

1 ЛИНЕЙНЫЕ ДВОИЧНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ДИСКРЕТНОЙ АВТОМАТИКИ

1.2. Аппарат передаточных функций в задаче модельного представления линейных двоичных динамических систем

Двоичные динамические системы (ДДС), интегрированные в некоторую техническую среду приема, хранения, обработки и передачи двоичной информации, при выполнении конкретных функций решают в основном задачи преобразования кодов, элементы которых принадлежат простому полю Галуа $GF(p) = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, которое при $p = 2$ принимает вид $GF(2) = \{0, 1\}$ [15, 29, 42, 55]. Преобразуемые коды могут быть представлены тремя основными способами: в виде вектора, не параметризованного дискретным временем; в виде кодовой последовательности (скалярной или векторной), параметризованной дискретным временем, и в виде модулярных многочленов (ММ) [15, 55]. Если процесс преобразования кода, поданного на вход ДДС, в код, наблюдаемый на ее выходе, осуществляется с помощью линейной композиции результатов линейных операций умножения и суммирования по модулю два, то такая двоичная динамическая система является линейной (ЛДДС). Если при этом основной результат преобразования кодов с помощью ЛДДС фиксируется на ее выходе и входе, то описание функционирования такой ЛДДС может быть задано в классе модельных представлений «вход – выход».

Одним из конструктивных средств задания модельного представления «вход – выход» над бесконечными и конечными полями является аппарат передаточных функций (матриц). В основе методологии аппарата передаточных функций (матриц) лежит алгебраизация отношения «вход – выход», которое для непрерывных систем над бесконечным полем осуществляется с помощью преобразования Лапласа, для дискретных систем над бесконечным полем – с помощью Z -преобразования, а для дискретных систем над конечным простым полем Галуа $GF(p)$, частным случаем которых при $p = 2$ являются ЛДДС, – с помощью D -преобразования кодовых последовательностей и модулярных многочленов (см. Приложение).

Передаточная функция, записанная в виде отношения двух полиномов, представляет собой решение графа [46], к которому может быть применено правило Мейсона некасающихся контуров в инверсной постановке. Суть инверсного использования правила Мейсона [25, 46] состоит в воссоздании класса графов с вложенными (касающимися) контурами минимальной размерности, эквивалентных в смысле решений этих графов в форме передаточной функции отношения «вход – выход». Построенный класс графов образует множество возможных структурных представлений ЛДДС, которые могут быть положены в основу схемотехнических реализаций двоичных динамических систем, решающих заданную задачу преобразования кодов.

Возможности аппарата передаточных функций (матриц) в задаче модельного представления ЛДДС рассмотрим, опираясь на систему определений и утверждений.

Определение 1.1 (О1.1). λ -мерной двоичной кодовой последовательностью

$$f(k): f(0), f(1), f(2), \dots, f(k), \dots \quad (1.1)$$

будем называть параметризованный дискретным временем k , выраженным в числе k тактов длительностью Δt , векторный кортеж [29], компоненты которого $f(k)$ для $\forall k$ представляют собой λ -мерные векторы, элементы которых принадлежат простому полю Галуа $GF(p)|_{p=2} = \{0, 1\}$. \square

Если в (1.1) размерность λ компонентов равна единице, то последовательность $f(k)$ является скалярной или одномерной.

Кодовая последовательность (1.1) может быть конечной по времени и периодической, если выполняется равенство

$$f(k) = f(k + T), \quad (1.2)$$

где T – период периодической последовательности.

Определение 1.2 (О1.2). D -образом $F(d)$ двоичной кодовой последовательности (1.1) в силу прямого D -преобразования (см. Приложение) называется сходящаяся бесконечная сумма

$$F(d) = D\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)d^k. \square \quad (1.3)$$

Введем теперь в рассмотрение передаточные матрицы и функции линейной ДДС.

Определение 1.3 (О1.3). Пусть ЛДДС преобразует r -мерную входную двоичную кодовую последовательность (ДКП) $u(k)$ в m -мерную выходную ДКП $y(k)$, тогда передаточной матрицей $\Phi(d)$

этой ЛДДС называется матрица, связывающая D -образ $Y(d)$ выходной ДКП $y(k)$ с D -образом $U(d)$ входной ДКП $u(k)$ при нулевом начальном состоянии ЛДДС в силу соотношения

$$\Phi(d) = \arg \{ Y(d) = \Phi(d)U(d), \quad Y(d), U(d) - \text{fix} \} \quad (1.4)$$

Введем в рассмотрение (i, j) -й сепаратный канал ДДС, который связывает ее i -й выход $Y_i(k)$ с j -м входом $U_j(k)$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, r}$). Тогда (i, j) -й сепаратный канал ЛДДС может быть описан передаточной функцией $\Phi_{ij}(d)$, задаваемой определением.

Определение 1.4 (О1.4). *Передаточной функцией (i, j) -го сепаратного канала $\Phi_{ij}(d)$ ЛДДС называется отношение $Y_i(d)$ – D -образа выходной ДКП $y_i(k)$, наблюдаемой на i -м выходе системы и $U_j(d)$ – D -образа входной двоичной кодовой последовательности $u_j(k)$, поданной на j -й вход линейной ДДС, полученное при нулевом начальном состоянии ЛДДС:*

$$\Phi_{ij}(d) \stackrel{\Delta}{=} \frac{Y_i(d)}{U_j(d)}. \quad (1.5)$$

Нетрудно видеть, что $\Phi_{ij}(d)$ является (i, j) -м компонентом передаточной матрицы $\Phi(d)$ (1.4). Таким образом становится справедливым положение следующего утверждения.

Утверждение 1.1 (У1.1). *Передаточная матрица $\Phi(d)$ (1.4) линейной ДДС, осуществляющей преобразование r -мерной кодовой последовательности $u(k)$ в m -мерную кодовую последовательность $y(k)$, имеющих представление*

$$u(k) = \text{col} \{ u_j(k), j = \overline{1, r} \}; \quad y(k) = \text{col} \{ y_i(k), i = \overline{1, m} \}, \quad (1.6)$$

представляет собой $(m \times r)$ -матрицу, составленную из передаточных функций $\Phi_{ij}(d)$ (1.5) всех $(m \times r)$ ее (i, j) -х сепаратных каналов так, что становится справедливым представление

$$\Phi(d) = \text{row} \{ \text{col} [\Phi_{ij}(d); i = \overline{1, m}]; j = \overline{1, r} \}. \quad (1.7)$$

Если ЛДДС преобразует скалярную входную кодовую последовательность $u(k)$ в скалярную кодовую последовательность $y(k)$ так, что $r = m = 1$, то передаточная матрица (1.4) ЛДДС вырождается в передаточную функцию, задаваемую дивидендным выражением

$$\Phi(d) \triangleq \frac{Y(d)}{U(d)} = \frac{M(d)}{N(d)} = \frac{\sum_{i=0}^{\lambda} \alpha_i d^i}{\sum_{j=0}^m \beta_j d^j}, \quad \beta_0 = 1, \quad \square \quad (1.8)$$

где $M(d)$, $N(d)$ — модулярные многочлены (ММ) относительно переменной d , соответственно степеней λ и m .

Выделим теперь случай, когда входной и выходной коды задаются в форме модулярных многочленов

$$u(x) = u_\lambda x^\lambda + u_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + \mathbf{K} + u_1 x + u_0, \quad (1.9)$$

$$y(x) = y_m x^m + y_{m-1} x^{m-1} + \mathbf{K} + y_1 x + y_0, \quad (1.10)$$

где λ и m именуется степенями ММ $u(x)$ и $y(x)$; u_ν ($\nu = \overline{1, \lambda}$), y_μ ($\mu = \overline{1, m}$) принадлежат простому полю Галуа $GF(p)|_{p=2} = \{0, 1\}$, при этом приведение подобных при сложении и умножении модулярных многочленов производится по правилам сложения и умножения по модулю $p = 2$ ($\text{mod } p = \text{mod } 2$).

Процесс преобразования входного кода u , задаваемый ММ $u(x)$ (1.9) в выходной вектор y , задаваемый модулярным многочленом $y(x)$ (1.10), может быть так же описан с помощью передаточной функции $\Phi(d)$ вида (1.8), если будут сконструированы \mathbf{D} -образы $U(d)$ и $Y(d)$ модулярных многочленов $u(x)$ и $y(x)$ соответственно. \mathbf{D} -образ модулярного многочлена зависит от того, каким разрядом вперед организована в среде линейных ДДС передача (преобразование) модулярных многочленов.

Утверждение 1.2 (У1.2). *\mathbf{D} -образ модулярного многочлена*

$$f(x) = \sum_{k=n}^0 f_k x^k = f_n x^n + f_{n-1} x^{n-1} + \mathbf{K} + f_1 x + f_0, \quad (1.11)$$

$F(d) = \mathbf{D}\{f(x)\}$ при его передаче младшим разрядом вперед задается выражением

$$F(d) = \mathbf{D}\{f(x)\} = f(x)|_{x=d} = f_0 + f_1 d + \mathbf{K} + f_{n-1} d^{n-1} + f_n d^n \quad \square \quad (1.12)$$

Доказательство утверждения состоит в формировании последовательности

$$f(k): f_0, f_1, \mathbf{K}, f_{n-1}, f_n, \quad (1.13)$$

с последующим применением к (1.13) прямого \mathbf{D} -преобразования. ■

Утверждение 1.3 (У1.3). *\mathbf{D} -образ модулярного многочлена*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f_k x^k \quad (1.14)$$

$F(d) = \mathbf{D}\{f(x)\}$ при его передаче старшим разрядом вперед задается выражением

$$F(d) = \mathbf{D}\{f(x)\} = \tilde{f}(x^{-1})|_{x^{-1}=d} = \\ = f_n + f_{n-1}d + \mathbf{K} + f_1d^{n-1} + f_0d^n ; \quad \tilde{f}(x^{-1}) = x^{-n}f(x) \quad \square \quad (1.15)$$

Доказательство утверждения строится на формировании последовательности

$$\tilde{f}(k): \quad f_n, f_{n-1}, \mathbf{K}, f_1, f_0, \quad (1.16)$$

с последующим применением к (1.16) прямого \mathbf{D} -преобразования. ■

Заметим, что в современных устройствах дискретной автоматики (УДА) преобразование кодов, заданных с помощью модулярных многочленов, осуществляется старшим разрядом вперед.

Отмеченное выше позволяет ввести следующее определение.

Определение 1.5 (О1.5). *ЛДДС, осуществляющая преобразование входного кода, заданного с помощью модулярного многочлена $u(x)$ (1.9), в выходной код, заданного с помощью модулярного многочлена $y(x)$ (1.10), может быть описана передаточной функцией вида (1.8), в которой \mathbf{D} -образы $Y(d)$ и $U(d)$ вычисляются в силу (1.15). □*

Отдельного рассмотрения требует вопрос конструирования передаточной функции ДДС в случае, если ставится задача синтеза устройства умножения или деления модулярных многочленов. В данной постановке передаточная функция $\Phi(d)$ ДДС, осуществляющей умножение ММ $a(x)$ и $b(x)$, будет определяться в силу правила

$$\Phi(d) = \arg\{(a(d) \vee b(d)) \& \deg \Phi(d) = \\ = \min\{\deg a(d), \deg b(d)\}\} \quad (1.17)$$

В случае, когда ставится задача конструирования ДДС, осуществляющей деление модулярного многочлена $a(x)$ и ММ $b(x)$ в форме $\frac{a(x)}{b(x)}$, то передаточная функция $\Phi(d)$ ДДС будет иметь вид

$$\Phi(d) = \frac{1}{b(d)}. \quad (1.18)$$

Представленные положения своей целью имеют получение структурного представления ЛДДС для последующей ее технической реализации или структурно-функционального анализа. Получить структурное представление ЛДДС с использованием понятия передаточной функции (матрицы) позволяют положения следующего утверждения.

Утверждение 1.4 (У1.4). *Структура модельного представления ЛДДС, описываемой передаточной функцией вида (1.8) с единичным свободным членом знаменателя, может быть построена с использованием правила некасающихся контуров метода Мейсона, в соответствии с которым она выразится в форме касающихся (вложенных*

друг в друга) контуров, передаточные функции которых заданы мультипликативной структурой из постоянного коэффициента α_i и соответствующей степени i переменной d знаменателя передаточной функции так, что их число не превышает t , а число прямых ветвей от входа к выходу этой реализации определяется числом ненулевых элементов числителя передаточной функции с передаточными функциями ветвей $\beta_i d^i$, число которых не превышает $t + 1$. \square

Доказательство утверждения можно найти в литературе по теории графов, например, в [25]. \blacksquare

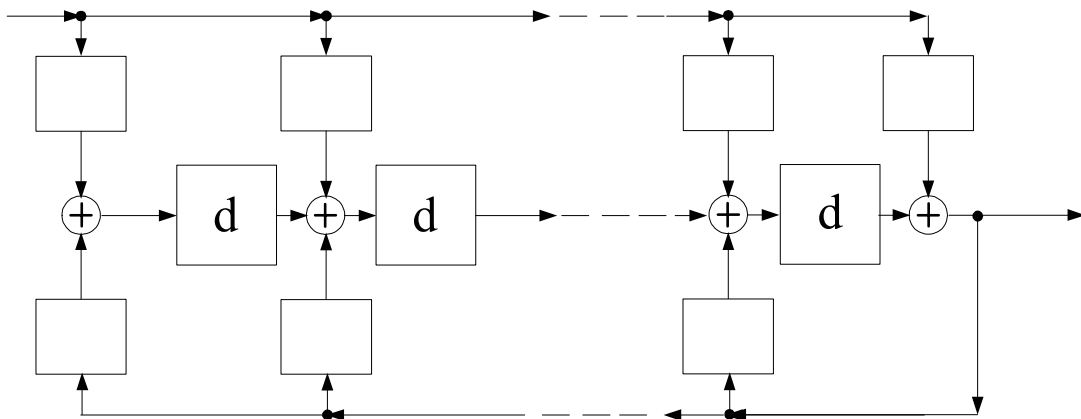


Рисунок 1.1. Представление ЛДДС в каноническом управляемом базисе

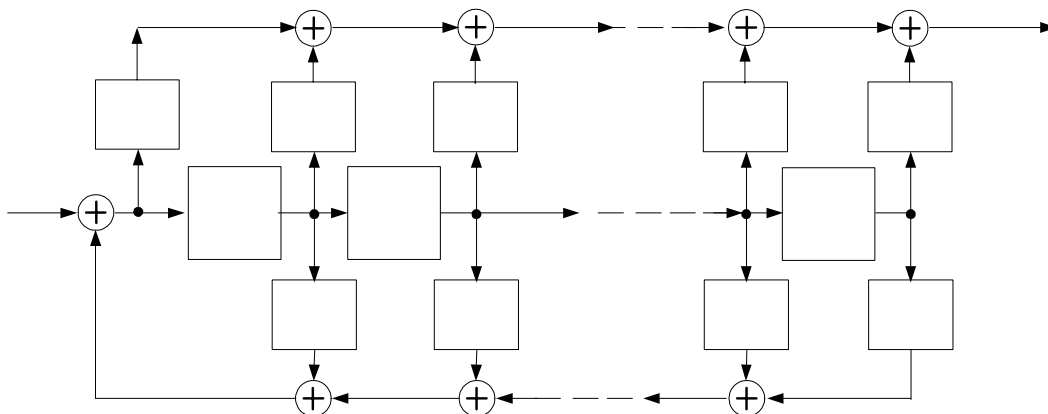


Рисунок 1.2. Представление ЛДДС в каноническом наблюдаемом базисе

Таким образом, положения У1.4 дают два канонически сложившихся модельных представления [25] ЛДДС, описываемых передаточной функцией вида (1.8), приведенных на рисунках 1.1 и 1.2.

Элементы d модельных представлений, показанных на рисунке 1.1 и 1.2, имеют смысл, который *и (k)* раскрывают положения следующего утверждения.

Утверждение 1.5 (У1.5). Элемент памяти, передаточная функция $\Phi_{\text{ЭП}}(d)$ которого имеет представление

$$\Phi_{\text{ЭП}}(d) = d, \quad (1.19)$$

является \mathbf{D} -триггером. \square

Доказательство утверждения строится на понятии \mathbf{D} -триггера и свойстве \mathbf{D} -преобразования для сдвинутой ДКП (см. Приложение). Из теории элементов дискретной автоматики известно, что \mathbf{D} -триггер представляет собой элемент памяти (ЭП), реализующий задержку выходной $y(k)$ ДКП на один такт относительно входной $u(k)$ ДКП так, что $u(k) = y(k+1)$. Если теперь воспользоваться свойством \mathbf{D} -преобразования для сдвинутой ДКП, то получим:

$$d^{-1}Y(d) = U(d),$$

откуда для $\Phi_{\text{ЭП}}(d)$ будем иметь:

$$\Phi(d) \stackrel{\Delta}{=} \frac{Y(d)}{U(d)} = \frac{Y(d)}{d^{-1}Y(d)} = d. \blacksquare$$

Положения раздела позволяют сформировать следующий алгоритм конструирования передаточной функции и построения структурного представления соответствующей ЛДДС.

Алгоритм 1.1 (А1.1)

0. Классифицировать задачу кодопреобразования: в форме ЛДДС, преобразующей входную последовательность в выходную, или в форме ЛДДС, осуществляющей умножение/деление ММ. Если рассматриваемая задача соответствует первому случаю, то продолжить выполнение алгоритма с п.1, если второму – с п.6 алгоритма.
1. Задать преобразуемый (входной) двоичный код в форме двоичной кодовой последовательности $u(k)$ или модулярного многочлена $u(x)$.
2. Задать выходной двоичный код в форме ДКП $y(k)$ или ММ $y(x)$.
3. Вычислить $U(d)$ \mathbf{D} -образ $u(k)$ или $u(x)$.
4. Вычислить $Y(d)$ \mathbf{D} -образ $y(k)$ или $y(x)$.
5. Сконструировать передаточную функцию $\Phi(d)$ синтезируемой ЛДДС в форме (1.8) и перейти к выполнению п.7 алгоритма.

6. В случае конструирования ЛДДС, осуществляющую умножение ММ, вычислить ее передаточную функцию $\Phi(d)$ в силу (1.17). В случае конструирования ЛДДС, осуществляющую деление ММ, то вычислить ее передаточную функцию $\Phi(d)$ в силу (1.18).
7. С помощью правила Мейсона некасающихся контуров построить структурные представления передаточной функции $\Phi(d)$ в канонических структурных формах [25].
8. Сравнить реализации по векторному показателю сложности (ВПС) с компонентами, учитывающими число элементов памяти с передаточной функцией $\Phi_{ЭП}(d)=d$, число элементов двухвходового суммирования по mod2, число точек ветвления пространства сигналов, число ветвей.
9. Принять к реализации одну из структур (с меньшей нормой ВПС). Осуществить схемотехническую реализацию принятой версии ЛДДС. ■

Пример 1.1 (Пр1.1)

В качестве примера рассматривается линейная ДДС, преобразующая входную единичную последовательность $u(k)=1(k)$ в периодическую периода $T=7$, обеспечивающую размещение в регистре хранения информационных разрядов кода Хэмминга (7,4).

0. Выполним п.0 алгоритма **1.1**, в соответствии с которым продолжим выполнение алгоритма с п.1.

1. Зададим преобразуемый (входной) двоичный код в форме двоичной кодовой последовательности $u(k)$:

$$u(k) = 1(k) = 1111111 \ 1111111 \text{К}$$

2. В соответствии с расположением информационных разрядов в кодах Хэмминга (7,4) зададим выходной двоичный код в форме ДКП $y(k)$:

$$y(k) = 1110100 \ 1110100 \text{К} \ 1110100 \text{К} .$$

3. Используя прямое **D**-преобразование (П1.1), вычислим $U(d)$ **D**-образ преобразуемой (входной) кодовой последовательности $u(k)$ в результате чего получим:

$$U(d) = \mathbf{D} \{u(k)\} = \frac{1}{1+d}.$$

4. Аналогично п.3 вычислим $Y(d)$ **D**-образ выходной ДКП $y(k)$:

$$Y(d) = \mathbf{D}\{y(k)\} = \frac{1 + d + d^2 + d^4}{1 + d^7}.$$

5. Сконструируем передаточную функцию синтезируемой ЛДДС в форме (1.8) и перейдем к выполнению п.7 алгоритма.

$$\Phi(d) = \frac{Y(d)}{U(d)} = \frac{(1 + d + d^2 + d^4)(1 + d)}{1 + d^7} = \frac{1 + d^3 + d^4 + d^5}{1 + d^7}.$$

7. С помощью правила Мейсона некасающихся контуров построим структурные представления передаточной функции $\Phi(d)$ в канонических структурных формах (рисунок 1.3, рисунок 1.4).

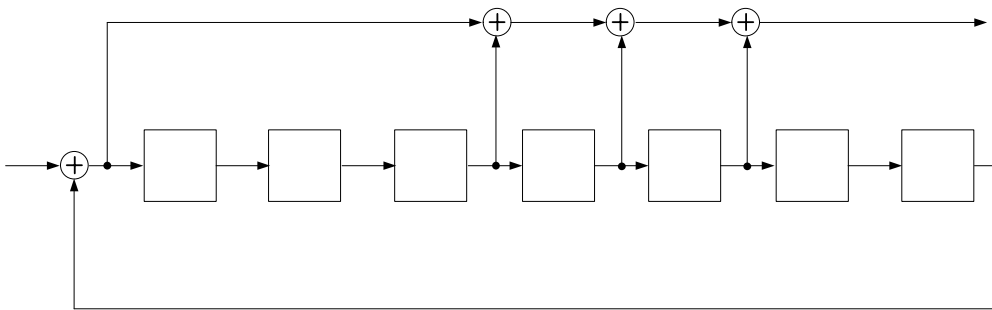


Рисунок 1.3

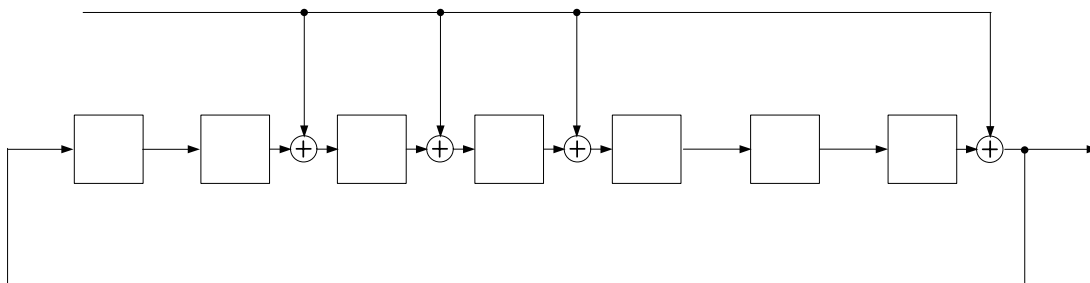


Рисунок 1.4

8. В соответствии с п.7 алгоритма при выбранной элементной базе технической реализации ДДС выполним сравнение полученных в п.7 модельных представлений ЛДДС по векторному показателю сложности, которое обнаруживает их идентичность. ■

Пример 1.2 (Пр1.2)

Рассматривается задача конструирования линейной ДДС, осуществляющей деление произвольной входной ДКП (задаваемой в виде ММ $u(x)$) на неприводимый многочлен $\beta(x) = x^3 + x + 1$ с учетом передачи ДКП старшим разрядом вперед.

0. Выполним п.0 алгоритма **1.1**, в соответствии с которым продолжим выполнение алгоритма с п.6.

6. Сконструируем передаточную функцию синтезируемой ЛДДС в форме (1.17) с учетом передачи ДКП старшим разрядом вперед:

$$\tilde{f}(x^{-1}) = x^3(1 + x^{-2} + x^{-3});$$

$$\beta(d) = \mathbf{D}\{\beta(x)\} = \tilde{\beta}(x^{-1})|_{x^{-1}=d} = 1 + d^2 + d^3;$$

$$\Phi(d) = \frac{1}{\beta(d)} = \frac{1}{1 + d^2 + d^3}.$$

7. С помощью правила Мейсона некасающихся контуров построим структурные представления полученной передаточной функции $\Phi(d)$ в канонических структурных формах (см. рисунок 1.5, рисунок 1.6):

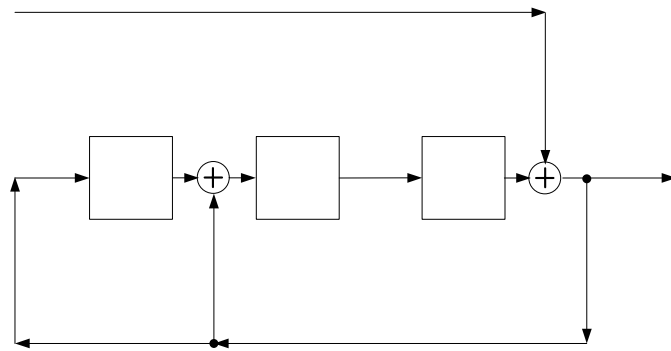


Рисунок 1.5

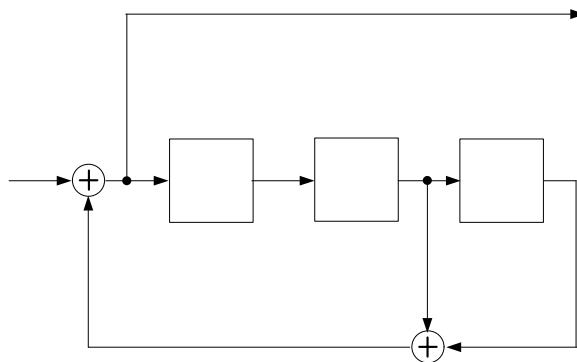


Рисунок 1.6

1.3. Векторно-матричное модельное представление линейных двоичных динамических систем, параметризованное дискретным временем

Общесистемные тенденции к расширению банка модельных представлений динамических систем над бесконечными и конечными полями [3, 9, 15, 29] привели разработчиков теории систем к достаточно универсальной модельной среде (МС), которая опирается на триаду «вход–состояние–выход» (ВСВ). Применительно к двоичным динамическим системам модель ВСВ последних имеет вид

$$\text{ДДС} : \{ u, x, y, k, \lambda, \delta \} \quad (1.20)$$

где u – r -мерный вектор входной последовательности; x – n -мерный вектор состояния ДДС; y – m -мерный вектор выходной последовательности; k – счетное множество моментов кодопреобразования, осуществляемого ДДС; λ – правило перехода ДДС из исходного состояния $x(k)$ в состояние перехода $x(k+1)$ под действием вектора входной последовательности $u(k)$; δ – правило выхода, описывающее процесс формирования элементов выходной последовательности $y(k)$ на переходе из состояния $x(k)$ под действием $u(k)$ или как функции только состояния $x(k)$.

Введем в рассмотрение следующее определение.

Определение 1.6 (О1.6). *Каноническим представлением «вход–состояние–выход» произвольной двоичной динамической системы (1.20) называется ее представление в виде двух векторных выражений*

$$x(k+1) = \lambda[x(k), u(k)], \quad (1.21)$$

$$y(k) = \delta[x(k), u(k)]. \quad \square \quad (1.22)$$

Векторное модельное описание ВСВ (1.21), (1.22) произвольной ДДС имеет структурное представление, приведенное на рисунке 1.7.

