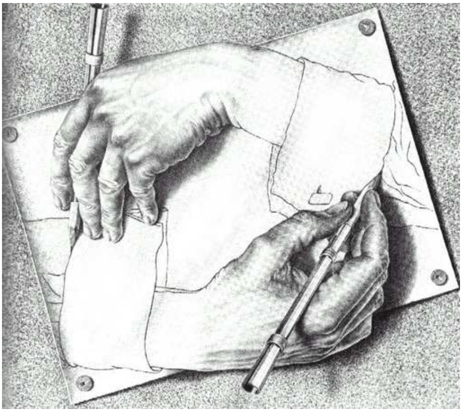
А. П. ТАНЧЕНКО

Ю. В. ТАНЧЕНКО

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ВТОРОГО КУРСА



Санкт-Петербург
2009

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ПРИОРИТЕТНЫЕ НАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКТЫ «Образование»

ПОБЕДИТЕЛЬ КОНКУРСА ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВУЗОВ

А. П. ТАНЧЕНКО

Ю. В. ТАНЧЕНКО

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ВТОРОГО КУРСА

ИТМО
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Санкт-Петербург
2009

Справочное пособие по высшей математике для второго курса.
Составители: Танченко А. П., Танченко Ю. В.
Справочное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2009 год, 38 с.

В пособии приведена сводка основных определений и результатов по высшей математике для студентов второго курса всех специальностей и направлений СПбГУ ИТМО.

Рекомендовано к печати Ученым Советом естественнонаучного факультета СПбГУ ИТМО. Протокол № 5 от 23.12.08.

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007-2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

Оглавление

Глава 1
Числовые ряды

1 Числовой ряд

Выражение

$$u_1 + u_2 + ... + u_k + ... = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

где $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ заданная числовая действительная или комплексная последовательность, называется *числовым рядом*.

2 Частичные суммы ряда

Конечные суммы

$$S_1 = u_1$$
$$S_2 = u_1 + u_2$$
$$\dots$$
$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

называются *частичными суммами ряда*.

3 Сходящийся ряд

Если существует конечный предел последовательности частичных сумм

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n)$$

то ряд называется *сходящимся*, а число S *суммой ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.

4 Критерий Коши сходимости ряда

Для того чтобы числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ существовало $N = N(\epsilon)$ такое, что для всех $k > N$ и $p = 1, 2, ...$ выполнялось неравенство

$$|S_{k+p} - S_k| = |u_{k+1} + u_{k+2} + ... + u_{k+p}| < \epsilon$$

5 Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, то

$$\lim_{k\to\infty} u_k = 0$$

6 Абсолютная сходимость ряда

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряда из модулей членов этого ряда, т.е. сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + ... + |u_k| + ... = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$$

7 Признак сравнения рядов

Если члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ для всех $k > N_0$ удовлетворяют условию $|a_k| \leqslant b_k$, причем знакоположительный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно.

Если для $k > N_1$ члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ удовлетворяют условию $0 < c_k \leq |a_k|$, причем ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

8 Предельный признак сравнения рядов

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится абсолютно и существует конечный предел

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{b_k}\right| = q < +\infty$$

то, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ так же сходится абсолютно.

Если же члены рядов a_k и b_k положительны и

$$0 < \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} < +\infty$$

то ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

9 Признак Даламбера

Если члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ таковы,что существует конечный предел

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = d$$

то при $0 \leqslant d < 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, при $d > 1$ — расходится, а при $d = 1$ требуется дополнительные исследование.

10 Признак Коши

Пусть

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = c$$

тогда, если $0 \leqslant c < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, если $c > 1$ —- ряд расходится, а при $c = 1$ требуется дополнительные исследование.

11 Интегральный признак сходимости ряда

Пусть функция $f(x)$ положительна и монотонна при $x \geqslant 1$, и пусть для всех $k \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $f(k) = |a_k|$. Тогда числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом

$$\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx\,, \qquad c \geqslant 1$$

12 Ряд Дирихле

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

называется *рядом Дирихле*. Ряд Дирихле сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

13 Ряд бесконечной геометрической прогрессии

Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

называемый *бесконечной геометрической прогрессией*. Ряд сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geqslant 1$. И его сумма равна $S = 1/(1-q)$.

14 Знакочередующиеся ряды

Знакочередующимся называется ряд, в котором любые два соседних члена имеют разные знаки. Это ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n+1}a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

или

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + ... + (-1)^n a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

где все a_n — положительные действительные числа.

15 Признак Лейбница

Пусть члены a_n знакочередующегося ряда

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n+1} a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

действительны и монотонно убывают, т.е.

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots,$$

и

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ сходится, причем для его суммы имеет место оценка $S < a_1$.

16 Знакопеременный ряд

Ряд, содержащий и положительные и отрицательные члены, называется *знакопеременным*. В частности, всякий знакочередующийся ряд является знакопеременным.

17 Абсолютно сходящийся знакопеременный ряд

Пусть дан знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где a_n — произвольные числа (действительные или комплексные). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин его членов, сходится, то данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ так же сходится. В этом случае знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*.

18 Условно сходящийся знакопеременный ряд

Если же знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*.

19 Признак Абеля-Дирихле

Пусть члены последовательности b_n монотонно убывают

$$b_1 > b_2 > \ldots > b_n > \ldots$$

и

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

а частичные суммы $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничены в совокупности, т.е.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant M \qquad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}$$

тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

20 Функциональный ряд

Пусть функции $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$ определены в области D комплексной плоскости. Выражение

$$f_1(z) + f_2(z) + ... + f_n(z) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad z \in D$$

называется *функциональным рядом.*

21 Сходимость функционального ряда

Если для $z_0 \in D$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ сходится, то говорим, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится в точке* z_0.

