

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ДВОИЧНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ (НДДС) ДИСКРЕТНОЙ АВТОМАТИКИ

Рассматриваются проблемы, связанные с использованием нелинейных двоичных динамических систем (НДДС) в составе устройств дискретной автоматики. Причем первоочередной проблемой является разработка методологии и алгоритмического обеспечения конструирования нелинейных модельных представлений ДДС. В связи с тем, что «нелинейность» в общесистемной постановке суть разновидность статической «памяти», то следует ожидать при использовании НДДС в составе устройств дискретной автоматики для решения задач кодопреобразования заметного сокращения размерности кода состояния ДДС, что влечет за собой системологическую проблему «кодového пространства» на классе ЛДДС–НДДС реализаций проектируемых двоичных систем. При этом разработчик УДА должен помнить, что априорным преимуществом НДДС перед ЛДДС является возможность использования всего банка существующей триггерной логики, что существенно расширяет класс схемотехнических реализаций ДДС.

2.1. Построение модельного представления НДДС с использованием средств автоматной логики

В настоящем параграфе в развитие положений параграфа 1.2, в котором в классе моделей «вход–состояние–выход» (ВСВ) (1.20) построены линейные представления правил (функций) λ перехода и δ выхода в форме (1.23) и (1.24), ставится задача конструирования их нелинейных аналогов. Для целей построения нелинейных модельных представлений правил λ и δ при описании ДДС используются возможности автоматной логики [6, 7, 8, 14, 39] в двух ее реализациях. Одна из этих реализаций опирается на процедуру канонического автоматного синтеза ДДС, а другая – на процедуру автоматного синтеза ДДС с использованием граф-схем алгоритмов (ГСА) ее функционирования.

Первая из отмеченных процедур конструирования нелинейного модельного представления в форме НДДС реализуется в виде следующего алгоритма.

*Алгоритм 2.1 (A2.1)
конструирования модельного ВСВ представления НДДС на основе
канонического автоматного синтеза*

1. Сформулировать постановку задачи кодопреобразования, решаемой конструируемой ДДС.
2. Формализовать задачу кодопреобразования в виде абстрактного автомата (АА), задаваемого в виде пятиэлементного макровектора

$$AA: \{ Z, S, W, \lambda, \delta \}, \quad (2.1)$$

где Z – алфавит высокого уровня (с возможным использованием вербальных описаний) входов абстрактного автомата мощности $[Z]=r_z$, S – алфавит высокого уровня его состояния мощности $[S]=n_s$, W – алфавит высокого уровня выходов АА мощности $[W]=m_w$, λ – правило (функция) перехода АА

$$s(k+1) = \lambda[s(k), z(k)], \quad s(0); \quad (2.2)$$

δ – правило (функция) выхода, задаваемое функциональными соотношениями соответственно

$$W(k) = \delta[s(k)] \quad (2.3)$$

в логике абстрактного автомата Мура и

$$W(k) = \delta[s(k), z(k)] \quad (2.4)$$

в логике абстрактного автомата Мили. В (2.2) – (2.4) $s(0), s(k), s(k+1)$ – соответственно начальное состояние, исходное состояние и состояние перехода АА, k – дискретное время, выраженное в числе тактов длительностью Δt . При этом основным математическим средством описания правил (функций) λ, δ на первом этапе конструирования являются графы переходов и выходов, на втором – таблицы переходов и выходов.

3. Осуществить переход от абстрактного автомата (2.1) к конечному автомату (КА)

$$KA: \{ U, X, Y, \lambda, \delta \} \quad (2.5)$$

над простым полем Галуа $GF(p)$ при $p=2$, путем кодирования элементов алфавитов высокого уровня АА (2.1) кодами, составленными из элементов поля $GF(p)$. В выражении (2.5) $U = \kappa\{Z\}$, $X = \kappa\{S\}$, $Y = \kappa\{W\}$, где $\kappa\{(\bullet)\}$ – код (вектор-строка) элемента алфавита (\bullet) размерности $dim \kappa\{(\bullet)\}$. Раз-

мерности кодов конечного автомата (2.5) и мощности алфавитов абстрактного автомата (2.1) связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \dim U = r = \arg \min \{ p^r \geq r_z \}, \quad \dim X = n = \arg \min \{ p^n \geq n_s \}, \\ \dim W = m = \arg \min \{ p^m \geq m_w \} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Коды алфавитов входа и выхода могут строиться в рамках требований (2.6) достаточно произвольно. Коды элементов алфавита состояния с тем чтобы избежать начальную установку КА должны использовать нулевую комбинацию, а так же учитывать специфику графа переходов АА. Так, если в графе переходов АА явно обнаруживается некоторая его цикличность, то из соображений простоты технической реализации НДДС коды ее состояний, соседние по графу, должны быть максимально приближены к *соседним*) [8], то есть должны характеризоваться минимальным кодовым расстоянием (см. параграф 3.2).

Представить правила λ , δ (2.2) – (2.4) КА после процедуры кодирования соответствующих алфавитов АА, соответственно в виде

$$\lambda: x(k+1) = \lambda[x(k), u(k)], \quad x(0) \quad (2.7)$$

и

$$\delta: y(k) = \delta[x(k)] \quad (2.8)$$

при использовании автоматной логики Мура и

$$\delta: y(k) = \delta[x(k), u(k)] \quad (2.9)$$

при использовании автоматной логики Мили, где $x(0)$, $x(k)$, $x(k+1)$ – соответственно коды начального состояния, исходного состояния и состояния перехода.

4. Выбрать тип автоматной логики (Мура или Мили) функционирования конечного автомата на основе анализа требований, предъявляемых к НДДС по быстродействию и информационной надежности, таблиц переходов и выходов КА, полученных в результате выполнения п.3 алгоритма.
5. Выбрать тип используемых при построении НДДС триггеров, число которых не зависит от выбранного их типа и определяется размерностью n кода состояния автоматного представления НДДС. Учесть, что выбор конкретного типа триггера вводит в рассмотрение дополнительную функцию описания КА – функцию μ возбуждения информационного входа v триггера, задаваемую в форме

$$v(k) = \mu[x(k), x(k+1)]. \quad (2.10)$$

6. Построить аналитическое представление функционирования НДДС в виде двух систем булевых функций, описывающих процесс:

формирования выхода y в форме

$$y = y[x(k), u(k)], \quad (2.11)$$

и формирования сигналов возбуждения информационных входов триггеров в форме

$$v(k) = \mu[x(k), \lambda[x(k), u(k)]] = \tilde{\mu}[x(k), u(k)]. \quad (2.12)$$

Булеву функцию (БФ) (2.11) составить непосредственно на основе табличного представления правила δ функции выхода КА, являющейся таблицей истинности на всем множестве наборов переменных, представленных кодами исходных состояний и входов. Для построения БФ (2.12) сконструировать таблицу возбуждения входов всех триггеров выбранного типа на основе представления (2.10) и таблицы переходов КА. Построенную таблицу использовать для построения БФ (2.12) в качестве таблицы истинности.

7. Привязать аналитические описания (2.11), (2.12) к элементной базе и построить схемотехническую реализацию НДДС. ■

Примечание 2.1 (ПМ.2.1) Из приведенного алгоритма нетрудно видеть, что автоматный синтез существенно расширяет банк схемотехнических реализаций ДДС за счет снятия ограничений на логику функционирования триггеров, которое имело место в линейном синтезе ДДС. □

Пример 2.1 (Пр.2.1)

В качестве примера рассматривается конструирование НДДС, преобразующая входную последовательность $u(k) = \delta(k)$ в периодическую последовательность, обеспечивающую размещение информационных разрядов в кодах Хэмминга (7,4) (см. **Пр1.1**).

Для решения поставленной задачи конструирования ДДС воспользуемся алгоритмом **2.1**.

1. В соответствии с постановочной частью задачи конструирования назначаем элементы алфавита Z входа, S состояния и W выхода описания устройства в форме АА и составляем формальную его модель в логике абстрактных автоматов Мура (рисунок 2.1) и автоматов Мили (рисунок 2.2). При этом соответствующие им таблицы правила λ перехода и правила δ выхода запишутся в виде таблиц 2.1 и 2.2.