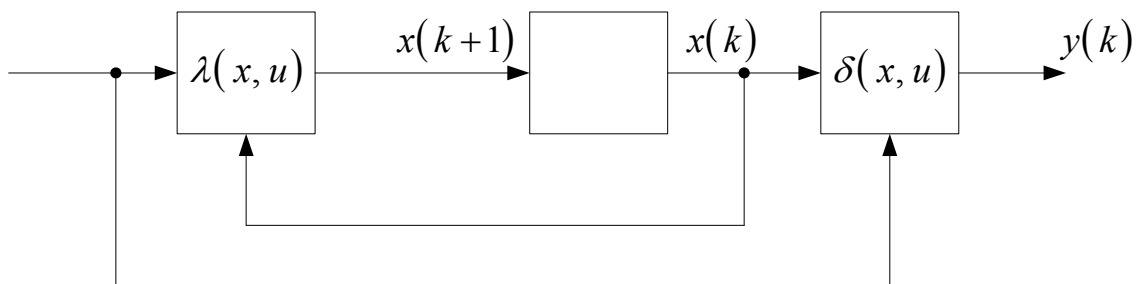


Рисунок 1.7. Структурное представление произвольной ДДС

На рисунке 1.7 ЭЗ – элемент задержки на один такт кодопреобразования образует блок памяти (БП); блоки $\lambda(x, u)$, $\delta(x, u)$ образуют комбинационную схему (КСХ) произвольной ДДС.

Определение 1.7 (О1.7). Если правило перехода $\lambda(x, u)$ и правило выхода $\delta(x, u)$ ДДС (1.21), (1.22) допускают представление в виде композиции линейных операций умножения матрицы на вектор и суммирования в рамках правил модулярной арифметики по модулю $p = 2$ так, что (1.21) и (1.22) принимают вид

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0); \quad (1.23)$$

$$y(k) = Cx(k) + Hu(k), \quad (1.24)$$

то такая ДДС называется линейной. В (1.21), (1.22) A – $(n \times n)$ –матрица состояния, B – $(n \times r)$ –матрица входа, C – $(n \times t)$ –матрица выхода, H – $(t \times r)$ –матрица вход-выход ДДС, $x(0)$ – начальное состояние ДДС. □

Краткости ради представление (1.23), (1.24) ЛДДС будем называть ее (A, B, C, H) –матричным представлением.

Линейное векторно-матричное представление (1.23), (1.24) двоичной динамической системы имеет структурный графический аналог, приведенный на рисунке 1.8. На рисунке 1.8 ЭЗ – элемент задержки, который образует БП ЛДДС, а блоки с матричными коэффициентами передачи B, A, C, H и сумматоры по модулю $p = 2$ образуют комбинационную схему линейной ДДС.

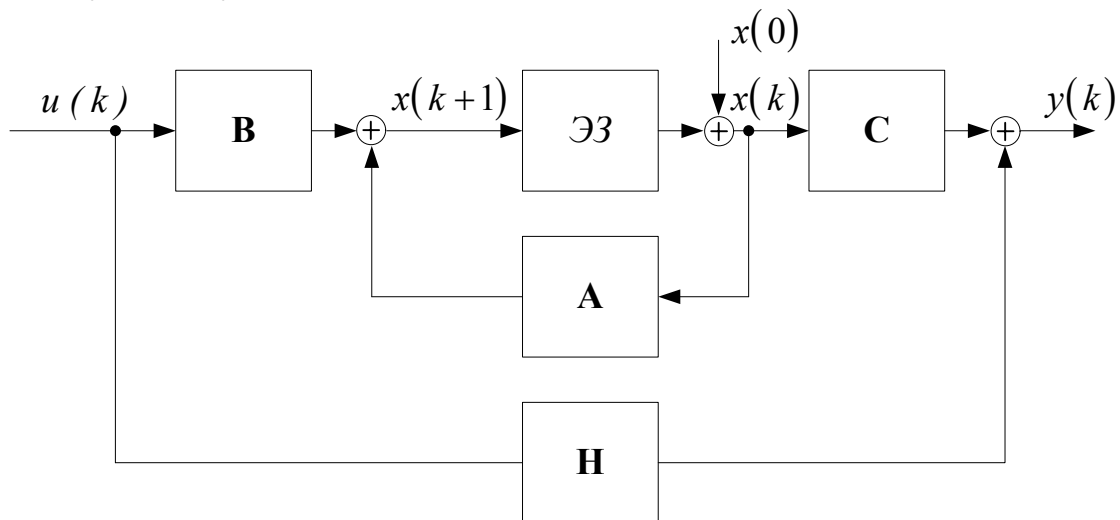


Рисунок 1.8. Структурное представление векторно-матричной модели (1.23), (1.24) ЛДДС

Векторно-матричное представление (ВМП) (1.23), (1.24) линейной ДДС называется рекуррентным, наряду с которым существует и суммарное ВМП ЛДДС. Суммарное векторно-матричное представление линейной ДДС введем с помощью утверждения.

Утверждение 1.6 (У1.6). Суммарное векторно-матричное представление ЛДДС (1.23), (1.24) задается соотношениями

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i), \quad (1.25)$$

$$y(k) = C A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} C A^{k-1-i} B u(i) + u(k) \quad \square \quad (1.26)$$

Доказательство утверждения строится с использованием рекуррентного соотношения (1.23), которое для первых трех тактов позволяет записать

$$x(1) = A x(0) + B u(0);$$

$$x(2) = A x(1) + B u(1) = A^2 x(0) + A B u(0) + B u(1);$$

$$x(3) = A x(2) + B u(2) = A^3 x(0) + A^2 B u(0) + A B u(1) + B u(2);$$

Полученная база индукции для любого момента k делает справедливым представление

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i), \quad (1.27)$$

Второе соотношение суммарной ВМП ЛДДС в форме (1.26) получается подстановкой (1.27) в (1.24). ■

Соотношение (1.27) допускает модификацию, обнаруживающую динамическое преимущество моделей ВСВ над моделями «вход-выход», коими являются передаточные функции двоичных динамических систем. Модифицированное представление суммарной ДДС зададим с помощью утверждения.

Утверждение 1.7 (У1.7). Суммарная модель (1.27) процессов по вектору состояния линейной ДДС допускает представление

$$x(k) = A^k x(0) = W_y(k) U(k), \quad (1.28)$$

где

$$U(k) = [u^T(k-1), u^T(k-2), \dots, u^T(1), u^T(0)]^T \quad (1.29)$$

$$W_y(k) = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{k-1} B], \quad (1.30)$$

при этом $U(k)$ именуется «вектором стратегии» перевода ЛДДС из начального состояния $x(0)$ в желаемое состояние $x(k)$ за k -тактов, а матрица $W_y(k)$ (1.30) именуется матрицей управляемости линейной двоичной динамической системы за k -тактов. □

Доказательство утверждения строится на представлении выражения (1.27) в форме

$$x(k) + A^k x(0) = B u(k-1) + A B u(k-2) + A^2 B u(k-3) + \dots + K + A^{k-2} B u(1) + A^{k-1} B u(0) \quad (1.31)$$

Выражение (1.31) путем введения агрегированных матрицы и вектора в правой части позволяет записать

$$\begin{aligned} x(k) + A^k x(0) &= \\ &= [B \mid AB \mid K \mid A^{k-1} B] [u^T(k-1), u^T(k-2), \dots, u^T(1), u^T(0)]^T \end{aligned} \quad (1.32)$$

Введение обозначений (1.29), (1.30) приводит (1.32) к виду (1.28). ■

Представление (1.28) позволяет сформулировать критерий управляемости линейной ДДС с индексом управляемости, равным k .

Утверждение 1.8 (У1.8). *Для того чтобы линейная ДДС (1.23), (1.24) была полностью управляемой с индексом управляемости [29] равным k , то есть за k тактов линейная двоичная система могла быть переведена из любого начального состояния $x(0)$ в любое конечное состояние необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\text{rank } W_y(k) = n = \dim x. \quad \square \quad (1.33)$$

Доказательство утверждения строится на том, что выполнение равенства (1.33) является необходимым условием обратимости матрицы $W_y(k)$, то есть существование $W_y^{-1}(k)$. Но если это так, то это условие становится достаточным для вычисления «вектора стратегии» управления $U(k)$ на основе (1.28), записываемого в форме

$$U(k) = W_y^{-1}(k) (x(k) + A^k x(0)) \quad (1.34)$$

для любых $x(k)$ и $x(0)$. ■

Условие полной управляемости с индексом $k < n = \dim x$ является достаточно жестким, более мягкой формой является условие полной управляемости с индексом $n = \dim x$, которое принимает вид

$$\text{rank } W_y(n) = \text{rank} [B \mid AB \mid K \mid A^{n-1} B] = n = \dim x. \quad \square \quad (1.35)$$

Соотношение (1.35) является условием полной управляемости, то есть управляемости за n тактов, при этом используется обозначение $W_y(n) = W_y$, где матрица

$$W_y = [B \mid AB \mid K \mid A^{n-1} B] \quad (1.36)$$

именуется матрицей управляемости ЛДДС (1.23), (1.24).

По аналогии с (1.32) может быть сконструировано векторно-матричное соотношение, позволяющее по результатам измерений на первых k тактах выходной последовательности $y(k)$ и входной последовательности $u(k)$ восстановить начальное состояние $x(0)$ линейной ДДС.

Утверждение 1.9 (У1.9). *Для того чтобы линейная ДДС (1.23), (1.24) была бы полностью наблюдаемой с индексом наблюдаемости k , то есть чтобы имелась возможность восстановить начальное состояние $x(0)$ за первые k тактов, необходимо и достаточно, чтобы*

матрица наблюдаемости $W_n(k)$ с индексом наблюдаемости k обладала рангом, равным $n = \dim x$, иначе чтобы выполнялось условие

$$\begin{aligned} \text{rank} \{W_n(n) = \text{col}[CA^i; i = \overline{0, k-1}]\} = \\ = [C | (CA)^T | (CA^2)^T | \dots | (CA^{k-1})^T]^T \} = n = \dim x. \square \end{aligned} \quad (1.37)$$

Доказательство утверждения строится на формировании измерений на первых k тактах в силу (1.24) и (1.27)

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= Cx(0) + Hu(0) \\ y(1) &= Cx(1) + Hu(1) = CAx(0) + CBu(0) + Hu(1) \\ y(2) &= Cx(2) + Hu(2) = CA^2x(0) + CABu(0) + CBu(1) + Hu(2) \\ \text{М} \\ y(k-1) &= Cx(k-1) + Hu(k-1) = CA^{k-1}x(0) + CA^{k-2}Bu(0) + \\ &\quad + CA^{k-3}Bu(1) + \dots + Hu(k-1) \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

Сформируем на основе (1.38) вектор измерения $z(k)$ с компонентами

$$z(k) = \begin{bmatrix} y(0) + Hu(0) \\ y(1) + CBu(0) + Hu(1) \\ y(2) + CABu(0) + CBu(1) + Hu(2) \\ \text{М} \\ y(k-1) + CA^{k-2}Bu(0) + CA^{k-3}Bu(1) + \dots + Hu(k-1) \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

Совместное использование представлений (1.38) и (1.39) позволяет записать

$$z(k) = \text{col}[CA^i; i = \overline{0, k-1}]x(0) = W_n(k)x(0). \quad (1.40)$$

Выполнение условия (1.37) является необходимым для обратимости матрицы наблюдаемости с индексом k $W_n(k)$, а существование матрицы $W_n^{-1}(k)$ является достаточным для вычисления вектора начального состояния ЛДДС $x(0)$ в силу (1.40) в форме

$$x(0) = W_n^{-1}(k)z(k). \quad \blacksquare$$

Нетрудно видеть, что условие (1.37) для матрицы наблюдаемости с индексом k является сильным, более слабым является выполнение этого условия для $k = n = \dim x$, тогда матрица наблюдаемости с индексом n $W_n(n)$ называется просто матрицей наблюдаемости ЛДДС (1.23), (1.24) или пары матриц (A, C) и обозначается следующим образом

$$W_n^{\Delta} = W_n(n) = \text{col}\{CA^i : i = \overline{0, n-1}\}. \quad \square \quad (1.41)$$

Векторно-матричная модель ВСВ линейной ДДС (1.23), (1.24) позволяет сконструировать модель «вход-выход» (ВВ) в форме передаточной

функции (матрицы), а также в форме рекуррентного уравнения ВВ с матричными коэффициентами.

Утверждение 1.10 (У1.10). *Линейная ЛДДС (1.23), (1.24) может быть описана передаточной функцией (матрицей) $\Phi(d)$, связывающей D -образ $Y(d)$ выходной последовательности $y(k)$ и D -образ $U(d)$ входной последовательности $u(k)$ в мультипликативной форме*

$$Y(d) = \Phi(d)U(d) \quad (1.42)$$

где $\Phi(d)$ задается в виде

$$\Phi(d) = C(d^{-1}I + A)^{-1}B + H. \quad \square \quad (1.43)$$

Доказательство утверждения строится на применении к (1.23), (1.24) прямого D -преобразования, которое дает выражения

$$d^{-1}x(d) + d^{-1}x(0) = Ax(d) + BU(d) \quad (1.44)$$

$$Y(d) = Cx(d) + HU(d) \quad (1.45)$$

Если исключить из (1.44) и (1.45) $x(d)$ и разрешить их с использованием модальной арифметики относительно D -образа $Y(d)$, то получим

$$Y(d) = \{C(d^{-1}I + A)^{-1}B + H\}U(d) + C(d^{-1}I + A)^{-1}d^{-1}x(0). \quad (1.46)$$

Положив в (1.46) нулевое начальное состояние ЛДДС в форме $x(0) \equiv 0$, запишем для D -образа $Y(d)$ выходной последовательности

$$Y(d) = \{C(d^{-1}I + A)^{-1}B + H\}U(d). \quad (1.47)$$

Сравнение (1.47) с (1.42) позволяет записать (1.43). ■

Из выражения (1.43) становится корректным вычисление $\Phi_{ij}(d)$ – передаточной функции (i, j) -сепаратного канала ЛДДС, связывающего i -й выход $y_i(k)$ с j -м входом $u_j(k)$ в виде

$$\Phi_{ij}(d) = C^i(d^{-1}I + A)^{-1}B_j + H_{ij}, \quad (1.48)$$

где C^i – i -я строка матрицы C , B_j – j -й столбец матрицы B и H_{ij} – (i, j) -й элемент матрицы H .

С целью дальнейших исследований воспользуемся разложением Д. К. Фаддеева [25] резольвенты $(d^{-1}I + A)^{-1}$ ЛДДС (1.23), (1.24). Разложение построим в силу положений следующего утверждения.

Утверждение 1.11 (У1.11). *Резольвента $(d^{-1}I + A)^{-1}$ ЛДДС (1.23), (1.24) может быть представлена в форме*

$$(d^{-1}I + A)^{-1} = \frac{1}{\det(d^{-1}I + A)} \left[L_0(d^{-1})^{n-1} + L_1(d^{-1})^{n-2} + L_2(d^{-1})^{n-3} + \Lambda \right. \\ \left. \Lambda + L_{n-2}(d^{-1}) + L_{n-1} \right], \quad (1.49)$$

где матричные компоненты L_λ ($\lambda = \overline{1, n-1}$) определяются в силу рекуррентной процедуры Д. К. Фаддеева [25]

$$L_\lambda = a_\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A} L_{\lambda-1}, \lambda = \overline{1, n-1}; L_0 = \mathbf{I} \quad (1.50)$$

где элементы $a_\lambda, \lambda = \overline{1, n}$ суть коэффициенты характеристического полинома

$$\det(d^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{A}) = (d^{-1})^n + a_1 (d^{-1})^{n-1} + a_2 (d^{-1})^{n-2} + \dots + a_{n-1} (d^{-1}) + a_n \quad (1.51)$$

Доказательство утверждения строится на последовательном умножении слева выражения (1.49) на характеристическую матрицу $(d^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{A})$ ЛДДС (1.23), (1.24), затем на характеристический полином $\det(d^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{A})$, записанный в форме (1.51), и приравнивании матричных коэффициентов при скалярных степенях $(d^{-1})^\lambda, \lambda = \overline{0, n-1}$ слева и справа. Выполнение указанных действий приводит к (1.49) с матричными коэффициентами (1.50). ■

Утверждение 1.12 (У1.12). *Линейная двоичная динамическая система (1.23), (1.24) может быть модельно представлена рекуррентным уравнением ВВ с матричными коэффициентами, которое имеет вид*

$$\begin{aligned} & y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + a_2 y(k+n-2) + \mathbf{K} + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = \\ & = \mathbf{H} u(k+n) + (\mathbf{C} L_0 \mathbf{B} + a_1 \mathbf{H}) u(k+n-1) + \mathbf{K} \\ & \mathbf{K} + (\mathbf{C} L_{n-2} \mathbf{B} + a_{n-1} \mathbf{H}) u(k+1) + (\mathbf{C} L_{n-1} \mathbf{B} + a_n \mathbf{H}) u(k) \quad \square \end{aligned} \quad (1.52)$$

Доказательство утверждения строится на подстановке резольвенты $(d^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}$, записанной в форме (1.49), с характеристическим полиномом вида (1.50) в выражение (1.47), что позволяет записать

$$\begin{aligned} & d^{-n} y(d) + a_1 d^{-(n-1)} y(d) + a_2 d^{-(n-2)} y(d) + \mathbf{K} + a_{n-1} d^{-1} y(d) + a_n y(d) = \\ & = \mathbf{H} d^{-n} u(d) + (\mathbf{C} L_0 \mathbf{B} + a_1 \mathbf{H}) d^{-(n-1)} u(d) + \mathbf{K} \\ & \mathbf{K} + (\mathbf{C} L_{n-2} \mathbf{B} + a_{n-1} \mathbf{H}) d^{-1} u(d) + (\mathbf{C} L_{n-1} \mathbf{B} + a_n \mathbf{H}) u(d) \end{aligned} \quad (1.53)$$

Если теперь к левой и правой частям (1.53) применить обратное \mathbf{D} -преобразование, памятуя о том, что при нулевых начальных условиях в силу свойств прямого \mathbf{D} -преобразования выполняется соотношение

$$\mathbf{D}^{-1} \{ \mathbf{D} [f(k+p)] \} = \mathbf{D}^{-1} \{ d^{-p} F(d) \} = f(k+p) \quad (1.54)$$

то становится понятным переход от (1.53) к (1.52). ■

Нетрудно видеть, что в структуре доказательств утверждений У1.11 и У1.12 содержится доказательство следующего утверждения.

Утверждение 1.13 (У1.13). Если передаточная функция $\Phi(d)$ линейной ДДС (1.23), (1.24) задана в форме отношения модулярных многочленов по положительным степеням переменной d

$$\Phi(d) = \frac{M(d)}{D(d)}. \quad (1.55)$$

где $M(d)$ и $D(d)$ соответственно степеней $\deg M(d) = m$ и $\deg D(d) = n$, то характеристический полином $\det(d^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{A})$ матрицы состояния \mathbf{A} ЛДДС с передаточной функцией (1.55) определится выражением

$$\det(d^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{A}) = \tilde{D}(d^{-1}), \quad (1.56)$$

где $\tilde{D}(d^{-1})$ – модулярный полином по отрицательным степеням переменной d , вычисляется в силу соотношения

$$D(d) = d^n \tilde{D}(d^{-1}). \quad (1.57)$$

Теперь поставим обратную задачу конструирования $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{H})$ представления линейной ДДС в форме (1.23), (1.24) по ее передаточной функции $\Phi(d)$ отношения «вход-выход». Возможности решения поставленной задачи заложены в параграфе 1.1 структурными представлениями в виде рисунков 1.1 и 1.2 передаточных функций, а также тем обстоятельством, что элемент памяти с передаточной функцией $\Phi_{ЭП}(d) = d$ реализует задержку на один такт двоичного кодового преобразования произвольной переменной $\mathcal{A}(k+1)$, наблюдаемой на его входе, в переменную $\mathcal{A}(k)$, наблюдаемую на его выходе. Решение поставленной задачи представим в виде алгоритма.

Алгоритм 1.2 (А1.2)
конструирования $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{H})$ представления ЛДДС
по ее передаточной функции $\Phi(d)$

1. Выполнить алгоритм 1.1.
2. Разметить выбранную структурную реализацию передаточной функции $\Phi(d)$, для чего выходам элементов памяти с передаточной функцией $\Phi_{ЭП}(d) = d$ в определенном порядке присвоить переменную $x_i(k)$, а их непосредственным входам – переменную $x_i(k+1)$.
3. Из размеченной структурной реализации передаточной функции $\Phi(d)$ сконструировать матрицы $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ и \mathbf{H} векторно-матричного представления линейной ДДС в форме (1.23), (1.24).

■

Для приведенных на рисунке 1.1 и рисунке 1.2 структурных реализаций $\Phi(d)$, заданной в форме отношения двух модулярных многочленов (1.55), размеченных переменными состояния $x_i(k)$ и $x_i(k+1)$ слева направо (рисунок 1.9) и справа налево (рисунок 1.10) конструирование матриц A, B, C и H дает для последних представления

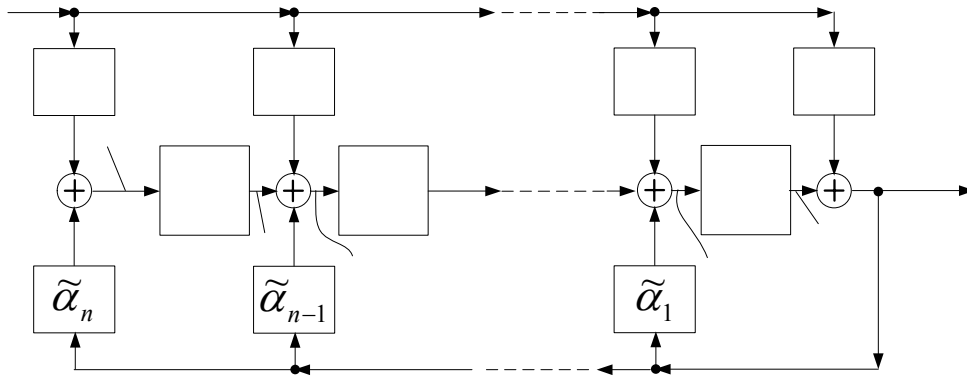


Рисунок 1.9. Представление ЛДДС в каноническом управляемом базисе

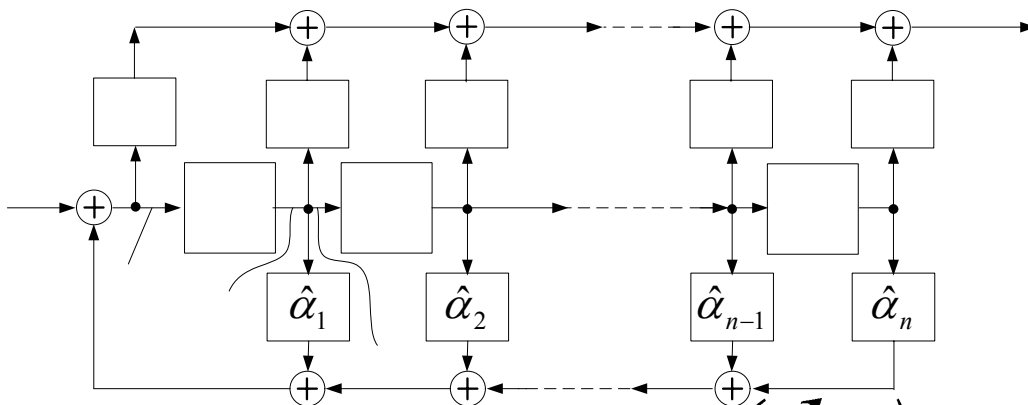


Рисунок 1.10. Представление ЛДДС в каноническом наблюдаемом базисе

1) в каноническом управляемом базисе (рисунок 1.9)

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\alpha}_n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\alpha}_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \tilde{\alpha}_{n-2} \\ & & \Lambda & & \Lambda \\ 0 & 0 & \Lambda & 1 & \tilde{\alpha}_1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{(n-1)}^T & \\ \hline \mathbf{I}_{(n-1) \times (n-1)} & \tilde{\alpha}_{n \times 1} \end{array} \right], \beta_n \quad (1.58)$$

где $\tilde{\alpha}_{n \times 1} = \text{col}\{\tilde{\alpha}_i : i = \overline{1, n}\}$,

$x_1(k+1)$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_n + \beta_0 \tilde{\alpha}_n \\ \beta_{n-1} + \beta_0 \tilde{\alpha}_{n-1} \\ \Lambda \\ \beta_1 + \beta_0 \tilde{\alpha}_1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [\mathbf{O}_{(n-1)}^T \mid 1], \mathbf{H} = [\beta_0], \quad (1.59)$$

2) в каноническом наблюдаемом базисе (рисунок 1.10)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hat{\alpha}_1 & \hat{\alpha}_2 & \hat{\alpha}_3 & \Lambda & \hat{\alpha}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{(n-1)} & \mathbf{I}_{(n-1) \times (n-1)} \\ \hat{\mathbf{a}}_{n \times 1} \end{bmatrix}, \quad (1.60)$$

где $\hat{\mathbf{a}}_{n \times 1} = \text{col} \{ \hat{\alpha}_i : i = \overline{1, n} \}$,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{(n-1)} \\ -\frac{1}{l} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [\beta_n + \beta_0 \hat{\alpha}_n \mid \beta_{n-1} + \beta_0 \hat{\alpha}_{n-1} \mid \mathbf{K} \mid \beta_1 + \beta_0 \hat{\alpha}_1],$$

$$\mathbf{H} = [\beta_0] \quad (1.61)$$

Пример 1.3 (Пр1.3)

Сконструировать $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{H})$ -представление ЛДДС по ее передаточной функции $\Phi(d)$, обеспечивающую размещение в регистре хранения информационных разрядов кода Хэмминга (7,4).

1. Выполним алгоритм 1.1, в результате чего получим передаточную функцию ЛДДС

$$\Phi(d) = \frac{1 + d^3 + d^4 + d^5}{1 + d^7}.$$

и структурные представления, приведенные на рисунке 1.3 и рисунке 1.4.

2. Разметим соответствующим образом структурные реализации (см. рисунок 1.11, рисунок 1.12).

