

## Раздел 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

«Число разумных гипотез, объясняющих любое данное явление, бесконечно»

(*Постулат Персига*)

Математическое моделирование дискретных систем со стохастическим характером функционирования предполагает использование моделей массового обслуживания, описываемых в терминах аппарата теории вероятностей. В данном разделе, не претендуя на полноту, рассматриваются некоторые элементы теории вероятностей, знание которых необходимо для понимания и усвоения материала следующих разделов, связанного с грамотным описанием и расчётом вероятностных моделей, а также осмысленным анализом полученных результатов.

### 2.1. Основные понятия и определения

Базовыми понятиями в теории вероятностей являются «*событие*», «*вероятность*», *случайная величина*».

#### 2.1.1. Событие, вероятность

«Если какая-нибудь неприятность может произойти, она случается...»

(*Закон Мэрфи*)

**Событие** – всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

**Вероятность** события есть численная мера степени объективной возможности этого события.

Предположим, что рассматривается некоторый опыт или явление, в котором в зависимости от случая происходит или не происходит некоторое событие  $A$ .

Если условия опыта могут быть воспроизведены многократно, так что в принципе осуществима целая серия одинаковых и *независимых* друг от друга испытаний, то **вероятность** события  $A$  может быть вычислена по следующей формуле:

$$P(A) = m / n,$$

где  $n$  – общее число взаимно исключающих друг друга исходов;  $m$  – число исходов, которые приводят к наступлению события  $A$ .

*Вероятность может принимать значения от 0 до 1.*

Событие, вероятность которого равна 0, называется **невозможным**, а событие, вероятность которого равна 1, называется **достоверным**.

Несколько событий образуют **полную группу событий**, если в результате опыта должно непременно появиться хотя бы одно из них.

Несколько событий называются **несовместными** в данном опыте, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Несколько событий называются **равновозможными** в данном опыте, если ни одно из этих событий не является объективно более возможным,

чем другое.

События называются *независимыми*, если появление одного из них не зависит от того, произошли ли другие события.

### 2.1.2. Случайная величина

*Случайной величиной* называется величина, которая может принимать то или иное значение, *неизвестное заранее*.

Случайные величины могут быть двух типов:

- **дискретные (прерывные)**, принимающие только отделённые друг от друга значения, которые можно пронумеровать;
- **непрерывные (аналоговые)**, которые могут принимать любое значение из некоторого промежутка.

*Примерами дискретных случайных величин* могут служить:

- количество задач, выполняемых вычислительной системой (ВС) за день;
- количество обращений к внешней памяти в процессе решения задачи;
- количество сообщений, переданных в компьютерной сети за единицу времени, и т.д.

*Примерами непрерывных случайных величин* являются:

- интервалы времени между моментами поступления в ВС запросов на решение задач или между моментами формирования сообщений, передаваемых в телекоммуникационную сеть;
- время выполнения задач в ВС и т.д.

Иногда случайные величины, имеющие дискретную природу, рассматриваются как непрерывные. Такая замена оправдана в тех ситуациях, когда случайная величина принимает большое множество значений, которые незначительно отличаются друг от друга, так что замена дискретной случайной величины непрерывной практически не влияет на результаты расчетов. Например, время передачи пакета по каналу связи в вычислительной сети, определяемое как отношение длины передаваемого пакета (в битах) к пропускной способности канала связи (бит/с), которое является дискретной случайной величиной, обычно рассматривается как непрерывная случайная величина, изменяющаяся, в общем случае, в интервале от нуля до некоторого предельного значения, определяемого максимально возможной длиной пакета.

Случайные величины часто обозначают большими буквами, а их возможные значения – соответствующими малыми буквами. Например, случайная величина  $X$  – число обращений к накопителю на магнитном диске в процессе решения задачи в вычислительной системе – может принимать значения  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 3$ , ... .

## 2.2. Законы распределений случайных величин

«Всякая работа требует больше времени, чем вы думаете» (*Следствие закона Мэрфи*)

Математическое описание случайных величин предполагает задание закона распределения, устанавливающего соответствие между значениями случайной величины и вероятностью их появления.

Рассмотрим дискретную случайную величину  $X$ , принимающую значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Величина  $X$  может принять каждое из этих значений с некоторой вероятностью. Обозначим через  $p_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение  $x_i$ :  $p_i = P(X = x_i)$ . Если в результате опыта величина  $X$  принимает только одно из этих значений, то имеем *полную группу несовместных событий* и сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна единице:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Эта суммарная вероятность каким-то образом распределена между отдельными значениями. Случайная величина будет *полностью описана* с вероятностной точки зрения, если мы зададим это распределение, т.е. установим так называемый *закон распределения*.

*Законом распределения случайной величины* называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Про случайную величину говорят, что она подчинена данному закону распределения.

### 2.2.1. Закон распределения дискретной случайной величины

Закон распределения дискретной случайной величины  $X$  (дискретный закон распределения), принимающей значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , может быть задан одним из следующих способов:

- **аналитически** в виде *математического выражения*, отражающего зависимость вероятности от значения случайной величины:

$$p_i = f(x_i) \quad (i = \overline{1, n});$$

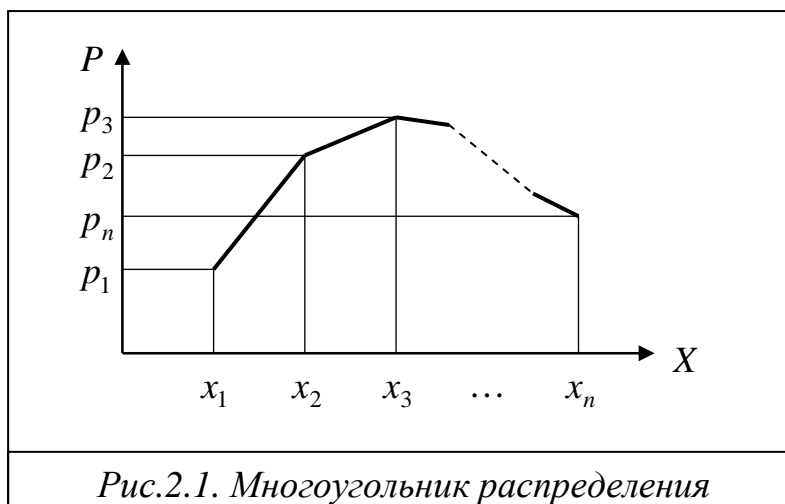
- **таблично** в виде *ряда распределения* случайной величины, в котором перечислены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности:

Значения случайной величины $X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
Вероятности $P$	$P_1$	$P_2$	...	$P_n$

- **графически** в виде *многоугольника распределения*, где по оси абсцисс откладываются возможные значения случайной величины, а по оси ординат – вероятности этих значений (рис.2.1).

Графическое представление закона распределения дискретной

случайной величины обладает наглядностью и позволяет судить о близости к тому или иному типовому закону.



В качестве примеров *дискретных законов* распределения ниже рассматриваются широко используемые в теории массового обслуживания законы распределения Пуассона и геометрический.

### 2.2.2. Закон распределения непрерывной случайной величины

Для непрерывной случайной величины невозможно задать закон распределения в том виде, в каком он задается для дискретной величины, поскольку непрерывная случайная величина имеет *бесконечное множество возможных значений*, сплошь заполняющих некоторый промежуток, и вероятность появления любого конкретного значения *равна нулю*.

В связи с этим, для описания непрерывных случайных величин используется другой способ установления соответствия между значениями случайной величины и вероятностями их появления в виде функции распределения вероятностей.

**Функция распределения вероятностей** (или просто функция распределения)  $F(x)$  случайной величины  $X$  представляет собой *вероятность* того, что случайная величина  $X$  примет значение меньше, чем некоторое заданное значение  $x$ :

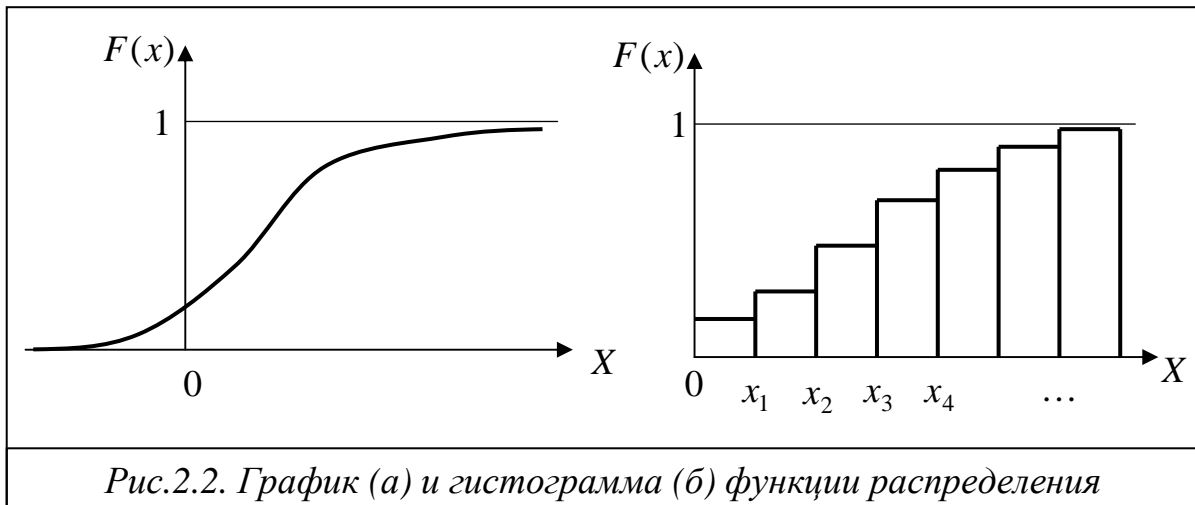
$$F(x) = P(X < x). \quad (2.1)$$

Функция распределения непрерывной случайной величины  $X$ , принимающей любые значения из некоторого интервала, может быть представлена:

- **аналитически** в виде *математического выражения* (2.1), отражающего зависимость вероятности от значения случайной величины;

- **графически** в виде непрерывной функции (рис.2.2,а), отображающей зависимость (2.1), или в виде *гистограммы функции распределения* (рис.2.2,б), полученной экспериментально, например в процессе имитационного моделирования, и представляющей собой дискретный график, в котором по оси абсцисс откладываются частотные интервалы, охватываю-

щие все возможные значения случайной величины, а по оси ординат – накопленная частота попадания случайной величины в эти частотные интервалы.



**Накопленная частота** попадания в  $i$ -й частотный интервал определяется отношением количества случайных величин, значения которых находятся в интервале  $(-\infty; x_i)$ , к общему количеству случайных величин, полученных в процессе экспериментов.

**Свойства функции распределения:**

- функция распределения  $F(x)$  есть *неубывающая* функция своего аргумента, то есть если  $x_j > x_i$ , то  $F(x_j) \geq F(x_i)$ ;

- $F(-\infty) = 0$ ;

- $F(+\infty) = 1$ .

Если случайная величина определена только в области положительных значений, ее функция распределения равна нулю на всем промежутке от минус бесконечности до нуля.

Вероятность того, что случайная величина примет значение из некоторого интервала  $(a, b)$ , определяется через функцию распределения как

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a).$$

Функция распределения  $F(x)$  является *универсальной* характеристикой случайной величины и существует как для *непрерывных*, так и для *дискретных* величин. Функция распределения дискретной случайной величины  $X$ , принимающей значения  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ , определяется как

$$F(x_m) = P(X < x_m) = \sum_{i=1}^{m-1} p_i,$$

где  $p_i$  - вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение  $x_i$ .

На практике вместо функции распределения чаще используют другой способ представления закона распределения непрерывной случайной величины в виде *плотности распределения вероятностей*,

которая в отличие от функции распределения обладает большей наглядностью и позволяет получить представление о близости того или иного распределения к одному из известных теоретических распределений, имеющих аналитическое выражение.

**Плотность распределения вероятностей**  $f(x)$  определяется как производная от функции распределения  $F(x)$  по  $x$ :

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Размерность плотности распределения  $f(x)$  обратна размерности случайной величины, в то время как функция распределения  $F(x)$ , как всякая вероятность, есть величина *безразмерная*.

Плотность распределения непрерывной случайной величины  $X$ , как и функция распределения, может быть представлена:

- **аналитически** в виде математического выражения  $y = f(x)$ ;
- **графически** в виде непрерывной функции (графика), отображающей зависимость  $y = f(x)$  (рис.2.3,а), или в виде *гистограммы плотности распределения*, в которой в отличие от гистограммы функции распределения по оси ординат откладывается частота (или число) попаданий случайной величины в каждый из частотных интервалов (рис.2.3,б).

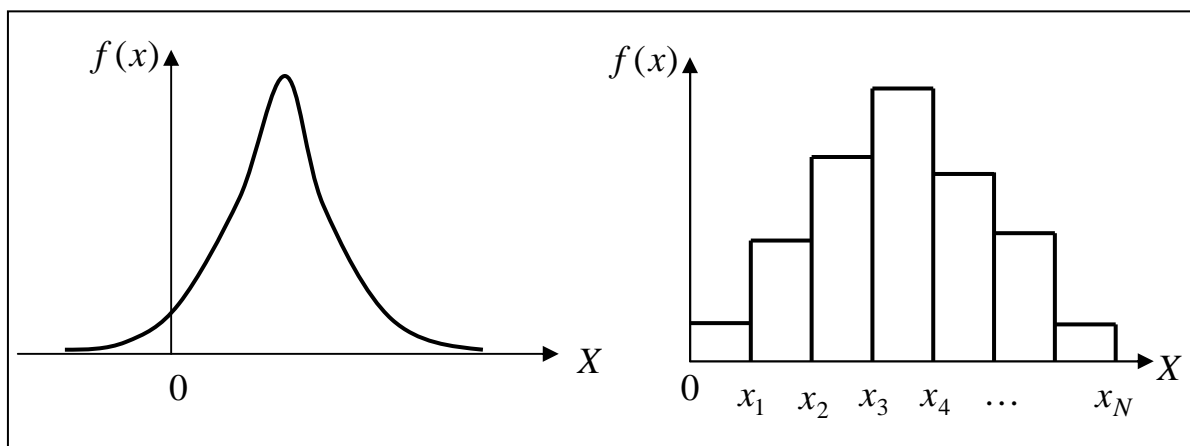


Рис.2.3. График (а) и гистограмма (б) плотности распределения

#### Свойства плотности распределения:

- плотность распределения есть функция *неотрицательная*:  $f(x) \geq 0$ ;
- интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен *единице*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Функция и плотность распределения случайной величины однозначно связаны между собой. В частности, функция распределения определяется через плотность распределения следующим образом:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (2.2)$$

Тогда вероятность того, что случайная величина примет значение из некоторого интервала  $(a, b)$ , может быть определена через плотность распределения как

$$P(a < x < b) = \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx.$$

Таким образом, закон распределения непрерывной случайной величины (непрерывный закон распределения) может быть задан в виде:

- **функции распределения**  $F(x)$  случайной величины  $X$ , называемой также **интегральным законом распределения**;
- **плотности распределения**  $f(x)$  случайной величины  $X$ , называемой также **дифференциальным законом распределения**.

