МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ПРИОРИТЕТНЫЕ НАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКТЫ «Образование»

ПОБЕДИТЕЛЬ КОНКУРСА ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВУЗОВ

Интегралы, зависящие от параметров

Методические указания по решению задач

ИТМО
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Санкт-Петербург

2008

Блинова И.В., Попов И.Ю. Интегралы, зависящие от параметров / Методические указания по решению задач. СПб: СПбГУ ИТМО, 2008. 16 с.

Пособие предполагается использовать для самостоятельной работы студентов по теме «Интегралы, зависящие от параметров». Предназначено студентам всех специальностей и преподавателям.

Рекомендовано к печати Советом естественнонаучного факультета 23.12.2008 (протокол N 5)

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

Раздел 1. Интегралы, зависящие от параметров

1. Воспользовавшись формулой

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt = \frac{db(x)}{dx} f(x,b(x)) - \frac{da(x)}{dx} f(x,a(x)) + \int\limits_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt,$$

продифференцировать интегралы, зависящие от параметра (1.1-1.8):

1.1. $\int\limits_{a+x}^{b+x} \frac{\sin tx}{t} dt$

1.2. $\int\limits_{1-x}^{1+x} \frac{x^{t-1}}{t-1} dt,\ (x>0)$

1.3. $\int\limits_{x}^{0} \ln(x^2+t^2)dt$

1.4. $\int\limits_{-x}^{x} e^{(x+t)^2} dt$

1.5. $\int\limits_{\sqrt{x}}^{x} \ln t \log_t x dt$

1.6. $\int\limits_{\sin x}^{\cos x} e^{x\sqrt{1-t^2}} dt$

1.7. $\int\limits_{x}^{x^2} tgx\sqrt{t}dt$

1.8. $\int\limits_{-x^2}^{0} \sin(x\sqrt{-t})dt$

2. В задачах 2.1-2.4 найти значения интегралов при помощи дифференцирования заданных соотношений.

Пример. Пользуясь формулой $\int\limits_0^1 x^{a-1}dx = \frac{1}{a},\ a>0$, вычислить интеграл $I = \int\limits_0^1 x^{a-1}\ln^2 xdx$.

Решение. Так как $x^{a-1}\ln^2 x = \frac{d^2}{da^2}x^{a-1}$, то $I = \frac{d^2}{da^2}\int\limits_0^1 x^{a-1}dx = \frac{d^2}{da^2}\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{2}{a^3}$.

2.1. Найти интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a)^3}$, если $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a)} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}},\ (a>0)$

2.2. Найти интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 xdx}{(1+a\sin^2 x)^2}$, если $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1+a\sin^2 x)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$, $(-1<a<1)$.

2.3. Найти интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$, если $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{1}{a},\ (a\neq 0)$

2.4. Найти интеграл $\int_0^{\pi}\frac{\cos x dx}{(1+a\cos x)^2}$, если $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+a\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}, (|a|<1)$.

3. При помощи дифференцирования по параметру найти интеграл.

<u>Пример</u>. Найти интеграл $I(x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}-e^{-t}}{t}dt,\ (x>0)$.

<u>Решение</u>. $\frac{dI(x)}{dx}=\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}(-t)}{t}dt=-\int_0^{\infty}e^{-xt}dt=\frac{1}{x}e^{-xt}\Big|_0^{\infty}=-\frac{1}{x}$,

следовательно, $I(x)=-\ln x+C$, где постоянная С определяется из условия $I(1)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}-e^{-t}}{t}dt=0$. Таким образом, $I(x)=-\ln x$.

3.1. $\int_0^1\frac{arctgtx}{t\sqrt{1-t^2}}dt$

3.2. $\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}-e^{-t(x+1)}}{t}dt, (x>-1)$

3.3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{arctgt(xtgt)}{tgt}dt,\ (x\geq 0)$

3.4. $\int_0^{\infty}\frac{\ln(x^2+t^2)}{t^2+1}dt$

3.5. $\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-xt^2}}{t}e^{-t^2}dt$

3.6. $\int_0^{\infty}\frac{arctgtx}{t(1-t^2)}dt,\ (x\geq 0)$

3.7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2 t+x^2\sin^2 t)dt$

3.8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+x\sin t}{1-x\sin t}\cdot\frac{dt}{\sin t},\ (|x|\leq 1)$