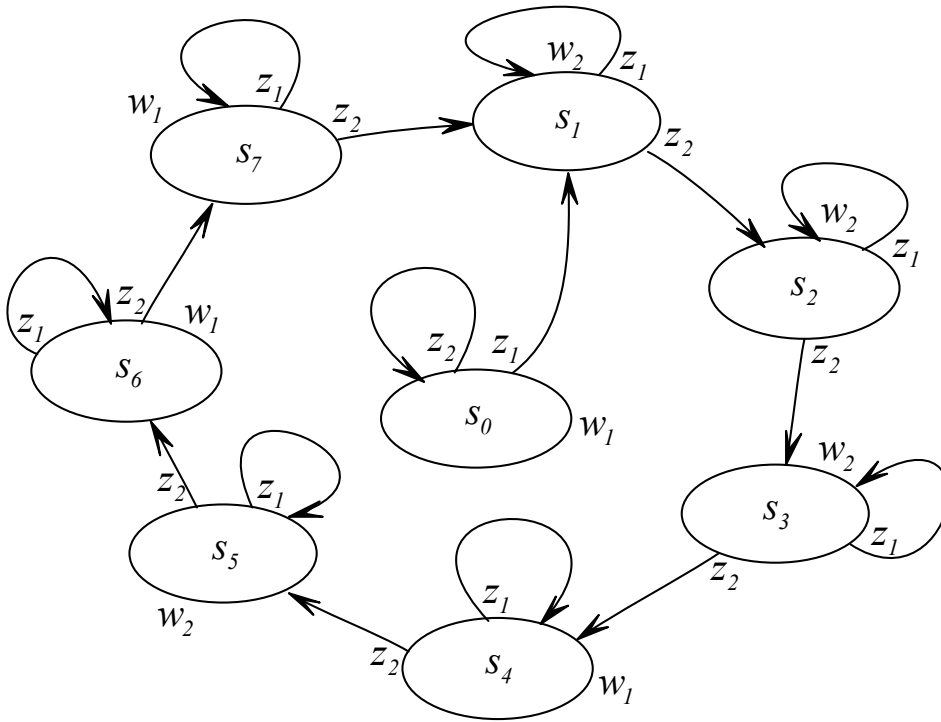


Рисунок 2.1. Модель НДДС в логике абстрактного автомата Мура

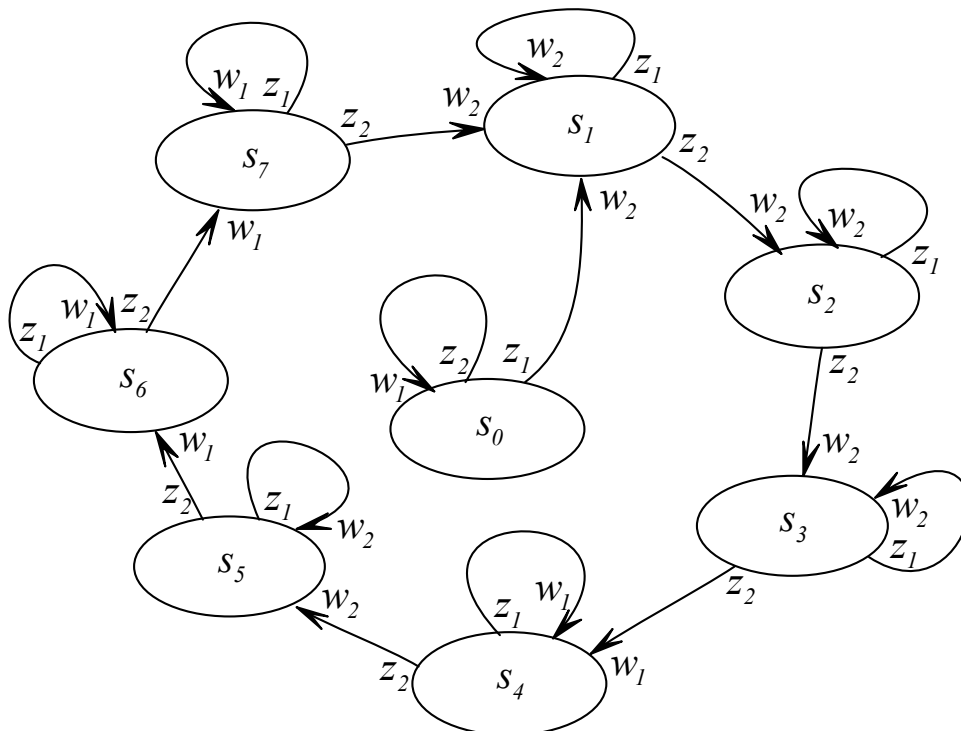


Рисунок 2.2. Модель НДДС в виде абстрактного автомата Мили

Таблица 2.1

Условие перехода z_i	Состояния s_i							
	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
z_1	s_1	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
z_2	s_0	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_1

Таблица 2.2

Выход АА	Структура АА	Входы, z_i	Состояния s_i							
			s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
w_j	Рисунок 2.1	—	w_1	w_2	w_2	w_2	w_1	w_2	w_1	w_1
	Рисунок 2.2	z_1	w_2	w_2	w_2	w_1	w_2	w_1	w_1	w_2
		z_2	w_1	w_2	w_2	w_1	w_2	w_1	w_1	w_2

2. В соответствии с п.3 алгоритма кодируем алфавиты входа, состояния и выхода полученных абстрактных автоматов (таблицы 2.3 – 2.5) и, таким образом, получаем описание конструируемого устройства в форме КА. Функции переходов и выходов КА записываем в виде таблиц 2.6 и 2.7 соответственно, а графы переходов и выходов, соответствующие двум логикам конечного автомата функционирования (логикам Мура и Мили), представляем так, как показано на рисунках 2.3 и 2.4 соответственно.

Таблица 2.3

Входы z_i	Коды условий перехода КА $z_i \xrightarrow{K} u$
z_1	1
z_2	0

Таблица 2.4

Состояния s_k	Коды состояний КА $s_k \xrightarrow{K} (x_1 x_2 x_3)_k$
s_0	000
s_1	001
s_2	010
s_3	011
s_4	100
s_5	101
s_6	110
s_7	111

Таблица 2.5

Выходы w_j	Коды выхода КА $w_j \xrightarrow{K} y$
w_1	0
w_2	1

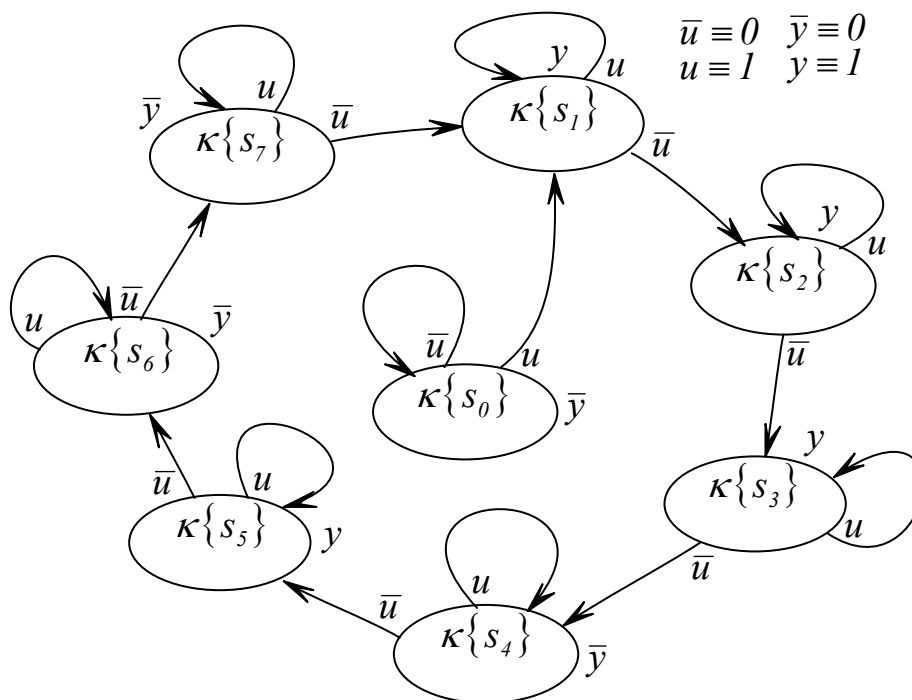


Рисунок 2.3. Модель НДДС в виде конечного автомата Мура

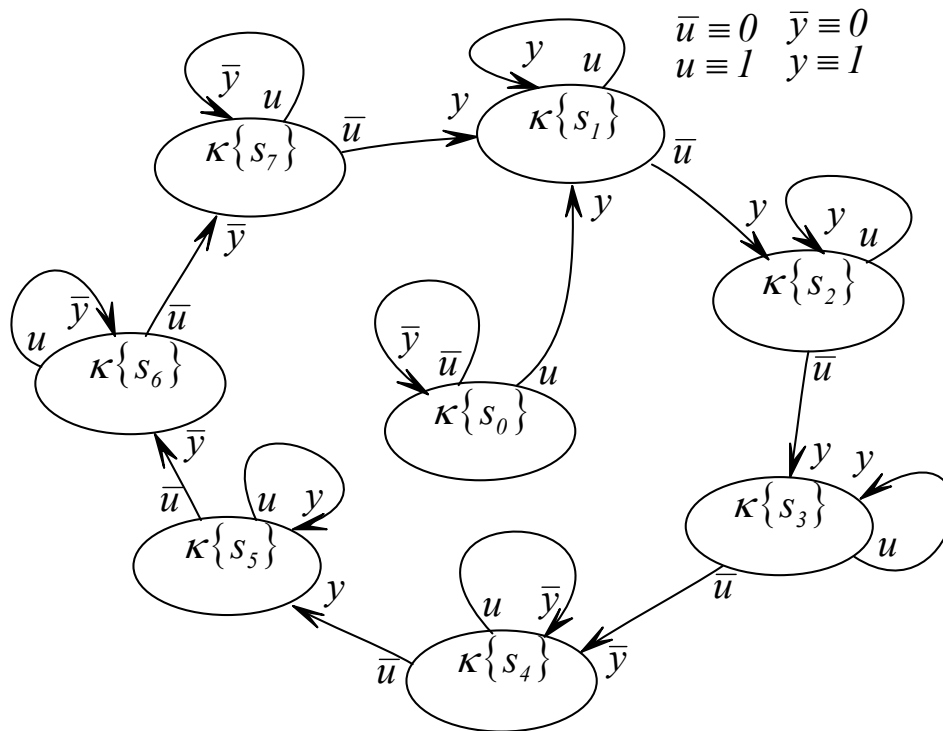


Рисунок 2.4. Модель НДДС в виде конечного автомата Мили

Таблица 2.6

Входы u_i	Состояния x_i							
	000	001	010	011	100	101	110	111
1	001	001	010	011	100	101	110	111
0	000	010	011	100	101	110	111	001