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится в области* D, если он сходится в каждой точке $z \in D$.

22 Критерий Коши сходимости функционального ряда

Для того чтобы функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ был сходящимся в области D, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ и любого $z \in D$ существовало число $N = N(\epsilon, z)$ такое, что

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + ... + f_{n+p}(z)| < \epsilon$$

для всех $n > N(\epsilon, z)$ и $p \in \mathbb{N}$.

23 Равномерно сходящийся функциональный ряд

Сходящийся в области D функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ называется равномерно сходящимся в этой области, если для любого $\epsilon > 0$ найдется число $N = N(\epsilon)$ такое, что для остатка ряда

$$R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$$

при всех $n > N(\epsilon)$ и $z \in D$ имеет место оценка $|R_n(z)| < \epsilon$.

24 Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда

Для того чтобы функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ был равномерно сходящимся в области D, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ существовало число $N = N(\epsilon)$ такое, что для всех $n > N(\epsilon)$ и $z \in D$ выполнялись неравенства

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + ... + f_{n+p}(z)| < \epsilon, \qquad p = 1, 2, \ldots$$

25 Признак Вейерштрасса

Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится в области D и пусть существует сходящийся знакоположительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ такой, что для всех $z \in D$ и для $n > N_0$ члены функционального ряда удовлетворяют условию $|f_n(z)| \leq a_n$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится абсолютно и равномерно* в области D.

26 Степенной ряд

Функциональный ряд вида

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

где z_0 и $c_0, c_1, c_2, \ldots$ — постоянные числа (действительные или комплексные), а z — переменная величина (также действительная или комплексная) называется *степенным рядом.*

Числа $c_0, c_1, c_2, \ldots$ называются *коэффициентами степенного ряда.*

27 Теорема Абеля

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ сходится в точке $z = z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится для всех z таких, что $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, причем сходимость будет равномерной в любом замкнутом круге $|z - z_0| \leqslant r < |z_1 - z_0|$.

Если же ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ расходится в точке $z = z_2$, то он расходится для всех z таких, что $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$.

28 Круг сходимости степенного ряда

Кругом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ называется такой круг $|z - z_0| < R$, что в каждой его точке ряд сходится абсолютно, а в каждой точке, лежащей вне круга $|z - z_0| \leqslant R$, ряд расходится. На границе круга, т.е. в точках $|z-z_0| = R$, ряд может как сходится, так и расходиться. Число R называется *радиусом сходимости степенного ряда*.

29 Свойства степенного ряда

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ обладает следующими свойствами:

1. В круге сходимости $|z - z_0| < R$ сумма степенного ряда $f(z)$ является функцией аналитической.

2. В круге сходимости $|z-z_0| < R$ степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз, причем продифференцированные ряды имеют тот же самый круг сходимости
$|z - z_0| < R$.

3. Ряд можно почленно интегрировать по любой кривой, лежащей в круге сходимости, причем интеграл зависит только от начала и конца кривой интегрирования, а ряд полученный в результате интегрирования, имеет тот же круг сходимости.

30 Ортогональность тригонометрической системы функций

Тригонометрическая система функций

$$1\,, \quad \cos x\,, \quad \sin x\,, \quad \cos 2x\,, \quad \sin 2x\,, \quad \ldots \quad \cos nx\,, \quad \sin nx\,, \quad \ldots$$

является *ортогональной* на отрезке $[-\pi\,,\,\pi]$ т.е. интеграл по этому отрезку от произведения любых двух различных функций этой системы равен нулю.

31 Коэффициенты Фурье

Числа

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\,, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\,, \qquad k = 0, 1, 2\ldots$$

называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$.

32 Ряд Фурье

Рядом Фурье функции $f(x)$ называется ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

33 Равенство Парсеваля

Пусть a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, тогда справедливо *равенство Парсеваля*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

34 Ряд Фурье в комплексной форме

Числа

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx\,, \qquad k = 0\,, \pm1\,, \ldots$$

называются *коэффициентами Фурье в комплексной форме* функции $f(x)$.

Пусть c_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ в комплексной форме. Ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

называется *рядом Фурье функции $f(x)$ в комплексной форме*.

35 Кусочно гладкая функция

Функция $f(x)$ называется *кусочно гладкой* на отрезке $[a,\,b]$, если сама функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ имеют на $[a,\,b]$ конечное число точек разрыва 1-го рода.

36 Признак Жордана

Если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π кусочно гладкая на отрезке $[-\pi\,,\,\pi]$, то ее ряд Фурье сходится к значению $f(x)$ в каждой ее точке непрерывности и к значению $[f(x+0)+f(x-0)]/2$ в точках разрыва, т.е.

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx}$$

Если, дополнительно, $f(x)$ непрерывна на всей оси, то ряд Фурье сходится к $f(x)$ равномерно.

37 Абсолютно интегрируемая функция

Функция $f(x)$ называется *абсолютно интегрируемой* на вещественной оси, если существует интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx<\infty$$

38 Интеграл Фурье

Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на вещественной оси и кусочно гладка на каждом конечном отрезке действительной оси, то она представима в виде *интеграла Фурье*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$$

где

$$F(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

39 Прямое и обратное преобразование Фурье в комплексной форме

Преобразование

$$F(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

называется *прямым преобразованием Фурье в комплексной форме*.