3.9. $\int_0^{\infty}\frac{(e^{-xt}-e^{-t})^2}{t^2}dt, (x>0)$

3.10. $\int_0^1\frac{t^x-t}{\ln t}dt,\ (x>0)$

4. Используя формулу Фруллани

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(a)\ln\frac{b}{a},\ (a>0,b>0),$$

где $f(x)$ - такая непрерывная функция, что интеграл $\int_A^{\infty}f(x)x^{-1}dx$ сходится при любом $A>0$, вычислить интегралы:

4.1. $\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$

4.2. $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}dx$

4.3. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx$ **4.4.** $\int\limits_0^\infty \frac{arctgax - arctgbx}{x} dx$

4.5. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$

5. При помощи дифференцирования по параметру, вычислить интегралы:

<u>**Пример 1**</u>. Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax dx$.

<u>**Решение**</u>. Имеем $\frac{dI}{da} = -\int\limits_0^\infty e^{-x^2} 2x \sin 2ax dx$.

Применяем формулу интегрирования по частям, пользуясь тем, что $e^{-x^2} 2x = de^{-x^2}$, тогда $\frac{dI}{da} = \sin 2ax e^{-x^2} \Big|_0^\infty - 2a \int\limits_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax dx$, откуда $\frac{dI}{da} = -2aI$.

Решаем получившееся дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными и получаем $I = Ce^{-a^2}$. При $a = 0$ $I(0) = \int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, следовательно, $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2}$.

<u>**Пример 2**</u>. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-ax^2 + bx} dx$.

<u>**Решение**</u>. Имеем $\frac{dI}{db} = \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} e^{bx} x dx = -\frac{1}{2a} \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} e^{bx} d(-ax^2) =$

$= -\frac{1}{2a} \int\limits_{-\infty}^\infty e^{bx} de^{-ax^2} = -\frac{1}{2a} e^{bx} e^{-ax^2} \Big|_{-\infty}^\infty + \frac{1}{2a} \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} b e^{bx} dx = \frac{b}{2a} I$.

Получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dI}{db} = \frac{b}{2a} I$, откуда $I = Ce^{\frac{b^2}{4a}}$, при $b = 0$ $I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $\left(\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \right)$.

В силу этого окончательно имеем $I = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$.

5.1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2-\frac{c^2}{x^2}}dx$, если известно, что $\int\limits_c^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Указание: в интеграле, получающемся после дифференцирования по параметру, сделать замену переменной $x=\frac{c}{z}$.

5.2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x(1+x^2)}dx,\ a>0$.

Указание: при составлении дифференциального уравнения воспользоваться тем, что $\frac{\sin ax}{x(1+x^2)}=\frac{\sin ax}{x}-\frac{x\sin ax}{1+x^2}$ *и* $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\frac{\pi}{2},\ (a>0)$.

5.3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\sin 2bxdx$.

5.4. Вычислить разность интегралов $I=\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-kx}}{1+x^2}dx-\int\limits_k^{\infty}\frac{\sin(x-k)}{x}dx$.

Указание: постоянные интегрирования найдутся при условии обращения I *в 0 при* $k\to\infty$.

5.5. Найти уравнение линии $r=r(\varphi)$, если площадь сектора, ограниченного этой кривой и лучами $\varphi=0$ и $\varphi=\varphi_1$ вычисляется по формуле $S=\frac{1}{4}r^2(\varphi_1)-\frac{1}{4}$.

6. В задачах 6.1-6.5 показать, что функция, представленная интегралом, является решением соответствующего дифференциального уравнения.

Пример. Доказать, что функция $I_0(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\varphi)d\varphi$ является решением уравнения Бесселя порядка $n=0$.

Решение. Дифференцируя интеграл $I_0(x)$ по параметру x, получим

$$I_0'(x)=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi,$$

$$I_0''(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\varphi)\sin^2\varphi d\varphi .$$

В интеграле $I_0'(x)$ применим формулу интегрирования по частям

$$I_0'(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\sin(x\sin\varphi)d\varphi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\sin\varphi)d\cos\varphi =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sin(x\sin\varphi)\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2\varphi\cos(x\sin\varphi)d\varphi =$$

$$= -\frac{2x}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\cos(x\sin\varphi)d\varphi .$$

Следовательно, $xI_0''(x) + I_0'(x) + xI_0(x) =$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-x\sin^2\varphi - x\cos^2\varphi + x\right]\cos(x\sin\varphi)d\varphi = 0 .$$

6.1. Доказать, что функция Бесселя целого порядка n $I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi$ удовлетворяет уравнению Бесселя $x^2 I_n''(x) + xI_n'(x) + (x^2 - n^2)I_n(x) = 0$.