Таблица 2.7

Выход КА	Структура КА	Входы, u_i	Состояния x_i							
			000	001	010	011	100	101	110	111
y	Рисунок 2.3	—	0	1	1	1	0	1	0	0
	Рисунок 2.4	1	1	1	1	0	1	0	0	1
		0	0	1	1	0	1	0	0	1

3. В силу логики работы устройства (на его выходе должен формироваться сигнал по длительности кратный длительности тактов работы устройства) выбираем для реализации НДДС конечный автомат, функционирующий в автоматной логике Мура (рисунок 2.3).

4. Выбираем для реализации переменных состояния НДДС (рисунок 2.3) **JK**-триггеры.

5. Конструируем системы булевых функций:

– функции μ возбуждения, формирующие сигналы v_{Ji} и v_{Ki}

возбуждения информационных входов триггеров в форме

$$v_{J1} = \bar{u} (\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3) \vee$$

$$u (x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3);$$

$$v_{J2} = \bar{u} (\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3) \vee$$

$$u (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3);$$

$$v_{J3} = \bar{u} (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3) \vee$$

$$u (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3);$$

$$v_{K1} = \bar{u} x_1 x_2 x_3;$$

$$v_{K2} = \bar{u} (\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3);$$

$$v_{K3} = \bar{u} (\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3);$$

и функции выхода в форме

$$y = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3.$$

Полученные в результате выполнения п.6 алгоритма булевы функции являются основой для схемотехнической реализации устройства. ■

Рассмотрим теперь возможности автоматного конструирования с использованием граф-схем алгоритмов функционирования ДДС, для построения ее нелинейного модельного представления «вход-состояние выход» (ВСВ).

Алгоритм 2.2 (A2.2)

автоматного конструирования модельного представления (ВСВ)

НДДС с использованием ГСА описаний

1. Сформулировать постановку задачи кодопреобразования, решаемой конструируемой ДДС.
2. Построить вербальную ГСА функционирования ДДС на основе ее словесного описания или анализа временной диаграммы с учетом того обстоятельства, что ГСА является направленным графом [8], использующим вершины трех типов: начальную/конечную операторную, рабочие операторные и условные.

В операторные вершины вписать вербальные конструкции в виде инфинитивов или отглагольных существительных, несущих информацию о необходимости выполнения конкретного действия, с учетом того, что начальная и конечная вершины имеют соответственно только выход или только вход, а рабочая операторная вершина имеет один вход и один выход;

В условные вершины вписать словесные логические условия, с помощью которых осуществляется управление последовательностью действий проектируемой НДДС. Условные вершины имеют один вход и два выхода, причем если вершина моделирует процесс (состояние) ожидания выполнения условия, то один из ее выходов соединяется с ее входом.

Проконтролировать корректность составленной ГСА путем проверки наличия хотя бы одной ветви с выхода произвольной вершины, ведущей к входу конечной вершины, и проверки отсутствия ветвей с выхода вершины графа к входам более чем одной вершины. При контроле дополнительно учесть, что ГСА допускает размещение одного и того же условия в различных условных вершинах графа и разрешает выполнение одного и того же действия в различных операторных вершинах графа.

3. Составить формальную версию ГСА путем замены вербальных конструкций операторных вершин на элементы алфавита высокого уровня $w_j, j = \overline{0, m_w - 1}$ символьного представления действий (операций, команд), и вербальных конструкций, вписанных в условные вершины, на элементы $z_i, i = \overline{1, r_z}$, алфавита символьного представления условий, имеющих бинарную реализацию.
4. «Погрузить» сформированную в п.3 алгоритма формальную версию ГСА конструируемой ДДС в среду абстрактных автоматов с учетом следующих обстоятельств.

Если АА строится в автоматной логике абстрактного автомата Мура, то всем операторным вершинам w_j присваиваются состояния s_{k+1} , причем начальная w_0 и конечная $w_{k=m_w-1}$ вершины объединены в одну, которой присваивается состояние s_1 .

Если АА строится в автоматной логике абстрактного автомата Мили, то состояние s_1 присваивается входу первой условной вершины, непосредственно следующей за началь-

ной операторной вершиной. Это же состояние присваивается конечной операторной вершине. Остальные состояния $s_k, k = 2, n_s$ присваиваются входам всех условных вершин, непосредственно следующих за операторными вершинами графа.

Обратить внимание на то, что АА, реализующий ГСА в логике автоматов Мура, характеризуется числом состояний n_s , совпадающим с числом операторных вершин, в то время как АА, реализуемый в логике Мили, характеризуется числом состояний n_s , в общем случае не совпадающим с числом операторных вершин, причем возможны такие ГСА, где число состояний меньше числа операторных вершин. На этапе погружения формальной ГСА в автоматную среду на паре автоматных логик Мили/Мура осуществить начальную минимизацию автоматной реализации НДДС. Зафиксировать результат погружения формальной версии ГСА в автоматную среду в форме АА, задаваемого с помощью макровектора (2.1) с функциями перехода и выхода в форме (2.2) – (2.4).

5. Выбрать автоматную логику функционирования АА и построить в выбранной логике граф переходов АА, в среду которого погружена формальная ГСА.
6. Выполнить п.п.3–7 алгоритма 2.1 применительно к АА в выбранной логике. ■

Примечание 2.2 (ПМ2.2). При выполнении п. 5 А2.2 в фазе кодирования следует отметить, что кодирование алфавитов состояния и выхода осуществляется в полном соответствии с п. 2 А2.1. Кодирование элементов алфавита Z следует осуществлять путем переобозначения в форме $u_i \equiv z_i, i = \overline{1, r_z}$, причем r_z и r связываются условием тождественного равенства, если указанный способ кодирования неосуществим, то следует воспользоваться схемой п.2 алгоритма 2.1.

Данное примечание вызвано тем обстоятельством, что при построении формальной версии ГСА логические переменные z_i в большинстве случаев имеют бинарную реализацию, то есть принадлежат полю Галуа $GF(2)$. □

Примечание 2.3 (ПМ2.3). При составлении БФ, предусмотренных п.5 алгоритма 2.1 применительно к конструированию функций возбуждения триггеров, они строятся в виде дизъюнкций основных конъюнкций, которые формируются на кодах исходных состояний $x(k)$ и управляющих сигналов, считываемых с условных вершин и связывающих исходное состояние с состоянием перехода $x(k+1)$. БФ формирования выходов, в случае использования логики абстрактных авто-

матов Мура, конструируются посредством дизъюнкций основных конъюнкций, представляющих собой исходные состояния автомата. В случае использования абстрактных автоматов Мили булевы функции строятся по той же схеме, что и булевы функции возбуждения. □

Пример 2.2 (Пр2.2)

Конструируется нелинейная ДДС, которая решает задачу кодопреобразования, отмеченные ГСА- описания которой для абстрактных автоматов Мили и Мура представлены на рисунках 2.5 и 2.6 соответственно. При этом требуется обеспечить максимальное быстродействие устройства.

