

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**



ПОБЕДИТЕЛЬ КОНКУРСА ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВУЗОВ

И.А. ЛАПИН

Л.С. РАТАФЬЕВА

**КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.
ТЕОРИЯ ПОЛЯ.**

Учебное пособие



**Санкт-Петербург
2009**

Коллектив авторов:
И.А. Лапин, Л.С. Ратафьева

Кратные интегралы. Теория поля.

Под общей редакцией Л.С. Ратафьевой
Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2009 год, 112 с.

Предлагаемое учебное пособие представляет собой базовый конспект лекций по высшей математике для студентов 1-го курса (2 семестр) дневного и вечернего отделения общеинженерных специальностей. В нем рассматриваются следующие темы: «Двойные и тройные интегралы», «Криволинейные и поверхностные интегралы», «Элементы теории поля». Содержание пособия соответствует образовательным стандартам и программе по высшей математике для направления 550000 — Технические науки.

При написании пособия использовались материалы других изданий, которые приводятся в списке литературы без дополнительных ссылок.



Рекомендовано к печати Ученым Советом
естественнонаучного факультета СПбГУ
ИТМО (протокол №5 от 23 декабря 2008
года)

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007-2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

© Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, 2009 г.

© И.А. Лапин, Л.С. Ратафьева, 2009 г.

Оглавление

Глава 1	Двойные и тройные интегралы	5
§1	Двойные интегралы	5
§2	Тройные интегралы	22
§3	Применение двойных и тройных интегралов	29
§4	Криволинейные координаты и замена переменных в кратных интегралах	33
Глава 2	Криволинейные интегралы	50
§1	Криволинейные интегралы I рода	50
§2	Криволинейные интегралы II рода	55
§3	Формула Грина	61
§4	Криволинейные интегралы, не зависящие от пути интегрирования	65
Глава 3	Поверхностные интегралы	73
§1	Поверхностные интегралы I рода	73
§2	Двусторонние и односторонние поверхности. Сто- рона поверхности.	74
§3	Поверхностные интегралы II рода	76
§4	Формула Остроградского	79
§5	Формула Стокса	82

Глава 4	Элементы теории поля	84
§1	Скалярное поле. Градиент. Производная по направлению	84
§2	Векторное поле	91
§3	Теорема Остроградского (векторная форма). Дивергенция векторного поля и ее механический смысл	95
§4	Соленоидальное векторное поле и его свойство. Уравнение неразрывности. Оператор Лапласа	100
§5	Циркуляция векторного поля по замкнутому контуру. Вихрь векторного поля. Векторная форма теоремы Стокса	102
§6	Потенциальное векторное поле	108

Quidquid praecipies, esto brevis¹
Чему бы ты ни учил, будь краток

Заповедь Горация.

Глава 1

Двойные и тройные интегралы

§1. Двойной интеграл

1. Определение двойного интеграла.

Прежде чем дать определение двойного интеграла, сделаем несколько предварительных замечаний и определений.

Определение 1. Кривая K называется *простой кривой*, если она распадается на конечное число частей, каждая из которых имеет уравнение вида $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$, причем функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ непрерывны на некотором промежутке $[a, b]$ или $[p, q]$ соответственно.

В том случае, если кривая K — простая, замкнутая, самонепересекающаяся кривая, лежащая в плоскости xOy , то множество всех точек плоскости разбивается единственным образом на два связных множества. Мы будем в дальнейшем рассматривать области, ограниченные кривой K . Точки, лежащие на контуре K , мы будем считать принадлежащими области D , которую ограничивает этот контур, т.е. будем рассматривать замкнутую область \bar{D} , ограниченную простым самонепересекающимся контуром K .

¹ транскрипция [кви дквид прэцэпиэс, эсто брэвис]

Мы будем также рассматривать в дальнейшем простые области, понимая под этим области, ограниченные простыми кривыми и такие, что любая прямая, параллельная координатным осям, пересекает границу области не более чем в двух точках (рис. 1.1.1).

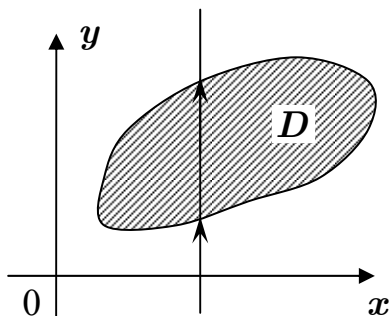


Рис. 1.1.1

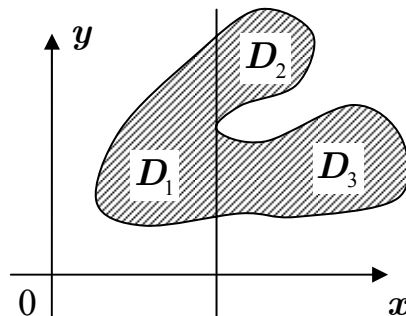


Рис. 1.1.2

Естественно, что к числу таких областей мы будем относить и области, которые можно разбить на конечное число областей указанного выше типа (рис. 1.1.2).

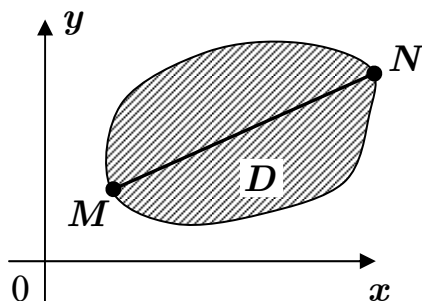


Рис. 1.1.3

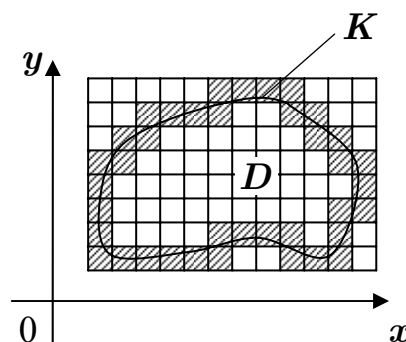


Рис. 1.1.4

Рассмотрим простую область D (рис. 1.1.3), ограниченную кривой K , и обозначим через $r(M,N)$ множество расстояний между точками M и N , лежащими на кривой K . Наибольшее расстояние между точками M и N будем называть в дальнейшем диаметром области D . Дадим теперь строгое определение понятия площади области D , ограниченной контуром K (рис. 1.1.4).

Пусть R есть некоторый прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, содержащий контур K целиком

внутри себя, не задевая точек контура K . Разобьем прямоугольник R сетью прямых, параллельных координатным осям, на прямоугольники (ячейки). Наибольший из диаметров ячеек обозначим через λ и будем называть *рангом дробления*.

Обозначим через S_1 сумму площадей ячеек, целиком лежащих в области D и не задевающих контура K , а через S_2 – сумму площадей ячеек, имеющих с областью D или ее контуром хотя бы одну общую точку. Очевидно, что $S_1 \leq S_2$. Если существует общий предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} S_2 = S$ при условии, что число ячеек увеличивается, а ранг дробления λ стремится к нулю (т.е. $\lambda \rightarrow 0$), то число S называется площадью области D , а сама область D называется *квადрируемой*.

Рассмотрим теперь некоторую функцию $f(x, y)$, определенную в простой области D , ограниченной контуром K (рис. 1.1.5). Дадим определение двойного интеграла.

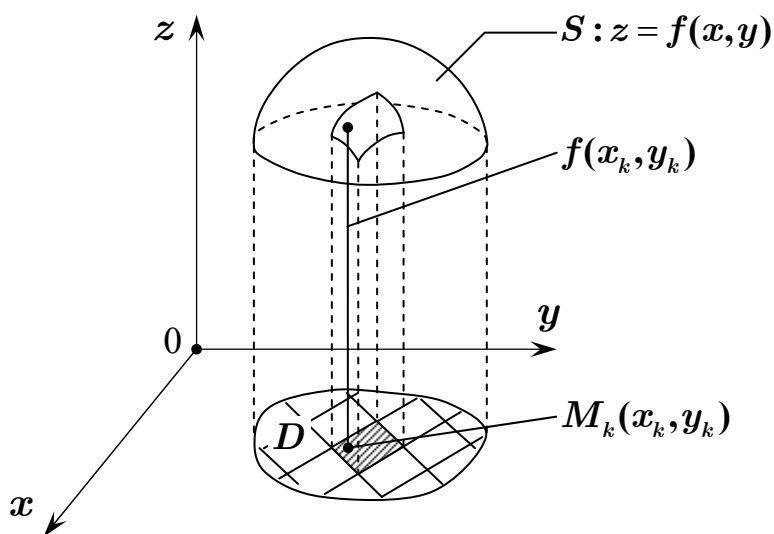


Рис. 1.1.5

Определение 2 (определение двойного интеграла). Разобьем область D сетью простых кривых произвольным образом на ячейки D_1, D_2, \dots, D_n с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ и диаметрами d_1, d_2, \dots, d_n . Наибольший из диаметров обозначим через λ – ранг дробления.

В каждой частной ячейке D_k возьмем произвольную точку $M_k(x_k, y_k)$ и вычислим в ней значение функции $f(x_k, y_k)$. Умножим затем $f(x_k, y_k)$ на площадь соответствующей ячейки ΔS_k и просуммируем все такие произведения, т.е. составим сумму $\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k$, которая называется **интегральной суммой** или **суммой Римана**. Измельчая дальше дробление при условии, что ранг дробления $\lambda \rightarrow 0$, ищем предел последовательности интегральных сумм $I = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sigma_n$. Если этот предел существует и не зависит от способа дробления и выбора точек M_k , то он называется **двойным интегралом от функции $f(x_k, y_k)$ по области D** и обозначается так:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Сама подынтегральная функция $f(x, y)$ при этом называется интегрируемой по области D .

Итак, принимая во внимание приведенное выше рассуждение, мы можем коротко определить двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области D как предел последовательности интегральных сумм Римана, т.е.

$$\iint_D f(x, y) dx dy \stackrel{def}{=} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k.$$

Теорема существования двойного интеграла. Если подынтегральная функция $f(x, y)$ непрерывна в каждой точке простой замкнутой области D , то она в этой области интегрируема.

(Без доказательства.)

2. Геометрический смысл двойного интеграла.

Если $f(x, y) > 0$ в каждой точке простой области D , по которой ведется интегрирование, то непосредственно из определения двойного интеграла следует (рис. 1.1.5), что двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ дает нам объем тела, ограниченного снизу областью D , сверху – поверхностью, уравнение которой $z = f(x, y)$, а с боков

– цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz , а направляющей служит граница области D (контур K), т.е.

$$v_T = \iint_D f(x, y) dx dy .$$

Если подынтегральная функция $f(x, y) = 1$, то

$$S_D = \iint_D dx dy ,$$

где S_D – площадь области D .

3. Свойства двойного интеграла.

Допустим далее, что $c_1 = const$, $c_2 = const$, а $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ – функции, интегрируемые в области D . Тогда непосредственно из определения двойного интеграла очевидна справедливость свойств 1-5, которые мы приведем без доказательства.

1. $\iint_D c \cdot f(x, y) dx dy = c \iint_D f(x, y) dx dy .$

2. $\iint_D [c_1 f_1(x, y) \pm c_2 f_2(x, y)] dx dy = c_1 \iint_D f_1(x, y) dx dy \pm c_2 \iint_D f_2(x, y) dx dy .$

3. Если область D разбить простой кривой на две части D_1 и D_2 (рис. 1.1.6), то:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy ,$$

т.е. двойной интеграл по области D равен сумме двойных интегралов по частям области D .

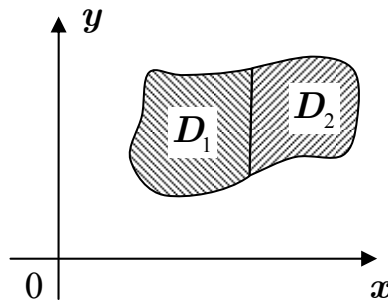


Рис. 1.1.6

4. Если в каждой точке области D $f(x, y) \geq 0$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0 .$$

5. Если в каждой точке области D $f_1(x,y) \leq f_2(x,y)$, то

$$\iint_D f_1(x,y) dx dy \leq \iint_D f_2(x,y) dx dy .$$

6. Если в каждой точке области D справедливо неравенство $m \leq f(x,y) \leq M$, то

$$m \cdot S_D \leq \iint_D f(x,y) dx dy \leq M \cdot S_D ,$$

где S_D – площадь области D .

Доказательство. В силу свойства 5 очевидно, что

$$\iint_D m dx dy \leq \iint_D f(x,y) dx dy \leq \iint_D M dx dy ,$$

откуда следует:

$$m \cdot \iint_D dx dy \leq \iint_D f(x,y) dx dy \leq M \cdot \iint_D dx dy .$$

Остается учесть, что

$$\iint_D dx dy = S_D .$$

7. *Теорема о среднем.* Если в каждой точке замкнутой области D $f(x,y)$ непрерывна, то тогда в области D найдется точка $P(\xi,\eta)$ такая, что

$$\iint_D f(x,y) dx dy = f(\xi,\eta) \cdot S_D ,$$

где S_D – площадь области D .

Доказательство. Так как функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области D , то в ней она достигает своего наименьшего m и наибольшего M значения, т.е. справедливо неравенство $m \leq f(x,y) \leq M$, откуда в силу свойства 5 вытекает

$$m \cdot S_D \leq \iint_D f(x,y) dx dy \leq M \cdot S_D .$$

Разделив почленно полученное соотношение на положительную величину S_D , получим

$$m \leq \frac{1}{S_D} \iint_D f(x,y) dx dy \leq M .$$

Ввиду того, что функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области D , а m и M – ее наименьшее и наибольшее значения соответ-

ственно, то в области D найдется некоторая точка $P(\xi, \eta)$ такая, что

$$\frac{1}{S_D} \iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta),$$

откуда следует, что $\iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \cdot S_D$.

Значение $f(\xi, \eta)$ называют «средним» значением функции в области D .

4. Вычисление двойного интеграла.

Вычислим двойной интеграл $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ в предположении, что функция $f(x, y)$ положительна в области D , а область D ограничена снизу кривой $y = y_1(x)$, сверху кривой $y = y_2(x)$ (рис. 1.1.7), причем $x \in [a, b]$. Мы предполагаем, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ непрерывны на промежутке $[a, b]$ и в каждой его точке $y_1(x) \leq y_2(x)$. Из геометрического смысла двойного интеграла ясно, что двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ дает нам объем тела, изображенного на рис. 1.1.7.

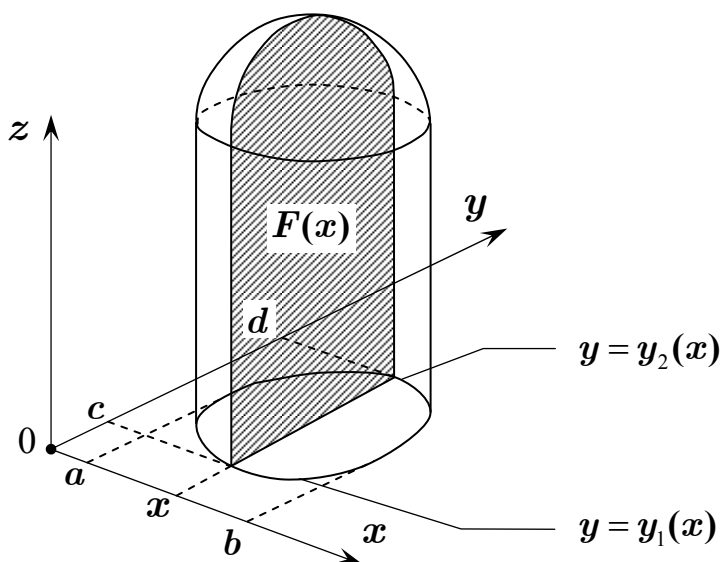


Рис. 1.1.7

Найдем объем этого тела с помощью определенного интеграла. Для этого проведем сечение тела плоскостью $x = const$. Обозначим площадь этого сечения $F(x)$. Известно, что объем тела по площадям сечений вычисляется так:

$$v = \int_a^b F(x) dx.$$

Остается найти площадь сечения $F(x)$. Очевидно, что это сечение представляет собою криволинейную трапецию, ограниченную снизу прямой $x = const$, сверху — кривой, уравнение которой $z = f(x, y)$ (причем здесь x фиксировано), а с боков — прямыми, параллельными оси Oz .

Следовательно,

$$F(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Подставляя найденное значение $F(x)$ в исходный интеграл, окончательно получим:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, называется повторным или двукратным и записывается так:

$$\int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Итак, окончательно получаем такое выражение двойного интеграла через повторный:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Заметим, что интеграл $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ называется внутренним,

при этом говорят, что внутреннее интегрирование ведется по переменной y , а внешнее — по переменной x (рис. 1.1.7).

Проводя совершенно аналогичные рассуждения, мы можем получить точно такую же формулу для вычисления двойного инте-

гнала, где внутреннее интегрирование выполнено по переменной x , а внешнее — по переменной y :

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) dx.$$

Очевидно, что не играет роли, по какой переменной выполняется внутреннее интегрирование, а по какой — внешнее.

Пример 1. Вычислить площадь области D , ограниченной кривыми $y = x$, $x + y = 6$, $y = 2$, $y = 0$ с помощью двойного интеграла (рис. 1.1.8).

Решение. Решим задачу двумя способами.

Первый способ. Разобьем область D на три области D_1 , D_2 и D_3 , проведя прямые $x = 2$ и $x = 4$ (рис. 1.1.8).

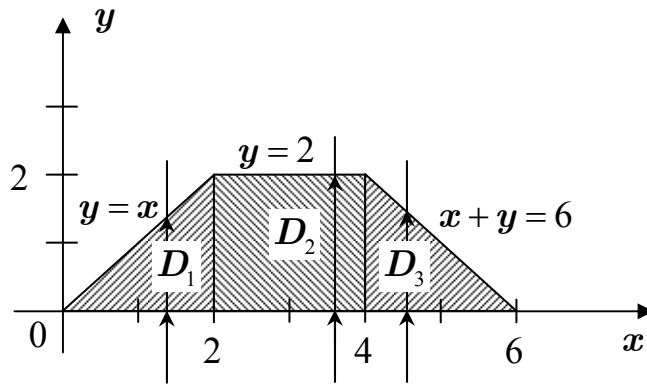


Рис. 1.1.8

Тогда искомая площадь $S_D = S_{D_1} + S_{D_2} + S_{D_3}$, где $S_{D_1} = \iint_{D_1} dx dy$, $S_{D_2} = \iint_{D_2} dx dy$, $S_{D_3} = \iint_{D_3} dx dy$.

Вычислим каждый из интегралов, выполняя внутреннее интегрирование по переменной y , а внешнее — по переменной x . Тогда получим:

$$S_{D_1} = \iint_{D_1} dx dy = \int_0^2 dx \int_0^x dy.$$

Здесь $I_{1 \text{ внутр}} = \int_0^x dy = y \Big|_0^x = x$

Окончательно получим:

$$S_{D_1} = \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{2^2}{2} = 2.$$

Заметим, что для нахождения пределов внутреннего интегрирования по переменной y следует через область D_1 провести прямую, параллельную оси Oy и посмотреть, при каком значении y она входит в область D_1 и при каком значении y она из области D_1 выходит. Это и будут пределы интегрирования. А именно: входим в область D_1 при $y=0$ (нижний предел интегрирования), а выходим из области при $y=x$ (через прямую, уравнения которой $y=x$; это верхний предел интегрирования соответственно).

Совершенно аналогично:

$$S_{D_2} = \iint_{D_2} dx dy = \int_2^4 dx \int_0^2 dy, \quad I_{2 \text{ внутр}} = \int_0^2 dy = y \Big|_0^2 = 2;$$

$$S_{D_2} = \int_2^4 2 dx = 2 \int_2^4 dx = 2 \cdot x \Big|_2^4 = 2(4-2) = 4.$$

$$S_{D_3} = \iint_{D_3} dx dy = \int_4^6 dx \int_0^{6-x} dy, \quad I_{3 \text{ внутр}} = \int_0^{6-x} dy = y \Big|_0^{6-x} = 6-x;$$

$$S_{D_3} = \int_4^6 (6-x) dx = \left(6x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_4^6 = \left(36 - \frac{36}{2} \right) - \left(24 - \frac{16}{2} \right) = 18 - 16 = 2.$$

Очевидно, что $S_D = S_{D_1} + S_{D_2} + S_{D_3} = 2 + 4 + 2 = 8$.

Итак, $S_D = 8$.

Второй способ. Выбирая внутреннее интегрирование по переменной x , а внешнее по переменной y , можем записать искомую площадь так:

$$S_D = \iint_D dx dy = \int_0^2 dy \int_y^{6-y} dx.$$

Заметим, что при нахождении пределов внутреннего интегрирования (по переменной x), мы мысленно проведем прямую, параллельную оси Ox . Она входит в область D при $x=y$, а выходит — через прямую, уравнение которой $x+y=6$, т.е. при $x=6-y$. Закончим вычисление:

$$I_{\text{внутр}} = \int_y^{6-y} dx = x \Big|_y^{6-y} = (6-y) - y = 6 - 2y;$$

$$S_D = \int_0^2 (6 - 2y) dy = \left(6y - 2 \cdot \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^2 = 12 - 4 = 8,$$

т.е. как и при первом способе решения, мы получили, что $S_D = 8$.

Пример 2. Вычислить:

$$I = \iint_D (x + y^2) dx dy,$$

где область D ограничена прямыми $y=0$, $y=x$, $x+y=4$ (рис. 1.1.9).

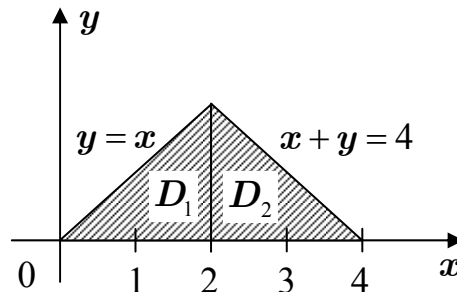


Рис. 1.1.9

Решение. Решим пример двумя способами.

Первый способ. Выполним внутреннее интегрирование по переменной x , а внешнее — по y , тогда получим:

$$I = \int_0^2 dy \int_y^{4-y} (x + y^2) dx.$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$I_{\text{внутр}} = \int_y^{4-y} (x + y^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + xy^2 \right) \Big|_y^{4-y} = -2y^3 + 4y^2 - 4y + 8.$$

Подставляя найденное значение в выражение для I , получим:

$$I = \iint_D (x + y^2) dx dy = \int_0^2 [-2y^3 + 4y^2 - 4y + 8] dy = \left(-\frac{y^4}{2} + \frac{4y^3}{3} - 2y^2 + 8y \right) \Big|_0^2 = \frac{32}{3}$$

Второй способ. Внутреннее интегрирование выполним по переменной y , а внешнее — по x . Заметим, что при этом область D мы должны разбить на две области D_1 и D_2 (как указано на рис.

1.1.9); следовательно, двойной интеграл выразится в виде суммы таких двух повторных интегралов:

$$I = \int_0^2 dx \int_0^x (x + y^2) dy + \int_2^4 dx \int_0^{4-x} (x + y^2) dy = I_1 + I_2.$$

$$I_{1 \text{ внутр}} = \int_0^x (x + y^2) dy = \left(xy + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^x = x^2 + \frac{x^3}{3};$$

$$I_1 = \int_0^2 \left(x^2 + \frac{x^3}{3} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{y^4}{12} \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4.$$

$$I_{2 \text{ внутр}} = \int_0^{4-x} (x + y^2) dy = \left(xy + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{4-x} = \frac{64}{3} - 12x + 3x^2 - \frac{x^3}{3};$$

$$I_2 = \int_2^4 \left(\frac{64}{3} - 12x + 3x^2 - \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{20}{3}.$$

Итак, окончательно получим: $I = I_1 + I_2 = 4 + \frac{20}{3} = \frac{32}{3}$.

Пример 3. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью $x + y + z = 1$ и координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

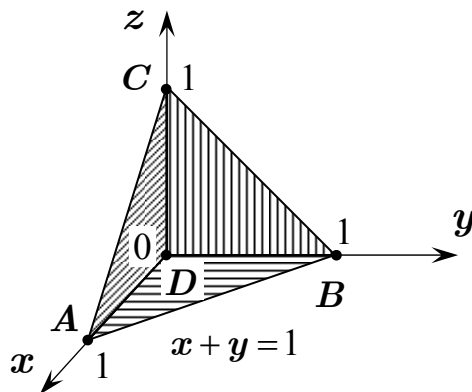


Рис. 1.1.10

Решение. Принимая во внимание геометрический смысл двойного интеграла, мы можем написать, что

$$v_T = \iint_D z dx dy.$$

Здесь D — треугольник, лежащий в основании пирамиды, а $z = 1 - x - y$, т.е.

$$v_T = \iint_D (1-x-y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy.$$

Внутренний интеграл:

$$I_{\text{внутр}} = \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = \left[(1-x) \cdot y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} = (1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} = \frac{(1-x)^2}{2}$$

Следовательно,

$$v_T = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-2x+x^2) dx = \frac{1}{2} \left(x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6},$$

т.е. искомый объем тела T равен $v_T = \frac{1}{6}$.