### 2.3. Числовые характеристики случайных величин

«Даже маленькая практика стоит большой теории» (*Закон Букера*)

Числовые характеристики позволяют выразить в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения случайной величины, например:

- среднее значение, около которого группируются возможные значения случайной величины;
- степень разбросанности этих значений относительно среднего;
- асимметрию (или «скошенность») плотности распределения;
- «крутость», то есть островершинность или плосковершинность плотности распределения и так далее.

В теории вероятностей используются различные числовые характеристики, имеющие разное назначение и разные области применения. Из них на практике наиболее часто применяются *начальные* и *центральные моменты* различных порядков, каждый из которых описывает то или иное свойство распределения. *Начальные моменты рассматриваются относительно начала координат*, а *центральные моменты – относительно среднего значения* (математического ожидания), то есть центра распределения.

В общем случае для описания случайной величины используется бесконечное множество начальных и центральных моментов. Между числовыми моментами и законом распределения случайной величины существует взаимное соответствие, которое означает, что, зная закон распределения, можно вычислить любые моменты, число которых бесконечно. В то же время, зная конечное число начальных или центральных моментов, можно путем аппроксимации подобрать закон распределения случайной величины в виде функции или плотности распределения, причем, чем больше известно моментов, тем точнее

аппроксимация закона распределения.

На практике обычно ограничиваются применением нескольких первых начальных или центральных моментов, что оказывается вполне достаточным для получения корректных конечных результатов.

### 2.3.1. Начальные моменты

Положим, что случайная величина  $X$  описывается вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_n$  появления значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , если  $X$  – дискретная величина, и плотностью распределения  $f(x)$   $x \in (-\infty, +\infty)$ , если  $X$  – непрерывная величина.

**Начальный момент  $s$ -го порядка  $\alpha_s[X]$**  случайной величины  $X$  определяется следующим образом ( $s = 1, 2, \dots$ ):

$$\alpha_s[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i^s p_i & \text{– для дискретной случайной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x) dx & \text{– для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

Первый начальный момент  $\alpha_1[X]$  случайной величины  $X$ :

$$\alpha_1[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i p_i & \text{– для дискретной случайной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx & \text{– для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

называется **математическим ожиданием** или **средним значением случайной величины** и обозначается  $M[X]$ :  $M[X] = \alpha_1[X]$ . Математическое ожидание характеризует положение случайной величины на числовой оси, то есть показывает некоторое **среднее вероятностное** (не путать со средним арифметическим) значение, около которого группируются все возможные значения случайной величины.

Второй начальный момент  $\alpha_2[X]$  случайной величины  $X$  характеризует **рассеивание**, то есть **разброс (удаленность)** значений случайной величины **относительно начала координат**, и имеет размерность квадрата случайной величины.

### 2.3.2. Центральные моменты

**Центральный момент  $s$ -го порядка  $\beta_s[X]$**  случайной величины  $X$  определяется следующим образом ( $s = 1, 2, \dots$ ):

$$\beta_s[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (x_i - M[X])^s p_i & \text{– для дискретной случайной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^s f(x) dx & \text{– для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$



Разность между значениями случайной величины и ее математическим ожиданием  $(X - M[X])$  представляет собой отклонение случайной величины  $X$  от ее математического ожидания и называется **центрированной случайной величиной**. Тогда центральный момент  $s$ -го порядка случайной величины  $X$  можно определить как математическое ожидание  $s$ -ой степени соответствующей центрированной случайной величины:

$$\beta_s[X] = M[(X - M[X])^s].$$

Для любой случайной величины *центральный момент первого порядка равен нулю*, так как математическое ожидание центрированной случайной величины всегда равно нулю.

Второй центральный момент называется **дисперсией** случайной величины и обозначается  $D[X]$ :  $D[X] = \beta_2[X]$ .

Дисперсия вычисляется по формулам:

$$D[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (x_i - M[X])^2 p_i & \text{— для дискретной случайной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx & \text{— для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

Можно показать, что дисперсия и второй начальный момент связаны следующей зависимостью:

$$D[X] = \alpha_2[X] - (M[X])^2. \quad (2.3)$$

Дисперсия случайной величины, как и второй начальный момент, характеризует разброс значений случайной величины, но, в отличие от второго начального момента, *относительно математического ожидания*, и имеет размерность квадрата случайной величины.

При решении различных задач удобно пользоваться характеристикой разброса, *размерность которой совпадает с размерностью случайной величины*. Такой характеристикой является **среднеквадратическое отклонение**  $\sigma[X]$ , которое определяется как корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}.$$

В качестве *безразмерной* характеристики разброса случайных величин, определенных в области положительных значений, часто используют **коэффициент вариации**  $\nu[X]$ , который определяется как отношение среднеквадратического отклонения к математическому ожиданию:

$$\nu[X] = \frac{\sigma[X]}{M[X]}$$

при условии, что  $M[X] > 0$ .

Применение числовых характеристик существенно облегчает решение многих вероятностных задач, в частности, при решении сложных

задач, когда использование законов распределений приводит к громоздким выкладкам и не позволяет получить результаты в явном виде. Очень часто удается решить задачу до конца, оставляя в стороне законы распределения и оперируя одними числовыми характеристиками. Если в задаче фигурирует большое количество случайных величин, то для исчерпывающего суждения о результирующем законе распределения не требуется знать законы распределения отдельных случайных величин, фигурирующих в задаче, а достаточно знать лишь некоторые числовые характеристики этих величин.

Кроме того, на практике (и в повседневной жизни) редко оперируют законом распределения для описания конкретных физических величин, предпочитая использовать такие понятия как среднее значение и, в некоторых случаях, разброс значений случайной величины или минимальное и максимальное значение. Действительно, вряд ли для пассажиров, ожидающих на остановке автобус, представляет интерес закон распределения интервалов между автобусами. Более важным и понятным является указание среднего или максимального интервала. В то же время при моделировании транспортных потоков для получения корректных и достоверных результатов может потребоваться знание закона распределения или, по крайней мере, нескольких моментов распределения искомым интервалов.

Альтернативой случайной величине является неслучайная величина, называемая **детерминированной**. В некоторых задачах детерминированную величину  $X = x$  рассматривают как случайную, которая с вероятностью  $p = 1$  принимает одно и то же значение  $x$ .

## 2.4. Производящая функция и преобразование Лапласа

Аналитическое исследование сложных систем со случайным характером функционирования во многих случаях можно существенно упростить, если действия над функциями распределений заменить действиями над соответствующими производящими функциями и преобразованиями Лапласа.

Производящие функции используются для дискретных, а преобразования Лапласа – для непрерывных случайных величин.

### 2.4.1. Производящая функция

*Производящей функцией* распределения  $p_k = P(X = k)$  дискретной случайной величины  $X$ , принимающей неотрицательные целочисленные значения  $k = 0, 1, 2, \dots$ , называется ряд

$$X^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k \quad |z| \leq 1. \quad (2.4)$$

Распределение вероятностей однозначно определяется своей производящей функцией:

$$p_k = \frac{1}{k!} X^{*(k)}(0), \quad X^{*(k)}(0) = \left. \frac{d^k}{dz^k} X^*(z) \right|_{z=0} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

На основе производящей функции (2.4) могут быть вычислены начальные и центральные моменты случайной величины, в частности *математическое ожидание* и *дисперсия* определяются как

$$M[X] = X^{*(1)}(1); \quad D[X] = X^{*(2)}(1) + X^{*(1)}(1) - [X^{*(1)}(1)]^2. \quad (2.5)$$

Производящая функция  $X^*(z)$  суммы  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  независимых случайных величин равна произведению производящих функций слагаемых:

$$X^*(z) = X_1^*(z) X_2^*(z) \dots X_n^*(z).$$

### 2.4.2. Преобразование Лапласа

*Преобразованием Лапласа* плотности распределения  $f(x)$  неотрицательной непрерывной случайной величины  $X$  называется функция

$$F^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \quad (s \geq 0). \quad (2.6)$$

Плотность распределения однозначно определяется своим преобразованием Лапласа.

Дифференцируя преобразование Лапласа по  $s$  в точке  $s=0$ , можно определить *начальные моменты* случайной величины:

$$\alpha_k[X] = \frac{(-1)^k}{k!} \left. \frac{d^k F^*(s)}{ds^k} \right|_{s=0} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.7)$$

Преобразование Лапласа  $F^*(s)$  суммы  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  независимых случайных величин равно произведению преобразований Лапласа слагаемых:

$$F^*(s) = F_1^*(s) F_2^*(s) \dots F_n^*(s).$$

## 2.5. Типовые распределения случайных величин

«Все законы – имитация реальности»  
(*Метазакон Лилли.*)

Моделирование технических систем с дискретным характером функционирования предполагает применение разных законов распределений, как дискретных, так и непрерывных случайных величин. Ниже рассматриваются типовые законы распределений случайных величин, широко используемые в моделях массового обслуживания.

В качестве законов распределений **дискретных** случайных величин наиболее широко используются:

- распределение Пуассона;
- геометрическое распределение.

Поскольку в математических моделях массового обслуживания непрерывной случайной величиной обычно является *время*, наибольший

интерес представляют законы распределений *непрерывных* случайных величин, определенных в области положительных значений:

- равномерный;
- экспоненциальный;
- Эрланга;
- Эрланга нормированный;
- гиперэкспоненциальный;
- гиперэрланговский.

### 2.5.1. Распределение Пуассона

Дискретная случайная величина  $X$  распределена по закону Пуассона, если вероятность  $P(X=k)$  того, что она примет определенное значение  $x_k = k$  выражается формулой:

$$p_k = P(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.8)$$

где  $a$  – некоторая положительная величина, называемая *параметром* распределения Пуассона.

На рис.2.4 показаны многоугольники распределения Пуассона для трех значений параметра распределения:  $a=0,5$ ;  $a=1$ ;  $a=2$ .

Производящая функция распределения Пуассона:

$$X^*(z) = e^{-a(1-z)} \quad (0 \leq z \leq 1).$$

### 2.5.2. Геометрическое распределение

Распределение дискретной случайной величины  $X=k$  вида

$$p_k = P(X = k) = \rho^k (1 - \rho) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.9)$$

где  $\rho$  - *параметр* распределения ( $0 < \rho < 1$ ), называется *геометрическим*.

Распределение (2.9) может быть записано в несколько ином виде, если параметр  $\rho$  заменить параметром  $\gamma = 1 - \rho$ :

$$p_k = \gamma(1 - \gamma)^k \quad (0 < \gamma < 1; \quad k = 0, 1, 2, \dots).$$

На рис.2.5 показаны многоугольники геометрического распределения для трех значений параметра распределения:  $\gamma = 0,2$ ;  $\gamma = 0,5$ ;  $\gamma = 0,8$ .

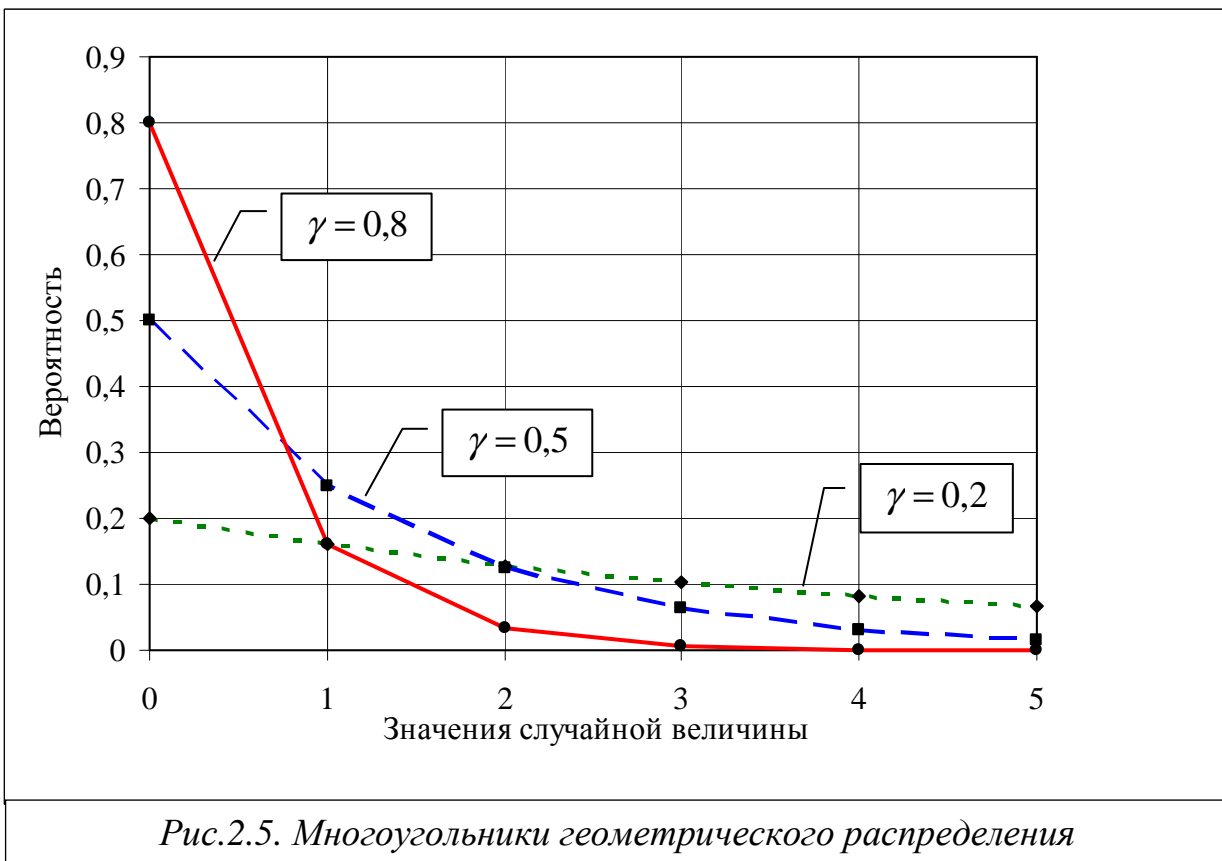
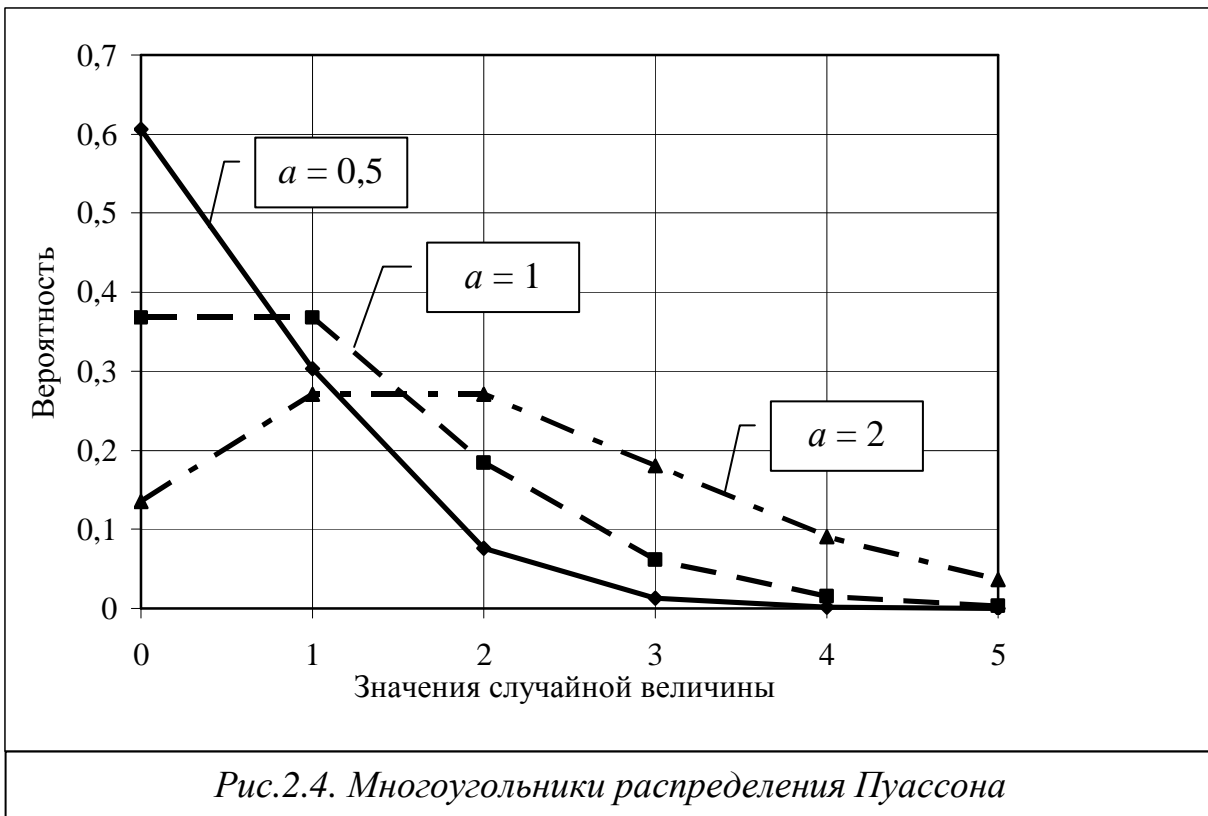
Производящая функция геометрического распределения:

$$X^*(z) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho z} \quad \text{или} \quad X^*(z) = \frac{\gamma}{1 - (1 - \gamma)z} \quad (0 \leq z \leq 1).$$

#### **Задание на самостоятельную работу:**

1. Определить математическое ожидание, второй начальный момент, дисперсию, коэффициент вариации для пуассоновского и геометрического распределений.

2. Построить многоугольники распределений для пуассоновского и геометрического законов при других значениях параметров распределений.



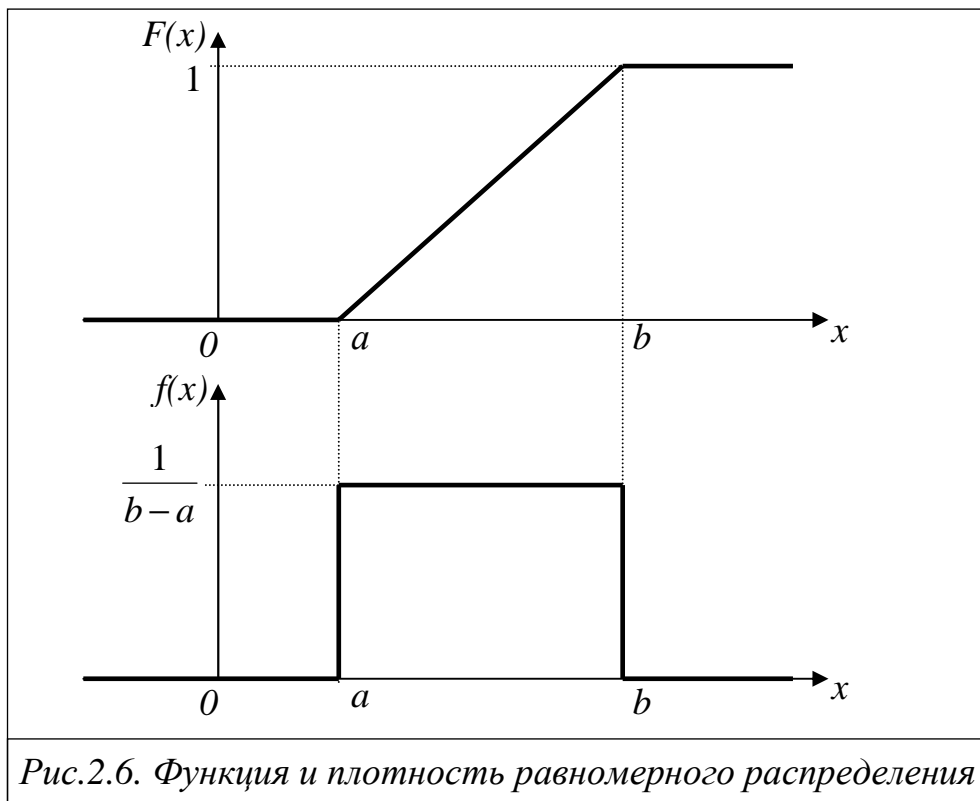
### 2.5.3. Равномерный закон распределения

Непрерывная случайная величина  $X$  распределена *равномерно* в интервале  $(a; b)$ , где  $a < b$ , если функция  $F(x)$  и плотность  $f(x)$  распределения соответственно имеют вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a < x < b; \\ 1 & \text{при } x > b; \end{cases} \quad (2.10)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a < x < b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases} \quad (2.11)$$

На рис.2.6 показаны функция и плотность равномерного распределения.



**Задание на самостоятельную работу:**

1. Определить математическое ожидание, второй начальный момент, дисперсию, коэффициент вариации и построить график функции и плотности равномерного распределения.

2. Записать выражения для функции и плотности равномерного распределения для следующих частных случаев, когда случайная величина принимает значения:

1) в интервале  $(0; b)$  при условии, что  $b > 0$ ;

2) в интервале  $(a; 0)$  при условии, что  $a < 0$ ;

3) в интервалах  $(a; b)$  и  $(c; d)$  при условии, что  $a < b < c < d$ . Определить математическое ожидание, второй начальный момент, дисперсию, коэффициент вариации.

3. Построить графики функции и плотности распределений для указанных случаев.

### 2.5.4. Экспоненциальный закон распределения

Непрерывная случайная величина  $X$ , принимающая положительные значения в бесконечном интервале  $(0; +\infty)$ , распределена по **экспоненциальному (показательному) закону**, если функция  $F(x)$  и плотность  $f(x)$  распределения соответственно имеют вид:

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x}, \quad f(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \quad (2.12)$$

где  $\alpha > 0$  – параметр распределения;  $x \geq 0$  – непрерывная случайная величина.

Замечательной особенностью экспоненциального распределения является то, что его **коэффициент вариации** не зависит от параметра  $\alpha$  и **всегда равен единице**:  $v_{\text{экс}}[X] = 1$ .

На рис.2.7 показаны функция и плотность экспоненциального распределения для трех значений параметра:  $\alpha = 0,5$ ;  $\alpha = 1$ ;  $\alpha = 2$ .

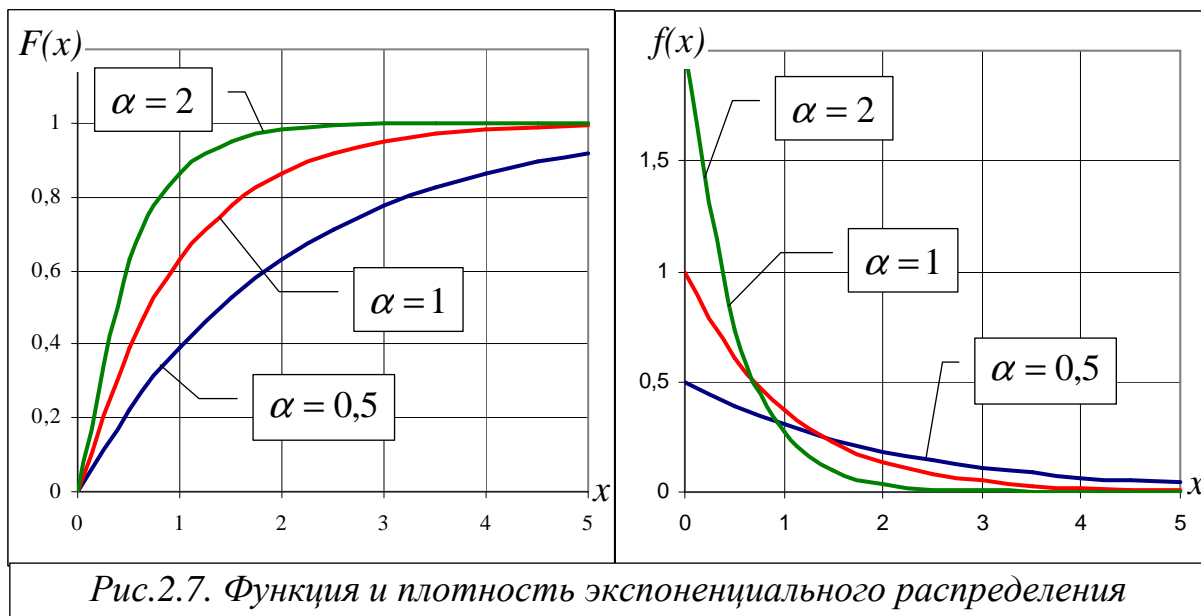


Рис.2.7. Функция и плотность экспоненциального распределения

Преобразование Лапласа экспоненциального распределения

$$F^*(s) = \frac{\alpha}{\alpha + s}. \quad (2.13)$$

Экспоненциальное распределение широко применяется в теории массового обслуживания при описании случайных процессов, протекающих в моделях массового обслуживания. Это объясняется тем, что экспоненциальное распределение обладает замечательным свойством, присущим только этому распределению, благодаря которому для многих моделей массового обслуживания удается получить достаточно простые аналитические результаты в явном виде. С этим же распределением тесно связан особый класс дискретных случайных процессов, называемых марковскими процессами, в которых переходы между состояниями не зависят от предыстории процесса и определяются только состоянием процесса в данное конкретное время. Это свойство иногда называют

свойством отсутствия памяти у экспоненциального распределения (точнее, у экспоненциально распределенных случайных величин), а в теории массового обслуживания используется термин «отсутствие последствия» (см. п.2.6).

Возможность получения сравнительно простых аналитических результатов при использовании предположения об экспоненциальном характере случайных процессов обусловила появление рассматриваемых ниже специфических законов распределений, представляющих собой композиции экспоненциальных распределений и позволяющих упростить решение многих задач, связанных с исследованием моделей массового обслуживания. К ним, в частности, относятся следующие распределения: Эрланга, гиперэкспоненциальное, гиперэрланговское.

**Задание на самостоятельную работу:**

1. Определить математическое ожидание, второй начальный момент, дисперсию и построить график функции и плотности экспоненциального распределения.
2. Доказать, что коэффициент вариации экспоненциального распределения равен единице.
3. Вывести формулу (2.13).

### 2.5.5. Распределение Эрланга

*Распределением Эрланга  $k$ -го порядка* называется распределение, описывающее непрерывную случайную величину  $X$ , принимающую положительные значения в интервале  $(0; +\infty)$  и представляющую собой сумму  $k$  независимых случайных величин, распределенных по одному и тому же экспоненциальному закону с параметром  $\alpha$ . Функция и плотность распределения Эрланга  $k$ -го порядка имеют вид:

$$F_k(x) = 1 - e^{-\alpha x} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\alpha x)^i}{i!}; \quad f_k(x) = \frac{\alpha(\alpha x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\alpha x}, \quad (2.14)$$

где  $\alpha$  и  $k$  – положительные параметры распределения ( $\alpha \geq 0$ ;  $k = 1, 2, \dots$ );  $x \geq 0$  – непрерывная случайная величина.

На рис.2.8 показаны плотности распределения Эрланга при  $\alpha = 1$  для трех значений параметра:  $k = 1$ ;  $k = 2$ ;  $k = 4$ .

При  $k = 1$  распределение Эрланга вырождается в экспоненциальное, а при  $k \rightarrow \infty$  – приближается к нормальному распределению.

Преобразование Лапласа распределения Эрланга  $k$ -го порядка

$$F^*(s) = \left( \frac{\alpha}{\alpha + s} \right)^k. \quad (2.15)$$

Поскольку распределение Эрланга является *двухпараметрическим*, то оно может использоваться для аппроксимации реальных распределений по двум первым моментам.



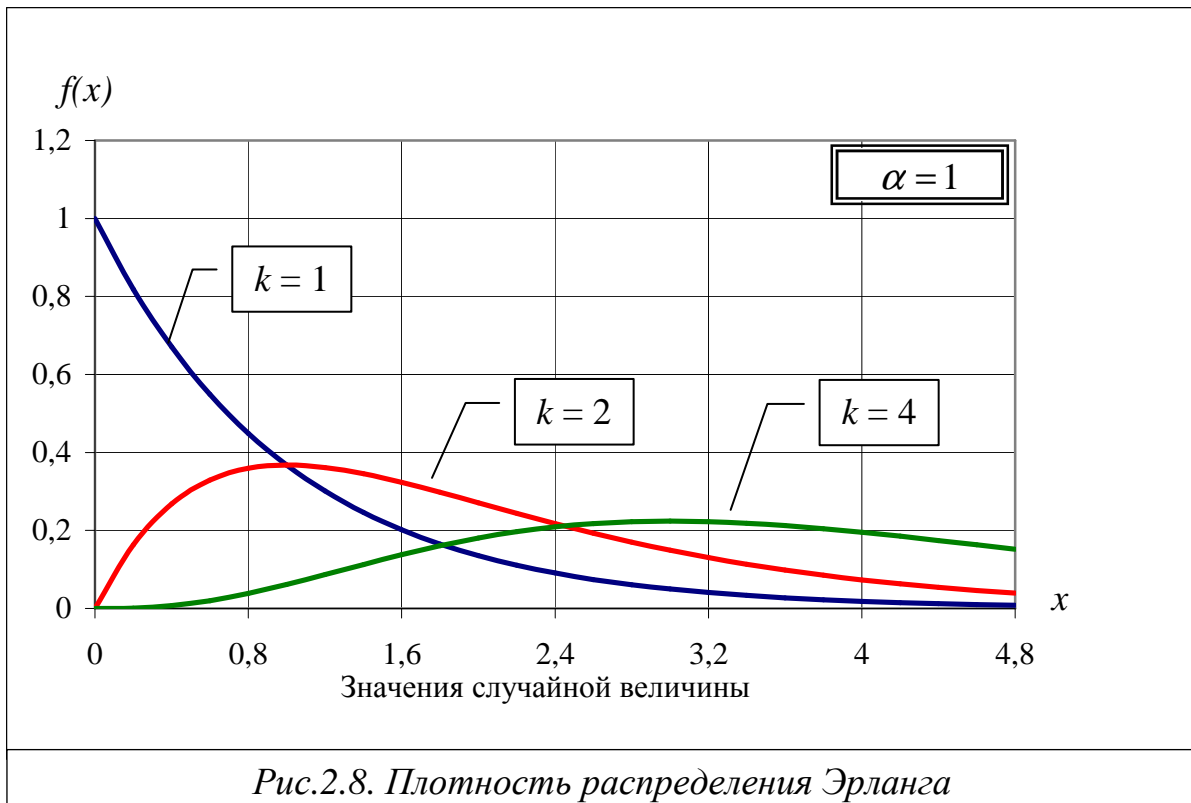


Рис.2.8. Плотность распределения Эрланга

**Коэффициент вариации** распределения Эрланга зависит от параметра  $k$  и принимает значения **меньше или равное единице**:

$$v_{\text{Эк}}[X] = \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Отметим, что математическое ожидание распределения Эрланга зависит от значения параметра  $k$ , что создаёт определенные проблемы при аппроксимации реальных распределений законом Эрланга. Эти проблемы отсутствуют при аппроксимации нормированным распределением Эрланга.