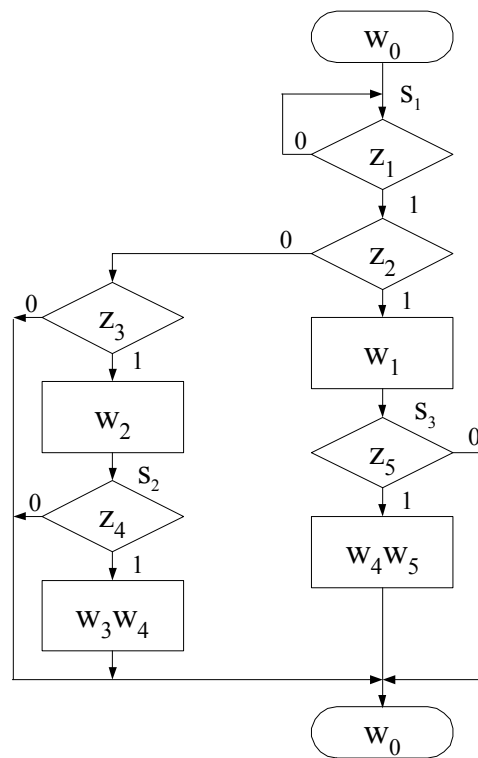


Рисунок 2.5

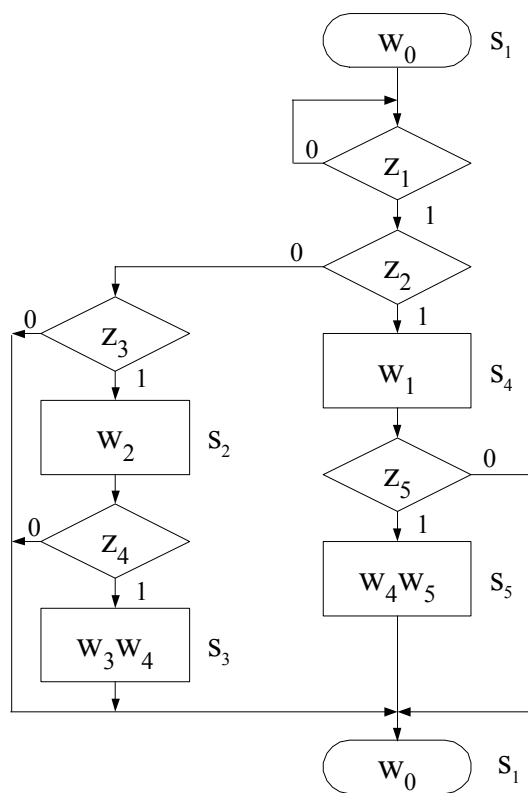


Рисунок 2.6

Решение поставленной задачи осуществляем с п.5 алгоритма:

1. Строим графы переходов и выхода описания функционирования устройства: для абстрактного автомата Мили – как показано на рисунке 2.7, для абстрактного автомата Мура – как показано на рисунке 2.8, при этом соответствующие им таблицы правила λ перехода и правила δ выхода запишутся в виде таблицы 2.8 и 2.9. В силу того, что характер решаемой задачи накладывают требование повышенного быстродействия на данное устройство, то принимаем логику функционирования конструируемого устройства в форме абстрактного автомата Мили.

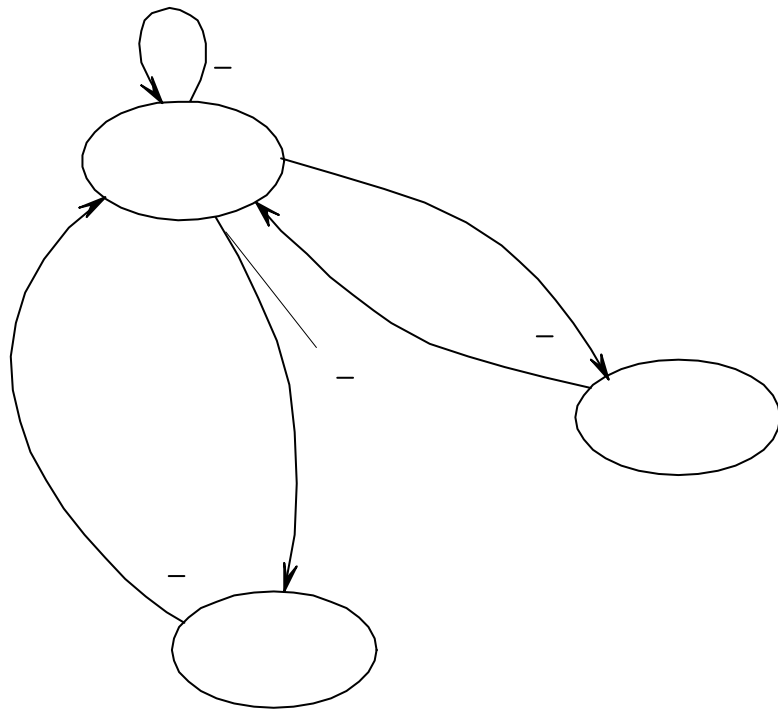


Рисунок 2.7. Модель НДДС в логике абстрактного автомата Мили

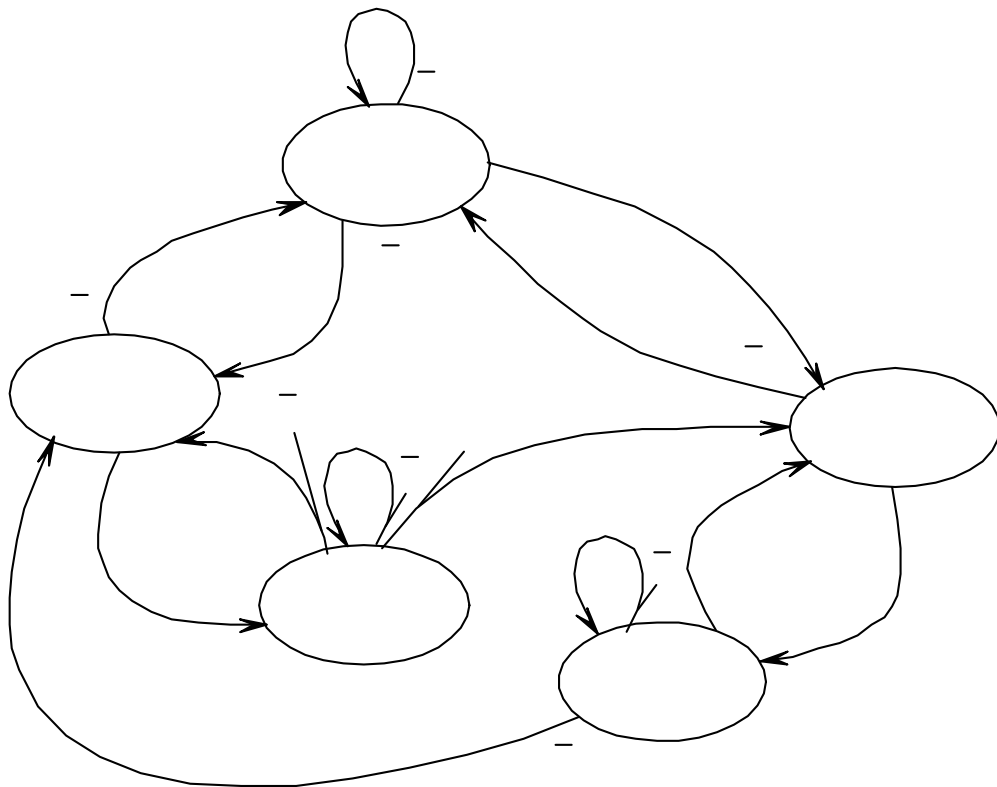


Рисунок 2.8. Модель НДДС в логике абстрактного автомата Мура

w_0

w_0
 w_0, w_0

Таблица 2.8

Структура AA	Условие перехода z_i	Состояния s_i				
		s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
Рисунок 2.7	\bar{z}_1	s_1	—	—	—	—
	$z_1 z_2$	s_3	—	—	—	—
	$z_1 \bar{z}_2 z_3$	s_2	—	—	—	—
	z_4	—	s_1	—	—	—
	\bar{z}_4	—	s_1	—	—	—
	z_5	—	—	s_1	—	—
	\bar{z}_5	—	—	s_1	—	—
Рисунок 2.8	\bar{z}_1	s_1	—	s_3	—	s_5
	$z_1 z_2$	s_4	—	s_4	—	s_4
	$z_1 \bar{z}_2 z_3$	s_2	—	s_2	—	s_2
	z_4	—	s_3	—	—	—
	\bar{z}_4	—	s_1	—	—	—
	z_5	—	—	—	s_5	—
	\bar{z}_5	—	—	—	s_1	—

Таблица 2.9

Вы- ход AA	Структура AA	Вхо- ды z_i	Состояния s_i				
			s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
w_j	Рисунок 2.7	\bar{z}_1	w_0	—	—	—	—
		$z_1 z_2$	w_1	—	—	—	—
		$z_1 \bar{z}_2 z_3$	w_2	—	—	—	—
		z_4	—	$w_0 w_3 w_4$	—	—	—
		\bar{z}_4	—	w_0	—	—	—
		z_5	—	—	$w_0 w_4 w_5$	—	—
		\bar{z}_5	—	—	w_0	—	—
	Рисунок 2.8	—	w_0	w_2	$w_0 w_3 w_4$	w_1	$w_0 w_4 w_5$

Таблица 2.10

$\kappa\{s(k)\}$	$\kappa\{s(k+1)\}$	$\kappa\{z(k)\}, u_i$	$\kappa\{w(k)\}$	Возбуждаемые входы D триггеров	
$\kappa\{s_1(k)\}$ 00	00	\bar{u}_1	000		
	01	$u_1 u_2$	001		D_2
	11	$u_1 \bar{u}_2 u_3$	010	D_1	D_2
$\kappa\{s_3(k)\}$ 01	00	\bar{u}_5	000		
		u_5	100		
	01	—	—	—	—
	11	—	—	—	—
$\kappa\{s_2(k)\}$ 11	00	\bar{u}_4	000		
		u_4	011		
	01	—	—	—	—
	11	—	—	—	—