Замечание. Заметим, что искомый объем мы могли бы найти, пользуясь знаниями, полученными в средней школе. Действительно, тело T есть не что иное, как пирамида, площадь основания которой есть прямоугольный треугольник AOB , причем $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Высота пирамиды $h = OC = 1$.

$$v_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h, \text{ т.е.}$$

$$v_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

5. Вычисление площади кривой поверхности с помощью двойного интеграла.

Рассмотрим поверхность, заданную уравнением $F(x, y, z) = 0$. Допустим, что функция $F(x, y, z)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные F'_x , F'_y , F'_z . Допустим, что все три частные производные не обращаются в ноль ни в одной точке поверхности S , т.е. поверхность S в каждой точке имеет касательную плоскость. Мы установили ранее, что при таких предположениях в каждой точке M поверхности S существует нормаль к поверхности \vec{N} , причем

$$\vec{N} = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} \Big|_M \cdot \vec{i} + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} \Big|_M \cdot \vec{j} + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} \Big|_M \cdot \vec{k}.$$

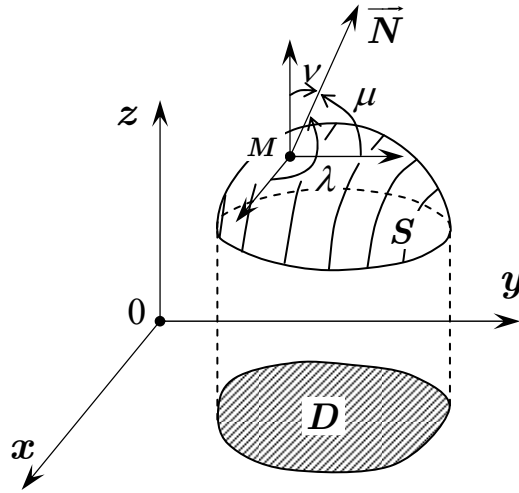


Рис. 1.1.11

Допустим, в частности, что поверхность S задана уравнением $z = f(x, y)$. Очевидно, что мы можем считать

$$F(x, y, z) = z - f(x, y),$$

причем, частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

непрерывны в силу сделанных выше предположений. Обозначим

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = p(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = q(x, y).$$

Тогда ясно, что нормаль к поверхности в любой точке M будет иметь координаты:

$$\vec{N} = \vec{N}(-p(x, y), -q(x, y), 1).$$

Единичный вектор нормали к поверхности, следовательно, имеет вид:

$$\vec{N}^0 = \frac{-p(x, y) \cdot \vec{i} - q(x, y) \cdot \vec{j} + \vec{k}}{\pm \sqrt{p^2(x, y) + q^2(x, y) + 1}},$$

где \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} — орты системы координат (рис. 1.1.11).

Как известно, координаты единичного вектора совпадают с направляющими косинусами данного вектора. Обозначим через λ , μ и ν углы нормали \vec{N} соответственно с координатными осями Ox , Oy , Oz . Знак \pm в знаменателе последней формулы означает, что мы можем выбрать на нормали два взаимно противоположных на-

правления, т.е. для направляющих косинусов нормали получим такие формулы:

$$\begin{aligned}\cos \lambda &= \frac{-p(x, y)}{\pm \sqrt{p^2(x, y) + q^2(x, y) + 1}}; \\ \cos \mu &= \frac{-q(x, y)}{\pm \sqrt{p^2(x, y) + q^2(x, y) + 1}}; \\ \cos \nu &= \frac{1}{\pm \sqrt{p^2(x, y) + q^2(x, y) + 1}}.\end{aligned}$$

Зафиксируем на нормали то направление, которое образует острый угол с осью Oz , т.е. выберем в формулах для направляющих косинусов такой знак перед корнем, чтобы было $\cos \nu > 0$.

Итак, направляющие косинусы для нормали, образующей острый угол с осью Oz , таковы:

$$\begin{aligned}\cos \lambda &= \frac{-p(x, y)}{\sqrt{p^2(x, y) + q^2(x, y) + 1}}; \quad \cos \mu = \frac{-q(x, y)}{\sqrt{p^2(x, y) + q^2(x, y) + 1}}; \\ \cos \nu &= \frac{1}{\sqrt{p^2(x, y) + q^2(x, y) + 1}}.\end{aligned}$$

Для нормали, имеющей противоположное направление, получим соответственно:

$$\begin{aligned}\cos \lambda &= \frac{p(x, y)}{\sqrt{p^2(x, y) + q^2(x, y) + 1}}; \quad \cos \mu = \frac{q(x, y)}{\sqrt{p^2(x, y) + q^2(x, y) + 1}}; \\ \cos \nu &= \frac{-1}{\sqrt{p^2(x, y) + q^2(x, y) + 1}}.\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь поверхность S , расположенную над простой областью D , лежащей в плоскости xOy (рис. 1.1.12). Разобьем область D сетью простых линий на ячейки D_1, D_2, \dots, D_n с площадями $\Delta F_1, \Delta F_2, \dots, \Delta F_n$; λ – ранг дробления D .

Рассмотрим цилиндрические поверхности, образующие которых параллельны оси Oz , а направляющими служит дробящая сеть линий области D . Эти цилиндрические поверхности переносят дробление из области D на поверхность S , которая разбивается таким образом на ячейки S_1, S_2, \dots, S_n . Выберем в каждой ячейке S_k произвольную точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$ и проведем через нее касательную площадку T_k до пересечения с вышеназванными цилинд-

рическими поверхностями. Обозначим площадь касательной площадки T_k через ΔS_k .

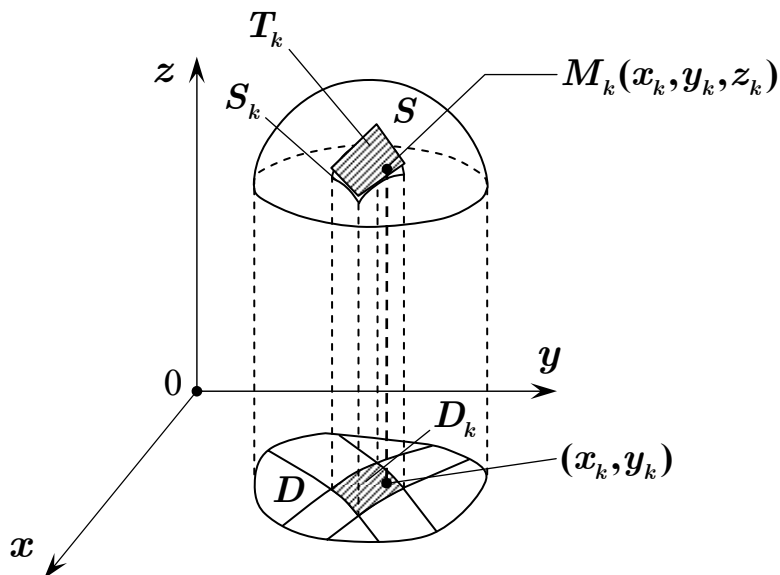


Рис. 1.1.12

Если существует конечный предел

$$S = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \Delta S_k,$$

не зависящий ни от способа дробления, ни от выбора точек M_k на поверхности S , то он называется площадью поверхности S , расположенной над областью D , а сама поверхность в этом случае называется *квადрируемой*.

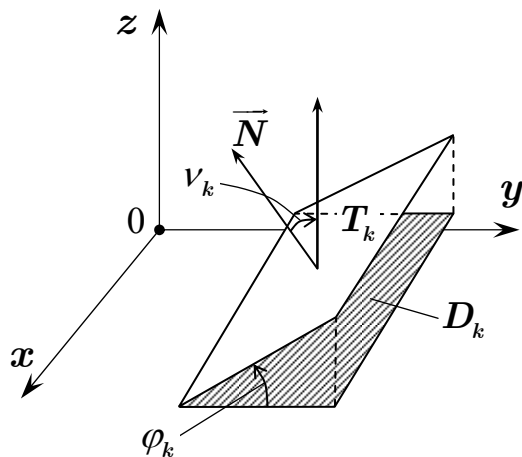


Рис. 1.1.13

Заметим, что D_k является ортогональной проекцией площадки T_k (рис. 1.1.13). Их площади связаны соотношением:

$$\Delta F_k = \Delta S_k \cdot \cos \varphi_k,$$

где φ_k — острый угол между площадками D_k и T_k . Но угол между двумя плоскостями равен углу между нормальными к ним, т.е.

$$\varphi_k = \nu_k,$$

где ν_k — острый угол между нормалью к поверхности S и осью Oz . Тогда получим

$$\Delta S_k = \frac{\Delta F_k}{\cos \nu_k} = \sqrt{p^2(x,y) + q^2(x,y) + 1} \cdot \Delta F_k.$$

Суммируя все такие элементарные площади и устремляя ранг дробления λ к нулю, получим окончательно:

$$S = \iint_D \sqrt{p^2(x,y) + q^2(x,y) + 1} \, dx dy.$$

Пример 4. Вычислить площадь части поверхности $S: 2z + y - 6 = 0$, расположенной над областью D , ограниченной прямыми $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 2$, лежащими в плоскости xOy .

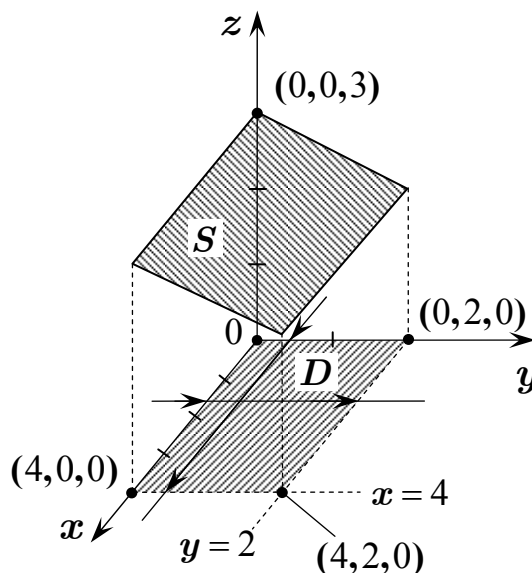


Рис. 1.1.14

Решение. Для нахождения площади куска поверхности S , расположенного над областью D (рис. 1.1.14), воспользуемся выведенной формулой для площади кривой поверхности:

$$S = \iint_D \sqrt{p^2(x,y) + q^2(x,y) + 1} \, dx dy.$$

В нашем случае уравнение поверхности S можно записать так:

$$z = 3 - \frac{1}{2}y, \text{ тогда}$$

$$p(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$q(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = -0,5.$$

Следовательно,

$$S = \sqrt{p^2(x,y) + q^2(x,y) + 1} = \sqrt{0,5^2 + 1} = \sqrt{1,25} = 0,5\sqrt{5}.$$

Формируем интеграл:

$$S = \iint_D 0,5\sqrt{5} \, dx dy = 0,5\sqrt{5} \cdot \iint_D dx dy;$$

$$\iint_D dx dy = \int_0^4 dx \int_0^2 dy;$$

$$I_{\text{внутр}} = \int_0^2 dy = y \Big|_0^2 = 2;$$

$$S = 0,5\sqrt{5} \cdot \int_0^4 2 dx = \sqrt{5} \cdot x \Big|_0^4 = 4\sqrt{5}.$$

Итак, искомая площадь куска плоскости S («крыша»), расположенной над областью D («пол»), равна $S = 4\sqrt{5}$.

§2. Тройной интеграл

1. Определение тройного интеграла.

Рассмотрим некоторую поверхность S .

Определение 1. Поверхность S называется **простой поверхностью**, если она распадается на конечное число частей, имеющих уравнение $z = f(x,y)$, или $x = \psi(y,z)$, или $y = \eta(x,z)$, причем функции $f(x,y)$, $\psi(y,z)$ и $\eta(x,z)$ непрерывны в некоторой простой области D .

В дальнейшем мы будем рассматривать пространственные области, ограниченные простыми поверхностями.

Уточним теперь понятие объема тела T , ограниченного простой поверхностью S . Для этого поместим тело T целиком внутрь параллелепипеда, грани которого параллельны координатным плоскостям xOy , xOz и yOz . Разобьем далее параллелепипед плоскостями, параллельными координатным плоскостям, на ячейки. Обозначим через A сумму объемов ячеек, целиком лежащих внутри тела T и не имеющих ни одной общей точки с поверхностью S , ограничивающей тело T . Обозначим через B сумму объемов ячеек, имеющих с телом T или его поверхностью хотя бы одну общую точку. Очевидно, что $A \leq B$. Наибольший из диаметров ячеек назовем рангом дробления λ . Если существует общее значение

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} B = v$$

при условии, что число ячеек бесконечно увеличивается, а ранг дробления стремится к нулю, то число v называется *объемом тела T* , а само тело называется *кубируемым*.

Замечание. Заметим, что ранее мы аналогично определили площадь плоской области.

Дадим теперь определение тройного интеграла.

Рассмотрим некоторое тело T , ограниченное простой поверхностью (рис. 1.2.1). Можно доказать, что такие тела кубируемы, т.е. имеют объем. И пусть в каждой точке этого тела задана функция $f(x, y, z)$.

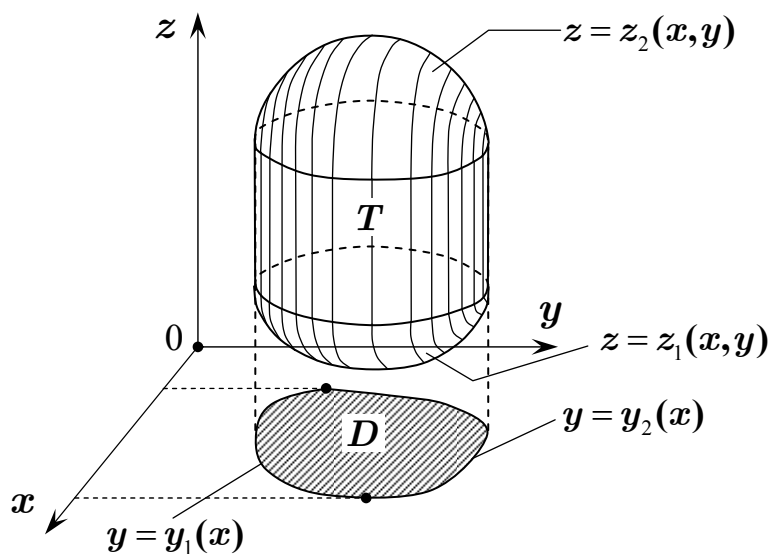


Рис. 1.2.1

Определение 2 (определение тройного интеграла). Разобьем тело T простыми поверхностями на части T_1, T_2, \dots, T_n с диаметрами d_1, d_2, \dots, d_n и объемами $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$. Наибольший из диаметров d_k называется *рангом дробления* λ .

В каждой частичной ячейке T_k возьмем произвольную точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$ и вычислим в ней значение функции $f(x_k, y_k, z_k)$, которое умножим на объем соответствующей ячейки Δv_k , т.е. составим произведение: $f(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta v_k$.

Просуммируем все такие произведения, т.е. составим интегральную сумму (*сумму Римана*):

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta v_k.$$

Измельчая дробление, будем искать предел последовательности интегральных сумм

$$I = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sigma_n.$$

Если этот предел существует и не зависит от способа дробления и выбора точек M_k , то он называется *тройным интегралом* от функции $f(x, y, z)$ по телу T и обозначается так:

$$I = \iiint_T f(x, y, z) \, dx dy dz$$

или

$$I = \iiint_T f(M) \, dv.$$

Итак, лаконично можно сказать так: тройной интеграл есть предел последовательности интегральных сумм, т.е.:

$$I = \iiint_T f(x, y, z) \, dx dy dz \stackrel{def}{=} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta v_k$$

Теорема существования тройного интеграла. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в каждой точке тела T , ограниченного простой поверхностью, то существует тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ по телу T .

(Без доказательства.)

Заметим, что свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного интеграла, поэтому мы не будем на них отдельно останавливаться.

2. Вычисление тройного интеграла.

Пусть тело T есть простая область (рис. 1.2.1). Допустим, что оно ограничено снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, сверху поверхностью $z = z_2(x, y)$, а с боков – цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz , а направляющей служит граница простой области D , расположенной в плоскости xOy , причем функции $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ непрерывны в области D . Пусть, кроме того, функция $f(x, y, z)$ интегрируема в теле T .

Тогда можно написать

$$\iiint_T f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_D \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy,$$

причем интеграл, стоящий справа, записывается так:

$$\iiint_T f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

В том случае, когда область D ограничена снизу непрерывной кривой $y = y_1(x)$, сверху – непрерывной кривой $y = y_2(x)$, а с боков прямыми $x = a$ и $x = b$, то последнюю формулу можно записать так:

$$\iiint_T f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Интеграл, стоящий справа, называется трехкратным или повторным. Заметим, что выбирая внешнее интегрирование по переменной y или z , можно написать еще пять различных трехкратных интегралов, через которые выражается данный интеграл I . Порядок выполнения операций интегрирования зависит от вида области, по которой выполняется интегрирование.

3. Геометрический смысл тройного интеграла.

В том случае, когда подынтегральная функция $f(x,y,z)=1$, то очевидно, что тройной интеграл $I = \iiint_T dx dy dz$ дает нам объем тела T , по которому ведется интегрирование.

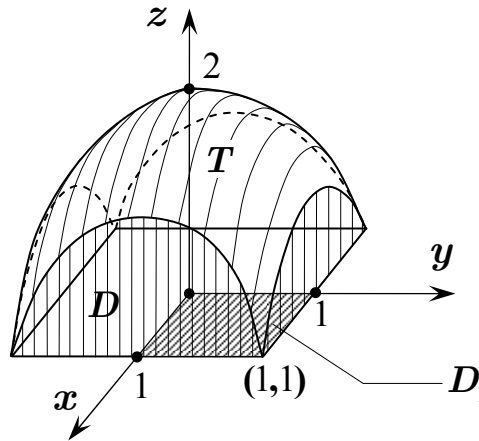


Рис. 1.2.2

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 2 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.

Решение. Очевидно, что данное тело представляет собою шатер, ограниченный сверху параболоидом вращения $z = 2 - x^2 - y^2$. Причем эта поверхность симметрична относительно координатных плоскостей xOz и yOz . С боков плоскости $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, и $y = -1$ срезают с параболоида симметричные горбушки, образуя четыре арки (рис. 1.2.2). Снизу тело ограничено квадратом, ограниченным прямыми $x = \pm 1$ и $y = \pm 1$.

Очевидно, что искомый объем

$$v_T = \iiint_T dx dy dz = \iint_D dx dy \int_0^{2-x^2-y^2} dz = \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 dy \int_0^{2-x^2-y^2} dz =$$

$$I_{1 \text{ внутр}} = \int_0^{2-x^2-y^2} dz = z \Big|_0^{2-x^2-y^2} = 2 - x^2 - y^2.$$

$$I_{2 \text{ внутр}} = \int_{-1}^1 (2 - x^2 - y^2) dy = \left((2 - x^2)y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 =$$

$$= \left[(2 - x^2) \cdot 1 - \frac{1}{3} \right] - \left[(2 - x^2) \cdot (-1) + \frac{1}{3} \right] = 2 \cdot (2 - x^2) - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} - 2x^2.$$

Окончательно,

$$v_T = \int_{-1}^1 \left(\frac{10}{3} - 2x^2 \right) dx = \left(\frac{10x}{3} - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \left(\frac{10}{3} - \frac{2}{3} \right) - \left(-\frac{10}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{20}{3} - \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

$$v_T = \frac{16}{3} \text{ куб. ед.}$$

Заметим, что данное тело симметрично относительно координатных плоскостей, поэтому можно упростить решение, вычислив $\frac{1}{4}$ объема. А именно:

$$\frac{1}{4} v_T = \iint_{D_1} dx dy \int_0^{2-x^2-y^2} dz = \iint_{D_1} (2-x^2-y^2) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 (2-x^2-y^2) dy$$

$$I_{\text{внутр}} = \int_0^1 (2-x^2-y^2) dy = \left[(2-x^2)y - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = 2-x^2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} - x^2.$$

$$\frac{1}{4} v_T = \int_0^1 \left(\frac{5}{3} - x^2 \right) dx = \left(\frac{5}{3}x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Откуда следует, что $v_T = \frac{16}{3}$.

Пример 2. Вычислить объем тела, ограниченного координатными поверхностями и плоскостью $x+y+z-1=0$ (рис. 1.2.3).

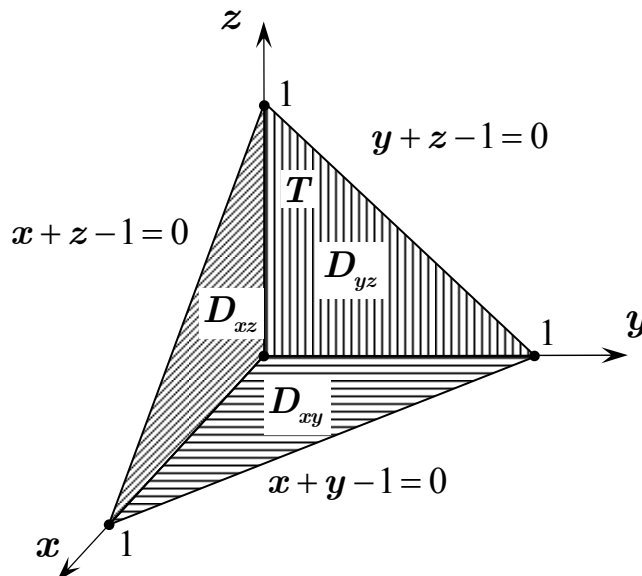


Рис. 1.2.3

Решение. Искомый объем тела, представляющего собой пирамиду, ограниченную координатными плоскостями и плоскостью $x + y + z - 1 = 0$, мы нашли ранее, выразив его через двойной интеграл.

Очевидно, что его можно найти и через тройной интеграл. А именно:

$$v_T = \iiint_T dx dy dz$$

Перейдя к трехкратному интегралу, мы можем это сделать шестью различными способами, а именно:

$$v_T = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{1-x-y} dz,$$

ИЛИ

$$v_T = \iint_{D_{yz}} dy dz \int_0^{1-y-z} dx = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \int_0^{1-y-z} dx = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} dx,$$

ИЛИ

$$v_T = \iint_{D_{xz}} dx dz \int_0^{1-x-z} dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \int_0^{1-x-z} dy = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \int_0^{1-x-z} dy.$$

Приведем вычисление по последней формуле (не трудно убедиться, что остальные интегралы вычисляются аналогично). Имеем:

$$\begin{aligned} v_T &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \int_0^{1-x-z} dy, \\ I_{1 \text{ внутр}} &= \int_0^{1-x-z} dy = y \Big|_0^{1-x-z} = 1-x-z, \\ I_{1 \text{ внутр}} &= \int_0^{1-z} (1-x-z) dx = \left(x - \frac{x^2}{2} - zx \right) \Big|_0^{1-z} = \\ &= (1-z) - \frac{(1-z)^2}{2} - z(1-z) = \frac{(1-z)^2}{2}. \end{aligned}$$

Окончательно:

$$v_T = \int_0^1 \frac{(1-z)^2}{2} dz = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-2z+z^2) dz = \frac{1}{2} \left(z - z^2 + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \text{ куб. ед.}$$

§3. Приложения двойных и тройных интегралов

1. Вычисление площади плоской области D .

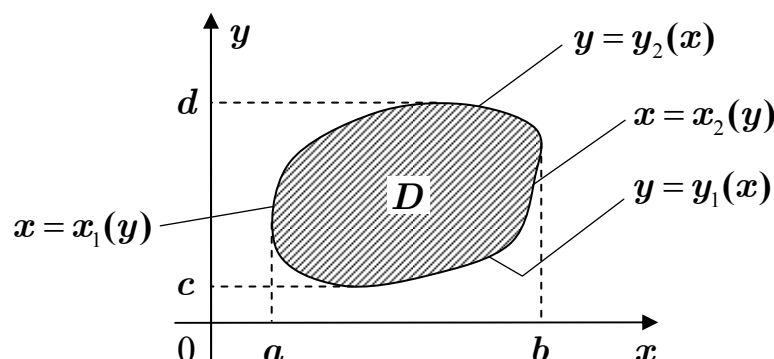


Рис. 1.3.1

Мы установили, что площадь плоской области D , ограниченной простой кривой, лежащей в области D , можно вычислить с помощью двойного интеграла, причем перейти к повторному интегралу можно двумя различными способами (рис. 1.3.1):

$$S_D = \iint_D dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy$$

или

$$S_D = \iint_D dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx.$$

2. Вычисление площади кривой поверхности.

Ранее мы установили, что площадь кривой поверхности S , заданной уравнением $z = f(x, y)$ и расположенной над областью D в плоскости xOy , вычисляется по формуле:

$$S = \iint_D \sqrt{p^2(x, y) + q^2(x, y) + 1} dx dy \quad (\text{рис. 1.1.12}),$$

где $p(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$, $q(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$.

3. Вычисление объема тела T .