Преобразование

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$$

называется *обратным преобразованием Фурье в комплексной форме.*

40 Прямое и обратное преобразование Фурье в действительной форме

В действительной форме *прямое преобразование Фурье* имеет вид

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\omega x\,dx\,, \qquad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$$

а *обратное преобразование Фурье* записывается в виде

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \int\limits_{0}^{+\infty} \left(a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x\right)\,d\omega$$

41 Косинус и синус преобразование Фурье

Если функция $f(x)$ четная, то ее прямое и обратное преобразование Фурье в вещественной форме записываются в виде

$$a(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} a(\omega)\cos\omega x\,d\omega$$

и называются парой *косинус-преобразований Фурье.*

Если функция $f(x)$ нечетная, то ее прямое и обратное преобразование Фурье в вещественной форме записываются в виде

$$a(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$$

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} a(\omega)\sin\omega x\,d\omega$$

и называются парой *синус-преобразований Фурье.*

Глава 2

Теория функций комплексной переменной

1 Связное множество на комплексной плоскости

Множество точек на комплексной плоскости называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат данному множеству.

2 Область на комплексной плоскости

Связное открытое множество точек комплексной плоскости называется *областью*.

3 Функция комплексного переменного

Если каждому комплексному числу $z = x+iy$, принадлежащему области D, по некоторому правилу поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел $w = u + iv$, то говорят, что на множестве D определена определена *функция комплексного переменного* и записывают

$$w = f(z) = u + iv = u(x, y) + iv(x, y)$$

где

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)\,, \qquad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$$

4 Предел функции комплексного переменного

Число $A \neq \infty$ называется *пределом функции* $f(z)$ при $z \to z_0$ и обозначается

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

если для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ такое, что для всех $z \neq z_0$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - A| < \epsilon$.

5 Непрерывность функции комплексного переменного

Функция $f(z)$ называется *непрерывной в точке* z_0, если она определена в этой точке и

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

.

Функция $f(z)$, непрерывная в каждой точке области D, называется *непрерывной в этой области*.

6 Производная функции комплексного переменного. Дифференцируемость

Если в точке $z \in D$ существует предел

$$\lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z+\triangle z) - f(z)}{\triangle z}, \qquad z + \triangle z \in D$$

то он называется *производной* функции $f(z)$ в точке z и обозначается через $f'(z)$ или $\dfrac{df(z)}{dz}$.

Если в точке $z \in D$ функция $f(z)$ имеет производную $f'(z)$, то говорим, что функция $f(z)$ *дифференцируема* в точке z.

7 Аналитическая функция

Функция $f(z)$, дифференцируемая в каждой точке области D и имеющая в этой области непрерывную производную $f'(z)$, называется *аналитической в области* D. Будем также говорить, что $f(z)$ *аналитическая в точке* $z_0 \in D$, если $f(z)$ является аналитической в некоторой окрестности точки z_0.

8 Условия Коши-Римана

Для того чтобы функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ была аналитической в области D, необходимо и достаточно существование в этой области непрерывных частных производных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, удовлетворяющих *условиям Коши-Римана*

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

9 Свойства аналитических функций

Если $f(z)$ и $g(z)$ — аналитические в области D функции, то функции $f(z) \pm g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$ также аналитические в области D, а частное $f(z)/g(z)$ — аналитическая функция во всех точках области D, в которых $g(z) \neq 0$. При этом имеют место формулы

$$(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z)$$

$$(f(z) \cdot g(z))' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$$

10 Аналитичность сложность функции

Пусть $f(z)$ — аналитическая в области D функция с областью значений $G = \{f(z) : z \in D\}$, и пусть функция $\varphi(w)$ аналитична в области G. Тогда сложная функция $F(z) = \varphi(f(z))$ — аналитическая в области D функция и ее производная равна

$$F'(z) = \varphi'(f(z)) \cdot f'(z), \qquad z \in D$$

11 Интеграл от функции комплексной переменной

Если γ — направленная кусочно гладкая кривая в плоскости (z) и для всех $z \in \gamma$ определена функция $f(z)$, то при условии существования предела в правой части полагают по определению

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \lim_{\max|\triangle z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \triangle z_k$$

здесь $\triangle z_k = z_k - z_{k-1}$, $z_k \in \gamma$, $k = 0, 1, \ldots, n$, точки $c_k \in \gamma$ выбраны на участках γ между точками z_k и z_{k+1}.

12 Свойства интеграла от функции комплексной переменной

Интеграл от функции комплексной переменной обладает следующими свойствами

1) При изменении направления пути интегрирования интеграл изменит знак, т.е.

$$\int\limits_{\gamma^+} f(z)\,dz = -\int\limits_{\gamma^-} f(z)\,dz$$

2) Если a_1 и a_2 — постоянные, то

$$\int\limits_{\gamma} \left(a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z)\right)\,dz = a_1 \int\limits_{\gamma} f_1(z)\,dz + a_2 \int\limits_{\gamma} f_2(z)\,dz$$

3) Если кривая интегрирования γ является объединением кривых γ_1 и γ_2, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

4) Имеет место оценка

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_{\gamma} |f(z)|\,ds$$

где ds — дифференциал дуги.

13 Односвязная и многосвязная область комплексной плоскости

Область на комплексной плоскости называется *односвязной*, если ее граница является связным множеством, в противном случае область называется *многосвязной*.

14 Теорема Коши

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, ограниченной контуром Γ, и γ — замкнутый контур в D, то

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

15 Интегральная формула Коши

Если функция $f(z)$ аналитична в области D, $z_0 \in D$ и $\gamma \subset D$ — контур, охватывающий точку z_0, то справедлива *интегральная формула Коши*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 0$$

16 Бесконечная дифференцируемость аналитической функции

Если функция $f(z)$ аналитична в области D, то $f(z)$ имеет всюду в D производные любого порядка, для которых справедливы формулы

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,dz\,, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

здесь $z_0 \in D$ и $\gamma \subset D$ — контур, охватывающий точку z_0.

17 Разложение аналитических функций в ряд Тейлора

Функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z - z_0| < R$, однозначно представима в этом круге своим *рядом Тейлора*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z - z_0| = r < R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,dz\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Если $z_0 = 0$, то ряд Тейлора называют также *рядом Маклорена*.