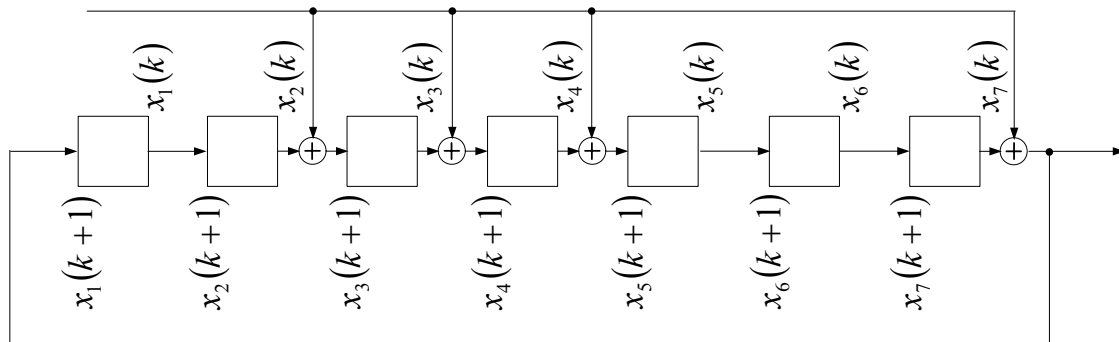


Рисунок 1.11

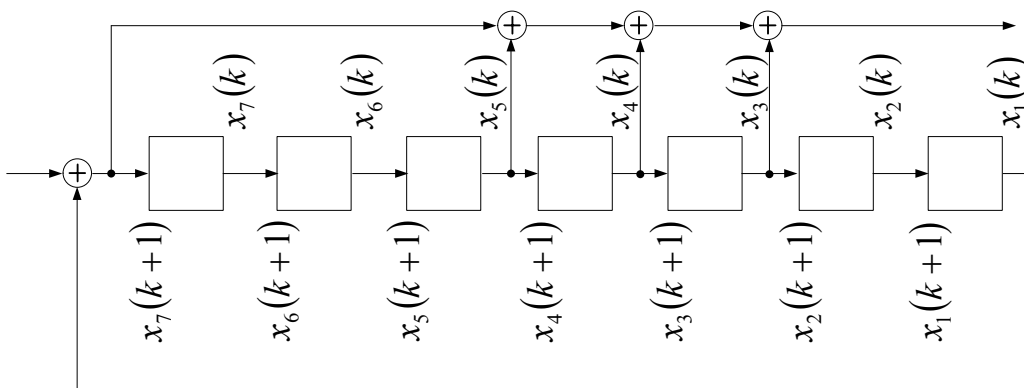


Рисунок 1.12

3. По размеченной структурной реализации передаточной функции $\Phi(d)$ сконструируем матрицы A, B, C и H векторно-матричного представления линейной ДДС в форме (1.23), (1.24)

1) в каноническом управляемом базисе (рисунок 1.11) 7

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_6^T & | & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{I}_{6 \times 6} & | & \mathbf{0} \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{K}_3 \\ \hline \mathbf{0}_2 \end{bmatrix}, G = [\mathbf{0}_6^T \ | \ 1], H = [1]$$

d

2) в каноническом наблюдаемом базисе (рисунок 1.12)

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_6 & | & \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ \hline \mathbf{1} & | & \mathbf{0}_{6 \times 1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_6 \\ \hline \mathbf{1} \end{bmatrix}, C = [\mathbf{0}_2 \ | \ \mathbf{I}_3 \ | \ \mathbf{0}_2], H = [1] \blacksquare$$

1.4. Проблема редуцирования размерности модельных представлений линейных двоичных динамических систем

В параграфах 1.1 и 1.2 рассмотрены возможности модельных представлений линейных двоичных динамических систем в классе отношений «вход-выход» в форме передаточных функций (матриц) и рекуррентного уравнения ВВ n -го порядка, а также в классе отношений «вход-состояние-выход» в форме векторно-матричных представлений правил перехода и выхода рекуррентной и суммарной версий. Однако в одном из вариантов модельных представлений ЛДДС пока не затронута проблема их минимального модельного представления. Тем не менее, проблема построения минимальной схемотехнической реализации линейных ДДС ставит задачу редуцирования их первичных модельных представлений. Очевидно, эта задача может быть решена двумя способами. Первый способ опирается на формализм модулярных многочленов, использующий фактор делимости модулярных многочленов числителя и знаменателя передаточной функции [15, 38, 55]. Вторым способом использует свойства пространств управляемости и наблюдаемости, конструируемых на матричных компонентах модельного ВСВ-представления линейных двоичных динамических систем [38].

1.4.1 Редуцирование линейных двоичных динамических систем на основе делимости модулярных многочлена числителя и знаменателя передаточной функции

Рассмотрение данного способа редуцирования начнем с исследования некоторых основных свойств квадратных $(n \times n)$ -матриц, часть из которых носит общесистемный характер, то есть выполняется для матрицы над любым полем, а часть имеет силу над простым полем Галуа $GF(p)$ при $p = 2$. Заявленные свойства зададим с помощью утверждений.

Утверждение 1.14 (У1.14). (Теорема Гамильтона-Кэли). Произвольная квадратная $(n \times n)$ -матрица A над простым полем Галуа $GF(p)$ при $p = 2$ обнуляет свой характеристический модулярный многочлен (ХММ) так, что выполняется равенство

$$\det(\lambda I + A)|_{\lambda=A} = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_{m-1} A + a_m I = \mathbf{O} \quad (1.62)$$

Доказательство утверждения строится по той же схеме, что и над бесконечным полем $F = \mathbf{R}$ действительных чисел [12, 13]. ■

Утверждение 1.15 (У1.15). Если характеристический полином матрицы A $D(\lambda) = \det(\lambda I + A)$ степени n входит в разложение двучлена $\lambda^\mu + 1$, где $\mu = \min_j \left\{ \mu_j : \text{rest} \frac{\lambda^{\mu_j} + 1}{\det(\lambda I + A)} = 0 \right\}$, то матрица A принадлежит показателю μ в том смысле, что

$$A^\mu = I. \quad \square \quad (1.63)$$

Доказательство утверждения строится на факте делимости без остатка двучлена $\lambda^\mu + 1$ на ХММ $D(\lambda) = \det(\lambda I + A)$, который позволяет записать

$$\lambda^\mu + 1 = Q(\lambda) \det(\lambda I + A) = Q(\lambda) D(\lambda) \quad (1.64)$$

Выражение (1.64) делает справедливым соотношение

$$A^\mu + I = Q(A) D(A) = Q(A) \det(\lambda I + A)|_{\lambda=A}, \quad (1.65)$$

в котором в силу **У1.14** член $\det(\lambda I + A)|_{\lambda=A}$ оказывается равным нулю, что доказывает справедливость **У1.15**. ■

Приведем еще одно утверждение, положения которого будут востребованы при решении задачи редуцирования модельного представления линейной ДДС.

Утверждение 1.16 (У1.16). Любой модулярный многочлен $f(x)$ над простым полем Галуа $GF(p)$ при $p = 2$ с ненулевым свободным членом, то есть не делимый без остатка на x , является при некотором целом числе μ делителем двучлена $1 + x^\mu$, при этом минимальное значение μ называется показателем, которому принадлежит $f(x)$. □

Доказательство утверждения можно найти в [15]. ■

Нетрудно видеть, что объединение положений **У1.15** и **У1.16** позволяет сформулировать утверждение, использование которого дает возможность сформировать простую технологию оценки показателя μ , которому принадлежит ММ $f(x)$.

Утверждение 1.17 (У1.17). Если сконструировать некоторую квадратную $(n \times n)$ матрицу P , где $n = \deg f(x)$ в сопровождающей $f(x)$ форме так, что

$$f(\lambda) = \det(\lambda I + P) = D(\lambda), \quad (1.66)$$

то оценка

$$\mu = \arg \left\{ P^\mu = I \right\} \quad (1.67)$$

для случая минимального значения μ представляет собой показатель, которому принадлежит ММ $f(x)$. □

Доказательство утверждения строится на непосредственном вычислении μ , при котором выполняется равенство $P^\mu = I$. ■

Вернемся к решению проблемы редуцируемости передаточной функции $\Phi(d) = M(d)/D(d)$ на основе сокращаемости ММ числителя $M(d)$ и знаменателя $D(d)$. Математической основой возможной сокращаемости модулярных многочленов над простым полем Галуа является основная теорема арифметики [30] о представлении отличного от нуля целого числа произведением степеней простых чисел. Над конечным полем $GF(p)$ при $p = 2$ свойствами простого числа обладают неприводимые многочлены. В этой связи весьма важным является следующее утверждение.

Утверждение 1.18 (У1.18). *Если степень μ бинома $x^\mu + 1$ представима в форме*

$$\mu = 2^n - 1, \quad (1.68)$$

где μ и n положительные целые числа, то в разложении бинома $x^\mu + 1$ входят все без исключения неприводимые ММ, степени которых, начиная с единицы, являются делителями числа n . □

Доказательство утверждения можно найти в [15]. ■

Утверждение **1.18** является эффективным инструментом при редуцировании передаточных функций $\Phi(d)$ линейных ДДС, решающих задачи кодопреобразования, в результате которого на выходе ДДС формируется периодическая последовательность $y(k)$ с периодом T . В этом случае в знаменателе передаточной функции $\Phi(d)$ появляется бином $d^T + 1$, который в силу **У1.18** представим произведением неприводимых ММ, что порождает возможность редуцирования $\Phi(d)$.

Приведем еще одно утверждение, положения которого могут быть так же полезны в решении задачи редуцирования модельного представления ЛДДС.

Утверждение 1.19 (У1.19). *Если степень μ бинома $x^\mu + 1$ представима в форме $\mu = 2\nu$, где ν – целое положительное число, то бином $x^\mu + 1$ над простым полем Галуа $GF(2)$ при $p = 2$ может быть записан в форме*

$$x^\mu + 1 = x^{2\nu} + 1 = (x^\nu + 1)^2. \quad \square \quad (1.69)$$

Доказательство утверждения сводится к непосредственному вычислению правой части (1.69) с учетом специфики модулярной арифметики по $\text{mod } p = \text{mod } 2$. ■

Как следствие из **У1.19** становится справедливым положение следующего утверждения.

Утверждение 1.20 (У1.20). Если степень μ бинома $x^\mu + 1$ представима в форме $\mu = 2^\nu$, где ν – целое положительное число, то этот бином над простым полем Галуа $GF(2)$ при $p = 2$ может быть записан в виде

$$x^\mu + 1 = x^{2^\nu} + 1 = (x^{2^{\nu-1}} + 1)(x^{2^{\nu-2}} + 1) \dots (x^2 + 1). \quad \square \quad (1.70)$$

Доказательство утверждения строится на использовании **У1.19**, позволяющее записать

$$x^\mu + 1 = (x^{2^\nu} + 1) = \left(x^{\frac{2^\nu}{2}} + 1 \right) \left(x^{\frac{2^\nu}{2}} + 1 \right) = (x^{2^{\nu-1}} + 1)(x^{2^{\nu-1}} + 1). \quad \blacksquare \quad (1.71)$$

Пример 1.4 (Пр1.4)

В качестве примера рассматривается линейная ДДС, преобразующая входную импульсивную последовательность $u(k) = \delta(k)$ в периодическую последовательность $y(k)$: $11110000 \mid 11110000$ К периода $T = 8$.

Следуя **A1.4** получим передаточную функцию проектируемой ЛДДС в силу определения

$$\Phi(d) = \frac{Y(d)}{U(d)} = \frac{1 + d + d^2 + d^3}{1 + d^8} = \frac{M(d)}{D(d)}$$

Задачу редуцирования размерности $\Phi(d)$ решим с использованием делимости модулярных многочленов, то есть полинома наибольшего общего делителя $M(d) = 1 + d + d^2 + d^3$ и $D(d) = 1 + d^8 = (1 + d^4)^2$. С этой целью проверим: не принадлежит ли $M(d)$ показателю $\mu = 4$.

Следуя **У1.17**, сформируем матрицу \mathbf{P} сопровождающую модулярный многочлен $M(d) = 1 + d + d^2 + d^3$ так, что

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

с целью решения задачи

$$\mu = \arg \{ \mathbf{P}^\mu = \mathbf{I} \},$$

которая в своем решении дает $\mu = 4$.

Представим полином $d^\mu + 1 = d^4 + 1$ в форме $d^4 + 1 = (d + 1)M(d)$ и осуществим редуцирование передаточной функции $\Phi(d)$ с помощью цепочки равенств

$$\Phi(d) = \frac{M(d)}{D(d)} = \frac{M(d)}{(1 + d^4)(1 + d^4)} = \frac{M(d)}{(1 + d)M(d)(1 + d^4)} = \frac{1}{1 + d + d^4 + d^5}.$$

Сконструируем структурное представление редуцированной версии проектируемой ЛДДС, которое приведено на рисунке 1.13.

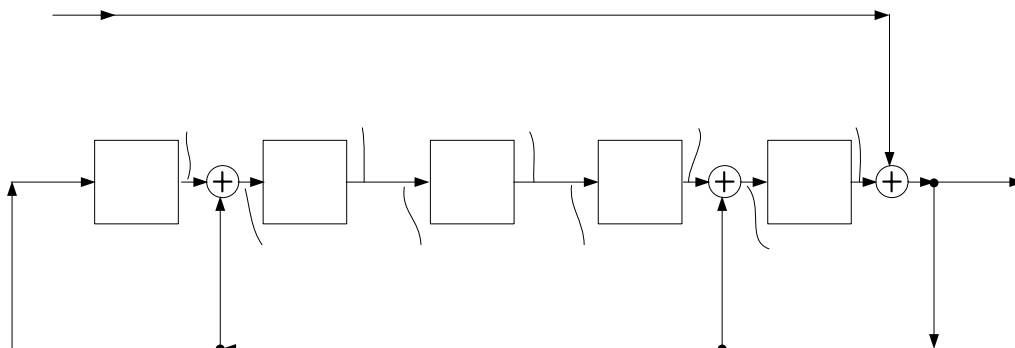


Рисунок 1.13

1.4.2 Редуцирование линейных двоичных динамических систем на основе анализа структуры пространств управляемости и наблюдаемости ЛДДС

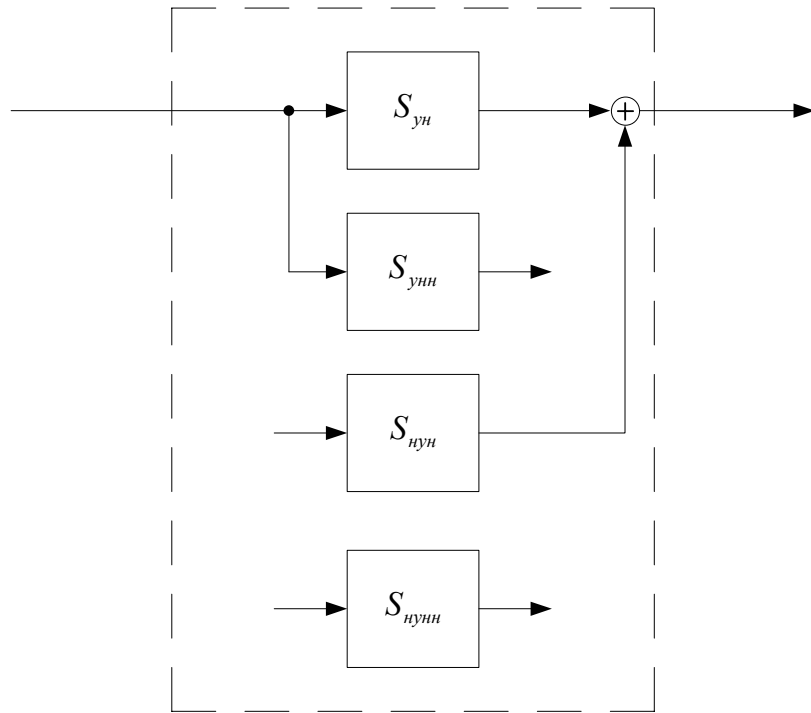
$u(k)$

Рассмотрим векторно-матричное ВСВ представление ЛДДС $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$, $x(0)$; $y(k) = Cx(k) + Hu(k)$. (1.72)

В предыдущем разделе исследованы вопросы управляемости и наблюдаемости ЛДДС, записанной в форме (1.23), (1.24) или (1.72) за n тактов ее функционирования, где $n = \dim x$. В случае неполной управляемости и наблюдаемости структура пространства ЛДДС (1.72) разбивается на четыре части, так что вектор состояния линейной ДДС представим в форме

$$x = \begin{bmatrix} x_{ун}^T & | & x_{унн}^T & | & x_{нун}^T & | & x_{нунн}^T \end{bmatrix}^T, \quad (1.73) \quad x_{p1}(k)$$

где $x_{ун}$ — управляемая и наблюдаемая часть вектора состояния x ; $x_{унн}$ — управляемая, но ненаблюдаемая часть x ; $x_{нун}$ — неуправляемая, но наблюдаемая часть x ; $x_{нунн}$ — неуправляемая и ненаблюдаемая часть вектора x . ЛДДС (1.72) с вектором состояния (1.73) структурно представим схемой (рисунок 1.14).



$u(k)$

Рисунок 1.14. Структурная схема ЛДДС (1.72) с вектором состояния (1.73)

Структурное представление, приведенное на рисунке 1.14, системы, характеризующееся четырьмя перечисленными компонентами вектора состояния, справедливо для систем над бесконечными и конечными полями предложено Р. Калманом [29] и носит название «каноническое представление Р. Калмана». Из приведенного представления видно, что передаточная функция $\Phi(d)$, как модель «вход-выход» описывает только полностью управляемую и полностью наблюдаемую часть ЛДДС. При вычислении передаточной функции ЛДДС (1.72) в силу соотношения

$$\Phi(d) = C(d^{-1}I + A)^{-1}B + H \quad (1.74)$$

должно происходить сокращение сомножителей числителя и знаменателя ММ, которые задействованы для описания неуправляемых и ненаблюдаемых частей ЛДДС. Таким образом размерность передаточной функции ЛДДС в целом, которая совпадает с передаточной функцией ее полностью управляемой и полностью наблюдаемой части, в ее минимизированной после сокращения сомножителей форме определится размерностью пересечения пространства управляемости пары матриц (A, B) и пространства наблюдаемости пары матриц (A, C) . Для вычисления размерности этого пересечения может быть использован следующий алгоритм.

Алгоритм 1.3 (A1.3)

4. Построить матрицу W_y управляемости пары матриц (A, B) модели ЛДДС (1.71) в форме

$$W_y = [B \mid AB \mid A^2 B \mid \dots \mid A^{n-1} B]. \quad (1.75)$$

5. Составить матрицу W_H наблюдаемости пары матриц (A, C) модели ЛДДС (1.72)

$$W_H = [C^T \mid (CA)^T \mid (CA^2)^T \mid \dots \mid (CA^{n-1})^T]^T. \quad (1.76)$$

6. Вычислить размерности пространств $\mathbf{L}\{W_y\}$ управляемости и наблюдаемости $\mathbf{L}\{W_H^T\}$ с помощью соотношений

$$n_y = \dim \mathbf{L}\{W_y\} = \text{rank } W_y; \quad n_H = \dim \mathbf{L}\{W_H^T\} = \text{rank } W_H \quad (1.77)$$

7. Вычислить размерность $n_{y \cup H}$ объединения $\mathbf{L}\{W_y\} \cup \mathbf{L}\{W_H^T\}$ пространств управляемости и наблюдаемости ЛДДС в силу выражения $n_{y \cup H} = \text{rank} [W_y \mid W_H^T]$.

8. Вычислить размерность $n_{y \cap H}$ пересечения пространств управляемости и наблюдаемости $\mathbf{L}\{W_y\} \cap \mathbf{L}\{W_H^T\}$

$$n_{y \cap H} = \dim \{ \mathbf{L}\{W_y\} \cap \mathbf{L}\{W_H^T\} \} = n_y + n_H - n_{y \cup H} \quad \blacksquare \quad (1.78)$$

Практика построения редуцированных модельных представлений линейных ДДС показывает, что наилучший результат решения задачи редуцирования имеет место при комбинировании двух рассмотренных подходов. Это комбинирование позволило сконструировать следующий алгоритм синтеза линейных ДДС редуцированной размерности.

Алгоритм 1.4 (A1.4)

1. Выполнить **A1.1**, получив передаточную функцию ЛДДС в форме $\Phi(d) = \frac{M(d)}{D(d)}$.
2. Выполнить **A1.2**, получив матричные компоненты (A, B, C, H) представления ВСВ (1.72).
3. Выполнить **A1.3**, получив оценку $n_{y \cap H}$ размерности пересечения пространств управляемости и наблюдаемости.

4. Проанализировать полученное значение $n_{y \cap H}$, при этом если $n_{y \cap H} = n$, то перейти к выполнению п.9 алгоритма, иначе – к выполнению п.5.
5. Оценить порядок $n_p = n_{y \cap H}$ редуцированной модели ЛДДС и степень ее редуцируемости $\tilde{n}_p = n - n_{y \cap H}$.
6. На множестве ММ степени \tilde{n}_p найти такой, который входит в разложение полинома числителя $M(d)$ и знаменателя $D(d)$ передаточной функции $\Phi(d)$ синтезируемой ЛДДС, с целью конструирования $\Phi_p(d)$ передаточной функции ЛДДС размерности n_p .
7. Построить структурное представление передаточной функции $\Phi_p(d)$ в одном из канонических базисов и разметить его переменными $x_i(k)$ и $x_i(k+1)$.
8. Построить векторно-матричное ВСВ-представление редуцированной ЛДДС

$$\begin{aligned} x_p(k+1) &= A_p x_p(k) + B_p u(k), \quad x_p(0); \\ y(k) &= C_p x_p(k) + H u(k) \end{aligned} \quad (1.79)$$
9. Построить техническую реализацию редуцированной ЛДДС в схемотехнической версии в соответствии со структурным представлением $\Phi_p(d)$ или в программной версии в соответствии с (1.79). ■

Пример 1.4 (продолжение)

В продолжение примера 1.4 решим задачу редуцирования с использованием оценки $n_{y \cap H}$ размерности пересечения пространств управляемости и наблюдаемости исходной (A, B, C, H) модели синтезируемой ЛДДС.

Имеем передаточную функцию устройства

$$\Phi(d) = \frac{Y(d)}{U(d)} = \frac{1 + d + d^2 + d^3}{1 + d^8} = \frac{M(d)}{D(d)}.$$

Выполняем **A1.4** с пункта 2.

2. Строим структурное представление передаточной функции устройства и размечаем ее. В результате указанных действий получаем структурную схему, представленную на рисунке 1.15.

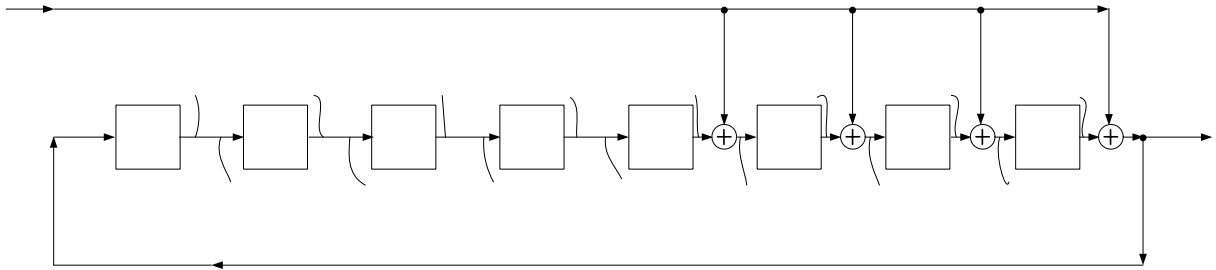


Рисунок 1.15

По отмеченной схеме рисунок 1.15 конструируем матрицы A, B, C, H :

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{o}_{7 \times 1}^T & \mathbf{I}_{1 \times 1} \\ \mathbf{I}_{7 \times 7} & \mathbf{o}_{7 \times 1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{o}_{4 \times 1} \\ \mathbf{I}_{4 \times 1} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \mathbf{o}_{7 \times 1}^T & \mathbf{I}_{1 \times 1} \end{bmatrix}, \\ H = [1].$$

3. Выполняем **A1.3** с использованием пакета Matlab 6.5. В результате находим $n_p = n_{y \cap H} = 5$.

4. Выполняем п.п.4,5 и находим, что величина уменьшения размерности n_p оказывается равной трем, то есть $\tilde{n}_p = 3$.

5. Находим общий делитель $M(d) = 1 + d + d^2 + d^3$, что приводит к редуцированной передаточной функции ЛДДС вида

$$\Phi_p(d) = (1 + d + d^4 + d^5)^{-1} d$$

6. Строим структурную схему полученной передаточной функции и осуществляем ее разметку (рисунок 1.13).

7. Строим по размеченной структурной схеме (рисунок 1.13) векторно-матричное ВСВ-представление (1.79) редуцированной ЛДДС, матрицы которой принимают вид

$$A_p = \begin{bmatrix} \mathbf{o}_{5 \times 1}^T & \mathbf{I}_{2 \times 1} \\ \mathbf{I}_{5 \times 5} & \mathbf{o}_{2 \times 1} \\ & \mathbf{I}_{1 \times 1} \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 1} \\ \mathbf{o}_{2 \times 1} \\ \mathbf{I}_{1 \times 1} \end{bmatrix}, \quad C_p = \begin{bmatrix} \mathbf{o}_{4 \times 1}^T & \mathbf{I}_{1 \times 1} \end{bmatrix}, \quad H = [\mathbf{I}_{1 \times 1}]. \blacksquare$$

1.5. Концепция подобия в теории линейных двоичных динамических систем

Концепция подобия в теории динамических систем над бесконечными полями получила в последнее время заметное распространение при решении широкого круга задач управления [5, 35, 40, 48, 53]. В рамках векторно-матричного формализма метода пространства состояний в непараметризованной временем форме концепция подобия сводится к выполнению соотношения

$$\eta = M \chi. \quad (1.80)$$

В параметризованном временем виде соотношение (1.80) достигается в асимптотике так, что

$$\eta(\tau) = M \chi(\tau) - \theta(\tau), \quad (1.81)$$

при этом

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \theta(\tau) = 0 \quad \forall \chi(0), \eta(0). \quad (1.82)$$

В (1.80) – (1.82) χ – вектор состояния некоторого эталонного динамического процесса, η – вектор состояния конструируемой динамической среды, $\dim \eta = m$, $\dim \chi = \lambda$, M – $(m \times \lambda)$ – матрица в общем случае особого [12] преобразования подобия; τ – принимает смысл непрерывного времени t ($\tau = t$) в непрерывных по времени процессах и смысл дискретного времени k ($\tau = k$), выраженного в числе интервалов дискретности длительности Δt так, что $t = k \Delta t$, в дискретных по времени процессах, θ – вектор невязки выполнения векторно-матричного подобия, задаваемого в форме

$$\eta(\tau) = M \chi(\tau); \quad \forall \chi(0), \eta(0), \quad (1.83)$$

Если на асимптотически сходящемся процессе (1.82) можно указать τ^* такое, что при $\tau \geq \tau^*$ соотношение (1.83) выполняется «почти точно», то τ^* следует называть временем установления векторно-матричного подобия (1.83). В технической среде достижение векторно-матричного подобия (1.83), обеспечиваемого путем выполнения условия (1.82), реализуется в виде связей по вектору состояния η и части компонентов вектора состояния χ так, что математическая модель по вектору невязки θ представляет собой автономную систему, которая для непрерывного времени имеет вид

$$\dot{\theta}(t) = A_\theta \theta(t); \quad \theta(0) = M \chi(\tau) - \eta(0), \quad (1.84)$$

и

$$\theta(k+1) = \bar{A}_\theta \theta(k); \quad \theta(0) = M \chi(\tau) - \eta(0), \quad (1.85)$$

для дискретного времени. Указанные связи должны быть выбраны так, чтобы процессы в (1.84) и (1.85)

$$\theta(t) = e^{A\theta t} \theta(0); \quad \theta(k) = \bar{A}_\theta^k \theta(0), \quad (1.86)$$

сходились за назначенное время τ^* . Для процессов с непрерывным временем матрица A_θ должна быть гурвицевой, для процессов с дискретным временем матрица \bar{A}_θ должна иметь собственные значения в единичном круге [5, 48].