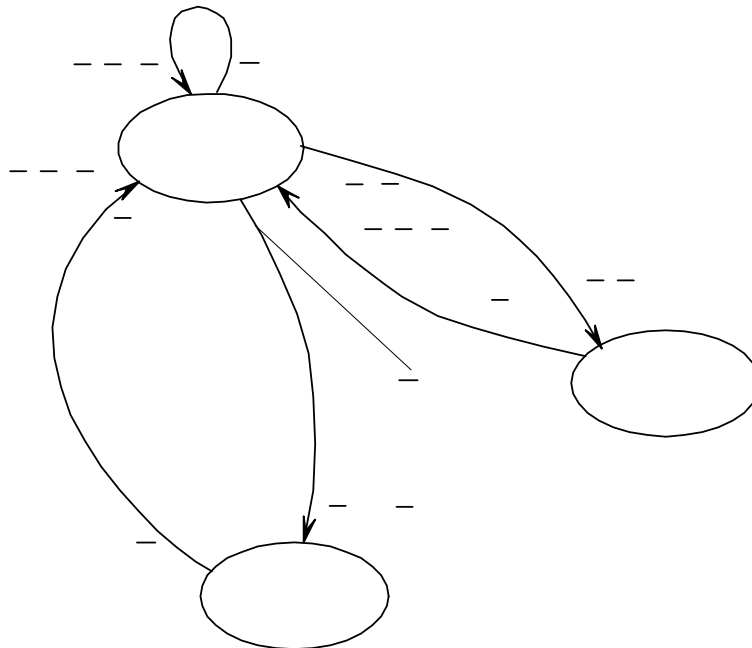


Рисунок 2.9. Модель НДДС в виде конечного автомата Мили

- Из структуры полученного графа (рисунок 2.7) видно, что мощность $[Z]$ алфавита входа Z равна четырем, мощность $[W]$ алфавита выхода W равна шести и мощность $[S]$ алфавита состояния S равна трем. В этой связи в соответствии с п.3 алгоритма 2.1 осуществляем переход к представлению

конструируемого устройства в виде КА, для чего выполняем кодирование указанных алфавитов и строим совмещенную таблицу 2.10 правила λ перехода и правила δ выхода. В соответствии с полученной таблицей строим граф (рисунок 2.9) переходов конструируемого устройства в виде КА.

Для реализации ячеек памяти устройства будем использовать **D**-триггеры. В этой связи булевы функции μ возбуждения входов v_i триггеров и формирования выхода y устройства примут вид:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= u_1 \bar{u}_2 u_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2; \\ \mu_2 &= (u_1 u_2 \vee u_1 \bar{u}_2 u_3) \bar{x}_1 \bar{x}_2; \\ y_1 &= u_5 \bar{x}_1 x_2; \\ y_2 &= u_1 \bar{u}_2 u_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee u_4 x_1 x_2; \\ y_3 &= u_1 u_2 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee u_4 x_1 x_2.\end{aligned}$$

Полученные булевы функции могут быть положены в основу схемотехнической реализации конструируемого устройства. ■

В заключение следует отметить, что банк модельных описаний устройств дискретной автоматики и телемеханики с использованием средств автоматной логики, конструируемых на триаде «{каноническое автоматное представление с помощью ГСА} – {автоматная логика Мили/Мура} – {триггерная логика}», предоставляет разработчику широкие возможности минимизации сложности схемотехнической реализации структурного представления «блок памяти – комбинационная схема» ДДС.

конструируемого устройства в виде КА, для чего выполняем кодирование указанных алфавитов и строим совмещенную таблицу 2.10 правила λ перехода и правила δ выхода. В соответствии с полученной таблицей строим граф (рисунок 2.9) переходов конструируемого устройства в виде КА.

Для реализации ячеек памяти устройства будем использовать **D**-триггеры. В этой связи булевы функции μ возбуждения входов v_i триггеров и формирования выхода y устройства примут вид:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= u_1 \bar{u}_2 u_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2; \\ \mu_2 &= (u_1 u_2 \vee u_1 \bar{u}_2 u_3) \bar{x}_1 \bar{x}_2; \\ y_1 &= u_5 \bar{x}_1 x_2; \\ y_2 &= u_1 \bar{u}_2 u_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee u_4 x_1 x_2; \\ y_3 &= u_1 u_2 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee u_4 x_1 x_2.\end{aligned}$$

Полученные булевы функции могут быть положены в основу схемотехнической реализации конструируемого устройства. ■

В заключение следует отметить, что банк модельных описаний устройств дискретной автоматики и телемеханики с использованием средств автоматной логики, конструируемых на триаде «{каноническое автоматное представление с помощью ГСА} – {автоматная логика Мили/Мура} – {триггерная логика}», предоставляет разработчику широкие возможности минимизации сложности схемотехнической реализации структурного представления «блок памяти – комбинационная схема» ДДС.

2.2. Построение дивидендных устройств помехозащитного кодопреобразования с помощью НДДС в логике произвольных триггеров

Рассмотренная в разделе 1 процедура конструирования линейных дивидендных устройств помехозащитного кодопреобразования (ДУПК) в форме ЛДДС опирается на векторно-матричный аппарат и имеет две фазы: кодирование и декодирование. Погружение в аппаратную среду векторно-матричных описаний этих фаз в форме соответствующих ЛДДС дает для последних базовое представление в логике линейных **D**-триггеров [7, 42, 51], которое на основе концепции подобия (см. §1.4) может быть дополнено использованием линейных **T**-триггеров. Таким образом ДУПК в виде кодирующих и декодирующих устройств, реализованных в форме линейных ДДС, не выводит получаемые схемотехнические решения за пределы возможностей логики линейных триггеров.

Решение задачи конструирования указанных устройств с использованием возможностей нелинейных ДДС в логике произвольных триггеров является предметом данного параграфа. Задача решается погружением линейного дивидендного кодирующего и декодирующего устройств в фазе, когда получено векторно-матричное представление правил перехода и выхода устройств, в автоматную среду, свободную от ограничения на тип используемой триггерной логики. Таким образом решение задачи достигается агрегированием алгоритмов линейного и автоматного синтеза ДДС помехозащитного кодирования и декодирования.

Алгоритм 2.3 (А2.3)

линейного синтеза дивидендного кодирующего устройств помехозащитного кодопреобразования

1. Сформировать параметр k информационной части (n, k) -ПЗК на основании мощности $[Q] = N_u$ передаваемого информационного массива Q в силу соотношения

$$k = \arg\{2^k \geq N_u = [Q]\}.$$

2. Сформировать по заданной корректирующей способности (в виде выполнения условия $P_{ош} \leq P_{доп}$ при вероятности $p = \max[p_{01}, p_{10}]$ искажения элементарного сигнала кода) помехозащищенного кода и способу ее реализации число m проверочных разрядов (n, k) -ПЗК с помощью соотношения

$$m = \arg\left\{ N_c = 2^m - 1 \geq N_{ош} = \sum_{i=1}^s C_{(k+m)}^i \right\},$$

где N_c – число синдромов, $N_{ош}$ – число ошибок, s – кратность исправляемой ошибки и выбрать неприводимый модулярный многочлен степени m в силу соотношения

$$g(x) = \arg\{ \deg[g(x)] = m \ \& \ d_{\min}[g(x)] = 2s + 1 \}$$

в качестве образующего многочлена ПЗК.

3. Найти D - образ $g(d)$ выбранного в п.2 алгоритма образующего ММ $g(x)$ с учетом того, что все передачи кодов и модулярных многочленов в аппаратуре кодопреобразования ведутся старшим разрядом вперед, в силу соотношений

$$g(d) \stackrel{\Delta}{=} D\{g(x)\} = \tilde{g}(x^{-1}) \Big|_{x^{-1}=d}, \quad (2.13)$$

где

$$\tilde{g}(x^{-1}): g(x) = x^m \tilde{g}(x^{-1}). \quad (2.14)$$

4. Вычислить передаточную функцию $\Phi_{цкв}(d)$ устройства деления модулярных многочленов (УДММ), в котором делителем является ММ $g(x)$ так, что

$$\Phi_{цкв}(d) = g^{-1}(d). \quad (2.15)$$

5. Построить структурную реализацию передаточной функции (2.15) в одном из канонических базисов с использованием правила некасающихся контуров Мейсона [41] на m элементах памяти 1-го порядка с передаточной функцией $\Phi_{эл}(d) = d$ так, чтобы матрица \mathbf{B} входа УДММ определялась соотношением

$$\mathbf{B}^T = \kappa\{x^m + g(x)\}.$$

6. Разработать устройство коммутации (УК) цепей проектируемого циклического кодирующего устройства и агрегировать его с УДММ, источником помехозащищенного кода и линейным устройством (ЛУ) канала связи, с тем, чтобы в течение первых k тактов с помощью УК информационная часть кода направлялась в КС, а в УДММ формировался остаток $r(x) = \text{rest} \frac{a(x)x^m}{g(x)}$, где $a(x)$ – ММ помехозащищенного кода, с которым совпадает информационная часть формируемого помехозащищенного кода, а в течение последних m тактов ЛУ канала связи подключалось к выходу УДММ, который с помощью УК на $(k+1)$ -м такте преобразуется в регистр сдвига, хранящий остаток, выводимый через ЛУ в канал связи.
7. Присвоить, соблюдая порядок индексации, выходам элементов памяти состояния $x_i(k)$, $i = \overline{1, m}$, а их входам – $x_i(k+1)$, что позволяет построить векторно-матричное описание функционирования циклического кодирующего устройства (ЦКУ), в течение первых k тактов записываемое как
- $$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k); y(k) = Hu(k), \quad (2.16)$$
- и в течение последних m тактов как
- $$x(k+1) = \bar{A}x(k); x(0) = x(k); y(k) = Cx(k), \quad (2.17)$$
- где A, \bar{A} – матрицы состояния размерности $m \times m$, B – матрица входа, C – матрица выхода, H – матрица «вход-выход» УДММ.
8. Проверить правильность функционирования кодирующего устройства с помощью векторно-матричных описаний (2.16), (2.17). ■

Процедура линейного синтеза устройства дивидендного декодирования представлена алгоритмом 2.4, особенность которого состоит в том, что синдром ошибки представляет собой вектор состояния циклического декодирующего устройства (ЦДУ), формируемый на последнем n -ом такте цикла деления.

