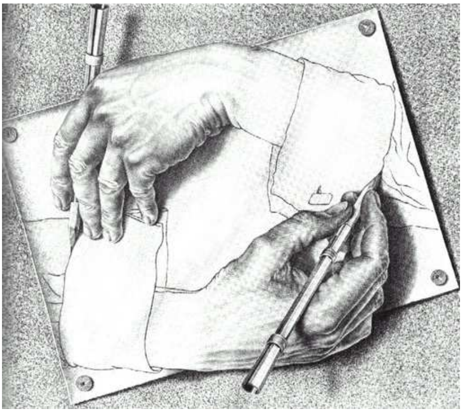
А. П. ТАНЧЕНКО

Ю. В. ТАНЧЕНКО

# СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПЕРВОГО КУРСА



Санкт-Петербург
2009

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ПРИОРИТЕТНЫЕ НАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКТЫ «Образование»

ПОБЕДИТЕЛЬ КОНКУРСА ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВУЗОВ

А. П. ТАНЧЕНКО

Ю. В. ТАНЧЕНКО

# СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПЕРВОГО КУРСА

ИТМО
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Санкт-Петербург
2009

**Справочное пособие по высшей математике для первого курса.**
Составители: Танченко А. П., Танченко Ю. В.
Справочное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2009 год, 83 с.

В пособии приведена сводка основных определений и результатов по высшей математике для студентов первого курса всех специальностей и направлений СПбГУ ИТМО.

Рекомендовано к печати Ученым Советом естественнонаучного факультета СПбГУ ИТМО. Протокол № 5 от 23.12.08.

ПРИОРИТЕТНЫЕ НАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКТЫ
«Образование»

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007-2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

# Оглавление

# Глава 1

# Аналитическая геометрия

## 1 Декартова система координат на плоскости

Декартова система координат на плоскости состоит из двух взаимно перпендикулярных прямых. Эти прямые называются осями координат. Точка $O$ их пересечения служит началом отсчета для обеих осей и называется началом координат. Одну из координатных осей располагают горизонтально и положительным считают направление вправо. Эту ось называют осью абсцисс и обозначают $Ox$. На вертикальной оси, называемой осью ординат и обозначаемой $Oy$, положительным считают направление вверх.

Каждой точке $M$ плоскости взаимно однозначно соответствует пара $(x, y)$ действительных чисел — координат точки $M$. Эти числа являются координатами проекции точки $M$ на оси $Ox$ и $Oy$ соответственно. Первая координата $x$ называется абсциссой точки $M$, а вторая координата $y$ — ординатой точки $M$.

## 2 Полярная система координат

Полярная система координат состоит из точки $O$, называемой полюсом, и луча $Ox$, называемого полярной осью. Положение каждой точки $M$ на плоскости задается двумя полярными координатами: полярным радиусом $r = |OM|$ и полярным углом $\varphi$, который равен углу между осью $Ox$ и отрезком $OM$. Значения угла $\varphi$ определены с точностью до слагаемого $2\pi k$ ($k$ – целое число).

Декартовы и полярные координаты точки $M$ связаны соотношениями

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi$$

Если заданы декартовы координаты $(x, y)$ точки $M$, то полярный радиус и полярный угол находятся из соотношений

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

с учетом того, в каком квадранте лежит точка $M$.

## 3 Расстояние между двумя точками на плоскости

В декартовой системе координат на плоскости, расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ обозначается через $|AB|$ и вычисляется по формуле

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

## 4 Деление отрезка на плоскости в данном отношении

Декартовы координаты точки $M(x, y)$, делящей отрезок $AB$ в отношении $|AM| : |MB| = \lambda$, определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

где $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.

## 5 Общее уравнение прямой на плоскости

Каждая прямая на плоскости задается в декартовой системе координат линейным уравнением

$$Ax + By + C = 0$$

которое называется общим уравнением прямой на плоскости. Обратно, если $A$ и $B$ не равны одновременно нулю, то уравнение $Ax + By + C = 0$ задает прямую на плоскости.

## 6 Уравнение прямой в отрезках

Уравнение прямой в отрезках имеет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Здесь $(a, 0)$ и $(0, b)$ — точки пересечения прямой с осями координат.

## 7 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Если прямая не параллельна оси $Oy$, то ее общее уравнение можно разрешить относительно переменной $y$. В результате получим уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b$$

Параметр $k$, называемый угловым коэффициентом прямой, он равен тангенсу угла $\alpha$, которая прямая образует с осью $Ox$. Параметр $b$ — ордината точки пересечения прямой с осью $Oy$.

## 8 Угол между прямыми на плоскости

Угол $\varphi$ между прямыми

$$y = k_1 x + b_1 \qquad \text{и} \qquad y = k_2 x + b_2$$

при $k_1 k_2 \neq -1$ определяется формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

Если $k_1 k_2 = -1$, то $\varphi = \pi/2$.

## 9 Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости

Прямые

$$y = k_1 x + b_1 \qquad \text{и} \qquad y = k_2 x + b_2$$

на плоскости параллельны, если

$$k_1 = k_2$$

и перпендикулярны, если

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

## 10 Пучок прямых на плоскости

Пучок прямых на плоскости это совокупность прямых на плоскости, проходящих через данную точку $M_0(x_0, y_0)$. Уравнение прямой с угловым коэффициентом $k$ из данного пучка имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Общее уравнение прямой из данного пучка записывается так

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

## 11 Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две заданные точки

Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две заданные точки $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$, имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

## 12 Расстояние от точки до прямой на плоскости

Расстояние $d$ от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ на плоскости определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

## 13 Уравнение окружности

Уравнение окружности с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и радиусом $R$ имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

## 14 Уравнение окружности в параметрической форме

Уравнение окружности с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и радиусом $R$ в параметрической форме имеет вид

$$x = x_0 + R\cos t\,, \qquad y = y_0 + R\sin t\,, \qquad 0 \leqslant t < 2\pi$$

## 15 Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек $F_1$ и $F_2$ есть постоянная величина, равная $2a$. Точки $F_1$ и $F_2$ называются фокусами эллипса, а расстояние $|F_1F_2| = 2c$ — фокусным расстоянием.

## 16 Каноническое уравнение эллипса

Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Здесь $a$ — большая полуось, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ — малая полуось эллипса. Каноническое уравнение описывает эллипс в системе координат, ось $Ox$ которой проходит через фокусы $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, а начало координат находится в середине отрезка $F_1F_2$. Отношение $e = c/a < 1$ называется эксцентриситетом эллипса.

## 17 Параметрическое уравнение эллипса

Параметрическое уравнение эллипса с полуосями $a$ и $b$ и с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$x = x_0 + a\cos t\,, \qquad y = y_0 + b\sin t\,, \qquad 0 \leqslant t < 2\pi$$

## 18 Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек $F_1$ и $F_2$ есть постоянная величина, равная $2a$. Точки $F_1$ и $F_2$ называются фокусами гиперболы, а расстояние $|F_1F_2| = 2c$ — фокусным расстоянием.

## 19 Каноническое уравнение гиперболы

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

где $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Оно описывает гиперболу в системе координат, ось $Ox$ которой проходит через фокусы $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, а начало координат находится в середине отрезка $F_1F_2$.
Параметр $a$ называется действительной полуосью, параметр $b$ — мнимой полуосью. Отношение $e = c/a > 1$ называется эксцентриситетом гиперболы.

## 20 Асимптоты гиперболы

Прямые

$$y = \frac{b}{a}x \qquad \text{и} \qquad y = -\frac{b}{a}x$$

называются асимптотами гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

При движении точки гиперболы на бесконечность, расстояние от этой точки до одной из асимптот стремится к нулю.

## 21 Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки $F$ и данной прямой $\mathcal{L}$. Точка $F$ называется фокусом, а прямая $\mathcal{L}$ — директрисой параболы.

## 22 Каноническое уравнение параболы

Через фокус проведем прямую, перпендикулярную директрисе, и обозначим точку пересечения этой прямой с директрисой буквой $C$. Длину отрезка $FC$ обозначим $p$. Примем построенную прямую за ось $Ox$, а середину отрезка $FC$ — за начало координат. В такой системе координат парабола имеет уравнение

$$y^2 = 2px$$

называемое каноническим. При этом, уравнение директрисы $x = -p/2$, а координаты фокуса, очевидно, равны $F(p/2, 0)$.

## 23 Параллельный перенос системы координат

Одна декартова система координат $Oxy$ может преобразовываться в другую декартову систему координат $O'x'y'$ при помощи параллельного переноса. Координаты $(x, y)$ точки $M$ в системе $Oxy$ и координаты $(x', y')$ той же точки $M$ в системе $O'x'y'$ при параллельном сдвиге осей координат и переносе начала координат $O$ в точку $O'(a, b)$ связаны следующими соотношениями

$$x = x' + a\,, \qquad y = y' + b$$

## 24 Поворот системы координат

Одна декартова система координат $Oxy$ может преобразовываться в другую декартову систему координат $O'x'y'$ при помощи поворота. Координаты $(x, y)$ точки $M$ в системе $Oxy$ и координаты $(x', y')$ той же точки $M$ в системе $O'x'y'$ при повороте осей на угол $\varphi$ вокруг начала координат связаны следующими соотношениями

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \,, \qquad y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi$$

## 25 Общее уравнение кривой второго порядка

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

## 26 Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

При переходе к подходящей новой системе координат общее уравнение кривой второго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

упрощается и приводится к каноническому виду, которому соответствует либо эллипс, либо гипербола, либо парабола, либо две или одна прямая, либо точка, либо пустое множество.

Искомое преобразование производится в два этапа. На первом этапе с помощью поворота освобождаемся от слагаемого, содержащего произведение координат $x'y'$. Угол поворота $\varphi$ определяется формулой

$$\mathrm{tg}\, 2\varphi = \frac{B}{A - C}$$

если $A \neq C$, при $A = C$ имеем $\varphi = \pi/4$. На втором этапе при помощи параллельного переноса приходим к искомому уравнению.

## 27 Декартова система координат в пространстве

Декартова система координат в пространстве состоит из трех взаимно перпендикулярных числовых осей (называемых осями координат) с общим началом отсчета $O$. Оси координат обозначаются через $Ox$, $Oy$, $Oz$ и называются осями абсцисс, ординат и аппликат. Координаты $(x, y, z)$ точки $M$ определяются как координаты проекций этой точки на оси координат. Плоскости $Oxy$, $Oyz$ и $Ozy$ называются координатными плоскостями.

## 28 Расстояние между двумя точками в пространстве

В декартовой системе координат в пространстве, расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, обозначается через $|AB|$ и вычисляется по формуле

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

## 29 Деление отрезка в пространстве в данном отношении

Декартовы координаты точки $M(x, y, z)$, делящей отрезок $AB$ в отношении $|AM| : |MB| = \lambda$, определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

где $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$.

## 30 Цилиндрические координаты

Положение точки $M$ в пространстве можно определить ее аппликатой $z$ и полярными координатами $r = |OP|$ и $\varphi$ проекции $P$ этой точки на координатную плоскость $Oxy$. Величины $(r, \varphi, z)$ называются цилиндрическими координатами точки $M$. Декартовы и цилиндрические координаты точки связаны соотношениями

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,, \qquad z = z$$

## 31 Сферические координаты

Сферическая система координат задает положение точки $M$ следующими тремя величинами: расстоянием $r = |OM|$, углом $\theta$ между осью $Oz$ и отрезком $OM$ и углом $\varphi$ между плоскостями $Oxz$ и $OMz$. Величины $(r, \varphi, \theta)$ называются сферическими координатами точки $M$. Декартовы и сферические координаты точки связаны соотношениями

$$x = r\cos\varphi\sin\theta\,, \qquad y = r\sin\varphi\sin\theta\,, \qquad z = r\cos\theta$$

## 32 Векторы

Вектором называется направленный отрезок $AB$, у которого точка $A$ рассматривается как начало, а точка $B$ — как конец вектора. Вектор обозначается либо как $\overrightarrow{AB}$, либо одной буквой $\vec{a}$. Длина отрезка $AB$ называется модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ (или $|\vec{a}|$).