К схеме (1.81), (1.84), (1.85) сводится задача регулирования [31] в форме модального управления [48, 53], задача слежения за конечно-мерным экзогенным воздействием [5, 48, 31, 52], задача динамического наблюдения [5, 35, 48]. К этой же схеме сводятся задачи адаптивного управления [40]. Для случая единичной матрицы преобразования подобия ($M = I$), когда отношение подобия превращается в отношение тождественного равенства, разработаны методы решения обратных задач динамики [34].

Следует ожидать, что перенос концепции подобия на динамические системы над конечными полями, частным случаем которых являются двоичные динамические системы, заметно обогатит алгоритмическое обеспечение синтеза как линейных, так и нелинейных ДДС (конечных автоматов). Следует заметить при этом, что обеспечение условия вида (1.82) опирается на особые свойства матриц над конечным полем Галуа $GF(p)$ при $p = 2$ [37]. Часть этих свойств представлены в разделе 1.3.1. Этими свойствами являются: свойство обнуления произвольной квадратной $m \times m$ -матрицей с элементами из конечного поля Галуа $GF(p)$ при $p = 2$ своего характеристического полинома (Теорема Гамильтона-Кэли над конечным полем Галуа $GF(p)$ при $p = 2$) в форме (1.62); свойство принадлежности квадратной $m \times m$ -матрицы с элементами из конечного поля Галуа $GF(2)$ показателю μ в форме (1.63).

Для целей дальнейших исследований введем в рассмотрение еще одно свойство матриц над конечным полем Галуа $GF(2)$.

Свойство 1.1 (СВ1.1). *(Нильпотентность индекса ν матрицы A). Квадратная $(m \times m)$ -матрица A с элементами из $GF(2)$ обладает свойством нильпотентности индекса ν , если выполняется условие*

$$A^\nu = \mathbf{O}. \quad \square \quad (1.87)$$

Утверждение 1.21 (У1.21). *Для того чтобы $(m \times m)$ -матрица A с элементами из конечного поля Галуа $GF(2)$ обладала свойством СВ1.1 достаточно, чтобы матрица A обладала нулевым корнем кратности ν , при этом ее каноническое представление имело вид*

$$A_\nu = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{(\nu-1) \times (m-\nu+1)} & \mathbf{I}_{(\nu-1) \times (\nu-1)} \\ & \mathbf{O}_{(m-\nu+1) \times m} \end{bmatrix}. \quad \square \quad (1.88)$$

Доказательство утверждения строится на свойстве матричной функции от матрицы сохранять отношение подобия. Действительно, если существует $(m \times m)$ - неособая матрица \mathbf{M} преобразования подобия такая, что выполняется матричное соотношение

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} \mathbf{A}_\nu \mathbf{M}^{-1}, \quad (1.89)$$

тогда по указанному свойству выполняется и соотношение

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{M} f(\mathbf{A}_\nu) \mathbf{M}^{-1}. \quad (1.90)$$

Если в качестве $f(\mathbf{A})$ выбрана функция от матрицы $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^\nu$, то соотношение (1.90) примет вид

$$\mathbf{A}^\lambda = \mathbf{M} \mathbf{A}_\nu^\lambda \mathbf{M}^{-1}, \quad (1.91)$$

но \mathbf{A}_ν^λ при $\lambda = \nu$ в силу представления (1.88) обнуляется:

$$\mathbf{A}_\nu^\nu = \mathbf{O}, \quad (1.92)$$

что приводит к выполнению (1.87) в силу (1.91). ■

1.5.1 Концепция подобия в задаче динамического наблюдения состояния произвольной линейной ДДС

Пусть линейная ДДС, состояние которой подлежит наблюдению, имеет векторно-матричное описание

$$\chi(k+1) = \mathbf{A} \chi(k) + \mathbf{B} u(k), \quad \chi(0) = \chi_0, \quad \xi(k) = \mathbf{C} \chi(k), \quad (1.93)$$

где χ, u, ξ – соответственно n -мерный вектор состояния, r -мерный вектор входной последовательности и λ -мерный вектор выходной последовательности, матрицы $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ согласованы по размерности с векторами χ, u и ξ . Элементы векторов и матриц принадлежат двоичному простому полю Галуа $GF(2)$.

Двоичное динамическое наблюдающее устройство (ДНУ), использующее всю доступную для непосредственного измерения информацию об ДДС (1.93) в виде входной последовательности $u(k)$ и выходной – $y(k)$, строится в форме

$$z(k+1) = \mathbf{F} z(k) + \mathbf{L} \xi(k) + \mathbf{G} u(k), \quad z(0) = z_0, \quad (1.94)$$

где z – m -вектор состояния ДНУ, матрица \mathbf{F} определяет динамику процесса наблюдения в форме (1.82), а пара матриц (\mathbf{L}, \mathbf{G}) обладает свойствами

$$\mathbf{L} = \arg \{ \text{contr}(\mathbf{F}, \mathbf{L}) \}, \quad \mathbf{G} = \arg \{ \text{contr}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \}, \quad (1.95)$$

где $\text{contr} \{ (*), (\bullet) \}$ – предикат наличия полной управляемости пары матриц $\{ (*), (\bullet) \}$.

Задачу наблюдения вектора χ состояния системы (1.93) в среде ДНУ (1.94) сформулируем в форме (1.81), записываемой в виде

$$z(k) = T \chi(k) + \theta(k), \quad \forall k, \quad (1.96)$$

где T – матрица преобразования подобия (в общем случае – особого). Уравнение (1.96) позволяет построить модель процесса наблюдения по вектору невязки наблюдения, которое принимает вид

$$\theta(k+1) = T \chi(k+1) + z(k+1). \quad (1.97)$$

Структурная модель процесса двоичного динамического наблюдения в форме (1.97) в соответствии с моделями (1.93) и (1.94) представлена на рисунке 1.16.

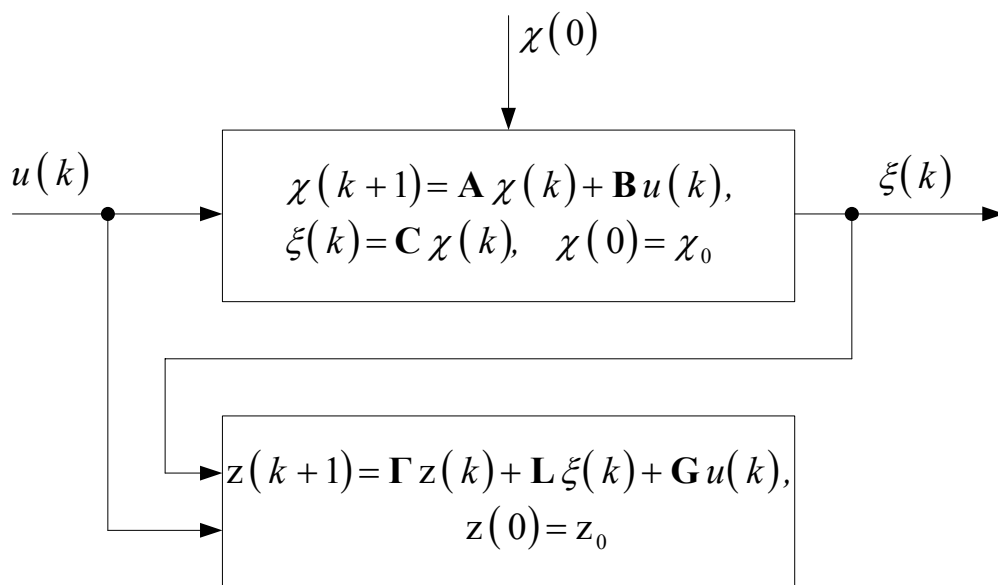


Рисунок 1.16. Модель процесса двоичного динамического наблюдения состояния произвольной ЛДДС

Сформулируем теперь утверждение.

Утверждение 1.22 (У1.22). Если матрицы T, L, G удовлетворяют матричным соотношениям

$$\Gamma T + T A = L C, \quad G = T B, \quad (1.98)$$

то процесс по вектору невязки наблюдения (ВНН) $\theta(k)$ описывается рекуррентным векторно-матричным уравнением

$$\theta(k+1) = \Gamma \theta(k), \quad \theta(0) = T \chi(0) + z(0). \quad \square \quad (1.99)$$

Доказательство утверждения строится на подстановке в (1.99) векторно-матричных соотношений (1.93) и (1.94), в результате чего получим

$$\theta(k+1) = \Gamma \theta(k) + (T A + \Gamma T + L C) \chi(k) + (T B + G) v(k). \quad (1.100)$$

Если в (1.100) подставить (1.98), то приходим к (1.99). ■

Модель процесса двоичного динамического наблюдения в форме процесса по ВНН (1.99) позволяет сформулировать требования к матричным компонентам наблюдаемой ДДС (1.93) и ДНУ (1.94), которые позволят обеспечить все возможные задачи наблюдения.

Так если ставится **задача наблюдения вектора $\chi(k)$ текущего состояния ДДС (1.93)**, то следует воспользоваться явным (показательным) решением (1.99), записываемым в форме

$$\theta(k) = \Gamma^k \theta(0); \quad \theta(0) = T\chi(0) + z(0). \quad (1.101)$$

Следует заметить, что при нормальном использовании ДНУ его состояние при запуске обнуляется так, что $z(0) = 0$. С учетом этого обстоятельства (1.101) принимает вид

$$\theta(k) = \Gamma^k T \chi(0). \quad (1.102)$$

В свою очередь подстановка (1.102) в (1.96) дает

$$z(k) = T \chi(k) + \Gamma^k \theta(0). \quad (1.103)$$

Потребуем от матрицы Γ состояния ДНУ обладания свойством нильпотентности с индексом ν , тогда при $k \geq \nu$ устанавливается равенство

$$z(k) = T \chi(k), \quad k \geq \nu. \quad (1.104)$$

Таким образом, вектор $z(k)$ состояния ДНУ с точностью до матрицы преобразования подобия T задает текущее состояние вектора $\chi(k)$ наблюдаемой ДДС (1.93). Заметим, что подобие (1.104) можно преобразовать в тождество, если в матричное уравнение Сильвестра (1.98) положить $T = I$, где I – единичная матрица, и решить уравнение (1.100) относительно матрицы L .

Поставим теперь **задачу наблюдения вектора $\chi(0)$ начального состояния наблюдаемой ДДС (1.93)**. Для этого потребуем, чтобы матрица Γ принадлежала показателю μ так, что $\Gamma^\mu = I$. В этом случае при $k = \mu$ соотношение (1.102) примет вид

$$z(\mu) = T \chi(\mu) + \theta(0) = T \chi(\mu) + T \chi(0). \quad (1.105)$$

Дополним ситуацию еще одним условием, для чего предположим, что наблюдаемая ДДС (1.93) представляет собой регистр сдвига, функционирующий при $u(k) \equiv 0$ и $\chi(0) \neq 0$. Если учесть, что показатель μ удовлетворяет неравенствам

$$n \leq \mu \leq 2^n - 1, \quad (1.106)$$

то к моменту $k = \mu$ (1.105) примет вид

$$z(\mu) = T \chi(0). \quad (1.107)$$

Таким образом (1.107) обнаруживает результат, который не достигается над бесконечными полями. Если наблюдаемая ДДС (1.93) представляет собой регистр сдвига размерности n с нулевой входной по-

следовательностью $u(k) \equiv 0$ и ненулевым начальным состоянием $\chi(0)$, а двоичное наблюдающее устройство (1.94) таково, что его матрица Γ состояния принадлежит показателю μ , то в силу выполнения (1.107) состояние $z(k)$ ДНУ при $k = \mu$ является *синдромом* состояния $\chi(0)$.

Выделим еще одну постановочную версию задачи наблюдения состояния ДДС (1.93), предположив, что входная последовательность $u(k)$ формируется с помощью конечномерной автономной ДДС.

$$\xi(k+1) = \mathbf{R}\xi(k); \quad \xi(0) = \xi_0; \quad u(k) = \mathbf{S}\xi(k). \quad (1.108)$$

Соотношения (1.108) задают источник входной последовательности (ИВП) $u(k)$.

Объединим системные компоненты – наблюдаемая ДДС (1.93), ДНУ (1.94) и ИВП (1.108), – процесса наблюдения, охарактеризовав его агрегированным вектором состояния $\bar{\chi} = [z^T, \chi^T, \xi^T]^T$. Тогда динамика системы с агрегированным вектором $\bar{\chi}$ описывается автономной ДДС

$$\bar{\chi}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\chi}(k), \quad \bar{\chi}(0) = [z^T(0), \chi^T(0), \xi^T(0)]^T, \quad (1.109)$$

где матрица $\bar{\mathbf{A}}$ имеет представление

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} & \mathbf{LC} & \mathbf{GS} \\ 0 & \mathbf{A} & \mathbf{BS} \\ 0 & 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix}. \quad (1.110)$$

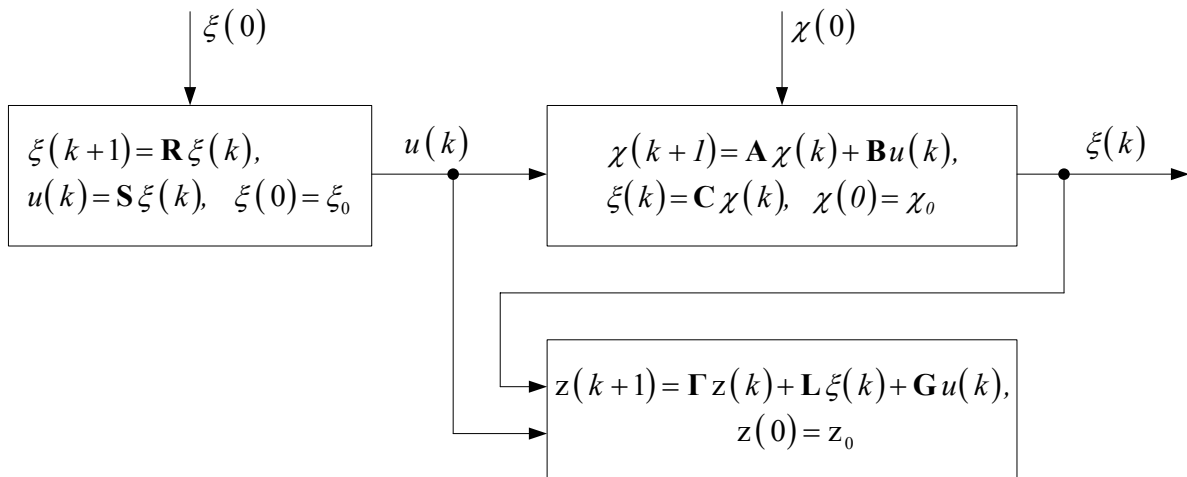


Рисунок 1.17. Структурное представление модели (1.109) процесса двоичного динамического наблюдения

Агрегированная модель (1.109) с матричным компонентом $\bar{\mathbf{A}}$ (1.110) процесса двоичного динамического наблюдения представлена на рисунке 1.17.

Для системы (1.109) явное решение $\bar{\chi}(k)$ в показательной форме принимает вид

$$\bar{\chi}(k) = \bar{A}^k \bar{\chi}(0). \quad (1.111)$$

С целью покомпонентного вычисления (1.111) сформулируем утверждение.

Утверждение 1.23 (У1.23). Показательная матричная функция \bar{A}^k матрицы \bar{A} вида (1.110) представима в форме

$$\bar{A}^k = \begin{bmatrix} \Gamma^k & \Gamma^k T + T A^k & T(\pi R^k + A^k \pi) \\ 0 & A^k & \pi R^k + A^k \pi \\ 0 & 0 & R^k \end{bmatrix}, \quad (1.112)$$

где матрица T удовлетворяет матричному уравнению Сильвестра (1.98), а матрица π – матричному уравнению Сильвестра

$$\pi R + A \pi = B S. \quad \square \quad (1.113)$$

Доказательство утверждения осуществляется на замене матричных членов LC и BS в представлении (1.108) матрицы \bar{A} , являющихся правыми частями уравнений Сильвестра (1.98) и (1.113), на их левые части, а так же подстановке второго матричного соотношения (1.98) в (1.108) так, что становится справедливым матричное равенство

$$GS = TBS. \quad (1.114)$$

После проведенной модернизации представления (1.108) матрицы \bar{A} осуществляется конструирование базы индукции степеней матрицы \bar{A} , что приводит к (1.112). ■

Если теперь в агрегированном векторе $\bar{\chi}$ выделить векторный компонент z , представляющий собой вектор состояния ДНУ, то в силу (1.111) и (1.112) для него можно записать

$$z(k) = \Gamma^k z(0) + (\Gamma^k T + T A^k) \chi(0) + T(\pi R^k + A^k \pi) \xi(0). \quad (1.115)$$

Выражение (1.115) обнаруживает все богатство решений задач двоячного динамического наблюдения, рассмотренных выше на основе частных композиций начальных состояний и свойств матричных компонентов.

Пример 1.5 (Пр1.5)

Пусть требуется синтезировать ДНУ для наблюдения вектора состояния ДДС, A, B, C, H -описание которой имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 1 \ 0], \quad H = [0].$$

С целью решения поставленной задачи в соответствии с (1.103) и (1.104) выберем в качестве модели ДНУ регистр сдвига третьего порядка, матрица Γ ВМ описания которого будет иметь следующий вид

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решим поставленную задачу в форме $z(k) = \chi(k)$, $k \geq \nu$, для чего в силу (1.104) выберем матрицу \mathbf{T} в форме $\mathbf{T} = \mathbf{I}$. Решение уравнения Сильвестра (1.98) относительно матрицы \mathbf{L} и вычисление матрицы \mathbf{G} дает

$$\mathbf{L} = [0 \ 0 \ 1]^T, \quad \mathbf{G} = [0 \ 0 \ 1]^T.$$

В силу (1.104) и того, что матрица $\mathbf{\Gamma}$ имеет индекс нильпотентности, равный трем, то, очевидно, что начиная с момента $k \geq 3$ вектор состояния z ДНУ должен будет совпасть с вектором состояния χ исходной ДДС. Покажем это, полагая, что входная последовательность $u(k)$ ДДС на первых семи тактах имеет вид $u(k): 1001010$, а начальное состояние $\chi(0)$ ДДС определяется вектором $\chi(0) = [0 \ 1 \ 1]^T$.

Таблица 1.1

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$u(k)$	0	1	0	0	1	0	1	0
$\chi^T(k)$	011	110	100	001	011	111	111	110
$z^T(k)$	000	000	000	001	011	111	111	110

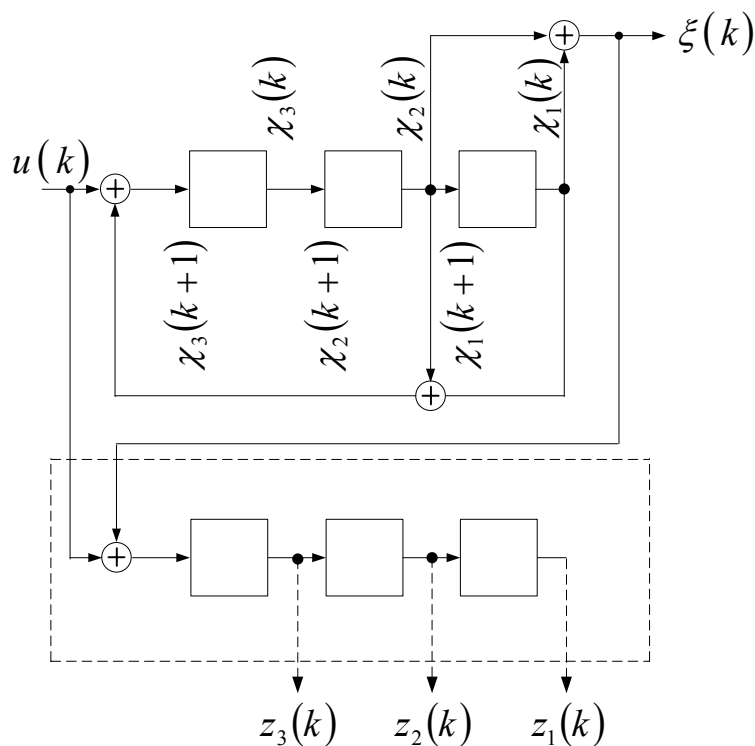


Рисунок 1.18. Структурное представление процесса двоичного динамического наблюдения

Из таблицы 1.1 видно, что начиная с третьего такта, то есть с выполнением условия $k = 3$, вектор состояния z синтезированного ДНУ повторяет в форме $z(k) = \chi(k)$ состояние $\chi(0)$ наблюдаемой ДДС. С использованием полученных результатов структурно-функциональная схема процесса двоичного динамического наблюдения вектора состояния заданной ДДС примет вид, как показано на рисунке 1.18.

Из таблицы 1.1 видно, что начиная с третьего такта, то есть с выполнением условия $k = 3$, вектор состояния z синтезированного ДНУ повторяет в форме $z(k) = \chi(k)$ состояние $\chi(0)$ наблюдаемой ДДС. С использованием полученных результатов структурно-функциональная схема процесса двоичного динамического наблюдения вектора состояния заданной ДДС примет вид, как показано на рисунке 1.18.

1.5.2 Концепция подобия в задаче декодирования систематических помехозащищенных кодов

Задачу декодирования систематических помехозащищенных кодов, подвергшихся воздействию на функциональном и модельном уровнях, зададим следующим образом. Кодирующее устройство (КУ) на выходе которого формируется (n, k) -помехозащищенный код y , выводимый в канал связи в виде двоичной кодовой последовательности $y(k)$, старшим разрядом вперед, представляется n -разрядным регистром сдвига, начальное состояние которого $\chi(0)$ представляет собой передаваемую помехозащищенную кодовую посылку. Векторно-матричное модельное представление КУ имеет вид

$$x(k+1) = Fx(k); x(0); y(k) = Px(k), \quad (1.116)$$

где F – матрица размерности $(n \times n)$ является нильпотентной с индексом нильпотентности ν равным n так, что $\nu = n$. Формирователь импульсной помехи ξ , которая в канале связи (КС) искажает передаваемую кодовую посылку y , также представим n -разрядным регистром сдвига, который будем именовать регистром канала связи (РКС). РКС характеризуется нулевой входной последовательностью и вектором начального состояния $\chi(0)$, который представляет собой n -разрядный вектор помехи ξ , выводимый в КС в виде последовательности $\xi(k)$ старшим разрядом вперед. Векторно-матричное описание РКС имеет вид

$$\chi(k+1) = A\chi(k); \chi(0); \xi(k) = C\chi(k). \quad (1.117)$$

Матрица A совпадает с матрицей F и так же является нильпотентной с индексом нильпотентности $\nu = n$.

Процесс искажения кодовой последовательности $y(k)$, при передаче по КС представим суммированием в простом двоичном поле $GF(2)$, в результате чего формируется искаженная кодовая комбинация $f = y + \xi$, в виде кодовой последовательности

$$f(k) = y(k) + \xi(k). \quad (1.118)$$

Процесс декодирования реализуем в форме построения ДНУ, формирующего к моменту $k = n$ состояние $z(n)$, которое с точностью до матрицы преобразования подобия представляло бы собой вектор $\chi(0)$ начального состояния РКС. Векторно-матричное описание ДНУ – декодирующего устройства (ДКУ) принимает вид

$$z(k+1) = \Gamma z(k) + \mathbf{L} f(k); \quad z(0), \quad (1.119)$$

а структурное представление процесса декодирования – так, как показано на рисунке 1.19.

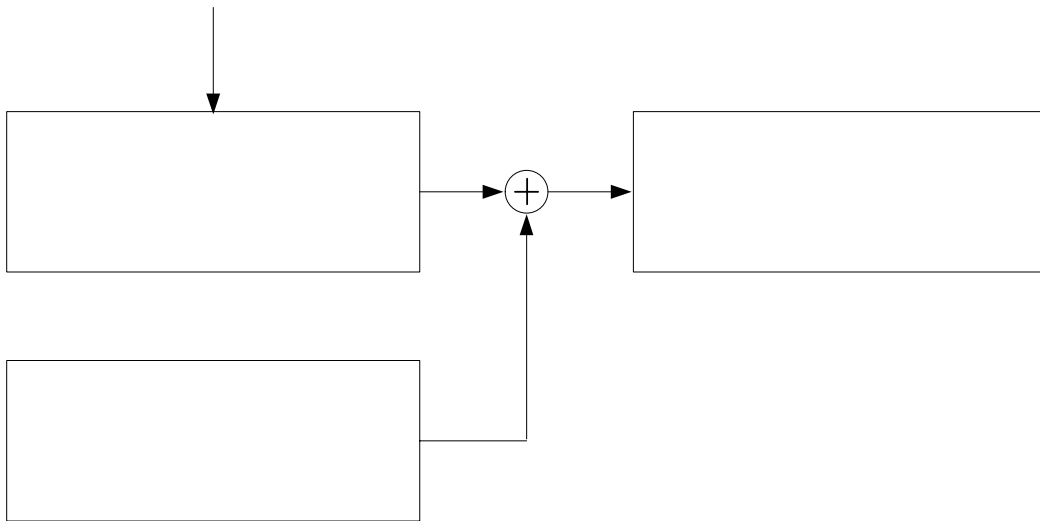


Рисунок 1.19. Структурное представление двоичного динамического наблюдения начального состояния регистра канала связи

Поставленная задача опирается на следующее утверждение.

Утверждение 1.24 (У1.24). Вектор $z(k)$ состояния ДКУ, построенного по структуре двоичного наблюдающего устройства для наблюдения векторов $x(0)$ и $\chi(0)$, задается соотношением

$$z(k) = \Gamma^k z(0) + (\mathbf{T}_\chi \mathbf{A}^k + \Gamma^k \mathbf{T}_\chi) \chi(0) + (\mathbf{T}_x \mathbf{F}^k + \Gamma^k \mathbf{T}_x) x(0), \quad (1.120)$$

где матричные компоненты \mathbf{T}_χ и \mathbf{T}_x вычисляются как решение матричных уравнений Сильвестра

$$\mathbf{T}_\chi \mathbf{A} + \Gamma \mathbf{T}_\chi = \mathbf{L} \mathbf{C}, \quad \mathbf{T}_x \mathbf{F} + \Gamma \mathbf{T}_x = \mathbf{L} \mathbf{P}. \quad \square \quad (1.121)$$

Доказательство утверждения ведется по той же схеме, что и доказательство У1.23. В рассмотрение вводится агрегированный вектор

$$\bar{z} = [z^T, \chi^T, x^T]^T. \quad (1.122)$$

Вектор (1.122) подчиняется рекуррентному векторно-матричному уравнению

χ

$$\bar{z}(k+1) = \bar{\Gamma} \bar{z}(k); \quad \bar{z}(0) = [z^T(0), \chi^T(0), x^T(0)]^T, \quad (1.123)$$

явное решение которого в показательной форме имеет вид

$$\bar{z}(k) = \bar{\Gamma}^k \bar{z}(0). \quad (1.124)$$

В (1.123) и (1.124) матрицы $\bar{\Gamma}$ и $\bar{\Gamma}^k$ имеют вид

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma & LC & LP \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix}; \quad \bar{\Gamma}^k = \begin{bmatrix} \Gamma^k & T_\chi A^k + \Gamma^k T_\chi & T_x F^k + \Gamma^k T_x \\ 0 & A^k & 0 \\ 0 & 0 & F^k \end{bmatrix} \quad (1.125)$$

Подстановка $\bar{\Gamma}^k$ из (1.125) в (1.124) и выделение из $\bar{z}(k)$ компонента $z(k)$ приводит к (1.120). ■

В стандартной постановке задачи декодирования [51] сформированный ДКУ синдром ошибки представляет собой образ вектора начального состояния $\chi(0)$ РКС, формируемого с помощью матрицы преобразования подобия T_χ . В этой связи выясним при каких условиях и свойствах матричных компонентов соотношения (1.120) последнее вырождается в соотношение вида (1.107), записываемое в форме

$$z(k^*) = T_\chi \chi(0). \quad (1.126)$$

Решение поставленной задачи получим с использованием положений следующего утверждения.