Алгоритм 2.4 (А2.4)

линейного синтеза дивидендного декодирующего устройств помехозащитного кодопреобразования

1. Выполнить п.п.1–2 алгоритма 2.3.
2. Сконструировать передаточную матрицу-столбец $\Phi_{цду}(d)$, описывающую функционирование конструируемой ДДС в форме УДММ, вида

$$\Phi_{ЦДУ}(d) = \text{col}\{d^{m+1-i}g^{-1}(d); i = \overline{1, m}\}, \quad (2.18)$$

принимая во внимание то обстоятельство, что выходом УДММ устройства декодирования является его вектор состояния.

3. Выполнить п.5 алгоритма 2.2 так, чтобы матрица \mathbf{B} входа УДММ удовлетворяла равенству $\mathbf{B}^T = \mathbf{H}^n$, \mathbf{H}^n – последняя строка проверочной матрицы кода.
4. Следуя п.7 алгоритма 2.2, построить векторно-матричное описание ЦДУ в форме

$$x(k+1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}f(k), \quad (2.19)$$

где $f(k) = y(k) + \xi(k)$ – кодовая последовательность, поступающая в декодирующее устройство из канала связи, в котором вектор состояния x по принятии n разрядов кода $f(k)$ принимает значение синдрома E ошибки $\xi(k)$.

5. Спроектировать устройство формирования сигнала η коррекции (УФСК) искажений принятого из канала связи кода $f(k)$ в зависимости от способа реализации корректирующей способности кода.
6. Проверить правильность функционирования декодирующего устройства с помощью векторно-матричного соотношения (2.19).■

С целью решения поставленной задачи построения дивидендных кодирующих и декодирующих устройств в логике произвольных триггеров выполним «погружение» векторно-матричных моделей (2.16), (2.17) и (2.19), задающих соответственно функции перехода и выхода ЦКУ и функцию перехода ДКУ, в автоматную среду. Содержательной базой такого погружения в автоматную среду является то обстоятельство, что кодирование алфавитов *входа, состояния и выхода* уже произведено при построении линейных векторно-матричных представлений (2.16), (2.17) и (2.19). Если эти векторно-матричные соотношения использовать для формирования таблиц функций перехода и выхода ЦКУ и ДКУ, то конструирование автоматного представления устройств циклического кодирования и декодирования получит форму конечного автомата (КА).

Для случая помехозащитного кодирования в среде НДДС макро-вектор НДДС-ЦКУ автоматного описания ЦКУ принимает вид

$$\text{НДДС - ЦКУ} : \{U, X, Y, \lambda, \delta\}, \quad (2.20)$$

где двухразрядный код $U = [u, u_y]$ имеет элементами старшего разряда элементы помехонезащищенного кода так, что $u = u_u$, а младший разряд u_y принимает значение «0» в течение первых k тактов работы ЦКУ, и значение «1» – в течение последних m тактов, при этом реали-

зация кода U в форме $U = [1 \ 1]$ невозможна; $X = \text{row}\{x_i, i = \overline{1, m}\}$, $Y = [y]$ имеют тот же смысл, что и в (2.16), (2.17); правила перехода λ и выхода δ определяются в силу (2.16) и (2.17). Следует заметить, что в силу (2.16), (2.17) макровектор (2.20) задает ЦКУ как конечный автомат в логике автоматов Мили.

Макровектор НДДС-ЦДУ, описывающий циклическое декодирующее устройство в автоматной канонической форме, принимает вид

$$\text{НДДС - ЦДУ} : \{F, X, \mathbf{H}, \lambda, \delta\}, \quad (2.21)$$

где одноразрядный код $F = [f]$, m -разрядный код $X = \text{row}\{x_i, i = \overline{1, m}\}$ имеют тот же смысл, что и в (2.16), код \mathbf{H} имеет разрядность l сигнала (кода) коррекции, которая равна единице ($l = 1$) в режиме обнаружения ошибок и s ($l = s$) в режиме исправления ошибок информационной части кода; правило λ перехода определяется в силу (2.19), правило δ выхода задается в форме булевой l -мерной функции

$$\eta = \delta(x), \quad (2.22)$$

что определяет ЦДУ как конечный автомат, функционирующий в автоматной логике Мура.

Погружение процедуры помехозащитного кодопреобразования в автоматную среду в фазе кодирования в форме НДДС-ЦКУ (2.20) и в фазе декодирования НДДС-ЦДУ (2.21) может быть выполнено с использованием представленных ниже алгоритма 2.5 и алгоритма 2.6 соответственно.

Алгоритм 2.5 (A2.5)
синтеза ЦКУ в форме НДДС в логике произвольных триггеров

1. Выполнить п.п.1–7 алгоритма **2.3**.
2. Сформировать код входного алфавита КА (2.20) $U = [u, u_y]$.
3. Выполнить п.2 алгоритма **2.1** и получить таблицу реализации функции перехода λ вида $\lambda : x(k) \times U(k) \Rightarrow x(k+1)$ НДДС-ЦКУ (2.20) для наборов $U = [0M]$; $U = [1M]$ с использованием (2.16), для набора $U = [0M]$ – с помощью (2.17).
4. Выполнить п.2 алгоритма **2.1** и построить таблицу реализации функции выхода $\delta : x(k) \times U(k) \Rightarrow y(k)$ НДДС-ЦКУ (2.20) для наборов $U = [0|0]$ и $U = [1|0]$ с использованием (2.16), для набора $U = [0|1]$ – с помощью (2.17).
5. Выполнить п.п. 4–6 алгоритма **2.1**. ■

Алгоритм 2.6 (A2.6)
синтеза ЦДУ в форме НДДС в логике произвольных триггеров

1. Выполнить п.п.1–4 алгоритма **2.4**.
2. Выполнить п.2 алгоритма **2.1** и построить совмещенную таблицу реализации функций перехода $\lambda : x(k) \times F(k) \Rightarrow x(k+1)$ и выхода $\delta : x(k) \Rightarrow \eta(k)$ НДДС-ЦДУ (2.21) с помощью (2.19) и (2.22).
3. Выполнить п.п. 4–6 алгоритма **2.1**. ■

Проиллюстрируем на примере процедуры синтеза двоичных устройств помехозащитного кодопреобразования в логике произвольных триггеров

Пример 2.3 (Пр2.3)

Просинтезировать циклическое кодирующее устройство, формирующее помехозащищенный код (7,4) с образующим многочленом $g(x) = x^3 + x + 1$ в форме НДДС в логике произвольных триггеров.

Решение поставленной задачи осуществляем с использованием алгоритма **2.5**, в соответствии с которым осуществим:

1. Выполнение п.п. 1–7 алгоритма **2.3**, которое дает структурное представление ЦКУ, приведенное на рисунке 2.10

Таблица 2.11

$x^T(k)$	$x^T(k+1)$	$U = [u, u_y]$	$y(k)$	Возбуждаемые входы триггеров											
				D			T			RS			JK		
000	000	00	0												
	011	10	1		D_2	D_3		T_2	T_3		S_2	S_3		J_2	J_3
	000	01	0												
001	010	00	0		D_2			T_2	T_3		S_2	R_3		J_2	K_3
	001	10	1			D_3									
	010	01	0		D_2			T_2	T_3		S_2	R_3		J_2	K_3
010	100	00	0	D_1			T_1	T_2		S_1	R_2		J_1	K_2	
	111	10	1	D_1	D_2	D_3	T_1		T_3	S_1		S_3	J_1		J_3
	100	01	0				T_1	T_2		S_1	R_2		J_1	K_2	
011	110	00	0	D_1	D_2		T_1		T_3	S_1		R_3	J_1		K_3
	101	10	1	D_1		D_3	T_1	T_2		S_1	R_2		J_1	K_2	
	110	01	0	D_1	D_2		T_1		T_3	S_1		R_3	J_1		K_3

Таблица 2.11 (продолжение)