## 33 Коллинеарность векторов. Равенство векторов

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых называются коллинеарными. Векторы называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковые модули и направления.

## 34 Координаты вектора

Если поместить начало вектора $\vec{a}$ в начало координат, т.е. представить его направленным отрезком $\overrightarrow{OA}$, то координаты $(x, y, z)$ точки $A$ называются координатами вектора $\vec{a}$. При этом пишут $\vec{a} = (x, y, z)$. Вектор $\overrightarrow{OA}$ называется радиус-вектором точки $A$.

Если вектор $\vec{a}$ имеет начало в точке $B(x_1, y_1, z_1)$ и конец в точке $C(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\vec{a} = \overrightarrow{BC} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

## 35 Разложение вектора по координатным ортам

Обозначим через $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ единичные векторы (орты) координатных осей, т.е.

$$\vec{i} = (1, 0, 0)\,, \qquad \vec{j} = (0, 1, 0)\,, \qquad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

Тогда каждый вектор $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ единственным образом представляется в виде

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

## 36 Модуль вектора

Если задан вектор $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, то его модуль вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

## 37 Произведение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ на число $\lambda$ называется вектор $\lambda\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий модуль $|\lambda||\vec{a}|$ и направленный одинаково с $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно $\vec{a}$ при $\lambda < 0$. Если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, то $\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$.

## 38 Сумма векторов

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} + \vec{b}$, который строится следующим образом. Сначала с помощью параллельного переноса вектора $\vec{b}$

совмещают его начало с концом вектора $\vec{a}$. Сумма векторов $\vec{a}+\vec{b}$ — замыкающий вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$ (правило треугольника).

Если $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, то

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$$

## 39 Разность векторов

Разность векторов $\vec{a}-\vec{b}$ определяется как сумма векторов $\vec{a}$ и $-\vec{b}$. Если $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, то

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z)$$

## 40 Нулевой вектор

Вектор, начало которого совпадает с его концом, называется нулевым и обозначается $\vec{0}$. Очевидно, что $\vec{0}=(0,0,0)$ и $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

## 41 Определение скалярного произведения векторов

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла $\varphi$ между ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

## 42 Скалярное произведение векторов в декартовых координатах

Если в декартовых координатах $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

## 43 Свойства скалярного произведения

1. $$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

2. $$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

3. $$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

4. $$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$$

   (эту величину обозначают также $\vec{a}^2$)

## 44 Угол между векторами. Направляющие косинусы

Угол $\varphi$ между векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ определяется из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

## 45 Условия перпендикулярности и параллельности двух векторов

Условия перпендикулярности двух векторов: векторы $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \qquad \text{или} \qquad a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

Условие параллельности (коллинеарности) двух векторов: векторы $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ параллельны тогда и только тогда, когда

$$\vec{a} = \lambda\vec{b} \qquad \text{или} \qquad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$$

## 46 Проекция вектора

Проекция вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$, равная $|\vec{a}|\cos\varphi$, вычисляется по формуле

$$\mathrm{pr}_b\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

## 47 Направляющие косинусы вектора

Косинусы углов $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ между вектором $\vec{a}$ и осями координат $Ox$, $Oy$, $Oz$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$. Отметим, что

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \qquad \text{и} \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

## 48 Определение векторного произведения векторов

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, определяемый условиями:

1. вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$
2. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где $\varphi$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$
3. вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов, т.е. если начало векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ поместить в одну точку, то кратчайший поворот вектора $\vec{a}$ к $\vec{b}$ наблюдается с конца вектора $\vec{c}$ происходящим против часовой стрелки.

## 49 Векторное произведение векторов в декартовых координатах

Если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y, -a_x b_z + a_z b_x, a_x b_y - a_y b_x)$$

## 50 Свойства векторного произведения

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
3. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$
4. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
5. площадь $S$ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна модулю их векторного произведения $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$

## 51 Определение смешанного произведения векторов

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} \times \vec{c}$, т.е.

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

## 52 Смешанное произведение векторов в декартовых координатах

Если $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, то их смешанное произведение вычисляется как определитель третьего порядка

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

## 53 Свойства смешанного произведения

1. при перестановке двух сомножителей смешанное произведение меняет знак
$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = -\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}$$
2. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны (т.е. параллельны одной плоскости) тогда и только тогда, когда $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$
3. если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны, то на них можно построить параллелепипед, его объем $V = |\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|$.

## 54 Общее уравнение плоскости

Общим уравнением плоскости называется линейное уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Любая плоскость в пространстве задается этим уравнением.

## 55 Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору

Положение плоскости в пространстве полностью определяется точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на этой плоскости, и перпендикулярным ей вектором $\vec{N} = (A, B, C)$, который называется нормальным вектором плоскости. При этом уравнение плоскости имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

## 56 Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку параллельно двум векторам

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной двум неколлинеарным векторам $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, может быть записано в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

где $A$, $B$, $C$ — координаты вектора $\vec{N} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$.

## 57 Расстояние от точки до плоскости

Расстояние $d$ от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

## 58 Угол между плоскостями

Угол $\varphi$ между двумя плоскостями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

равен углу между их нормальными векторами $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ и определяется соотношением

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

## 59 Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей

Условие параллельности плоскостей: две плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

параллельны тогда и только тогда, когда коллинеарны их нормальные векторы $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, т.е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Условие перпендикулярности плоскостей: две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда перпендикулярны их нормальные векторы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, т.е.

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

## 60 Прямая в пространстве

Прямая в пространстве может быть задана системой двух линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

эти уравнения определяют две плоскости, пересечением которых и служит данная прямая.

## 61 Параметрическое уравнение прямой в пространстве

Положение прямой в пространстве полностью определяется какой-нибудь ее точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющим вектором $\vec{s} = (m, n, p)$, параллельным прямой. При этом прямая задается следующими параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt\,, \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

## 62 Параметрическое уравнение прямой в пространстве

Прямая в пространстве может быть также задана следующими каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

здесь $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка через которую проходит прямая, $\vec{s} = (m, n, p)$ — направляющий вектор прямой.

## 63 Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки

Прямая, проходящая через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, представляется уравнениями

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

## 64 Угол между прямыми в пространстве

Угол $\varphi$ между прямыми в пространстве равен углу между их направляющими векторами $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ и вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

## 65 Угол между прямой и плоскостью

Угол $\varphi$ между прямой с направляющим вектором $\vec{s} = (m, n, p)$ и плоскостью с нормальным вектором $\vec{N} = (A, B, C)$ определяется из соотношения

$$\sin\varphi = \frac{\vec{s} \cdot \vec{N}}{|\vec{s}||\vec{N}|} = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

## 66 Поверхности второго порядка

Поверхностями второго порядка называются такие множества точек в пространстве, координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

## 67 Канонические уравнения поверхностей второго порядка

При помощи поворотов и параллельного переноса осей координат всякое уравнение поверхности второго порядка может быть преобразовано к простому каноническому виду. Основные канонические уравнения и названия соответствующих поверхностей приведены ниже:

| | |
|---|---|
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ | эллипсоид |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ | однополостный гиперболоид |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ | двуполостный гиперболоид |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ | конус |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ | эллиптический параболоид |
| $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ | гиперболический параболоид |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ | эллиптический цилиндр |
| $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ | гиперболический цилиндр |
| $y^2=2px$ | параболический цилиндр |
| $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ | пара пересекающихся плоскостей |
| $\frac{x^2}{a^2}=1$ | пара параллельных плоскостей |
| $x^2=0$ | пара совпадающих плоскостей |

# Глава 2

# Линейная алгебра

## 1 Алгебраические дополнения элементов матрицы

Алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}$ квадратной матрицы $A = \{a_{ij}\}$ определяются формулой $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где $M_{ij}$ — минор элемента $a_{ij}$ (определитель $(n-1)$-го порядка, получаемый из определителя матрицы $A$ путем вычеркивания строки и столбца, содержащих данный элемент).

## 2 Определители

Определителем второго порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Определитель порядка $n$ — это число, которое задается квадратной таблицей чисел, имеющей $n$ строк и $n$ столбцов

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

где $a_{ij}$ — элементы определителя.

Определитель равен сумме произведений элементов какого-нибудь столбца (строки) на их алгебраические дополнения

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$$

Из этой формулы следует, что вычисление определителя порядка $n$ сводится к вычислению определителей порядка $(n-1)$.

## 3 Свойства определителей

Выполнены следующие свойства определителей:

1. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, а столбцы — соответствующими строками.

2. Общий множитель элементов какой-нибудь строки (или столбца) может быть вынесен за знак определителя.

3. Определитель с нулевой строкой или столбцом равен нулю

4. Если элементы одной строки (столбца) определителя соответственно равны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.

5. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

6. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

## 4 Матрицы

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из $m$ строк и $n$ столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа $a_{ij}$ называются элементами матрицы. Если $m = n$, матрица $A$ называется квадратной, а число $n$ — её порядком.

Для каждой квадратной матрицы $A$ можно вычислить её определитель, обозначаемый $\det A$ или $|A|$.

## 5 Сумма матриц

Суммой $A + B$ матриц $A = \{a_{ij}\}$ и $B = \{b_{ij}\}$ одинакового размера называется матрица $C = \{c_{ij}\}$ того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц $A$ и $B$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

## 6 Произведение матрицы на число

Произведением $\lambda A$ матрицы $A = \{a_{ij}\}$ на число $\lambda$ называется матрица $B = \{b_{ij}\}$, полученная из матрицы $A$ умножением всех ее элементов на $\lambda$

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

## 7 Произведение матриц

Произведением $AB$ $(m \times p)$-матрицы $A = \{a_{ij}\}$ на $(p \times n)$ матрицу $B = \{b_{ij}\}$ называется $(m \times n)$-матрица $C = \{c_{ij}\}$, элемент которой $c_{ij}$, стоящий в $i$-й строке и $j$-м столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов $i$-й строки матрицы $A$ и $j$-го столбца матрицы $B$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Важно отметить, что в общем случае $AB \neq BA$ (т.е. матрицы нельзя переставлять).

Определитель произведения двух квадратных матриц одинакового порядка равен произведению определителей этих матриц

$$\det(AB) = \det A \det B$$

## 8 Миноры $k$-го порядка матрицы

Выделим в матрице $k$ произвольных строк и $k$ произвольных столбцов. Определитель $k$-го порядка, составленный из элементов, расположенных на пересечении выделенных строк и столбцов, называется минором $k$-го порядка этой матрицы.

## 9 Ранг матрицы

Рангом матрицы $A$ называется наибольший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы. Ранг матрицы $A$ обозначается $\mathrm{rang}(A)$ или $r(A)$.

## 10 Свойства ранга матрицы

Ранг матрицы не меняется при следующих элементарных преобразованиях:

1. замене строк столбцами, а столбцов — строками
2. перестановке строк (столбцов) матрицы
3. умножении какой-либо строки (столбца) на число, отличное от нуля
4. вычеркивании строки (столбца) матрицы, все элементы которой равны нулю
5. прибавлении к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца)

## 11 Единичная матрица

Квадратная матрица вида

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

называется единичной. Справедливы равенства $AE = A$ и $EB = B$ (если произведения в левых частях равенств определены).

## 12 Обратная матрицы

Квадратная матрица $A$ называется невырожденной, если $\det A \neq 0$, и обратимой, если существует такая матрица $B$, что $AB = BA = E$. Матрица $B$ называется обратной матрицей к матрице $A$. Квадратная матрица обратима тогда и только тогда, когда она невырожденная. Обратимая матрица $A$ имеет только одну обратную матрицу, которая обозначается $A^{-1}$ и вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

где $A_{ij}$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}$.

## 13 Системы линейных уравнений

Система линейных уравнений имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{lllllllll} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \qquad (1)$$

где $a_{ij}$ — коэффициенты системы, $b_j$ — свободные члены, $x_i$ — неизвестные величины.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. Если же система не имеет ни одного решения, то она называется несовместной. Совместная система называется определенной, если она имеет только одно решение, и неопределенной, если она имеет больше одного решения.

Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

называются соответственно матрицей и расширенной матрицей системы (1).

Теорема Кронекера-Капелли: для совместности системы (1) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу расширенной матрицы $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A|\,\vec{b})$.

## 14 Правило Крамера

Если число неизвестных линейной системы совпадает с числом уравнений, т.е. линейная система уравнений имеет вид

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

и матрица системы $A = \{a_{ij}\}$ невырождена, то система имеет единственное решение, которое находится по правилу Крамера

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

в этих формулах $\Delta = \det(A)$ — определитель системы, а $\Delta_k$ — определитель, полученный из определителя системы заменой $k$-го столбца столбцом свободных членов.

## 15 Матричное решение системы

Система линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Может быть записана в матричной форме

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

где $A = \{a_{ij}\}$ — матрица системы, $\vec{x} = \{x_i\}$ — матрица-столбец неизвестных, $\vec{b} = \{b_j\}$ — матрица-столбец свободных членов.

Если матрица $A$ квадратная и невырожденная, то решение системы может быть записано в матричной форме

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

## 16 Линейное пространство арифметических векторов $\mathbb{R}^n$

Всякая упорядоченная совокупность из $n$ чисел называется *арифметическим вектором* и обозначается символом

$$\vec{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots\, ,\, x_n)$$

Числа $x_1,\, x_2,\, \ldots\, ,\, x_n$ называются координатами арифметического вектора $\vec{x}$.

Над арифметическими векторами вводятся следующие операции.

Сложение: если

$$\vec{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots\, ,\, x_n)\,, \qquad \vec{y} = (y_1,\, y_2,\, \ldots\, ,\, y_n)$$

то

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2,\, \ldots\, ,\, x_n + y_n)$$

Умножение на число: если $\lambda$ — число и $\vec{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots\, ,\, x_n)$ — арифметический вектор, то

$$\lambda\vec{x} = (\lambda x_1,\, \lambda x_2,\, \ldots\, ,\, \lambda x_n)$$

Множество всех арифметических $n$-компонентных векторов с введенными выше операциями сложения и умножения на число называется линейным пространством арифметических векторов и обозначается символом $\mathbb{R}^n$.

## 17 Скалярное произведение и норма вектора в пространстве $\mathbb{R}^n$

Скалярным произведением векторов $\vec{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots\, ,\, x_n)$ и $\vec{y} = (y_1,\, y_2,\, \ldots\, ,\, y_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ называется число

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

## 18 Ортогональные вектора в пространстве $\mathbb{R}^n$

Два вектора $\vec{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots\, ,\, x_n)$ и $\vec{y} = (y_1,\, y_2,\, \ldots\, ,\, y_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. То есть, если

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = 0$$

## 19 Норма (модуль) вектора в пространстве $\mathbb{R}^n$

Нормой (модулем) вектора $\vec{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots\, ,\, x_n)$ называется число

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

## 20 Свойства нормы вектора в пространстве $\mathbb{R}^n$

1. $|\vec{x}| \geqslant 0$, $|\vec{x}| = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{x} = \vec{0}$
2. $|\lambda\vec{x}| = |\lambda||\vec{x}|$, $\lambda$ — число
3. $|\vec{x} + \vec{y}| \leqslant |\vec{x}| + |\vec{y}|$ — неравенство треугольника
4. $|\vec{x}\vec{y}| \leqslant |\vec{x}||\vec{y}|$ — неравенство Коши-Буняковского

Пространство $\mathbb{R}^n$ в котором введено скалярное произведение называют евклидовым пространством.

## 21 Линейная независимость и базис в пространстве $\mathbb{R}^n$

Векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ пространства $\mathbb{R}^n$ линейно зависимы (независимы), если существуют (не существуют) такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, не все равные нулю, что

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{x}_k = \vec{0}$$

## 22 Линейная комбинация векторов

Вектор

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{x}_k$$

называют линейной комбинацией векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$.

## 23 Базис в пространстве $\mathbb{R}^n$

Базисом называют линейно независимое множество векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ при условии, что любой вектор $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ представим в виде линейной комбинации

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют координатами вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ в данном базисе и пишут $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Число $n$ векторов, составляющих базис, называется размерностью пространства $\mathbb{R}^n$.

## 24 Стандартный Базис в пространстве $\mathbb{R}^n$

Примером базиса в пространстве $\mathbb{R}^n$ служат вектора

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= (1, 0, \ldots, 0) \\
\vec{e}_2 &= (0, 1, \ldots, 0) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vec{e}_n &= (0, 0, \ldots, 1)
\end{aligned}$$

Этот базис называется стандартным базисом пространства $\mathbb{R}^n$.

## 25 Собственные числа и собственные векторы матрицы

Число $\lambda$ называется собственным числом матрицы $A$ порядка $n$, если можно найти такой ненулевой вектор $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, что выполняется равенство

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

Вектор $\vec{x}$ называется собственным вектором матрицы $A$, отвечающим собственному числу $\lambda$.

## 26 Характеристическое уравнение матрицы

Собственные числа являются корнями уравнения

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= p_n\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + p_1\lambda + p_0 = 0$$

называемого характеристическим уравнением матрицы $A$.

Координаты собственных векторов матрицы $A$, отвечающих собственному числу $\lambda$, удовлетворяют линейной системе уравнений

$$(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$$

# Глава 3

# Дифференциальное исчисление функций одной переменной

## 1 Определение функции

Пусть $D \subset \mathbb{R}$ — некоторое множество действительных чисел $\mathbb{R}$. Если каждому числу $x \in D$ поставлено в соответствие некоторое число $y = f(x)$, то говорят, что на множестве $D$ определена функция $f$. Множество $D$ называется областью определения, а множество $E$ всех чисел вида $y = f(x)$ — множеством значений функции $f$. Для функции $y = f(x)$ принято следующие обозначение

$$f \,:\, D \to E$$

## 2 Монотонные функции

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на множестве $D \subset \mathbb{R}$, если для любых $x_1, x_2 \in D$, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$). Возрастающие и убывающие функции называются монотонными функциями.

## 3 Сложная функция

Пусть заданы функции $u = g(x)$ и $y = f(u)$ такие, что

$$g \,:\, D \to E\,, \qquad f \,:\, E \to G$$

тогда функция $y = f(g(x))$ называется сложной функцией или суперпозицией функций.

Пусть определена функция $y = f(x)$ такая, что

$$f \,:\, D \to E$$

## 4 Обратная функция

Обратной функцией по отношению к функции $y = f(x)$

$$f \,:\, D \to E$$

называется такая функция $x = g(y)$, что

$$g \,:\, E \to D$$

и $g(f(x)) = x$ и $f(g(y)) = y$. Обратную к $f$ функцию обозначают $f^{-1}$.

Для монотонных функций обратная функция всегда существует. Для того чтобы получить обратную функцию $x = f^{-1}(y)$, следует из равенства $y = f(x)$ выразить $x$ через $y$.

## 5 Неявно заданная функции

Говорят, что функция $y = f(x)$, $x \in D$, неявно задана уравнением $F(x, y) = 0$ если для всех $x \in D$

$$F(x, f(x)) = 0$$

## 6 Параметрически заданная функция

Пусть заданы функции

$$x = \varphi(t)\,, \qquad y = \psi(t)\,, \qquad t \in (\alpha, \beta)$$

Если при этом $x = \varphi(t)$ имеет обратную $t = \varphi^{-1}(x)$, то определена новая функция

$$y(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$$

называемая функцией, заданной параметрически.

## 7 Определение числовой последовательности

Если каждому натуральному числу $n$ сопоставлено некоторое число $x_n$, то тем самым определена числовая последовательность, которую обозначают $\{x_n\}$, $x_n$ называют общим членом последовательности.

## 8 Ограниченная последовательность

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу), если существует такое число $M$, что $|x_n| < M$ (соответственно $x_n < M$, $M < x_n$) для всех $n = 1, 2, \ldots$.

## 9 Предел последовательности

Число $a$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое число $N$, что $|x_n - a| < \epsilon$ при $n > N$.

Если $a$ является пределом последовательности $\{x_n\}$, то пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad \text{или} \qquad x_n \to a$$

Последовательность, предел которой существует, называется сходящейся.

## 10 Свойства сходящихся последовательностей

1. Если последовательность сходится, то она имеет только один предел.

2. Любая сходящаяся последовательность ограничена, и из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

3. Если последовательность сходится к числу $a$, то любая ее подпоследовательность также сходится к числу $a$.

## 11 Арифметические действия над пределами последовательностей

Если последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ сходятся, то последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n/y_n\}$ также сходятся, причем

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \qquad y_n \neq 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$$

## 12 Переход к пределу последовательностей в неравенствах

1. Если последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ сходятся и $x_n \leqslant y_n$, то
$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n$$

2. Если $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ и
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\,, \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = a$$
то
$$\lim_{n\to\infty} y_n = a$$

## 13 Предел монотонной последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей (неубывающей), если для любого $n$ выполняется неравенство $x_n < x_{n+1}$ ($x_n \leqslant x_{n+1}$). Последовательность $\{x_n\}$ называется убывающей (невозрастающей), если для любого $n$ выполняется неравенство $x_{n+1} < x_n$ ($x_{n+1} \leqslant x_n$). Все указанные последовательности называются монотонными.

Теорема: монотонная ограниченная последовательность имеет конечный предел.

## 14 Второй замечательный предел

Последовательность
$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
возрастает и ограничена сверху, следовательно она сходится. Её предел обозначается $e$
$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad e = 2,71828\ldots$$

и называется вторым замечательным пределом.

Логарифм чисел по основанию $e$ называется натуральным логарифмом, обозначается $\ln x$.

## 15 Бесконечно большие последовательности

Если члены последовательности $x_n$ неограниченно возрастают по абсолютной величине с ростом $n$, то последовательность называется бесконечно большой или стремящейся к бесконечности. Обозначение

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

Если при этом члены последовательности, начиная с некоторого номера, положительны (отрицательны), то говорят, что $x_n$ стремится к плюс (минус) бесконечности, и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty\,, \qquad \left(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\right)$$

## 16 Определение предела функции в конечной точке

Число $A$ называется пределом функции $f(x)$ при $x$, стремящемся к $a$, если для любого $\epsilon > 0$, существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \epsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$.
Обозначение:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A\,, \qquad \text{или} \qquad f(x) \to A\,, \quad \text{при} \quad x \to a$$

## 17 Определение предела функции на бесконечности

Число $A$ называется пределом функции $f(x)$ при $x$, стремящемся к $+\infty$, если для любого $\epsilon > 0$, существует $N > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \epsilon$ при $x > N$.
Обозначение:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = A\,, \qquad \text{или} \qquad f(x) \to A\,, \quad \text{при} \quad x \to +\infty$$

Аналогичным образом определяются пределы при $x \to -\infty$ и $x \to \infty$.

## 18 Предел функции слева

Число $A$ называется пределом слева функции $f(x)$ при $x$, стремящемся к $a$, если для любого $\epsilon > 0$, существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \epsilon$ при $a - \delta < x < a$.
Обозначение:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = A\,, \qquad \text{или} \qquad f(a-0) = A$$

## 19 Предел функции справа

Число $A$ называется пределом справа функции $f(x)$ при $x$, стремящемся к $a$, если для любого $\epsilon > 0$, существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \epsilon$ при $a < x < a + \delta$.
Обозначение:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A\,, \qquad \text{или} \qquad f(a+0) = A$$

## 20 Арифметические действия над пределами функций

Пусть $a$ — число или один из символов $\infty$, $+\infty$, $-\infty$. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}\,, \qquad g(x) \neq 0\,, \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

## 21 Переход к пределу функций в неравенствах

Пусть $f(x) \leqslant g(x)$ в некоторой окрестности точки $a$ $(x \neq a)$. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x)$$

если эти пределы существуют.