6.2. Доказать, что функция $u(x) = \int_0^1 k(x,y)v(y)dy$, где $k(x,y) = \begin{cases} x(1-y), & x \le y \\ y(1-x), & x > y \end{cases}$ и $v(y)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению $u''(x) = -v(x),\ 0 < x < 1$ и граничным условиям $u(0) = u(1) = 0$.

6.3. Доказать, что функция $u(x) = \int_0^x \frac{\sin k(x-t)}{k} f(t)dt$, где $f(t)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению $u''(x) + k^2 u(x) = f(x), x > 0$, и начальным условиям $u(0) = 0,\ u'(0) = 0$.

6.4. Пусть $f(x)$ - дважды дифференцируемая функция и $g(x)$ – дифференцируемая функция. Доказать, что функция

$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-at)+f(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}g(z)dz$ удовлетворяет волновому уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $-\infty<x<\infty$ и начальным условиям $u(x,0)=f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)$.

6.5. Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируемая на $(-\infty,\infty)$, доказать, что функция $u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$ удовлетворяет уравнению теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $-\infty<x<\infty$, $t>0$.

6.6. Доказать, что функция $u(x)=\int\limits_0^x(x-t)f(t)dt$ удовлетворяет уравнению $u''(x)=f(x)$.

6.7. Доказать, что функция $u(x)=\frac{1}{(n+1)!}\int\limits_0^x(x-t)^{n-1}f(t)dt$ удовлетворяет уравнению $u^{(n)}(x)=f(x)$.

6.8. Доказать, что функция $u(x)=e^x\int\limits_0^x(x-t)e^tf(t)dt$ удовлетворяет уравнению $u''-2u'+u=f(x)$.

6.9. Доказать, что функция $u(x)=\frac{1}{p}e^{-hx}\int\limits_0^x f(t)\sin p(x-t)e^{ht}dt$ удовлетворяет уравнению $u''+2hu'+k^2u=f(x)$, где $h^2-k^2=-p^2$.

Раздел 2. Г-функция и В-функция Эйлера

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-t}dt,\ \ p>0.$$

Основное свойство гамма-функции выражается формулой

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p).$$

При p, не равному целому числу, имеет место соотношение

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin\pi p}.$$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\ \ p>0,\, q>0$$

В-функция и Г-функция Эйлера связаны соотношением

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

1. Пользуясь тем, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, вычислить:

1.1. $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ **1.2.** $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ **1.3.** $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$

1.4. $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$ **1.5.** $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$ **1.6.** $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$

1.7. $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$ **1.8.** $\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)$ **1.9.** $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

1.10. $B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ **1.11.** $B\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ **1.12.** $B\left(\frac{3}{2},\frac{4}{3}\right)$

2. Проверить справедливость соотношений:

2.1. $B(p,q)=B(q,p)$

2.2. $B(p,q)=B(p+1,q)+B(p,q+1)$

2.3. $B(p+1,q)=\frac{p}{q}B(p,q+1)$

2.4. $B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$

3. Вычислить интегралы:

Пример. $\int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}} e^{-y} dy = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

(Использована подстановка $y = x^2$).

3.1. $\int\limits_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx$

3.2. $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^n} dx,\ (n>0)$

3.3. $\int\limits_0^{\infty} x^{2n-1} e^{-x^2} dx,\ (n>0, n\in\mathbb{N})$

3.4. $\int\limits_0^{\infty} x^m e^{-x^n} dx,\ (\frac{m+1}{n}>0)$

3.5. $\int\limits_0^{1} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx,\ (p>0)$

4. Использовать свойства B-функции.