$x^T(k)$	$x^T(k+1)$	$U = [u, u_y]$	$y(k)$	Возбуждаемые входы триггеров											
				D			T			RS			JK		
100	011	00	0		D_2	D_3	T_1	T_2	T_3	R_1	S_2	S_3	K_1	J_2	J_3
	000	10	1				T_1			R_1			K_1		
	000	01	1				T_1			R_1			K_1		
101	001	00	0			D_3	T_1			R_1			K_1		
	010	10	1				T_1	T_2	T_3	R_1	S_2	R_3	K_1	J_2	K_3
	010	01	1				T_1	T_2	T_3	R_1	S_2	R_3	K_1	J_2	K_3
110	111	00	0	D_1	D_2	D_3			T_3			S_3			J_3
	100	10	1	D_1				T_2			R_2			K_2	
	100	01	1	D_1				T_2			R_2			K_2	
111	101	00	0	D_1		D_3		T_2			R_2			K_2	
	110	10	1	D_1	D_2				T_3			R_3			K_3
	110	01	1	D_1	D_2				T_3			R_3			K_3

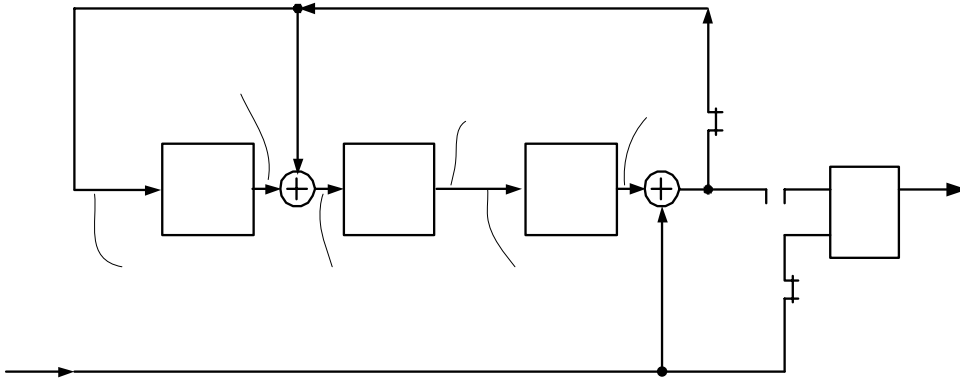


Рисунок 2.10

и характеризуется матричными компонентами описания (2.16) для первых k тактов

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = [1];$$

для последних m тактов

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0].$$

2. Выполнение п.2 алгоритма, которое устанавливает соответствие $u_y = 0$ при $[K1, K2, K3] = [1 \ 0 \ 1]$ и $u_y = 1$ при

$$[K1, K2, K3] = [0 \ 1 \ 0].$$

3. Выполнение п.п.3, 4 алгоритма, которое дает совмещенную таблицу 2.11 реализации функций перехода

$$\lambda : x(k) \times U(k) \Rightarrow x(k+1) \text{ и выхода } \delta : x(k) \times U(k) \Rightarrow y(k)$$

НДДС-ЦКУ (2.20) для наборов $U = [0 \ 0]$ и $U = [1 \ 0]$ с использованием (2.16), для набора $U = [0 \ 1]$ – с помощью

(2.17), а также – возбуждения $v(k) = \mu[x(k), x(k+1)]$ информационных входов **D**-, **T**-, **RS**- и **JK**-триггеров.

4. Выполнение п.п.4-6 алгоритма 2.11 (с учетом таблицы 2.11 для триггеров **JK**- типа, возбуждаемые входы которых указаны в последних трех столбцах таблицы 2.11, которое дает систему булевых функций для формирования сигналов v_{J_i} и v_{K_i} возбуждения информационных входов триггеров, а также – для выхода ЦКУ, задаваемых в форме:

x_3

3

d

$x_3(k+1)$

$$\begin{aligned}
v_{J1} &= \bar{x}_1 x_2 (\bar{u}_y \vee u_y \bar{u}), \\
v_{J2} &= \bar{u}_y \bar{u} \bar{x}_2 (\bar{x}_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3) \vee u_y \bar{u} \bar{x}_2 x_3 \vee u_y \bar{u} \bar{x}_2 (\bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3), \\
v_{J3} &= \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{u}_y u \vee x_1 \bar{x}_3 \bar{u}_y \bar{u}, \\
v_{K1} &= x_1 \bar{x}_2 (\bar{u}_y \vee u_y \bar{u}), \\
v_{K2} &= \bar{u}_y u x_2 (x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3) \vee u_y \bar{u} x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{u}_y \bar{u} x_2 (\bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3), \\
v_{K3} &= \bar{x}_1 x_3 \bar{u} \vee x_1 x_3 (\bar{u}_y u \vee u_y \bar{u}), \\
y &= \bar{u}_y u \vee u_y \bar{u} x_1. \blacksquare
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{J1} &= \bar{x}_1 x_2 (\bar{u}_y \vee u_y \bar{u}), \\
v_{J2} &= \bar{u}_y \bar{u} \bar{x}_2 (\bar{x}_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3) \vee u_y \bar{u} \bar{x}_2 x_3 \vee u_y \bar{u} \bar{x}_2 (\bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3), \\
v_{J3} &= \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{u}_y u \vee x_1 \bar{x}_3 \bar{u}_y \bar{u}, \\
v_{K1} &= x_1 \bar{x}_2 (\bar{u}_y \vee u_y \bar{u}), \\
v_{K2} &= \bar{u}_y u x_2 (x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3) \vee u_y \bar{u} x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{u}_y \bar{u} x_2 (\bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3), \\
v_{K3} &= \bar{x}_1 x_3 \bar{u} \vee x_1 x_3 (\bar{u}_y u \vee u_y \bar{u}), \\
y &= \bar{u}_y u \vee u_y \bar{u} x_1. \blacksquare
\end{aligned}$$

2.3. НДДС в задачах коррекции искажений помехозащищенных кодов

Коррекция принятых из канала связи помехозащищенных средствами помехозащитного кодирования кодовых комбинаций является финальной фазой помехозащитного кодопреобразования перед передачей принятой информации в техническую среду получателя информации. Организация коррекции искажений принятой из КС кодовой комбинации определяется многими факторами, основными из которых являются:

- метод формирования оценки искажения (матричный, не параметризованный дискретным временем, рассмотренный в параграфе 1.5, или дивидендный, построенный на линейных ДДС, рассмотренный в параграфах 1.7 и 2.2);

- форма представления оценки искажения (в виде синдрома ошибки, характерного для обоих методов формирования оценки искажения, и квазисиндрома, характерного только для дивидендного метода формирования оценки искажения);
- способ реализации корректирующей способности кода (в форме режима обнаружения ошибок или в форме режима исправления их);
- кратность обнаруживаемой и исправленной ошибки.

Указанные факторы, определяющие характер алгоритмической и технической реализации процесса коррекции искажения принятых из КС искаженных, прошедших помехозащитное кодопреобразование на передающей стороне, кодовых комбинаций, сведены в таблицу 2.12.

Таблица 2.12

Метод формирования оценки искажения кода		Форма представления оценки искажения кода	Способ реализации корректирующей способности кода	
			Обнаружение ошибок	Исправление ошибок
Матричный	с канонической проверочной матрицей	Синдром ошибки	Произвольной кратности r	Произвольной кратности s
	с модифицированной проверочной матрицей	Синдром ошибки	Произвольной кратности r	Произвольной кратности s
Дивидендный	с канонической матрицей входа	Синдром ошибки	Произвольной кратности r	Произвольной кратности s
		Квазисиндром ошибки	—	Произвольной кратности s
	с модифицированной матрицей входа	Синдром ошибки	Произвольной кратности r	Произвольной кратности s
		Квазисиндром ошибки	—	Произвольной кратности s

Рассмотрение задачи коррекции искажений в ПЗК, принятого из КС, которая содержательно сводится к формированию сигнала коррекции искажений проведем отдельно для матричного и дивидендного методов формирования синдромов ошибок. Для случая матричного метода формирования синдрома ошибки в поступившем из КС ПЗК процесс формирования сигнала η коррекции искаженного кода опирается на совместное использование векторно-матричных соотношений (1.146) и (1.151), в соответствии с которыми для синдрома E вектора искажения ξ в принятом коде $f = y + \xi$ можно записать

$$E = f \mathbf{H}, \quad E = \xi \mathbf{H}. \quad (2.23)$$

Если корректирующие способности ПЗК реализуются в форме режима обнаружения ошибок, то независимо от их кратности r сигнал η коррекции является скалярным и формируется как дизъюнкция элементов синдрома

$$E = [E_m | E_{m-1} | \dots | E_1] = \text{row}\{E_i; i = \overline{m, 1}\}, \quad (2.24)$$

который сформирован с помощью системы проверочных равенств, построенных в силу первого векторно-матричного соотношения (2.23) так, что для сигнала η можно записать

$$\eta = \bigvee_{i=m}^1 E_i. \quad (2.25)$$

Для режима обнаружения сигнал η коррекции искаженного ПЗК представляет собой квитанцию, которая используется для обнуления состояния сдвигового регистра хранения принятого из КС искаженного ПЗК и формирования запроса на передающую сторону на повторение передачи кодовой комбинации. Синдром E и сигнал η коррекции формируются на n -ом такте приема ПЗК из КС, где n – число разрядов помехозащищенного (n, k) -кода так, что отмеченное обстоятельство приводит к представлению сигнала η в форме

$$\eta = \left(\bigvee_{i=m}^1 E_i \right) \& C(n), \quad (2.26)$$

где $C(n)$ – синхросигнал, подаваемый на вход конъюнктора на n -ом такте; \vee , $\&$ – символы дизъюнкции и конъюнкции соответственно.