#### **Задание на самостоятельную работу:**

1. Определить математическое ожидание, дисперсию, коэффициент вариации распределения Эрланга  $k$ -го порядка.
2. Доказать, что коэффициент вариации распределения Эрланга не превышает 1.
3. Построить графики функции и плотности распределений Эрланга 5-го и 8-го порядка.

### **2.5.6. Нормированное распределение Эрланга**

Нормированное распределение Эрланга представляет собой распределение суммы  $k$  независимых случайных величин, каждая из которых распределена по экспоненциальному закону с параметром  $k\alpha$ , зависящим от  $k$ . Другими словами, суммируются  $k$  экспоненциально распределенных случайных величин, каждая из которых имеет математическое ожидание в

$k$  раз меньше, чем исходное математическое ожидание реального распределения, что приводит к независимости математического ожидания нормированного распределения Эрланга от параметра  $k$ .

Математические выражения для функции и плотности нормированного распределения Эрланга можно получить из (2.14), заменив параметр  $\alpha$  на  $k\alpha$ :

$$F_k(x) = 1 - e^{-k\alpha x} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k\alpha x)^i}{i!}; \quad f_k(x) = \frac{k\alpha(k\alpha x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\alpha x},$$

**Коэффициент вариации** нормированного распределения Эрланга так же, как и ненормированного, зависит от параметра  $k$  и принимает значения **меньше или равное единице**:  $\nu_{н\text{Э}k}[X] = \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 \quad (k = 1, 2, \dots)$ .

На рис.2.9 показаны плотности распределения Эрланга при  $\alpha = 1$  для трех значений параметра:  $k = 1$ ;  $k = 2$ ;  $k = 16$ .

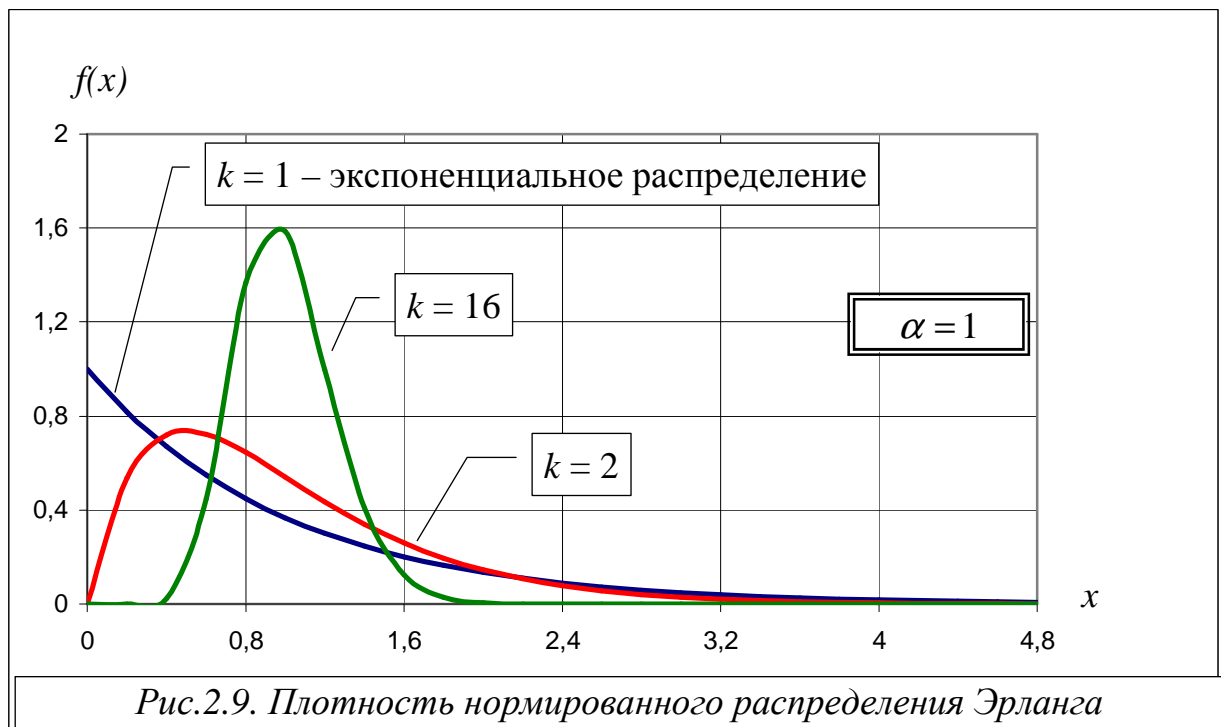


Рис.2.9. Плотность нормированного распределения Эрланга

Нормированное распределение Эрланга при  $k \rightarrow \infty$ , в отличие от простого распределения Эрланга, приводит к *детерминированной величине*  $1/\alpha$ .

Преобразование Лапласа нормированного распределения Эрланга

$$F^*(s) = \left( \frac{k\alpha}{k\alpha + s} \right)^k. \quad (2.16)$$

**Задание на самостоятельную работу:**

1. Построить графики функции и плотности нормированного распределения Эрланга 5-го порядка и сравнить с простым распределением Эрланга.

2. Определить математическое ожидание, второй начальный момент, дисперсию, коэффициент вариации нормированного распределения Эрланга. Доказать, что коэффициент вариации нормированного распределения Эрланга не превышает 1.

### 2.5.7. Гиперэкспоненциальное распределение

В тех случаях, когда некоторое реальное распределение непрерывной случайной величины, принимающей неотрицательные значения, имеет коэффициент вариации больше единицы, для его аппроксимации может использоваться гиперэкспоненциальное распределение.

Как следует из названия, гиперэкспоненциальное распределение некоторым образом связано с экспоненциальным и представляет собой аддитивную смесь разных экспоненциальных распределений. Процесс формирования случайных величин с гиперэкспоненциальным распределением из экспоненциально распределенных случайных величин может быть представлен следующим образом.

Положим, что имеется  $n$  разных генераторов экспоненциально распределенных случайных величин с параметрами  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  соответственно (математическими ожиданиями  $M_1 = 1/\alpha_1, \dots, M_n = 1/\alpha_n$ ), причем  $\alpha_i \neq \alpha_j$  для всех  $i \neq j$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ). Пусть в результате одного опыта с вероятностью  $q_i$  вырабатывается только одна случайная величина  $i$ -м генератором с параметром  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), причем  $q_1 + \dots + q_n = 1$ . Совокупность случайных величин, полученных в результате проведения множества таких опытов, будет распределена по гиперэкспоненциальному закону:

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^n q_i (1 - e^{-\alpha_i x}) = 1 - \sum_{i=1}^n q_i e^{-\alpha_i x}; \\ f(x) &= \sum_{i=1}^n q_i \alpha_i e^{-\alpha_i x} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Гиперэкспоненциальное распределение (2.17) содержит  $(2n-1)$

параметров:  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, q_1, \dots, q_{n-1}$ , поскольку  $q_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} q_i$ .

Преобразование Лапласа гиперэкспоненциального распределения

$$F^*(s) = \sum_{i=1}^n q_i \frac{\alpha_i}{\alpha_i + s}.$$

В простейшем варианте случайные величины с гиперэкспоненциальным распределением могут быть получены с использованием только двух экспоненциальных распределений:  $n=2$ . Тогда функция и плотность гиперэкспоненциального распределения будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= qp(1 - e^{-\alpha_1 x}) + (1-q)(1 - e^{-\alpha_2 x}); \\ f(x) &= q\alpha_1 e^{-\alpha_1 x} + (1-q)\alpha_2 e^{-\alpha_2 x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Заметим, что гиперэкспоненциальное распределение (2.18) является трехпараметрическим, то есть содержит три независимых параметра:  $q, \alpha_1, \alpha_2$  ( $0 < q < 1; \alpha_1 \geq 0; \alpha_2 \geq 0$ ). Следовательно, аппроксимация реальных распределений гиперэкспоненциальным может осуществляться по трем моментам распределения, а не по двум, как в распределении Эрланга.

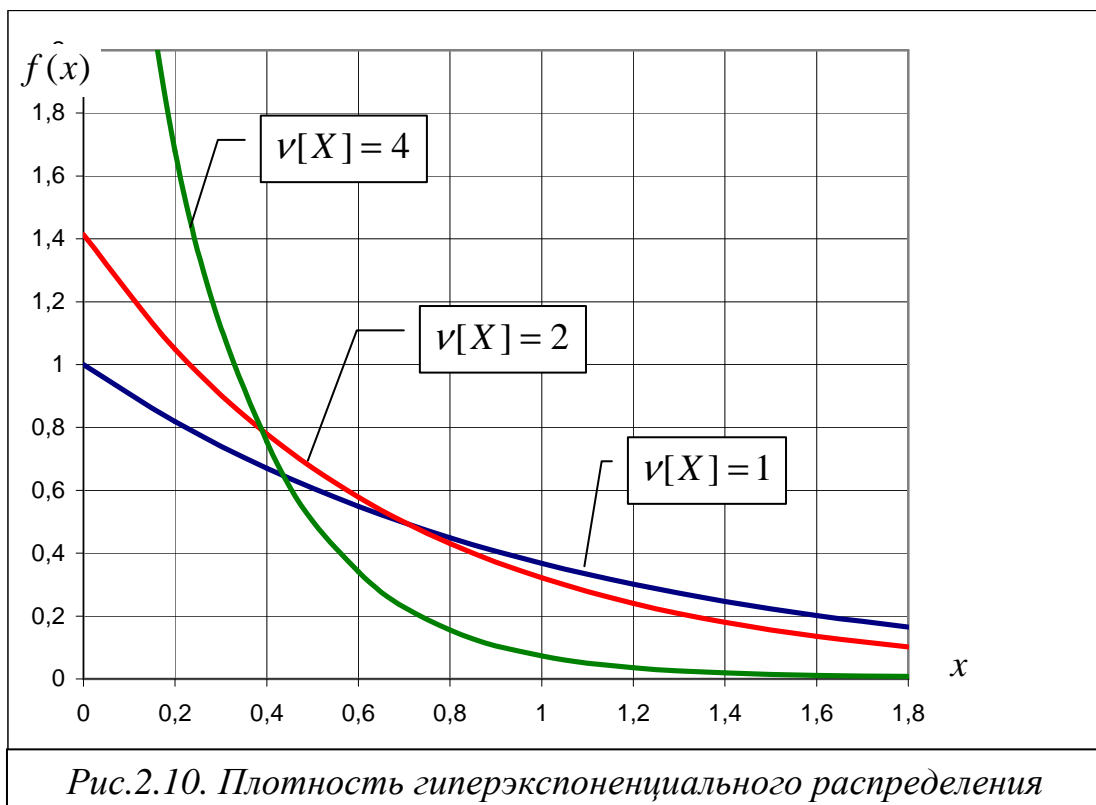
На рис.2.10 показаны плотности гиперэкспоненциального распределения случайной величины  $X$  с математическим ожиданием, равным 1, для двух значений коэффициента вариации:  $v[X] = 2$  и  $v[X] = 4$ . Параметры распределения (2.18) имеют следующие значения:

- $\alpha_1 = 0,183; \alpha_2 = 1,506$  для распределения с  $v[X] = 2$ ;
- $\alpha_1 = 0,091; \alpha_2 = 4,022$  для распределения с  $v[X] = 4$ ,

причем параметр  $q$  одинаков для обоих распределений и равен 0,07.

Здесь же для сравнения показана плотность экспоненциального распределения с тем же математическим ожиданием  $M=1$ .

Как видно из представленных графических зависимостей, плотность гиперэкспоненциального распределения по сравнению с экспоненциальным распределением характеризуется более резким спадом в области малых значений случайной величины, причем чем больше коэффициент вариации случайной величины, тем круче эта зависимость.



Можно показать, что вероятность появления маленьких значений случайной величины для гиперэкспоненциального распределения намного больше вероятности появления больших значений. Определим вероятность того, что случайная величина примет значение меньше математического ожидания  $M$ . Для этого рассчитаем значение функции распределения в

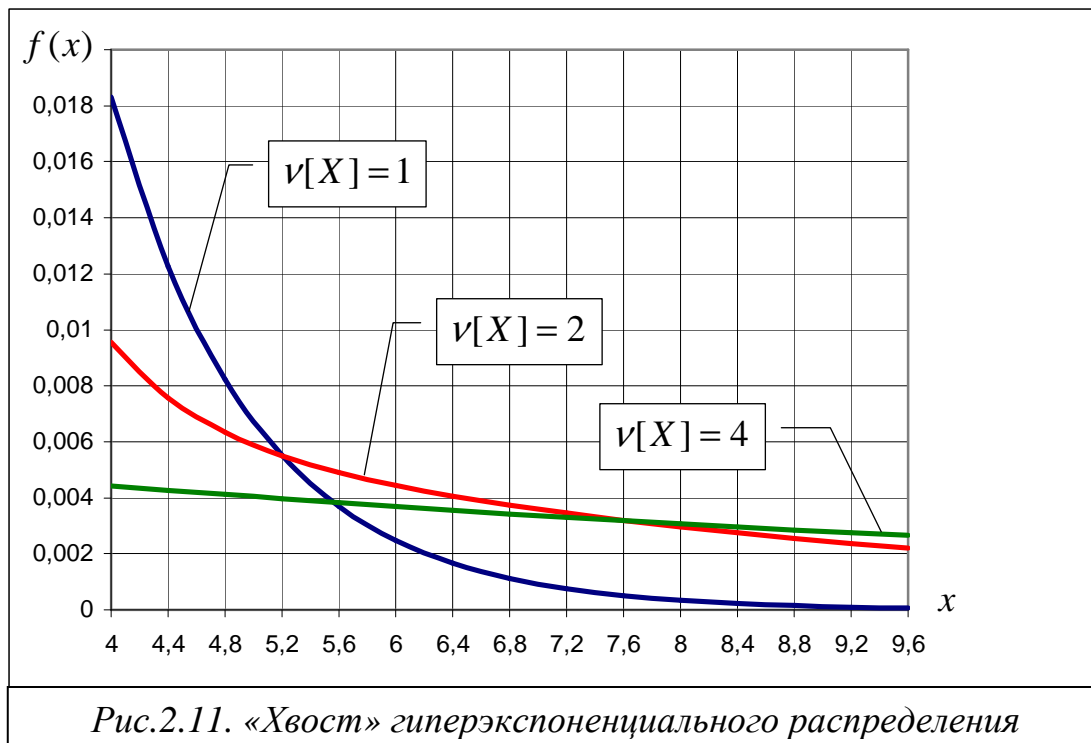
точке  $x = M$ :  $\Pr(X < M) = F(x = M) = F(M)$ . Тогда для рассмотренных выше гиперэкспоненциальных распределений получим:

$$\Pr(X < M) = F(M) = \begin{cases} 0,735 & \text{для распределения с } \nu[X] = 2; \\ 0,919 & \text{для распределения с } \nu[X] = 4. \end{cases}$$

Таким образом, более 73% значений случайной величины, распределенной по гиперэкспоненциальному закону с коэффициентом вариации, равным 2, попадает в интервал  $(0; M)$  и только 27% значений окажутся больше математического ожидания. Для случайной величины, с коэффициентом вариации, равным 4, вероятность попадания в интервал  $(0; M)$  еще выше и составляет почти 92%. Очевидно, что чем больше коэффициент вариации, тем больше вероятность появления маленьких значений случайной величины.