Если $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ в некоторой окрестности точки $a$ $(x \neq a)$ и

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A$$

то

$$\lim_{x\to a} g(x) = A$$

## 22 Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Некоторые другие пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$$

## 23 Бесконечно малая функция

Пусть $a$ — число или один из символов $\infty$, $+\infty$, $-\infty$. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$, если

$$\lim_{x\to a} f(x)=0$$

## 24 Бесконечно большая функция

Пусть $a$ — число или один из символов $\infty$, $+\infty$, $-\infty$. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$, если

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

## 25 Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций

1. Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций являются бесконечно малыми функциями.

2. Произведение бесконечно малой при $x\to a$ функции на ограниченную в некоторой окрестности точки $a$ функцию, является бесконечно малой функцией

3. $$\lim_{x\to a} f(x)=A$$
   тогда и только тогда, когда
   $$f(x)=A+g(x)$$
   где $g(x)$ — бесконечно малая при $x\to a$ функция.

4. Функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x\to a$ тогда и только тогда, когда функция
   $$g(x)=\frac{1}{f(x)}$$
   — бесконечно малая при $x\to a$.

## 26 Эквивалентные бесконечно малые функции

Бесконечно малые при $x \to a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Обозначение:

$$f(x) \sim g(x) \qquad \text{при} \qquad x \to a$$

Примеры эквивалентных бесконечно малых функций

$$(1+\epsilon)^{\alpha} - 1 \sim n\epsilon \qquad a^{\epsilon} - 1 \sim \epsilon \ln a$$

$$\log_a(1+\epsilon) \sim \epsilon \log_a e \qquad \sin\epsilon \sim \epsilon$$

$$1 - \cos\epsilon \sim \frac{1}{2}\epsilon^2 \qquad \arcsin\epsilon \sim \epsilon$$

$$\operatorname{tg}\epsilon \sim \epsilon \qquad \operatorname{arctg}\epsilon \sim \epsilon$$

где $\epsilon = \epsilon(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$.

## 27 Бесконечно малые функции одинакового порядка

Говорят, что функции $f(x)$, $g(x)$ — бесконечно малые одинакового порядка при $x \to a$ и пишут

$$f(x) = O\left(g(x)\right) \qquad \text{при} \qquad x \to a$$

если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K\,, \qquad 0 < |K| < +\infty$$

## 28 Бесконечно малые более высокого порядка

Функция $f(x)$ называется функцией более высокого порядка малости по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Обозначение:

$$f(x) = o\left(g(x)\right) \qquad \text{при} \qquad x \to a$$

## 29 Непрерывность функции

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если она определена в окрестности этой точки и

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

## 30 Непрерывность функции справа

Функция $f(x)$ называется непрерывной справа в точке $x = a$, если она определена в точке $a$ и справа от нее и

$$f(a+0) = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$$

## 31 Непрерывность функции слева

Функция $f(x)$ называется непрерывной слева в точке $x = a$, если она определена в точке $a$ и слева от нее и

$$f(a-0) = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$$

## 32 Критерий непрерывности функции в точке

Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке $x = a$, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывной справа и слева в этой точке. При этом

$$f(a) = f(a+0) = f(a-0)$$

## 33 Непрерывности функции на множестве

Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве $D$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

## 34 Арифметические действия над непрерывными функциями

Если функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны в точке $x = a$, то функции

$$f(x) \pm g(x)\,, \qquad f(x)\cdot g(x)\,, \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(a)\neq 0)$$

также непрерывны в этой точке.

## 35 Сохранение знака непрерывной функции

Если $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, и $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$), то существует такая окрестность точки $x = a$, что в этой окрестности $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

## 36 Свойства функций непрерывных на отрезке

1. Функция $f(x)$, непрерывная в каждой точке отрезка $[a, b]$, ограничена на этом отрезке и достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значения.

2. Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ принимает на этом отрезке любое значение из отрезка $[m,M]$, где $m$ — наименьшее, $M$ — наибольшее значение $f(x)$ на $[a,b]$.

## 37 Непрерывность сложной функции

Если функция $y = g(x)$ непрерывна в точке $x = a$, а функция $z = f(y)$ непрерывна в точке $y = g(a)$, то сложная функция $z = f(g(x))$ непрерывна в точке $x = a$.

## 38 Определение элементарных функций

Основными элементарными функциями являются

1. степенная функция $y = x^\alpha$, $\alpha$ — любое число.
2. показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$
3. логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$
4. тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$
5. обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$

Функция называется элементарной, если она может быть получена с помощью конечного числа арифметических действий и суперпозиций над основными элементарными функциями.

## 39 Непрерывность элементарных функций

Любая элементарная функция непрерывна в каждой точке интервала, входящего в ее область определения.

## 40 Точки разрыва функции

Точки в которых функция не является непрерывной, называются точками разрыва.

## 41 Точка разрыва функции первого рода

Точка $x = a$ называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, если существуют конечные односторонние пределы $f(a+0)$, $f(a-0)$, но не выполняются соотношения

$$f(a+0) = f(a-0) = f(a)$$

## 42 Точка разрыва функции второго рода

Точка $x = a$ называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $f(a+0)$, $f(a-0)$ не существует или равен бесконечности.

## 43 Точка устранимого разрыва функции

Если существуют конечные односторонние пределы $f(a+0)$, $f(a-0)$ и

$$f(a+0) = f(a-0) \neq f(a)$$

то точка $x = a$ называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$.

## 44 Наклонная асимптота графика функции

Пусть для функции $y = f(x)$ существует такая прямая, что расстояние от точки $M(x, f(x))$ графика функции до этой прямой стремится к нулю при бесконечном удалении точки $M$ от начала координат. Тогда такая прямая называется наклонной асимптотой графика функции.

## 45 Условия существования наклонной асимптоты

Для того, чтобы у функции $y = f(x)$ существовала наклонная асимптота $y = kx + b$ необходимо и достаточно существования двух пределов

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k\,, \qquad \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b$$

При этом указанные пределы могут быть различны при $x \to +\infty$ (для правой наклонной асимптоты) и при $x \to -\infty$ (для левой наклонной асимптоты).

## 46 Вертикальная асимптота графика функции

Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x, f(x))$ графика функции до этой прямой стремится к нулю, когда координата $x$ точки $M$ стремится к числу $a$.

## 47 Условия существования вертикальной асимптоты

для существования вертикальной асимптоты у графика функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из пределов

$$\lim_{x\to a\pm 0} f(x)$$

был равен бесконечности.

## 48 Производная функции

Производной $f'(x)$ функции $y = f(x)$ в точке $x$ называется предел отношения приращения функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

к приращению аргумента $\Delta x$ при $\Delta x$ стремящемся к нулю

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Используются такие обозначения производной

$$f'(x) = y' = \dot{y} = \frac{dy}{dx}$$

## 49 Дифференцируемость функции

Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке $x$, если приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

в этой точке представимо в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

Дифференцируемость $f(x)$ в точке $x$ равносильна точу, что у $f(x)$ существует производная в этой точке. При этом

$$f'(x) = A$$

Если функция дифференцируема в точке $x$, то она непрерывна в этой точке. Обратное утверждение не верно: из непрерывности не следует дифференцируемость.

## 50 Дифференцируемость функции на множестве

Функция $f(x)$ называется дифференцируемой (непрерывно дифференцируемой) на некотором множестве $D$, если в каждой точке $x \in D$ существует (непрерывная) производная $f'(x)$.

## 51 Дифференциал функции

Приращение $\Delta x$ называют дифференциалом независимой переменной и обозначают через $dx$. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке $x$ называют выражение

$$dy = f'(x)dx$$

Из формулы

$$\Delta y = dy + o(dx)$$

следует, что дифференциал $dy = f'(x)dx$ функции $y = f(x)$ — это главная линейная часть приращения $\Delta y$ функции в точке $x$.

## 52 Геометрический смысл производной

Значение производной $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ равно угловому коэффициенту касательной $k = \operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$ к графику этой функции, проведенной через точку $M_0(x_0, f(x_0))$.

## 53 Уравнение касательной к графику функции

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в его точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

## 54 Геометрический смысл дифференциала

Дифференциал $dy = f'(x_0)dx$ равен приращению ординаты касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0\,(x_0, f(x_0))$ при приращении аргумента, равном $dx = x - x_0$.

## 55 Механический смысл первой производной

Если $x = x(t)$ — функция, описывающая закон движения материальной точки, то первая производная $x'(t)$ есть скорость этой точки в момент времени $t$.

## 56 Таблица производных основных элементарных функций

$$C' = 0 \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x) = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

## 57 Правила дифференцирования

Пусть $C$ — постоянная и $f(x)$, $g(x)$ — функции у которых существуют производные. Тогда справедливы следующие правила дифференцирования

$$
\begin{array}{ll}
(Cf)' = Cf' & (f+g)' = f' + g' \\
(fg)' = f'g + fg' & \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{fg' - f'g}{g^2} \qquad (g' \neq 0)
\end{array}
$$

## 58 Правило дифференцирования сложной функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0$, а функция $z = g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $z = g(f(x))$ в точке $x_0$ имеет производную, равную

$$z'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$$

## 59 Производная обратной функции

Если $x = x(y)$ — функция, обратная к $y = y(x)$, то

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x(y))}$$

## 60 Производная неявно заданной функции

Говорят, что функция $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, неявно задана уравнением $F(x, y) = 0$ если для всех $x \in (a, b)$

$$F(x, f(x)) = 0 \tag{1}$$

Для вычисления производной функции $y = f(x)$ следует тождество (1) продифференцировать как сложную функцию по $x$, а затем из полученного уравнения выразить $f'(x)$.

## 61 Производная функции, заданной параметрически

Пусть заданы функции

$$x = \varphi(t)\,, \qquad y = \psi(t)\,, \qquad t \in (\alpha, \beta)$$

Если при этом $x = \varphi(t)$ на интервале $(\alpha, \beta)$ имеет обратную $t = \varphi^{-1}(x)$, то определена новая функция

$$y(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$$

называемая функцией, заданной параметрически. Производная функции $y(x)$ вычисляется по формуле

$$y'(x) = \left.\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

## 62 Теорема Ролля

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема при $x \in (a, b)$ и $f(a) = f(b)$, то существует по крайней мере одна стационарная точка $c \in (a, b)$, т.е. точка в которой $f'(c) = 0$.

## 63 Теорема Лагранжа

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема при $x \in (a, b)$, то существует по крайней мере одна точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

## 64 Теорема Коши

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы при $x \in (a, b)$ и $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$, то существует по крайней мере одна точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

## 65 Правило Лопиталя-Бернулли

Пусть в некоторой окрестности $U$ точки $x = a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы всюду, кроме, может быть, самой точки $x = a$, и пусть $g(x) \neq 0$ в $U$. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются одновременно либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при $x \to a$ и при этом существует предел

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

то существует также предел

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

причем

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Правило Лопиталя-Бернулли применимо и в том случае, когда $a$ представляет собой один из символов $\infty$, $+\infty$, $-\infty$.

## 66 Производная 2-го и более высоких порядков

Производная 2-го порядка от функции $y = f(x)$ называется производная от ее первой производной, т.е.

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Вообще, производной $n$-го порядка (или $n$-й производной) называется производная от производной порядка $(n-1)$, т.е.

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

Для производной $n$-го порядка функции $y = f(x)$ используется также обозначение

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

## 67 Механический смысл второй производной

Если $x = x(t)$ — функция, описывающая закон движения материальной точки, то вторая производная $x''(t)$ есть ускорение этой точки в момент времени $t$.

## 68 Дифференциал $n$-го порядка

Дифференциал $n$-го порядка функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ называется выражение

$$d^n y = f^{(n)}(x_0) dx^n$$

где $dx^n = (x - x_0)^n$ — $n$-я степень приращения аргумента.

## 69 Формула Тейлора

Если функция $y = f(x)$ имеет производные до $(n+1)$ порядка включительно в некоторой окрестности точки $x_0$, то для всех $x$ из этой окрестности справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$$

или в эквивалентной форме через дифференциалы

$$y = y_0 + \frac{dy}{1!} + \frac{d^2 y}{2!} + \ldots + \frac{d^n y}{n!} + o\left(dx^n\right)$$

здесь $y_0 = f(x_0)$.