Утверждение 1.25 (У1.25). *Если ДНУ начального состояния $\chi(0)$ функционирует так, что всегда $z(0) = 0$, то есть перед запуском его состояние обнуляется, матрица Γ принадлежит показателю $\mu = n$, матрицы A и F обладают индексом нильпотентности $\nu = n$, матрица преобразования подобия T_x обладает свойством*

$$T_x G^T = O. \quad (1.127)$$

где G – образующая матрица систематического кода [51], то выполняется соотношение векторно-матричного подобия

$$z(n) = T_\chi \chi(0). \quad \square \quad (1.128)$$

Доказательство утверждения строится на определениях свойств нильпотентности матрицы и принадлежности матрицы показателю, а так же на использовании условия $z(0) = 0$, что приводит (1.120) к виду

$$z(n) = T_\chi \chi(0) + T_x x(0). \quad (1.129)$$

Напомним, что вектор $x(0)$ формируется из информационной части $x_u(0)$ систематического помехозащищенного кода с помощью образующей матрицы G кода в силу соотношения

$$x(0) = G^T x_u(0). \quad (1.130)$$

Если (1.130) подставить в (1.129) и учесть (1.127), то получим (1.128). ■

Следует заметить, что в силу (1.127) матрица T_x как решение матричного уравнения Сильвестра (1.121) является проверочной матрицей [51] систематического кода.

Пример 1.6 (Пр1.6)

В качестве примера рассмотрим аналитику решения в виде (1.130) задачи конструирования декодирующего устройства в форме ДНУ циклического кода с образующим многочленом $g(x) = x^3 + x + 1$.

Сконструируем ДКУ в форме ДНУ и кодирующее устройство в виде модельных представлений «вход-состояние-выход» с матричными компонентами

$$A = F = \left[\mathbf{0}_7 \mid \begin{array}{c} \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_6^T \end{array} \right], \quad C = P = \left[\mathbf{1} \mid \mathbf{0}_6^T \right]$$

соответственно.

Решение относительно матрицы T матричного уравнения (1.97) дает

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следует заметить тождественность результата для вычисленной матрицы T каноническому [51] представлению проверочной матрицы \tilde{H} циклического кода, который в рассматриваемом примере соответствует образующему многочлену $g(x) = x^3 + x + 1$, которая имеет вид

$$\tilde{H} = \left[\tilde{G}^T \mid \mathbf{I} \right]^T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]^T.$$

Заметим также, что процесс декодирования состоит в вычислении вектора ошибки (применительно к данному примеру – вектору состояния регистра канала связи см. рисунок 1.19) посредством умножения матрицы T^T на вектор начального состояния $\chi(0)$ РКС. Нетрудно видеть, что в силу равенств матриц T и \tilde{H}^T , процесс декодирования циклических кодов полностью совпадает с классическим его представлением. Структурная схема процесса декодирования циклического кода с образующим многочленом $g(x) = x^3 + x + 1$ представлена на рисунке 1.20. ■

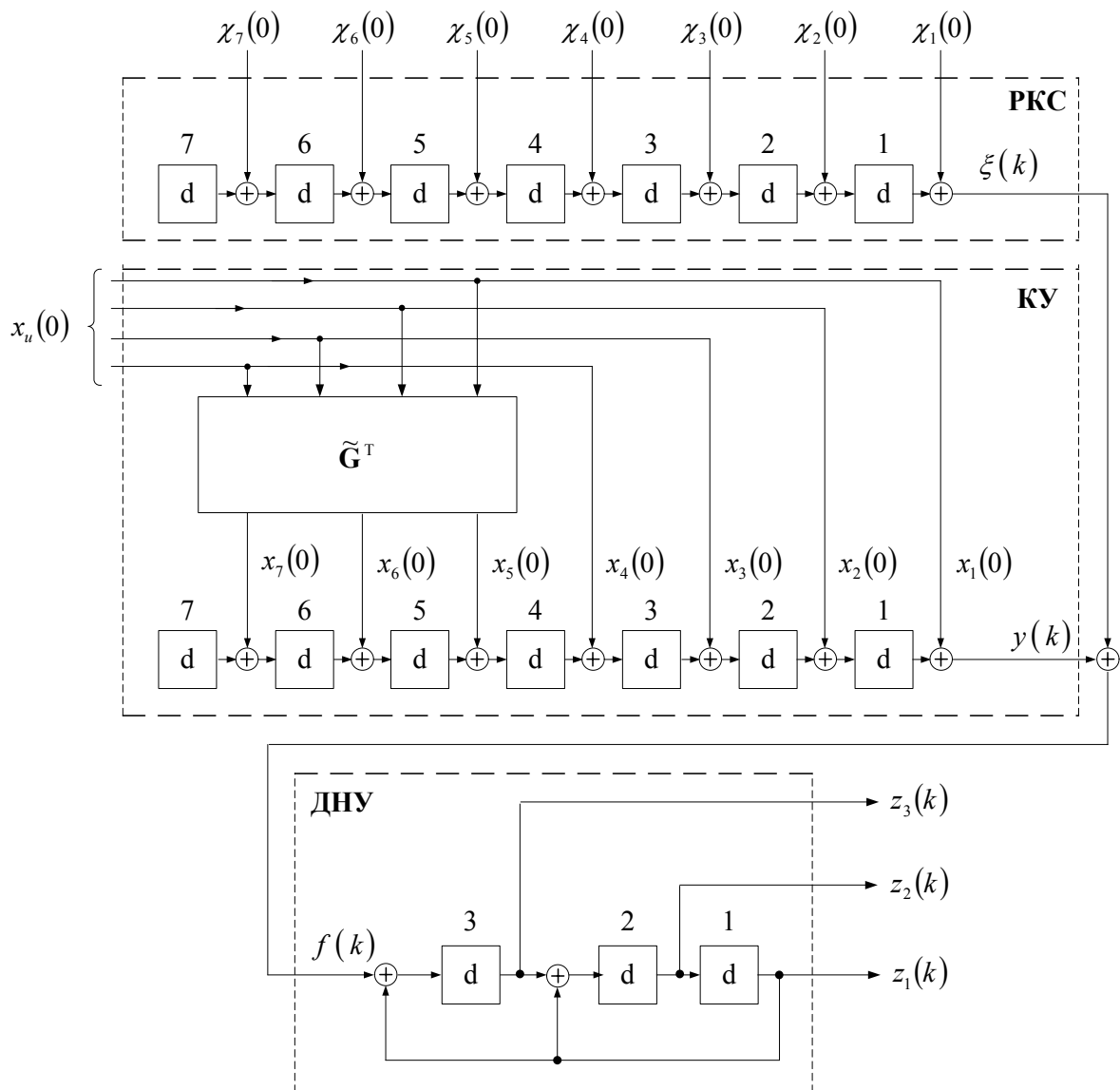


Рисунок 1.20. Структурное представление процесса декодирования циклического кода

1.5.3 Концепция подобию в задаче синтеза двоичных динамических систем в логике произвольных линейных триггеров

Решая поставленную задачу, следует отметить, что банк линейных триггеров состоит из **D**- и **T**- триггеров при этом так, как передаточная функция элемента памяти (ЭП), выполненного в виде **D**- триггера, характеризуется передаточной функцией

$$\Phi_{D \text{ ЭП}}(d) = d, \quad (1.131)$$

а в виде Т- триггера – характеризуется передаточной функцией

$$\Phi_{T \text{ эл}}(d) = \frac{d}{1+d}, \quad (1.132)$$

то векторы состояний ДДС, имеющих D- и T- триггерную реализацию, оказываются связанными отношениями подобия

$$x_T(k) = M x_D(k), \quad \forall k. \quad (1.133)$$

Пусть в результате синтеза ДДС, решающей задачу преобразования входной последовательности $u(k)$ в выходную $y(k)$, получена D- триггерная реализация системы, имеющая векторно-матричное представление

$$x_D(k+1) = A_D x_D(k) + B_D u(k), \quad y_D(k) = C_D x_D(k) + H u(k). \quad (1.134)$$

Требуется, опираясь на условие векторно-матричного подобия (1.133), построить T- триггерную реализацию системы

$$x_T(k+1) = A_T x_T(k) + B_T u(k), \quad y_T(k) = C_T x_T(k) + H u(k), \quad (1.135)$$

решающую ту же задачу кодопреобразования. Поставленную задачу решим, опираясь на следующие утверждения.

Утверждение 1.26 (У1.26). *Матричные компоненты векторно-матричных представлений (1.134) и (1.135) ДДС, решающих одну и ту же задачу кодопреобразования входной последовательности $u(k)$ в выходную $y(k)$, связаны соотношениями*

$$A_T = M A_D M^{-1}, \quad (1.136)$$

$$B_T = M B_D, \quad C_T = C_D M^{-1}. \quad \square \quad (1.137)$$

Доказательство утверждения строится на использовании (1.133), которое должно выполняться для $\forall k$, а потому оказывается справедливой запись

$$x_T(k+1) = M x_D(k+1), \quad \forall k. \quad (1.138)$$

Подстановка в (1.138) соотношений (1.134) и (1.135) приводит к справедливости (1.136) и первого соотношения в (1.137). Второе соотношение в (1.137) получается после подстановки (1.133) в выражение для выходной последовательности $y(k)$ в (1.135). ■

Утверждение 1.27 (У1.27). *Матричное условие подобия (1.136), записанное в форме*

$$M A_D = A_T M, \quad (1.139)$$

представимо в виде неоднородного матричного уравнения Сильвестра

$$M A_D + \bar{A}_T M = \bar{B}_T L_D, \quad (1.140)$$

где $\dim A_D = \dim \bar{A}_T$, (A_D, L_D) – полностью наблюдаемая пара матриц [4], (\bar{A}_T, \bar{B}_T) – полностью управляемая пара матриц, алгебраические спектры собственных значений матриц A_D и \bar{A}_T не пересе-

каются, то есть $\sigma\{A_D\} \cap \sigma\{\bar{A}_T\} = \emptyset$, размерности матриц \bar{B}_T, L_D согласованы в силу соотношения $\dim \bar{B}_T = \dim L_D$. \square

Доказательство утверждения строится на представлении матрицы A_T в форме

$$A_T = \bar{A}_T + \bar{B}_T \bar{N}_T, \quad (1.141)$$

где матрица \bar{N}_T допускает представление

$$\bar{N}_T = L_D M^{-1}. \quad (1.142)$$

Выражение (1.142) допускает эквивалентное представление

$$L_D = \tilde{N}_T M. \quad (1.143)$$

Подстановка (1.143) в (1.140) с учетом (1.141) приводит к (1.139). \blacksquare

Утверждение **(У1.27)** является основой следующего алгоритма синтеза ДДС в логике Т- триггеров.

*Алгоритм 1.5 (А1.5)
конструирования двоичных динамических систем
в логике произвольных линейных триггеров*

10. Выполнить **А1.2**, получив представление линейной ДДС в форме (1.138).
11. Назначить произвольные матрицы \bar{A}_T, \bar{B}_T и L_D , удовлетворяющие условиям **У1.30**.
12. Решить матричное уравнение Сильвестра (1.140) относительно матрицы подобия M и вычислить матрицу M^{-1} .
13. Сконструировать матричные компоненты Т-триггерной реализации линейной ДДС (1.138) с помощью соотношений (1.136) и (1.137). \blacksquare

Следует отметить, что так как нелинейные ДДС, именуемые конечными автоматами, имеют линейные аналоги, то, как представляется авторам, концепция подобия может быть распространена и на этот класс ДДС.

Пример 1.7 (Пр1.7)

Построить для декодирующего устройства циклического кода с образующим многочленом $g(x) = x^3 + x + 1$ модельное представление ДДС в логике линейных Т-триггеров.

1. Выполнение п.1 **А1.5** формирует модельное «вход-состояние-выход» представление декодирующего устройства с матричными компонентами

$$A_D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_D = [1 \ 0 \ 0], \quad H = [1].$$

2. Назначение произвольных матриц \bar{A}_T, \bar{B}_T и L_D , удовлетворяющих условиям У1.27, дает

$$\tilde{A}_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L_D = [1 \ 0 \ 0].$$

3. Выполнение п.3 алгоритма, состоящее в решении матричного уравнения Сильвестра (1.138) относительно матрицы подобия M , приводит к матрице

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ соответственно.}$$

4. С помощью соотношений (1.136) и (1.137) конструирование матричных компонентов Т-триггерной реализации ДДС, описываемой матричными компонентами, полученными в п.1 алгоритма, дает матричные компоненты искомого векторно-матричного описания

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_T = [1 \ 0 \ 1].$$

Структурное представление векторно-матричного описания искомой ДДС с полученными компонентами A_T, B_T, C_T имеет вид, как показано на рисунке 1.21. ■

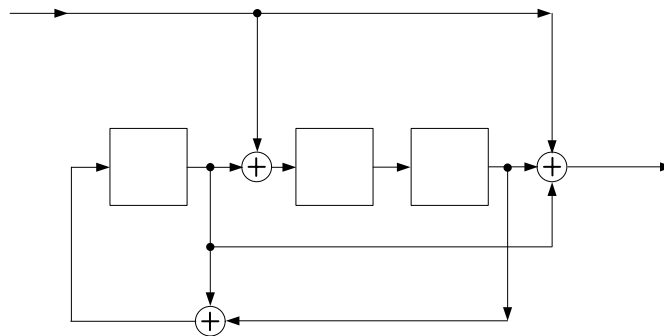


Рисунок 1.21

1.6. Векторно-матричное представление линейного помехозащитного кодопреобразования,

**непараметризованное дискретным временем.
Методы формирования матриц помехозащищенных кодов**

Процесс линейного помехозащитного кодопреобразования как в фазе кодирования, так и в фазе декодирования [15, 42, 55, 51] как частный случай линейного кодопреобразования имеет три модельных представления, приведенных в параграфе 1.1. В данном параграфе используется векторно-матричное представление линейного помехозащитного кодопреобразования, непараметризованное дискретным временем, при этом особое внимание обращается на методы формирования образующей и проверочной матриц помехозащищенного кода (ПЗК).

Полная схема, описывающая процесс кодирования, состоящий в преобразовании исходного помехонезащищенного кода в помехозащищенный, его передачу по двоичному каналу связи, сопровождающуюся искажением помехозащищенного кода, и процесс декодирования принятого из КС кода с целью формирования кода синдрома (опознавателя) внесенной при передаче ошибки (искажения), приведена на рисунке 1.22.

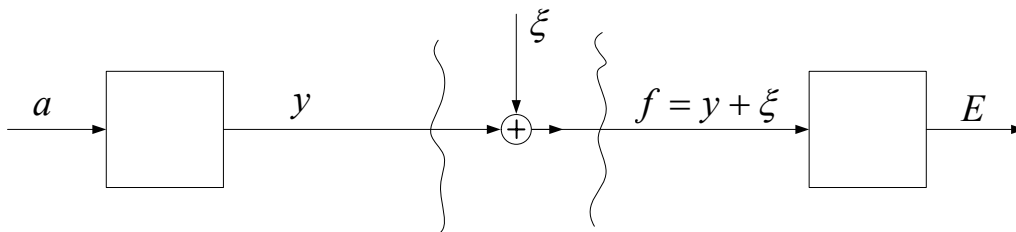


Рисунок 1.22

На рисунке 1.22: КУ – кодирующее устройство; КС – канал связи, искажение в котором моделируется сумматором по модулю два помехозащищенного кода и кода ошибки; ДКУ – декодирующее устройство, формирующее синдром ошибки; a – вектор-строка исходного помехонезащищенного кода, $\dim a = k$; y – вектор-строка помехозащищенного (n, k) -кода, наблюдаемого на выходе КУ, $\dim y = n$, $n > k$, $m = n - k$ – число вводимых избыточных разрядов кода y ; ξ – вектор-строка помехи, действующей на КС, $\dim \xi = n$; $f = y + \xi$ – вектор-строка искаженного кода, принимаемого из КС; E – вектор-строка синдрома ошибки (искажения) в принятой из КС кодовой комбинации, $\dim E = m$.

Процесс формирования вектор-строки помехозащищенного кода y из вектор-строки помехонезащищенного кода a , осуществляемый в КУ, может быть описан линейным векторно-матричным соотношением

$$y = a\mathbf{G}, \quad (1.144)$$

где \mathbf{G} – $(k \times n)$ -матрица, именуемая образующей матрицей [42, 51] помехозащищенного линейного кода y .

Процесс искажения передаваемой кодовой комбинации y в канале связи под действием помехи ξ такой, что на выходе КС формируется вектор-строка искаженного кода f , может быть представлен операцией суммирования

$$f = y + \xi, \quad (1.145)$$

соответствующих вектор-строк.

И, наконец, процесс декодирования, состоящий в формировании вектор-строки синдрома (опознавателя) E из вектор-строки принятого из КС искаженного кода f может быть описан векторно-матричным соотношением

$$E = f\mathbf{H}, \quad (1.146)$$

где \mathbf{H} – $(k \times n)$ -матрица, именуемая проверочной [42, 51] матрицей помехозащищенного кода y .

Заметим, что все операции умножения и суммирования в соотношениях (1.144) – (1.146) и ниже осуществляются по правилам модулярной арифметики с модулем два ($\text{mod } 2$).

Выясним: какими свойствами должна обладать пара матриц (\mathbf{G}, \mathbf{H}) с тем, чтобы она порождала помехозащищенный код?

С этой целью сформулируем утверждение.

Утверждение 1.28 (У1.28). *Матрица \mathbf{G} , принятая за образующую матрицу, и матрица \mathbf{H} , принятая за проверочную матрицу, порождают помехозащищенный код, если они удовлетворяют матричному соотношению*

$$\mathbf{GH} = \mathbf{O}. \quad \square \quad (1.147)$$

Доказательство утверждения строится [42] на использовании соотношений (1.146), (1.145) и (1.144). Если в (1.146) подставить (1.145), в котором учесть (1.144), то получим цепочку равенств

$$E = f\mathbf{H} = (y + \xi)\mathbf{H} = (a\mathbf{G} + \xi)\mathbf{H} = a\mathbf{GH} + \xi\mathbf{H}. \quad (1.148)$$

Напомним, что декодирующие устройства помехозащищенных кодов, построенные в прямой логике, функционируют так, что при отсутствии ошибки в принятой кодовой комбинации декодирующее устройство формирует нулевой синдром, а в случае наличия ошибок, для обнаружения или исправления которых осуществлено помехозащитное

кодирование, ДКУ формирует соответствующий ненулевой синдром. Таким образом ДКУ реализует соотношение

$$E = E(\xi)|_{\xi=0} = \mathbf{O}, \quad E = E(\xi)|_{\xi \neq 0} \neq \mathbf{O}. \quad (1.149)$$

Если теперь в (1.148) положить $\xi = 0$, то в силу первого из соотношений (1.149) получим векторно-матричное равенство

$$E = a\mathbf{GH} = \mathbf{O}, \quad (1.150)$$

выполняемое при любых вектор-строках исходного кода a , что доказывает справедливость утверждения. ■

Примечание 1.1 (ПМ1.1). *Следует заметить, что характеристическое свойство (1.147) матриц ПЗК не нарушается при перестановке строк образующей матрицы \mathbf{G} и столбцов проверочной матрицы \mathbf{H} . При перестановке столбцов матрицы \mathbf{G} для сохранения (1.147) необходима согласованная перестановка строк матрицы \mathbf{H} . □*

Нетрудно видеть, что соотношения (1.147) – (1.149) содержат доказательство следующего утверждения.

Утверждение 1.29 (У1.29). *Процедура формирования синдрома E имеет два эквивалентных представления (1.145) и*

$$E = \xi \mathbf{H}. \quad \blacksquare \quad (1.151)$$

Следует заметить, что векторно-матричные представления (1.146) и (1.149) имеют различную нагрузку и среду реализацию. Первое используется в аппаратной среде, а второе – в аналитической при формировании проверочной матрицы \mathbf{H} помехозащищенного кода.

Заметим так же, что доказательство У1.28 делает справедливым положения следующего утверждения.

Утверждение 1.30 (У1.30). *Пара матриц (\mathbf{G}, \mathbf{H}) размерности $\dim \mathbf{G} = k \times n$ и $\dim \mathbf{H} = n \times t$, удовлетворяющие матричному соотношению (1.147), принятые соответственно за образующую и проверочную матрицы кода, порождают помехозащищенный (n, k) -код, характеризующийся корректирующей способностью, определяемой мощностью $[\{E\}]$ множества $\{E\}$ ненулевых синдромов, задаваемой в силу (1.149) соотношением*

$$[\{E\}] = 2^m - 1. \quad \blacksquare \quad (1.152)$$

Поставим теперь задачу конструирования алгоритмов формирования образующей \mathbf{G} и проверочной \mathbf{H} матриц помехозащищенного кода. Эта задача не инвариантна относительно требований к блоковой систематике формируемого помехозащищенного кода. В связи с этим введем следующие определения.

Определение 1.8 (О1.8). *Систематическим помехозащищенным кодом называется код, элементы которого представляют собой комбинации элементов исходного помехозащищенного кода. При этом ПЗК называется линейным, если эти комбинации строятся на основе*

линейных бинарных операций модулярной арифметики, и нелинейным, если комбинации строятся на основе нелинейных бинарных операций модулярной арифметики. □

Нетрудно видеть, что ПЗК, сформированные в силу правила (1.144), являются систематическими и линейными, при этом вся систематика помехозащищенного линейного кода u заложена в образующей матрице G .

Определение 1.9 (О1.9). *Систематический ПЗК называется систематическим помехозащищенным кодом с полной блоковой систематикой, если проверочные разряды кода, вводимые в структуру ПЗК процедурой кодирования, и информационные разряды, образованные исходным помехозащищенным кодом (ПНЗК) a , представляют собой отдельные монолитные блоки.* □

Следует заметить, что в современной телекоммуникационной технике, в которой преобладает передача кодов «старшим разрядом вперед», в ПЗК с полной блоковой систематикой исходный ПНЗК образует старшие разряды кода, а блок проверочных разрядов – младшие его разряды.

Определение 1.10 (О1.10). *Систематический ПЗК называется кодом с неполной блоковой систематикой, если разряды исходного ПНЗК и проверочные разряды ПЗК перемежаются, не образуя монолитные блоки.* □

С целью конструирования алгоритмов формирования матриц G и H ПЗК сформулируем дополнительно следующее утверждение.

Утверждение 1.31 (У1.31). *Если помехозащищенный код исправляет ошибки кратности $\gamma = \overline{1, s}$, то синдром $E_{j\gamma}$ ошибки $\xi_{j\gamma}$ в γ разрядах для j -ой их комбинации $j = \overline{1, C_n^\gamma}$ равен сумме по модулю два γ строк $H^i, i = \overline{1, n}$ проверочной матрицы H однократных ошибок, сумма которых образует данную ошибку $\xi_{j\gamma}$.* □

Доказательство утверждения строится на использовании соотношения (1.149), в котором вектор-строку синдрома E , вектор-строку ошибки ξ следует писать в поэлементной форме

$$E = \text{row}\{E_\lambda, \lambda = \overline{1, m}\}, \quad \xi = \text{row}\{\xi_i, i = \overline{1, n}\}, \quad (1.153)$$

а проверочную матрицу H записать в столбцовой форме

$$H = \text{col}\{H^i, i = \overline{1, n}\}, \quad (1.154)$$

где H^i – i -я строка матрицы H . Подстановка компонентов соотношения (1.149), представленных в форме (1.153), (1.154), в соотношение (1.152) доказывает справедливость утверждения. ■

Примечание 1.2 (ПМ1.2). Нетрудно видеть, что если при кодировке векторов ошибок ξ векторами-синдромами E при построении ПЗК, исправляющего ошибки кратности $s > 1$ или обнаруживающего ошибки кратности $r > 2$, учтены условия У1.31, то достаточно иметь таблицу кодировок ошибок ξ только первой кратности. Ниже при построении алгоритмов формирования матриц \mathbf{G} и \mathbf{H} кода предполагается, что условия У1.31 выполняются. \square

Утверждение 1.32 (У1.32). Столбцы $\mathbf{H}_\lambda, \lambda = \overline{1, m}$ матрицы \mathbf{H} принадлежат ядру матрицы \mathbf{G} так, что выполняются соотношения

$$\mathbf{H}_\lambda \in \ker \mathbf{G} \vee \mathbf{G}\mathbf{H}_\lambda = \mathbf{O}; \quad (1.155)$$

в свою очередь столбцы $\mathbf{G}_j^T, j = \overline{1, k}$ транспонированной \mathbf{G}^T образующей матрицы принадлежат ядру транспонированной \mathbf{H}^T проверочной матрицы кода так, что выполняются соотношения

$$\mathbf{G}_j^T \in \ker \mathbf{H}^T \vee \mathbf{H}^T \mathbf{G}_j^T = \mathbf{O}. \quad \square \quad (1.156)$$

Доказательство утверждения строится на представлении матричного соотношения (1.147) в векторно-матричной форме с использованием правых вектор-столбцов

$$\mathbf{G}[\mathbf{H}_1 \mid \mathbf{H}_2 \mid \mathbf{K} \mid \mathbf{H}_\lambda \mid \mathbf{K} \mid \mathbf{H}_m] = \mathbf{O}, \quad (1.157)$$

что позволяет записать

$$\mathbf{G}\mathbf{H}_\lambda = \mathbf{O}, \lambda = \overline{1, m} \vee \mathbf{H}_\lambda \in \ker \mathbf{G}.$$

в свою очередь матричное соотношение (1.147) в транспонированной форме по аналогии с (1.157) может быть записано в виде

$$\mathbf{H}^T \mathbf{G}^T = \mathbf{H}^T [\mathbf{G}_1^T \mid \mathbf{G}_2^T \mid \mathbf{K} \mid \mathbf{G}_j^T \mid \mathbf{K} \mid \mathbf{G}_k^T] = \mathbf{O},$$

что позволяет записать

$$\mathbf{H}^T \mathbf{G}_j^T = \mathbf{O}, j = \overline{1, k} \vee \mathbf{G}_j^T \in \ker \mathbf{H}^T. \quad \blacksquare$$

Утверждение 1.33 (У1.33). Матрицы \mathbf{G} и \mathbf{H} , сформированные в виде

$$\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k \mid \tilde{\mathbf{G}}], \mathbf{H} = \left[\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{G}} \\ \mathbf{I}_m \end{array} \right]. \quad (1.158)$$

где \mathbf{I}_k – $k \times k$ -единичная матрица, \mathbf{I}_m – $m \times m$ -единичная матрица, $\tilde{\mathbf{G}}$ – $k \times m$ -матрица синдромов однократных ошибок вида

$$\xi = \left[\begin{array}{c} \tilde{\xi} \\ \mathbf{O}_m \end{array} \right], \quad (1.159)$$

где $\tilde{\xi}$ – k -мерный вектор-строка, содержащий одну единицу, \mathbf{O}_m – m -мерная нулевая вектор-строка, порождают помехозащищенный код, обладающий полной блочной систематикой. \square

Доказательство утверждения в первой части состоит в непосредственной подстановке матриц \mathbf{G} и \mathbf{H} вида (1.158) в (1.147), которая приводит к

$$\mathbf{GH} = [\mathbf{I}_k \mid \tilde{\mathbf{G}}] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{G}} + \tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{O}.$$

Доказательство второй части утверждения строится на подстановке матрицы \mathbf{G} вида (1.158) в (1.144)

$$y = a\mathbf{G} = a[\mathbf{I} \mid \tilde{\mathbf{G}}] = [a \mid a\tilde{\mathbf{G}}], \quad (1.160)$$

что обнаруживает полную блочную систематику ПЗК y . ■

Алгоритмы формирования матриц \mathbf{G} и \mathbf{H} ПЗК различаются последовательностью этой процедуры. Сначала рассмотрим процедуры формирования матриц помехозащищенного кода, в которых сперва конструируется проверочная матрица \mathbf{H} , а затем на основе сформулированных утверждений вычисляется образующая матрица \mathbf{G} ПЗК. Вторую группу алгоритмов составляют процедуры, в которые на первом этапе формируется матрица \mathbf{G} кода, а затем формируется проверочная матрица \mathbf{H} ПЗК.