Пример.

$$\int\limits_0^1 x\sqrt[3]{1-x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 y^{-\frac{1}{3}}\sqrt[3]{1-y}\,dy = \frac{1}{3}B\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma(2)} =$$

$$= \frac{1}{9}\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

4.1. $\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} dx,\ n\in\mathbb{N}, n>0$

4.2. $\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$

4.3. $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ (a>0)$

4.4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$

4.5. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}$

4.6. $\int\limits_0^1 \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

4.7. $\int\limits_0^1 \frac{x^6 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

4.8. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$

4.9. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}{(x+1)^4} dx$ (использовать подстановку $y = \frac{2x}{x+1}$)

4.10. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{(1+x)^5(1-x)^3}{(1+x^2)^5}dx$ (использовать подстановку $y=\frac{1}{2}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}$)

4.11. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}(1+x)^2}$

4.12. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$

4.13. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$

4.14. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4}$

4.15. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

4.16. $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{(1+x^3)^2}$

4.17. $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{1+x^8}$

4.18. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2dx}{(1+x)^5}$

4.19. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^5 xdx$

4.20. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} tg^{\frac{2}{3}}xdx$

4.21. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} tg^{\frac{1}{3}}xdx$

4.22. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\cos^4 xdx$

4.23. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^4 xdx$

4.24. $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах:

5.1. $r=\sin\theta\cos^3\theta$

5.2. $r=\sin^3\theta\cos\theta$

5.3. $r^4=\sin^3\theta\cos\theta$

5.4. $r^4=\sin^5\theta\cos^3\theta$

6. Пользуясь формулой $\frac{1}{x^m}=\frac{1}{\Gamma(m)}\int\limits_0^{\infty} t^{m-1}e^{-xt}dt, (x>0)$, найти интегралы:

6.1. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$

6.2. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$

6.3. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

6.4. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}dx$

6.5. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}dx$ **6.6.** $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^2}dx$

7. Доказать тождества:

7.1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\pi}{4}$ **7.2.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^4}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^4}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

7.3. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}\int\limits_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}=\frac{\pi}{2n}$ **7.4.** $\int\limits_{-\infty}^{1} (1-x^3)^{-\frac{1}{2}}dx=\sqrt{3}\int\limits_1^\infty (x^3-1)^{\frac{1}{2}}dx$

8. Известно, что $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$. Найти $\int\limits_0^1 \ln \Gamma(x)dx$.

9. Доказать, что $\Gamma'(x)$ имеет корень $x_0\in[1,2]$.

Ответы.

Раздел 1.

1. **1.1.** $\frac{b+2x}{x(b+x)}\sin(bx+x^2)-\frac{a+2x}{x(a+x)}\sin(ax+x^2)$

1.2. $\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)\left(x^{x-1}-x^{-x-1}\right)$ **1.3.** $-\ln 2-\frac{\pi}{2}-2\ln|x|$

1.4. $2e^{4x^2}$ **1.5.** $-e^{x|\sin x|}\cos x-e^{x|\cos x|}\cos x+\int\limits_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-t^2}e^{x\sqrt{1-t^2}}dt$

1.6. $\ln x\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)+1-\frac{1}{\sqrt{x}}$ **1.7.** $2xtgx^2-tgx^{\frac{3}{2}}+\int\limits_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}dt}{\cos^2 x\sqrt{t}}$

1.8. $2x\sin x|x|+\int\limits_{-x^2}^{0}\cos(x\sqrt{-t})\sqrt{-t}dt$

2. **2.1.** $\frac{3\pi}{16a^{\frac{5}{2}}}$ **2.2.** $\frac{\pi}{4(1+a)^{\frac{3}{2}}}$

2.3. $\frac{3}{8a^5}arctg\frac{1}{a}+\frac{a^4+8a^2+3}{8a^4(1+a^2)^3}$ **2.4.** $-\frac{\pi a}{(1-a^2)^{\frac{3}{2}}}$

3. **3.1.** $\frac{\pi}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ **3.2.** $\ln(1+x)$ **3.3.** $\frac{\pi}{2}\ln(1+x)$

3.4. $\pi\ln(1+x)$ **3.5.** $\frac{1}{2}\ln(1+x)$ **3.6.** $\frac{\pi}{2}\ln(1+x)$

3.7. $\pi\ln\frac{|x|+1}{2}$ **3.8.** $\pi\arcsin x$

3.9. $2x\ln 2x-2(x+1)\ln(x+1)$ **3.10.** $\frac{1}{2}\ln(1+x)$

4. **4.1.** $\ln\frac{b}{a}$ **4.2.** 0 **4.3.** $\ln\frac{b}{a}$ **4.4.** $\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$ **4.5.** $\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$

5. **5.1.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2c}$ **5.2.** $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}e^{-a}$ **5.3.** $e^{-b^2}\int_0^b e^{t^2}dt$ **5.4.** 0 **5.5.** $r=e^{\varphi}$

Раздел 2.