## 70 Достаточные условия возрастания и убывания функции

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на множестве $D \subset \mathbb{R}$, если для любых $x_1, x_2 \in D$, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$). Возрастающие и убывающие функции называются монотонными функциями.

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a, b)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ возрастает на $(a, b)$; если же $f'(x) < 0$ при всех $x \in (a, b)$, то $f(x)$ убывает на этом интервале.

## 71 Точки минимума, максимума и экстремума функции

Если существует окрестность точки $x_0$ такая, что для всякой точки $x \neq x_0$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ (или $f(x) < f(x_0)$), то точка $x_0$ называется точкой минимума (максимума) функции $y = f(x)$, а число $f(x_0)$ — минимумом (максимумом) этой функции. Точки минимума и максимума функции называются ее точками экстремума.

## 72 Критическая точка функции

Точка $x_0$ называется критической точкой функции $f(x)$, если $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.

## 73 Необходимые условия экстремума

Если $x_0$ — точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует, т.е. $x_0$ — критическая точка этой функции.

## 74 Достаточные условия экстремума функции

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в критической точке $x_0$ и в некоторой ее окрестности. Если $f''(x_0) < 0$, то $x_0$ — точка максимума функции $f(x)$, если $f''(x_0) > 0$, то $x_0$ — точка минимума. Если же $f''(x_0) = 0$, то требуется дополнительные исследования.

## 75 Выпуклость графика функции

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется выпуклым вниз на интервале $(a, b)$, если дуга кривой на этом промежутке расположена выше касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в любой точке $x \in (a, b)$.

Если же на интервале $(a, b)$ всякая касательная располагается выше дуги кривой, то график дифференцируемой функции на этом интервале называется выпуклым вверх.

## 76 Достаточные условия выпуклости графика функции

Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a, b)$ и $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), то ее график является выпуклым вниз (вверх) на этом интервале.

## 77 Точка перегиба графика функции

Точка в которой направление выпуклости графика функции меняется на противоположное, называется точкой перегиба графика функции.

## 78 Достаточные условия точки перегиба графика функции

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0$, в которой $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Если при этом производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку $x_0$, то $x_0$ — точка перегиба графика функции.

## 79 Вектор-функция

Если каждому значению действительной переменной $t \in D \subset \mathbb{R}$, поставлен в соответствие вектор $\vec{a}(t)$ в пространстве, то говорят, что на множестве $D$ задана вектор-функция действительной переменной $\vec{a} = \vec{a}(t)$.

Задание вектор-функции $\vec{a} = \vec{a}(t)$ равносильно заданию трех скалярных функций $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ — координат вектора $\vec{a}(t)$:

$$\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$$

## 80 Годограф вектор-функции

Годографом вектор-функции $\vec{a} = \vec{a}(t)$ называется линия, описываемая в пространстве концом вектора $\vec{a}(t)$. Параметрическое уравнение годографа

$$x = a_x(t)\,, \qquad y = a_y(t)\,, \qquad z = a_z(t)$$

## 81 Производная вектор-функции

Производной вектор-функции $\vec{a} = \vec{a}(t)$ по аргументу $t$ называется новая вектор-функция

$$\vec{a}^{\,'}(t) = \frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}$$

Если $\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))$, то

$$\vec{a}^{\,'}(t) = \big(a_x'(t),\, a_y'(t),\, a_z'(t)\big)$$

Производная $\vec{a}^{\,'}(t)$ есть вектор, направленный по касательной к годографу вектор функции $\vec{a}(t)$ в сторону возрастания аргумента $t$.

## 82 Механический смысл производной вектор-функции

Если вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$ является радиус-вектором точки $M(x, y, z)$, а $t$ — время, то $\vec{a}\,'(t) = \vec{v}(t)$ есть вектор скорости движения конца вектора $\vec{r}(t)$.

## 83 Касательная прямая к пространственной кривой

Уравнение касательной прямой к пространственной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ в точке $M_0(x_0, y_y, z_0)$, которой соответствует значение параметра $t_0$, имеет вид

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

## 84 Нормальная плоскость к пространственной кривой

Уравнение нормальной плоскости к пространственной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ в точке $M_0(x_0, y_y, z_0)$, которой соответствует значение параметра $t_0$, имеет вид

$$(x - x_0)x'(t_0) + (y - y_0)y'(t_0) + (z - z_0)z'(t_0) = 0$$

# Глава 4

# Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

## 1 Окрестность точки на плоскости и в пространстве

Окрестностью радиуса $\epsilon$ точки $M_0$ на плоскости или в пространстве называется множество точек $M$ таких, что $\rho(M, M_0) < \epsilon$, где $\rho(M, M_0)$ — расстояние между точками $M$ и $M_0$.

## 2 Внутренняя точка множества. Открытое множество

Внутренней точкой множества $D$ называется такая точка, в некоторой окрестности которой лежат только точки множества $D$. Открытым называется множество, все точки которого внутренние.

## 3 Граничная точка множества. Замкнутое множество

Граничной точкой множества $D$ называется точка, в любой окрестности которой находятся как точки множества $D$, так и точки, не принадлежащие $D$. Замкнутым называется множество, содержащее все свои граничные точки.

## 4 Ограниченное множество

Ограниченным называется множество, которое содержится в некоторой окрестности начала координат, если такой окрестности не существует, то множество называется неограниченным.

## 5 Функции двух и трех переменных

Говорят, что на множестве $D$ задана числовая функция, если каждой точке $M \in D$ поставлено в соответствие единственное число. Если множество $D$ принадлежит плоскости, то точка $M \in D$ определяется двумя координатами $M(x, y)$, и функция $z = f(M) = f(x, y)$ называется функцией двух переменных. Если $D$ лежит в пространстве, то говорят о функции $u = f(M) = f(x, y, z)$ трех переменных. Множество $D$ называется областью определения функции.

## 6 График функции двух переменных

Графиком функции $z = f(x, y)$ двух переменных является поверхность в трехмерном пространстве, точки $(x_0, y_0, z_0)$ которой удовлетворяют уравнению

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

## 7 Линии уровня и поверхности уровня

Линия уровня функции $z = f(x, y)$ — это линия на плоскости $Oxy$, во всех точках которой $f(x, y) = c$, где $c$ — постоянная. Поверхность уровня функции $u = f(x, y, z)$ — это поверхность, во всех точках которой $f(x, y, z) = c$, где $c$ — постоянная.

## 8 Ограниченная функция нескольких переменных

Функция нескольких переменных $f(M)$ называется ограниченной на множестве $D$, если существует постоянная $C$, что для всех $M \in D$ выполняется неравенство $|f(M)| \leqslant C$.

## 9 Предел функции нескольких переменных

Число $A$ называется пределом функции $f(M)$ в точке $M_0$, если для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое,что для всех точек $M$ из области определения функции, удовлетворяющих условию $0 < d(M, M_0) < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(M) - A| < \epsilon$. Записывают это так

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A$$

## 10 Непрерывность функции нескольких переменных

Функция нескольких переменных $f(M)$ называется непрерывной в точке $M_0$, если

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$$

Функция называется непрерывной на множестве $D$, если она непрерывна в каждой точке $D$. Если функция $f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве, то она ограничена на этом множестве и достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений.

## 11 Частные производные

Частными приращениями функции $z = f(x, y)$ по $x$ и по $y$ называются соответственно величины

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$
$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Частными производными функции $z = f(x, y)$ по $x$ и по $y$ в точке $M(x, y)$ называются соответственно величины

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

при условии, что эти пределы существуют. Для частных производных используются также другие обозначения

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x, y)\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x, y)$$

## 12 Дифференцируемые функции двух переменных. Дифференциал

Приращением функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется величина

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке $M(x, y)$, если ее приращение в этой точке представимо в виде

$$\Delta z = A(x, y)\Delta x + B(x, y)\Delta y + o(\rho)\,, \qquad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

В этом случае в точке $M(x, y)$ у функции $z = f(x, y)$ существуют частные производные, причем

$$z'_x = A(x, y)\,, \qquad z'_y = B(x, y)$$

Обратно, если функция имеет в точке $M(x, y)$ непрерывные частные производные, то она дифференцируема в этой точке.

## 13 Дифференциал функции двух переменных

Дифференциалом функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется величина

$$dz = z'_x dx + z'_y dy$$

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ — дифференциалы независимых переменных.

## 14 Частные производные сложной функции

Пусть $z = f(u, v)$, причем $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Тогда говорят, что функция

$$z = f(u(x, y), v(x, y))$$

является сложной функцией переменных $x, y$.

Частные производные сложной функции находятся по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

или в других обозначениях

$$z'_x=z'_u u'_x+z'_v v'_x$$
$$z'_y=z'_u u'_y+z'_v v'_y$$

## 15 Полная производная сложной функции

Пусть $z=z(t,x,y)$, причем $x=x(t)$, $y=y(t)$. Тогда $z$ в конечном счете зависит только от $t$

$$z=z(t,x(t),y(t))$$

Полная производная этой функции по переменной $t$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

## 16 Вторые частные производные

Вторыми частными производными функции $z=f(x,y)$ называются частные производные от ее первых частных производных. Их обозначают так

$$(z'_x)'_x=z''_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,,\qquad (z'_y)'_y=z''_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$
$$(z'_x)'_y=z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,,\qquad (z'_y)'_x=z''_{yx}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

Производные $z''_{xy}$ и $z''_{yx}$ называются смешанными. Если в рассматриваемой точке смешанные производные непрерывны, то они равны в этой точке.

Аналогично определяются частные производные более высоких порядков.

## 17 Второй дифференциал функции

Вторым дифференциалом функции $z=f(x,y)$ называется дифференциал от ее первого дифференциала

$$d^2z=d(dz)=(dz)'_x dx+(dz)'_y dy=z''_{xx}dx^2+2z''_{xy}dxdy+z''_{yy}dy^2$$

где $dx^2=(dx)^2=(\Delta x)^2$, $dy^2=(dy)^2=(\Delta y)^2$.
Аналогично определяются дифференциалы более высоких порядков $d^3z$, $d^4z$ и т.д..

## 18 Формула Тейлора для функции двух переменных

Если в точке $M(x, y)$ функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то ее приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

в данной точке можно записать в виде

$$\Delta z = \frac{dz}{1!} + \frac{d^2 z}{2!} + \ldots + \frac{d^n z}{n!} + o(\rho^n)\,, \qquad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

## 19 Неявные функции и их дифференцирование

Рассмотрим уравнение $F(x, y, z) = 0$. Если $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ и в окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ существуют непрерывные частные производные $F'_x$, $F'_y$, $F'_z$, причем $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то уравнение $F(x, y, z) = 0$ в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0)$ имеет единственное решение $z = f(x, y)$. При этом функция $z = f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные, которые определяются по формулам

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}\,, \qquad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

## 20 Вектор нормали к поверхности

Если поверхность задается уравнением $z = f(x, y)$, то вектор нормали к поверхности в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ $(z_0 = f(x_0, y_0))$ равен

$$\vec{N} = (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1)$$

Если поверхность задается неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, то вектор нормали к поверхности в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ $(F(x_0, y_0, z_0) = 0)$ равен

$$\vec{N} = \big(F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)\big)$$

## 21 Касательная плоскость к поверхности

Если поверхность задается уравнением $z = f(x, y)$, то уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ $(z_0 = f(x_0, y_0))$ имеет вид

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Если поверхность задается неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости к поверхности к поверхности в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ $(F(x_0, y_0, z_0) = 0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

## 22 Точки максимума, минимума и экстремума функции двух переменных

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой минимума (максимума) функции $z = f(x, y)$, если в некоторой окрестности точки $M_0$ функция определена и удовлетворяет неравенству $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ (соответственно $f(x, y) < f(x_0, y_0)$). Точки максимума и минимума называются точками экстремума функции.