Для сравнения вычислим эту же вероятность для экспоненциального распределения:  $\Pr(X < M) = F(M) = 0,632$ . Таким образом, вероятность появления маленьких значений экспоненциально распределенной случайной величины больше вероятности появления больших значений и составляет 63%, но при этом она значительно меньше, чем при гиперэкспоненциальном распределении.

Представление о гиперэкспоненциальном распределении будет не полным, если не обратить внимания на «хвост» этого распределения. На рис.2.11 представлен график плотности гиперэкспоненциального распределения для значений случайной величины больше 4. Напомним, что математическое ожидание случайной величины равно 1.



Из графика видно, что кривая плотности гиперэкспоненциального распределения с коэффициентом вариации, равным 4, имеет длинный так

называемый «тяжелый хвост», характеризующийся малым изменением. Это означает, что при гиперэкспоненциальном распределении вероятность появления больших значений случайной величины значительно выше, чем, например, для экспоненциального распределения. Таким образом, основное отличие гиперэкспоненциального распределения от экспоненциального состоит в том, что гиперэкспоненциальное распределение характеризуется большей вероятностью появления маленьких значений случайной величины и, в то же время, большей вероятностью появления больших значений случайной величины

**Задание на самостоятельную работу:**

1. Построить графики функции гиперэкспоненциального распределения и сравнить с экспоненциальным распределением.
2. Определить математическое ожидание, второй начальный момент, дисперсию, коэффициент вариации гиперэкспоненциального распределения.
3. Доказать, что коэффициент вариации гиперэкспоненциального распределения превышает 1.

### 2.5.8. Гиперэрланговское распределение

**Гиперэрланговское распределение** представляет собой аддитивную смесь нормированных распределений Эрланга и является наиболее общим распределением неотрицательных непрерывных случайных величин, поскольку имеет **коэффициент вариации в интервале от 0 до  $\infty$** . Составляющими гиперэрланговского распределения, в отличие от гиперэкспоненциального, являются нормированные распределения Эрланга.

Плотность гиперэкспоненциального распределения

$$f(x) = \sum_{i=1}^n q_i \frac{k_i \alpha_i (k_i \alpha_i x)^{k_i-1}}{(k_i-1)!} e^{-k_i \alpha_i x} \quad (x \geq 0). \quad (2.19)$$

Преобразование Лапласа гиперэрланговского распределения

$$F^*(s) = \sum_{i=1}^n q_i \left( \frac{k_i \alpha_i}{k_i \alpha_i + s} \right)^{k_i}.$$

**Задание на самостоятельную работу:**

1. Построить график плотности гиперэрланговского распределения и сравнить с гиперэкспоненциальным.
2. Определить математическое ожидание, второй начальный момент, дисперсию, коэффициент вариации гиперэрланговского распределения.
3. Доказать, что коэффициент вариации гиперэрланговского распределения может принимать любое значение.

Ниже в таблице представлены основные числовые характеристики

рассмотренных распределений дискретных и непрерывных случайных величин:

- математическое ожидание  $M[X]$ ;
- второй начальный момент  $\alpha_2[X]$ ;
- дисперсия  $D[X]$ ;
- среднеквадратическое отклонение  $\sigma[X]$ ;
- коэффициент вариации  $\nu[X]$ .

В графе «Примечания» указаны значения или диапазон изменения параметров соответствующих распределений.

### Числовые характеристики распределений

Распределение	$M[X]$	$\alpha_2[X]$	$D[X]$	$\sigma[X]$	$\nu[X]$	Примечания
Пуассона	$a$	$a(a+1)$	$a$	$\sqrt{a}$	$1/\sqrt{a}$	$a > 0$
Геометрическое	$\frac{1-\gamma}{\gamma}$	$\frac{2(1-\gamma)^2}{\gamma^2}$	$\frac{(1-\gamma)^2}{\gamma^2}$	$\frac{1-\gamma}{\gamma}$	1	$0 < \gamma < 1$
Равномерное	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{a^2+ab+b^2}{3}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$	$\frac{b-a}{\sqrt{3}(a+b)}$	$b > a$
Экспоненциальное	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{2}{\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha}$	1	$\alpha > 0$
Эрланга	$\frac{k}{\alpha}$	$\frac{k(k+1)}{\alpha^2}$	$\frac{k}{\alpha^2}$	$\frac{\sqrt{k}}{\alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	$k = 1, 2, \dots$
Эрланга нормированное	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{k+1}{k\alpha^2}$	$\frac{1}{k\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha\sqrt{k}}$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	$k = 1, 2, \dots$
Гиперэкспоненциальное	$\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\alpha_i}$	$2 \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\alpha_i^2}$	$\alpha_2[X] - (M[X])^2$	$\sqrt{D[X]}$	$\nu[X] \geq 1$	$\sum_{i=1}^n q_i = 1$ $\alpha_i > 0$
Гиперэрланговское	$\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\alpha_i}$	$\sum_{i=1}^n q_i \frac{k_i+1}{k_i\alpha_i^2}$	$\alpha_2[X] - (M[X])^2$	$\sqrt{D[X]}$	$\nu[X] \geq 0$	$\sum_{i=1}^n q_i = 1$ $\alpha_i > 0$ $k_i = 1, 2, \dots$

Напомним, что представленные числовые характеристики связаны между собой достаточно простыми соотношениями:

$$D[X] = \alpha_2[X] - (M[X])^2;$$

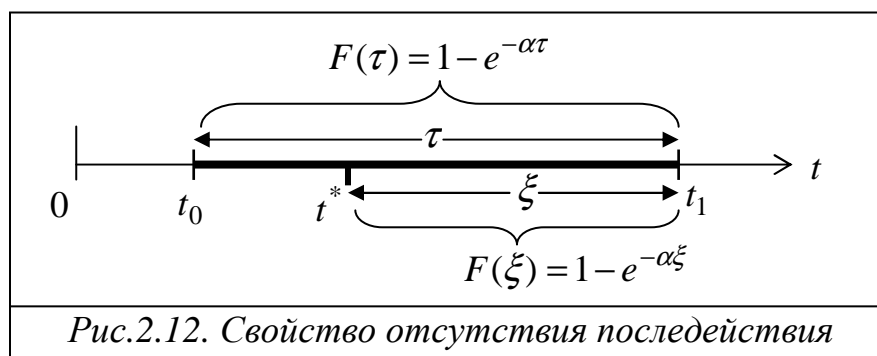
$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]};$$

$$\nu[X] = \frac{\sigma[X]}{M[X]}.$$

## 2.6. Аппроксимация неэкспоненциальных распределений

Работая над решением задачи, всегда полезно знать ответ. (*Закон Мэрфи*)

Как было отмечено в п.2.5.4, экспоненциальное распределение обладает замечательным свойством – свойством отсутствия последействия, благодаря которому оно широко используется при описании случайных процессов, протекающих в моделях массового обслуживания. Свойство отсутствия последействия заключается в следующем (рис.2.12). Если некоторый временной интервал  $\tau = t_1 - t_0$  представляет собой случайную величину, распределенную по экспоненциальному закону, то интервал  $\xi = t_1 - t^*$ , начинающийся от случайного момента времени  $t_1$  до завершения данного временного интервала, распределен по тому же экспоненциальному закону с тем же параметром  $\alpha$  (средним значением  $\bar{\tau} = 1/\alpha$ ). Другими словами, продолжительность интервала  $\xi$  не зависит от предыстории, то есть от того, сколько времени уже прошло до момента  $t^*$ .



Это замечательное свойство экспоненциального распределения используется при построении моделей марковских процессов, представляющих собой особый класс случайных процессов, развитие которых не зависит от предыстории процесса (см. п.5.1.2). Благодаря этому для многих моделей массового обслуживания удается достаточно просто получить конечные результаты, в том числе, в виде аналитических зависимостей в явном виде для расчета характеристик исследуемой системы. Поэтому часто при исследовании систем, в которых временные процессы отличаются от экспоненциальных, стремятся свести эти процессы к экспоненциальному представлению.

Напомним, что для экспоненциального закона распределения случайных величин, определённых в области положительных значений  $\tau \geq 0$ , коэффициент вариации, описывающий разброс значений случайной величины, равен единице. Если реальные временные интервалы имеют значения коэффициента вариации значительно отличающиеся от единицы, использование экспоненциального распределения может привести к большим погрешностям конечных результатов. В этих случаях в качестве аппроксимирующих функций законов распределений могут использовать-



ся вероятностные законы, представляющие собой композицию экспоненциальных распределений, а именно:

- распределение Эрланга и гипоекспоненциальное распределение, когда коэффициент вариации временного интервала меньше единицы:  $0 < \nu < 1$ ;
- гиперэкспоненциальное распределение, когда коэффициент вариации временного интервала больше единицы:  $\nu > 1$ .

При этом аппроксимация реального распределения, в простейшем случае, может выполняться по двум первым моментам распределения:

- математическому ожиданию;
- коэффициенту вариации.

### 2.6.1. Аппроксимация распределения с коэффициентом вариации $0 < \nu < 1$

Положим, что математическое ожидание и коэффициент вариации некоторой случайной величины  $\tau$ , определенной в положительной области действительных чисел, соответственно равны  $t$  и  $\nu$ , причем  $0 < \nu < 1$ .

Для аппроксимации закона распределения такой случайной величины в теории массового обслуживания часто используют распределение Эрланга  $k$ -го порядка  $E_k$ , которое может быть представлено в виде последовательности  $k$  экспоненциально распределенных фаз с одинаковым параметром  $\alpha_i = \alpha = 1/M[\tau]$  ( $i = \overline{1, k}$ ), где  $M[\tau]$  – математическое ожидание экспоненциально распределенной случайной величины в одной фазе (рис.2.13).

Такое представление позволяет трактовать формирование случайных величин, распределенных по закону Эрланга, как сумму  $k$  случайных величин, распределенных по одному и тому же экспоненциальному закону.

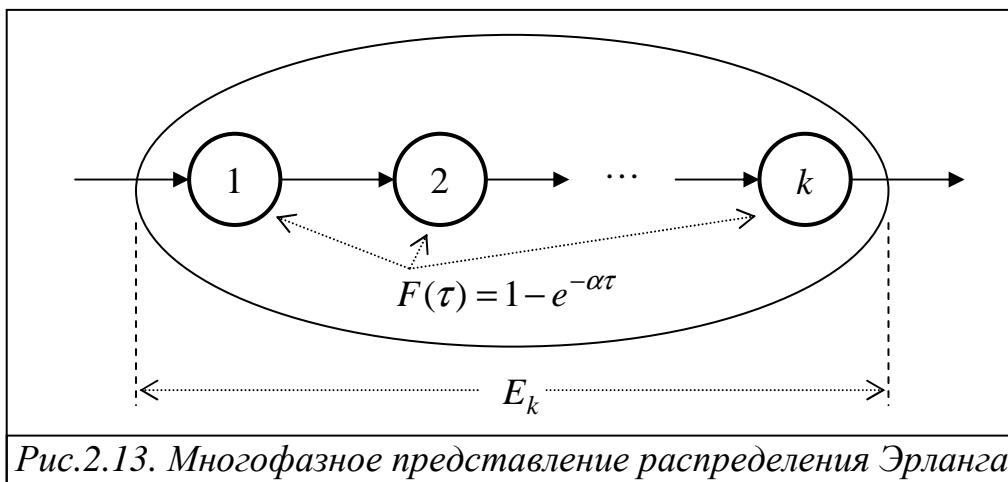


Рис.2.13. Многофазное представление распределения Эрланга

Математическое ожидание и коэффициент вариации случайной величины, распределенной по закону Эрланга  $k$ -го порядка:

$$M_{E_k} = kM[\tau]; \quad \nu_{E_k} = \frac{1}{\sqrt{k}},$$

где  $k = 1, 2, \dots$  – параметр распределения Эрланга, принимающий только целочисленные значения.

Тогда для заданных реальных (измеренных) значений математического ожидания  $t$  и коэффициента вариации  $\nu$  ( $0 < \nu < 1$ ) некоторой случайной величины  $\tau$ , определенной в положительной области действительных чисел, параметры аппроксимирующего распределения Эрланга будут определяться следующим образом:

$$k = \left\lceil \frac{1}{\nu^2} \right\rceil; \quad M[\tau] = \frac{t}{k},$$

где  $\lceil x \rceil$  означает ближайшее целое, большее  $x$ , поскольку параметр  $k$  может принимать только целочисленные значения.

Нетрудно убедиться, что распределение Эрланга позволяет аппроксимировать только те реальные распределения, коэффициенты вариации которых имеют следующие значения:  $\nu = 0,707$  при  $k = 2$ ;  $\nu = 0,577$  при  $k = 3$ ;  $\nu = 0,5$  при  $k = 4$  и т.д.

Для аппроксимации распределений с любым значением коэффициента вариации, находящимся в интервале  $(0; 1)$ , рассмотрим многофазное распределение с разными параметрами экспоненциальных распределений в фазах:  $\alpha_i = 1/t_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ), где  $t_i$  – математическое ожидание экспоненциально распределенной случайной величины в  $i$ -й фазе. Такое распределение будем называть **гипоэкспоненциальным распределением**.

Проанализируем свойства гипоэкспоненциального распределения на примере двухфазного распределения.

Известно, что преобразование Лапласа суммы независимых случайных величин равно произведению преобразований Лапласа слагаемых величин. Тогда преобразование Лапласа двухфазного гипоэкспоненциального распределения будет равно произведению преобразований Лапласа составляющих экспоненциальных распределений:

$$F^*(s) = F_1^*(s) F_2^*(s) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + s} \times \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + s} = \frac{1}{1 + st_1} \times \frac{1}{1 + st_2}.$$

Дифференцируя преобразование Лапласа по  $s$  в точке  $s=0$ , в соответствии с (2.7) найдем математическое ожидание и второй начальный момент для гипоэкспоненциального распределения:

$$M_{нсЭ_2} = t_1 + t_2; \quad \alpha_{нсЭ_2}^{(2)} = 2(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2).$$

Отсюда дисперсия, среднеквадратическое отклонение и коэффициент вариации будут равны:

$$D_{нсЭ_2} = t_1^2 + t_2^2; \quad \sigma_{нсЭ_2} = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}; \quad \nu_{нсЭ_2} = \frac{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}}{t_1 + t_2}.$$

На рис.2.14 показана зависимость коэффициента вариации двухфазного гипоэкспоненциального распределения от отношения  $t_1/t_2$  параметров экспоненциальных составляющих.