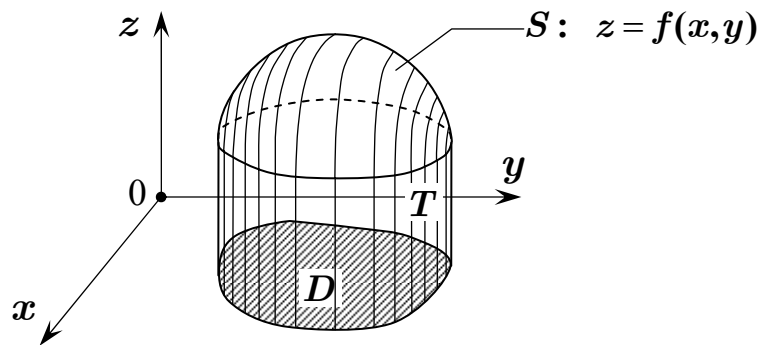


Рис. 1.3.2

Если тело T ограничено снизу простой областью D , сверху — поверхностью $z = f(x, y)$ ($f(x, y) \geq 0$), с боков цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz , а направляющей служит контур области D , тогда объем тела можно вычислить с помощью двойного интеграла так:

$$v_T = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (\text{рис. 1.3.2})$$

или с помощью тройного интеграла соответственно:

$$v_T = \iiint_T dx dy dz.$$

4. Вычисление массы поверхности.

Пусть в каждой точке поверхности S , заданной уравнением $z = f(x, y)$, плотность равна $\rho(x, y, z)$, где $\rho(x, y, z)$ — непрерывная функция в каждой точке поверхности S , а функция $f(x, y)$ непрерывна в области D плоскости xOy и имеет в ней частные производные

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = p(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = q(x, y).$$

Разбивая произвольным образом поверхность S на n частей, заметим, что Δm_k масса k -й ячейки приблизительно равна

$\rho(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta S_k$, где ΔS_k – площадь k -й ячейки; тогда масса всей поверхности S :

$$M = \sum_{k=1}^n \Delta m_k \approx \sum_{k=1}^n \rho(x_k, y_k, z_k) \Delta S_k.$$

Справа здесь стоит интегральная сумма для непрерывной функции. Измельчая дробление и устремляя ранг дробления к нулю, в пределе получим такую формулу для вычисления массы поверхности S :

$$M = \iint_D \rho(x, y, z) \sqrt{p^2(x, y) + q^2(x, y) + 1} \, dx dy.$$

В частности, если поверхность S лежит в плоскости xOy , т.е. совпадает с областью D , то $M_D = \iint_D \rho(x, y) dx dy$.

5. Вычисление массы тела.

Если в каждой точке тела T , ограниченного простой поверхностью, задана плотность $\rho = \rho(x, y, z)$, где ρ – непрерывная функция в каждой точке тела T , то, проведя аналогичные рассуждения, получим, что масса тела равна

$$M_D = \iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

6. Моменты плоской фигуры.

Из курсов теоретической механики известно, что статическим моментом S_l материальной точки массы m относительно оси l называется произведение массы этой точки на расстояние до оси l , т.е.

$$S_l = mr_l.$$

Моментом инерции I_l материальной точки относительно оси l называется произведение массы m этой точки на квадрат ее расстояния до оси l , т.е.

$$I_l = mr_l^2.$$

Статическим моментом системы материальных точек относительно оси l называется сумма статических моментов относительно этой оси всех материальных точек, входящих в систему.

Пусть в плоской области D распределена масса с плотностью $\rho(x, y)$. Разобьем область D на n частей, где ΔS_k — площадь k -й ячейки ($k=1, 2, \dots, n$). В ячейке D_k возьмем произвольную точку (x_k, y_k) , тогда в силу сделанного выше определения можем считать, что

$$S_x \approx \sum_{k=1}^n \rho(x_k, y_k) \cdot y_k \cdot \Delta S_k; \quad S_y \approx \sum_{k=1}^n \rho(x_k, y_k) \cdot x_k \cdot \Delta S_k.$$

Измельчая дробление, в пределе получим точные значения для статических моментов области D относительно осей Ox и Oy :

$$S_x = \iint_D \rho(x, y) y \, dx dy; \quad S_y = \iint_D \rho(x, y) x \, dx dy.$$

Проводя аналогичные рассуждения для моментов инерции области относительно координатных осей, получим:

$$I_x = \iint_D \rho(x, y) y^2 \, dx dy; \quad I_y = \iint_D \rho(x, y) x^2 \, dx dy.$$

7. Координаты центра масс.

Пусть D — плоская область, в которой распределена масса с плотностью $\rho(x, y)$. По определению центром масс плоской области называется точка C с координатами:

$$x_C = \frac{S_y}{M}, \quad y_C = \frac{S_x}{M},$$

где M — масса плоской области D , а S_x и S_y — статические моменты.

Принимая во внимание выражения для массы и статических моментов через двойные интегралы, получим:

$$x_C = \frac{\iint_D \rho(x, y) x \, dx dy}{\iint_D \rho(x, y) \, dx dy}, \quad y_C = \frac{\iint_D \rho(x, y) y \, dx dy}{\iint_D \rho(x, y) \, dx dy}.$$

Рассмотрим теперь некоторое тело T , ограниченное простой поверхностью, и пусть в нем распределена масса, плотность которой $\rho(x, y, z)$, тогда для координат центра масс этого тела получим совершенно аналогичные выражения:

$$x_C = \frac{\iiint_T \rho(x, y) x \, dv}{\iiint_T \rho(x, y) \, dv}, \quad y_C = \frac{\iiint_T \rho(x, y) y \, dv}{\iiint_T \rho(x, y) \, dv}, \quad z_C = \frac{\iiint_T \rho(x, y) z \, dv}{\iiint_T \rho(x, y) \, dv}.$$

§4. Криволинейные координаты и замена переменных в кратных интегралах

1. Криволинейные координаты.

Относительно пространственной декартовой системы координат $Oxyz$ положение точки M определяется ее тремя декартовыми координатами x , y и z . Если $z > 0$, то положение точки M можно определить, задав три параметра: ρ – расстояние точки M от оси Oz ; r – расстояние точки M от начала координат; φ – двугранный угол между плоскостью xOz и плоскостью, проходящей через ось Oz и точку M (рис. 1.4.1).

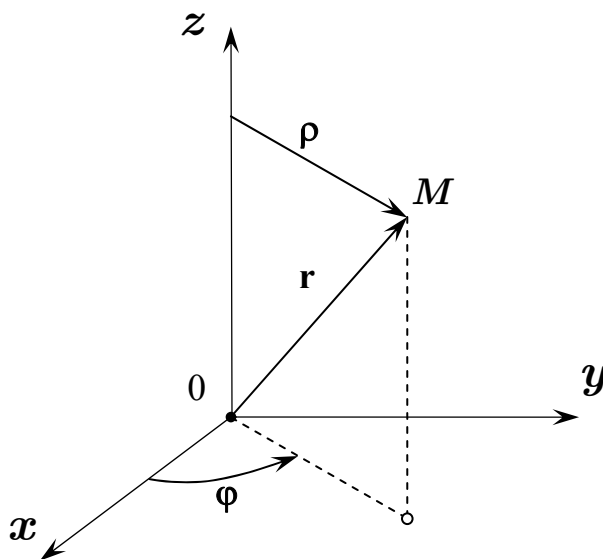


Рис. 1.4.1

Очевидно, что параметры ρ , r и φ можно выразить через декартовы координаты x , y и z . Параметры ρ , r и φ мы можем также назвать координатами точки M , причем

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

И вообще, за координаты точки M мы можем принять любые три функции:

$$\xi = \xi(x, y, z), \quad \eta = \eta(x, y, z), \quad \zeta = \zeta(x, y, z), \quad (1)$$

лишь бы только соотношениями (1) координаты x , y и z определялись однозначно:

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta), \quad (2)$$

т.е. ни одно из соотношений (1) или (2) не должно противоречить другим или быть следствием других. Заметим, что из соотношений (2) в этом случае параметры ξ , η и ζ также будут определяться однозначно. Можно доказать, что эти условия выполняются, если определить $J(\xi, \eta, \zeta)$, называемый *определителем Якоби* или *якобианом* преобразования, отличен от нуля, т.е.

$$J(\xi, \eta, \zeta) = \begin{vmatrix} x'_\xi & x'_\eta & x'_\zeta \\ y'_\xi & y'_\eta & y'_\zeta \\ z'_\xi & z'_\eta & z'_\zeta \end{vmatrix} \neq 0.$$

2. Координатные поверхности.

Зафиксируем какую-нибудь координату, определенную соотношениями (1), например ξ , положив $\xi = c_1$, тогда получим $\xi(x, y, z) = c_1$ (рис. 1.4.2).

С геометрической точки зрения этому уравнению в пространстве соответствует некоторая поверхность ξ . Аналогично можно определить координатные поверхности η и ζ соответственно:

$$\eta(x, y, z) = c_2 \quad \text{и} \quad \zeta(x, y, z) = c_3.$$

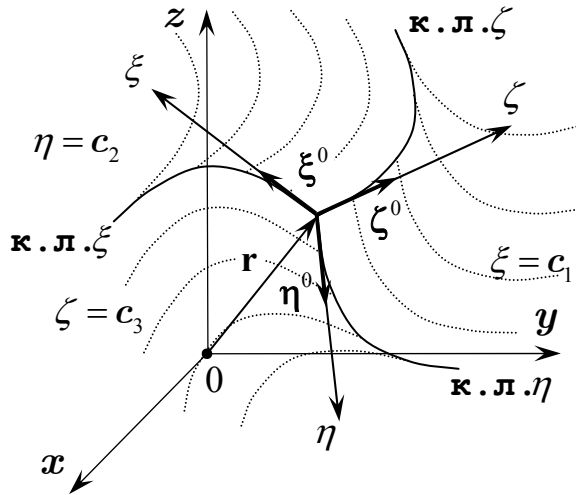


Рис. 1.4.2

Координатные поверхности $\xi = c_1$, $\eta = c_2$ и $\zeta = c_3$ при соблюдении условия (2) пересекаются в некоторой точке M . Таким образом, точка M определяется как точка пересечения координатных поверхностей (рис. 1.4.2).

3. Координатные линии.

Рассмотрим пересечения двух координатных поверхностей:

$$\left. \begin{aligned} \xi(x, y, z) = c_1 \\ \eta(x, y, z) = c_2 \end{aligned} \right\}.$$

Очевидно, что кривая, по которой пересекаются эти поверхности, обладает таким свойством, что вдоль этой кривой координаты ξ и η постоянны, а меняется одна только координата ζ , поэтому этак кривая называется координатной линией ζ . Аналогично пересечение поверхностей

$$\left. \begin{aligned} \xi(x, y, z) = c_1 \\ \zeta(x, y, z) = c_3 \end{aligned} \right\} \text{ и } \left. \begin{aligned} \eta(x, y, z) = c_2 \\ \zeta(x, y, z) = c_3 \end{aligned} \right\}$$

дает нам соответственно координатные линии η и ξ .

Очевидно, что в общем случае координатные линии представляются собой некоторые кривые, поэтому координаты ξ , η и ζ называются криволинейными координатами. Проведем к координатным линиям, пересекающимся в точке M , касательные, направления которых соответствуют направлениям возрастания координат. Орты этих осей называются ортами криволинейных координатных осей и обозначаются соответственно ξ^0 , η^0 и ζ^0 . Систему криволи-

нейных координат называют *ортогональной*, если ортогональны орты ξ^0 , η^0 и ζ^0 , т.е. выполняются условия

$$\xi^0 \cdot \eta^0 = \eta^0 \cdot \zeta^0 = \zeta^0 \cdot \xi^0 = 0.$$

Заметим, что в декартовой системе координат *Oxyz* координатными поверхностями будут являться плоскости, параллельные координатным плоскостям *xOy*, *xOz* и *yOz*, а координатными линиями — прямые, параллельные координатным осям *Ox*, *Oy* и *Oz*.

4. Коэффициенты Ламе.

Рассмотрим вектор \mathbf{r} — радиус-вектор точки M поверхностей (рис. 1.4.2). Очевидно, что производная $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi}$ лежит на касательной

к годографу вектора \mathbf{r} , построенному в предположении, что меняется только координата ξ , а координаты η и ζ остаются неизменными; и направлена в сторону возрастания координаты ξ . Очевидно,

$$\text{но, что } \xi^0 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \right|. \text{ Аналогично } \eta^0 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \right|, \zeta^0 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \right|.$$

Выражения $H_\xi = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \right|$, $H_\eta = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \right|$ и $H_\zeta = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \right|$ называются коэффициентами Ламе. Так как радиус-вектор точки M равен $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, то, выполняя дифференцирование, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \mathbf{k} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \mathbf{k} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} &= \frac{\partial x}{\partial \zeta} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \mathbf{k} \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Принимая во внимание эти соотношения, нетрудно получить такие выражения для коэффициентов Ламе:

$$\left. \begin{aligned} H_\xi &= \sqrt{x_\xi'^2 + y_\xi'^2 + z_\xi'^2} \\ H_\eta &= \sqrt{x_\eta'^2 + y_\eta'^2 + z_\eta'^2} \\ H_\zeta &= \sqrt{x_\zeta'^2 + y_\zeta'^2 + z_\zeta'^2} \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Примем во внимание соотношения (3) и (4), тогда выражения для ортов криволинейных координат запишутся так:

$$\xi^0 = (x'_\xi \mathbf{i} + y'_\xi \mathbf{j} + z'_\xi \mathbf{k}) / \sqrt{x'^2_\xi + y'^2_\xi + z'^2_\xi};$$

$$\eta^0 = (x'_\eta \mathbf{i} + y'_\eta \mathbf{j} + z'_\eta \mathbf{k}) / \sqrt{x'^2_\eta + y'^2_\eta + z'^2_\eta};$$

$$\zeta^0 = (x'_\zeta \mathbf{i} + y'_\zeta \mathbf{j} + z'_\zeta \mathbf{k}) / \sqrt{x'^2_\zeta + y'^2_\zeta + z'^2_\zeta}.$$

5. Сферические координаты.

Сферическими координатами M точки называются параметры ρ , θ и ψ (рис. 1.4.3), где

ρ – расстояние от точки M до начала координат ($0 \leq \rho < +\infty$);

θ – угол, отсчитываемый от оси Oz до вектора $\vec{\rho}$ ($0 \leq \theta < \pi$);

ψ – угол, между плоскостью xOz и плоскостью, проходящей через точку M и ось Oz ($0 \leq \psi < 2\pi$).

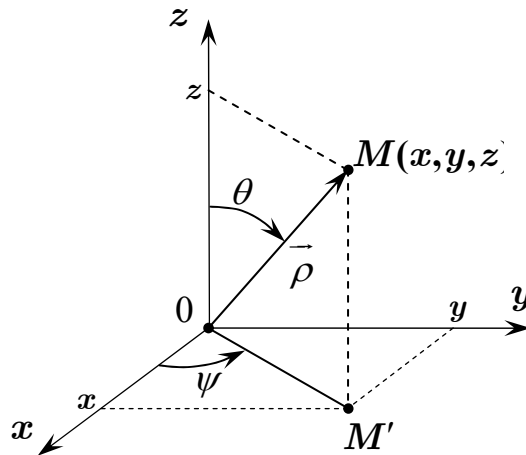


Рис. 1.4.3

Очевидно, что в сферических координатах *координатными поверхностями* являются такие поверхности:

$\rho = c_1$ – сфера радиуса c_1 центром в начале координат (рис. 1.4.4 а);

$\theta = c_2$ – конус с вершиной в начале координат, образующие которого составляют угол $\theta = c_2$ с осью Oz (рис. 1.4.4 б);

$\psi = c_3$ – плоскость, проходящая через ось Oz и образующая угол $\psi = c_3$ с координатной плоскостью Oz (рис. 1.4.4 в).

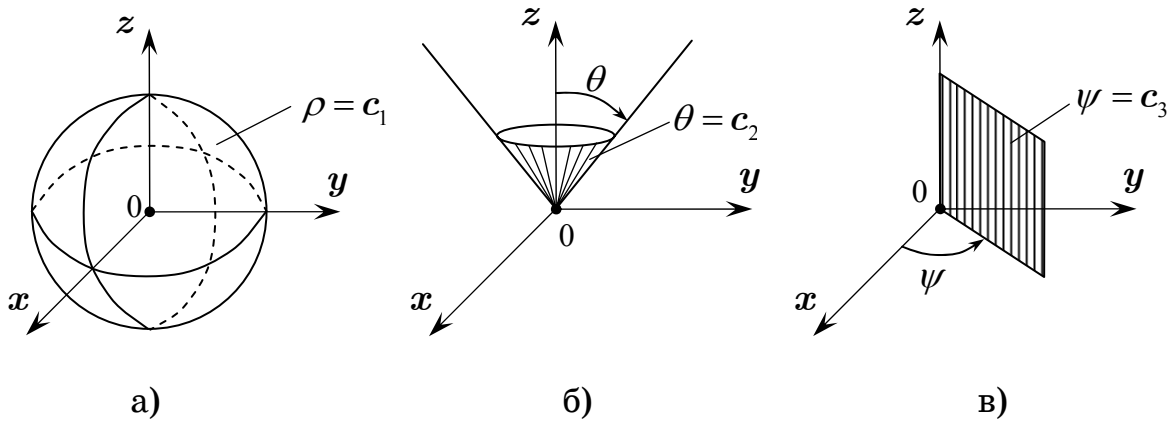


Рис. 1.4.4

Сфера $\rho = c_1$ и конус $\theta = c_2$ пересекаются по окружности, которая представляет собой **координатную линию ψ** . Сфера $\rho = c_1$ и плоскость $\psi = c_3$ пересекаются по окружности (**координатная линия θ**). Конус $\theta = c_2$ и плоскость $\psi = c_3$ пересекаются по прямой (**координатная линия ρ**). Орты криволинейной сферической системы координат изображены на рис. 1.4.5.

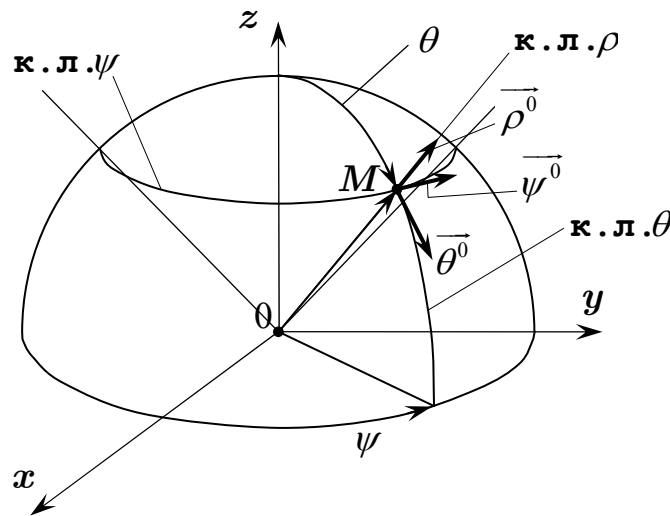


Рис. 1.4.5

Непосредственно из рис. 1.4.3 можно установить **связь между декартовыми и сферическими координатами**:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \psi \\ y = \rho \sin \theta \sin \psi . \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

Вычислим теперь якобиан преобразования для сферических координат:

$$J(\rho, \theta, \psi) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta & x'_\psi \\ y'_\rho & y'_\theta & y'_\psi \\ z'_\rho & z'_\theta & z'_\psi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \psi & \rho \cos \theta \cos \psi & -\rho \sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \sin \psi & \rho \cos \theta \sin \psi & \rho \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \theta.$$

Найдем теперь $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi}$ для сферических координат в соответствии с соотношениями (4):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} &= \sin \theta \cos \psi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \psi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= \rho \cos \theta \cos \psi \mathbf{i} + \rho \cos \theta \sin \psi \mathbf{j} - \rho \sin \theta \mathbf{k} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} &= -\rho \sin \theta \sin \psi \mathbf{i} + \rho \sin \theta \cos \psi \mathbf{j} \end{aligned} \right\}.$$

А теперь нетрудно написать выражения для коэффициентов Ламе в сферических координатах: $H_\rho = 1$, $H_\theta = \rho$ и $H_\psi = \rho \sin \theta$. Очевидно, что орты ρ^0 , θ^0 , ψ^0 запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \rho^0 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} / H_\rho = \sin \theta \cos \psi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \psi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} \\ \theta^0 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} / H_\theta = \cos \theta \cos \psi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \psi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k} \\ \psi^0 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} / H_\psi = -\sin \psi \mathbf{i} + \cos \psi \mathbf{j} \end{aligned} \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что криволинейная сферическая система координат ортогональна. Действительно

$$\rho^0 \cdot \theta^0 = \rho^0 \cdot \psi^0 = \theta^0 \cdot \psi^0 = 0.$$

6. Цилиндрические и полярные координаты.

Цилиндрическими координатами точки M (рис. 1.4.6) называются параметры:

ρ — расстояние от точки M до оси Oz ($0 \leq \rho < +\infty$);

φ — угол, отсчитываемый от плоскости xOz до плоскости, проходящей через точку M и ось Oz ($0 \leq \varphi < 2\pi$);

z — координата, совпадающая с декартовой координатой z ($-\infty < z < +\infty$).

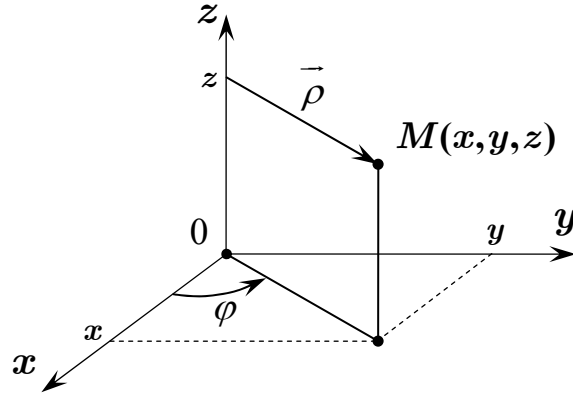


Рис. 1.4.6

Очевидно, что в цилиндрических координатах **координатными поверхностями** являются:

$\rho = c_1$ — цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны оси Oz , а направляющей служит окружность в плоскости xOy с центром в начале координат радиуса $\rho = c_1$ (рис. 1.4.7 а);

$\varphi = c_2$ — плоскость, проходящая через ось Oz и образующая с координатной плоскостью xOy угол φ (рис. 1.4.7 б);

$z = c_3$ — плоскость, параллельная координатной плоскости xOy (рис. 1.4.7 в).

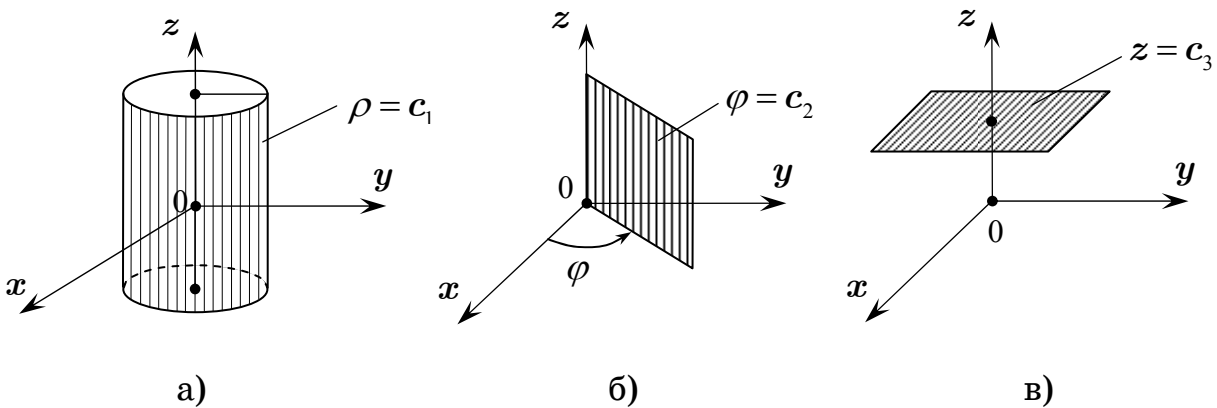


Рис. 1.4.7

Координатные поверхности $\rho = c_1$ и $\varphi = c_2$ пересекаются по прямой, параллельной оси Oz (**координатная линия z**). Координатные поверхности $\rho = c_1$ и $z = c_3$ пересекаются по окружности (**координатная линия φ**). Координатные поверхности $\varphi = c_2$ и $z = c_3$ пересекаются по прямой (**координатная линия ρ**). Орты цилинд-

рической системы координат и координатные линии ρ , φ , и z изображены на рис. 1.4.8.