## 23 Необходимые условия экстремума функции двух переменных

Если в точке экстремума функция имеет первые частные производные, то они обращаются в этой точке в нуль. Отсюда следует, что для нахождения точек экстремума функции $z = f(x, y)$ следует решить систему уравнений

$$f'_x(x, y) = 0\,, \qquad f'_y(x, y) = 0$$

Точки, координаты которых удовлетворяют этой системе уравнений, называются критическими точками функции. Среди критических точек могут быть точки максимума и минимума, а так же точки, не являющиеся точками экстремума функции.

## 24 Достаточные условия экстремума функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет в критической точке непрерывные вторые частные производные. Если в этой точке выполняется условие

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 > 0$$

то она является точкой минимума при $z''_{xx} > 0$ и точкой максимума при $z''_{xx} < 0$. Если в критической точке $\Delta < 0$, то она не является точкой экстремума. В случае $\Delta = 0$ требуется дополнительное исследование характера критической точки.

## 25 Условный экстремум функции двух переменных

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой условного минимума (максимума) функции $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$, если существует окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$, в которой функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ определены и в которой $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ (соответственно $f(x, y) < f(x_0, y_0)$) для всех точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $\varphi(x, y) = 0$.

Для нахождения точек условного экстремума используется функция Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$

Решая систему трех уравнений

$$F'_x = 0\,, \qquad F'_y = 0\,, \qquad F'_\lambda = 0$$

находят критические точки функции Лагранжа. В этих критических точках может быть условный экстремум.

# Глава 5

# Интегральное исчисление функций одной переменной

## 1 Первообразная

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором интервале, если во всех точках этого интервала $F(x)$ дифференцируема и удовлетворяет уравнению

$$F'(x) = f(x)$$

или, что то же самое, соотношению

$$dF(x) = f(x)\,dx$$

## 2 Неопределенный интеграл

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то выражение $F(x) + C$, где $C$ — произвольная постоянная содержит все первообразные для $f(x)$.

Множество всех первообразных для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx.$$

При этом, знак $\displaystyle\int$ называется знаком интеграла, $f(x)$ — подынтегральной функцией, $f(x)\,dx$ — подынтегральным выражением, $x$ — переменной интегрирования. Операцию нахождения неопределенного интеграла называют интегрированием. Таким образом, по определению

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,,$$

где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, а $C$ — произвольная постоянная.

## 3 Интегрируемые функции. Достаточное условие интегрируемости

Функции у которых существует неопределенный интеграл на некотором интервале, называются функциями интегрируемыми на этом интервале. Любая непрерывная на некотором интервале функция интегрируема на этом интервале.

## 4 Свойства неопределенного интеграла

1.
$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

2.
$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

3.
$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,, \qquad a = \mathrm{const}$$

4.
$$\int \left(f(x) + g(x)\right)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

## 5 Таблица основных интегралов

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\,, \quad (\alpha \neq -1)\,, \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\,, \quad (0 < a \neq 1)\,, \qquad \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C\,, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C\,, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C \qquad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C\,, \qquad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C\,,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C\,, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a + x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{a + x^2}\right| + C$$

## 6 Замена переменных в неопределенном интеграле

Если на некотором интервале $I_t$

$$\int f(t)\,dt = F(t) + C\,,$$

и $t = \varphi(x)$, где $\varphi : I_x \to I_t$ — непрерывно дифференцируемое отображение интервала $I_x$ в $I_t$, то на интервале $I_x$ справедливы две эквивалентные формулы замены переменной в неопределенном интеграле

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = F(\varphi(x)) + C$$

$$\int f(\varphi(x))\, d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$$

## 7 Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Для функций $u(x)$ и $v(x)$ имеющих непрерывные производные, справедлива формула интегрирования по частям

$$\int u(x)\, dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\, du(x)$$

## 8 Определенный интеграл

Множество точек $x_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$ таких, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, задает разбиение отрезка $[a, b]$ на $n$ отрезков. Разбиение будем обозначать $R_n$, а наибольшую из длин $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ через $\lambda$ (эту величину называют диаметром разбиения).

Пусть на $[a, b]$ задана функция $y = f(x)$. Возьмем на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ произвольную точку $c_k$ и составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Если при $\lambda \to 0$ существует конечный предел интегральных сумм, который не зависит ни от вида разбиения $R_n$, ни от выбора точек $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, то такой предел обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \tag{1}$$

и называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$. Таким образом

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Если интеграл (1) существует, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$.

По определению полагают

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx\,, \qquad \int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$$

Достаточное условие интегрируемости: Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

## 9 Геометрический смысл определенного интеграла.

Определенный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

представляет собой алгебраическую сумму площадей фигур, ограниченных графиком функции $y = f(x)$, осью $Ox$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, причем площади расположенные выше оси $Ox$, входят в эту сумму со знаком плюс, а площади, расположенные ниже оси $Ox$, — со знаком минус.

## 10 Линейность определенного интеграла

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b (Af(x) + Bg(x))\,dx = A\int\limits_a^b f(x)\,dx + B\int\limits_a^b g(x)\,dx$$

для любых чисел $A$ и $B$.

## 11 Аддитивность определенного интеграла

Если $c \in [a,b]$ и функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$$

## 12 Теорема об оценке определенного интеграла

Если на $[a,b]$ имеют место неравенства $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

## 13 Теорема о среднем

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует такая точка $c \in [a,b]$, что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Число

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

## 14 Теорема о модуле интеграла

Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то $|f(x)|$ также интегрируема на $[a,b]$, причем

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

## 15 Дифференцирование интеграла по переменному верхнему пределу

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то интеграл с переменным верхним пределом

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

является первообразной для функции $f(x)$, т.е.

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x) \qquad x \in [a,b]$$

## 16 Формула Ньютона-Лейбница

Если $F(x)$ – одна из первообразных непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$, то справедлива следующая формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$$

## 17 Замена переменной в определенном интеграле

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

## 18 Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, то справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x)$$

## 19 Несобственный интеграл с бесконечным пределом

Несобственный интеграл с бесконечным пределом

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

по определению равен

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

Если существует конечный предел в правой части этой формулы, то несобственный интеграл называется сходящимся, если этот предел не существует, то — расходящимся.

Аналогично определяются интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

и интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)\,dx$$

## 20 Эталонный несобственный интеграл с бесконечным пределом

Несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}\,, \qquad \alpha > 0$$

сходится, если $\alpha > 1$ и расходится, если $\alpha \leqslant 1$.

## 21 Признак сравнения несобственных для интегралов с бесконечным пределом

Пусть $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ при $a \leqslant x < +\infty$. Рассмотрим интегралы

$$I_f = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx\,, \qquad I_g = \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

Если интеграл $I_g$ сходиться, то сходится и интеграл $I_f$, причем $I_f \leqslant I_g$. Если интеграл $I_f$ расходиться, то расходится и интеграл $I_g$.

## 22 Предельный признак сравнения для несобственных интегралов с бесконечным пределом

Если $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ при $a \leqslant x < +\infty$ и существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$$

то интегралы

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx\,, \qquad \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

## 23 Абсолютная сходимость несобственных интегралов с бесконечным пределом

Если сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

то сходится и интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{2}$$

при этом интеграл (2) называется абсолютно сходящимся.

## 24 Несобственный интеграл от неограниченной функций

Если функция $f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x < b$ и $f(b) = \infty$, то по определению несобственный интеграл от неограниченной функций равен

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b-0} \int\limits_a^t f(x)\,dx$$

Если существует конечный предел в правой части этой формулы, то несобственный интеграл называется сходящимся, если этот предел не существует, то — расходящимся.

Аналогично определяется несобственный интеграл от неограниченной функции в случае $f(a) = \infty$. В случае, когда $f(c) = \infty$, где $c \in (a, b)$ — точка разрыва, имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{t_1 \to c-0} \int\limits_a^{t_1} f(x)\,dx + \lim_{t_2 \to c+0} \int\limits_{t_2}^b f(x)\,dx$$

## 25 Эталонный несобственный интеграл от неограниченной функции

Несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}\,, \qquad \alpha > 0$$

сходится, если $\alpha < 1$ и расходится, если $\alpha \geqslant 1$.

## 26 Признак сравнения для несобственных интегралов от неограниченных функций

Пусть $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ при $a \leqslant x < b$ и $f(b) = g(b) = \infty$. Рассмотрим интегралы

$$I_f = \int\limits_a^b f(x)\,dx\,, \qquad I_g = \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

Если интеграл $I_g$ сходиться, то сходится и интеграл $I_f$, причем $I_f \leqslant I_g$. Если интеграл $I_f$ расходиться, то расходится и интеграл $I_g$.

## 27 Предельный признак сравнения для несобственных интегралов от неограниченных функций

Пусть $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ при $a \leqslant x < b$ и $f(b) = g(b) = \infty$. Если существует конечный предел

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$$

то интегралы

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\,, \qquad \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

## 28 Абсолютная сходимость несобственных интегралов от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x < b$ и $f(b) = \infty$. Если сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$$

то сходится и интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{3}$$

при этом интеграл (3) называется абсолютно сходящимся.

## 29 Вычисление площади области, ограниченной графиками функций

Площадь области, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, $f(x) \leqslant g(x)$, и двумя прямыми $x = a$, $x = b$ вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b \left(g(x) - f(x)\right)\,dx$$

## 30 Вычисление площади криволинейного сектора

Площадь криволинейного сектора, ограниченного дугой графика функции $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, где $\varphi$ и $r$ — полярные координаты, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi$$

## 31 Вычисление длины дуги кривой

Длина дуги кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ равна

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то длина ее дуги равна

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt$$

Аналогично выражается длина дуги кривой в пространстве, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}\, dt$$

## 32 Вычисление длины дуги кривой, заданной в полярных координатах

Длина дуги кривой, заданной в полярных координатах $r$ и $\varphi$ уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ вычисляется по формуле

$$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi$$

# Глава 6

# Интегральное исчисление функций нескольких переменных

## 1 Определение двойного интеграла

Рассмотрим ограниченную область $D$ на плоскости $Oxy$. Разобьем область $D$ на $n$ непересекающихся ячейки $D_k$, $k = 1, \ldots, n$. Максимальный из диаметров ячеек $D_k$ называется диаметром разбиения и обозначается $\lambda$. Пусть в области $D$ задана функция $f(x, y)$. Выберем в каждой из ячеек $D_k$ по одной произвольной точке $M_k(x_k, y_k) \in D_k$ и составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

где $\Delta S_k$ — площадь $D_k$.

Если существует конечный предел сумм $\sigma_n$ при $\lambda \to 0$ и этот предел не зависит ни от вида разбиения области $D$ на ячейки $D_k$, ни от выбора точек $M_k(x_k, y_k) \in D_k$, то он обозначается

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy \tag{1}$$

и называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области $D$. Таким образом

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

Если $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области $D$, то она интегрируема в этой области, т.е. двойной интеграл (1) существует.

## 2 Геометрический смысл двойного интеграла

Пусть $f(x, y) \geqslant 0$ в области $D$. Тогда двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$$

равен объему цилиндрического тела, основанием которого служит область $D$ плоскости $z = 0$ и которое сверху ограничено поверхностью $z = f(x, y)$.

## 3 Линейность двойного интеграла

Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в области $D$, то

$$\iint\limits_D (af(x,y)+bg(x,y))\,dxdy = a\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy + b\iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$$

где $a$ и $b$ — некоторые числа.

## 4 Аддитивность двойного интеграла

Если $f(x,y)$ интегрируема в каждой из областей $D_1$ и $D_2$, не имеющих общих внутренних точек, и $D$ — объединение областей $D_1$ и $D_2$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

## 5 Теорема об оценке двойного интеграла

Если в области $D$ выполняются неравенства $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$, то

$$mS \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \leqslant MS$$

где $S$ — площадь области $D$.

## 6 Теорема о среднем для двойного интеграла

Если $f(x,y)$ непрерывна в области $D$, то в этой области найдется хотя бы одна точка $M_0(x_0,y_0)$ такая, что

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = f(x_0,y_0)S$$

где $S$ — площадь области $D$. Число

$$f(x_0,y_0) = \frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

называется средним значением функции $f(x,y)$ в области $D$.

