в пределах $3,2 \leq x \leq 8$. Ответ выразите в процентах.

Задача 8. Среднее квадратическое отклонение $\sigma=0,004$. Определить вероятность того, что случайная погрешность выйдет за пределы доверительного интервала с границами $\pm 0,012$. Ответ выразить в процентах.

Задача 9. Фабрика выпускает 75% продукции первого сорта. Чему равна вероятность того, что из 300 изделий число первосортных заключено между 219 и 234?

Задача 10. При определении твёрдости образца получены следующие результаты: 23,6; 23,9; 24,0; 24,2; 24,3; 24,3; 23,8; 24,3; 23,8; 23,7 НРС. Определить доверительный интервал, в котором с доверительной вероятностью $P_c=0,95$ истинное значение твёрдости образца.

Задача 11. Сколько измерений надо сделать, чтобы их среднее арифметическое дало измеряемую величину с точностью до 0,05 и надёжностью 90%, если дисперсия результатов измерений не превосходит 0,2?

Задача 12. Оцените годность пружинного манометра класса точности 1,0 на 60 кПа, если при его поверке методом сличения с образцовым манометром класса точности 0,2 в точке 50 кПа при повышении давления было зафиксировано 49,5 кПа, а при понижении 50,2 кПа.

Задача 13. При измерении напряжения в сети получены следующие результаты: 126,1 В; 126,2 В; 125,9 В; 126,7 В. Определить, есть ли среди них результат, содержащий грубую погрешность?

Задача 14. После проведения 5-ти кратных измерений физической величины были получены следующие результаты: 203; 205; 205; 209; 204. Оценить пригодность четвертого результата.

Задача 15. В момент времени t_i измеряется дальность R_i до ИСЗ. Результаты измерения: $Q_n = \{t_1=1, R_1=1200; t_2=3, R_2=1191; t_3=5, R_3=1279\}$. Найти вероятность p того, что скорость ИСЗ лежит в интервале (18.36; 21.14), если дисперсия ошибки измерения $\sigma^2 = 4$.

Задача 16. Вероятность p появления события в опыте неизвестна. Проведено $n=100$ опытов, в которых событие появилось 64 раза. Определить доверительный интервал для p с доверительной вероятностью 0,9.

**Решение задач по теме
«Методы и методики измерений. Расчёт надёжности приборов»**

Задача 1. Определить пригодность к дальнейшему применению рабочего вольтметра класса точности 1,0 с диапазоном измерений от 0 В до 300 В, если при непосредственном сравнении его показаний с показаниями образцового вольтметра были получены следующие данные:

Рабочий вольтметр, В	60	120	180	240	300
Образцовый вольтметр, В	60,5	119,7	183,5	238,7	298,8

Решение: По условию приведенная погрешность $\gamma = 1\%$.

$$\Delta_{\max} = 183,5 - 180 = 3,5 \text{ В}$$

$$\gamma = \frac{\Delta \cdot 100\%}{x_N} = \frac{3,5 \text{ В} \cdot 100\%}{300 \text{ В}} = 1,17\%.$$

Ответ: Рабочий вольтметр не пригоден.

Задача 2. Вольтметр типа Д566/107, класса точности 0,2, имеет диапазон измерений от 0 В до 50 В. Определить допускаемую абсолютную и относительную погрешности, если стрелка вольтметра остановилась на делении шкалы против цифры 20 В.

Решение: По условию приведенная погрешность $\gamma = 0,2\%$.

$$\gamma = \frac{\Delta \cdot 100\%}{x_N} \Rightarrow \Delta = \frac{\gamma \cdot x_N}{100\%} = \frac{0,2\% \cdot 50 \text{ В}}{100\%} = 0,1 \text{ В},$$

$$\delta = \frac{\Delta \cdot 100\%}{x} = \frac{0,1 \text{ В} \cdot 100\%}{20 \text{ В}} = 0,5\%.$$

Ответ: 0,1 В; 0,5 %.

Задача 3. Класс точности приборов Б и В одинаков, а верхний предел измерения прибора Б больше. В каком соотношении будут находиться максимальные значения абсолютных погрешностей измерений: $\Delta_{\max Б}$ и $\Delta_{\max В}$? Класс точности характеризовать приведенной погрешностью.

Решение: $\Delta = \frac{\gamma \cdot x_N}{100\%}$. Так как по условию задачи

$$x_{NB} > x_{NB} \Rightarrow \Delta_{\max Б} > \Delta_{\max В}.$$

Ответ: $\Delta_{\max Б} > \Delta_{\max В}$.