18 Ряд Лорана

Рядом Лорана называется ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

при этом ряд

$$f_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-z_0)^k$$

называется *главной частью* ряда Лорана, а ряд

$$f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

— *правильной частью* ряда Лорана.

19 Сходимость ряда Лорана

Рассмотрим ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

Если

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_{-k}|} = r < R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$$

то областью сходимости ряда Лорана является кольцо $K = \{z : 0 \leqslant r < |z-z_0| < R\}$. В этом кольце K сумма ряда $f(z)$ является функцией аналитической, причем коэффициенты ряда c_k связаны с функцией $f(z)$ посредством формул

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=r'} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz\,, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

где $r < r' < R$.

20 Теорема Лорана

Если функция $f(z)$ аналитична в кольце $0 \leqslant r < |z-z_0| < R$, то в этом кольце она единственным образом представима в виде ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=r'} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz\,, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

где $r < r' < R$.

21 Особая точка

Точка z_0 называется *правильной* точкой для аналитической в области D функции $f(z)$, если существует степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ с радиусом сходимости $r > 0$, такой, что в общей части круга сходимости $|z - z_0| < r$ и области D сумма этого ряда совпадает с $f(z)$. Точки, не являющиеся правильными, называются *особыми*.

22 Изолированная особая точка

Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если $f(z)$ — однозначная аналитическая функция в кольце $0 < |z - z_0| < R$, а z_0 — особая точка.

23 Устранимая особая точка

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a \neq \infty$.

24 Полюс

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется *полюсом порядка* $m \geqslant 1$, если для функции $g(z) = 1/f(z)$ точка z_0 является нулем порядка m, т.е. $g(z)$ имеет вид $g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, $\varphi(z_0) \neq 0$.

25 Существенно особая точка

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется *существенно особой точкой*, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не существует.

26 Вычет функции

Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки z_0, за исключением может быть самой точки z_0, то *вычетом* функции $f(z)$ в точке z_0, обозначаемым $\operatorname{res}[f(z),\, z_0]$ называется число, равное

$$\operatorname{res}[f(z),\, z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C} f(z)\,dz$$

где C — некоторый простой замкнутый контур, лежащий в области аналитичности $f(z)$ и содержащий внутри себя только одну особую точку z_0.

27 Вычисление вычета функции

Вычет функции равен коэффициенту c_{-1} разложения $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$, т.е

$$\operatorname{res}[f(z),\, z_0] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=r'} f(z)\,dz$$

28 Вычисление вычета функции в случае полюса первого порядка

Если z_0 — полюс первого порядка функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res}[f(z),\, z_0] = \lim_{z\to z_0} (z - z_0) f(z)$$

причем, если $f(z)$ представима в виде $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, где $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname{res}[f(z),\, z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

29 Вычисление вычета функции в случае полюса высокого порядка

Если z_0 — полюс порядка $m \geqslant 2$ функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res}[f(z),\, z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]}{dz^{m-1}}$$

30 Первая теорема о вычетах

Если функция $f(z)$ аналитична в области D, за исключением изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_N$, лежащих в этой области, то для любого простого замкнутого контура $\gamma \subset D$, охватывающего точки $z_1, z_2, \ldots, z_N$

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}[f(z),\, z_k]$$

31 Вторая теорема о вычетах

Если функция $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_N$, то

$$\sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}[f(z),\, z_k] = 0$$

Глава 3

Теория вероятностей и математическая статистика

1 Теорема о перемножении числа способов

Пусть множество A состоит из n элементов $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, а множество B — из m элементов $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Тогда можно образовать ровно $n \cdot m$ пар (a_i, b_j), взяв первый элемент из множества A, а второй из множества B.

2 Способы выбора шаров из урны

1) *Выбор с возвращением*: каждый выбранный шар возвращается в урну. В полученном наборе из k номеров шаров могут встречаться одни и те же номера.

2) *Выбор без возвращения*: вынутые шары в урну не возвращаются. В полученном наборе из k номеров шаров не могут встречаться одни и те же номера.

3) *Выбор с учетом порядка*: два набора номеров шаров считаются различными, если они отличаются составом или порядком номеров.

4) *Выбор без учета порядка*: два набора номеров шаров считаются различными, если они отличаются составом. Наборы, отличающиеся лишь порядком следования номеров, считаются одинаковыми.

3 Количество наборов с возвращением и с учетом порядка

Общее количество различных наборов при выборе k элементов из n с возвращением и с учетом порядка равняется n^k.

4 Число размещений

Общее количество различных наборов при выборе k элементов из n без возвращения и с учетом порядка равняется

$$A_n^k = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

и называется *числом размещений из n элементов по k*.

Следствие: Если в множестве n элементов, то существует ровно $n!$ перестановок этих элементов.

5 Число сочетаний

Общее количество различных наборов при выборе k элементов из n без возвращения и без учета порядка равняется

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

и называется *числом сочетаний из n элементов по k*.

6 Число сочетаний с повторениями

Общее количество различных наборов при выборе k элементов из n с возвращением и без учета порядка равняется

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

и называется *числом сочетаний с повторениями из n элементов по k*.

7 Случайный эксперимент

Случайным называют эксперимент, результат которого нельзя предсказать заранее, но который можно воспроизвести в одних и тех же условиях.

8 Пространство элементарных исходов

Пространством элементарных исходов Ω называют множество, содержащее все возможные результаты данного случайного эксперимента, из которых в эксперименте происходит ровно один. Элементы этого множества называют *элементарными исходами* и обозначают буквой ω.

9 События

Событиями мы будем называть подмножества множества Ω. Говорят, что в результате эксперимента *произошло событие* $A \subset \Omega$, если в эксперименте произошел один из элементарных исходов, входящих в множество A.