## 7 Теорема о модуле двойного интеграла

Если $f(x,y)$ — интегрируемая функция в области $D$, то $|f(x,y)|$ — также интегрируема в $D$ и

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy$$

## 8 Вычисление двойного интеграла через вычисление повторного интеграла

Пусть область $D$ ограничена кривыми $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$, причем всюду на $[a, b]$ функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны и $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Интеграл в правой части этой формулы называется повторным. В повторном интеграле сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной $y$ ($x$ — параметр), а затем полученный результат интегрируется по $x$.

## 9 Замена переменных в двойном интеграле

Пусть непрерывно дифференцируемые функции

$$x = x(u,v)\,, \qquad y = y(u,v) \tag{2}$$

взаимно однозначно отображают область $D_{uv}$ плоскости $Ouv$ на область $D_{xy}$ плоскости $Oxy$, а функция $f(x,y)$ непрерывна в области $D_{xy}$. Тогда

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J(u,v)|\,dudv$$

где

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = x'_u y'_v - x'_v y'_u$$

якобиан отображения (2).

## 10 Якобиан перехода к полярным координатам

Для отображения перехода к полярным координатам $r$ и $\varphi$

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi$$

якобиан равен

$$J(r,\varphi) = r$$

## 11 Вычисление площади области с помощью двойного интеграла

Площадь $S$ области $D$ на плоскости $Oxy$ вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_D dxdy$$

## 12 Вычисление площади поверхности с помощью двойного интеграла

Площадь поверхности, заданной уравнением

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D$$

где $D$ — область на плоскости $Oxy$, находится по формуле

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy$$

## 13 Вычисление объема области с помощью двойного интеграла

Объем $V$ области трехмерного пространства, которая задается уравнениями

$$f(x, y) \leqslant z \leqslant g(x, y), \qquad (x, y) \in D$$

где $D$ — область на плоскости $Oxy$, находится по формуле

$$V = \iint\limits_D (g(x, y) - f(x, y))\, dxdy$$

## 14 Определение тройного интеграла

Рассмотрим ограниченную область $G$ в пространстве. Разобьем область $G$ на $n$ непересекающихся ячеек $G_k$, $k = 1, \ldots, n$. Максимальный из диаметров ячеек $G_k$ называется диаметром разбиения и обозначается $\lambda$. Пусть в области $G$ задана функция $f(x, y, z)$. Выберем в каждой из ячеек $G_k$ по одной произвольной точке $M_k(x_k, y_k, z_k) \in G_k$ и составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$$

где $\Delta V_k$ — объем $G_k$.

Если существует конечный предел сумм $\sigma_n$ при $\lambda \to 0$ и этот предел не зависит ни от вида разбиения области $G$ на ячейки $G_k$, ни от выбора точек $M_k(x_k, y_k, z_k) \in G_k$, то он обозначается

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz \tag{3}$$

и называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области $G$. Таким образом

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$$

Если $f(x, y, z)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области $G$, то она интегрируема в этой области, т.е. тройной интеграл (3) существует.

## 15 Геометрический смысл тройного интеграла

Объем $V$ области $G$ в трехмерном пространстве вычисляется по формуле

$$V = \iiint\limits_G dxdydz$$

## 16 Линейность тройного интеграла

Если функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ интегрируемы в области $G$, то

$$\iiint\limits_G (af(x, y, z) + bg(x, y, z))\, dxdydz =$$

$$= a \iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz + b \iiint\limits_G g(x, y, z)\, dxdydz$$

где $a$ и $b$ — некоторые числа.

## 17 Аддитивность тройного интеграла

Если $f(x, y, z)$ интегрируема в каждой из областей $G_1$ и $G_2$, не имеющих общих внутренних точек, и $G$ — объединение областей $G_1$ и $G_2$, то

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{G_1} f(x, y, z)\, dxdydz + \iiint\limits_{G_2} f(x, y, z)\, dxdydz$$

## 18 Теорема об оценке тройного интеграла

Если в области $G$ выполняются неравенства $m \leqslant f(x, y, z) \leqslant M$, то

$$mV \leqslant \iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz \leqslant MV$$

где $V$ — объем области $G$.

## 19 Теорема о среднем для тройного интеграла

Если $f(x, y, z)$ непрерывна в области $G$, то в этой области найдется хотя бы одна точка $M_0(x_0, y_0, y_0)$ такая, что

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz = f(x_0, y_0, z_0)V$$

где $V$ — объем области $G$. Число

$$f(x_0, y_0, y_0) = \frac{1}{V} \iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz$$

называется средним значением функции $f(x, y, z)$ в области $G$.

## 20 Теорема о модуле тройного интеграла

Если $f(x, y, z)$ — интегрируемая функция в области $G$, то $|f(x, y, z)|$ — также интегрируема в $G$ и

$$\left| \iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz \right| \leqslant \iiint\limits_G |f(x, y, z)|\, dxdydz$$

## 21 Вычисление тройного интеграла через вычисление повторных интегралов

Пусть область $G$ в пространстве ограничена сверху поверхностью $z = \psi_2(x, y)$, а снизу — поверхностью $z = \psi_1(x, y)$, проекцией которой является область $D$ на плоскости $Oxy$. Другими словами, область $G$ задается условиями

$$\psi_1(x, y) \leqslant z \leqslant \psi_2(x, y)\,, \qquad (x, y) \in D$$

Тогда

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz$$

Если область $D$ плоскости $Oxy$ задается неравенствами

$$a \leqslant x \leqslant b\,, \qquad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\,, \qquad (x, y) \in D$$

то

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz$$

## 22 Замена переменных в тройном интеграле

Пусть непрерывно дифференцируемые функции

$$x = x(u, v, w)\,, \qquad y = y(u, v, w)\,, \qquad z = z(u, v, w) \tag{4}$$

взаимно однозначно отображают область $G_{uvw}$ пространства $Ouvw$ на область $G_{xyz}$ пространства $Oxyz$, а функция $f(x,y,z)$ непрерывна в области $G_{xyz}$. Тогда

$$\iiint\limits_{G_{xyz}} f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{G_{uvw}} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot |J(u,v,w)|\,dudvdw$$

где

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$$

якобиан отображения (4).

## 23 Якобиан перехода к цилиндрическим координатам

Для цилиндрических координат $(r,\varphi,z)$ связанных с декартовыми координатами формулами

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,, \qquad z = z$$

якобиан равен

$$J(r,\varphi,z) = r$$

## 24 Якобиан перехода к сферическим координатам

Для сферических координат $(r,\varphi,\theta)$ связанных с декартовыми координатами формулами

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,, \qquad y = r\sin\varphi\sin\theta,, \qquad z = r\cos\theta$$

якобиан равен

$$J(r,\varphi,\theta) = r^2\sin\theta$$

## 25 Кусочно гладкие кривые и поверхности

Кривая на плоскости или в пространстве называется гладкой, если у нее в каждой точке существует касательная. Кривая называется кусочно гладкой, если ее можно разбить на конечное число гладких кривых.

Поверхность в пространстве называется гладкой, если у нее в каждой точке существует касательная плоскость. Поверхность называется кусочно гладкой, если ее можно разбить на конечное число гладких поверхностей.

## 26 Односвязная область

Область на плоскости или в пространстве называется односвязной, если любой замкнутый контур лежащий в этой области можно стянуть в точку не выходя за пределы области.

## 27 Скалярное поле

Пусть $G$ — область в пространстве. Говорят, что в области $G$ задано скалярное поле, если в $G$ задана вещественная функция

$$u = f(x, y, z)$$

Аналогичное определение вводятся и на плоскости.

## 28 Векторное поле

Если каждой точке области $G$ поставлен в соответствие вектор

$$\vec{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}$$

то говорят, что в области $G$ задано векторное поле. Аналогичное определение вводятся и на плоскости.

## 29 Криволинейный интеграл первого рода

Пусть на кривой $\gamma$ в пространстве задана функция $f(x, y, z)$. Выбор на кривой $\gamma$ точек $m_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$ ($m_0$, $m_1$ — начало и конец кривой) задает разбиение $R_n$. Максимальная из длин хорд $[m_{k-1}, m_k]$ называется диаметром разбиения и обозначается $\lambda$. На каждой из дуг $m_{k-1}m_k$ выберем одну произвольную точку $c_k(x_k, y_k, z_k)$ и составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta l_k$$

где $\Delta l_k$ — длина дуги $m_{k-1}m_k$.

Если существует конечный предел сумм $\sigma_n$ при $\lambda \to 0$ не зависящий ни от вида разбиения $R_n$, ни от выбора точек $c_k$, то он называется криволинейным интегралом первого рода по кривой $\gamma$ и обозначается

$$\int\limits_{\gamma} f(x, y, z)\, dl$$

таким образом

$$\int\limits_{\gamma} f(x, y, z)\, dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta l_k$$

## 30 Достаточные условия существования криволинейного интеграла первого рода и его свойства

Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на кусочно гладкой кривой $\gamma$, то криволинейный интеграл первого рода

$$\int\limits_{\gamma} f(x,y,z)\,dl$$

существует.

Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления движения вдоль кривой $\gamma$, в остальном его свойства аналогичны свойствам определенного интеграла.

## 31 Вычисление криволинейный интеграла первого рода

1. Если кривая $\gamma$ на плоскости задана в виде графика функции $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, то

$$\int\limits_{\gamma} f(x,y)\,dl = \int\limits_{a}^{b} f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$$

2. Если кривая $\gamma$ в пространстве задана параметрически уравнениями

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\,, \qquad z = z(t)\,, \qquad t \in [t_1,t_2]$$

то

$$\int\limits_{\gamma} f(x,y,z)\,dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$$

Аналогичная формула имеет место для функции $f(x,y)$, определенной на плоской кривой

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\,, \qquad t \in [t_1,t_2]$$

## 32 Криволинейный интеграл второго рода. Циркуляция

Пусть на кривой $\gamma$ в пространстве задано векторное поле

$$\vec{a}(x,y,z) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{i} + a_z(x,y,z)\vec{k}$$

Выбор на кривой $\gamma$ точек $m_k$, $k = 0,1\ldots,n$ ($m_0$, $m_1$ — начало и конец кривой) задает разбиение $R_n$. Максимальная из длин хорд $[m_{k-1},m_k]$ называется диаметром разбиения и обозначается $\lambda$. На каждой из дуг $m_{k-1}m_k$ выберем одну произвольную точку $c_k(x_k, y_k, z_k)$ и составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{a}(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta\vec{l}_k$$

где $\Delta\vec{l}_k = \overrightarrow{m_{k-1}m_k}$ — вектор, соединяющий точки $m_{k-1}$ и $m_k$, точкой обозначено скалярное произведение векторов.

Если существует конечный предел сумм $\sigma_n$ при $\lambda \to 0$ не зависящий ни от вида разбиения $R_n$, ни от выбора точек $c_k$, то он называется криволинейным интегралом второго рода от векторного поля $\vec{a}$ по кривой $\gamma$ и обозначается

$$\int\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int\limits_{\gamma} a_x(x, y, z)\,dx + a_y(x, y, z)\,dy + a_z(x, y, z)\,dz$$

таким образом

$$\int\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \vec{a}(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta\vec{l}_k$$

## 33 Достаточные условия существования криволинейного интеграла второго рода и его свойства

Если векторное поле $\vec{a}(x, y, z)$ непрерывно на кусочно гладкой кривой $\gamma$, то криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{l}$$

существует.

Криволинейный интеграл второго рода зависит от направления движения вдоль кривой $\gamma$, а именно

$$\int\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{l} = -\int\limits_{\gamma^{-1}} \vec{a} \cdot d\vec{l}$$

где $\gamma$ и $\gamma^{-1}$ — кривые с противоположными направлениями обхода.