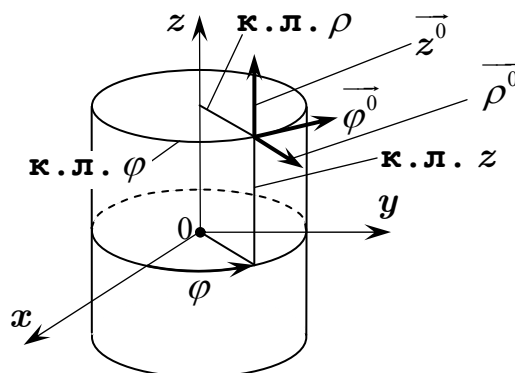


Рис. 1.4.8

Непосредственно из рис. 1.4.6 можно установить *связь между декартовыми и цилиндрическими координатами*:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\}.$$

Найдем якобиан преобразования для цилиндрических координат:

$$J(\rho, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Нетрудно получить выражения для $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$ и $\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}$ а также коэффициенты Ламе H_ρ , H_φ и H_z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} &= \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}, & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} &= -\rho \sin \varphi \mathbf{i} + \rho \cos \varphi \mathbf{j}, & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} &= \mathbf{k}; \\ H_\rho &= 1, & H_\varphi &= \rho, & H_z &= 1. \end{aligned}$$

С учетом этих соотношений получим:

$$\left. \begin{aligned} \rho^0 &= \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j} \\ \varphi^0 &= -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} \\ z^0 &= \mathbf{k} \end{aligned} \right\}.$$

Вычисляя скалярные произведения ортов ρ^0 , φ^0 и z^0 , нетрудно убедиться, что $\rho^0 \cdot \varphi^0 = \rho^0 \cdot z^0 = \varphi^0 \cdot z^0 = 0$, т.е. можно сделать вывод, что цилиндрическая система координат ортогональна.

Если положить $z = 0$, то мы придем к известным уже полярным координатам ρ , φ :

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \end{aligned} \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что для полярных и цилиндрических координат выражения для якобиана преобразования совпадают, т.е.

$$J(\rho, \varphi, z) = J(\rho, \varphi) = \rho.$$

7. Замечание (о геометрическом смысле якобиана).

Рассмотрим ортогональную криволинейную систему координат $O\xi\eta$, и пусть декартовы координаты x и y связаны с криволинейными ξ и η соотношениями:

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta),$$

причем предполагается, что якобиан преобразования

$$J(\xi, \eta) = x'_\xi \cdot y'_\eta - x'_\eta \cdot y'_\xi \neq 0.$$

Рассмотрим в плоскости xOy простую область D , ограниченную контуром K (рис. 1.4.9). В плоскости $O_1\xi\eta$ ей соответствует некоторая область Δ , ограниченная контуром L .

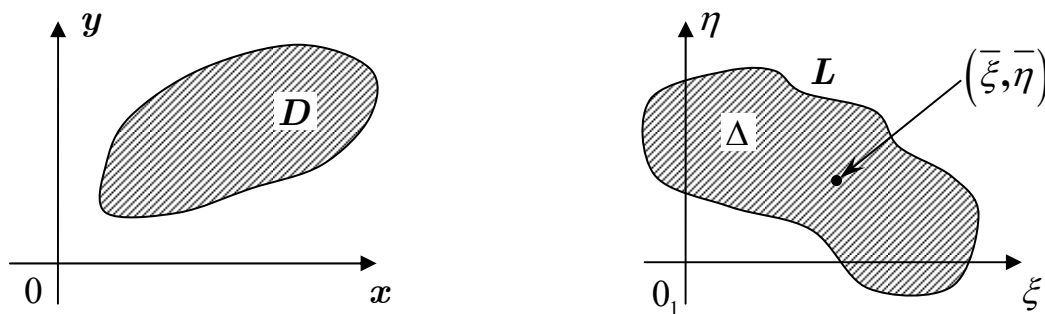


Рис. 1.4.9

Если функции $x(\xi, \eta)$ и $y(\xi, \eta)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка, а также непрерывные смешанные производные, то в этом случае можно доказать, что площади S_D и S_Δ связаны соотношением

$$S_D = |J(\bar{\xi}, \bar{\eta})| \cdot S_\Delta,$$

где $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ — некоторая «средняя» точка области Δ . Из этого соотношения вытекает очевидный геометрический смысл якобиана преобразования. А именно: мы можем сказать, что модуль якобиана преобразования $|J(\bar{\xi}, \bar{\eta})|$ при переходе к криволинейным координатам дает нам коэффициент искажения площадей отображаемых областей.

Можно доказать также, что для пространственного случая, когда осуществляется переход от декартовых координат x, y и z к криволинейным ξ, η, ζ при выполнении соответствующих предположений (непрерывность функций, их частных производных и т.п.) имеет место соотношение $v_T = |J(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})| \cdot v_{T'}$, где v_T — объем области в системе координат $Oxyz$, $v_{T'}$ — объем отображенной области T' в системе координат $O_1\xi\eta\zeta$. В данном случае, с геометрической точки зрения, на модуль якобиана преобразования $|J(\xi, \eta, \zeta)|$ можно смотреть как на коэффициент искажения объемов.

8. Замена переменных двойных в тройных интегралах.

Пусть осуществляется переход от декартовых координат x и y к криволинейными ξ и η :

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) \\ y &= y(\xi, \eta) \end{aligned} \right\}.$$

Предположим, что выполнены условия предыдущего параграфа относительно функций $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$, $\xi = \xi(x, y)$ и $\eta = \eta(x, y)$ и их частных производных и имеет силу все сказанное об областях D и Δ . Пусть, кроме того, в области D задана непрерывная функция $f(x, y)$.

Рассмотрим двойной интеграл $I = \iint_D f(x, y) dx dy$.

Составим интегральную сумму для этого двойного интеграла:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \cdot \Delta S_{D_k}.$$

Произвольному разбиению области D на ячейки D_1, D_2, \dots, D_n соответствует разбиение области Δ на ячейки $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, а точкам (x_k, y_k) соответствуют точки $(\xi_k, \eta_k) \in \Delta_k$ (рис. 1.4.9). Следовательно, можем написать:

$$\Delta S_{D_k} = |J(\bar{\xi}, \bar{\eta})| \cdot \Delta S_{\Delta_k},$$

а тогда

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(x(\xi_k, \eta_k), y(\xi_k, \eta_k)) \cdot |J(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)| \Delta S_{\Delta_k}.$$

Измельчая дробление и устремляя ранг дробления к нулю, получим:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sigma_n = \iint_{\Delta} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \cdot |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta.$$

Пример 1. Вычислить:

$$I = \iint_D (x^2 + xy) dx dy,$$

где D есть круг $x^2 + y^2 \leq R^2$ (рис. 1.4.10).

Решение. Перейдем к полярным координатам.

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\}$$

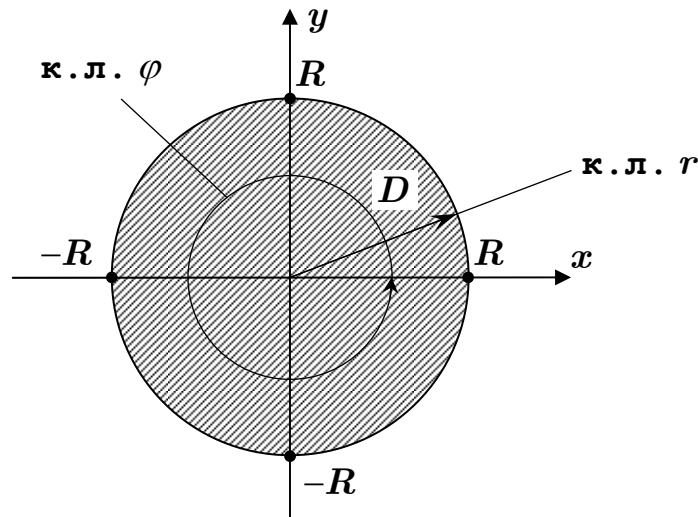


Рис. 1.4.10

Найдем уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в полярных координатах. Имеем:

$$(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = R^2 \Leftrightarrow r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = R^2 \Leftrightarrow r = R$$

при любом φ , (т.е. φ изменяется от 0 до 2π), а r является постоянным. Итак, окружность $x^2 + y^2 = R^2$ в полярных координатах имеет уравнение $r = R$ ($\varphi \in [0, 2\pi]$). Учитывая, что $|I(r, \varphi)| = r$, получим:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x^2 + xy) dx dy = \iint_{\Delta} (r^2 \cos^2 \varphi + r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi) \cdot r dr d\varphi = \\ &= \iint_{\Delta} (\cos^2 \varphi + \cos \varphi \cdot \sin \varphi) \cdot r^3 dr d\varphi = \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi + \cos \varphi \cdot \sin \varphi) d\varphi \int_0^R r^3 dr. \end{aligned}$$

Вычислим внутренний интеграл

$$I_{\text{внутр}} = \int_0^R r^3 dr = \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{R^4}{4}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \frac{R^4}{4} \cdot \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi + \cos \varphi \cdot \sin \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{R^4}{4} \cdot \left[\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi + \int_0^{2\pi} \sin \varphi d(\sin \varphi) \right] = \\ &= \frac{R^4}{4} \cdot \left[\frac{1}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big|_0^{2\pi} \right] = \frac{\pi R^4}{4}. \end{aligned}$$

Заметим, что для того, чтобы расставлять пределы интегрирования, достаточно выяснить, как проходят (возрастают) через область D координатные линии r и φ .

Предположим далее, что нужно вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz,$$

и пусть осуществляется переход к криволинейным координатам ξ , η , ζ по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta) \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta) \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \right\}.$$

Предположим, что относительно функций $x(\xi, \eta, \zeta)$, $y = y(\xi, \eta, \zeta)$, $z = z(\xi, \eta, \zeta)$, $\xi = \xi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$, $\zeta = \zeta(x, y, z)$ и их частных производных имеет место, сказанное в замечании п. 7.

Допустим также, что в области T функция $f(x, y, z)$ непрерывна. Тогда, аналогично вышесказанному относительно двойного интеграла, имеет место соотношение:

$$\begin{aligned} \iiint_T f(x, y, z) \, dx dy dz &= \\ &= \iiint_T f[x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)] \cdot |J(\xi, \eta, \zeta)| \, d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned}$$

где $J(\xi, \eta, \zeta)$ – якобиан преобразования.

Для расстановки пределов интегрирования по переменным ξ , η , ζ следует выяснить, как проходят координатные линии ξ , η , ζ через область T .

Пример 2. Вычислить площадь поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (рис. 1.4.11).

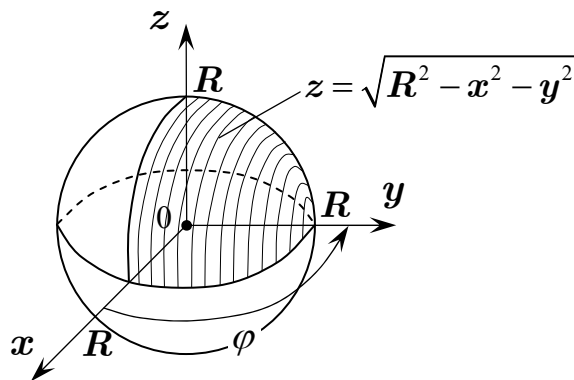


Рис. 1.4.11

Решение. Вычислим восьмую часть площади поверхности сферы, лежащую в первом октанте:

$$\frac{1}{8} S = \iint_D \sqrt{p^2(x, y) + q^2(x, y) + 1} \, dx dy,$$

где $p(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$, $q(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$. В нашем случае

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Следовательно,

$$p(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad q(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Итак, имеем:

$$\frac{1}{8}S = \iint_D \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2} + 1} dx dy = \iint_D \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Перейдем к полярным координатам

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad |J(r, \varphi)| = r.$$

Ясно, что

$$\iint_D \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \iint_D \frac{R r dr d\varphi}{\sqrt{R^2 - r^2}} = R \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Вычислим

$$I_{\text{внутр}} = \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = -\frac{1}{2} \int_0^R \frac{d(R^2 - r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}} = -\sqrt{R^2 - r^2} \Big|_0^R = R,$$

тогда

$$\frac{1}{8}S = 8R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 4\pi R^2 \text{ кв. ед.},$$

т.е. площадь поверхности сферы радиуса равна $4\pi R^2$.

Пример 3. Найти объем тела, лежащего в первом октанте и ограниченного снизу конической поверхностью $x^2 + y^2 = z^2$, сверху шаровой поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, а с боков координатными плоскостями $x=0$ и $y=0$ (рис. 1.4.12).

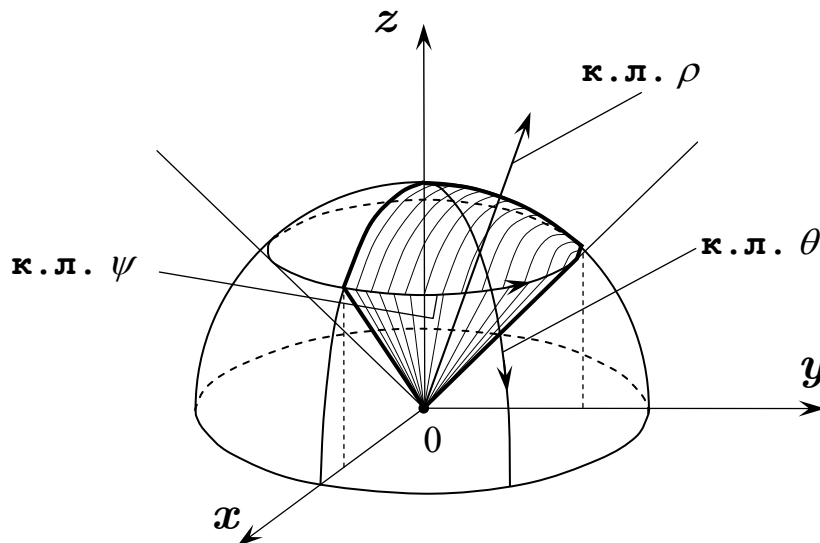


Рис. 1.4.12

Решение. Искомый объем $v = \iiint_T dx dy dz$. Перейдем к сферическим координатам:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \psi \\ y &= r \sin \theta \sin \psi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\},$$

$$|J(r, \theta, \psi)| = r^2 \sin \theta.$$

Уравнение $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в сферических координатах имеет вид:

$$r \cdot \cos \theta = \sqrt{(r \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi)^2 + (r \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi)^2}$$

или

$$r \cdot \sin \theta = r \cdot \cos \theta,$$

откуда

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Нетрудно догадаться, что уравнение шаровой поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в сферических координатах имеет такое уравнение:

$r = R$. Итак, искомый объем:

$$v = \iiint_T r^2 \sin \theta \, dr d\psi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr.$$

Вычислим:

$$I_{1 \text{ внутр}} = \int_0^R r^2 dr = \frac{R^3}{3};$$

$$I_{2 \text{ внутр}} = \frac{R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta = \frac{R^3}{3} (-\cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{R^3}{3} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - (-1) \right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{6} R^3.$$

Окончательно:

$$v = \iiint_T r^2 \sin \theta \, dr d\psi d\theta = \frac{2 - \sqrt{2}}{6} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi = \frac{(2 - \sqrt{2})\pi}{12} R^3 \text{ куб. ед.}$$

Пример 4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью $x^2 + y^2 = (z - 2)^2$ и плоскостью xOy (рис. 1.4.13).

Решение. Тело симметрично, поэтому вычислим объем его четвертой части, лежащей в первом октанте:

$$\frac{1}{4}v = \iiint_T dx dy dz.$$

Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\}.$$

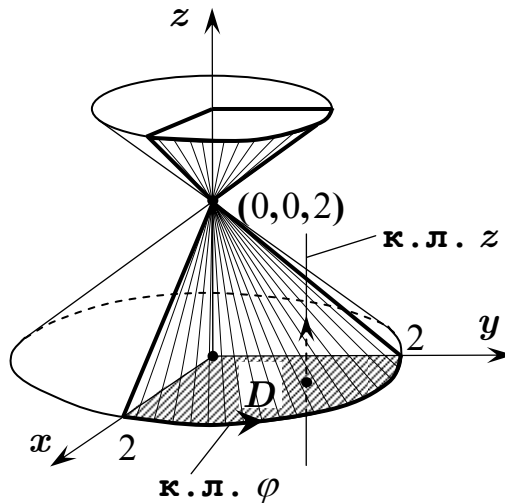


Рис. 1.4.13

Уравнение конуса в цилиндрических координатах $r^2 = (z-2)^2$. Часть конуса, ограничивающая тело, имеет уравнение $z = 2 - r$. Тогда будет:

$$\frac{1}{4}v = \iiint_T r \, dr d\varphi dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 dr \int_0^{2-r} r dz.$$

Вычислим внутренние интегралы:

$$I_{1 \text{ внутр}} = \int_0^{2-r} r dz = r \cdot z \Big|_0^{2-r} = 2r - r^2;$$

$$I_{2 \text{ внутр}} = \int_0^2 (2r - r^2) dr = \left(r^2 - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Окончательно:

$$\frac{1}{4}v = \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Ответ: $v = \frac{8\pi}{3}$ куб. ед.

Глава 2

Криволинейные интегралы

§1. Криволинейные интегралы I рода

1. Определение криволинейного интеграла первого рода.

Пусть в плоскости xOy лежит кривая AB , у которой существует длина дуги, и пусть в каждой точке этой кривой определена некоторая функция $f(x, y)$ (рис. 2.1.1).

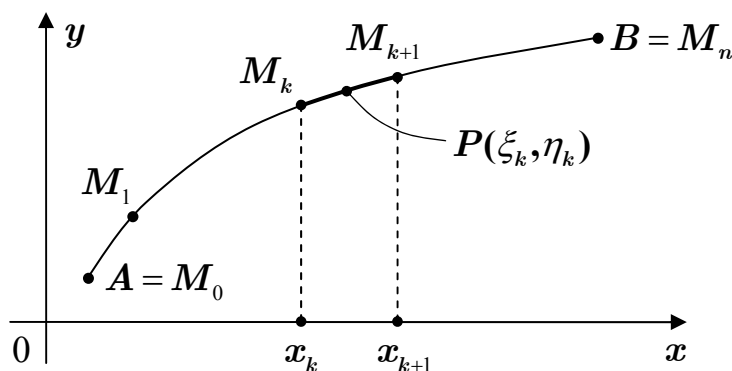


Рис. 2.1.1

Разобьем кривую AB произвольным образом точками, следующими друг за другом от A к B , на n частей.

Пусть ΔS_k — длина дуги $\overline{M_k M_{k+1}}$. Наибольшую из длин дуг ΔS_k назовем рангом дробления и обозначим λ . На каждой дуге $\overline{M_k M_{k+1}}$ возьмем произвольную точку $P(\xi_k, \eta_k)$ и вычислим в ней значение функции $f(\xi_k, \eta_k)$.

Составим произведение $f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta S_k$ и просуммируем все такие произведения, т.е. образуем интегральную сумму (сумму Римана):

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta S_k.$$

Измельчая дробление, будем искать предел последовательности интегральных сумм при условии, что $\lambda \rightarrow 0$:

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n.$$

Если этот предел существует, не зависит от способа дробления и выбора точек (ξ_k, η_k) , то он называется **криволинейным интегралом от функции $f(x, y)$ по кривой AB** и обозначается

$$I = \int_{AB} f(x, y) dS.$$

Т.е. короче:

$$\int_{AB} f(x, y) dS \stackrel{def}{=} \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta S_k.$$

Заметим, что из структуры интегральной суммы следует, что не играет роли, какую из точек принять за начало, а какую за конец кривой, т.е. очевидно, что

$$\int_{AB} f(x, y) dS = \int_{BA} f(x, y) dS.$$

Совершенно аналогично определяется криволинейный интеграл по пространственной кривой

$$I = \int_{AB} f(x, y, z) dS.$$

2. Теорема существования криволинейного интеграла I рода.

Теорема. Если кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \right\},$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определены, непрерывны и имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ на промежутке $[p, q]$ ($p < q$), и если в каждой точке кривой AB задана непрерывная функция $f(x, y)$, то тогда криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x, y)$ по кривой AB существует и выражается через определенный интеграл так:

$$\int_{AB} f(x, y) dS = \int_p^q f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

(без доказательства).

Заметим, что для пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \\ z &= \eta(t) \end{aligned} \right\}, \quad t \in [p, q] \quad (p < q)$$

при соблюдении условий теоремы, получим:

$$\int_{AB} f(x, y, z) dS = \int_p^q f[\varphi(t), \psi(t), \eta(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \eta'^2(t)} dt.$$

Частный случай теоремы существования криволинейного интеграла I рода.

Теорема. Если кривая AB задана уравнением $y = \psi(x)$, причем функция $\psi(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a, b]$, ($a < b$) и имеет на этом промежутке непрерывную производную $\psi'(x)$, и если в каждой точке кривой AB задана непрерывная функция $f(x, y)$, то тогда криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x, y)$ по кривой AB существует и выражается через определенный интеграл так:

$$\int_{AB} f(x, y) dS = \int_a^b f[x, \psi(x)] \sqrt{1 + \psi'^2(x)} dt.$$

Если принять во внимание, что криволинейный интеграл первого рода выражается через определенный, то свойства его станут очевидны. Остановимся на его применении.

3. Применение криволинейных интегралов первого рода.

1. Вычисление длины дуги кривой.

Из определения криволинейного интеграла первого рода следует, что длина дуги кривой AB , по которой ведется интегрирование, равна

$$S_{AB} = \int_{AB} dS.$$

Пример. Вычислить длину дуги астроида

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos^3 t \\ y &= a \sin^3 t \end{aligned} \right\} \quad (a > 0).$$

Решение. Принимая во внимание, что $\sin t$ и $\cos t$ 2π -периодичные функции, становится очевидно, что точка $M(x, y)$

обегает контур кривой $ABCD$ в указанном направлении, если $t \in [0, 2\pi]$. Ввиду того, что кривая симметрична (рис. 2.1.2), найдем четвертую часть ее длины

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}S &= \int_{AB} dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a \sin^3 t)'_t + (a \cos^3 t)'_t} dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(3a \sin^2 t \cdot \cos t)^2 + (3a \cos^2 t \cdot (-\sin t))^2} dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cdot \cos^2 t} dt = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \cos t dt = \\ &= 3a \int_0^{2\pi} \sin t d\sin t = 3a \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем: длина дуги астроида
 $S = 6a$ единиц длины.

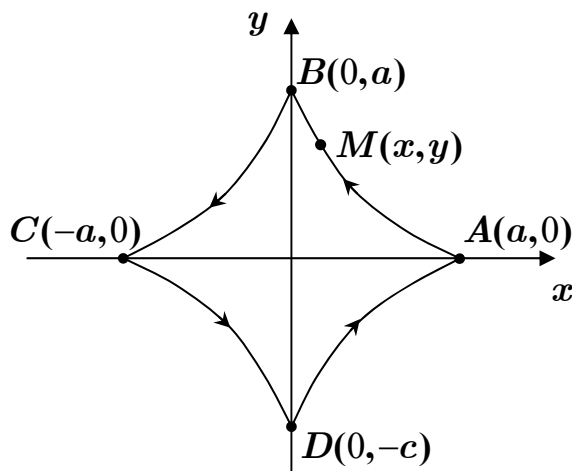


Рис. 2.1.2

2. Вычисление массы материальной кривой.

Найдем массу кривой AB , заданной уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная функция на промежутке $[a, b]$, если плотность ее в каждой точке кривой определена непрерывной функцией $\rho = \rho(x, y)$.

Разобьем кривую AB на n частей произвольным образом. Очевидно, что ее масса

$$M \approx \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta S_k,$$

где (ξ_k, η_k) – произвольная точка, принадлежащая каждому отрезку кривой AB , а ΔS_k – длина дуги этого участка. В правой части выражения для M стоит интегральная сумма, а потому, измельчая дробление и устремляя его шаг к нулю, мы получим в пределе:

$$M = \int_{AB} \rho(x, y) dS.$$

3. Вычисление работы.

Найдем работу силы по перемещению материальной точки вдоль кривой AB (рис. 2.1.3). Будем рассматривать кривую AB как направленную, тогда и на касательной к ней можно задать направление, совпадающее с направлением кривой. Действительно, пусть при движении по кривой от A к B точка M предшествует точке N , тогда будем считать, что секущая, проходящая от M к N , имеет направление, совпадающее с направлением кривой AB . Касательная τ есть предельное положение секущей при условии, что $N \rightarrow M$. Тогда направление с секущей переходит на касательную, и про такую касательную говорят, что она имеет направление, совпадающее с направлением кривой AB .

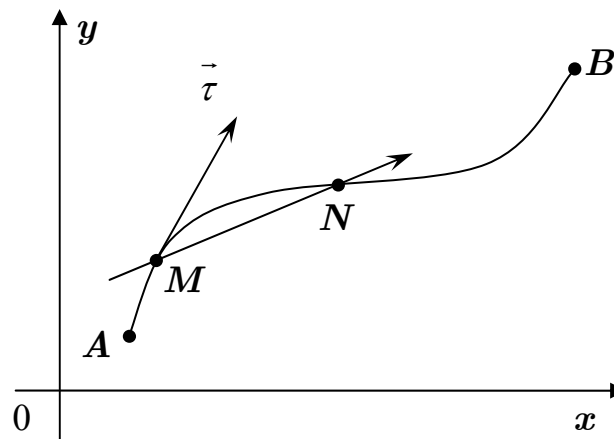


Рис. 2.1.3

Найдем работу силы F по перемещению материальной точки M из точки A в точку B вдоль кривой AB (рис. 2.1.4).