10 Достоверное событие

Достоверным называется событие, которое обязательно происходит в результате эксперимента, т.е. единственное событие, включающее все элементарные исходы — событие Ω.

11 Невозможное событие

Невозможным называется событие, которое не может произойти в результате эксперимента, т.е. событие, не содержащее ни одного элементарного исхода — пустое множество $\varnothing$. Заметим, что всегда $\varnothing \subset \Omega$.

12 Операции над событиями

Объединением $A \cup B$ событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошло либо A, либо B, либо оба события одновременно. На языке теории множеств $A \cup B$ есть множество, содержащее как элементарные исходы из множества A, так и из множества B.

Пересечением $A \cap B$ событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошли оба события A и B одновременно. На языке теории множеств $A \cap B$ есть множество, содержащее элементарные исходы входящие одновременно в множества A и B.

Дополнением $A \backslash B$ события B до A называется событие, состоящее в том, что произошло событие A, но не произошло событие B. Т.е. множество $A \backslash B$ содержит элементарные исходы, входящие в множество A, но не входящие в множество B.

Противоположным (или дополнительным) к событию A называется событие $\overline{A} = \Omega \backslash A$, состоящее в том, что событие A в результате эксперимента не произошло. Т.е. множество $\overline{A}$ состоит из элементарных исходов, не входящих в A.

Говорят, что событие A *влечет* событие B, и пишут $A \subset B$, если всегда, как только происходит событие A, происходит и событие B. На языке теории множеств это означает, что множество A содержится в B (A — подмножество множества B).

13 Несовместные события

События A и B называются *несовместными*, если $A \cap B = \varnothing$, т.е. они не могут произойти одновременно.

События $A_1, \ldots, A_n$ называются *попарно несовместными*, если события A_i и A_j несовместны для любых $i \neq j$, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

14 Дискретное пространство элементарных исходов

Пространство элементарных исходов называется *дискретным*, если оно конечно или счетно $\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n,\ \ldots\}$.

15 Вероятность на дискретном пространстве элементарных исходов

Пусть Ω — дискретное пространство элементарных исходов. Поставим каждому элементарному исходу $\omega_i \in \Omega$ в соответствие число $p_i \in [0,1]$ так, что

$$\sum_{\omega_i \in \Omega} p_i = 1$$

Назовем число p_i вероятностью элементарного исхода ω_i. Вероятностью события A назовем число

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

равное сумме вероятностей элементарных исходов, входящих в множество A. В случае $A = \varnothing$ положим $\mathbf{P}(A) = 0$.

16 Классическое определение вероятности

Предположим, что мы имеем дело с пространством элементарных исходов, состоящим из конечного числа N элементов $\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_N\}$. Предположим, что из каких-либо соображений мы можем считать элементарные исходы *равновозможными*, т.е. имеющими равные вероятности. Тогда вероятность любого из них равна $1/N$.

Если событие $A = \{\omega_{i_1},\ \omega_{i_2},\ \ldots,\ \omega_{i_k}\}$ состоит из k элементарных исходов, то вероятность этого события равна отношению k/N

$$\mathbf{P}(A) = p_{i_1} + \ldots + p_{i_k} = k \cdot \frac{1}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

где символом $|A|$ обозначено число элементов конечного множества A, $|\Omega| = N$.

Формулу $\mathbf{P}(A) = |A|/|\Omega|$ читают так «вероятность события A равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу исходов».

17 Непрерывное пространство элементарных исходов

Пространство элементарных исходов Ω называется *непрерывным*, если точки в Ω распределены с плотностью $\mu(\omega)$, причем

$$\int\limits_{\Omega} \mu(\omega)\, d\omega = 1$$

18 Вероятность на непрерывном пространстве элементарных исходов

В случае непрерывного пространства элементарных исходов Ω, когда точки в Ω распределены с плотностью $\mu(\omega)$ вероятность события $A \subset \Omega$ определяется как

$$\mathbf{P}(A) = \int\limits_A \mu(\omega)\, d\omega$$

19 Геометрическая вероятность

Рассмотрим какое-нибудь множество Ω в $\mathbb{R}^n$ (на прямой, на плоскости, в пространстве). Предположим, что мера Ω (длина, площадь, объем, соответственно) конечна. Пусть эксперимент состоит в случайном выборе точки из множества Ω. Термин «случайный» означает, что выбор любой точки множества равновозможен. Пусть $A \subset \Omega$ — некоторое подмножество. Рассмотрим событие A, которое состоит в том, что случайно выбранная точка попала в множество A.

Эксперимент удовлетворяет условиям «геометрического определения вероятности», если вероятность события A не зависит от формы или расположения A внутри Ω, а зависит лишь от меры множества A и пропорциональна этой мере

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mathrm{mes}(A)}{\mathrm{mes}(\Omega)}$$

где $\mathrm{mes}(A)$ обозначает меру множества A (длину, площадь, объем и т.д.).

20 Сигма-алгебра событий

Множество $\mathcal{S}$, элементами которого являются подмножества множества Ω (не обязательно все) называется σ-алгеброй (σ-алгеброй событий), если выполнены следующие условия

1) $\Omega \in \mathcal{S}$

2) если $A \in \mathcal{S}$, то $\overline{A} \in \mathcal{S}$

3) если $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}$, то $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathcal{S}$

21 Аксиоматическое определение вероятности

Пусть Ω — пространство элементарных исходов, $\mathcal{S}$ — σ-алгебра его подмножеств (событий). *Вероятностью* называется функция $\mathbf{P} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, обладающая свойствами

1) для любого события $A \in \mathcal{S}$ выполняется неравенство $\mathbf{P}(A) \geqslant 0$

2) для любого счетного набора попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}$ имеет место равенство

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$$

3) вероятность достоверного события равна единице $\mathbf{P}(\Omega) = 1$

22 Свойства вероятностей

1) Вероятность невозможного события равна нулю

$$\mathbf{P}(\varnothing) = 0$$

2) Для любого конечного набора попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ имеет место равенство

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$$

3) Для любого события A выполнено

$$\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}) = 1$$

4) Если $A \subset B$, т.е. событие A влечет за собой событие B, то

$$\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$$

5) Для любых событий A, B

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$$

6) Для любых событий A, B

$$\mathbf{P}(A \cup B) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$$

23 Условная вероятность

Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B, называется число

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

Условная вероятность определена только в случае, когда $\mathbf{P}(B) > 0$.