Как видно из графика, коэффициент вариации гипоекспоненциального распределения изменяется в пределах от 1 до 0,7, а точнее до значения коэффициента вариации распределения Эрланга 2-го порядка:  $\nu = 0,707$ , когда параметры экспоненциальных составляющих равны между собой:  $t_1 = t_2$ .

Очевидно, что для того, чтобы увеличить интервал изменения коэффициента вариации гипоекспоненциального распределения, необходимо вместо двухфазного использовать многофазное представление.

Можно показать, что для гипоекспоненциального распределения  $k$ -го порядка математическое ожидание, дисперсия и коэффициент вариации будут равны:

$$M_{нсЭ_k} = \sum_{i=1}^k t_i; \quad D_{нсЭ_k} = \sum_{i=1}^k t_i^2; \quad \nu_{нсЭ_k} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^k t_i^2}}{\sum_{i=1}^k t_i}. \quad (2.20)$$

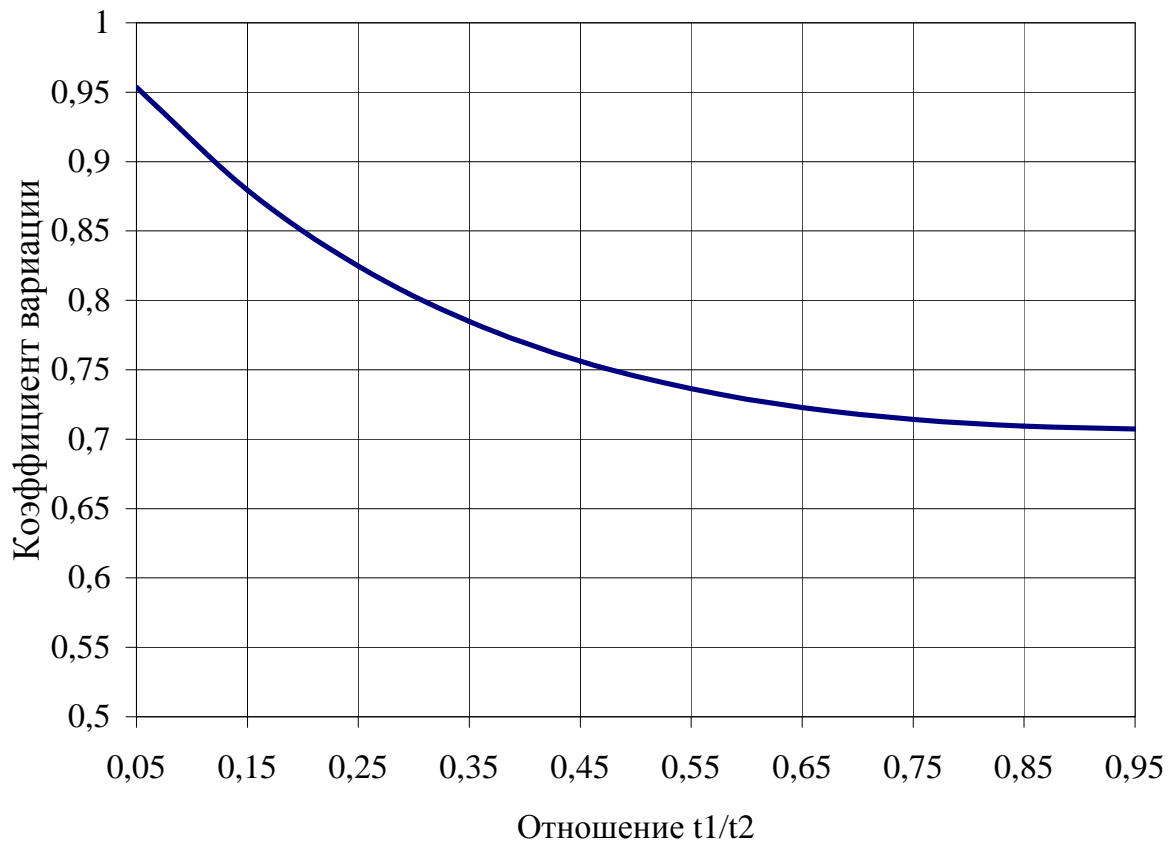


Рис.2.14. Зависимость коэффициента вариации от отношения  $t_1/t_2$

Легко убедиться, что коэффициент вариации гипоекспоненциального распределения лежит в интервале  $(1/\sqrt{k}; 1)$ , причем с увеличением  $k$  левая

граница этого интервала приближается к нулю.

Рассмотрим задачу аппроксимации реального распределения с коэффициентом вариации  $0 < \nu < 1$  гипоекспоненциальным распределением.

Положим, что известны математическое ожидание  $t$  и коэффициент вариации  $\nu$  (причем  $0 < \nu < 1$ ) некоторой случайной величины  $\tau$ , определенной в положительной области действительных чисел.

Для простоты, без потери общности, положим, что аппроксимирующее гипоекспоненциальное распределение содержит только два типа экспоненциальных фаз:  $k_1$  фаз с параметром  $\alpha_1 = 1/t_1$  и  $k_2 = k - k_1$  фаз с параметром  $\alpha_2 = 1/t_2$ , где  $t_1$  и  $t_2$  – математические ожидания экспоненциально распределенных случайных величин в фазах первого и второго типов соответственно.

Тогда из (2.20) следует, что математическое ожидание, дисперсия и коэффициент вариации будут равны:

$$M_{nc\mathcal{E}_k} = k_1 t_1 + k_2 t_2; \quad D_{nc\mathcal{E}_k} = k_1 t_1^2 + k_2 t_2^2; \quad \nu_{nc\mathcal{E}_k} = \frac{\sqrt{k_1 t_1^2 + k_2 t_2^2}}{k_1 t_1 + k_2 t_2}, \quad (2.21)$$

причем  $k_1 + k_2 = k$ .

Таким образом, для аппроксимации по двум моментам необходимо, чтобы выполнялись следующие два условия:

$$\left. \begin{aligned} k_1 t_1 + k_2 t_2 &= t; \\ \frac{\sqrt{k_1 t_1^2 + k_2 t_2^2}}{k_1 t_1 + k_2 t_2} &= \nu \end{aligned} \right\},$$

где  $t$  и  $\nu$  соответственно математическое ожидание и коэффициент вариации аппроксимируемого распределения.

После некоторых простых преобразований получим систему из двух линейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} k_1 t_1 + k_2 t_2 &= t; \\ k_1 t_1^2 + k_2 t_2^2 &= \nu^2 t^2 \end{aligned} \right\}.$$

Полагая, что значения  $k_1$  и  $k_2$  заданы, решим полученную систему уравнений относительно неизвестных  $t_1$  и  $t_2$ .

Из первого уравнения следует, что

$$t_2 = \frac{t - k_1 t_1}{k_2}. \quad (2.22)$$

Подставляя это выражение во второе уравнение, после некоторых алгебраических преобразований получим квадратное уравнение с одним неизвестным  $t_1$ :

$$k_1(k_1 + k_2)t_1^2 - 2k_1 t t_1 + (t^2 - k_2 \nu^2 t^2) = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получим:

$$t_1 = \frac{t}{k} \left[ 1 \pm \sqrt{\frac{k_2}{k_1} (k\nu^2 - 1)} \right], \quad (2.23)$$

где  $k = k_1 + k_2$ .

В качестве приемлемого решения могут быть использованы оба корня квадратного уравнения.

Для того чтобы в (2.23) под знаком квадратного корня иметь неотрицательную величину, необходимо выполнение следующего условия:

$$k \geq \frac{1}{\nu^2}. \quad (2.24)$$

Полученное условие определяет минимальное количество фаз в аппроксимирующем гипоекспоненциальном распределении.

Для того чтобы второе решение со знаком минус перед квадратным корнем давало  $t_1 \geq 0$ , дополнительно необходимо выполнение условия:

$$k_2 \leq \frac{1}{\nu^2}. \quad (2.25)$$

Объединив условия (2.24) и (2.25), окончательно получим вполне очевидное условие:

$$k_2 \leq \frac{1}{\nu^2} \leq k. \quad (2.26)$$

Подставим теперь (2.23) в (2.22) и найдем  $t_2$ :

$$t_2 = \frac{t}{k} \left[ 1 \mp \sqrt{\frac{k_1}{k_2} (k\nu^2 - 1)} \right], \quad (2.27)$$

для которого получим условие, аналогичное (2.26):

$$k_1 \leq \frac{1}{\nu^2} \leq k. \quad (2.28)$$

Таким образом, окончательно имеем следующие выражения для аппроксимации гипоекспоненциальным распределением  $k$ -го порядка законов распределений случайных величин с коэффициентом вариации  $0 < \nu < 1$ :

$$k \geq \frac{1}{\nu^2}; \quad t_1 = \frac{t}{k} \left[ 1 + \sqrt{\frac{k_2}{k_1} (k\nu^2 - 1)} \right]; \quad t_2 = \frac{t}{k} \left[ 1 - \sqrt{\frac{k_1}{k_2} (k\nu^2 - 1)} \right] \quad (2.29)$$

или

$$k \geq \frac{1}{\nu^2}; \quad t_1 = \frac{t}{k} \left[ 1 - \sqrt{\frac{k_2}{k_1} (k\nu^2 - 1)} \right]; \quad t_2 = \frac{t}{k} \left[ 1 + \sqrt{\frac{k_1}{k_2} (k\nu^2 - 1)} \right] \quad (2.30)$$

Окончательно алгоритм аппроксимации реального распределения с коэффициентом вариации  $0 < \nu < 1$  гипоекспоненциальным распределением при заданных значениях математического ожидания  $t$  и коэффициента вариации  $\nu$  (причем  $0 < \nu < 1$ ) некоторой случайной величины  $\tau$ , определенной в положительной области действительных чисел, выглядит следующим образом:

1) на основе первого выражения в (2.29) и (2.30) по заданному значению коэффициента вариации  $\nu$  определяется минимально необходимое число экспоненциальных фаз  $k$  в аппроксимирующем распределении как ближайшее большее целое по отношению к  $1/\nu^2$ ;

2) выбирается значение  $k_1 \leq k$  и рассчитывается  $k_2 = k - k_1$ ;

3) на основе (2.29) или (2.30) рассчитываются значения  $t_1$  и  $t_2$ .

Результаты аппроксимации на основе выражений (2.29) и (2.30), а также при различных значениях  $k_1$  и  $k_2 = k - k_1$ , различаются значениями третьего и более высоких моментов распределения, но имеют одинаковые первые и вторые моменты.

Учет более высоких моментов при аппроксимации реальных распределений не вызывает принципиальных трудностей, но сопровождается более громоздкими математическими выкладками. К тому же, во многих случаях, влияние этих моментов на конечные результаты исследований оказывается незначительным.

**Пример.** Пусть математическое ожидание и коэффициент вариации аппроксимируемого выражения соответственно равны:  $t = 10$  и  $\nu = 0,4$ .

В соответствии с выше изложенным алгоритмом аппроксимации:

1) минимально необходимое число экспоненциальных фаз в аппроксимирующем распределении:  $k = 7$  ( $k \geq \frac{1}{0,16} = 6,25$ );

2) выберем значение  $k_1 = 3$ , тогда  $k_2 = 7 - 3 = 4$ ;

на основе (2.29) рассчитываются значения  $t_1 = 2$  и  $t_2 = 1$ .

Таким образом, в качестве аппроксимирующего распределения выбираем семифазное гипотенциальное распределение, в котором *три* экспоненциальные фазы имеют математическое ожидание, равное 2, и *четыре* фазы – математическое ожидание, равное 1.

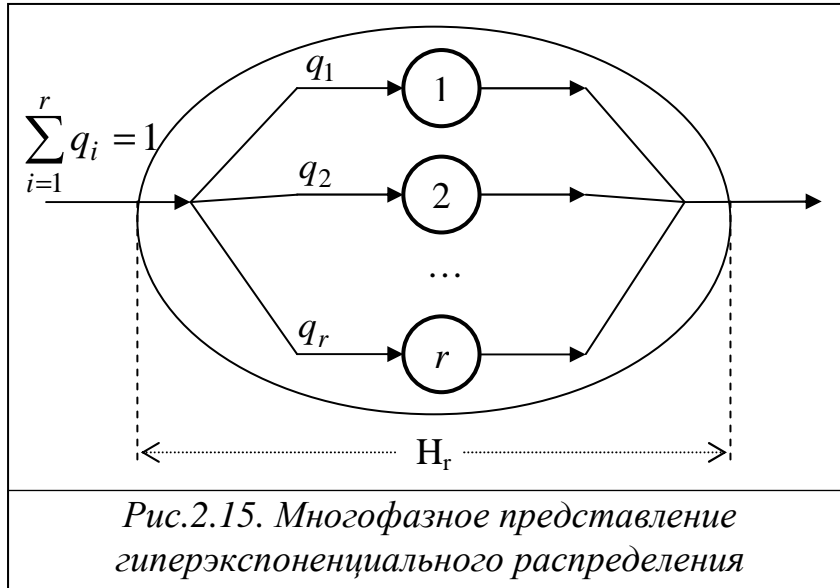
### 2.6.2. Аппроксимация распределения с коэффициентом вариации $\nu > 1$

Положим, что математическое ожидание и коэффициент вариации некоторой случайной величины  $\tau$ , определенной в положительной области действительных чисел, соответственно равны  $t$  и  $\nu$ , причем  $\nu > 1$ .

Для аппроксимации закона распределения такой случайной величины в теории массового обслуживания часто используют *гиперэкспоненциальное распределение*, представляющее собой композицию экспоненциальных распределений.

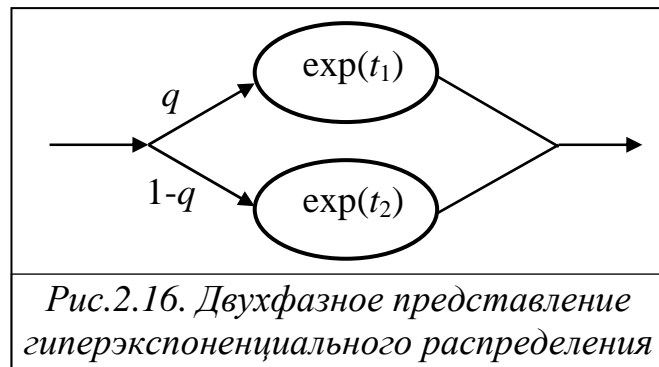
Гиперэкспоненциальное распределение  $H_r$  может быть представлено в виде множества параллельных фаз с экспоненциальными распределениями с параметрами  $\alpha_i = 1/t_i$ , где  $t_i = M[\tau_i]$  ( $i = \overline{1, r}$ ) – математическое ожидание экспоненциально распределенной случайной

величины в  $i$ -ой фазе (рис.2.15).