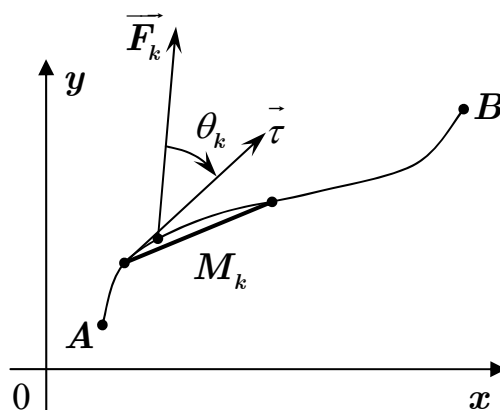


Рис. 2.1.4

Разобьем кривую AB произвольным образом на n частей и будем считать, что каждый k -й участок кривой – прямолинейный отрезок, длина которого ΔS_k . Сила F на каждом таком участке постоянна по величине и направлению, и угол между силой F и участком кривой равен θ_k . Тогда элементарная работа силы F на рассматриваемом участке

$$\Delta A_k = F_k \cdot \Delta S_k \cos \theta_k.$$

Отсюда вся работа

$$A = \int_{AB} F \cos \theta \, dS.$$

§2. Криволинейные интегралы II рода

1. Определение криволинейного интеграла второго рода.

Пусть в плоскости xOy лежит кривая AB , в каждой точке которой определена функция $f(x, y)$ (рис. 2.1.1).

Разобьем кривую AB произвольным образом точками $M_0 = A$, M_1 , M_2 , ..., M_n , следующими друг за другом, на n частей; пусть d_1 , d_2 , ..., d_n – диаметры дуг $\overline{M_0M_1}$, $\overline{M_1M_2}$, ..., $\overline{M_{n-1}M_n}$, наибольший из диаметров d_k , равный λ , есть ранг дробления.

На каждой дуге $\overline{M_kM_{k+1}}$ возьмем произвольную точку $P_k(\xi_k, \eta_k)$, вычислим в ней значение функции $f(\xi_k, \eta_k)$ и составим произведение $f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

Просуммируем все такие произведения, т.е. составим интегральную сумму (сумму Римана):

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k.$$

Измельчая дробление и устремляя ранг дробления к нулю, ищем предел

$$I = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sigma_n.$$

Если этот предел существует, не зависит от способа дробления и выбора точек (ξ_k, η_k) , то он называется **криволинейным интегралом второго рода от функции $f(x, y)$ по кривой AB** и обозначается так:

$$I = \int_{AB} f(x, y) dx.$$

Итак, короче:

$$\int_{AB} f(x, y) dx \stackrel{def}{=} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k.$$

Определение относится к плоской кривой. Точно так же определяется интеграл по пространственной кривой $\int_{AB} f(x, y, z) dx$.

Аналогично определяются интегралы $\int_{AB} f(x, y, z) dy$ и

$$\int_{AB} f(x, y, z) dz.$$

Сумму интегралов по кривой AB обозначают так:

$$\begin{aligned} & \int_{AB} P(x, y, z) dx + \int_{AB} Q(x, y, z) dy + \int_{AB} R(x, y, z) dz = \\ & = \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

Все сказанное не исключает случая, когда точка A совпадает с точкой B , т.е. кривая AB представляет собой замкнутый контур K , в этом случае криволинейный интеграл второго рода обозначается так:

$$\int_K f(x, y) dx,$$

причем безразлично, в какой точке следует начать движение по контуру. Следует заметить, что если K – плоский замкнутый контур самонепересекающейся контур, то у такого контура различают

положительное и отрицательное направление обхода, а именно: за положительное направление обхода принимают такое направление, при котором область, ограниченная контуром K , остается слева, если наблюдатель движется по контуру. В таком случае, если K — пространственная кривая, то направление обхода контура оговаривается особо. Иногда для интегралов по замкнутому самонепересекающемуся контуру употребляют такие обозначения:

$$\oint_{AB} f(x, y) dx \quad \text{или} \quad \oint_{AB} f(x, y) dx.$$

2. Теорема существования криволинейного интеграла второго рода.

Теорема. Если кривая AB задана уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \right\},$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определены и непрерывны на промежутке $[p, q]$, причем $\varphi'(t)$ также существует и непрерывна на $[p, q]$, а параметр t возрастает от p до q , то кривая AB (или контур K) описывается в одном и том же направлении от A до B ; и если в каждой точке кривой AB задана непрерывная функция $f(x, y)$, то тогда криволинейный интеграл второго рода от функции $f(x, y)$ по кривой AB существует и выражается через определенный интеграл так:

$$\int_{AB} f(x, y) dx = \int_p^q f[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Частный случай. Если кривая AB задана уравнением $y = \psi(x)$, где $\psi(x)$ — непрерывная на промежутке $[a, b]$ функция, и если в каждой точке кривой AB задана непрерывная функция $f(x, y)$, то тогда криволинейный интеграл второго рода $I = \int_{AB} f(x, y) dx$ существует и выражается через определенный интеграл так:

$$\int_{AB} f(x, y) dx = \int_a^b f[x, \psi(x)] dx.$$

3. Свойства криволинейного интеграла второго рода.

Остановимся на некоторых свойствах и применениях криволинейного интеграла второго рода, причем не будем упоминать и доказывать свойства, которые очевидны.

1. При определении криволинейного интеграла второго рода $I = \int_{AB} f(x, y) dx$ нужно различать начало и конец пути интегрирования, а именно:

$$\int_{AB} f(x, y) dx = - \int_{BA} f(x, y) dx.$$

Это свойство станет очевидным, если для одного и того же способа разбиения составить интегральные суммы для интегралов, стоящих в левой и правой части равенства.

2. В том случае, когда кривая AB замкнута, т.е. представляет собой замкнутый контур K , то

$$\oint f(x, y) dx = - \oint f(x, y) dx,$$

т.е. изменение направления обхода контура K меняет знак интеграла на противоположный.

3. Если функция $f(x, y)$ интегрируема на кривой AB и если точка C разбивает кривую на два участка AC и CB , то

$$\int_{AB} f(x, y) dx = \int_{AC} f(x, y) dx + \int_{CB} f(x, y) dx.$$

Для доказательства этого свойства достаточно составить интегральную сумму, а точку C включить в число точек дробления.

4. Очевидно, что если кривая AB есть прямолинейный отрезок, перпендикулярный оси Ox , то при любой $f(x, y)$ интеграл $I = \int_{AB} f(x, y) dx$ существует и равен нулю.

4. Связь криволинейных интегралов первого и второго рода.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{AB} P(x, y) dx,$$

где $P(x, y)$ — непрерывная функция, определенная в каждой точке кривой AB , а кривая AB задана уравнением $y = \psi(x)$, причем

$\psi(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\psi'(x)$ на промежутке $[a, b]$, где $a < b$ (рис. 2.2.1).

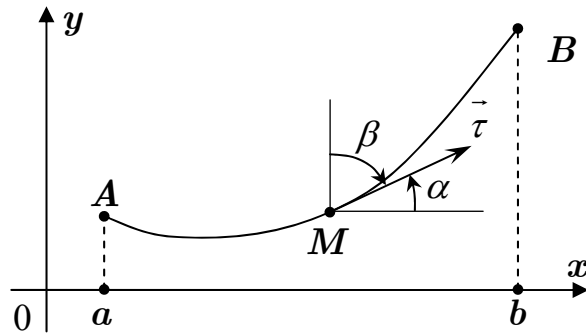


Рис. 2.2.1

При выполнении таких условий кривая AB в каждой точке имеет касательную. Мы будем рассматривать касательную, имеющую направление, совпадающее с направлением кривой AB . Обозначим через α угол между положительным направлением касательной и осью Ox . В силу геометрического смысла производной следует, что $\operatorname{tg} \alpha = \psi'(x)$, а тогда

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + [\psi'(x)]^2}}.$$

Интеграл I мы можем записать так:

$$I = \int_{AB} P[x, \psi(x)] \cos \alpha \sqrt{1 + \psi_x'^2} dx.$$

Перейдем в правой части к определенному интегралу:

$$I = \int_a^b P[x, \psi(x)] \cos \alpha \sqrt{1 + [\psi'(x)]^2} dx.$$

Точно такому же определенному интегралу равен криволинейный интеграл первого рода

$$I_1 = \int_{AB} P(x, y) \cos \alpha dS,$$

т.е. $I = I_1$.

Окончательно получаем

$$\int_{AB} P(x, y) \cos \alpha dS = \int_{AB} P(x, y) dx.$$

Совершенно аналогично можно доказать и такую формулу:

$$\int_{AB} Q(x, y) \cos \beta dS = \int_{AB} Q(x, y) dy,$$

где β – угол между положительным направлением касательной и осью Oy .

Складывая почленно две последние формулы, получим соотношение, устанавливающее связь между криволинейными интегралами первого и второго рода по кривой AB , лежащей в плоскости xOy :

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]dS.$$

Между левой и правой частями равенства здесь такое согласование: слева интеграл вычисляется по кривой AB от A к B , а справа через α и β обозначены углы касательной, направление которой совпадает с направлением кривой AB , с координатными осями.

Если AB – пространственная кривая, α, β, γ – углы касательной, совпадающей по направлению с кривой AB , с координатными осями Ox, Oy и Oz соответственно, то справедливо такое соотношение:

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \\ = \int_{AB} [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]dS. \end{aligned}$$

5. Вычисление работы с помощью криволинейного интеграла.

Мы получили ранее выражение для работы силы F по перемещению материальной точки M по кривой AB через криволинейный интеграл первого рода:

$$A = \int_{AB} F \cos\theta dS.$$

Здесь θ – угол между вектором F и касательной, направление которой совпадает с направлением кривой AB .

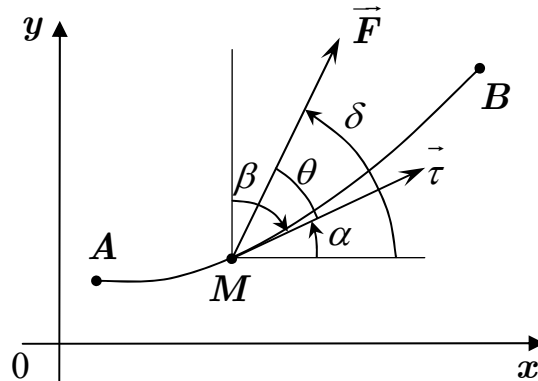


Рис. 2.2.2

Найдем выражение для этой работы с помощью криволинейного интеграла второго рода (рис. 2.2.2). Пусть α – угол между направлением касательной, совпадающим от A к B и осью Ox ; β – угол между направлением касательной и осью Oy ; δ – угол между вектором \vec{F} и осью Ox . Ясно, что $\theta = \pm(\delta - \alpha)$.

Обозначим через $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ проекции силы \vec{F} на координатные оси. Очевидно, что

$$F(x, y) \cdot \cos \delta = P(x, y), \quad F(x, y) \cdot \sin \delta = Q(x, y)$$

(здесь обозначено $|\vec{F}(x, y)| = F(x, y)$). Кроме того ясно, что

$$\cos \theta = \cos(\delta - \alpha) = \cos \delta \cos \alpha + \sin \delta \sin \alpha,$$

тогда

$$\begin{aligned} A &= \int_{AB} \vec{F} \cos dS = \int_{AB} (F(x, y) \cos \delta \cos \alpha + F(x, y) \sin \delta \sin \alpha) dS = \\ &= \int_{AB} (P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \sin \alpha) dS = \\ &= \int_{AB} (P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta) dS, \end{aligned}$$

т.к. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, следовательно $\sin \alpha = \cos \beta$. Наконец, учитывая связь между криволинейными интегралами I и II рода, окончательно можем написать:

$$A = \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Итак, мы можем учитывать, что всякий криволинейный интеграл второго рода вида

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

можно истолковать как работу силы, имеющей своими проекциями на координатные оси $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, по перемещению материальной точки вдоль кривой AB из точки A в точку B .

§3. Формула Грина

Пусть задана некоторая область D , ограниченная снизу кривой $y = \varphi(x)$, сверху – кривой $y = \Phi(x)$, а с боков – отрезками BC и AD , параллельными оси Oy (рис. 2.3.1), и пусть в этой области определена непрерывная функция $P(x, y)$, имеющая непрерывную частную производную $P'_y(x, y)$.

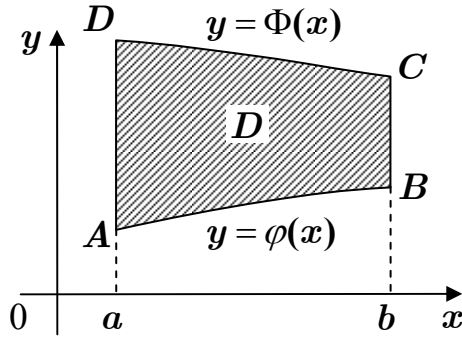


Рис. 2.3.1

Вычислим

$$I = \iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy.$$

Переходя к повторному интегралу, получим

$$I = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\Phi(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, \Phi(x)) - P(x, \varphi(x))] dx.$$

С другой стороны, интеграл по контуру области \$D\$:

$$\begin{aligned} \int_{K_D} P(x, y) dx &= \int_{AB} P(x, y) dx + \int_{BC} P(x, y) dx + \int_{CD} P(x, y) dx + \int_{DA} P(x, y) dx = \\ &= \int_a^b P[x, \varphi(x)] dx - \int_a^b P[x, \Phi(x)] dx. \end{aligned}$$

Правые части двух последних формул отличаются только знаком, следовательно,

$$\iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = - \int_{K_D} P(x, y) dx.$$

Полученная формула называется *малой формулой Грина*. Можно доказать, что она справедлива и для области, изображенной на рис 2.3.2.

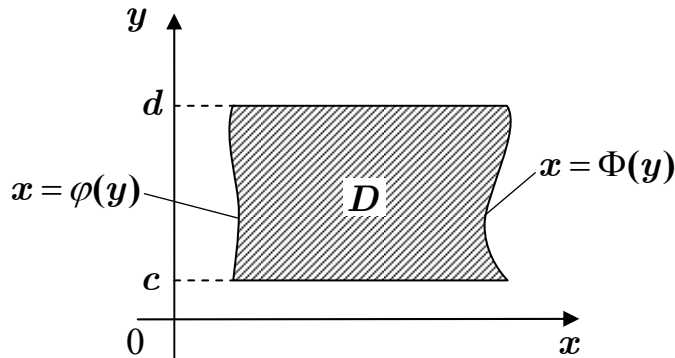


Рис. 2.3.2

Нетрудно доказать также, что эта формула справедлива для любой области, распадающейся на конечное число частей, изображенных на рис. 2.3.1 и 2.3.2.

Если в области D определена и непрерывна функция $Q(x, y)$, имеющая непрерывную частную производную $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$, то совершенно аналогично можно доказать *вторую малую формулу Грина*:

$$\iint_D \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \int_{K_D} Q(x, y) dy.$$

Вычитая почленно из второй первую малую формулу Грина, получим такую формулу:

$$\iint_D \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dx dy = \int_{K_D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Эта формула называется *большой формулой Грина* или просто *формулой Грина*. Она устанавливает связь между двойным интегралом по области D и криволинейным интегралом по контуру этой области.

Замечание (о вычислении площади области с помощью криволинейного интеграла). Положим в формуле Грина $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$ тогда получим

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 1 + 1 = 2.$$

При таких значениях функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ интеграл, стоящий в левой части формулы Грина, дает нам удвоенную площадь области D , откуда следует

$$S_D = \frac{1}{2} \int_{K_D} x dy - y dx.$$

По этой формуле можно вычислить площадь области D , ограниченной контуром K_D .

Пример. Вычислить площадь, ограниченную кривой

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t \end{aligned} \right\}.$$

Решение. Запишем параметрические уравнения данной кривой так

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \cos t \\ \frac{y}{b} &= \sin t \end{aligned} \right\}.$$

Возводя в квадрат и складывая почленно эти уравнения, получим каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{рис. 2.3.3}).$$

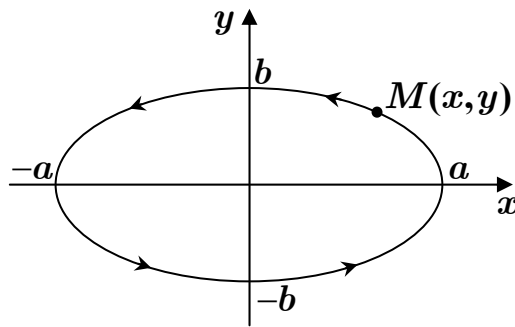


Рис. 2.3.3

Для вычисления площади эллипса, однако, удобнее оставить параметрические уравнения. Очевидно, что параметр t меняется от 0 до 2π (при этом текущая точка $M(x, y)$ обегает полный контур эллипса). Учитывая, что $x'_t = -a \sin t$, $y'_t = b \cos t$, получим:

$$\begin{aligned} S_{\text{элли}} &= \frac{1}{2} \int_{K_{\text{элли}}} xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \cos t \cdot b \cos t + (-a \sin t) \cdot (-b \sin t) dt = \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \pi ab. \end{aligned}$$

Т.е. мы получим, что площадь эллипса

$$S = \pi ab \text{ кв. ед.}$$

При $a = b$ получаем известную формулу для площади круга

$$S = \pi r^2,$$

где обозначено $a = b = r$.

§4. Криволинейные интегралы, не зависящие от пути интегрирования

Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ определены и непрерывны в некоторой открытой области S и имеют в ней непрерывные частные производные $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$. Мы будем рассматривать кривые, целиком лежащие в области S и допускающие представление

$$\left. \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array} \right\},$$

причем функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ при любом $t \in [p,q]$ области S и допускающие представление $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, причем функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ при любом $t \in [p,q]$.

Определение 1. Говорят, что интеграл $I = \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависит от пути интегрирования, если результаты интегрирования по любым кривым, соединяющим точки A и B , совпадают, т.е. если

$$\int_{AMB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{ANB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad (\text{рис. 2.4.1}).$$

Замечание. Интегралы, не зависящие от пути интегрирования, иногда записывают так:

$$I = \int_A^B P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

где $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$, а под кривой, по которой ведется интегрирование, понимаем любую кривую AB , лишь бы на ней не нарушались условия теоремы существования криволинейного интеграла.

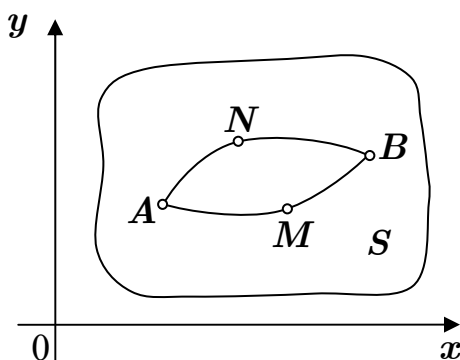


Рис. 2.4.1

Определение 2. Говорят, что интеграл по замкнутому контуру равен нулю, если для любого замкнутого самонепересекающегося контура L , целиком лежащего в S , оказывается

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Лемма. Определения 1 и 2 эквивалентны.

1. Докажем, что если криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, то по любому замкнутому контуру он равен нулю (рис. 2.4.1).

Действительно пусть

$$\int_{AMB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{ANB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} & \int_{AMB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \int_{ANB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \int_{AMB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{BNA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = . \\ & = \int_{AMBNA} Pdx + Qdy = 0 \end{aligned}$$

Теперь достаточно только обозначить замкнутую кривую $AMBNA$ буквой L и окажется

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

2. Второе утверждение: если интеграл по замкнутому контуру равен нулю, то он не зависит от пути интегрирования, доказываем аналогично, для чего достаточно разбить замкнутый контур L на два участка

(докажите самостоятельно).

Теорема 1. Для того чтобы интеграл $I = \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ не зависел от пути интегрирования,

необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке области S было выполнено условие

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}. \tag{1}$$

Доказательство.

Достаточность. Допустим, что в каждой точке области S выполнено условие (1). Возьмем замкнутый самонепересекающийся

контур K , лежащий в S и ограничивающий область D (рис. 2.4.2).

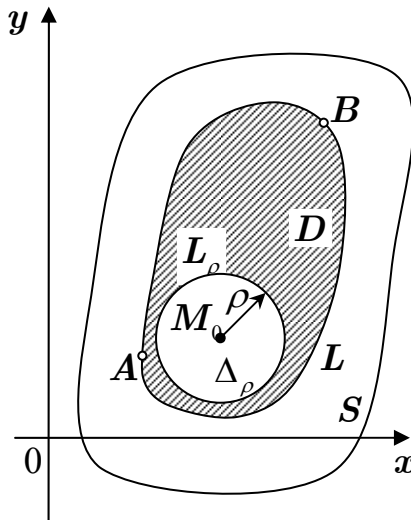


Рис. 2.4.2

В силу формулы Грина:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dx dy.$$

Так как выполнено условие (1), то $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, а

тогда в силу леммы криволинейный интеграл $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависит от пути интегрирования.

Необходимость. Допустим, что условие (1) не выполнено всюду в S и пусть найдется некоторая точка $M_0(x_0, y_0)$, в которой $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \neq \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$. Пусть для определенности в этой точке

$$\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) \Big|_{M_0} > 0.$$

Так как частные производные $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ непрерывны, то можно найти круг Δ_ρ с центром в точке M_0 столь малого радиуса ρ , что последнее неравенство выполняется во всех точках области Δ_ρ . Пусть L_ρ — контур области Δ_ρ . Для этой области справедлива формула Грина, но т.к. в каждой точке области Δ_ρ :

$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$, то двойной интеграл

$$\iint_{\Delta_\rho} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy > 0,$$

следовательно, нашелся контур Δ_ρ такой, что

$$\int_{L_\rho} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \neq 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Если в каждой точке области S функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, то выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом непрерывной функции

$$\Phi(x,y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

т.е. $d\Phi(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Доказательство. Пусть в каждой точке области S выполнено условие (1). Закрепим точку $A(a,b)$ и пусть $M(x,y)$ — какая-нибудь точка области S . Тогда $\int_{AM} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ зависит от точки M , но не зависит от линии AM .

Это означает, что написанный интеграл является функцией переменных x и y . Обозначим ее через $\Phi(x,y)$, тогда можно написать:

$$\Phi(x,y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Попробуем продифференцировать функцию $\Phi(x,y)$ по переменной x (рис. 2.4.3).

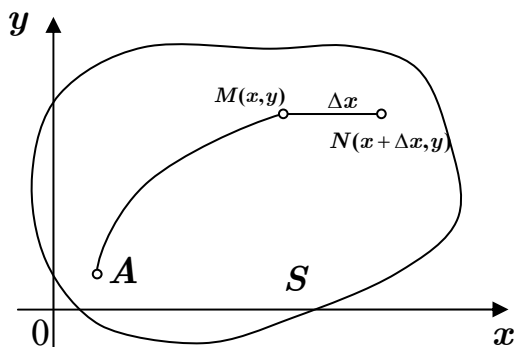


Рис. 2.4.3

Для этого, исходя из точки $M(x, y)$, дадим приращение Δx , взяв его столь малым, чтобы отрезок MN , соединяющий точки $M(x, y)$ и $N(x + \Delta x, y)$, целиком лежал в области S , тогда будет

$$\begin{aligned} \Phi(x + \Delta x, y) &= \int_{(a,b)}^{(x+\Delta x,y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\ &= \int_{(a,b)}^{(x,y)} Pdx + Qdy + \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx + Qdy \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta\Phi(x, y) &= \Phi(x + \Delta x, y) - \Phi(x, y) = \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx + Qdy. \end{aligned}$$

Выразим криволинейный интеграл, стоящий в правой части, через определенный, учитывая, что на отрезке MN y постоянен, т.е. $dy = 0$, а $x \in [x, x + \Delta x]$. Тогда получим $\Delta\Phi(x, y) = \int_x^{x+\Delta x} P(x, y)dx$.

Применим к определенному интегралу, стоящему справа, теорему о среднем, тогда будет $\Delta\Phi(x, y) = P(\xi, y) \cdot \Delta x$, причем $x \leq \xi \leq x + \Delta x$, тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(\xi, y) = P(x, y).$$

Итак, мы получили

$$\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x, y) - \Phi(x, y)}{\Delta x} = P(x, y).$$

Аналогично можно доказать, что частная производная $\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial y}$ также существует, причем $\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$. Следовательно, функция $\Phi(x, y)$ дифференцируема, причем $d\Phi(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

Следствие. По предположению теоремы $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны, следовательно непрерывны $\Phi'_x(x, y)$ и $\Phi'_y(x, y)$, а тогда непрерывна и сама функция $\Phi(x, y)$.

Замечание. Доказанная теорема дает нам возможность находить функцию $\Phi(x, y)$ по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла. Для этого нужно закрепить какую-нибудь

точку (a, b) , а затем, взяв произвольную точку (x, y) , соединить их какую-нибудь простой кривой L и вычислить $\Phi(x, y) = \int_{(a, b)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, лишь бы только на этой кривой были

выполнены условия теоремы существования криволинейного интеграла второго рода.