24 Вероятность произведения событий

Для любых событий A, B верно равенство

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(A|B)$$

если все участвующие в нем условные вероятности определены.

25 Независимость событий

События A и B называются *независимыми*, если

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$$

26 Полная группа событий, гипотезы

Конечный или счетный набор попарно несовместных событий H_1, H_2, ... таких, что $\mathbf{P}(H_k) > 0$ для всех k и $H_1 \cup H_2 \cup \ldots = \Omega$, называется *полной группой* событий или разбиением пространства Ω.

События H_1, H_2, ..., образующие полную группу событий, часта называют *гипотезами*.

27 Формула полной вероятности

Пусть дана полная группа событий H_1, H_2, ... Тогда вероятность любого события A может быть вычислена по формуле

$$\mathbf{P}(A) = \sum_k \mathbf{P}(H_k) \cdot \mathbf{P}(A|H_k)$$

28 Формула Байеса

Пусть H_1, H_2, ... — полная группа событий, и A — некоторое событие, вероятность которого положительна. Тогда условная вероятность того, что имело место событие H_k, если в результате эксперимента наблюдалось событие A, может быть вычислена по формуле

$$\mathbf{P}(H_k|A) = \frac{\mathbf{P}(H_k) \cdot \mathbf{P}(A|H_k)}{\mathbf{P}(A)}$$

29 Схема Бернулли

Схемой Бернулли называется последовательность независимых в совокупности испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода — «успех» и «неудача», при этом успех в одном испытании происходит с вероятностью $p \in (0, 1)$, а неудача — с вероятностью $q = 1 - p$.

30 Формула Бернулли

Обозначим через $P_n(k)$ — вероятность получить k успехов в n испытаниях схемы Бернулли. Для любого $k = 0, 1, \ldots, n$ имеет место равенство

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

31 Теорема Пуассона

Пусть $n \to \infty$ и $p_n \to 0$, так, что $np_n \to \lambda > 0$. Тогда для любого $k \geqslant 0$ вероятность получить k успехов в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p_n стремится к величине $\lambda^k e^{-\lambda}/k!$

$$C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

32 Функция Гаусса

Функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

называется *функцией Гаусса*, а ее график — *кривой вероятностей*.

33 Локальная теорема Муавра-Лапласа

Пусть $p \neq 0$, $p \neq 1$. Тогда вероятность $P_n(k)$ получить k успехов в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p может быть вычислена по приближенной формуле

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

где $\varphi(x)$ — функция Гаусса. Эта формула тем точнее, чем больше n.

34 Функция Лапласа

Функция

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

называется *функцией Лапласа*.

35 Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Пусть $p \neq 0$, $p \neq 1$. Тогда вероятность $P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2)$ получить от k_1 до k_2 успехов в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p может быть вычислена по приближенной формуле

$$P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа. Эта формула тем точнее, чем больше n.

36 Случайная величина

Случайной величиной X называется действительная функция $X = X(\omega)$, определенная на пространстве элементарных исходов Ω и такая, что при любом действительном x множество тех ω, для которых $X(\omega) < x$, принадлежит σ-алгебре событий для данного эксперимента.

37 Функция распределения случайной величины

Функция $F_X(x)$ действительной x, определяемая формулой

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X < x)$$

называется *функцией распределения* случайной величины X.

38 Свойства функции распределения

Функция распределения обладает следующими свойствами

1) $0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1$, $-\infty < x < +\infty$

2) $F_X(-\infty) = 0$, $F_X(+\infty) = 1$

3) $F_X(x)$ — неубывающая функция на всей оси

4) $F_X(x)$ — непрерывная слева, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F_X(x) = F_X(x_0)$

5) Вероятность попадания случайной величины X на произвольный интервал действительной оси $[x_1, x_2)$ определяется формулой

$$\mathbf{P}(x_1 \leqslant X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

39 Дискретная случайная величина

Случайная величина X называется *дискретной*, если множество ее возможных значений $\{x_1, x_2, \ldots\}$ конечно или счетно.

40 Закон распределения дискретной случайной величины

Перечень всех возможных значений дискретной случайной величины и соответствующих этим значениям вероятностей называется *законом распределения дискретной случайной величины*.

41 Функция распределения дискретной случайной величины

Зная закон распределения дискретной случайной величины X, можно вычислить вероятности $\mathbf{P}(X = x_k) = p_k > 0$, $\sum\limits_k p_k = 1$ и ее функцию распределения

$$F_X(x) = \sum_{x_k < x} \mathbf{P}(X = x_k)$$

где суммирование распространяется на все значения индекса k, для которых $x_k < x$.

Из этой формулы следует, что

$$F_X(x_k + 0) - F_X(x_k) = \mathbf{P}(X = x_k)$$

т.е. функция распределения дискретной случайной величины испытывает скачки в точках x, для которых существует положительная вероятность события $\{X = x\}$.