В простейшем случае гиперэкспоненциальное распределение может быть представлено в виде двухфазного распределения (рис.2.16). Параметрами такого распределения являются:  $t_1$  и  $t_2$  – математические ожидания первой и второй экспоненциальных фаз соответственно;  $q$  – вероятность формирования значения случайной величины в первой фазе.

Полученное таким образом распределение является трехпараметрическим. Это означает, что аппроксимация таким распределением может выполняться по трем числовым моментам. Выбор значений параметров гиперэкспоненциального распределения только по двум моментам (математическому ожиданию и коэффициенту вариации) предполагает наличие некоторого произвола.



Таким образом, задача аппроксимации гиперэкспоненциальным распределением сводится к определению значений параметров  $t_1, t_2$  и  $q$  в зависимости от известных значений математического ожидания  $t$  и коэффициента вариации  $\nu$  аппроксимируемого закона распределения случайной величины  $\tau$ .

Математическое ожидание и второй начальный момент гиперэкспоненциального распределения соответственно равны:

$$t = q t_1 + (1 - q) t_2; \quad (2.31)$$

$$t^{(2)} = 2[q t_1^2 + (1 - q) t_2^2].$$

Тогда коэффициент вариации гиперэкспоненциального распределения:

$$\nu^2 = \frac{2[q t_1^2 + (1 - q) t_2^2]}{t^2} - 1,$$

откуда:

$$2[qt_1^2 + (1-q)t_2^2] = t^2(1+v^2). \quad \text{й} \quad (2.32)$$

Из (2.31) имеем:

$$t_2 = \frac{t-qt_1}{1-q}. \quad \text{й йй й} \quad (2.33)$$

Подставив последнее выражение в (2.32), после некоторых преобразований получим квадратное уравнение:

$$2qt_1^2 - 4qtt_1 + [1+q-(1-q)v^2]t^2 = 0. \quad (2.34)$$

Решая это квадратное уравнение относительно  $t_1$ , получим:

$$t_1 = t \left[ 1 \pm \sqrt{\frac{1-q}{2q}(v^2-1)} \right].$$

Для того чтобы гарантировать  $t_1 > 0$ , в качестве решения выберем корень уравнения со знаком плюс перед знаком радикала:

$$t_1 = \left[ 1 + \sqrt{\frac{1-q}{2q}(v^2-1)} \right] t. \quad (2.35)$$

Подставим (2.35) в (2.33) и найдем  $t_2$ :

$$t_2 = \left[ 1 - \sqrt{\frac{q}{2(1-q)}(v^2-1)} \right] t. \quad (2.36)$$

Потребуем, чтобы  $t_2 \geq 0$ , то есть  $\frac{q}{2(1-q)}(v^2-1) \leq 1$ . Отсюда:

$$q \leq \frac{2}{1+v^2}. \quad (2.37)$$

Выражения (2.35) – (2.37) можно использовать для аппроксимации любого закона распределения с коэффициентом вариации  $v > 1$  двухфазным гиперэкспоненциальным распределением, для чего достаточно выбрать значение вероятности  $q$  из условия (2.37) и рассчитать значения  $t_1$  и  $t_2$  в соответствии с (2.35) и (2.36).

Рассмотрим частный случай, когда  $q = \frac{2}{1+v^2}$ . Подставляя это выражение в (2.35) и (2.36), получим:

$$t_1 = \frac{v^2+1}{2}t; \quad t_2 = 0. \quad (2.38)$$

Последние выражения соответствуют однофазному представлению гиперэкспоненциального распределения, показанному на рис.2.17. Заметим, что полученные для  $t_1$  и  $t_2$  выражения (2.35) и (2.36) – симметричны. Можно

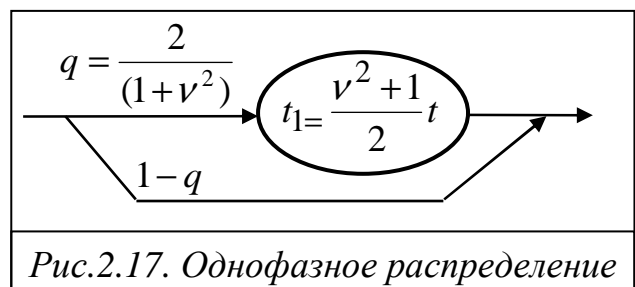


Рис.2.17. Однофазное распределение



показать, что если выбрать в качестве решения квадратного уравнения (2.34) второй корень со знаком минус перед знаком радикала и потребовать, чтобы выражение в квадратных скобках не было отрицательным, то получим:

$$t_1 = t \left[ 1 - \sqrt{\frac{1-q}{2q}(v^2-1)} \right]; \quad (2.39)$$

$$t_2 = t \left[ 1 + \sqrt{\frac{q}{2(1-q)}(v^2-1)} \right], \quad (2.40)$$

а условие (2.37) для выбора значения  $q$  примет вид:

$$q \geq \frac{v^2-1}{v^2+1}, \quad (2.41)$$

что равносильно перестановке двух экспоненциальных фаз (см. рис.2.16) гиперэкспоненциального распределения.

**Пример.** Пусть  $v = 3$ , тогда в соответствии с (2.37):  $q \leq \frac{2}{1+3^2} = 0,2$ .

Рассмотрим два варианта аппроксимации.

1) Выберем  $q = 0,1$ , тогда в соответствии с (2.35) и (2.36):

$$t_1 = 7t; \quad t_2 = \frac{1}{3}t.$$

Таким образом, в качестве аппроксимирующего распределения может быть выбрано двухфазное гиперэкспоненциальное распределение, в котором с вероятностью  $q = 0,1$  случайная величина формируется в первой фазе с математическим ожиданием в 7 раз большим, чем математическое ожидание аппроксимируемой случайной величины, и с вероятностью  $q = 0,9$  случайная величина формируется во второй фазе с математическим ожиданием в 3 раза меньшим, чем математическое ожидание аппроксимируемой случайной величины.

2) Выберем  $q = 0,2$ , тогда в соответствии с (2.38):

$$t_1 = \frac{3^2+1}{2}t = 5t; \quad t_2 = 0.$$

В этом варианте в качестве аппроксимирующего распределения используется однофазное гиперэкспоненциальное распределение, в котором с вероятностью  $q = 0,2$  случайная величина формируется в единственной фазе с математическим ожиданием в 5 раз большим, чем математическое ожидание аппроксимируемой случайной величины, и с вероятностью  $q = 0,8$  случайная величина принимает значение 0. Таким образом, этот вариант аппроксимации предполагает, что 80% значений случайной величины будут нулевыми.

Рассмотренные два варианта аппроксимации обеспечивают одинаковые значения математических ожиданий и коэффициентов вариаций, но различаются третьими и более высокими моментами распределений.

Очевидно, что второй вариант аппроксимации может оказаться более предпочтительным, например, при аппроксимации времени ожидания в системе массового обслуживания, если известно, что около 80% заявок прошли через систему с нулевым ожиданием, и коэффициент вариации времени ожидания больше единицы.

## 2.7. Резюме

1. Базовые понятия теории вероятностей – «событие», «вероятность», «случайная величина».

*Вероятность* – численная мера степени объективной возможности некоторого события. Вероятность может принимать только положительные значения из интервала  $[0; 1]$ .

Величина, принимающая значение, *неизвестное заранее*, называется *случайной*. Различают *дискретные* (прерывные) и *непрерывные* (аналоговые) случайные величины.

2. *Закон распределения* случайной величины – соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан:

- *аналитически* в виде математического выражения;
- *таблично* в виде ряда распределения;
- *графически* в виде многоугольника распределения.

Закон распределения непрерывной случайной величины может быть задан в виде:

- *функции распределения*  $F(x)$  случайной величины  $X$ , представляющей собой *вероятность* того, что случайная величина  $X$  примет значение меньше, чем некоторое заданное значение  $x$ :  $F(x) = P(X < x)$ ;

- *плотности распределения*  $f(x)$ , определяемой как производная от функции распределения  $F(x)$  по  $x$ :  $f(x) = F'(x)$ .

Функция распределения однозначно определяется через плотность распределения как

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

*Свойства функции распределения:*

- $F(x)$  – неубывающая функция: если  $x_j > x_i$ , то  $F(x_j) \geq F(x_i)$ ;
- функция распределения принимает значения от 0 до 1, причём:  $F(-\infty) = 0$  и  $F(+\infty) = 1$ .

*Свойства плотности распределения:*

- плотность распределения принимает только неотрицательные значения:  $f(x) \geq 0$ ;

• площадь на графике, ограниченная плотностью распределения и осью абсцисс, всегда равна единице:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ .

3. Числовые характеристики – *начальные*  $\alpha_s[X]$  и *центральные*  $\beta_s[X]$  *моменты* – позволяют выразить в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения случайной величины

Первый начальный момент случайной величины  $X$  называется *математическим ожиданием* и характеризует *среднее значение* случайной величины:  $M[X] = \alpha_1[X]$ .

Второй начальный момент  $\alpha_2[X]$  случайной величины  $X$  характеризует *разброс* значений случайной величины *относительно начала координат*.

Второй центральный момент называется *дисперсией* случайной величины:  $D[X] = \beta_2[X]$  и характеризует *разброс* значений случайной величины *относительно математического ожидания*.

Дисперсия и второй начальный момент связаны зависимостью

$$D[X] = \alpha_2[X] - (M[X])^2.$$

*Среднеквадратическое отклонение*  $\sigma[X]$  – характеристика *разброса*, *размерность* которой совпадает с *размерностью* случайной величины:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}.$$

*Коэффициент вариации*  $\nu[X]$  – *безразмерная* характеристика *разброса* случайных величин, определенных в области положительных значений:

$$\nu[X] = \sigma[X] / M[X] \quad (M[X] > 0).$$

4. *Производящая функция* распределения  $p_k = P(X = k)$  дискретной случайной величины  $X$ :

$$X^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k \quad |z| \leq 1.$$

Математическое ожидание и дисперсия:

$$M[X] = p'(1); \quad D[X] = p''(1) + p'(1) - [p'(1)]^2.$$

Производящая функция  $X^*(z)$  суммы  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  независимых случайных величин:

$$X^*(z) = X_1^*(z) X_2^*(z) \dots X_n^*(z).$$

*Преобразование Лапласа* плотности распределения  $f(x)$  неотрицательной непрерывной случайной величины  $X$ :

$$F^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \quad (s \geq 0).$$

Начальные моменты случайной величины:

$$\alpha_k[X] = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{ds^k} F^*(s) \Big|_{s=0}.$$

Преобразование Лапласа суммы  $Z = X + Y$  независимых случайных величин  $X$  и  $Y$  равно произведению преобразований Лапласа слагаемых:

$$Z^*(s) = X^*(s)Y^*(s).$$

5. В моделях дискретных систем наиболее широко применяются следующие законы распределений случайных величин:

- *распределение Пуассона* (дискретный закон):

$$p_k = P(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где  $a$  – параметр распределения ( $a > 0$ );

- *геометрическое распределение* (дискретный закон):

$$p_k = P(X = k) = \rho^k (1 - \rho) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где  $\rho$  – параметр распределения ( $0 < \rho < 1$ );

- *равномерное распределение* (непрерывный закон) с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a < x < b; \\ 0 & \text{при } x > b; \end{cases}$$

- *экспоненциальное распределение* (непрерывный закон) с функцией и плотностью

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x}; \quad f(x) = \alpha e^{-\alpha x},$$

где  $\alpha > 0$  – параметр распределения;  $x \geq 0$ ;  $v_{эксн}[X] = 1$ .

- *распределение Эрланга  $k$ -го порядка* (непрерывный закон) с функцией и плотностью:

$$F_k(x) = 1 - e^{-\alpha x} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\alpha x)^i}{i!}; \quad f_k(x) = \frac{\alpha (\alpha x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\alpha x},$$

где  $\alpha$  и  $k$  – параметры распределения ( $\alpha \geq 0$ ;  $k = 1, 2, \dots$ );  $x \geq 0$ ;

$v_{\mathcal{E}_k}[X] = \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1$ ; математическое ожидание распределения Эрланга зависит от значения параметра  $k$ ;

- *нормированное распределение Эрланга* (непрерывный закон) с функцией и плотностью:

$$F_k(x) = 1 - e^{-k\alpha x} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k\alpha x)^i}{i!}; \quad f_k(x) = \frac{k\alpha (k\alpha x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\alpha x},$$

коэффициент вариации нормированного распределения Эрланга также меньше или равен единице:  $v_{н\mathcal{E}_k}[X] = \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1$ , но математическое ожидание не зависит от значения параметра  $k$ ;

- *гиперэкспоненциальное распределение* (непрерывный закон):

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^n q_i (1 - e^{-\alpha_i x}) = 1 - \sum_{i=1}^n q_i e^{-\alpha_i x}; \\ f(x) &= \sum_{i=1}^n q_i \alpha_i e^{-\alpha_i x} \end{aligned} \right\};$$

• *гиперэрланговское распределение* представляет собой аддитивную смесь *нормированных распределений Эрланга* и является наиболее *общим распределением* неотрицательных непрерывных случайных величин, поскольку имеет *коэффициент вариации в интервале от 0 до  $\infty$* ; плотность гиперэкспоненциального распределения:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n q_i \frac{k_i \alpha_i (k_i \alpha_i x)^{k_i - 1}}{(k_i - 1)!} e^{-k_i \alpha_i x} \quad (x \geq 0).$$

6. Если реальные временные интервалы имеют значения коэффициента вариации, значительно отличающиеся от единицы, использование экспоненциального распределения может привести к большим погрешностям конечных результатов. В этих случаях в качестве аппроксимирующих функций законов распределений могут использоваться вероятностные законы, представляющие собой композицию экспоненциальных распределений, при этом аппроксимация реального распределения, в простейшем случае, выполняется по двум первым моментам: математическому ожиданию  $t$  и коэффициенту вариации  $\nu$ .

В качестве таких аппроксимирующих распределений могут использоваться:

- если коэффициент вариации временного интервала меньше единицы ( $0 < \nu < 1$ ), *гипоэкспоненциальное распределение*, параметры которого рассчитываются по формулам:

$$k \geq \frac{1}{\nu^2}; \quad t_1 = \frac{t}{k} \left[ 1 + \sqrt{\frac{k_2}{k_1} (k \nu^2 - 1)} \right]; \quad t_2 = \frac{t}{k} \left[ 1 - \sqrt{\frac{k_1}{k_2} (k \nu^2 - 1)} \right];$$

- если коэффициент вариации временного интервала больше единицы ( $\nu > 1$ ), *гиперэкспоненциальное распределение*, параметры которого рассчитываются по формулам:

$$q \leq \frac{2}{1 + \nu^2}; \quad t_1 = \left[ 1 + \sqrt{\frac{1 - q}{2q} (\nu^2 - 1)} \right] t; \quad t_2 = \left[ 1 - \sqrt{\frac{q}{2(1 - q)} (\nu^2 - 1)} \right] t.$$

## 2.8. Практикум: решение задач

**Задача 1.** Дискретная случайная величина  $X$  принимает значения: 1; 2; 3 с вероятностями 0,2; 0,3; 0,5 соответственно.