1. **1.1.** $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ **1.2.** $\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$ **1.3.** $\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$ **1.4.** $\frac{105}{16}\sqrt{\pi}$

1.5. $-2\sqrt{\pi}$ **1.6.** $\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$ **1.7.** $-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$ **1.8.** $\frac{16}{105}\sqrt{\pi}$

1.9. π **1.10.** $\frac{\pi}{2}$ **1.11.** $\frac{\pi}{16}$ **1.12.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

3. **3.1.** $\frac{105}{32}\sqrt{\pi}$ **3.2.** $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ **3.3.** $\frac{1}{2}(n-1)!$ **3.4.** $\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$

3.5. $\Gamma(p+1)$

4. **4.1.** $\frac{2n\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}\cdot 2$ **4.2.** $\frac{\pi}{8}$ **4.3.** $\frac{\pi a^4}{16}$

4.4. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ **4.5.** $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ **4.6.** $\frac{8}{15}$ **4.7.** $\frac{15}{96}\pi$

4.8. $\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\sqrt{2\pi}}$ **4.9.** $\frac{\pi}{32\sqrt{2}}$ **4.10.** $\frac{2}{3}$ **4.11.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

4.12. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ **4.13.** $\frac{2}{3}$ **4.14.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ **4.15.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

4.16. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$ **4.17.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{8}$ **4.18.** $\frac{1}{12}$ **4.19.** $\frac{1}{24}$

4.20. π **4.21.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ **4.22.** $\frac{9\pi}{4096}$ **4.23.** $\frac{3\pi}{512}$

4.24. $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$

5. **5.1.** $\frac{15\pi}{768}$ **5.2.** $\frac{15\pi}{768}$ **5.3.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$ **5.4.** $\frac{3\pi\sqrt{2}}{64}$

6. **6.1.** $\frac{\pi}{2}$ **6.2.** $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ **6.3.** $\frac{\pi}{2}$ **6.4.** $\frac{\pi}{4}$ **6.5.** $\frac{\pi}{4}$ **6.6.** $\frac{3}{4}\ln 3$

8. $\frac{1}{2}\ln(2\pi)$

9. *Указание: воспользоваться теоремой Ролля*

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.3.-М.: Наука, 1969.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, т.2. – М.: Наука, 1973.

3. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, т.2. – М.: Высшая школа, 1981.

4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1977.

5. Берман Г.М. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука,1979.

6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях. – М.: Высшая школа, 1980.

Содержание

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики – крупнейшая в Санкт-Петербургском государственном университете информационных технологий, механики и оптики. С момента основания на ней работали такие выдающиеся ученые, как И.П.Натансон, В.А.Тартаковский, В.Н.Попов, И.А.Молотков, А.Г.Аленицын, В.В.Жук и другие. Научные интересы сотрудников покрывают практически все разделы математики. На кафедре сложилась мощная научная школа по математическому моделированию сложных физических систем. В последнее время активно развивается направление, связанное с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовым компьютером и квантовыми коммуникациями. Сотрудники кафедры активно участвуют в международных научных конференциях, работают в рамках Российских и международных научных проектов. Сложилось тесное научное сотрудничество с Санкт-Петербургским государственным университетом, Петербургским отделением Математического института имени В.А.Стеклова РАН, лабораторией физикохимии наносистем Института химии силикатов РАН и другими научными центрами как в России, так и за рубежом: университетами Марселя и Тулона (Франция), Ювяскиля (Финляндия), Гумбольдтовским университетом Берлина (Германия).

Блинова И.В., Попов И.Ю.
Интегралы, зависящие от параметров. Методические указания по решению задач

В авторской редакции
Компьютерный набор и верстка Попов И.Ю.
Дизайн обложки Попов И.Ю.
Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики
Зав..РИО Гусарова Н.Ф.
Лицензия ИД N 00408 от 05.11.99
Подписано к печати 24.12.08.
Заказ 1392
Отпечатано на ризографе
Тираж 100 экз.