Доказанные выше две теоремы позволяют сформулировать такую общую теорему.

Теорема. Если в области S заданы непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, имеющие непрерывные частные производные $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$, то любые из следующих утверждений равно-

сильны (т.е. из одного следует другое и наоборот):

1. $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ зависит от точек A и B , но не от кривой AB .

2. Каков бы ни был замкнутый самонепересекающийся контур L , имеем:

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

3. Всюду в S :
$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

4. Выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ есть полный дифференциал некоторой функции $\Phi(x, y)$.

Пример. Убедиться, что выражение $\frac{dx}{x+y^2} + \frac{2ydy}{x+y^2}$ является полным дифференциалом некоторой функции и найти ее с помощью криволинейного интеграла второго рода.

Решение. Прежде всего, убедимся, что приведенное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $\Phi(x, y)$.

Обозначим $P(x, y)dx = \frac{1}{x+y^2}$, $Q(x, y)dy = \frac{2y}{x+y^2}$.

Найдем

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}, \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}.$$

Видно, что $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, т.е. действительно данное выра-

жение является полным дифференциалом некоторой функции $\Phi(x,y)$, т.е.

$$d\Phi(x,y) = \frac{dx}{x+y^2} + \frac{2ydy}{x+y^2}.$$

Найдем функцию $\Phi(x,y)$, вычислив криволинейный интеграл по кривой ABC , состоящей из двух отрезков: AB и BC , т.е. будет:

$$\Phi(x,y) = \int_{(1,1)}^{(x,1)} \frac{dx}{x+y^2} + \frac{2ydy}{x+y^2} + \int_{(x,1)}^{(x,y)} \frac{dx}{x+y^2} + \frac{2ydy}{x+y^2} \quad (\text{рис. 2.4.5}).$$

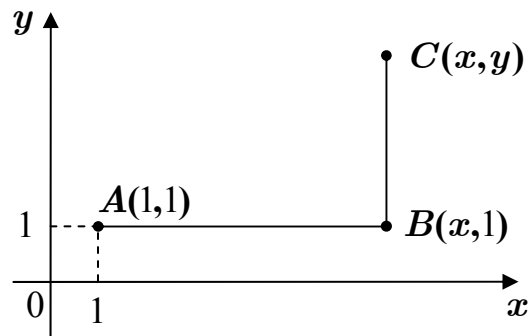


Рис. 2.4.5

Заметим, что на AB : $y=1$, $dy=0$, $x \in [1,x]$;

на BC : $x = const$, $dx=0$, $y \in [1,y]$,

следовательно:

$$\begin{aligned} \Phi(x,y) &= \int_1^x \frac{dx}{x+1} + \int_1^y \frac{2ydy}{x+y^2} = \ln|x+1| \Big|_1^x + \ln|x+y^2| \Big|_1^y = \\ &= \ln|x+1| - \ln 2 + \ln|x+y^2| - \ln|x+1| = \ln|x+y^2| - \ln 2 \end{aligned}$$

Ответ: $\Phi(x,y) = \ln|x+y^2| + c$, где c — произвольная постоянная.

Заметим, что при решении данного примера мы не имеем права поместить точку A в начало координат, т.к. в этом случае подын-

тегральная функция будет претерпевать разрыв, т.е. нарушится условие теоремы существования определенного интеграла.

Замечание 1. Заметим еще, что если при интегрировании дифференциального уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ оказывается,

что выполнено условие $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, то это говорит о том,

что левая часть данного дифференциального уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $\Phi(x,y)$, т.е.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = d\Phi(x,y).$$

В этом случае дифференциальное уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением в *полных дифференциалах*.

Очевидно, что можно легко найти общий интеграл этого уравнения, а именно: $\Phi(x,y) = c$, а функция $\Phi(x,y)$ находится, как показано выше, с помощью криволинейного интеграла второго рода, т.е.

$$\Phi(x,y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Замечание 2. Можно доказать, что для того, чтобы криволинейный интеграл

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

в некоторой области S не зависел от пути интегрирования, необходимо, чтобы в каждой точке этой области выполнялись условия

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z},$$

при этом функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)d$ и $R(x,y,z)$ предполагаются непрерывными и имеющими непрерывные указанные частные производные всюду в S , а на кривой L выполнены условия теоремы существования криволинейного интеграла второго рода.

Глава 3

Поверхностные интегралы

§1. Поверхностные интегралы I рода

Определение. Пусть S – квадратируемая поверхность, в каждой точке которой определена функция $F(x, y, z)$.

Разобьем поверхность S сетью простых кривых на ячейки S_1, S_2, \dots, S_n с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ и диаметрами d_1, d_2, \dots, d_n . Наибольший из диаметров частичных ячеек d_k обозначим через λ и будем называть его рангом дробления.

В каждой частичной ячейке S_k возьмем произвольную точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$ и вычислим в ней значение функции $F(x_k, y_k, z_k)$. Умножим $F(x_k, y_k, z_k)$ на площадь ячейки ΔS_k и составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n F(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta S_k.$$

Измельчая дробление таким образом, чтобы ранг дробления стремился к нулю, будем искать предел

$$I = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sigma_n.$$

Если этот предел существует, не зависит от способа разбиения поверхности S на ячейки и выбора точек $M_k(x_k, y_k, z_k)$, то он называется **поверхностным интегралом первого рода** от функции $F(x, y, z)$ по поверхности S и обозначается так:

$$I = \iint_S F(x, y, z) dS.$$

Теорема существования поверхности интеграла первого рода. Если поверхность S задана уравнением $z = f(x, y)$, причем функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в простой области D плоскости xOy и имеет в этой области непрерывные частные производные $p(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ и $q(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, и если в каждой точке поверхности S функция $F(x, y, z)$ непрерывна, то тогда поверх-

ностный интеграл первого рода от функции $F(x, y, z)$ существует и выражается через двойной интеграл так:

$$\iint_S F(x, y, z) dS = \iint_S F[x, y, f(x, y)] \sqrt{p^2(x, y) + q^2(x, y) + 1} dx dy$$

(без доказательства).

Не будем перечислять свойства поверхностного интеграла первого рода, т.к. они достаточно очевидны.

Пример. В каждой точке поверхности S , лежащей в первом октанте, уравнение которой $x + y + z = 1$, распределена масса с плотностью $\rho(x, y, z) = \frac{z}{k}$, где $k = const$. Вычислить массу пластинки.

Решение. $z = 1 - x - y$, $p(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = -1$, $q(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = -1$,

$$\sqrt{p^2(x, y) + q^2(x, y) + 1} = \sqrt{3}.$$

Следовательно,

масса

$$M = \frac{1}{k} \iint_S (1 - x - y) dS = \frac{1}{k} \iint_D (1 - x - y) \sqrt{3} dx dy =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{k} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy = \frac{\sqrt{3}}{6k} \text{ кв. ед.}$$

§2. Двусторонние и односторонние поверхности. Сторона поверхности

Возьмем некоторую поверхность S и рассмотрим нормаль к этой поверхности в точке M . Зафиксируем на нормали одно из двух возможных направлений (рис. 3.2.1).

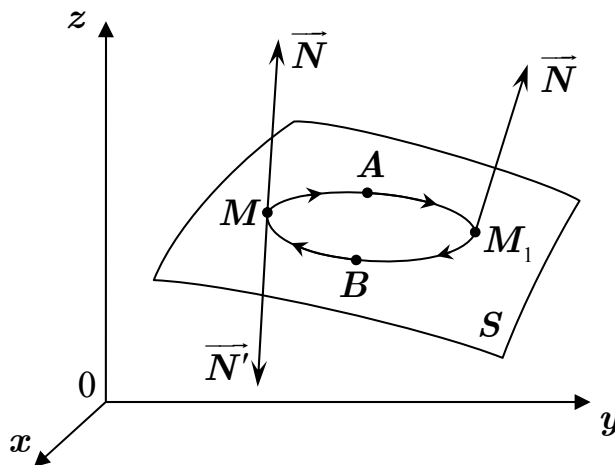


Рис. 3.2.1

Возьмем на поверхности некоторый контур, не пересекающий границы поверхности S . Если мы будем перемещать основание нормали в направлении $M \rightarrow A \rightarrow M_1 \rightarrow B \rightarrow M$, то нормаль, обойдя этот контур, вернется к точке M и займет либо исходное положение N , либо перевернутое N' .

Если на поверхности нет ни одного контура, который переворачивал бы нормаль после его обхода, то такая поверхность называется *двусторонней*, а если хотя бы один контур, переворачивающий нормаль, то такая поверхность называется *односторонней*.

Примером односторонней поверхности может служить лист Мебиуса, который легко можно изготовить, взяв полоску бумаги (рис. 3.2.2) и соединив точку A_1 с точкой A_2 , точку B_1 с точкой B_2 .

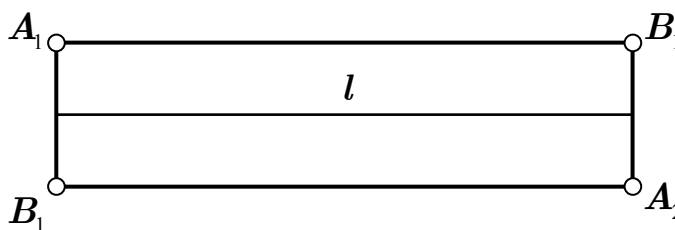


Рис. 3.2.2

Нетрудно заметить, что обход контура l переворачивает нормаль.

Определение. Совокупность точек двусторонней поверхности вместе с соответствующими направлениями нормалей, непрерывно переходящих друг в друга при перемещении основания нормали по поверхности, не пересекая его границы, называют *стороной поверхности*.

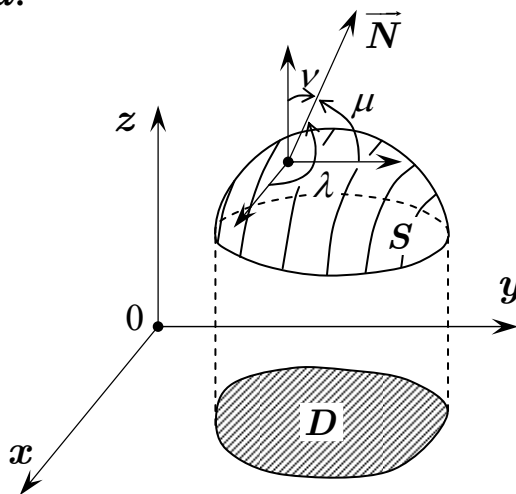


Рис. 3.2.3

В соответствии с приведенным определением можно сделать вывод, что двусторонняя поверхность имеет две стороны поверхности: верхнюю и нижнюю, а односторонняя поверхность имеет лишь одну сторону.

Причем, если двусторонняя поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ и частные производные $p(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$ и $q(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$ непрерывны в области D плоскости xOy , то для верхней стороны поверхности направляющие косинусы нормали определяются выражениями

$$\cos \lambda = \frac{-p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad \cos \mu = \frac{-q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad \cos \nu = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

а для нижней стороны поверхности соответственно

$$\cos \lambda = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad \cos \mu = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad \cos \nu = \frac{-1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \quad (\text{рис. 3.2.3}).$$

§3. Поверхностные интегралы II рода

Определение. Пусть в каждой точке двусторонней поверхности S задана функция $F(x, y, z)$. Выберем на поверхности S сторону поверхности (верхнюю или нижнюю).

Разобьем поверхность S сетью простых кривых на ячейки S_1, S_2, \dots, S_n , которые проектируются на плоскость xOy в ячейки D_1, D_2, \dots, D_n с площадями $\Delta F_1, \Delta F_2, \dots, \Delta F_n$. Наибольший из диаметров ячейки D_k назовем рангом дробления и обозначим его λ . В каждой частичной ячейке S_k возьмем произвольную точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$ и вычислим в ней значение функции $F(x_k, y_k, z_k)$. Умножим $F(x_k, y_k, z_k)$ на площадь проекции ячейки S_k на плоскость xOy , т.е. составим произведение $F(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta F_k$ и составим интегральную сумму для верхней и для нижней стороны поверхности соответственно:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n F(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta F_k \quad \text{и} \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^n F(x_k, y_k, z_k) \cdot (-\Delta F_k).$$

Измельчая дробление и устремляя ранг дробления к нулю, будем искать предел

$$I = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sigma_n.$$

Если этот предел, не зависящий от способа дробления и выбора точек M_k , существует, то он называется **поверхностным интегралом второго рода** соответственно по верхней и по нижней стороне поверхности и обозначается

$$I = \iint_S F(x, y, z) dx dy.$$

Аналогично определяются интегралы $\iint_S F(x, y, z) dy dz$ и $\iint_S F(x, y, z) dz dx$, причем принято обозначение

$$\iint_S P dy dz + \iint_S Q dz dx + \iint_S R dx dy = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy,$$

где все интегралы берутся по одной и той же стороне поверхности.

Свойства поверхностных интегралов очевидны. Отметим только, что если поверхность S представляет собой цилиндрическую поверхность, образующие которой перпендикулярны плоскости xOy , то $\iint_S F(x, y, z) dx dy = 0$.

Это с очевидностью следует из определения поверхностного интеграла второго рода.

1. Теорема существования поверхностного интеграла второго рода.

Теорема. Если двусторонняя поверхность S задана уравнением $z = f(x, y)$, причем $f(x, y)$ и частные производные $p(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$ и $q(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$ существуют и непрерывны в простой области D плоскости xOy и если в каждой точке поверхности S задана непрерывная функция $F(x, y, z)$, то поверхностный интеграл по верхней и нижней стороне поверхности S существует и выражается через двойной интеграл для верхней стороны поверхности S :

$$I = \iint_{S(\text{верхн. стор.})} F(x, y, z) dx dy = \iint_D F[x, y, f(x, y)] dx dy$$

и соответственно для нижней стороны поверхности S :

$$I = \iint_{S(\text{нижн. стор.})} F(x, y, z) dx dy = - \iint_D F[x, y, f(x, y)] dx dy.$$

Пример. Вычислить $I = \iint_S z dx dy$ по нижней стороне поверхности S , заданной уравнением $z = x^2 + y^2$ над областью D , ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ (рис. 3.3.1)

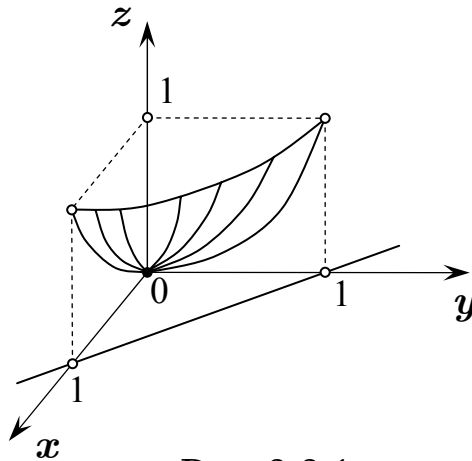


Рис. 3.3.1

Решение. В соответствии с теоремой существования и принимая во внимание, что поверхностный интеграл берется по нижней стороне поверхности S , получим

$$I = \iint_{S(\text{нижн. стор.})} z dx dy = - \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy = -\frac{1}{2}.$$

2. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода.

Будем рассматривать поверхностные интегралы первого и второго рода по двусторонней поверхности S , нормаль к которой образует углы λ , μ и ν соответственно с координатными осями Ox , Oy и Oz . Покажем, что

$$\iint_S F(x, y, z) dx dy = \iint_S F(x, y, z) \cos \nu dS, \quad (1)$$

причем здесь через ν обозначен угол нормали, входящей в выбранную сторону поверхности интегрирования в интеграле, стоящем слева, с осью Oz .

Для доказательства перейдем в интегралах, стоящих в левой и правой частях равенства (1), к двойному интегралу, считая, что двусторонняя поверхность S задана уравнением $z = f(x, y)$, причем $f(x, y)$, $p(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$ и $q(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$ определены и непрерывны в простой области D плоскости xOy , тогда получим

$$\iint_S F(x, y, z) dx dy = \iint_D F[x, y, f(x, y)] dx dy.$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} \iint_S F(x, y, z) \cos \nu dS &= \iint_D F[x, y, f(x, y)] \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \sqrt{p^2 + q^2 + 1} dx dy = \\ &= \iint_D F[x, y, f(x, y)] dx dy. \end{aligned}$$

Мы видим, что правые части этих равенств совпадают, следовательно, совпадают и левые, т.е.

$$\iint_S F(x, y, z) dx dy = \iint_S F(x, y, z) \cos \nu dS.$$

Аналогично можно доказать и такое, более общее соотношение:

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \\ = \iint_S [P(x, y, z) \cos \lambda + Q(x, y, z) \cos \mu + R(x, y, z) \cos \nu] dS, \end{aligned}$$

где через λ , μ и ν обозначены углы нормали, входящей в выбранную сторону поверхности интегрирования, в интегралы, стоящие слева, с координатными осями Ox , Oy и Oz , а интегралы, стоящие в правой и левой частях равенства, существуют.

§4. Формула Остроградского

Рассмотрим некоторое тело T , ограниченное снизу простой поверхностью S_1 , уравнение которой $z = \varphi(x, y)$, сверху — простой поверхностью S_3 , уравнение которой $z = \Phi(x, y)$, а с боков — цилиндрической поверхностью S_2 , образующие которой параллельны оси

Oz , а направляющей служит контур области D в плоскости xOy (рис. 3.4.1).

Допустим, что функции $\varphi(x,y)$ и $\Phi(x,y)$ определены и непрерывны в простой области D плоскости xOy и имеют в ней непрерывные частные производные.

Пусть, кроме того, в теле T определена непрерывная функция $R(x,y,z)$, имеющая непрерывную производную $\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}$. При

таких предположениях существует тройной интеграл

$$I = \iiint_T \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dx dy dz.$$

Вычислим его, выразив через повторный:

$$I = \iint_D dx dy \int_{\varphi(x,y)}^{\Phi(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dz.$$

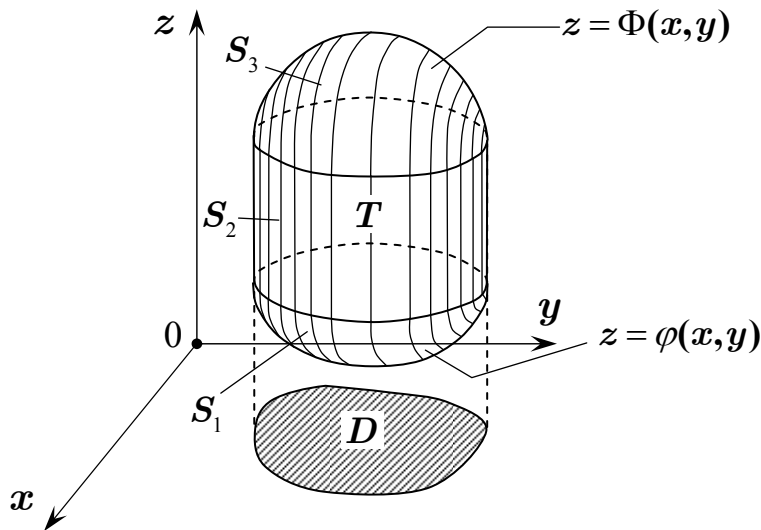


Рис. 3.4.1

Здесь внутренний интеграл

$$I_{\text{внутр}} = \int_{\varphi(x,y)}^{\Phi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = R(x,y,\Phi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y)).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dz &= \iint_D R(x, y, \Phi(x, y)) - \iint_D R(x, y, \varphi(x, y)) = \\
&= \iint_{S_3(\text{верхн. стор.})} R(x, y, z) dx dy + \iint_{S_1(\text{нижн. стор.})} R(x, y, z) dx dy + \\
&+ \iint_{S_2(\text{боков. стор.})} R(x, y, z) dx dy.
\end{aligned}$$

Итак, мы получили:

$$\iiint_T \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \iint_{S_T} R(x, y, z) dx dy. \quad (1)$$

Формула (1) устанавливает связь между тройным интегралом по телу T и поверхностным по полной поверхности, ограничивающей это тело, причем поверхностный интеграл вычисляется по внешней стороне поверхности тела T .

Формула (1) называется малой формулой Остроградского.

Допустим, что в теле T определены еще две функции $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$, имеющие непрерывные частные производные $\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x}$ и $\frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y}$. Совершенно аналогично можно доказать

еще две малые формулы Остроградского:

$$\iiint_T \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz = \iint_{S_T} P(x, y, z) dy dz \quad (2)$$

$$\iiint_T \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} dx dy dz = \iint_{S_T} Q(x, y, z) dz dx. \quad (3)$$

Складывая почленно формулы (1), (2) и (3), получим большую формулу Остроградского или просто формулу Остроградского:

$$\begin{aligned}
&\iiint_T \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} \right] dx dy dz = \\
&= \iint_{S_T(\text{внешняя стор.})} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy.
\end{aligned}$$

Если λ , μ и ν — углы нормали к внешней стороне поверхности S с координатными осями Ox , Oy и Oz , тогда в правой части формулы Остроградского можно перейти к поверхностному интегралу первого рода:

$$\begin{aligned} & \iiint_T \left[\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} \right] dx dy dz = \\ & = \iint_{S_T} [P(x,y,z) \cos \lambda + Q(x,y,z) \cos \mu + R(x,y,z) \cos \nu] dS. \end{aligned}$$

Замечание. Обратим внимание на то, что формула Остроградского позволяет легко получить формулу для вычисления объема тела T с помощью поверхностного интеграла по поверхности, ограничивающей тело T . Действительно, если положить в формуле Остроградского $P(x,y,z) = x$, $Q(x,y,z) = y$, $R(x,y,z) = z$, то тогда получим

$$V_T = \frac{1}{3} \iint_{S_T} x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

или

$$V_T = \iint_{S_T} [x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu] dS,$$

где через V_T обозначен объем тела T .

§5. Формула Стокса

Рассмотри некоторую двустороннюю квадрируемую поверхность S , ограниченную контуром L , который на каждую из координатных плоскостей проектируется в замкнутый самонепересекающийся контур (рис. 3.5.1).

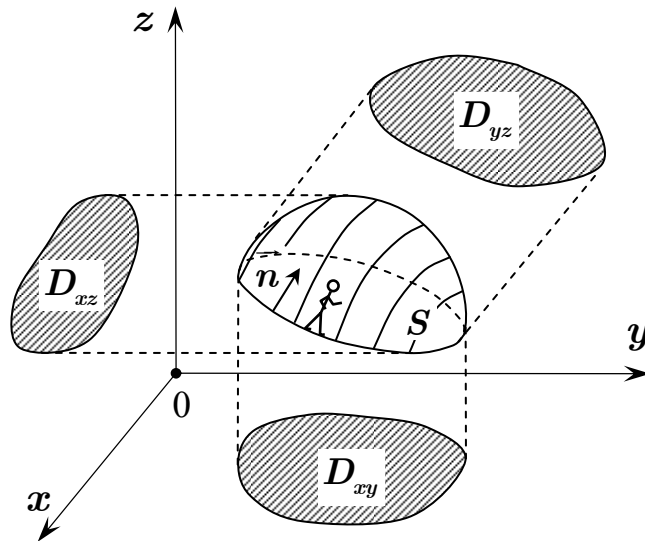


Рис. 3.5.1

Пусть в каждой точке этой поверхности задана непрерывная функция $P(x, y, z)$, имеющая непрерывные производные $\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}$ и $\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y}$.

Можно доказать, что справедлива формула (малая формула Стокса):

$$\iint_S \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} dx dy = \int_L P(x, y, z) dx.$$

Здесь между левой и правой частями равенства такое согласование: интеграл слева берется по определенной стороне поверхности, а обход контура интегрирования L в интеграле, стоящем справа, совершается в таком направлении, чтобы наблюдатель, у которого нормаль, соответствующая выбранной стороне поверхности, проходит от ног к голове, оставляя бы поверхность слева от себя.

Допустим далее, что справедливы сделанные выше предположения и, кроме того, на поверхности S заданы непрерывные функции $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$, имеющие непрерывные частные производные

$$\frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial z}, \quad \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial y}.$$

Тогда можно доказать справедливость ещё двух малых формул Стокса:

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial z} dy dz &= \int_L Q(x, y, z) dy, \\ \iint_S \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial x} dx dz &= \int_L R(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

Складывая почленно все три малые формулы Стокса, получим большую формулу Стокса или просто формулу Стокса:

$$\begin{aligned} \iint_S \left[\frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} \right] dx dy + \left[\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial z} \right] dy dz \\ + \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial x} \right] dz dx = \\ = \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

Глава 4

Элементы теории поля

§1. Скалярное поле. Градиент. Производная по направлению

1. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня.