Задача 4. Для измерения напряжения от 80 В до 120 В с относительной погрешностью, не превышающей 4 %, был заказан вольтметр, имеющий класс точности 0,5 и верхний предел измерений 150 В. Удовлетворяет ли поставленным условиям?

$$\text{Решение: } \delta = \frac{\Delta \cdot 100\%}{x}; \gamma = \frac{\Delta \cdot 100\%}{x_N} \Rightarrow \Delta = \frac{\gamma \cdot x_N}{100\%};$$

$$\delta = \frac{\gamma \cdot x_N \cdot 100\%}{x \cdot 100\%} = \frac{0,5\% \cdot 150 \text{ В}}{80 \text{ В}} = 0,94\% < 4\%.$$

Ответ: Предложенный вольтметр удовлетворяет поставленным условиям.

Задача 5. Определить пригодность к дальнейшему применению рабочего вольтметра класса точности 1,5 с диапазоном измерений от 0 В до 250 В, если при непосредственном сличении его показания с показаниями образцового вольтметра были получены следующие результаты:

Рабочий вольтметр, В	50	100	150	200	250
Образцовый вольтметр, В	49,8	101,8	152,9	203,2	249,1

При этом известно, что образцовый вольтметр имеет систематическую погрешность 0,6 В на всем диапазоне измерений.

Ответ: пригоден.

Задача 6. При поверке дистанционного парогазового термометра класса точности 2,5 с пределом измерений 100°C были получены следующие показания образцовых ртутных термометров в оцифрованных точках поверяемого.

Поверяемые точки, °С	20	40	60	80	100
При повышении t , °С	21	40	59	76	98
При понижении t , °С	22	41	60	77	98

Оцените годность прибора; в случае брака укажите точку, из-за которой принято данное решение.

Ответ: прибор не годен из-за точки 80° С.

Примеры заданий для практических занятий

Задача 1. По данным ремонтной мастерской в среднем 50 % отказов осциллографов обусловлено выходом из строя транзисторов, 15% – конденсаторов, 12% – резисторов, 5% – электронно-лучевых трубок, а остальные отказы обусловлены другими причинами. Найти вероятность $P^*(A)$ отказа осциллографа по другим причинам.

Задача 2. Два из трех независимо работающих элементов измерительного прибора отказали. Вычислите вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,2; 0,4; 0,3.

Задача 3. В лаборатории три рабочих места по поверке приборов. Вероятность того, что работы ведутся на каждом из них в данный момент времени, равна 0,6. Найдите вероятность того, что в данный момент задействовано хотя бы одно рабочее место.

Задача 4. Вероятность ухода частоты принимаемых колебаний за пределы полосы пропускания приемника из-за нестабильности частоты колебаний передатчика равна 0,1, а из-за нестабильности частоты колебаний гетеродина приемника 0,2. Определите вероятность того, что частота принимаемых колебаний не выйдет за пределы полосы пропускания приемника.

Задача 5. Определите математическое ожидание M_x и дисперсию σ_x^2 числа приборов x , имевших отказы за время испытаний на надежность, если испытанию подвергается один прибор, а вероятность его отказа равна q .

Задача 6. Определить вероятность отказа за 1000 часов измерительного преобразователя, состоящего из двух резисторов с интенсивностью отказов $\lambda_p = 2,5 \cdot 10^{-6}$ и конденсатора с интенсивностью отказов $\lambda_k = 0,5 \cdot 10^{-5}$.

Задача 7. Определить пригодность к дальнейшему применению рабочего вольтметра класса точности 1,0 с диапазоном измерений от 0 до 300 В, если при непосредственном сличении его показаний с показаниями образцового вольтметра были получены следующие данные:

Рабочий, В	60	120	180	240	300
Образцовый, В	60,5	119,7	183,5	238,7	298,8

Задача 8. Измерительное устройство состоит из двух приборов. Вероятность безотказной работы k -го прибора за рассматриваемый период времени равна $1 - \alpha_k$ ($k = 1, 2$). Оценить вероятность того, что измерительное устройство будет работать безотказно, если поломка приборов происходит независимо и отказ хотя бы одного из них влечет неисправность устройства.

Задача 9. Вероятность того, что лампочка перегорит ровно через t дней, подчиняется закону $p_0(t) = 0,02 e^{-0,02t}$. Найти вероятность того, что 100 дней лампочка будет работать безотказно.