1.6.1 Формирование матриц ПЗК с помощью проверочных равенств при декодировании и кодировании

Процедура формирования матриц \mathbf{H} и \mathbf{G} ПЗК, основанная на использовании проверочных равенств при декодировании и кодировании, инвариантна относительно требований к блочной систематике кода. По существу уровень блочной систематики в структуре проверочной матрицы \mathbf{H} кода закладывается в силу (1.146) и У1.31 на первом шаге процедуры, состоящем в кодировке векторов-строк ошибок ξ_j векторами-строками синдромов E_j . Следует заметить, что на этапе кодировки ошибок ξ_j синдромами E_j может быть так же заложен [42, 51] способ технической реализации исправления ошибки(ок) в принятой кодовой комбинации. Так кодировкой ошибок ξ_j синдромами E_j по схеме Р. Хэмминга [42, 51] закладывается возможность технической реализации исправления однократных ошибок с использованием стандартных дешифраторов [27, 51].

Алгоритм 1.6 (A1.6)
формирования матриц ПЗК с помощью проверочных равенств
при кодировании и декодировании

14. Составить таблицу кодировок векторов-строк однократных ошибок ξ_j векторами-строками синдромов E_j , начиная с ошибки в старшем разряде $\xi_n = [1 \mid \mathbf{O}_{n-1}]$ и заканчивая ошибкой в младшем разряде $\xi_1 = [\mathbf{O}_{n-1} \mid 1]$, где \mathbf{O}_{n-1} – $(n-1)$ -мерная нулевая вектор-строка, так, что E_j удовлетворяют условиям **У1.31** и принятым техническим соображениям относительно процедуры коррекции искаженного кода.

15. Сформировать проверочную матрицу \mathbf{H} на основании составленной таблицы кодировок и соотношения (1.151), которая построчно должна удовлетворять условию

$$\mathbf{H}^j = E_{n+1-j}; \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.161)$$

16. На основании составленной проверочной матрицы \mathbf{H} кода и соотношения (1.146), описывающего процесс формирования синдрома в аппаратной среде ДКУ, составить аналитические выражения для каждого разряда $E_\lambda, \lambda = \overline{m, 1}$ синдрома как функции принятой из КС искаженной кодовой комбинации $f = \text{row}\{f_{n+1-j}; j = \overline{1, n}\}$ в силу соотношения

$$E_\lambda = f \mathbf{H}_{m+1-\lambda}, \quad \lambda = \overline{1, m}, \quad (1.162)$$

где $\mathbf{H}_{m+1-\lambda}$ – $(m+1-\lambda)$ -ый столбец матрицы \mathbf{H} .

17. Сформировать аналитические выражения для помехозащитного кодирования помехонезащищенного кода $a = \text{row}\{a_i, i = \overline{k, 1}\}$, для чего записать соотношения (1.162) в предположении, что в КС отсутствует помеха ($\xi = 0$), положив, тем самым, справедливость выполнения условий

$$E_\lambda = 0, f_{n+1-j} = y_{n+1-j}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.163)$$

порождающих систему равенств

$$0 = y \mathbf{H}_{m+1-\lambda} = y_{n+1-j}, \quad \lambda = \overline{1, m}, \quad (1.164)$$

допускающих явное разрешение относительно разрядов y_j ПЗК как функций разрядов a_i помехонезащищенного кода в форме

$$y_j = y_j(a_i, i = \overline{1, k}), \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.165)$$

18. Сформировать образующую матрицу $\mathbf{G} = \text{row}\{\mathbf{G}_j, j = \overline{1, n}\}$ кода на основании соотношения (1.144) в силу условия

$$\mathbf{G}_j = \text{arg}\{y_j = a \mathbf{G}_j = y_j(a_i, i = \overline{1, k}); j = \overline{1, n}\}, \quad (1.166)$$

в котором известны вектор-строка помехонезащищенного кода a , а также линейная связь y_j и a_i в форме (1.165). ■

1.6.2 Формирование матриц ЦПЗК с использованием матричного уравнения Сильвестра

На возможность использования матричного уравнения Сильвестра для формирования проверочной матрицы циклического помехозащищенного кода (ЦПЗК) указано в параграфе 1.4. Эти возможности в систематизированном виде являются основой алгоритма 1.7 формирования указанной матрицы ЦПЗК.

*Алгоритм 1.7 (А1.7)
формирования проверочной матрицы ЦПЗК
на основе использования матричного уравнения Сильвестра*

1. Сформировать k -разрядный ПНЗК на основе мощности $[Q] = N_u$ заданного массива Q передаваемой или хранимой информации так, что

$$k = \text{arg}\{2^k \geq N_u = [Q]\} \quad (1.167)$$

2. Сформировать число m проверочных разрядов, удовлетворяющих требованиям к достоверности передачи или хранения информации и к способу реализации корректирующей способности синтезируемого ПЗК.

3. Выбрать неприводимый модулярный многочлен $g(\lambda)$ степени $\text{deg } g(\lambda) = m$, удовлетворяющий всем требованиям к корректирующей способности кода [28, 42, 51].

4. Задать $m \times m$ -матрицу $\mathbf{\Gamma}$ в произвольном базисе

$$\mathbf{\Gamma} = \text{arg}\{\det(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{\Gamma}) = g(\lambda)\}, \quad (1.168)$$

так, чтобы она обладала характеристическим полиномом $g(\lambda)$.

5. Выбрать матрицу \mathbf{L} размерности $m \times l$, образующую с матрицей $\mathbf{\Gamma}$ полностью управляемую пару $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{L})$.

6. Задать матрицу A размерности $n \times n$, где $n = k + m$, с индексом нильпотентности ν равным $\nu = n$ в канонической Жордановой [12, 13] форме

$$A = J\{\lambda = 0\}. \quad (1.169)$$

7. Выбрать матрицу P размерности $l \times n$, образующую с матрицей A полностью наблюдаемую пару (A, P) матриц.

8. Найти решение матричного уравнения Сильвестра

$$T A + G T = L P \quad (1.170)$$

относительно матрицы T .

9. Сформировать проверочную матрицу H помехозащищенного (n, k) -кода в силу соотношения

$$H = T^T \cdot \blacksquare \quad (1.171)$$

Примечание 1.3 (ПМ.1.3). Множество формируемых матриц H с помощью приведенного алгоритма (А1.7) может быть существенно расширено, если в матрицах L и P допустить отличное от единицы соответственно число столбцов и строк, но при этом они всякий раз должны быть согласованы с тем, чтобы существовало их произведение LP . \square

1.6.3 Использование сингулярного разложения матриц в задаче формирования матриц ПЗК

Рассмотрим теперь алгоритм конструирования образующей матрицы G ПЗК по известной проверочной матрице H , который основан на положениях У1.32 и использующий возможности сингулярного разложения (SVD-процедуры) матриц [12, 16]. С этой целью сделаем некоторые пояснения.

Определение 1.11 (О1.11). Сингулярным разложением [12, 16] $\nu \times \mu$ матрицы N над произвольным полем называется ее представление в форме

$$N = U \Sigma V^T, \quad (1.172)$$

где U – $\nu \times \nu$ -матрица левого сингулярного базиса, V – $\mu \times \mu$ -матрица правого сингулярного базиса, обладающие свойством над этим полем

$$U U^T = U^T U = I_\nu, \quad V V^T = V^T V = I_\mu, \quad (1.173)$$

Σ – $\nu \times \mu$ -квазидиагональная матрица сингулярных чисел, размещаемых на главной диагонали, при этом их число равно $\min\{\nu, \mu\}$. \square

Если с помощью (1.172) сконструировать матрицы NN^T и N^TN , то в силу (1.173) получим

$$NN^T = U\Sigma\Sigma^T U^T; \quad N^TN = V\Sigma^T \Sigma V^T, \quad (1.174)$$

при этом оказывается, что сингулярные числа совпадают с арифметическими значениями корней из собственных значений матриц NN^T и N^TN . Элементы левого сингулярного базиса U являются нормированными собственными векторами матрицы NN^T , а элементы правого сингулярного базиса V являются нормированными собственными векторами матрицы N^TN .

Выделим случай реализации $\nu \times \mu$ -матрицы N , которая характеризуется выполнением условия

$$\mu < \nu, \quad (1.175)$$

тогда [12, 16] $\mu - \nu$ последних столбцов матрицы V правого сингулярного базиса будут принадлежать ядру матрицы N , что записывается в форме

$$V_i \in \ker N, \quad i = \overline{\nu + 1, \mu}. \quad (1.176)$$

Для построения алгоритма формирования образующей матрицы G ПЗК по известной проверочной матрице H , необходимо положить $N = H^T$.

Если с помощью (1.172) сконструировать матрицы NN^T и N^TN , то в силу (1.173) получим

$$NN^T = U\Sigma\Sigma^T U^T; \quad N^TN = V\Sigma^T \Sigma V^T, \quad (1.174)$$

при этом оказывается, что сингулярные числа совпадают с арифметическими значениями корней из собственных значений матриц NN^T и N^TN . Элементы левого сингулярного базиса U являются нормированными собственными векторами матрицы NN^T , а элементы правого сингулярного базиса V являются нормированными собственными векторами матрицы N^TN .

Выделим случай реализации $\nu \times \mu$ -матрицы N , которая характеризуется выполнением условия

$$\mu < \nu, \quad (1.175)$$

тогда [12, 16] $\mu - \nu$ последних столбцов матрицы V правого сингулярного базиса будут принадлежать ядру матрицы N , что записывается в форме

$$V_i \in \ker N, \quad i = \overline{\nu + 1, \mu}. \quad (1.176)$$

Для построения алгоритма формирования образующей матрицы \mathbf{G} ПЗК по известной проверочной матрице \mathbf{H} , необходимо положить $\mathbf{N} = \mathbf{H}^T$.

*Алгоритм 1.8 (A1.8)
формирования образующей матрицы \mathbf{G} ПЗК
по известной проверочной матрице \mathbf{H}
с использованием SVD-процедуры*

1. Сформировать проверочную $n \times m$ -матрицу \mathbf{H} помехозащищенного (n, k) -кода с помощью приведенных A1.6 и A1.7.

2. Построить сингулярное разложение $m \times n$ -матрицы \mathbf{H}^T в форме

$$\mathbf{H}^T = \mathbf{U}_n \boldsymbol{\Sigma}_n \mathbf{V}_n^T, \quad (1.177)$$

где $\dim \mathbf{U}_n = m \times m$, $\dim \boldsymbol{\Sigma}_n = m \times n$, $\dim \mathbf{V}_n = n \times n$.

3. Сконструировать ядро матрицы \mathbf{H}^T в форме

$$\ker \mathbf{H}^T = \text{row} \{v_i \in (\ker \mathbf{H}^T), \quad i = \overline{m+1, n}\}. \quad (1.178)$$

4. В силу соотношений (1.156) сформировать образующую матрицу \mathbf{G} помехозащищенного (n, k) -кода в форме

$$\mathbf{G} = (\ker \mathbf{H}^T)^T. \quad \blacksquare \quad (1.179)$$

1.6.4 Формирование матриц ПЗК с полной блоковой систематикой

Рассмотрим проблемы формирования матриц \mathbf{G} и \mathbf{H} ПЗК с полной блоковой систематикой. Если формирование матриц кода осуществляется с помощью алгоритма 1.6, то блоковая систематика закладывается на этапе кодировке вектор-строк однократных ошибок ξ_j в m младших разрядах помехозащищенного (n, k) -кода векторами-строками синдромов E_j так, чтобы последние m синдромов в таблице кодировок образовывали $m \times m$ -единичную матрицу \mathbf{I}_m . При этом проверочная матрица \mathbf{H} (n, k) -кода примет вид (1.158), который в силу положений утверждения У.1.33 является основой для формирования образующей матрицы \mathbf{G} ПЗК в форме (1.158).

Завершим рассмотрение поставленной проблемы формирования матриц (\mathbf{G}, \mathbf{H}) помехозащищенного (n, k) -кода случаев циклических ПЗК, матрицы которых обладают полной блоковой систематикой. Приводимый ниже алгоритм строится на базе работ [42, 44].

Алгоритм 1.9 (А1.9) конструирования матриц циклического ПЗК с полной блоковой систематикой

1. Выполнить п.п. 1 – 3 алгоритма 1.7.
2. Вычислить остаток $r_i(x)$ от деления ММ, производимого на образующий ММ $g(x)$ в силу соотношения

$$r_i(x) = \text{rest} \frac{x^{n-i}}{g(x)}; \quad i = \overline{1, k}. \quad (1.180)$$

3. Сформировать кодовые аналоги остатков $r_i(x)$ в форме m -разрядных вектор-строк

$$\tilde{\mathbf{G}}^i = \kappa \left\{ r_i(x) = \text{rest} \frac{x^{n-i}}{g(x)}; \quad i = \overline{1, k} \right\}, \quad (1.181)$$

где $\kappa\{(\bullet)\}$ – код ММ (\bullet) .

4. Сформировать $k \times m$ -матрицу $\tilde{\mathbf{G}}$ кодов остатков в силу соотношения

$$\tilde{\mathbf{G}} = \text{col} \left\{ \tilde{\mathbf{G}}^i; \quad i = \overline{1, k} \right\}. \quad (1.182)$$

5. С использованием соотношения (1.158) сформировать образующую \mathbf{G} и проверочную \mathbf{H} матрицы циклического ПЗК с полной блоковой систематикой. ■

Пример 1.8 (Пр1.8)

Решается задача формирования матриц \mathbf{G} и \mathbf{H} ПЗК $(15,7)$, исправляющего ошибки кратности $s = 2$ и обладающего синдромами однократных ошибок, удовлетворяющих условиям **У1.31**.

Формирование матриц требуется осуществлять с помощью проверочных равенств при декодировании и кодировании. Тогда, следуя алгоритму **1.6**:

1. Составим таблицу 1.2 однократных ошибок, используя синдромы группового кода [50], исправляющие ошибки кратности $s = 2$.
2. Составим проверочную матрицу \mathbf{H} , используя соотношение (1.158), в результате чего получим

$$\mathbf{H} = \text{col} \left\{ \mathbf{H}^j = E_{n+1-j}; \quad j = \overline{1,15} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Таблица 1.2

Номер искаженного раз- ряда	Синдром $E = [E_8 E_7 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1]$	Номер искаженного раз- ряда	Синдром $E = [E_8 E_7 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1]$
15	1 1 0 1 1 0 1 1	7	0 0 1 0 0 0 0 0
14	1 0 1 1 0 1 0 1	6	0 0 0 1 0 0 0 0
13	1 0 0 1 0 1 1 0	5	0 0 0 0 1 1 1 1
12	1 0 0 0 0 0 0 0	4	0 0 0 0 1 0 0 0
11	0 1 1 0 1 0 1 0	3	0 0 0 0 0 1 0 0
10	0 1 0 1 0 1 0 1	2	0 0 0 0 0 0 1 0
9	0 1 0 0 0 0 0 0	1	0 0 0 0 0 0 0 1
8	0 0 1 1 0 0 1 1		

3. Составим аналитические выражения для каждого разряда $E_{\lambda, \lambda = \overline{m, l}}$ синдрома в силу соотношения (1.162), которые примут вид

$$\begin{aligned} E_8 &= f_{15} + f_{14} + f_{13} + f_{12} \\ E_7 &= f_{15} + f_{11} + f_{10} + f_9 \\ E_6 &= f_{14} + f_{11} + f_8 + f_7 \\ E_5 &= f_{15} + f_{14} + f_{13} + f_9 + f_8 + f_6 \\ E_4 &= f_{15} + f_{11} + f_5 + f_4 \\ E_3 &= f_{14} + f_{13} + f_{10} + f_5 + f_3 \\ E_2 &= f_{15} + f_{13} + f_{11} + f_8 + f_5 + f_2 \\ E_1 &= f_{15} + f_{14} + f_{10} + f_8 + f_5 + f_1 \end{aligned}$$

4. Сформируем аналитические выражения для помехозащитного кодирования, используя соотношения (1.163), в результате чего получим

$$\begin{aligned} y_{12} &= y_{15} + y_{14} + y_{13} \\ y_9 &= y_{15} + y_{11} + y_{10} \\ y_7 &= y_{14} + y_{11} + y_8 \\ y_6 &= y_{15} + y_{14} + y_{13} + y_{10} + y_8 \\ y_4 &= y_{15} + y_{11} + y_5 \\ y_3 &= y_{14} + y_{13} + y_{10} + y_5 \\ y_2 &= y_{13} + y_{15} + y_{11} + y_8 + y_5 \\ y_1 &= y_{15} + y_{14} + y_{10} + y_8 + y_5 \end{aligned}$$

5. Сформируем образующую матрицу \mathbf{G} ПЗК (15,7), используя соотношение (1.166). Для этого заметим, что соотношения, полученные в п.4 алгоритма, обнаруживают, что проверочными разрядами ПЗК являются 12, 9, 7, 6, 4, 3, 2, 1, а информационными – 15, 14, 13, 11, 10, 8, 5-й разряды. Если теперь процесс (1.144) формирования ПЗК записать в развернутой форме

$$\begin{aligned} &[y_{15} y_{14} y_{13} y_{12} y_{11} y_{10} y_9 y_8 y_7 y_6 y_5 y_4 y_3 y_2 y_1] =, \\ &= [a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1] \mathbf{G}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} y_{15} &= a_7 \\ y_{14} &= a_6 \\ y_{13} &= a_5 \\ y_{12} &= a_4 \\ y_{11} &= a_3 \\ y_{10} &= a_2 \\ y_9 &= a_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_8 &= a_7 + a_6 + a_5 \\
y_7 &= a_7 + a_4 + a_3 \\
y_6 &= a_6 + a_4 + a_2 \\
y_5 &= a_7 + a_6 + a_5 + a_3 + a_1 \\
y_4 &= a_7 + a_4 + a_1 \\
y_3 &= a_6 + a_5 + a_3 + a_1 \\
y_2 &= a_7 + a_5 + a_4 + a_2 + a_1 \\
y_1 &= a_7 + a_6 + a_3 + a_2 + a_1
\end{aligned}$$

то образующая матрица кода $(15,7)$ принимает вид

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 100100100101011 \\ 010100001100101 \\ 001100000100110 \\ 000010101001010 \\ 000001100100101 \\ 000000011100011 \\ 000000000011111 \end{bmatrix}$$

Примечание 1.4 (ПМ1.4). Рассмотренный ПЗК $(15,7)$, исправляющий ошибки кратности $s=2$ имеет избыточное число проверочных разрядов. Действительно, число синдромов $N_c = 2^m - 1 = 2^8 - 1 = 255$, а число ошибок первой и второй кратности $N_{ош} = C_n^1 + C_n^2 = n(n+1)/2 = 120$. Складывается впечатление, что соотношение $N_c > N_{ош}$ сохранится, если число t проверочных разрядов сократить с 8 до 7. Действительно, в этом случае код $(15,7)$ трансформировался бы в код $(14,7)$, для которого было бы справедливо неравенство

$$N_c = 2^m - 1 = 2^7 - 1 = 127 \geq N_{ош} = C_n^1 + C_n^2 = 105.$$

Но в этом случае необходимо было бы приведенные в таблице 1.1 синдромы укоротить на один старший разряд. Однако при этом нарушается условие [42, 51] и корректирующая способность ПЗК, исправляющего ошибки кратности $s=2$, что вызывается появлением нулевого синдрома (для ошибки в двенадцатом разряде в рамках рассмотренного примера) и сокращением кодового расстояния между синдромами до $d_{min} = 3$. □

Пример 1.9 (Пр1.9)

Иллюстрируется процедура формирования проверочной матрицы \mathbf{H} ПЗК (7,4), исправляющего ошибки кратности $s = 1$.

Читателю предлагается убедиться, что проверочная матрица \mathbf{H} вида

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}} \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \text{ где } \tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

получена решением уравнения Сильвестра (1.170) относительно матрицы $\mathbf{T} = \mathbf{H}^T$ с матричными компонентами

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \left[\mathbf{O}_7 \mid \begin{array}{c} \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ \mathbf{O}_6^T \end{array} \right]; \mathbf{P} = \left[1 \mid \mathbf{O}_6^T \right].$$

Матрица \mathbf{H} обнаруживает полную блоковую систематику ПЗК (7,4), поэтому образующая матрица кода принимает вид $\mathbf{G} = \left[\mathbf{I}_4 \mid \tilde{\mathbf{G}} \right]$.

□

Пример 1.9 (Пр1.9)

Иллюстрируется процедура формирования проверочной матрицы \mathbf{H} ПЗК (7,4), исправляющего ошибки кратности $s = 1$.

Читателю предлагается убедиться, что проверочная матрица \mathbf{H} вида

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}} \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \text{ где } \tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

получена решением уравнения Сильвестра (1.170) относительно матрицы $\mathbf{T} = \mathbf{H}^T$ с матричными компонентами

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \left[\mathbf{O}_7 \mid \begin{array}{c} \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ \mathbf{O}_6^T \end{array} \right]; \mathbf{P} = \left[1 \mid \mathbf{O}_6^T \right].$$

Матрица \mathbf{H} обнаруживает полную блоковую систематику ПЗК (7,4), поэтому образующая матрица кода принимает вид $\mathbf{G} = \left[\mathbf{I}_4 \mid \tilde{\mathbf{G}} \right]$.

□

**1.7. Анализ структуры неподвижных состояний
и замкнутых циклов линейных двоичных динамических систем**

В данном параграфе рассматриваются проблемы, связанные со спецификой структуры пространства состояния линейных двоичных динамических систем, характеризующихся наличием неподвижных состояний и замкнутых циклов при отсутствии ($u(k)=0$) и наличии ($u(k)\neq 0$) экзогенной задающей последовательности на входе ЛДДС. Решаемая задача связана с особенностью структуры алгебраического спектра собственных значений $\sigma\{A\} = \{\lambda_i : D(\lambda) = \det(\lambda I + A) = 0\}$ матрицы A состояния линейной ДДС, особенностями структуры геометрического спектра собственных векторов $\{\xi_i : A\xi_i = \xi_i; i = \overline{1, n}\}$ той же матрицы, с фактом, когда этот спектр имеет своими элементами вектор начального $x(0)$ (в общем случае исходного $x(k)$) состояния системы и столбцы матрицы B входа ЛДДС. Для случая, когда $u(k)\neq 0$ решаемая задача связана с проблемой управляемости пары матриц (A, B) . И, наконец, решение задачи в значительной степени зависит от показателя μ , которому принадлежит матрица A .

Рассматриваемая проблема решается с использованием моделей «вход–состояние» линейных ДДС, задаваемых в рекуррентной

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0); \quad (1.183)$$

и суммарной

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i) \quad (1.184)$$

формах.

Анализ структуры пространства состояния ЛДДС, задаваемой моделями (1.183), (1.184) проведем для случая, когда $(n \times r)$ матрица B входа представляет собой n -мерный вектор-столбец так, что $r = 1$.

1.7.1 Неподвижные состояния линейной двоичной динамической системы

Рассмотрение проблемы начнем с определения неподвижного состояния.

Определение 1.12 (О1.12). Состояние $x(k)$ ЛДДС (1.182), (1.183) называется неподвижным, если оно удовлетворяет условию

$$x(k+1) = x(k), \quad \forall k. \quad \square \quad (1.185)$$

Анализ структуры неподвижных состояний начнем со случая, когда экзогенная последовательность $u(k)$ на входе ЛДДС отсутствует. Для этого случая $u(k) = 0$, поэтому модели (1.183), (1.184) принимают вид

$$x(k+1) = Ax(k), \quad x(0); \quad (1.186)$$

$$x(k) = A^k x(0). \quad (1.187)$$

Утверждение 1.34 (У1.34). ЛДДС (1.186), (1.187) при любой $(n \times n)$ -реализации матрицы A состояния всегда имеет в качестве неподвижного состояния нулевое

$$x(k) \equiv 0. \quad \square \quad (1.188)$$

Доказательство утверждения использует рекуррентную модель (1.186), подстановка в которую (1.188) дает цепочку равенств

$$x(k+1) = Ax(k) = A \cdot 0 = 0 = x(k). \quad \blacksquare$$

Утверждение 1.35 (У1.35). ЛДДС (1.186), (1.187) при реализации матрицы A состояния в форме единичной $(n \times n)$ -матрицы так, что $A = I$, имеет неподвижными все 2^n состояния двоичной системы. \square

Доказательство утверждения, как и выше, использует рекуррентную модель (1.186) ЛДДС, в которой следует положить $A = I$ так, что (1.186) принимает вид

$$x(k+1) = Ax(k) = Ix(k) = x(k); \quad \forall x(k). \quad \blacksquare$$

Выделим теперь класс матриц состояния ЛДДС (1.186), (1.187), при которых двоичная система обладает неподвижным состоянием $x(k) \neq 0$, отличным от нуля.