Итак, рассмотрим некоторую область T трехмерного пространства $Oxyz$. Если каждой точке $M(x, y, z)$ этой области поставлено в соответствие значение некоторой скалярной величины U , т.е. $U = f(M)$ или $U = U(x, y, z)$, то говорят, что задано скалярное поле. Например, точечный источник тепла создает поле температур. Скалярное поле, не меняющееся во времени, называется стационарным, и в этом случае функция U не зависит от времени, т.е. $U = U(x, y, z)$. Если же поле меняется во времени, т.е. $U = U(x, y, z, t)$, то оно называется нестационарным. Например, если вынуть из костра раскаленный камень, то вокруг него образуется нестационарное скалярное поле температур, которое будет меняться с течением времени, т.к. камень будет остывать. Таким образом, очевидно, что стационарное скалярное поле описывается некоторой функцией точки, имеющей три, две или одну координату, в зависимости от того, что представляет собою область T . В качестве примера скалярного поля можно привести потенциал электростатического поля, который определяется соотношением $U = \frac{e}{r}$, где e — заряд, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние от точки до заряда, который помещен в начало координат. Очевидно, что функция U определяет скалярное поле (потенциал) во всем пространстве, за исключением начала координат, т.к. при $r = 0$ потенциал U обращается в бесконечность.

Если рассмотреть скалярное поле $U = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, то очевидно, что это поле определено лишь в круге радиуса R : $x^2 + y^2 = R^2$.

Допустим теперь, что скалярное поле $U = U(x, y, z)$ таково, что функция $U(x, y, z)$ непрерывна по переменным x, y, z и однозначна. Зафиксируем значение скалярной величины U , положив его равным c , где $c = \text{const}$, т.е. положим $U(x, y, z) = c$. С геометрической точки зрения последнему соотношению соответствует в пространстве некоторая поверхность. Очевидно, что эта поверхность обладает таким свойством, что в каждой ее точке поле имеет постоянное значение, равное c . Такая поверхность называется поверхностью уровня.

Заметим, что функцию, задающую скалярное поле, независимо от ее физического смысла, часто называют потенциалом, а поверхности уровня называют также эквипотенциальными поверхностями, т.е. поверхностями равного потенциала. Очевидно, что различные поверхности уровня не пересекаются, и через такую точку области, где определено скалярное поле, проходит одна из них.

Если скалярное поле плоское, т.е. $U = U(x, y)$, то точки, для которых $U(x, y) = c$, называют линиями уровня.

Например, скалярное поле $U = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$ имеет в качестве поверхностей уровня концентрические сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, а поле $U = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ — концентрические окружности $x^2 + y^2 = R^2 - c^2$.

2. Производная по направлению.

Для изучения свойств скалярного поля $U = U(x, y, z)$ прежде всего бывает необходимо выяснить, как меняется это поле при переходе от одной точки поля к другой. Допустим, что мы рассматриваем скалярное поле $U = U(x, y, z)$, где функция $U(x, y, z)$ дифференцируема в каждой точке поля, т.е. ее полное приращение будет иметь вид

$$\Delta U = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} \cdot \Delta z + \\ + \delta_1 \cdot \Delta x + \delta_2 \cdot \Delta y + \delta_3 \cdot \Delta z,$$

где $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ стремятся к нулю, если $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \rightarrow 0$.

Выберем в поле скалярной величины U некоторое направление, определяемое осью l (Γ^0 — орт этого направления).

Возьмем на оси l две точки $M(x, y, z)$ и $N(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Обозначим $\text{пр}_l \overline{MN} = \rho$ (рис. 4.1.1)

Очевидно, что $\rho > 0$, если направление вектора \overline{MN} совпадает с направлением оси l и $\rho < 0$, если они противоположны.

Дадим теперь определение производной функции $U(x, y, z)$ по направлению l (рис. 4.1.1).

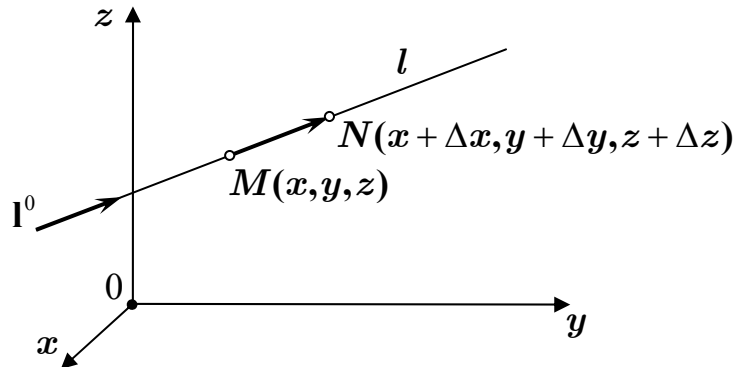


Рис. 4.1.1

Определение. Производной функции U по направлению l называется

$$\lim_{N \rightarrow M} \frac{U(N) - U(M)}{\rho} \quad (\rho > 0 \text{ или } \rho < 0),$$

где $\rho = \text{пр}_l \overline{MN}$, а точки M и N лежат на оси l .

Производная по направлению обозначается $\frac{\partial U}{\partial l}$, т.е.

$$\frac{\partial U}{\partial l} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow M} \frac{U(N) - U(M)}{\rho}.$$

Примем теперь во внимание, что функция $U = U(x, y, z)$ дифференцируема, тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial l} &= \lim_{N \rightarrow M} \frac{U(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y, z)}{\rho} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\rho} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\rho} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\Delta z}{\rho} + \text{б.м.} \right] \end{aligned}$$

Если ось l образует углы α , β и γ с координатными осями, то очевидно, что $\frac{\Delta x}{\rho} = \cos \alpha$, $\frac{\Delta y}{\rho} = \cos \beta$, $\frac{\Delta z}{\rho} = \cos \gamma$, а тогда в пределе получим:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma.$$

Ясно, что единичный вектор направления имеет своими координатами направляющие косинусы оси l , т.е. $\mathbf{l}^0(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. Следовательно, производную по направлению $\frac{\partial U}{\partial l}$ можно представить в виде скалярного произведения вектора $N\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$ и вектора \mathbf{l}^0 , т.е. $\frac{\partial U}{\partial l} = N \cdot \mathbf{l}^0$, где вектор $N = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \mathbf{k}$ (это было получено ранее) есть ни что иное, как нормаль к поверхности уровня $U(x, y, z) = c$. Напомним, что производная имеет механический смысл — скорость. Значит, производная по направлению дает нам скорость изменения поля $U = U(x, y, z)$ в направлении оси l . Нетрудно заметить также, что мы уже ранее рассматривали производные по направлению, а именно, это были производные по направлению координатных осей Ox , Oy и Oz , т.е. изученные ранее частные производные $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ и $\frac{\partial U}{\partial z}$.

Заметим, что понятие производной по направлению обобщают и на случай, когда это направление задается некоторой кривой линией l . В этом случае в качестве направляющих косинусов направления берут направляющие косинусы касательной к кривой l в точке дифференцирования.

Пример. Найти производную скалярного поля $U = \sqrt{x^2 + y^2}$ по направлению кривой $y = x^2$ от точки $M_1(1,1)$ к точке $M_2(2,4)$ в точке M_1 .

Решение.

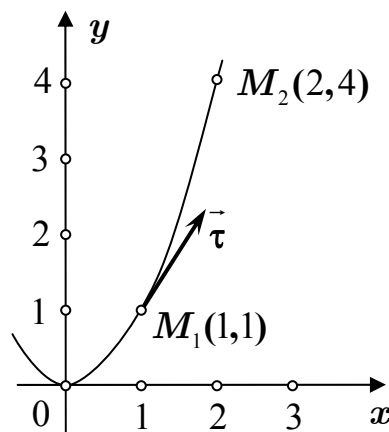


Рис. 4.2.1

Найдем единичный вектор τ^0 , касательный к параболе $y = x^2$ в точке $M_1(1,1)$. Найдем угловой коэффициент прямой, на которой лежит вектор τ :

$$y' = 2x, \quad k = 2x|_{x=1} = 2.$$

Прямая имеет угловой коэффициент $k = 2$ и проходит через точку $M_1(1,1)$, следовательно, ее уравнение $y - 1 = 2(x - 1)$. Запишем это уравнение в каноническом виде: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2}$. Вектор $\tau(1,2)$ — направляющий вектор этой прямой, причем его направление соответствует направлению на кривой от точки $M_1(1,1)$ к точке $M_2(2,4)$.

Соответствующий ему единичный вектор $\tau^0 = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$, т.е. его направляющие косинусы $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Найдем теперь $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, а тогда производная по направлению функции $U = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M_1(1,1)$ по кривой l от точки $M_1(1,1)$ к точке $M_2(2,4)$ будет

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

3. Градиент скалярного поля. Его свойства. Связь градиента скалярного поля с производной по направлению. Оператор Гамильтона.

Рассмотрим скалярное поле $U = U(x, y, z)$ и предположим, что в некоторой области T функция $U(x, y, z)$ дифференцируема, т.е. существуют непрерывные частные производные

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}, \quad \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z},$$

а поверхности уровня $U(x, y, z) = c$ не имеют особых точек, т.е. таких точек, в которых все три производные обращались бы в ноль. При сделанных предположениях поверхность уровня $U(x, y, z) = c$ в каждой своей точке имеет касательную плоскость, а следовательно

и нормаль к поверхности, которая, как известно, имеет координаты $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ и $\frac{\partial U}{\partial z}$, т.е.

$$\mathbf{N} = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} \cdot \mathbf{k}.$$

Этот вектор называется градиентом скалярного поля $U = U(x,y,z)$ и обозначается $\mathit{grad}U$, т.е.

$$\mathit{grad}U \stackrel{def}{=} \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{k}.$$

Заметим, что градиент есть векторная характеристика скалярного поля. В силу вышесказанного градиент скалярного поля перпендикулярен к поверхности уровня в каждой точке. Напомним, что производная скалярного поля по направлению l

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \cos \gamma.$$

В правой части здесь стоит скалярное произведение векторов $\mathit{grad}U$ и \mathbf{l}^0 , т.е. $\frac{\partial U}{\partial l} = \text{пр}_l \mathit{grad}U$. Скалярное произведение вектора на некоторый орт можно осмыслить как проекцию этого вектора на орт, следовательно, $\frac{\partial U}{\partial l} = \text{пр}_l \mathit{grad}U$. Очевидно, что эта про-

изводная имеет наибольшее значение, если направление оси l совпадает с направлением градиента, т.е. можно сделать вывод, что в направлении градиента скалярное поле имеет наибольшую скорость изменения. Вычислим эту наибольшую скорость изменения скалярного поля. Принимая во внимание, что

$$\mathbf{l}^0 = \frac{\mathit{grad}U}{|\mathit{grad}U|},$$

а

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}^0,$$

получим:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial l} \right)_{\text{наиб}} = (\mathit{grad}U) \cdot \vec{l}^0 = \mathit{grad}U \cdot \frac{\mathit{grad}U}{|\mathit{grad}U|} = \frac{|\mathit{grad}U|^2}{|\mathit{grad}U|} = |\mathit{grad}U|.$$

Итак, можно сделать окончательный вывод: в направлении своего градиента скалярное поле имеет наибольшую скорость изменения, и эта скорость равна модулю градиента скалярного поля.

Пример. Дано поле температур $T(x, y, z) = \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$. Найти наибольшую скорость изменения поля $T(x, y, z)$ в точке $M_0(1, 1, 3)$.

Решение. Найдем градиент скалярного поля $T(x, y, z)$. Частные производные $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$, $\frac{\partial T}{\partial z}$ равны соответственно

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2\lambda x, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 2\lambda y, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 2\lambda z.$$

$$\mathbf{grad}T = 2\lambda x\vec{i} + 2\lambda y\vec{j} + 2\lambda z\vec{k},$$

$$|\mathbf{grad}T| = \sqrt{(2\lambda x)^2 + (2\lambda y)^2 + (2\lambda z)^2} = 2|\lambda|\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

В точке M_0 наибольшая скорость изменения поля совпадает со значением модуля градиента скалярного поля T в точке M_0 , т.е. равна

$$|\mathbf{grad}T|_{M_0} = 2|\lambda|\sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} = 2|\lambda|\sqrt{11}.$$

Очевидны также следующие свойства градиента скалярного поля:

- 1) $\mathbf{grad}(cU) = c \cdot \mathbf{grad}U$, $c = const$;
- 2) $\mathbf{grad}(U + V) = \mathbf{grad}U + \mathbf{grad}V$;
- 3) $\mathbf{grad}(U \cdot V) = U \cdot \mathbf{grad}V + V \cdot \mathbf{grad}U$.

В этом нетрудно убедиться самостоятельно.

Для компактной записи градиента скалярного поля введем в рассмотрение символический вектор – оператор Гамильтона (вектор "набла"), который обозначается так: " ∇ " и равен по определению

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k},$$

т.е. ясно, что с помощью оператора Гамильтона градиент скалярного поля можно записать следующим образом:

$$\mathbf{grad}U(x, y, z) = \nabla U(x, y, z).$$

В заключение этого параграфа решим еще один пример.

Пример. Найти градиент потенциала электростатического поля, образованного точечным зарядом

$$U = \frac{e}{|\vec{r}|} = \frac{e}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Решение. Найдем прежде всего поверхности уровня данного поля. Положим $U = c$, т.е. $\frac{e}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = c \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{e^2}{c^2}$, т.е.

поверхности уровня представляют собою концентрические сферы с центром в точке, где находится электрический заряд.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{e}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -e \cdot \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} = -e \cdot \frac{x}{|\vec{r}|^3}.$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -e \cdot \frac{y}{|\vec{r}|^3}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -e \cdot \frac{z}{|\vec{r}|^3}.$$

Таким образом

$$\text{grad} U = -e \cdot \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{|\vec{r}|^3} = -e \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3},$$

где $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Вектор

$$\vec{D} = -\text{grad} \frac{e}{|\vec{r}|} = e \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = e \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2}$$

называется напряженностью электрического поля, причем функция $U(x, y, z)$ возрастает с уменьшением $|\vec{r}|$.

§2. Векторное поле

1. Векторное поле. Векторные линии и векторные поверхности.

Рассмотрим некоторую пространственную область T . Если с каждой этой области связано значение некоторой векторной величины $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$, то говорят, что определено векторное поле $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$. Очевидно, что задание одного векторного поля равносильно заданию трех скалярных полей $a_x(x, y, z, t)$, $a_y(x, y, z, t)$ и $a_z(x, y, z, t)$, где (x, y, z) — точка, принадлежащая области T , а переменная t имеет смысл времени. В том случае, если

координаты вектора \mathbf{a} не зависят от времени, то поле вектора \mathbf{a} называется стационарным.

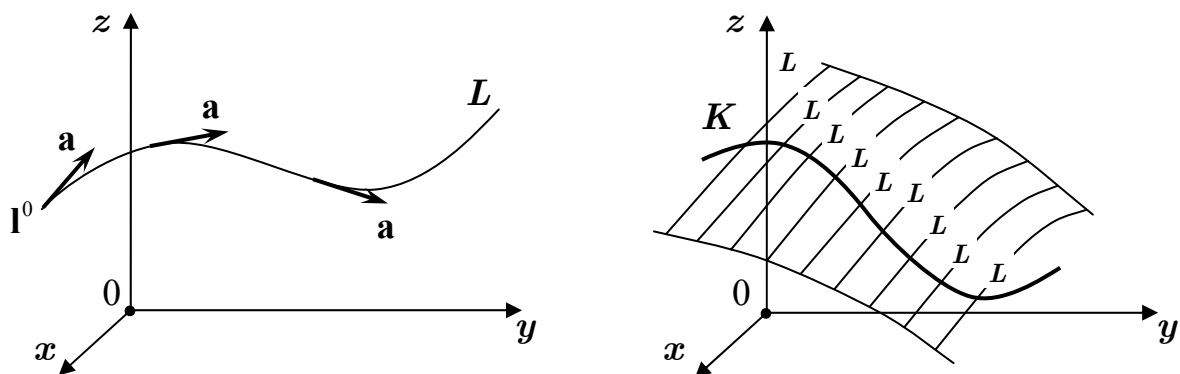


Рис. 4.2.1

Рассмотрим в поле вектора \mathbf{a} некоторую кривую L , которая обладает таким свойством, что вектор поля, соотнесенный каждой точке этой кривой, касается этой кривой в указанной точке. Такая кривая называется векторной линией (рис. 4.2.1).

Пусть через каждую точку некоторой кривой K проходит векторная линия L . Совокупность векторных линий образует так называемую векторную поверхность (рис. 4.2.1). В этом случае, если кривая K представляет собой замкнутый контур, то векторная поверхность называется векторной трубкой.

Допустим, что векторная линия L задана пересечением двух поверхностей $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$. Вектор $\boldsymbol{\tau}$, лежащий на касательной к кривой L , как известно, имеет координаты (dx, dy, dz) . Так как вектор $\boldsymbol{\tau}$ коллинеарен вектору \mathbf{a} в соответствии с определением векторной линии, то их координаты пропорциональны:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

Эта система дифференциальных уравнений является системной уравнений векторных линий L . Если мы хотим найти векторную линию, проходящую через точку $M(x_0, y_0, z_0)$, то нам нужно решить соответствующую задачу Коши.

Пример. Найти векторную линию L векторного поля $\mathbf{a}(x,y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$, проходящую через точку $M_0(1,0)$ (рис. 4.2.2).

Решение. Дифференциальное уравнение семейства векторных линий имеет вид:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}.$$

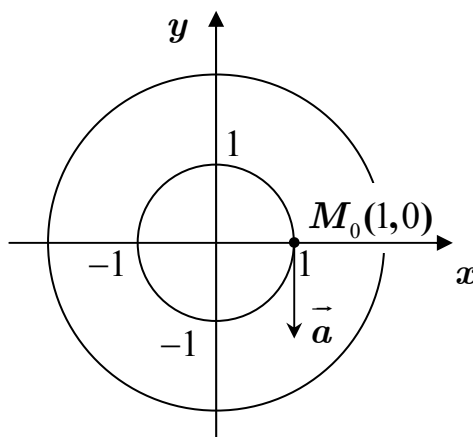


Рис. 4.2.2

Итак, нужно выделить интегральную кривую дифференциального уравнения, проходящую через точку $M_0(1,0)$.

Разделяя переменные, получим:

$$x dx + y dy = 0,$$

откуда следует общий интеграл уравнения $x^2 + y^2 = c^2$. Учитывая, что интегральная кривая проходит через точку $M_0(1,0)$, имеем $c=1$. Итак, векторная линия, проходящая через точку $M_0(1,0)$, представляет собой окружность $x^2 + y^2 = 1$.

2. Поток векторного поля через поверхность. Его механический смысл.

Пусть в поле вектора $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$ находится двусторонняя поверхность S . Выберем на ней элементарную площадку, площадь которой равна ΔS . Выберем на ней нормаль, соответствующая выбранной стороне поверхности, есть \mathbf{n} . Будем считать, что в пределах выбранной площадки вектор \mathbf{a} постоянен, обозначим через a_n проекцию вектора \mathbf{a} на направление нормали \mathbf{n} (рис. 4.2.3).

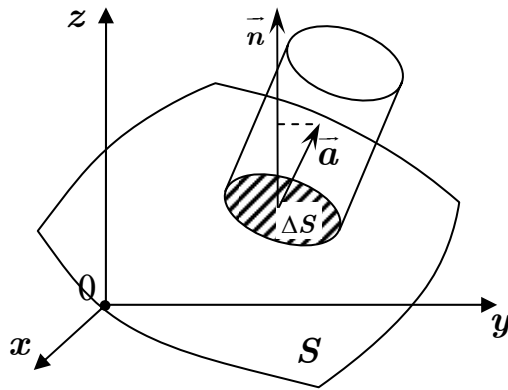


Рис. 4.2.3

Определение. Элементарным потоком векторного поля \vec{a} через площадку ΔS в выбранную сторону называется $\Delta Q = a_n \Delta S$.

Разбивая поверхность на ячейки ΔS и суммируя элементарные потоки вектора \vec{a} по всем частичным ячейкам при условии, что ранг дробления стремится к нулю, получим

$$Q = \iint_S a_n dS.$$

Q и называется потоком векторного поля \vec{a} через поверхность S в выбранную сторону.

Выясним теперь механический смысл потока векторного поля (рис. 4.2.3).

Допустим, что указанная выше поверхность лежит в векторном поле $\vec{v}(x, y, z)$ скоростей текущей жидкости. Тогда за время Δt исходя из данного момента времени t , частицы жидкости продвигнутся через элементарную площадку и заполнят наклонный цилиндр, основанием которого является элементарная площадка ΔS , а высота $h = v_n \cdot \Delta t$, если векторы \vec{v} и \vec{n} лежат в одном полупространстве. Масса частиц жидкости, заполнивших цилиндр

$$\Delta Q' = \rho \cdot v_n \cdot \Delta S \cdot \Delta t,$$

где $\rho(x, y, z, t)$ — плотность текущей жидкости. Выполняя суммирование всех этих масс по всей поверхности S , получим

$$Q' = \left(\iint_S \rho v_n dS \right) \Delta t.$$

Правая часть этого соотношения дает нам количество жидкости, протекающей через поверхность S за время Δt , тогда очевидно, что выражение $Q = \iint_S (\rho v)_n dS$ дает нам количество жидкости, протекающей через поверхность S в выбранную сторону за единицу времени. В этом и заключается механический смысл потока векторного поля.

§3. Теорема Остроградского (векторная форма). Дивергенция векторного поля и ее механический смысл

Рассмотрим поле вектора

$$\mathbf{a} = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Определение. Дивергенцией векторного поля \mathbf{a} называется выражение

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z}.$$

Очевидно, что с помощью оператора Гамильтона дивергенцию можно записать так:

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{a}} = \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{a}}.$$

Теорема Остроградского (векторная форма). Поток векторного поля $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$ через замкнутую поверхность S наружу равен тройному интегралу от дивергенции векторного поля \mathbf{a} по телу T , ограниченному поверхностью S , т.е. короче:

$$\iint_S a_n ds = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{a} dx dy dz.$$

Доказательство. Мы будем предполагать, что выполняются условия, при которых существуют интегралы, о которых речь пойдет ниже.

Рассмотрим поток векторного поля $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$ через поверхность S наружу: $Q = \iint_S a_n dS$, где \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности S , ограничивающей тело T , a_n — проекция вектора \mathbf{a} на эту нормаль.

Пусть нормаль \mathbf{n} образует углы λ , μ , ν с координатными осями Ox , Oy и Oz соответственно, тогда $\mathbf{n}^0(\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu)$, где \mathbf{n}^0 — есть орт, соответствующий вектору \mathbf{n} и при этом $a_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = a_x \cos \lambda + a_y \cos \mu + a_z \cos \nu$. Тогда поток Q можно выразить так:

$$Q = \iint_S [a_x(x, y, z) \cos \lambda + a_y(x, y, z) \cos \mu + a_z(x, y, z) \cos \nu] dS.$$

Воспользуемся теперь формулой, устанавливающей связь между поверхностными интегралами первого и второго рода, тогда выражение для потока Q можно записать так:

$$Q = \iint_S a_x(x, y, z) dydz + a_y(x, y, z) dzdx + a_z(x, y, z) dxdy.$$

Вспоминая, что под знаком тройного интеграла в правой части стоит дивергенция векторного поля \mathbf{a} , окончательно можно написать

$$\iint_S a_n dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{a} dxdydz.$$

Теорема доказана.

Выясним теперь механический смысл дивергенции векторного поля.

Допустим, что векторное поле есть поле скоростей текущей жидкости $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ и пусть плотность этой жидкости $\rho = \text{const}$. Возьмем в поле вектора \mathbf{v} замкнутую поверхность S , ограничивающую малый объем. По теореме Остроградского

$$Q_T = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{v} dxdydz.$$

Применяя теорему о среднем, получим

$$Q_T = (\operatorname{div} \mathbf{v})_M \cdot v_T,$$

где M — некоторая "средняя точка", лежащая в теле T . Отсюда

$$(\operatorname{div} \mathbf{v})_M = \frac{Q}{T}.$$

Сжимая тело в точку, в пределе получим

$$(\operatorname{div} \mathbf{v})_M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{Q_T}{v_T}.$$

Вывод: дивергенция векторного поля \mathbf{v} дает нам расход жидкости из точечного источника в единицу времени, т.е. удельную силу источника. Заметим, что если $\operatorname{div} \mathbf{v}$ в данной точке положительна,

то это значит, что в этой точке находится источник, а если в данной точке $\operatorname{div} \vec{v}$ отрицательна, то это означает, что в этой точке находится сток.

Принимая во внимание это рассуждение, можно дать механическое истолкование теоремы Остроградского: *расход жидкости из тела T , ограниченного поверхностью S , в единицу времени равен сумме попарных произведений удельных сил источников на элементарные объемы, содержащие эти источники.*

Заметим, что мы попутно доказали независимость дивергенции векторного поля от выбора системы координат. Действительно, с одной стороны

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

а с другой — это удельная сила источника, а независимость последней от системы координат очевидна.

Пример. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + (y+1)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ из тела, ограниченного координатными плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ и плоскостью $x+y+z-1=0$ наружу по теореме Остроградского и непосредственно (рис. 4.3.1).