Задача 10. Определить вероятность безотказной работы $P(t)$ за 1000 часов для измерительного преобразователя, состоящего из элементов с интенсивностями отказов: $\lambda_1 = 4 \cdot 10^{-8}$, $\lambda_2 = 6,6 \cdot 10^{-8}$, $\lambda_3 = 2 \cdot 10^{-7}$, $\lambda_4 = 9,2 \cdot 10^{-9}$.

Задача 11. Определить пригодность амперметра с диапазоном измерения от 0 А до 150 А и классом точности 1,5. При непосредственном сличении его показаний с показаниями образцового амперметра были получены следующие результаты:

Рабочий, А	20	40	60	80	100	125	150
Образцовый, А	19,8	41,5	58,2	81,2	99,7	122,8	148,6

Образцовый вольтметр имеет систематическую погрешность 0,1 А.

Задача 12. Станок с числовым программным управлением выдает за смену $n = 1000$ изделий, из которых в среднем 2% дефектных. Найти приближенно вероятность того, что за смену будет изготовлено не менее 970 недефектных изделий.

Задача 13. При поверке вольтметра класса точности 2,5 с пределом измерений 100В были получены следующие показания образцового и поверяемого вольтметров:

Поверяемый, В	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Образцовый, В	11	20	30,5	41	52	61	67	78	89	101

Оцените годность прибора. В случае брака укажите точку, из-за которой принято данное решение.

Задача 14. Произведены три независимых измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что при одном измерении погрешность превысит заданную точность, равна 0,4. Определите вероятность того, что только в одном из измерений погрешность превысит заданную точность.

Задача 15. Имеем результаты измерений $(0,47 \pm 0,05)$ мм; $(647,4 \pm 0,6)$ мм; (5580 ± 5) г; $(2689,44 \pm 0,27)$ г. Можно ли сравнить эти измерения по точности?

**Решение задач по теме
«Классы точности средств измерений»**

Задача 1. Отсчет по шкале прибора с равномерной шкалой и с пределами измерений от 0 В до 50 В равен 25 В. Оценить пределы допускаемой абсолютной погрешности этого отсчёта для приборов следующих классов точности: а) 0,02/0,01; б) 0,5; в) 0,5

Решение:

$$\text{а) } \delta = \frac{\Delta \cdot 100\%}{x} \Rightarrow \Delta = \frac{\delta \cdot x}{100\%}; \quad \delta = [c + d(|x_k/x| - 1)].$$

Так как $x = 25$; $x_k = 50 \text{ В}$; $c = 0,02$; $d = 0,01$ получаем:

$$\Delta = \frac{\delta \cdot x}{100\%} = \frac{[0,02 + 0,01(|50 \text{ В}/25 \text{ В}| - 1)]\% \cdot 25 \text{ В}}{100\%} \approx 0,008 \text{ В};$$

$$\text{б) } \gamma = \frac{\Delta \cdot 100\%}{x_N} \Rightarrow \Delta = \frac{\gamma \cdot x_N}{100\%} = \frac{0,5\% \cdot 50 \text{ В}}{100\%} = 0,25 \text{ В};$$

$$\text{в) } \delta = \frac{\Delta \cdot 100\%}{x} \Rightarrow \Delta = \frac{\delta \cdot x}{100\%} = \frac{0,5\% \cdot 25 \text{ В}}{100\%} = 0,13 \text{ В}.$$

Ответ: а) $\Delta = 0,008 \text{ В}$; б) $\Delta = 0,25 \text{ В}$; в) $\Delta = 0,13 \text{ В}$.

Задача 2. По приведенной погрешности определить класс точности миллиамперметра, который необходим для измерения тока от 0,1 мА до 0,5 мА (относительная погрешность измерения не должна превышать 1%).

$$\text{Решение: } \delta = \frac{\Delta \cdot 100\%}{x} \Rightarrow \Delta = \frac{\delta \cdot x}{100\%} = \frac{1\% \cdot 0,1 \text{ мА}}{100\%} = 0,001 \text{ мА} \quad (\text{измеренное}$$

значение тока – x , берем в начале шкалы, так как в начале шкалы относительная погрешность измерения больше).

$$\gamma = \frac{\Delta \cdot 100\%}{x_N} = \frac{0,001 \text{ мА} \cdot 100\%}{0,5 \text{ мА}} = 0,2\%.$$

Ответ: класс точности миллиамперметра 0,2.