42 Непрерывная случайная величина. Плотность распределения вероятностей

Случайная величина X называется *непрерывной*, если существует такая неотрицательная, интегрируемая по Риману в бесконечных пределах функция $f_X(x)$, называемая *плотностью распределения вероятностей*, что при всех $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

43 Свойства плотности распределения вероятностей

Плотность распределения вероятностей обладает следующими свойствами

1) $f_X(x) \geqslant 0$, $-\infty < x < +\infty$

2)
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

3) В точках непрерывности функции $f_X(x)$

$$\frac{d}{dx}F_X(x) = f_X(x)$$

4)

$$\mathbf{P}(x_1 \leqslant X < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx$$

44 Математическое ожидание случайной величины

Математическим ожиданием случайной величины X называется действительное число

$$m_X = \mathbf{M}(X) = \begin{cases} \sum\limits_k x_k p_k \\ \text{если} \quad X \quad \text{— дискретная случайная величина} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx \\ \text{если} \quad X \quad \text{— непрерывная случайная величина} \end{cases}$$

45 Дисперсия случайной величины

Дисперсией случайной величины X называется неотрицательное число

$$D_X = \mathbf{M}\left((X - m_X)^2\right) = \begin{cases} \sum\limits_k (x_k - m_X)^2 p_k \\ \text{если} \quad X \quad \text{— дискретная случайная величина} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f_X(x)\,dx \\ \text{если} \quad X \quad \text{— непрерывная случайная величина} \end{cases}$$

46 Среднеквадратичное отклонение случайной величины

Среднеквадратичным отклонением случайной величины X называется неотрицательное число $\sigma_X = \sqrt{D_X}$.

47 Распределение Бернулли

Дискретная случайная величина X называется распределенной по *закону Бернулли с параметром* $p \in (0,1)$, если ее возможные значения равны $0, 1, 2, \ldots, n$, а соответствующие вероятности определяются формулой

$$\mathbf{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

48 Распределение Пуассона

Дискретная случайная величина X называется распределенной по *закону Пуассона с параметром* $\lambda > 0$, если ее возможные значения равны $0, 1, 2, \ldots$, а соответствующие вероятности определяются формулой

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

49 Равномерный закон распределения

Непрерывная случайная величина X называется распределенной *равномерно на отрезке* $[a, b]$, если ее плотность распределения вероятностей постоянна на данном отрезке

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad x \notin [a, b] \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{если} \quad x \in [a, b] \end{cases}$$

50 Показательный закон распределения

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по *показательному закону с параметром* $\lambda > 0$, если ее плотность распределения вероятностей задается формулой

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad x \leqslant 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{если} \quad x > 0 \end{cases}$$

51 Нормальный закон распределения

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по *нормальному (гауссовскому) закону с параметрами* $m \in \mathbb{R}$ *и* $\sigma > 0$, если плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

52 Функция случайной величины

Если каждому возможному значению случайной величины X по определенному правилу φ поставлено в соответствии одно возможное значение случайной величины Y, то Y называется *функцией случайной величины* X.

53 Математическое ожидание функции случайной величины

Если X — дискретная или непрерывная случайная величина с известным законом распределения и $Y = \varphi(X)$ — функция случайной величины, то *математическое ожидание* Y может быть найдено по формуле

$$m_Y = \mathbf{M}(Y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_k \varphi(x_k)\mathbf{P}(X = x_k) \\ \text{если} \quad X \quad \text{— дискретная случайная величина} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(x)\, dx \\ \text{если} \quad X \quad \text{— непрерывная случайная величина} \end{cases}$$

54 Дисперсия функции случайной величины

Если X — дискретная или непрерывная случайная величина с известным законом распределения и $Y = \varphi(X)$ — функция случайной величины, то *дисперсия* Y может быть найдена по формуле

$$D_Y = \mathbf{M}\left((Y - m_Y)^2\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_k (\varphi(x_k) - m_Y)^2 \mathbf{P}(X = x_k) \\ \text{если} \quad X \quad \text{— дискретная случайная величина} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) - m_Y)^2 f_X(x)\, dx \\ \text{если} \quad X \quad \text{— непрерывная случайная величина} \end{cases}$$

55 Корреляционный момент

Корреляционный момент (или *ковариация*) двух случайных величин X и Y обозначается через K_{XY} или $\mathrm{cov}(X, Y)$ и вычисляется по формуле

$$K_{XY} = \mathrm{cov}(X, Y) = \mathbf{M}\left((X - m_X)(Y - m_Y)\right)$$

56 Свойства математического ожидания

1) Для любых случайных величин X, Y и постоянных a, b, c справедливо равенство

$$\mathbf{M}\left(aX + bY + c\right) = a\mathbf{M}(X) + b\mathbf{M}(Y) + c$$

2)

$$\mathbf{M}(XY) = \mathbf{M}(X)\mathbf{M}(Y) + K_{XY}$$

57 Свойства дисперсии

1) Для любых случайных величин X, Y и постоянных a, b, c справедливо равенство

$$\mathbf{D}\left(aX + bY + c\right) = a^2\mathbf{D}(X) + b^2\mathbf{D}(Y) + 2abK_{XY}$$

2)
$$\mathbf{D}(XY) = \mathbf{D}(X)\mathbf{D}(Y) + m_X^2\mathbf{D}(Y) + m_Y^2\mathbf{D}(X)$$

58 Закон распределения функции дискретной случайной величины

Если X — дискретная случайная величина и $Y = \varphi(X)$, то Y — также дискретная случайная величина, причем ее возможные значения $y_k = \varphi(x_k)$. Если все y_k различны, то $\mathbf{P}(Y = y_k) = \mathbf{P}(X = x_k)$. Если же среди y_k имеются одинаковые значения, то

$$\mathbf{P}(Y = y_k) = \sum_{i:\, \varphi(x_i) = y_k} \mathbf{P}(X = x_i)$$

т.е. необходимо сложить вероятности тех значений x_i, для которых $\varphi(x_i) = y_k$.