Утверждение 1.36 (У1.36). *Если состояние $x(k)$ является собственным вектором ξ матрицы A , соответствующим ее собственному значению равному единице ($\lambda = 1$), то состояние*

$$x(k) = \xi \tag{1.189}$$

является неподвижным. \square

Доказательство утверждения использует рекуррентную модель ЛДДС (1.186) и определение собственного вектора ξ матрицы

$$A\xi = \lambda\xi. \tag{1.190}$$

Для собственного значения $\lambda = 1$ соотношение (1.190) принимает вид

$$A\xi = \xi. \tag{1.191}$$

Если $x(k)$ выбран в форме (1.189), тогда используя (1.186) получим цепочку равенств

$$x(k+1) = Ax(k) = A\xi = \xi = x(k). \quad \blacksquare \tag{1.192}$$

Выделим класс матриц состояния ЛДДС, которые не порождают ненулевые неподвижные состояния $x(k) \neq 0$. Очевидно, что в этот класс входят все $(n \times n)$ -матрицы A , обладающие индексом ν нильпотентности, удовлетворяющим неравенствам

$$1 \leq \nu \leq n. \tag{1.193}$$

Это вызвано тем, что нильпотентная $(n \times n)$ -матрица A с индексом нильпотентности (1.193) имеет все n собственных значений, равных нулю ($\lambda = 0$), что делает невозможным переход от (1.190) к (1.191).

В этот класс также входит $(n \times n)$ -матрица A , принадлежащая максимальному показателю $\mu = 2^n - 1$, что имеет место, когда характеристический полином матрицы A $D(\lambda) = \det(\lambda I + A)$ представляет собой неприводимый полином степени n ($\deg D(\lambda) = n$). В этом случае матрица A не имеет собственных значений в простом двоичном поле Галуа $GF(2) = \{0, 1\}$, как следствие матрица A не имеет собственных векторов, в силу чего не выполняется соотношение (1.191). Таким образом неподвижным ненулевым состоянием обладает ЛДДС, $(n \times n)$ -матрица A состояния которая принадлежит показателю μ , удовлетворяющему неравенствам

$$n \leq \mu < 2^n - 1. \quad (1.194)$$

Рассмотрим теперь структуру неподвижных состояний для случая отличной от нуля экзогенной последовательности на входе ЛДДС так, что выполняются соотношения

$$u(k) \neq 0; u(k) = 1, \quad \forall k. \quad (1.195)$$

Утверждение 1.37 (У1.37). Нулевое состояние $x(k) \equiv 0$ не принадлежит множеству неподвижных состояний ЛДДС при ненулевой экзогенной последовательности, удовлетворяющей условиям (1.195). \square

Доказательство утверждения строится на подстановке $x(k) \equiv 0$ и (1.195) в модель (1.183) ЛДДС, что приводит к соотношению

$$x(k+1) = \mathbf{B}u(k). \quad (1.196)$$

В случае если $\dim \mathbf{B} = (n \times 1)$ и $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$ соотношение

$$x(k+1) = \mathbf{O} = x(k)$$

при $u(k) = 1$ не выполняется. \blacksquare

Утверждение 1.38 (У1.38). Ненулевое неподвижное состояние ЛДДС (1.183) вычисляется в силу соотношения

$$x(k) = (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}. \quad \square \quad (1.197)$$

Доказательство утверждения строится на непосредственном вычислении неподвижного состояния, опирающегося на его определение (1.185), и соотношение (1.183) с учетом (1.195), из которых получаем

$$x(k) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B},$$

что записывается в форме

$$(\mathbf{I} + \mathbf{A})x(k) = \mathbf{B}, \quad (1.198)$$

приводящей к выражению (1.197), если матрица $(\mathbf{I} + \mathbf{A})$ обратима. \blacksquare

Выделим случай, когда матрица $(\mathbf{I} + \mathbf{A})$ не является обратимой. С этой целью воспользуемся свойством спектра собственных значений матричной функции от матрицы. В соответствии с этим свойством спектр $\sigma\{\mathbf{I} + \mathbf{A}\} = \{\tilde{\lambda}_i; i = \overline{1, n}\}$ состоит из элементов

$$\tilde{\lambda}_i = 1 + \lambda_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.199)$$

где λ_i – элемент алгебраического спектра

$$\sigma\{\mathbf{A}\} = \{\lambda_i : \det(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A}) = 0; i = \overline{1, n}\}$$

собственных значений матрицы \mathbf{A} . В силу соотношения (1.199) матрица $(\mathbf{I} + \mathbf{A})$ является обратимой, а следовательно линейная ДДС (1.183), (1.184) имеет при $u(k) = 1$ неподвижное состояние, определяемое в силу (1.198), если матрица \mathbf{A} является нильпотентной с любым индексом ν нильпотентности или если матрица \mathbf{A} имеет своим характеристическим полиномом любой неприводимый полином степени n , принадлежащий показателю μ , удовлетворяющему условию (1.194).

Необратимой матрица $(I + A)$ является для ЛДДС, матрица A состояния которой имеет в своем алгебраическом спектре собственных значений $\sigma\{A\} = \{\lambda_i : \det(\lambda I + A) = 0; i = \overline{1, n^*}\}$ элемент $\lambda_j = 1$ так, что $\tilde{\lambda}_j$ в силу (1.200) обращается в ноль ($\tilde{\lambda}_j = 0$). В этом случае линейная ДДС (1.183), (1.184) не имеет неподвижных состояний отличных от нулевого. Следует, однако, заметить, что сказанное выше справедливо, если иметь в виду произвольную реализацию матрицы B . Если же матрица входа такова, что она принадлежит пространству столбцов матрицы B , то есть выполняется условие $B \in J_m(I + A)$, то вектор $x(k)$ ищется из условия

$$x(k) = \arg \left\{ B = \sum_{i=1}^n (I + A)_i x_i(k) \right\}.$$

1.7.2 Замкнутые циклы линейных ДДС

Вынесенную в название параграфа проблему как для случая исследования неподвижных состояний будем решать с использованием модельных представлений ЛДДС в форме (1.186), (1.187) при отсутствии на входе двоичной динамической системы экзогенной последовательности ($u(k) = 0$) и в форме (1.183), (1.184) при наличии на входе системы экзогенной последовательности ($u(k) \neq 0$).

Предварим исследование важным для решения проблемы утверждением.

Утверждение 1.39 (У1.39). Пусть $(n \times n)$ -матричная функция $f(A)$ от $(n \times n)$ -матрицы A задана над простым полем Галуа $GF(p)$ при $p = 2$ в степенной форме

$$f(A) = A^q \tag{1.200}$$

где q – целое положительное число. Пусть матрица A обладает алгебраическим спектром $\sigma\{A\} = \{\lambda_i : \det(\lambda I + A) = 0; \lambda_i \in GF(2)\}$ собственных значений и геометрическим спектром

$$\{\xi_i : A\xi_j = \xi_j; j = \overline{1, r_A}\}$$

собственных векторов. Пусть матричная функция $f(A)$ от матрицы A обладает алгебраическим спектром

$$\sigma\{f(A)\} = \{\lambda_{fi} = f(\lambda_i) : \det[\lambda_f I + f(A)] = 0; i = \overline{1, n}\}$$

собственных значений и геометрическим спектром $\{\xi_\lambda : f(A)\xi_\lambda = \xi_f\}$. Тогда геометрический спектр $\{\xi_{f\lambda}; \lambda = \overline{1, r}\}$ собственных векторов $f(A)$ включает в себя геометрический спектр $\{\xi_j; j = \overline{1, n_A}\}$ собственных векторов матрицы A , при этом они могут не совпадать так, что выполняется соотношение

$$\{\xi_{f\lambda}; \lambda = \overline{1, r_f}\} \supset \{\xi_j; j = \overline{1, r}\} \quad (1.201)$$

$$r_f \geq r. \quad \square \quad (1.202)$$

Доказательство. Очевидно сформулированное утверждение справедливо для матрицы A , не являющейся нильпотентной матрицей любого значения индекса ν нильпотентности, которая обладает алгебраическим спектром собственных значений, составленным из нулей так, что $\sigma\{A\} = \{\lambda_i = 0; i = \overline{1, n}\}$, а также для матрицы A , имеющей своим характеристическим полиномом $D(\lambda) = \det(\lambda I + A)$ неприводимый полином степени n , который не имеет корней в простом поле Галуа $GF(2)$ так, что $\sigma\{A\} = \{\lambda_i \notin GF(2)\}$. Таким образом утверждение имеет дело со случаем, когда характеристический полином матрицы A разложим в произведение двучленов

$$D(\lambda) = \det(\lambda I + A) = \prod_{j=1}^n (\lambda + \lambda_j) \quad (1.203)$$

и который характеризуется кратными единичными собственными значениями $\lambda_j = 1$ ($j = \overline{1, n}$). Известно [13], что число r_A различных собственных векторов ξ_j матрицы A , имеющей кратные корни, меньше $n = \dim x$ и определяется из соотношения

$$r_A = \dim\{Ker(\lambda I + A)\} = n - \dim\{Jm(\lambda_j I + A)\} = n - rank(I + A) \quad (1.204)$$

В свою очередь число r_f собственных векторов $\xi_{f\lambda}$ матричной функции $f(A)$ от матрицы A определяется из соотношения

$$\begin{aligned} r_f &= \dim\{Ker(\lambda_{f\lambda} I + f(A))\} = \\ &= n - \dim\{Jm(\lambda_{f\lambda} I + f(A))\} = n - rank(I + f(A)) \end{aligned} \quad (1.205)$$

Причем так как по свойству спектра собственных значений матричной функции $f(A)$ от матрицы A оказывается справедливым соотношение

$$\lambda_{f\lambda} = f(\lambda_j) : j, \lambda = \overline{1, n}, \quad (1.206)$$

то с учетом степенного характера $f(A) = A^q$ спектр кратных единичных значений матрицы A $\{\lambda_j = 1 : j = \overline{1, n}\}$ сохраняется и для матричной функции $f(A)$ $\{\lambda_{f\lambda} = \lambda_\lambda^2 = 1 : \lambda = \overline{1, n}\}$. Если к этому добавить, что

матричная функция $f(\mathbf{A})$ в общем случае не сохраняет базис представления исходной матрицы \mathbf{A} , то размерности ядер (нуль-пространств) матриц $(\lambda_j \mathbf{I} + \mathbf{A}) = (\mathbf{I} + \mathbf{A})$ и $(\lambda_f \mathbf{I} + f(\mathbf{A})) = (\mathbf{I} + f(\mathbf{A}))$ могут быть различными так, что выполняется неравенство

$$r_f \geq r_A. \quad \blacksquare \quad (1.207)$$

Пример 1.10 (Пр1.10)

Для иллюстрации положений утверждения рассмотрим матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

и матричную функцию от матрицы

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda + 1)^3.$$

$$\sigma\{\mathbf{A}\} = \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1\}.$$

$$\det(\lambda_f \mathbf{I} + f(\mathbf{A})) = \det \begin{bmatrix} \lambda_f & 0 & 1 \\ 1 & 1 + \lambda_f & 1 \\ 1 & 0 & \lambda_f \end{bmatrix} = \lambda_f^3 + \lambda_f^2 + \lambda_f + 1 = (\lambda_f + 1)^3$$

$$\sigma\{f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2\} = \{\lambda_{f1} = \lambda_{f2} = \lambda_{f3} = 1\}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned} r_A &= \dim \left\{ \text{Ker}(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A}) = \text{Ker} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} = n - \dim\{Jm(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A})\} = \\ &= n - \text{rank}(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1. \end{aligned}$$

Размерность r_A ядра $\text{Ker}(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A})$, определяющая число собственных векторов ξ_j , составляет $r_A = 1$. Таким образом, матрица \mathbf{A} имеет единственный собственный вектор

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ такой, что } A\xi = \xi : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ выполняется.}$$

Оценим теперь размерность r_f ядра $\text{Ker}(\lambda_f \mathbf{I} + f(\mathbf{A}))$, определяющую число собственных векторов $\xi_{f\lambda}$

$$\begin{aligned} \dim \left\{ \text{Ker}(\lambda_f \mathbf{I} + f(\mathbf{A})) = \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \\ = n - \dim \{ J_m(\lambda_f \mathbf{I} + f(\mathbf{A})) \} = n - \text{rank}(\mathbf{I} + f(\mathbf{A})) = \\ = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

Таким образом $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$ имеет следующие собственные вектора:

- $\xi_{f1} = \xi$ по свойству матричной функции от матрицы сохранять геометрический спектр собственных векторов в форме $f(\mathbf{A})\xi = \mathbf{A}^2 \xi = \underbrace{\mathbf{A}}_{\xi} \mathbf{A} \xi = \mathbf{A} \xi = \xi = \xi_{f1}$. Действительно

$$f(\mathbf{A})\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \xi_{f1};$$

- ξ_{f2} и ξ_{f3} , вычисленные из соотношения $f(\mathbf{A})\xi_{f\lambda} = \xi_{f\lambda}$ так, что

$$\xi_{f2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : f(\mathbf{A})\xi_{f2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \xi_{f2};$$

$$\xi_{f3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : f(\mathbf{A})\xi_{f3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \xi_{f3}.$$

Заметим, что собственные векторы ξ_{f1} , ξ_{f2} , ξ_{f3} матричной функции $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$ оказались линейно зависимыми. Действительно

$$\xi_{f1} = \xi_{f2} + \xi_{f3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\xi_{f3} = \xi_{f1} + \xi_{f2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ и т.д.}$$

Этого результата и следовало ожидать, так как линейная оболочка, натянутая на эти векторы, имеет размерность $r_f = 2 < n = 3$. ■

Введем понятие *замкнутый цикл* в структуре пространства матрицы состояния линейной ДДС с помощью следующего определения.

Определение 1.13 (О1.13). Пусть множество \tilde{x} мощности

$[\tilde{x}] = \tilde{N} = 2^n - 1$ состояний линейной ДДС (1.186), (1.187), не включающее в себя нулевое неподвижное состояние, тогда подмножество множества \tilde{x} , содержащее T состояний, на котором выполняется соотношение

$$x(k) = x(k + T), \quad (1.208)$$

называется замкнутым циклом длиной T , составленным из векторов состояния

$$\left\{ x(k); x(k+1) = Ax(k); x(k+2) = Ax(k+1) = A^2x(k), \dots, x(k+T-1) = A^{T-1}x(k) \right\}. \quad \square \quad (1.209)$$

Рассмотрим факторы, определяющие длину T замкнутых циклов на множестве состояний ЛДДС при отсутствии экзогенной последовательности ($u(k) = 0$) на ее входе. С этой целью соотношение (1.208) запишем в форме (1.187)

$$x(k) = A^T x(k). \quad (1.210)$$

Сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 1.40 (У1.40). При $x(k) \neq 0$ соотношение (1.210) выполняется в случаях, когда:

- матрица A принадлежит показателю T ;
- $x(k)$ является собственным вектором матрицы A^T . \square

Доказательство справедливости первой части утверждения строится на определении показателя μ , которому принадлежит матрица A , в соответствии с которым выполняется матричное равенство

$$A^\mu = I, \quad (1.211)$$

подстановка $\mu = T$ делает справедливым (1.210). Доказательство справедливости второй части утверждения строится на определении собственного вектора с учетом специфики простого поля Галуа $GF(p)$ при $p = 2$. ■

Нетрудно видеть, что длина T замкнутых циклов удовлетворяет неравенствам

$$1 \leq T \leq n - 1. \quad (1.212)$$

Очевидно, что в структуре пространства $(n \times n)$ -матрицы A состояния ЛДДС (1.186), (1.187) имеется цикл длины $T = 1$, когда $x(k)$ является собственным вектором матрицы A . Иначе говоря, ненулевое неподвижное состояние образует цикл длительностью $T = 1$. Максимальная длительность $T = 2^n - 1$ имеет место, когда $(n \times n)$ -матрица A и ее ха-

ра характеристический полином $D(\lambda) = \det(\lambda I + A)$ принадлежат показателю $\mu = 2^n - 1$.

Наложим на неравенства (1.212), определяющие возможные по длине T циклы на множестве ненулевых состояний \tilde{x} мощности $[\tilde{x}] = \tilde{N} = 2^n - 1$, неравенства, оценивающие возможные показатели μ , которым могут принадлежать $(n \times n)$ -матрица состояния ЛДДС и ее характеристический полином $D(\lambda)$

$$n \leq \mu \leq 2^n - 1. \quad (1.213)$$

В результате этого наложения, а также с использованием положений **У1.39** и **У1.40** можно предложить следующий алгоритм анализа структуры замкнутых циклов линейных ДДС (1.186), (1.187), которому придадим номер 1.10.

Алгоритм 1.10 (A1.10)

6. Построить векторно-матричное представление линейной двоичной динамической системы в форме (1.183), (1.184).
7. Перейти от представления ЛДДС (1.183), (1.184) к ее представлению в форме (1.186), (1.187), положив в (1.183), (1.184) $u(k) = 0$.
8. Вычислить характеристический полином $D(\lambda)$ матрицы A состояния ЛДДС в силу соотношения $D(\lambda) = \det(\lambda I + A)$.
9. Определить показатель μ которому принадлежит характеристический полином $D(\lambda)$ и матрица A состояния ЛДДС с использованием таблиц полиномов, принадлежащих конкретному μ или возведением матрицы A в степень над полем Галуа $GF(2)$ до момента выполнения равенства $A^\mu = I$.
10. Проанализировать полученное значение μ : если $\mu = 2^n - 1$, то осуществить переход к п.11 алгоритма, в противном случае – к п.6 алгоритма.
11. Найти корни характеристического полинома $D(\lambda)$, после чего его записать в форме

$$D(\lambda) = g(\lambda) \prod_{j=1}^{\chi} (\lambda^{n_j} + 1), \quad (1.214)$$

где $g(\lambda)$ – неприводимый модулярный многочлен,

$$n_1 = 1 < n_2 < \mathbf{K} < n_j < n_{j+1} < \mathbf{K} < n_\chi \quad (1.215)$$

$$\deg D(\lambda) = n = \deg g(\lambda) + \sum_{j=1}^{\chi} n_j \quad (1.216)$$

12. Вычислить величину r_Σ , определяющую сумму размерностей ядер матриц $(I + A^{n_j})$ в силу соотношений

$$2^n - 1 = n_\mu \mu + r_\Sigma, \quad (1.217)$$

где n_μ – число циклов длины $T = \mu$.

13. Вычислить размерности r_j ядер $\text{Ker}(I + A^{n_j})$ матриц $I + A^{n_j}$, определяющих число собственных векторов матриц A^{n_j} , а, следовательно, длину $T_j = r_j$ соответствующих им замкнутых циклов.

14. Вычислить собственные векторы ξ_{f_j} матриц A^{n_j} .

15. Определить состав и очередность изменения состояний в замкнутых циклах длиной $T_j = r_j$, порожденных собственными векторами ξ_{f_j} матриц A^{n_j} , используя для этого представление циклов в форме (1.209).

16. Определить состав и очередность изменения состояний в замкнутых циклах длиной $T_\mu = \mu$, порожденных фактом принадлежности матрицы A состояния ЛДДС показателю μ , используя представление циклов в форме (1.209), в котором за исходное состояние $x(k)$ цикла взять любое состояние множества \tilde{x} , не принадлежащее циклам, сформированным в п.10.

17. Сформировать структуру замкнутых циклов и неподвижных состояний линейной ДДС (1.186), (1.187) (при $u(k) \equiv 0$) путем объединения циклов в п.п. 10 и 11, дополнив их нулевым неподвижным состоянием. ■

Пример 1.10 (Пр1.10) (Продолжение)

1. Выполним п.п.1–3 **A1.10**, в результате чего ЛДДС будет иметь матрицу A состояния и характеристический полином

$$D(\lambda) = \det(\lambda I + A)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad D(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1; \quad n = 3$$

4. Путем возведения матрицы A в степень получим

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

что показатель μ , которому принадлежит матрица A , равен четырем ($\mu = 4$)

5. Анализ значения μ обнаруживает, что

$$\mu = 4 < 2^n - 1 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7;$$

в результате чего необходимо перейти к п.6 **A1.10**.

6. Выполнение п.6 алгоритма дает $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ и $D(\lambda)$ представим в форме

$$D(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1),$$

$$\text{где } g(\lambda) = 1; n_1 = 1; n_2 = 2.$$

7. Выполнение п.7 алгоритма дает $2^n - 1 = 7 = 1 \cdot 4 + 3$ так, что в структуре пространства матрицы A состояния ЛДДС имеется один замкнутый цикл длиной $T = \mu = 4$.

8. Вычисление размерности r_j ядер матриц

$$(I + A^{n1}) = (I + A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } (I + A^{n2}) = (I + A^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

дает $r_1 = 1$ и $r_2 = 2$.

9. Вычисление собственных векторов матриц A^{nj} приводит к результату

$$\begin{aligned} \{\xi_{f1}\} &= \arg\{A^{n1}\xi_{f1} = \xi_{f1}\} = \arg\{A\xi = \xi\} = \\ &= \arg\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \xi \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ \xi \\ \xi \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \end{aligned}$$

10. Определение состава циклов, порожденных собственными векторами матриц A^{nj} дает два цикла, представляющих собой набор векторов

$$\{\xi_{f1}\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \{\xi_{f2}\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

11. Определение состава и очередность смены состояния ЛДДС в замкнутом цикле длины $T_\mu = \mu = 4$, порожденным фактом принадлежности матрицы A показателю $\mu = 4$, если за $x(k)$ принять $x(k) = [0 \ 0 \ 1]^T$, не принадлежащий $\{\xi_{f1}\} \cup \{\xi_{f2}\}$, и воспользоваться (1.208), дает замкнутый цикл

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

12. Полная структура замкнутых циклов и неподвижных состояний при $u(k) \equiv 0$ принимает вид (рисунок 1.23). ■

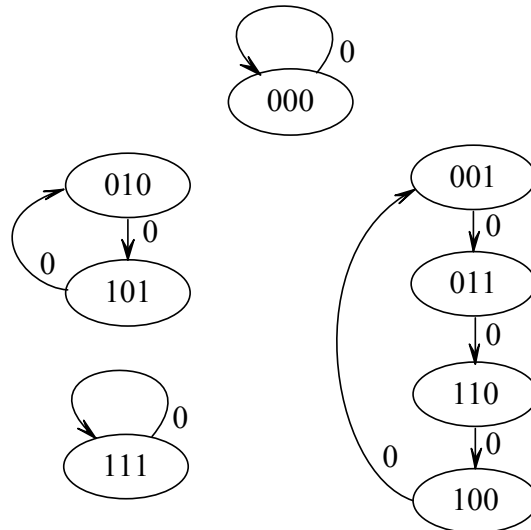


Рисунок 1.23. Структура замкнутых циклов и неподвижных состояний ЛДДС

Рассмотрим теперь структуру замкнутых циклов линейной ДДС при $u(k)=1$. Описание ЛДДС для этого случая задается представлениями (1.183), (1.184), в которых следует положить $u(k)=1$ так, что получим:

в рекуррентной форме

$$x(k+1) = Ax(k) + B; \quad x(0) \quad (1.218)$$

и в суммарной форме

$$x(k+1) = A^k x(0) + A^{k-1} B + A^{k-2} B + \dots + AB + B; \quad x(0). \quad (1.219)$$

Следует заметить, что введенное с помощью **О1.13** определение замкнутого цикла длиной T сохраняется, однако структура этих циклов не только зависит от показателя μ , которому принадлежит матрица A , структуры собственных векторов $\{\xi_f\}$ степенных матричных функций $f(A) = A^q$ от $(n \times n)$ -матрицы A состояния ЛДДС, но и от матрицы B . Последняя может принадлежать пространству столбцов матрицы A , то есть ее образу

$$B \subset Jm A, \quad (1.220)$$

тогда пара матриц (A, B) оказывается не полностью управляемой, простейший случай такой ситуации является случай, когда матрица B является собственным вектором матрицы A .

В этой связи сформулируем утверждение.

Утверждение 1.41 (У1.41). *Если матрица B векторно-матричного описания ЛДДС является собственным вектором матрицы A , то ЛДДС с такой парой матриц (A, B) не является полностью управляемой, при этом размерность подпространства управляемости равна единице. \square*

Доказательство. Тот факт, что матрица B суть собственный вектор матрицы A состояния ЛДДС над простым полем Галуа $GF(2)$, позволяет записать

$$AB = B. \quad (1.221)$$

Составим матрицу управляемости пары (A, B)

$$W_y(A, B) = [B \mid AB \mid A^2 B \mid \dots \mid A^{n-1} B]. \quad (1.222)$$

Для элементов $W_y(A, B)$ можно записать

$$AB = B; A^2 B = AB = B, \dots, A^{n-1} B = A(A^{n-2} B) = B.$$

Подстановка полученных матричных равенств в (1.222) дает для матрицы управляемости

$$\text{rank } W_y(A, B) = \text{rank} [B \mid B \mid B \mid \dots \mid B] = \text{rank } B = l < n. \blacksquare$$

Следует заметить, что рекуррентная форма (1.218) представления ЛДДС при $u(k) = 1$ содержит конструктивный алгоритм формирования структуры замкнутых циклов путем простого суммирования состояния перехода с матрицей B , так что в цикле происходит аддитивный сдвиг на векторный компонент B . Однако это впечатление обманчиво.

Структура замкнутых циклов может измениться так, что в них могут полностью исчезнуть неподвижные состояния. Напомним, что выше было доказано, что при $u(k) = 1$ нулевое состояние перестает быть неподвижным, а ненулевое неподвижное состояние существует, когда матрица $(I + A)$ обратима или когда матрица B принадлежит ее образу. Но возможны ситуации, когда ни одно из этих условий не выполняется. Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пример 1.11 (Пр1.11)

Рассмотрим ЛДДС с матрицей A состояния из **Пр1.9** в сочетании с двумя версиями матрицы входа B :

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Для поиска ненулевого неподвижного состояния $x(k)$: $x(k+1) = x(k)$ в силу (1.198) сконструируем матрицу

$$(A + I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы $(A + I)$ меньше $n = 3$, действительно

$$\text{rank}(A + I) = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Матрица $(A + I)$ является необратимой, а потому использование соотношения (1.197) для поиска ненулевого неподвижного состояния оказывается некорректным. Однако проверим принадлежат ли матрицы B_1 и B_2 в силу (1.198)

$$(A + I)x(k) = B$$

образу $(A + I)$. Для первой версии матрицы $B = B_1$ имеет место соотношение

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

откуда следует $B_1 \in Jm(A + I)$, при этом неподвижных состояний два $x(k) = [0 \ 1 \ 0]^T$ и $x(k) = [1 \ 0 \ 1]^T$.

Для второй версии имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

откуда следует $B_2 \notin Jm(A + I)$, а следовательно ЛДДС с парой матриц (A, B_2) при $u(k) = 1$ не имеет ненулевых неподвижных состояний, как следствие следует ожидать объединения «коротких» замкнутых циклов. На рисунке 1.24 приведена структура циклов ЛДДС с парой матриц (A, B_1) , построенная в силу (1.217).