Задача 3. Манометр типа МТ-1 с диапазоном измерения от 0 кгс/см² до 160 кгс/см², класс точности 1,5, используется для контроля постоянного давления 120 кгс/см². Определить абсолютную и относительную погрешности манометра.

$$\text{Решение: } 1 \text{ кгс} = 9,8 \text{ Н}; \quad 160 \text{ кгс/см}^2 = \frac{160 \cdot 9,8}{10^{-4}} \text{ Н/м}^2 = 157 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2;$$

$$120 \text{ кгс/см}^2 = \frac{120 \cdot 9,8}{10^{-4}} \text{ Н/м}^2 = 118 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

$$\gamma = \frac{\Delta \cdot 100\%}{x_N} \Rightarrow \Delta = \frac{\gamma \cdot x_N}{100\%} = \frac{1,5\% \cdot (157 \cdot 10^5) \text{ Н/м}^2}{100\%} = 2,4 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2;$$

$$\delta = \frac{\Delta \cdot 100\%}{x} = \frac{2,4 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2 \cdot 100\%}{118 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2} = 2\%.$$

Ответ: $2,4 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$; 2 %.

Задача 4. В цепь с током 15 А включены три амперметра со следующими параметрами: класса точности 1,0 со шкалой на 50 А; класса точности 1,5 на 30 А и класса точности 2,5 на 20 А. Определить, какой из амперметров обеспечит большую точности измерения тока в цепи.

Ответ: второй.

Задача 5. При поверке амперметра с пределом измерений 5 А в точках шкалы: 1; 2; 3; 4; и 5 А получены следующие показания образцового прибора: 0,95; 2,06; 3,05; 4,07; и 4,95 А. Определить абсолютные, относительные и приведенные погрешности в каждой точке шкалы и класс точности амперметра.

Ответ: класс точности амперметра 1,4.

Задача 6. Микроамперметр на 100 мкА имеет шкалу в 200 делений. Определите возможную погрешность в делениях шкалы, если на шкале прибора имеется обозначение класса точности 1,0.

Ответ: 2 деления.

Задача 7. При контроле метрологических параметров деформационных (пружинных) манометров со шкалой на 300 делений смещение стрелки от постукивания по корпусу прибора должно оцениваться с погрешностью, не превышающей 0,1 цены деления шкалы. Сопоставьте эту погрешность отсчета с допустимой погрешностью для манометра класса 0,15.

Ответ: абсолютная погрешность смещения меньше абсолютной допустимой погрешности манометра в 4,5 раза.

Задача 8. Для измерения напряжения от 50 В до 130 В с относительной погрешностью, не превышающей 5 %, был заказан вольтметр с верхним пределом измерения 150 В и классом точности 1,0. Удовлетворяет ли он поставленным условиям?

Ответ: заказанный вольтметр удовлетворяет поставленным условиям.

Задача 9. Определите по приведенной погрешности класс точности измерительного прибора при условии, что относительная погрешность измерения в середине шкалы не должна превышать 1 %.

Ответ: 0,5 %.

Задача 10. Класс точности весов 0,2, определите допускаемую относительную погрешности этих весов в начале (1 деление) и в середине шкалы, если весы рассчитаны на 100 делений.

Ответ: 20 %; 0,4 %.

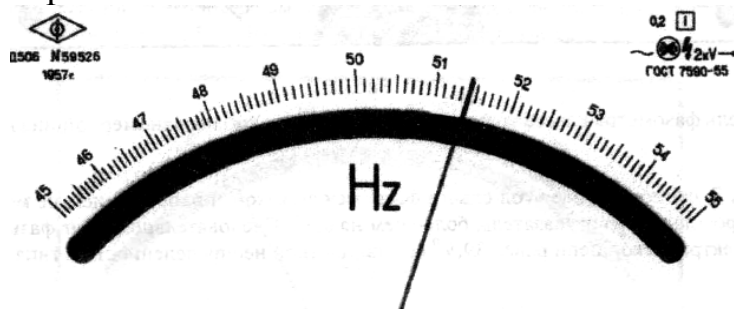
Примеры заданий для практических занятий

Задача 1. Погрешность измерения одной и той же величины, выраженная в долях этой величины: $1 \cdot 10^{-3}$ – для одного прибора; $2 \cdot 10^{-3}$ – для другого. Какой из этих приборов точнее?

Задача 2. Определите относительную погрешность для прибора класса 0,5, имеющего шкалу 100 делений. Насколько эта погрешность больше погрешности на последнем – сотом делении шкалы прибора?