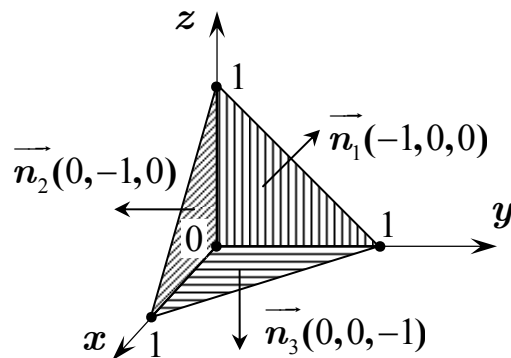


Рис. 4.3.1

Решение.

1-й метод. Вычислим поток векторного поля по теореме Остроградского. Найдем $\operatorname{div} \mathbf{a}$.

Имеем:

$$a_x = x, \quad a_y = y + 1, \quad a_z = z.$$

Значит,

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial a_y}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial a_z}{\partial z} = 1.$$

Следовательно, $\operatorname{div} \mathbf{a} = 3$.

Поток векторного поля

$$Q = 3 \iiint_T dx dy dz = 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \frac{1}{2}.$$

II-й метод. Вычислим поток векторного поля с помощью интеграла первого рода.

Имеем:

$$Q = \iint_S [a_x \cos \lambda + a_y \cos \mu + a_z \cos \nu] dS,$$

где S — полная поверхность тела T , состоящая из четырех частей: $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$; здесь $\cos \lambda$, $\cos \mu$ и $\cos \nu$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности;

$$a_x = x, \quad a_y = y + 1, \quad a_z = z.$$

Поток Q можно представить в виде суммы четырех потоков:

$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$. Вычислим каждый из потоков:

$$1. \quad Q_1 = \iint_{S_1} [x \cos \lambda + (y + 1) \cos \mu + z \cos \nu] dS, \quad \mathbf{n}_1(-1, 0, 0), \quad \text{т.е.}:$$

$$\cos \lambda = -1, \quad \cos \mu = 0, \quad \cos \nu = 0, \quad dS = dy dz.$$

Следовательно, $Q_1 = \iint_{S_1} -x dy dz = 0$, т.к. на поверхности S_1 $x = 0$.

$$2. \quad Q_2 = \iint_{S_2} [x \cos \lambda + (y + 1) \cos \mu + z \cos \nu] dS, \quad \mathbf{n}_2(0, -1, 0), \quad \text{т.е.}:$$

$$\cos \lambda = 0, \quad \cos \mu = -1, \quad \cos \nu = 0.$$

Таким образом: $Q_2 = -\iint_{S_2} (y + 1) dS$. Здесь $dS = dy dz$, причем $y = 0$

на S_2 , следовательно, $Q_2 = -\iint_{S_2} dx dy = -\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz = -\int_0^1 (1 - x^2) dx = -\frac{1}{2}$.

$$3. \quad Q_3 = \iint_{S_3} [x \cos \lambda + (y + 1) \cos \mu + z \cos \nu] dS, \quad \mathbf{n}_3(0, 0, -1), \quad \text{т.е.}$$

$$\cos \lambda = 0, \quad \cos \mu = 0, \quad \cos \nu = -1.$$

$Q_3 = -\iint_{S_3} z dS = 0$, т.к. на поверхности S_3 $z = 0$.

$$4. \quad Q_4 = \iint_{S_4} [x \cos \lambda + (y + 1) \cos \mu + z \cos \nu] dS.$$

Поверхность S_4 имеем уравнение $z = 1 - x - y$, следовательно,

$$p(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = -1, \quad q(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = -1,$$

тогда $dS = \sqrt{p^2(x, y) + q^2(x, y) + 1} = \sqrt{3}$. Поверхностный интеграл здесь вычисляется по верхней стороне поверхности S_4 , значит направляющие косинусы нормали \mathbf{n}_4 будут равны:

$$\cos \lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \mu = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \nu = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} Q_4 &= \iint_{S_4} \left[x \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + (y+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + z \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right] dS = \\ &= \iint_{S_4} \left[x \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + (y+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + (1-x-y) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \sqrt{3} dx dy = 2 \iint_{S_4} dx dy = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Окончательно: } Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0 - \frac{1}{2} + 0 + 1 = \frac{1}{2}.$$

III-й метод. Вычислим тот же самый поток с помощью поверхностного интеграла второго рода $Q = \iint_S a_x dy dz + a_y dz dx + a_z dx dy$.

В нашем случае $Q = \iint_S x dy dz + (y+1) dz dx + z dx dy$, как и в предыдущем случае, поток Q представим в виде суммы четырех потоков соответственно, через поверхности S_1, S_2, S_3, S_4 :

1. На S_1 $x = 0$, $dx = 0$, а значит $Q_1 = 0$.

2. На S_2 $y = 0$, $dy = 0$, а сторона поверхности, по которой вычисляется интеграл, нижняя, значит

$$Q_2 = - \iint_{S_2} dz dx = - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz = -\frac{1}{2}.$$

3. На S_3 $z = 0$, $dz = 0$, сторона поверхности нижняя значит $Q_3 = 0$.

$$\begin{aligned} 4. Q_4 &= \iint_{S_4(\text{верхн. стор})} x dy dz + (y+1) dz dx + z dz dy = \\ &= \iint_{S_4} x dy dz + \iint_{S_4} (y+1) dz dx + \iint_{S_4} z dz dy. \end{aligned}$$

На S_4 $x = 1 - y - z$, $y = 2 - x - z$, $z = 1 - x - y$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
Q_4 &= \iint_{S_4} (1-y-z) dy dz + \iint_{S_4} (2-x-z) dz dx + \iint_{S_4} (1-x-y) dz dy = \\
&= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (1-y-z) dz + \int_0^1 dy \int_0^{1-x} (2-x-z) dz + \int_0^1 dx \int_0^{1-y} (1-x-y) dy = 1. \\
Q &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

§4. Соленоидное векторное поле и его свойства

1. Уравнение неразрывности. Оператор Лапласа.

Определение 1. Если векторное поле \mathbf{a} таково, что в каждой его точке $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$, то поле называется *незаряженным* или *соленоидальным*.

Принимая во внимание механический смысл дивергенции векторного поля, нетрудно сделать вывод, что в соленоидальном поле нет источников и стоков.

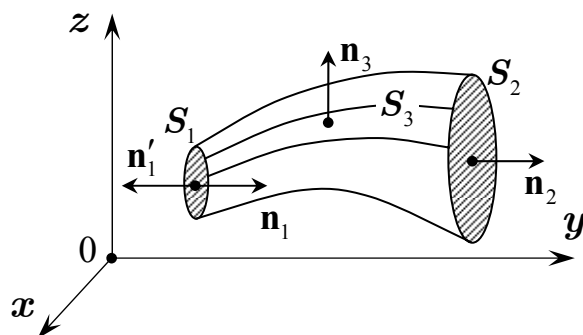


Рис. 4.4.1

Рассмотрим теперь в соленоидальном векторном поле некоторую замкнутую поверхность, образованную векторной трубкой S_3 и ее двумя поперечными сечениями S_1 и S_2 . Обозначим через \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 и \mathbf{n}_3 соответственно внешние нормали к поверхностям S_1 , S_2 и S_3 . Так как поле вектора \mathbf{a} соленоидально, то поток вектора \mathbf{a} через замкнутую поверхность в силу теоремы Остроградского равен нулю.

Поток Q через рассматриваемую поверхность равен сумме трех потоков соответственно через поверхности S_1 , S_2 и S_3 , т.е. $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$. Заметим, что поток через поверхность векторной трубки Q_3 равен нулю, т.к. в каждой точке векторной трубки вектор поля, соотнесенный этой точке, касается поверхности этой трубки, следовательно, его проекция на нормаль к поверхности равна нулю.

Следовательно, имеем:

$$\iint_{S_1} a_n dS + \iint_{S_2} a_n dS = 0.$$

Изменим направление нормали \mathbf{n}' на противоположное, тогда получим

$$\iint_{S_1} a_n dS = \iint_{S_2} a_n dS.$$

Следовательно, мы можем сделать вывод, что поток соленоидального векторного поля через поперечное сечение векторной трубки есть величина постоянная и не зависит от площади сечения. Эта величина называется *напряжением* векторной трубки.

Если соленоидальное поле является полем скоростей текущей несжимаемой жидкости $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$, то мы имеем

$$\frac{\partial v(v_x, v_y, v_z)}{\partial x} + \frac{\partial v(v_x, v_y, v_z)}{\partial y} + \frac{\partial v(v_x, v_y, v_z)}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Значит, если в пространстве, где течет жидкость, нет ни источников, ни стоков, то проекции скоростей связаны соотношением (1), которое называется *уравнением неразрывности*.

Рассмотрим теперь некоторое скалярное поле $U(x, y, z)$ и найдем его градиент:

$$\mathbf{a} = \text{grad}U(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Найдем далее дивергенцию этого векторного поля:

$$\text{div} \mathbf{a} = \text{div} \text{grad}U(x, y, z) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Определение 2. Оператор $\vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ называется

оператором Лапласа и обозначается символом Δ , т.е.

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Воздействуя оператором Лапласа Δ на скалярную функцию $U(x, y, z)$, получим

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Это выражение называется *лапласианом* функции $U(x, y, z)$.

Определение 3. Если функция $U(x, y, z)$ такова, что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

т.е. $\Delta U = 0$, то функция называется *гармонической*.

Заметим, что уравнение (2) при этом называется уравнением Лапласа.

Теорема. Для того, чтобы поле градиента какой-нибудь скалярной функции было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была бы гармонической.

Доказательство.

Необходимость. Пусть поле градиента соленоидально, т.е. $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} U = 0$, но $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} U = \Delta U$. Значит, $\Delta U = 0$, а это означает, что функция $U(x, y, z)$ гармоническая.

Достаточность. Пусть функция $U(x, y, z)$ — гармоническая, т.е.

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

но $\Delta U = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} U = \text{div grad } U$, а это и означает, что поле градиента соленоидально.

§5. Циркуляция векторного поля по замкнутому контуру.

Вихрь векторного поля. Векторная форма теоремы Стокса

Пусть в поле вектора \mathbf{a} лежит кривая l , имеющая в каждой своей точке касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$. Обозначим $a_{\boldsymbol{\tau}} = \text{пр}_{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{a}$. Тогда криволинейный интеграл

$$\int_l \mathbf{a}_\tau dS$$

называется линейным интегралом (рис. 4.5.1). В том случае, когда кривая l замкнута, интеграл $\int_l \mathbf{a}_\tau dS$ называется циркуляцией векторного поля \mathbf{a} по замкнутому контуру.

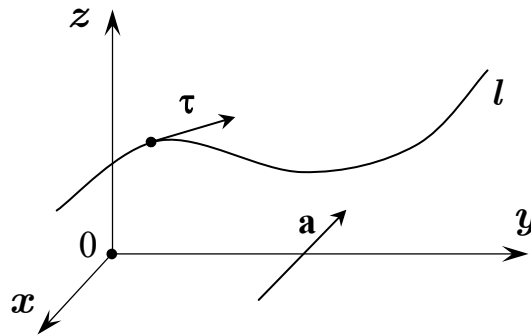


Рис. 4.5.1

Определение. Вектор $\mathbf{c} = \vec{\nabla} \times \mathbf{a}$ называется вихрем векторного поля \mathbf{a} и обозначается так: $\text{rota} = \vec{\nabla} \times \mathbf{a}$.

Выразим векторное произведение $\vec{\nabla} \times \mathbf{a}$ через определитель:

$$\text{rota} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Раскрыв этот определитель, получим такое выражение для вихря векторного поля:

$$\text{rota} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Теорема. Вихревое поле соленоидально, т.е. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \mathbf{a}) = 0$.

Доказательство. Заметим, что с очевидностью следует, что $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \mathbf{a}) = 0$, т.к. "векторы" $\vec{\nabla}$, $\vec{\nabla}$ и \mathbf{a} компланарны.

Докажем, однако, эту теорему подробнее. Обозначим $\mathbf{c} = \vec{\nabla} \times \mathbf{a}$, тогда $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{c} = \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z}$, но координаты вихря $c_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}$, $c_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}$, $c_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \mathbf{c} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} = 0\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Заметим, что при доказательстве теоремы мы предположили существование вторых смешанных производных от проекций вектора \mathbf{a} и их непрерывность.

Допустим, что в поле вектора \mathbf{a} лежит замкнутый контур l , имеющий в каждой своей точке касательную. Перекинем через контур l двустороннюю поверхность S , имеющую в каждой своей точке нормаль \mathbf{n} к поверхности. При таких предположениях о контуре l и поверхности S справедлива доказанная ранее формула Стокса.

Докажем теперь векторную форму теоремы Стокса.

Теорема Стокса (векторная форма). Циркуляция векторного поля по замкнутому контуру равна потоку его вихря через поверхность, натянутую на этот контур.

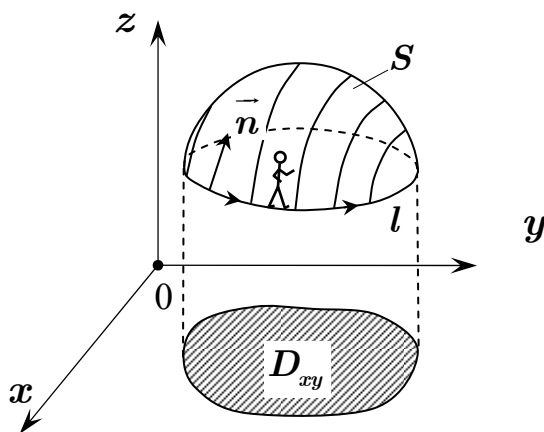


Рис. 4.5.2

Доказательство. Итак, пусть через замкнутый контур, обладающий указанными выше свойствами, перекинута (натянута) двусторонняя поверхность S . Рассмотрим циркуляцию векторного поля по замкнутому контуру l : $\mathcal{C} = \int_l \mathbf{a}_\tau dS$.

Пусть касательный вектор τ образует углы α , β и γ с координатными осями Ox , Oy и Oz , тогда $a_\tau = \text{пр}_\tau \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}^0 = a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma$.

Подставим a_τ в выражение циркуляции, тогда получим $\mathcal{C} = \int_l [a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma] dS$ или, принимая во внимание связь между криволинейными интегралами первого и второго рода, получим

$$\mathcal{C} = \int_l a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Воспользуемся теперь формулой Стокса:

$$\begin{aligned} \int_l a_x dx + a_y dy + a_z dz &= \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

При этом предполагается, что наблюдатель, у которого нормаль к поверхности проходит от ног к голове, обходит контур в таком направлении, что поверхность S остается слева (рис. 4.5.2).

Нетрудно заметить, что в правой части последней формулы находится поток вихря векторного поля \mathbf{a} через поверхность S , т.е. имеем

$$\int_l a_\tau dS = \iint_S (\text{rota})_n dS.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Вихрь векторного поля не зависит от выбора координатных осей.

(Без доказательства.)

Пример. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{\mathbf{a}} = xz\bar{\mathbf{i}} + x\bar{\mathbf{j}} + y\bar{\mathbf{k}}$ по линии пересечения конуса $x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0$ с координатными плоскостями, лежащей в первом октанте, непосредственно и по теореме Стокса (рис. 4.5.3).

Решение.

1) **Непосредственное вычисление циркуляции.** Контур l можно разбить на три части: l_1 , l_2 и l_3 , лежащие в координатных плоскостях xOy , yOz и zOx соответственно, таким образом циркуляция $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3$, где

$$\Pi_1 = \int_{l_1} xzdx + xdy + ydz.$$

На кривой l_1 : $z=0$, $dz=0$, $x=\sqrt{1-y^2}$, $y \in [0,1]$.

Следовательно,

$$\Pi_1 = \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy = \frac{\pi}{4}.$$

Далее

$$\Pi_2 = \int_{l_2} xzdx + xdy + ydz.$$

На кривой l_2 : $x+z=1$, $x=0$, $dx=0$, $z \in [0,1]$, т.е.

$$\Pi_2 = \int_0^1 (1-z)dz = \frac{1}{2}.$$

И наконец,

$$\Pi_3 = \int_{l_3} xzdx + xdy + ydz.$$

На кривой l_3 : $x+z=1$, $y=0$, $dy=0$, $x \in [0,1]$, следовательно,

$$\Pi_3 = \int_0^1 x(1-x)dx = \frac{1}{6}.$$

Окончательно

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}.$$

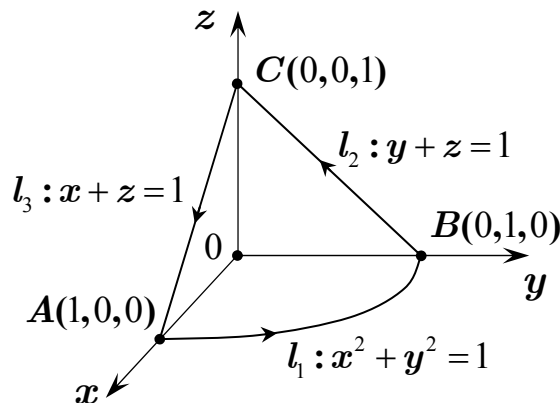


Рис. 4.5.3

2) *Вычисление циркуляции по теореме Стокса.*

$$\Pi = \iint_S \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dxdy.$$

Подставим сюда $a_x = xz$, $a_y = x$, $a_z = y$, получим:

$$\Pi = \int_S dydx + xdzdx + dzdx.$$

Перейдем в правой части к поверхностному интегралу первого рода

$$\Pi = \iint_S [1 \cdot \cos \lambda + x \cdot \cos \mu + 1 \cdot \cos \nu] dS,$$

где интеграл вычисляется по верхней стороне поверхности S .

Уравнение поверхности S : $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, следовательно,

$$p(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad q(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$dS = \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)} = \sqrt{2};$$

$$\cos \lambda = \frac{-p(x, y)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \cos \mu = \frac{-q(x, y)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя найденные значения в выражение для циркуляции, получим

$$\Pi = \iint_D \left[\frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xy}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \sqrt{2} dx dy = \iint_D \frac{x + xy + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

Перейдем к полярным координатам:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad |J(r, \varphi)| = r,$$

тогда

$$\Pi = \iint_D \frac{r \cos \varphi + r^2 \sin \varphi \cos \varphi + r}{r} r dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (r \cos \varphi + r^2 \sin \varphi \cos \varphi + r) dr$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\begin{aligned} I_{\text{внутр}} &= \int_0^1 (r \cos \varphi + r^2 \sin \varphi \cos \varphi + r) dr = \left(\frac{r^2}{2} \cos \varphi + \frac{r^3}{3} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{1}{3} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$C = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi + \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}.$$

§6. Потенциальное векторное поле

Определение. Векторное поле \mathbf{a} , в каждой точке которого выполняется условие $\text{rota} = 0$, называется *потенциальным* или *безвихревым*.

Теорема. Для того, чтобы поле вектора \mathbf{a} было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы поле вектора \mathbf{a} было бы полем градиента некоторого скаляра $U = U(x, y, z)$.

Доказательство.

Достаточность. Пусть $\mathbf{a} = \text{grad} U$, т.е.

$$\mathbf{a} = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} \mathbf{k}, \text{ т.е.}$$

$$a_x = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}, \quad a_y = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}, \quad a_z = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}.$$

Найдем координаты вектора $\mathbf{c} = \text{rota}$:

$$c_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial y \partial z} = 0.$$

Аналогично $c_y = c_z = 0$, т.е. $\text{rota} = 0$.

Значит поле вектора \mathbf{a} безвихревое, т.е. потенциальное.

Необходимость. Пусть $\text{rota} = 0$. Возьмем замкнутую кривую l , лежащую в поле вектора \mathbf{a} , тогда будет

$$\int_l \mathbf{a}_\tau dS = \iint_S (\text{rota}) dS = 0,$$

т.е.

$$\int_l \mathbf{a}_\tau dS = 0,$$

следовательно,

$$\int_l \mathbf{a}_\tau dS = \int_l a_x dx + a_y dy + a_z dz = 0.$$

Мы пришли к тому, что интеграл по замкнутому контуру l равен нулю, а это как известно, может быть лишь в том случае, ко-

гда под знаком интеграла стоит полный дифференциал некоторой функции $U(x, y, z)$, т.е.

$$a_x dx + a_y dy + a_z dz = dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$

Отсюда следует, что

$$a_x = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}, \quad a_y = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}, \quad a_z = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z},$$

т.е. $\mathbf{a} = \text{grad}U(x, y, z)$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Заметим, что функция $U(x, y, z)$, градиент от которой является полем вектора \mathbf{a} , называется потенциалом. Так как в этом случае если криволинейный интеграл

$$\int_K a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

не зависит от пути интегрирования, то потенциал векторного поля можно найти, вычислив интеграл

$$I = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Замечание 2. Из доказанной теоремы ясно, что потенциальное поле можно определить и по-другому, а именно: дать другое эквивалентное определение.

Поле вектора \mathbf{a} называется потенциальным, если оно является полем градиента некоторого скаляра $U = U(x, y, z)$.

Замечание 3. Учитывая физический смысл криволинейного интеграла, приходим к выводу, что работа потенциального векторного поля вдоль некоторой кривой не зависит от формы кривой и равна разности значений потенциала поля в начальной и конечной точках интегрирования. А тогда можно дать еще одно эквивалентное двум предыдущим определение потенциального векторного поля.

Векторное поле называется потенциальным, если работа вдоль любой замкнутой кривой равна нулю.

Литература

- [1] Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубарикова В.Н. *Лекции по математическому анализу*. М.: Высшая школа, 1999
- [2] Зорич В.А. *Математический анализ*. Т. 1 1997, Т. 2 1988
- [3] Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н. *Интегральное исчисление функций одного переменного*. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000
- [4] Кудрявцев Л.Д. *Краткий курс математического анализа*. Т. 1, 2. М.: Альфа, 1988
- [5] Кудрявцев Л.Д. *Краткий курс математического анализа*. М.: Высшая школа, Т. 1, 2 1988, Т. 3 1999
- [6] Никольский С.М. *Курс математического анализа*. М.: Наука, 1985
- [7] Пискунов Н.С. *Дифференциальное и интегральное исчисление*. Т.1, 2, М.: Наука, 2000
- [8] Тер-Крикоров, Шабунин М.И., *Курс математического анализа*. М: Наука, 1988
- [9] Фихтенгольц Г.М. *Основы математического анализа*. Т.1, 2. М.: Наука, 2001
- [10] Щипачев В.С. *Высшая математика*. М.: Высшая школа, 1998
- [11] *Математический анализ I* / Под общей редакцией Л.С. Ратафьевой. СПб.: ИТМО, 2002
- [12] *Математический анализ II* / Под общей редакцией Л.С. Ратафьевой. СПб.: ИТМО, 2003
- [13] *Сборник задач по математике для втузов* / Под редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича в 3 Т. М.: Наука, 1981
- [14] Бронштейн И.Н., Семедаев И.А., *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов*. М.: Наука, 1986
- [15] Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. М.: Физматлит, 1963



КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики (ВМ) была организована в 1930 году. Первым заведующим кафедрой был профессор Г.Д. Гродский. С конца 1936 года кафедрой ВМ заведовал профессор И.П. Натансон. С 1944 по 1973 г. кафедрой заведовал В.А. Тартаковский — выдающийся математик и замечательный педагог.

В разное время на кафедре ВМ преподавали академик В.И. Смирнов, член-корреспондент АН СССР Д.К. Фаддеев, проф. И.С. Соминский, проф. Ф.И. Харшиладзе, проф. А.Ф. Андреев, проф. Ю.В. Аленицын, проф. И.А. Молотков.

В 1979 году кафедру возглавил доктор технических наук, профессор В.Г. Дегтярёв, специалист по теории движения космических аппаратов. С 1997 года кафедрой руководит доктор физико-математических наук, профессор И.Ю. Попов, в область научных интересов которого входят теория рассеяния, теория операторов, моделирование сложных физических систем.

Кафедра ВМ осуществляет обучение студентов всех специальностей университета по дисциплине «Высшая математика» и читает ряд специальных дисциплин математического цикла. Кафедра ВМ является самой многочисленной кафедрой в университете по числу преподавателей. В настоящее время на кафедре ВМ работают такие выдающиеся ученые как профессора В.В. Жук, А.П. Качалов, Г.П. Мирошниченко, А.Г. Петрашень, В.П. Смирнов, В.М. Уздин, В.Ю. Тертычный — член Нью-Йоркской академии.

На кафедре ВМ сложилась научная школа по математическому моделированию сложных физических систем; активно развиваются направления, связанные с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовыми компьютерами и квантовыми технологиями. Сложилось тесное сотрудничество с крупными научными центрами как в России, так и за рубежом.

Иван Александрович Лапин
Лариса Семеновна Ратафьева

Кратные интегралы. Теория поля.

Учебное пособие.

Под общей редакцией Ларисы Семеновны Ратафьевой

В авторской редакции

Компьютерный набор и верстка

Д.В. Ермашев

Дизайн обложки

Д.В. Ермашев

Редакционно-издательский отдел СПбГУ ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99

Подписано к печати

Заказ № 1394

Тираж 500

Отп. на ризографе