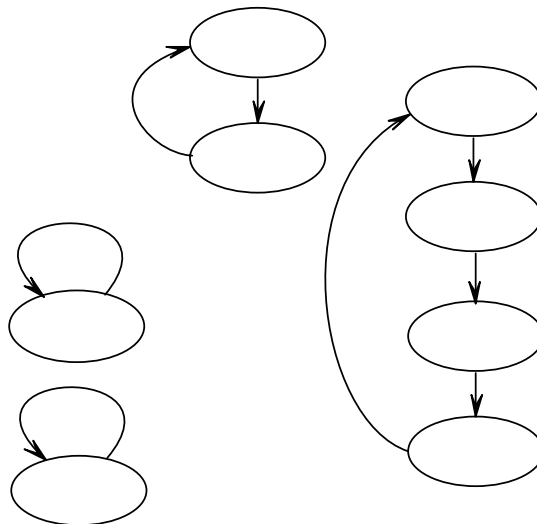


Рисунок 1.24. Структура циклов ЛДДС с парой матриц (A, B_1)

Следует заметить, что пара (A, B_1) не является полностью управляемой, так как матрица $B_1 = [1 \ 1 \ 1]^T$ является собственным вектором матрицы A . В результате ранг $W_y(A, B_1)$ равен единице, а управ-

ляемое подпространство натянуто на вектор $x = \mathbf{B}_1$. Если ЛДДС находится в нулевом начальном состоянии $x(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$, то никакими $u(k)$ нельзя ЛДДС вывести из подпространства, натянутого на состояния $x = [0 \ 0 \ 0]^T$ и $x = [1 \ 1 \ 1]^T$.

На рисунке 1.25 приведена структура циклов ЛДДС с парой матриц $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ – полностью управляемой, так как

$$\text{rank } W_y(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2) = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3 = n$$

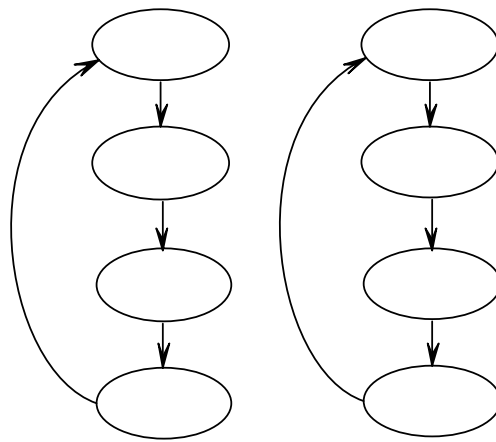


Рисунок 1.25. Структура циклов ЛДДС с парой матриц $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$

Неподвижные состояния в случае $u(k) = 1$ в ЛДДС с парой матриц $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ «исчезли», структура пространства состояний распалась на два замкнутых цикла длиной $T = \mu = 4$. В силу полной управляемости пары $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ существует последовательность $u(k)$, которая позволяет обойти все состояния ЛДДС. Примером такой последовательности является $u(k) = 11011101 | 11011101 | \dots$ ■

В заключение следует остановиться на проблеме вычисления состояния, из которого ЛДДС переходит в нулевое состояние. Нетрудно видеть, если в левой части (1.218) положить для состояния перехода $x(k+1) \equiv 0$, то $x(k)$, из которого происходит под действием $u(k)$ переход в нулевое состояние, определится выражением

$$x(k) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} u(k). \quad (1.223)$$

Оценка состояния (1.223) особенно важна в задачах помехозащитного декодирования.

Следует также заметить, что структура замкнутых циклов претерпевает минимальную модификацию для случая, когда матрица A состояния ЛДДС принадлежит показателю $\mu = 2^n - 1$. В этом случае нулевое состояние перестает быть неподвижным, существует единственное ненулевое неподвижное состояние $x(k) = (A + I)^{-1} B$ и единственный замкнутый цикл длиной $T = 2^n - 1$. Пара матриц (A, B) при любой реализации матрицы B является управляемой так как матрица A с неприводимым характеристическим полиномом $D(\lambda) = \det(\lambda I + A)$ не имеет над $GF(2)$ собственных векторов.

В заключение приведем в форме таблицы 1.3 результаты исследования всех 28 возможных вариантов реализаций пар (A, B) матриц, задающих соответствующие ЛДДС при размерности $\dim x$ вектора x их состояния равной трем, что является широко распространенным случаем конструирования ДДС. Для компактности записи в таблицах использованы представления матриц, циклов, последовательностей в виде их десятичных эквивалентов, причем величина периодичности представлена скобочной записью с указанием длительности периода в виде нижнего индекса у правой скобки.

Таблица 1.3

Характеристика	Матрица A^T	Матрица B^T							Показатель μ
		1	2	3	4	5	6	7	
Ранг матрицы управляемости	[2, 1, 4]	3	3	2	3	2	2	1	3
	[2, 1, 6]	3	3	3	3	2	3	3	7
	[2, 1, 5]	3	3	3	3	3	3	3	7
	[2, 1, 7]	3	2	3	3	2	3	1	4
Управляющая последовательность	[2, 1, 4]	$(175)_8$	$(175)_8$	–	$(175)_8$	–	–	–	3
	[2, 1, 6]	$(207)_8$	$(207)_8$	$(207)_8$	$(207)_8$	–	$(207)_8$	$(207)_8$	7
	[2, 1, 5]	$(243)_8$	$(243)_8$	$(243)_8$	$(243)_8$	$(243)_8$	$(243)_8$	$(243)_8$	7
	[2, 1, 7]	$(221)_8$	–	$(221)_8$	$(221)_8$	–	$(221)_8$	–	4
Замкнутые циклы	[2, 1, 4]	$(1, 2, 4)_3, (3, 6, 5)_3$							3
	[2, 1, 6]	$(1, 2, 5, 3, 7, 6, 4)_7$							7
	[2, 1, 5]	$(1, 3, 7, 6, 5, 2, 4)_7$							7
	[2, 1, 7]	$(2, 5)_2, (1, 3, 6, 4)_4$							4
Неподвижные состояния	[2, 1, 4]	$(0), (7)$							3
	[2, 1, 6]	(0)							7
	[2, 1, 5]	(0)							7
	[2, 1, 7]	$(0), (7)$							4

Таблица 1.3 (продолжение)

Характеристика	Матрица A^T	Матрица B^T							Показатель μ
		1	2	3	4	5	6	7	
Сепаратные управляемые состояния и циклы (при $u(k)=1(k)$)	[2, 1, 4]	(0,1,3,7,6,4) ₆ , (2,5) ₂	(0,2,6,7,5,0) ₆ , (3,4) ₂	(0,3,5) ₃ , (2,7,4) ₃ , (1) ₁ , (6) ₁	(0,4,5,7,3,2) ₆ , (1,6) ₂	(0,5,6) ₃ , (1,7,2) ₃ , (3) ₁ , (4) ₁	(0,6,3) ₃ , (1,4,7) ₃ , (2) ₁ , (5) ₁	(1,5,4,6,2,3) ₆ , (0,7) ₂	3
	[2, 1, 6]	(0,1,3,6,5,4,2) ₇ , (7) ₁	(0,2,7,4,3,5,1) ₇ , (6) ₁	(0,3,4,2,6,7,5) ₇ , (1) ₁	(0,2,7,4,3,5,0) ₇ , (6) ₁	(0,5,6,1,7,3,2) ₇ , (4) ₁	(0,6,2,3,1,4,7) ₇ , (5) ₁	(0,7,1,5,4,6,3) ₇ , (2) ₁	7
	[2, 1, 5]	(0,1,2,5,3,6,4) ₇ , (7) ₁	(0,2,6,7,4,3,5) ₇ , (1) ₁	(0,3,4,2,7,5,1) ₇ , (6) ₁	(0,4,5,6,1,7,2) ₇ , (3) ₁	(0,5,7,3,2,1,6) ₇ , (4) ₁	(0,6,3,1,5,4,7) ₇ , (2) ₁	(0,7,1,4,6,2,3) ₇ , (5) ₁	7
	[2, 1, 7]	(0,1,2,4,3,7,6,5) ₄	(1) ₁ , (6) ₁ , (0,2,7,5) ₄	(0,3,5,1,2,6,7,4) ₄	(0,4,5,6,1,7,3,2) ₄	(3) ₁ , (4) ₁ , (1,6) ₂ , (0,5,7,2) ₄	(0,6,2,3) ₄ , (1,5,4,7) ₄	(2) ₁ , (5) ₁ , (0,7) ₂ , (1,4,6,3) ₄	4

Примечания.

1. Матрица A^T представлена построчно: в таблице указаны десятичные эквиваленты строк матрицы.
2. Матрица B^T представлена десятичным эквивалентом ее столбца.
3. Запись вида $(\bullet)_o$ означает цикл длины (o) с последовательностью кодов состояния (\bullet) , каждый из которых задан в десятичном эквиваленте.

1.8. Линейные двоичные динамических системы в задачах дивидендного помехозащитного кодирования

Дивидендное представление процессов помехозащитного кодопреобразования в фазе кодирования и декодирования использует векторно-матричное описание, параметризованное дискретным временем k этих процессов в форме линейных двоичных динамических систем, опирающиеся на модели «вход-состояние» (ВС) вида (1.23), (1.25)

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) \equiv 0, \quad (1.224)$$

$$x(k) = \left(A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i) \right) \Big|_{x(0) \equiv 0} = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i). \quad (1.225)$$

Форма модели ВС (1.224), как указано в параграфе 1.2, именуется рекуррентной формой, форма (1.225) – суммарной. В (1.224), (1.225) $x(k)$ – вектор состояния ЛДДС, осуществляющей помехозащитное кодопреобразование; $u(k)$ – входная кодовая последовательность; $\dim x = m$, $\dim u = l$, $\dim A = (m \times m)$, $\dim B = (m \times l)$. В зависимости от задачи помехозащитного кодопреобразования $u(k)$ принимает смысл помехонезащищенного информационного кода $u(k) = a(k)$ при формировании помехозащищенного кода $y(k)$ и смысл принятого из канала связи искаженного кода $f(k) = y(k) + \xi(k)$ так, что $u(k) = f(k)$ в задаче декодирования. Характерной особенностью модельных представлений (1.224) и (1.225) является то, что матрица $A_{ку}$ состояния кодирующего устройства и матрица $A_{оку}$ состояния декодирующего устройства совпадают так, что выполняется равенство

$$A_{ку} = A_{оку} = A. \quad (1.226)$$

Матрица A состояния КУ и ДКУ задается в одном базисе, при этом чаще всего в сопровождающей характеристический полином (ХП) форме, причем ХП $D(\lambda) = \det(\lambda I + A)$ совпадает с образующим ПЗК модулярным многочленом $g(x)$ так, что выполняется соотношение

$$D(\lambda) = g(x) \Big|_{x=\lambda} \quad (1.227)$$

Матрицы входа для устройств кодирования и декодирования чаще всего не совпадают так что для КУ и ДКУ модель (1.224) соответственно получает представление

$$x(k+1) = Ax(k) + B_{ку} u(k); \quad x(k+1) = Ax(k) + B_{оку} u(k). \quad (1.228)$$

Если при формировании ПЗК предполагается возможность перехода от их матричного задания, не параметризованного дискретным временем k , с помощью образующей матрицы G и проверочной матрицы

H , то следует иметь в виду следующее. Необходимое условие реализуемости матричного представления ПЗК (1.144), (1.146) дивидендным способом, осуществляемым средствами ЛДДС (1.228), является однозначное соответствие строк проверочной матрицы H ПЗК с точностью до процедуры транспонирования с матрицей входа $B_{\text{оку}}$ устройства декодирования и строк матрицы \tilde{G} при представлении образующей матрицы ПЗК в форме (1.158) с матрицей входа $B_{\text{ку}}$ (1.228) устройства кодирования.

Высказанные соображения подтвердим следующими утверждениями.

Утверждение 1.42 (У1.42). Матрица $B_{\text{ку}}$ ЛДДС дивидендного кодирующего устройства с точностью до операции транспонирования совпадает с последней строкой (k -ой) строкой \tilde{G}^k образующей матрицы G так, что выполняется соотношение

$$B_{\text{ку}}^T = \tilde{G}^k = \kappa \{g(x) + x^m\}, \quad (1.229)$$

где $\kappa\{(\bullet)\}$ – код модулярного многочлена (\bullet) . \square

Доказательство. Рассмотрим процесс кодирования для случая $u(k) = a(x) = 1$, то есть для случая k -элементной входной последовательности

$$u(k) = [u(0) = 0, u(1) = 0, \dots, u(k-2) = 0, u(k-1) = 1]. \quad (1.230)$$

В течение первых $(k-1)$ -тактов ЛДДС КУ будет находиться в нулевом неподвижном состоянии. При приеме элемента $u(k-1) = 1$ ЛДДС КУ (1.228) перейдет в состояние

$$x(k) = B_{\text{ку}} u(k-1) \Big|_{u(k-1)=1} = B_{\text{ку}}. \quad (1.231)$$

Состояние (1.231) определяет код остатка, выводимый из КУ, для $a(x) = 1$, задаваемый последней строкой матрицы \tilde{G} кодов остатков так, что выполняется цепочка равенств

$$x^T(k) = B_{\text{ку}}^T = \tilde{G}^k = \kappa \{g(x) + x^m\}. \quad \blacksquare \quad (1.232)$$

Утверждение 1.43 (У1.43). Матрица $B_{\text{оку}}$ входа ЛДДС (1.228) дивидендного декодирующего устройства с точностью до процедуры транспонирования совпадает с последней строкой проверочной матрицы H ПЗК так, что выполняется равенство

$$B_{\text{оку}}^T = H^n. \quad \square \quad (1.233)$$

Доказательство. В силу идентичности результатов процедур формирования синдрома E при декодировании в форме (1.146), (1.151) с целью анализа процессов в ЛДДС (1.228) при декодировании рассмотрим последний при входной последовательности $u(k) = \xi(k)$. Как и

выше, ограничимся ситуацией, когда последовательность $\xi(k)$ содержит единицу только в младшем разряде

$$u(k) = \xi(k) = [u(0) = 0, u(1) = 0, \dots, u(k-2) = 0, u(k-1) = 1]. \quad (1.234)$$

При входной последовательности вида (1.234) ЛДДС (1.228) устройства декодирования в течение первых $(n-1)$ -тактов, характеризующихся $u(k) = 0$ остается в нулевом неподвижном состоянии, а на последнем n -м такте перейдет в состояние, совпадающее с матрицей $\mathbf{B}_{\text{окч}}$. Однако в силу правил декодирования это состояние представляет собой синдром ошибки в младшем разряде, который в силу правил формирования проверочной матрицы \mathbf{H} ПЗК является ее последней строкой, что приводит к цепочке равенств

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}^T(n) = \mathbf{B}_{\text{окч}}^T = \mathbf{H}^n. \quad \blacksquare \quad (1.235)$$

Поставим задачу: матрица \mathbf{A} ЛДДС устройств кодирования и декодирования (1.228) фиксирована, матрица входа ЛДДС кодирующего устройства фиксирована в форме (1.232), модифицируема ли матрица входа ЛДДС устройства декодирования при сохранении матричного характеристического свойства ПЗК (1.146) $\mathbf{GH} = \mathbf{O}$?

С целью решения поставленной задачи сформулируем утверждение, предварив его следующим определением.

Определение 1.14 (О1.14). Матрицей циклического сдвига на один шаг «вниз» строк произвольной $(n \times t)$ -матрицы \mathbf{H} называется $(n \times n)$ -матрица \mathbf{P}_c вида

$$\mathbf{P}_c = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{O}_{1 \times (n-1)} & \mathbf{I}_{1 \times 1} \\ \hline \mathbf{I}_{(n-1) \times (n-1)} & \mathbf{O}_{(n-1) \times 1} \end{array} \right]. \quad \square \quad (1.236)$$

Определение 1.15 (О1.15). Матрицей циклического сдвига на один шаг «вверх» строк произвольной $(n \times t)$ -матрицы \mathbf{H} называется $(n \times n)$ -матрица \mathbf{P}_c^{-1} вида

$$\mathbf{P}_c^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{O}_{(n-1) \times 1} & \mathbf{I}_{(n-1) \times (n-1)} \\ \hline \mathbf{I}_{1 \times 1} & \mathbf{O}_{1 \times (n-1)} \end{array} \right]. \quad \square \quad (1.237)$$

Из (1.236) и (1.237) видно, что матрицы циклического сдвига «вниз» и «вверх» строк произвольной $(n \times t)$ -матрицы \mathbf{H} связаны соотношениями

$$\mathbf{P}_c^{-1} = \mathbf{P}_c^T, \quad \mathbf{P}_c \mathbf{P}_c^T = \mathbf{P}_c^T \mathbf{P}_c = \mathbf{I}. \quad (1.238)$$

Определение 1.16 (О1.16). Матрицей циклического сдвига на v шагов «вниз» строк произвольной $(n \times t)$ -матрицы \mathbf{H} называется $(n \times n)$ -матрица \mathbf{P}_c^v вида

$$\mathbf{P}_c^v = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{O}_{v \times (n-v)} & \mathbf{I}_{v \times v} \\ \hline \mathbf{I}_{(n-v) \times (n-v)} & \mathbf{O}_{(n-v) \times v} \end{array} \right]. \quad \square \quad (1.239)$$

Определение 1.17 (О1.17). Матрицей $H(v)$ размерности $(n \times m)$, полученной из $(n \times m)$ -матрицы H путем сдвига на v шагов ее строк «вниз», называется матрица, вычисленная в силу матричного соотношения

$$H(v) = P_c^v H. \quad \square \quad (1.240)$$

Утверждение 1.44 (У1.44). Характеристическое свойство (1.147) матриц (G, H) помехозащищенного кода сохраняется для матриц $(G, H(v))$ так, что

$$GH(v) = GP_c^v H. \quad \square \quad (1.241)$$

Доказательство утверждения строится на использовании матрицы G , записанной в каноническом виде (1.158)

$$G = [I_{k \times k} | \tilde{G}],$$

и матрицы H , записанной в форме

$$H = [A^{n-1} B_{\partial_{ky}} | A^{n-2} B_{\partial_{ky}} | K | AB_{\partial_{ky}} | B_{\partial_{ky}}]^T. \quad (1.242)$$

При этом используются свойства $(m \times m)$ -матрицы A принадлежности показателю $n = 2^m - 1$, в силу чего выполняется равенство

$$A^n = I, \quad (1.243)$$

а также справедливости теоремы Гамильтона-Кэли позволяющей записать

$$D(\lambda)|_{\lambda=A} = D(A) = O. \quad (1.244)$$

Если записать (1.241) в транспонированной форме

$$H^T (P_c^v)^T G^T, \quad (1.245)$$

подставить в нее матрицу H в форме (1.242), P_c^v в форме (1.239) и матрицу G в форме (1.158), учесть (1.243) и (1.244), тогда получим матричное соотношение

$$H^T (P_c^v)^T G^T = \text{row} \{ A^{\rho_i} D(A) B_{\partial_{ky}}; i = \overline{1, k}, |\rho_i| = 0, 1, 2, K, m \} = O. \quad \blacksquare \quad (1.246)$$

Пример 1.12 (Пр1.12).

Проиллюстрируем положения У1.44 на примере циклического ПЗК с образующим ММ $g(x) = x^3 + x + 1$, который характеризуется матрицами G и H

$$G = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]; \quad H^T = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1.247)$$

Матрица P_c циклического сдвига «вниз» строк матрицы H на один шаг (1.236) имеет вид

$$P_c = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{O}_{1 \times 7} & \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{I}_{7 \times 7} & \mathbf{O}_{7 \times 1} \end{array} \right]. \quad (1.248)$$

Тогда для матриц (1.245) для $\nu = 0, \nu = 3, \nu = 6$ получим

$$H^T G^T = \left[A^6 B_{\partial \kappa \nu} \mid A^5 B_{\partial \kappa \nu} \mid A^4 B_{\partial \kappa \nu} \mid A^3 B_{\partial \kappa \nu} \mid A^2 B_{\partial \kappa \nu} \mid AB_{\partial \kappa \nu} \mid B_{\partial \kappa \nu} \right] \begin{bmatrix} 1000 \\ 0100 \\ 0010 \\ 0001 \\ 1110 \\ 0111 \\ 1101 \end{bmatrix}; \quad (1.249)$$

$$\begin{aligned} H^T (P_c^3) G^T &= \\ &= \left[A^2 B_{\partial \kappa \nu} \mid AB_{\partial \kappa \nu} \mid B_{\partial \kappa \nu} \mid A^6 B_{\partial \kappa \nu} \mid A^5 B_{\partial \kappa \nu} \mid A^4 B_{\partial \kappa \nu} \mid A^3 B_{\partial \kappa \nu} \right] \begin{bmatrix} 1000 \\ 0100 \\ 0010 \\ 0001 \\ 1110 \\ 0111 \\ 1101 \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (1.250)$$

$$\begin{aligned} H^T (P_c^6) G^T &= \\ &= \left[A^5 B_{\partial \kappa \nu} \mid A^4 B_{\partial \kappa \nu} \mid A^3 B_{\partial \kappa \nu} \mid A^2 B_{\partial \kappa \nu} \mid AB_{\partial \kappa \nu} \mid B_{\partial \kappa \nu} \mid A^6 B_{\partial \kappa \nu} \right] \begin{bmatrix} 1000 \\ 0100 \\ 0010 \\ 0001 \\ 1110 \\ 0111 \\ 1101 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.251)$$

Раскрытие произведений матриц позволяет для (1.248) – (1.250) записать

$$H^T G^T = \left[(A^6 + A^2 + I) B_{\partial \kappa \nu} \mid (A^5 + A^2 + A + I) B_{\partial \kappa \nu} \mid (A^4 + A^2 + A) B_{\partial \kappa \nu} \mid (A^3 + A + I) B_{\partial \kappa \nu} \right] \quad (1.252)$$

$$H^T (P_c^3) G^T = \left[(A^5 + A^3 + A^2) B_{\partial \kappa \nu} \mid (A^5 + A^4 + A^3 + A) B_{\partial \kappa \nu} \mid (A^5 + A^4 + I) B_{\partial \kappa \nu} \mid (A^6 + A^4 + A^3) B_{\partial \kappa \nu} \right] \quad (1.253)$$

$$H^T (P_c^6) G^T = \left[(A^6 + A^5 + A) B_{\partial \kappa \nu} \mid (A^6 + A^4 + A + I) B_{\partial \kappa \nu} \mid (A^3 + A + I) B_{\partial \kappa \nu} \mid (A^6 + A^2 + I) B_{\partial \kappa \nu} \right] \quad (1.254)$$

Если в (1.252) – (1.254) учесть (1.243) и (1.244), записываемые для рассматриваемого примера в форме

$$A^7 = I, \quad D(A) = A^3 + A + I = O, \quad (1.255)$$

то (1.252) – (1.254) примут вид

$$H^T G^T = \left[A^{-1} D(A) B_{\text{ок}} \mid A^2 D(A) B_{\text{ок}} \mid \right. \\ \left. AD(A) B_{\text{ок}} \mid D(A) B_{\text{ок}} \right] = O \quad (1.256)$$

$$H^T (P_c^3) G^T = \left[A^2 D(A) B_{\text{ок}} \mid AD(A) B_{\text{ок}} \mid \right. \\ \left. A^{-3} D(A) B_{\text{ок}} \mid A^3 D(A) B_{\text{ок}} \right] = O \quad (1.257)$$

$$H^T (P_c^6) G^T = \left[A^{-2} D(A) B_{\text{ок}} \mid A^3 D(A) B_{\text{ок}} \mid \right. \\ \left. D(A) B_{\text{ок}} \mid A^{-1} D(A) B_{\text{ок}} \right] = O \quad (1.258)$$

Общее представление результатов (1.256) – (1.258) имеет вид (1.246). □

Утверждение (У1.44) и Пр1.11 по существу содержат доказательство следующего утверждения.

Утверждение 1.45 (У1.45). *В качестве матрицы $B_{\text{ок}}$ входа устройства дивидендного декодирования, реализованного в форме линейной ДДС (1.228), может быть принята любая строка проверочной матрицы H помехозащитного кода в транспонированном виде так, что*

$$B_{\text{ок}} = H_i^T, \quad i = \overline{n, l}, \quad (1.259)$$

при этом образующая и проверочная матрицы ПЗК, сформированного средствами ЛДДС (1.228) с матрицей входа (1.259) устройства декодирования сохраняют свое характеристическое свойство (1.147). □

Таким образом пользователь аппаратуры дивидендного помехозащитного кодирования – декодирования без изменения ее кодирующей части может модифицировать декодирующую часть путем изменения матрицы $B_{\text{ок}}$ входа декодирующего устройства. Количество вариантов модификации матрицы $B_{\text{ок}}$ составляет $N_g = n$, где n – полное число разрядов помехозащитного (n, k) -кода. При этом опасность получения неуправляемой пары матриц $(A, B_{\text{ок}})$ на указанном наборе отсутствует, так как матрица $B_{\text{ок}}$ при всех ее версиях не является собственным вектором матрицы A . Последнее объясняется тем, что матрица A состояния ЛДДС кодирующих и декодирующих устройств (1.228) имеет своим характеристическим полиномом неприводимый модулярный

многочлен, который не имеет корней в простом поле Галуа $GF(2)$, что гарантирует и отсутствие собственных векторов.

Полученные в параграфе результаты позволяют сформировать алгоритм синтеза линейных ДДС дивидендного помехозащитного кодирования и декодирования.

*Алгоритм 1.11 (A1.11)
синтеза ЛДДС дивидендного помехозащитного
кодирования и декодирования*

18. По заданному информационному массиву Q мощности $[Q] = N_u$ определить размерность k помехозащищенного кода в силу соотношения

$$k = \arg\{2^k \geq N_u = [Q]\}.$$

19. По заданной корректирующей способности помехозащищенного (n, k) -кода определить степень $m = n - k$ его образующего модулярного многочлена $g(x)$ в силу соотношения

$$m = \arg\left\{ N_c = 2^m - 1 \geq N_{ou} = \sum_{i=1}^s C_{(k+m)}^i \right\},$$

где N_c – число синдромов, N_{ou} – число ошибок, s – кратность исправляемой ошибки. Выбрать или сформировать реализацию образующего ММ $g(x)$ степени m в классе неприводимых, гарантирующих минимальное кодовое расстояние d_{\min} на используемых кодовых комбинациях ПЗК

$$d_{\min} \geq 2s + 1.$$

20. Вычислить D -образ ММ $g(x)$ в форме

$$g(d) = \mathbf{D}\{g(x)\} = \tilde{g}(x^{-1})|_{x^{-1}=d},$$

где $\tilde{g}(x^{-1})$: $g(x) = x^m \tilde{g}(x^{-1})$.

21. Сконструировать передаточную функцию устройства деления модулярных многочленов в форме

$$\Phi(d) = \frac{1}{g(d)}.$$

22. Пользуясь правилом Мейсона некасающихся контуров построить структурную реализацию $\Phi(d)$ на элементах памяти (ЭП) с передаточной функцией $\Phi_{ЭП}(d) = d$.

23. Произвести отметку входов и выходов ЭП переменными $x_i(k+1)$ на входе и $x_i(k)$ на выходе и сформировать векторно-матричное описание автономной версии УДММ

$$x(k+1) = Ax(k).$$

24. Сформировать матрицу входа $B_{ку}$ дивидендного кодирующего устройства (1.228) в силу соотношения (1.229).
25. Сформировать проверочную матрицу H ПЗК и матрицу $B_{оку}$ входа дивидендного декодирующего устройства (1.228) в силу соотношения (1.259).
26. Проверить правильность функционирования устройств кодирования и декодирования (1.228) сформированными парами матриц $(A, B_{ку})$ и $(A, B_{оку})$.
27. Построить техническую реализацию устройств дивидендного кодирования и декодирования:
 - а. в схемотехнической форме на базе структурных представлений;
 - б. в программной форме на базе рекуррентных процедур (1.228).

■