Задача 3. При контроле метрологических параметров деформационных (пружинных) манометров со шкалой на 300 делений смещение стрелки от постукивания по корпусу прибора должно оцениваться с погрешностью, не превышающей 0,1 цены деления шкалы. Сопоставьте эту погрешность отсчета с допустимой погрешностью для манометра класса 0,15.

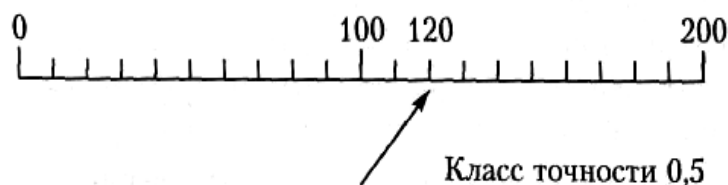
Задача 4. Указатель отсчетного устройства частотомера класса точности 0,2 с номинальной частотой 50 Гц, шкала которого приведена на рисунке, показывает 54 Гц. Чему равна измеряемая частота?



Задача 5. Вольтметр типа Д566/107, класса точности 0,2, имеет диапазон измерений от 0 В до 50 В. Определить допускаемую абсолютную и относительную погрешности, если стрелка вольтметра остановилась на делении шкалы против цифры 20 В.

Задача 6. Из теоретической метрологии известно, что если за результат измерения взять среднее арифметическое из n измерений, точность повышается в \sqrt{n} раз. Сколько измерений электрического сопротивления резистора надо сделать омметром класса 1,0, чтобы определить ее с погрешностью 0,1%?

Задача 7. Указатель отсчетного устройства вольтметра класса точности 0,5, шкала которого приведена на рисунке, показывает 120 В. Представить результат однократного измерения (шкала равномерная).



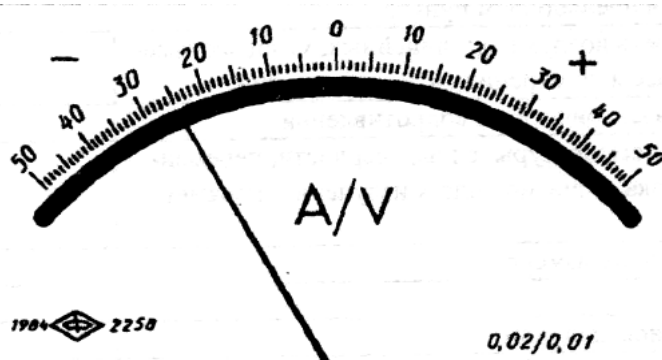
Задача 8. Класс точности весов 0,2, определите допускаемую погрешность этих весов в начале (1 деление) и в середине шкалы, если весы рассчитаны на 100 делений.

Задача 9. Указатель отсчетного устройства омметра класса точности 2,5 с существенно неравномерной шкалой длиной 100 мм показывает 100 Ом. Чему равно измеряемое сопротивление?

Задача 10. При измерении напряжения вольтметром класса точности 0,5/0,1 с верхним диапазоном измерений 250 В его показания были 125 В. Определите относительную погрешность вольтметра.

Задача 11. Амперметр класса точности 1,5, имеет диапазон измерений от 0 В до 250 А. Определить допускаемую абсолютную и относительную погрешности, если стрелка амперметра остановилась на делении шкалы против цифры 75 А.

Задача 12. Указатель отсчетного устройства ампервольтметра класса точности 0,02/0,01 со шкалой, приведенной на рисунке, показывает — 25 А. Чему равна измеряемая сила тока?



Задача 13. При определении класса точности ваттметра, рассчитанного на 750 Вт, получили следующие данные: 47 Вт – при мощности 50 Вт, 115 Вт – при 100 Вт; 204 Вт – при 200 Вт; 413 Вт – при 400 Вт; 728 Вт – при 750 Вт. Какой класс точности прибора?

Задача 14. Указатель отсчетного устройства цифрового ампервольтметра класса точности 0,02/0,01 показывает 25 А. Чему равна измеряемая сила тока?

Задача 15. Какого класса точности нужно взять измерительный прибор, чтобы в середине шкалы его погрешность измерения не превышала 1%?