## 34 Циркуляция векторного поля

Криволинейный интеграл второго рода от векторного поля $\vec{a}$ по замкнутому контуру $\gamma$ называется циркуляцией поля $\vec{a}$ по контуру $\gamma$ и обозначается

$$\oint\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{l}$$

## 35 Вычисление криволинейного интеграла второго рода

1. Если кривая $\gamma$ на плоскости задана в виде графика функции $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, то

$$\int\limits_\gamma a_x(x,y)\,dx + a_y(x,y)\,dy = \int\limits_a^b \left[a_x(x,y(x)) + a_y(x,y(x))y'(x)\right]\,dx$$

2. Пусть кривая $\gamma$ в пространстве задана вектор-функцией

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\,, \qquad t \in [t_1, t_2]$$

Тогда

$$\int\limits_\gamma a_x(x,y,z)\,dx + a_y(x,y,z)\,dy + a_z(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[a_x\,x'(t) + a_y\,y'(t) + a_z\,z'(t)\right]\,dt$$

где в правом интеграле $a_x = a_x(x(t), y(t), z(t))$, $a_y = a_y(x(t), y(t), z(t))$, $a_z = a_z(x(t), y(t), z(t))$.

Аналогичная формула имеет место для кривой и векторного поля на плоскости.

## 36 Поверхностный интеграл первого рода

Пусть на поверхности $S$ задана функция $f(x, y, z)$. Произведем разбиение $R_n$ этой поверхности на $n$ не пересекающихся ячеек. Диаметром $\lambda$ разбиения $R_n$ называется максимальный из диаметров ячеек. Выберем в каждой из ячеек одну произвольную точку $c_k(x_k, y_k, z_k)$ и составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta S_k$$

где $\Delta S_k$ — площадь $k$-й ячейки.

Если существует конечный предел сумм $\sigma_n$ при $\lambda \to 0$ не зависящий ни от вида разбиения $R_n$, ни от выбора точек $c_k$, то он называется поверхностным интегралом первого рода от функции $f(x, y, z)$ по поверхности $S$ и обозначается

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS$$

таким образом

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\Delta S_k$$

## 37 Вычисление поверхностного интеграла первого рода

Если поверхность $S$ задана уравнением

$$z = z(x,y)\,, \qquad (x,y)\in D$$

где $D$ — проекция поверхности $S$ на плоскости $Oxy$, то вычисление поверхностного интеграла первого рода сводится к вычислению двойного интеграла

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy$$

## 38 Ориентация поверхности. Поверхностный интеграл второго рода

Поверхность $S$ в трехмерном пространстве называется двусторонней, если нормаль к поверхности при обходе по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности $S$, возвращается в первоначальное положение. Выбор определенной стороны поверхности, т.е. выбор направления нормали к поверхности, называется ориентацией поверхности.

Пусть на ориентированной поверхности $S$ задано векторное поле функция

$$\vec{a}(x,y,z) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k}$$

Произведем разбиение $R_n$ этой поверхности на $n$ не пересекающихся ячеек. Диаметром $\lambda$ разбиения $R_n$ называется максимальный из диаметров ячеек. Выберем в каждой из ячеек одну произвольную точку $c_k(x_k,y_k,z_k)$ и составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}\vec{a}(x_k,y_k,z_k)\,\cdot\,\Delta\vec{S}_k$$

где $\Delta\vec{S}_k$ — вектор, длина которого равна площади $k$-й ячейки, а направление совпадает с направлением вектора нормали в точке $c_k$.

Если существует конечный предел сумм $\sigma_n$ при $\lambda\to 0$ не зависящий ни от вида разбиения $R_n$, ни от выбора точек $c_k$, то он называется поверхностным интегралом второго рода от векторного поля $\vec{a}(x,y,z)$ по поверхности $S$ и обозначается через

$$\iint\limits_S \vec{a}\,\cdot\,d\vec{S} = \iint\limits_S a_x\,dydz + a_y\,dxdz + a_z\,dxdy \tag{5}$$

таким образом

$$\iint\limits_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \vec{a}(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta\vec{S}_k$$

Если векторное поле $\vec{a}(x, y, z)$ непрерывно на кусочно-гладкой ориентированной поверхности $S$, то интеграл (5) существует.

Поверхностный интеграл второго рода называют также потоком векторного поля $\vec{a}$ через поверхность $S$. Переход к другой стороне поверхности меняет направление нормали к поверхности, а потому и знак поверхностного интеграла второго рода.

## 39 Вычисление поверхностного интеграла второго рода

Вычисление поверхностного интеграла второго рода от векторного поля

$$\vec{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}$$

по поверхности $S$ сводится к вычислению поверхностного интеграла первого рода

$$\iint\limits_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_S (\vec{a} \cdot \vec{n})\, dS$$

где $\vec{n}$ — единичная нормаль к поверхности, или к вычислению суммы трех двойных интегралов

$$\iint\limits_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{D_{yz}} a_x(x(y, z), y, z)\, dydz +$$
$$+ \iint\limits_{D_{xz}} a_y(x, y(x, z), z)\, dxdz + \iint\limits_{D_{xy}} a_z(x, y, z(x, y))\, dxdy$$

где $D_{yz}$, $D_{xz}$, $D_{xy}$ — проекции поверхности $S$ соответственно на плоскости $Oyz$, $Oxz$, $Oxy$, а $x(y, z)$, $y(x, z)$, $z(x, y)$ — выражения, полученные из уравнения поверхности $S$ разрешением относительно соответствующих координат.

## 40 Производная по направлению и градиент скалярного поля

Пусть $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$ — единичный вектор данного направления $s$, $\vec{r}_0$ — радиус-вектор фиксированной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а $\vec{r}$ — радиус-вектор переменной точки $M(x, y, z)$. Производная скалярного поля $u(\vec{r}) = u(x, y, z)$ в точке $M_0$ по направлению $s$ определяется соотношением

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \lim_{t \to 0} \frac{u(\vec{r}_0 + t\vec{s}) - u(\vec{r}_0)}{t}$$

и характеризует скорость изменения $u(\vec{r})$ в направлении $s$.

Градиентом скалярного поля $u(\vec{r}) = u(x, y, z)$ называется векторное поле

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

Производная по направлению вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = s_x\frac{\partial u}{\partial x} + s_y\frac{\partial u}{\partial y} + s_z\frac{\partial u}{\partial z}s_z = \vec{s}\cdot\operatorname{grad} u$$

## 41 Дивергенция векторного поля

Дивергенцией векторного поля

$$\vec{a}(x,y,z) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k}$$

обозначаемой через $\operatorname{div}\vec{a}$ называется функция

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

## 42 Теорема Гаусса-Остроградского

Поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность $S$, в направлении ее внешней нормали, равен тройному интегралу по области $G$, ограниченной этой поверхностью, от дивергенции этого векторного поля, т.е

$$\iint\limits_S (\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS = \iiint\limits_G \operatorname{div}\vec{a}\,dxdydz$$

## 43 Ротор векторного поля

Ротором векторного поля

$$\vec{a}(x,y,z) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k}$$

обозначаемым $\operatorname{rot}\vec{a}$, называется векторное поле, которое определяется следующим образом

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

## 44 Теорема Стокса

Циркуляция векторного поля $\vec{a}$ по произвольному кусочно гладкому замкнутому контуру $\gamma$ равна потоку вектора $\operatorname{rot}\vec{a}$ через поверхность $S$, ограниченную этим контуром

$$\oint\limits_{\gamma} \vec{a}\,\cdot\,d\vec{l} = \iint\limits_{S} \operatorname{rot}\vec{a}\,\cdot\,d\vec{S}$$

При этом направление обхода контура $\gamma$ должно происходить против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора нормали к поверхности $S$.

## 45 Формула Грина

Если замкнутый контур $\gamma$ и векторное поле

$$\vec{a}(x,y) = a_x(x,y)\vec{i} + a_y(x,y)\vec{j}$$

лежат на плоскости, то из теоремы Стокса получается формула Грина

$$\oint\limits_{\gamma} a_x\,dx + a_y\,dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dxdy$$

здесь $D$ – область на плоскости $Oxy$, которая ограничена контуром $\gamma$. При этом обход контура $\gamma$ происходит против часовой стрелки.

## 46 Потенциальное векторное поле

Векторное поле $\vec{a}(x,y,z)$ называется потенциальным, если оно является градиентом некоторой функции $f(x,y,z)$

$$\vec{a} = \operatorname{grad} f$$

Функция $f(x,y,z)$ в этом случае называется потенциалом векторного поля $\vec{a}(x,y,z)$.

## 47 Условия потенциальности векторного поля

Необходимым и достаточным условием потенциальности поля $\vec{a}(x,y,z)$ в односвязной области $G$ является равенство нулю ротора этого поля в этой области

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}\,, \qquad (x,y,z) \in G$$

## 48 Вычисление криволинейного интеграла второго рода от потенциального векторного поля

Криволинейный интеграл второго рода от потенциального векторного поля вдоль кривой $\gamma$ равен приращению потенциала $f(x, y, z)$ этого поля вдоль этой кривой

$$\int\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{l} = f(B) - f(A)$$

где $A$ и $B$ — начало и конец кривой $\gamma$.

## 49 Соленоидальное векторное поле

Векторное поле

$$\vec{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}$$

называется соленоидальным в некоторой области $G$, если дивергенция этого поля равна нулю в $G$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0$$

В таком поле в силу теоремы Гаусса-Остроградского равен нулю поток векторного поля через любую замкнутую поверхность, принадлежащую области $G$.

## 50 Гармоническое векторное поле

Векторное поле $\vec{a}$ называется гармоническим в некоторой области $G$, если оно одновременно и потенциальное и соленоидальное в $G$, т.е. если

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}\,, \qquad \operatorname{div} \vec{a} = 0$$

в области $G$.

## 51 Оператор Гамильтона

Все операции векторного анализа можно выразить при помощи оператора Гамильтона — символического вектора $\nabla$ (набла), определяемого равенством

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

Применяя известные операции умножения вектора на число, скалярного и векторного произведения двух векторов, находим

$$\operatorname{grad} u = u'_x \vec{i} + u'_y \vec{j} + u'_z \vec{k} = \nabla u$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \vec{s} \cdot \operatorname{grad} u = \vec{s} \cdot \nabla u$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{a}$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{a}$$

ИТМО
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПРИОРИТЕТНЫЕ НАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКТЫ
«Образование»

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007-2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

---

## КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики - крупнейшая в Санкт-Петербургском государственном университете информационных технологий, механики и оптики. С момента основания на ней работали такие выдающиеся ученые, как И.П.Натансон, В.А.Тартаковский, В.Н.Попов, И.А.Молотков, А.Г.Аленицын, В.В.Жук и другие. Научные интересы сотрудников покрывают практически все разделы математики. На кафедре сложилась мощная научная школа по математическому моделированию сложных физических систем. В последнее время активно развивается направление, связанное с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовым компьютером и квантовыми коммуникациями. Сотрудники кафедры активно участвуют в международных научных конференциях, работают в рамках Российских и международных научных проектов. Сложилось тесное научное сотрудничество с Санкт-Петербургским государственным университетом, Петербургским отделением Математического института имени В.А.Стеклова РАН, лабораторией физикохимии наносистем Института химии силикатов РАН и другими научными центрами как в России, так и за рубежом: университетами Марселя и Тулона (Франция), Ювяскиля (Финляндия), Гумбольдтовским университетом Берлина (Германия).

Александр Петрович Танченко
Юлия Валерьевна Танченко

# Справочное пособие по высшей математике для первого курса

**В авторской редакции**

| | |
|---|---|
| Компьютерный набор и верстка | А.П. Танченко |
| Дизайн обложки | А.П. Танченко |

**Редакционно-издательский отдел СПбГУ ИТМО**

| | |
|---|---|
| Зав. РИО | Н.Ф. Гусарова |
| Лицензия ИД | № 00408 от 05.11.99 |
| Подписано к печати | Заказ № 2032 |
| | Отп. на ризографе |

**Редакционно-издательский отдел**
Санкт-Петербургского государственного
университета информационных
технологий, механики и оптики
197101, Санкт-Петербург,
пр. Кронверкский, д.49