59 Закон распределения функции непрерывной случайной величины

Если X — непрерывная случайная величина и $Y = \varphi(X)$, причем $\varphi(x)$ — монотонная непрерывно дифференцируемая функция, то Y — также непрерывная случайная величина, причем

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(Y < y) = \int\limits_{-\infty}^{\varphi^{-1}(y)} f_X(x)\, dx$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = f_X\left(\varphi^{-1}(y)\right)\left|\frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}\right|$$

где $\varphi^{-1}(y)$ — обратная функция к $\varphi(x)$.

60 Первое неравенство Чебышева

Если случайная величина X имеет конечный первый абсолютный момент $\mathbf{M}(|X|)$, то $\forall\epsilon > 0$

$$\mathbf{P}(|X| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{\mathbf{M}(|X|)}{\epsilon}$$

61 Второе неравенство Чебышева

Если случайная величина X имеет конечный второй момент $\mathbf{M}\left(X^2\right)$, то $\forall\epsilon > 0$

$$\mathbf{P}(|X - m_X| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{D_X}{\epsilon^2}$$

62 Сходимость по вероятности

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ называется *сходящейся по вероятности при $n \to \infty$ к случайной величине X* (краткое обозначение $X_n \xrightarrow{p} X$ при $n \to \infty$), если $\forall\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X_n - X| \geqslant \epsilon) = 0$$

63 Закон больших чисел (теорема Чебышева)

Если случайные величины в последовательности $X_1, X_2, \ldots$ попарно независимы, а их дисперсии удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}(X_k) = 0$$

то $\forall\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(X_k)\right|\right) = 0$$

64 Генеральная совокупность

Совокупность всех подлежащих изучению объектов или возможных результатов всех мыслимых наблюдений, проводимых в неизменных условиях над одним объектом, называется *генеральной совокупностью*.

65 Выборочная совокупность (выборка)

Выборочной совокупностью (выборкой) называется совокупность объектов, отобранных случайным образом из генеральной совокупности.

66 Реализация выборки

Конкретные значения выборки, полученные в результате наблюдений, называют *реализацией выборки*.

67 Вариационный ряд

Операция расположения значений случайной величины по неубыванию называется *ранжированием* статистических данных. Полученная таким образом последовательность значений случайной величины называется *вариационным рядом.*

68 Частоты вариант

Числа n_k, показывающие, сколько раз встречаются варианты x_k в ряде наблюдений, называются *частотами*, а их отношение к объему выборки — *относительными частотами* p_k^*, т.е.

$$p_k^* = \frac{n_k}{n}, \qquad \text{где} \qquad n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

69 Статистический ряд

Перечень вариантов и соответствующих им частот называется *статистическим рядом.*

70 Эмпирическая (статистическая) функция распределения

Эмпирической (статистической) функцией распределения называется функция $F_n^*(x)$, определяющая для каждого значения x относительную частоту события $\{X < x\}$

$$F_n^*(x) = p^*(X < x)$$

Для нахождения значений эмпирической функции удобно $F_n^*(x)$ записать в виде

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

где n — объем выборки, n_x — число наблюдений, меньших x.

71 Выборочное среднее

Пусть $\{x_i, n_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ — статистическое распределение выборки объема n. *Выборочным средним* $\overline{x}_\text{В}$ называется среднее арифметическое всех значений выборки

$$\overline{x}_\text{В} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i^*$$

72 Выборочная дисперсия

Пусть $\{x_i, n_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ — статистическое распределение выборки объема n. *Выборочной дисперсией* $\overline{\mathbf{D}}_{\text{В}}$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочной средней $\overline{x}_{\text{В}}$, т.е.

$$\overline{\mathbf{D}}_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x}_{\text{В}})^2 \cdot n_i = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x}_{\text{В}})^2 \cdot p_i^*$$

73 Выборочная среднее квадратическое отклонение

Выборочное среднее квадратическое отклонение выборки определяется формулой

$$\sigma_{\text{В}} = \sqrt{\overline{\mathbf{D}}_{\text{В}}}$$

где $\overline{\mathbf{D}}_{\text{В}}$ — выборочная дисперсия выборки.

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007-2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики - крупнейшая в Санкт-Петербургском государственном университете информационных технологий, механики и оптики. С момента основания на ней работали такие выдающиеся ученые, как И.П.Натансон, В.А.Тартаковский, В.Н.Попов, И.А.Молотков, А.Г.Аленицын, В.В.Жук и другие. Научные интересы сотрудников покрывают практически все разделы математики. На кафедре сложилась мощная научная школа по математическому моделированию сложных физических систем. В последнее время активно развивается направление, связанное с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовым компьютером и квантовыми коммуникациями. Сотрудники кафедры активно участвуют в международных научных конференциях, работают в рамках Российских и международных научных проектов. Сложилось тесное научное сотрудничество с Санкт-Петербургским государственным университетом, Петербургским отделением Математического института имени В.А.Стеклова РАН, лабораторией физикохимии наносистем Института химии силикатов РАН и другими научными центрами как в России, так и за рубежом: университетами Марселя и Тулона (Франция), Ювяскиля (Финляндия), Гумбольдтовским университетом Берлина (Германия).

Александр Петрович Танченко
Юлия Валерьевна Танченко

Справочное пособие по высшей математике для второго курса

В авторской редакции

Компьютерный набор и верстка	А.П. Танченко
Дизайн обложки	А.П. Танченко

Редакционно-издательский отдел СПбГУ ИТМО

Зав. РИО	Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД	№ 00408 от 05.11.99
Подписано к печати	Заказ № 2033
	Отп. на ризографе

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского государственного
университета информационных
технологий, механики и оптики
197101, Санкт-Петербург,
пр. Кронверкский, д.49