Приложение 1

Значения функции Лапласа $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4813	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4874	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4984	4984	4984	4985	4985	4986	4886
3,0	4986									
3,5	4998									
4,0	4999									

Таблица 1

$$\text{Распределение Стьюдента } P\{|t| < t_p\} = 2 \int_0^{t_p} S(t; k) dt$$

Значение коэффициента t_p для случайной величины, имеющей распределение Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы

k	P											
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012

k	P											
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,707
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,699	2,042	2,457	2,750
∞	0,12566	0,25335	0,38532	0,52440	0,67449	0,84162	1,03643	1,28155	1,64485	1,95996	2,32634	2,57582

Таблица 2

Распределение Стьюдента

Значение $P\{|t| < t_p\} = 2 \int_0^{t_p} S(t; k) dt$ для различных t_p

k	t_p				k	t_p			
	2,0	2,5	3,0	3,5		2,0	2,5	3,0	3,5
1	0,7048	0,7578	0,7952	0,8228	12	0,9314	0,9720	0,9890	0,9956
2	0,8164	0,8764	0,9046	0,9276	13	0,9392	0,9737	0,9898	0,9960
3	0,8606	0,9122	0,9424	0,9606	14	0,9348	0,9740	0,9904	0,9964
4	0,8838	0,9332	0,9600	0,9752	15	0,9360	0,9754	0,9910	0,9968
5	0,8980	0,9454	0,9700	0,9828	16	0,9372	0,9764	0,9916	0,9970
6	0,9076	0,9534	0,9760	0,9872	17	0,9382	0,9770	0,9920	0,9972
7	0,9144	0,9590	0,9800	0,9900	18	0,9392	0,9776	0,9924	0,9974
8	0,9194	0,9630	0,9830	0,9920	19	0,9400	0,9782	0,9926	0,9976
9	0,9234	0,9662	0,9850	0,9932	20	0,9408	0,9788	0,9930	0,9978
10	0,9266	0,9686	0,9866	0,9942	∞	0,9545	0,9876	0,9973	0,9995
11	0,9292	0,9704	0,9880	0,9950					

Приложение 3

Интегральная функция χ^2 – распределения Пирсона

Значения $\chi_{k;P}^2$ для различных k и P

k	P												
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
1	0,000157	0,000628	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141

k	P												
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	8,260	9,237	10,851	12,444	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37, 659	40,289
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27, 096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,710	26, 336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23, 364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Список литературы

1. Иванов В.А., Марусина М.Я., Ткалич В.Л. Прикладная метрология: Учебное пособие. – СПб.: СПбГИТМО(ТУ), 2003. – 104 с.
2. Ким К.К., Анисимов Г.Н., Барбарович В.Ю., Литвинов Б.Я. Метрология, стандартизация, сертификация и электроизмерительная техника: Учебное пособие. – СПб.: Питер, 2008. – 368 с.
3. Российская метрологическая энциклопедия. Гл. редактор Тарбеев Ю.В. – СПб.: Лики России, 2001. – 849 с.
4. Саврасов Ю.С. Оптимальные решения. – М.: Радио и связь, 2000. – 152 с.
5. Сергеев А.Г., Крохин В.В. Метрология. Карманная энциклопедия студента: Учебное пособие для студентов высших и средних специальных учебных заведений. – М.: Логос, 2001. – 376 с.
6. Шабалин С.А. Прикладная метрология в вопросах и ответах. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во стандартов, 1990. – 192 с.
7. Шишкин И.Ф. Теоретическая метрология. Ч.1. Общая теория измерений: учеб.-мет. комплекс (учеб. пособие), 3-е изд., перераб. и доп., / И.Ф. Шишкин. – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2008. – 189 с.

Содержание

Введение	3
1. Решение задач по теме «Единицы физических величин. Система СИ»	5
Примеры заданий для практических занятий	6
2. Решение задач по теме «Расчет погрешностей и округление результатов измерений. Оценка величины систематической погрешности (введение поправок)»	7
Примеры заданий для практических занятий	9
3. Решение задач по теме «Формирование дифференциального закона распределения. Гистограмма. Моменты распределений случайных погрешностей. Точечные оценки результатов измерений»	11
Примеры заданий для практических занятий	14
4. Решение задач по теме «Интервальные оценки результатов измерений. Доверительные границы погрешности. Исключение грубых погрешностей»	16
Примеры заданий для практических занятий	20
5. Решение задач по теме «Методы и методики измерений. Расчёт надёжности приборов»	22
Примеры заданий для практических занятий	24
6. Решение задач по теме «Классы точности средств измерений»	26
Примеры заданий для практических занятий	28
Приложение 1. Значения функции Лапласа	30
Приложение 2. Распределение Стьюдента	31
Приложение 3. Распределение Пирсона	34
Список литературы	36