1) Нарисовать график функции распределения дискретной случайной величины  $X$ .

2) Вычислить математическое ожидание, дисперсию, второй

начальный момент, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации случайной величины  $X$ .

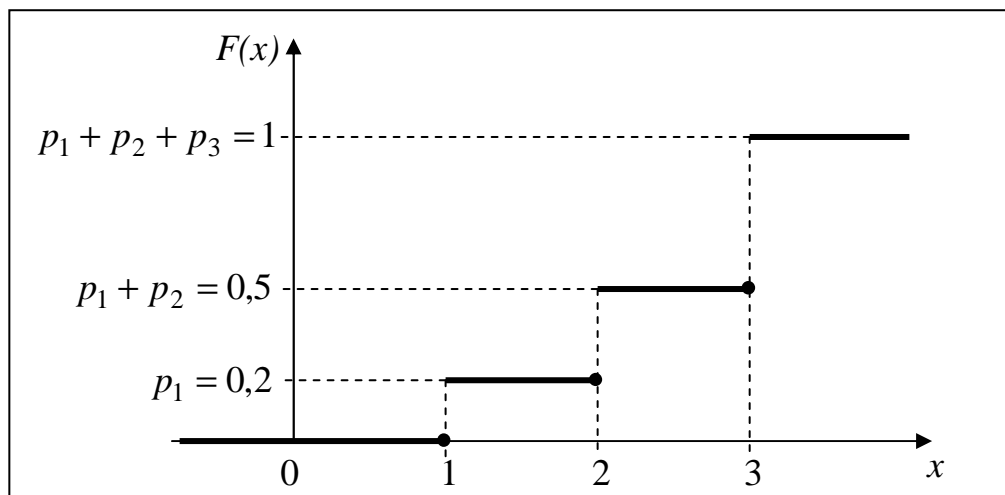
**Дано:**  $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3;$   
 $p_1 = 0,2; p_2 = 0,3; p_3 = 0,5.$

**Требуется:**

- 1) нарисовать  $F(x)$ ;
- 2) вычислить  $M[X], D[X], \alpha_2[X], \sigma[X], \nu[X]$ .

**Решение.**

- 1) График функции распределения случайной величины  $X$ :



Следует отметить, что значения функции распределения  $F(x)$  для каждого значения случайной величины  $x_i$  увеличиваются на величину, равную соответствующей вероятности  $p_i$  появления этого значения, причем самое верхнее значение всегда равно 1.

Отметим также, что, как показано на графике (в виде черных кружочков), значения функции распределения в точках  $x = 1, x = 2$  и  $x = 3$  соответственно равны:  $F(1) = 0, F(2) = 0,2$  и  $F(3) = 0,5$ , поскольку функция распределения  $F(x)$  определяется как вероятность появления случайной величины, значение которой строго меньше (а не меньше или равно)  $x$ :  $F(x) = P(X < x)$ .

- 2) Математическое ожидание:

$$M[X] = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0,2 \times 1 + 0,3 \times 2 + 0,5 \times 3 = 2,3.$$

Второй начальный момент:

$$\alpha_2[X] = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 = 0,2 \times 1 + 0,3 \times 4 + 0,5 \times 9 = 5,9.$$

$$\text{Дисперсия: } D[X] = \alpha_2[X] - (M[X])^2 = 5,9 - 5,29 = 0,61.$$

$$\text{Среднее квадратическое отклонение: } \sigma[X] = \sqrt{D[X]} \approx 0,78.$$

$$\text{Коэффициент вариации: } \nu[X] = \frac{\sigma[X]}{M[X]} \approx 0,34.$$

**Задача 2.** Чему равно математическое ожидание, дисперсия, второй начальный момент и коэффициент вариации детерминированной величины  $x=10$ ? Нарисовать график функции и плотности распределения случайной величины.

**Дано:** детерминированная величина:  $x = 10$ .

**Требуется:**

- 1) вычислить  $M[X]$ ,  $D[X]$ ,  $\alpha_2[X]$ ,  $\nu[X]$ ;
- 2) нарисовать  $F(x)$  и  $f(x)$ .

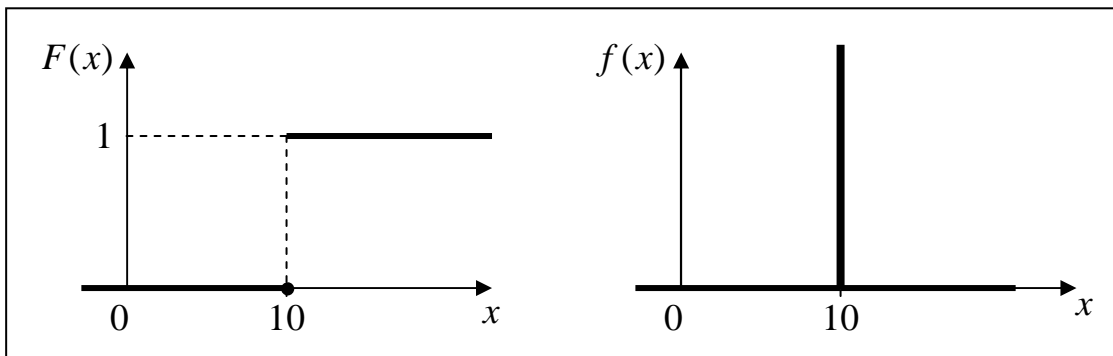
**Решение.**

1) Детерминированную величину можно рассматривать как случайную величину, принимающую одно и то же значение  $x=10$  с вероятностью  $p=1$ . Тогда:

- математическое ожидание:  $M[X] = px = 10$ ;
- второй начальный момент:  $\alpha_2[X] = px^2 = 100$ ;
- дисперсия:  $D[X] = \alpha_2[X] - (M[X])^2 = 0$ ;
- коэффициент вариации:  $\nu[X] = \frac{\sqrt{D[X]}}{M[X]} = 0$ .

Полученные достаточно тривиальные результаты становятся очевидными, если вспомнить физическое толкование представленных величин. Математическое ожидание, представляющее собой среднее значение случайной величины, естественно, совпадает с единственно возможным значением  $x=10$ . Дисперсия, среднеквадратическое отклонение и коэффициент вариации, определяющие разброс значений относительно математического ожидания, очевидно всегда равны нулю для детерминированной величины, поскольку разброса значений просто нет. Однако следует обратить внимание, что *второй начальный момент не равен нулю*, хотя тоже определяет разброс значений, но, в отличие от предыдущих характеристик, относительно начала координат. Действительно, единственное значение  $x=10$  находится от начала координат на «расстоянии», не равном нулю и, следовательно, второй начальный момент отличен от нуля.

2) Графики функции и плотности распределения детерминированной величины:



Как следует из представленных графиков, функция распределения детерминированной величины представляет собой *функцию Хевисайда*, а плотность распределения – *дельта-функцию*:

$$F(x) = H(x - M); \quad f(x) = \delta(x - M),$$

где  $M$  – математическое ожидание, равное значению детерминированной величины (в нашем случае  $M=10$ ).

**Задача 3.** Непрерывная случайная величина равномерно распределена в интервале  $(-30; +20)$ . Нарисовать график плотности и функции распределения случайной величины. Определить: а) математическое ожидание случайной величины; б) вероятность того, что случайная величина принимает положительные значения.

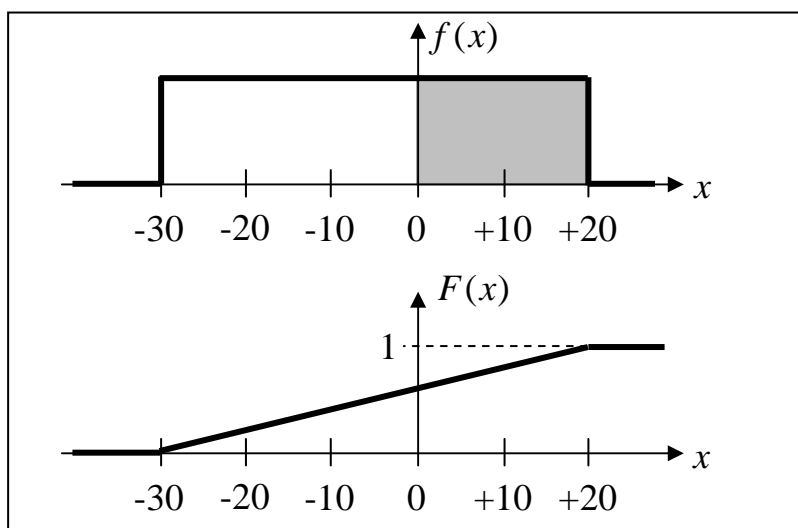
**Дано:** равномерно распределённая случайная величина в интервале  $(-30; +20)$ .

**Требуется:**

- 1) нарисовать  $f(x)$  и  $F(x)$ ;
- 2) вычислить  $M[X]$ ;
- 3) определить  $\Pr(X \geq 0) = 1 - F(0)$ .

**Решение.**

1) Графики плотности и функции равномерно распределённой случайной величины:



2) Очевидно, что математическое ожидание равномерно распределённой случайной величины находится в середине заданного интервала  $(-30; +20)$  и равно:  $M = -5$ . Этот же результат может быть получен с использованием формулы для расчета математического ожидания равномерно распределённой случайной величины:  $M = \frac{a+b}{2} = \frac{-30+20}{2} = -5$ , где  $a$  и  $b$  - соответственно левая и правая границы интервала.

3) Вероятность того, что случайная величина принимает положительные значения, также может быть определена несколькими



способами.

Во-первых, через значение функции распределения:  $\Pr(X \geq 0) = 1 - F(0) = 1 - 0,6 = 0,4$ . Во-вторых, из графика плотности распределения как площадь под плотностью распределения, ограниченная слева значением  $x = 0$  и справа значением  $x = +20$  (на графике выделена серым цветом). Помня, что площадь под плотностью распределения на всём интервале значений случайной величины равна 1, можно сделать вывод, что площадь на интервале значений  $(0, +20)$  составляет  $2/5$ , то есть равна  $0,4$ .

## 2.9. Самоконтроль: перечень вопросов и задач

1. Что понимается под случайной величиной?
2. Приведите примеры случайных величин.
3. Является ли случайной величиной...:
  - ... число дней в году?
  - ... рост человека?
  - ... количество пассажиров в автобусе?
  - ... интервал между поездами в метро?
  - ... температура воздуха на улице?
  - ... напряжение в электрической сети?
  - ... количество студентов в группе?
  - ... оценка на экзамене?

Ответы сопроводить необходимыми пояснениями. Какие из перечисленных величин являются непрерывными?

4. Приведите примеры дискретных и непрерывных случайных величин.
5. Что характеризует вероятность?
6. Как рассчитать вероятность какого-либо события?
7. Рассчитайте вероятность того, что в тщательно перемешанной колоде из 36 карт нижней картой окажется ...:
  - ... туз пиковый?
  - ... туз любой масти?
  - ... любой масти туз или король?
  - ... пиковый туз или пиковый король?
  - ... пиковый туз или крестовый король?
  - ... любая карта красной масти?
8. Рассчитайте вероятность того, что в тщательно перемешанной колоде из 36 карт две верхние карты окажутся ...:
  - ... тузами?
  - ... туз и король одной масти?
  - ... пиковый туз и пиковый король?
  - ... пиковый туз или король любой масти?
  - ... красной масти?
9. Из тщательно перемешанной колоды, содержащей 36 карт,

отброшена половина карт. Какова вероятность того, что в оставшейся половине колоды находится ...:

... туз пиковый?

... туз любой масти?

... любой масти туз или король?

... пиковый туз или пиковый король?

... пиковый туз или крестовый король?

... любая карта красной масти?

10. Понятие и способы задания закона распределения случайной величины.

11. Понятие и свойства функции распределения случайной величины.

12. Понятие и свойства плотности распределения вероятностей.

13. Что характеризует и какую размерность имеет математическое ожидание (дисперсия; второй начальный момент; среднее квадратическое отклонение; коэффициент вариации, функция распределения, плотность распределения) случайной величины?

14. Для чего используются производящая функция и преобразование Лапласа? Для каких случайных величин используется преобразование Лапласа?

15. Назовите известные Вам дискретные и непрерывные законы распределений.

16. Чему равен коэффициент вариации: а) экспоненциального распределения; б) распределения Эрланга 9-го порядка?

17. В каком интервале находится коэффициент вариации распределения: а) Эрланга; б) гиперэкспоненциального; в) гиперэрланговского?

18. Нарисовать график плотности и функции распределения: а) экспоненциального; б) Эрланга; в) гиперэкспоненциального .

19. Показать на графике и пояснить, в чём различие между плотностями распределений экспоненциального и гиперэкспоненциального законов.

20. Показать на графике и пояснить, в чём различие между плотностями распределений Эрланга 2-го и 4-го порядка.

21. Дискретная случайная величина принимает значения 1; 2; 3 с вероятностями 0,5; 0,4; 0,1 соответственно. Вычислить математическое ожидание, дисперсию, второй начальный момент, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

22. Чему равно математическое ожидание, дисперсия, второй начальный момент и коэффициент вариации детерминированной величины  $X=25$ ?

23. Определить значение детерминированной величины  $X$ , если известно, что ее второй начальный момент равен 25?

24. Определить коэффициент вариации детерминированной величины  $X$ , если известно, что ее второй начальный момент равен 121?

25. Математическое ожидание экспоненциально распределенной

случайной величины равно 0,1. Определить среднеквадратическое отклонение, второй начальный момент и коэффициент вариации.

26. Дисперсия экспоненциально распределенной случайной величины равна 16. Определить математическое ожидание и второй начальный момент.

27. Чему равен коэффициент вариации распределения Эрланга 4-го порядка?

28. Чему равна дисперсия случайной величины, распределенной по закону Эрланга 9-го порядка с математическим ожиданием, равным 15?

29. Дискретная случайная величина принимает значения 1; 2; 3 соответственно с вероятностями 0,3; 0,1; 0,6. Нарисовать график функции распределения случайной величины. Определить математическое ожидание и второй начальный момент.

30. Непрерывная случайная величина принимает значения в интервалах (1; 2) и (3; 4), причем вероятность появления значения из интервала (3; 4) в три раза больше вероятности появления значения из интервала (1; 2). Полагая, что в пределах каждого из интервалов случайная величина имеет равномерное распределение, построить графики функции и плотности распределения. Вычислить математическое ожидание, дисперсию, второй начальный момент, среднеквадратическое отклонение, коэффициент вариации.

31. Случайная величина может принимать только два значения 10 и 90. Какова вероятность появления этих значений, если известно, что математическое ожидание случайной величины равно 80?

32. В чём заключается свойство отсутствия последействия, присущее экспоненциальному закону распределения случайных величин?

33. Какие распределения, связанные с экспоненциальным, можно использовать для аппроксимации случайных величин с коэффициентом вариации  $\nu < 1$ ?

34. Что представляет собой однофазное гиперэкспоненциальное распределение?

35. В каком интервале находится коэффициент вариации случайной величины, имеющей однофазное гиперэкспоненциальное распределение?