Если корректирующие способности ПЗК реализуются в форме режима исправления, то сигнал η коррекции становится векторным и представляет собой n -мерную вектор-строку, который содержит s единиц так, что при правильно сформированных параметрах (n, k) ПЗК для помеховой обстановки в КС выполняется соотношение

$$\eta = \xi. \quad (2.27)$$

Математически векторный сигнал η коррекции искажений в принятом ПЗК в силу (2.26) и (2.23) может быть сформирован в силу соотношения

$$\eta = E H^+ \quad (2.28)$$

где H^+ – матрица псевдообратная проверочной матрице H . На практике, как и в случае формирования синдрома E , при котором от векторно-матричного соотношения $E = f H$ переходят к системе проверочных равенств, являющихся аналитической основой построения линейного шифратора, на выходе которого образуется синдром, при формировании векторного сигнала η коррекции принятого ПЗК приходится использовать тот же прием. В результате полученной системы

$$\eta_j = \eta_j \{ E = [E_m | E_{m-1} | K | E_1] \}; \quad j = \overline{n, l}, \quad (2.29)$$

конструируется синдромный дешифратор, на вход которого подается синдром E , а на его выходной шине – наблюдается векторный сигнал коррекции $\eta = \text{row} \{ \eta_j; j = \overline{n, l} \}$. Алгоритм формирования сигналов коррекции (2.29) для случая произвольной кратности s исправляемого искажения принимает вид

*Алгоритм 2.7 (A2.7)
формирования векторного сигнала коррекции
искажения произвольной кратности s принятого из КС ПЗК*

1. На основе проверочной матрицы H (канонической или модифицированной путем перестановки столбцов или циклической перестановки строк исходной канонической) помехозащищенного кода построить в силу второго уравнения (2.23) с учетом (2.27) таблицу истинности для формирования компонентов $\eta = \text{row} \{ \eta_j; j = \overline{n, l} \}$ векторного сигнала η коррекции искажений с ошибками только первой кратности на наборах булевых переменных, определяемых синдромами $E = [E_m | E_{m-1} | K | E_1]$ однократных ошибок.
2. Памятуя о том, что при формировании проверочной матрицы H ПЗК, способного исправлять искажения с ошибками в s разрядах так, чтобы выполнялось второе векторно-матричное соотношение (2.23) и при этом формировался синдром $E(s)$ равный сумме по $\text{mod} 2$ s синдромов однократных ошибок, сформировать на основе таблицы истинности БФ $\eta_j = \eta_j(E)$, полученной выполнением п.1 алгоритма, полную таблицу истинности путем суммирования на все сочетания синдромов однократных ошибок

и векторов ξ помех по mod2 с тем, чтобы мощность каждой суммы составила величину

$$N_{out} = N_c = \sum_{i=1}^s C_n^i. \quad (2.30)$$

3. Пользуясь таблицей истинности, сформированной в п.2 алгоритма, составить систему булевых функций в дизъюнктивной совершенной нормальной форме (ДСНФ) тех синдромов, на которых j -й компонент η_j вектора $\eta = row\{\eta_j; j = \overline{n, 1}\}$ сигнала коррекции принимает единичное значение

$$\eta_j = \vee \left(\bigg\&_{i=m}^1 \tilde{E}_i \right); \quad j = \overline{n, 1}, \quad (2.31)$$

где символ \sim принимает смысл символа инверсии ($-$), если $E_i = 0$, и смысл пустого символа, если $E_i = 1$.

4. Пользуясь системой булевых аналитических выражений (2.31) построить схемотехническую реализацию синдромного дешифратора (СД) $E = [E_m | E_{m-1} | \dots | E_1]$, формирующего на выходной шине векторный сигнал $\eta = [\eta_n | \eta_{n-1} | \dots | \eta_1]$ коррекции принятого из КС ПЗК. ■

При этом следует иметь в виду, что если осуществлять коррекцию только информационной части ПЗК, то синдромный дешифратор может быть сокращен в схемотехнической реализации, где выходная шина СД будет иметь только k линий, на которых будет сформирован k -разрядный сигнал коррекции информационной части ПЗК

$$\eta = row \left\{ \eta_j = \vee \left(\bigg\&_{i=m}^1 \tilde{E}_i \right); \quad j = \overline{n, n-m} \right\}. \quad (2.32)$$

Следует заметить, что формы (2.31) и (2.32) являются нелинейным представлением линейного векторно-матричного соотношения (2.28).

Для осуществления коррекции информационной части (ИЧК) принятого из КС ПЗК сдвиговый регистр хранения последнего должен быть дополнен устройством коррекции кода (УКК). Это устройство представляет собой линейку сумматоров по модулю два, входы которых подключены к выходам триггеров регистра хранения принятого из КС ПЗК, находящихся в состоянии f_j , $j = \overline{1, n}$, и к выходным шинам синдромного дешифратора, на которых формируется сигнал η_j , $j = \overline{1, n}$ коррекции. Откорректированная информационная часть кода

$$y = row \left\{ y_j = f_j + \eta_j; \quad j = \overline{1, n-m} \right\} \quad (2.33)$$

переписывается в рабочий регистр хранения пользовательской технической среды для дальнейшего использования содержащейся в ИЧК информации.

Необходимо отметить, что формирование сигнала (2.32) принятого из КС ПЗК осуществляется как в случае обнаружения на n -ом такте, в силу чего реализационная версия сигналов коррекции (2.31) и (2.32) принимают вид

$$\eta = \text{row} \left\{ \eta_j = \vee \left(\bigotimes_{i=m}^l (\tilde{E}_i \& C(n)) \right); j = \overline{n, n-m} \right\}. \quad (2.34)$$

При формировании сигналов коррекции в форме (2.34) учитывается то обстоятельство, что $m < n = k + m$.

Пример 2.4 (Пр2.4)

Проиллюстрируем процедуру формирования сигнала коррекции информационной части ПЗК на примере кода (8,2), исправляющий ошибки кратности $s = 1$ и $s = 2$. Тогда следуя **A2.7**:

1. Составим таблицу истинности для формирования сигналов коррекции ошибок первой кратности на основании проверочной матрицы кода (8,2), имеющей представление

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сформируем синдромы однократных ошибок в силу второго соотношения (2.23), принимающего вид

$$[E_6 \ E_5 \ E_4 \ E_3 \ E_2 \ E_1] = [\xi_8 \ \xi_7 \ \xi_6 \ \xi_5 \ \xi_4 \ \xi_3 \ \xi_2 \ \xi_1] \mathbf{H}.$$

Сигналы коррекции ошибок первой кратности получим, положив $\eta_j = \xi_j$; $j = \overline{8,1}$. Эта таблица истинности составляет первые восемь строк таблицы 2.13.

2. Образует двукратные ошибки путем суммирования по модулю два двух однократных ошибок и сформируем соответствующие им синдромы путем суммирования по модулю два двух синдромов однократных ошибок. Результаты выполнения п.п.1,2 алгоритма сведены в таблицу 2.13.
3. На основе таблицы 2.13 оставим булевы представления сигналов η_8 и η_5 коррекции искажений в информационных (8-м и 5-м) разрядах кода (8,2), которые принимают вид

$$\begin{aligned} \eta_8 = & \bar{E}_6 E_5 \bar{E}_4 \bar{E}_3 E_2 E_1 \vee E_6 \bar{E}_5 \bar{E}_4 \bar{E}_3 E_2 E_1 \vee E_6 E_5 E_4 E_3 \bar{E}_2 \bar{E}_1 \vee \\ & E_6 E_5 E_4 \bar{E}_3 E_2 E_1 \vee E_6 E_5 \bar{E}_4 E_3 E_2 E_1 \vee E_6 E_5 \bar{E}_4 \bar{E}_3 \bar{E}_2 E_1 \vee \\ & E_6 E_5 \bar{E}_4 \bar{E}_3 \bar{E}_2 \bar{E}_1; \end{aligned}$$

$$\eta_5 = \bar{E}_6 \bar{E}_5 E_4 E_3 E_2 E_1 \vee E_6 E_5 E_4 E_3 \bar{E}_2 \bar{E}_1 \vee E_6 \bar{E}_5 E_4 E_3 E_2 E_1 \vee$$

$$\bar{E}_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 \vee \bar{E}_6 \bar{E}_5 \bar{E}_4 E_3 E_2 E_1 \vee \bar{E}_6 \bar{E}_5 E_4 \bar{E}_3 E_2 E_1 \vee \blacksquare$$

$$\bar{E}_6 \bar{E}_5 E_4 E_3 \bar{E}_2 E_1 \vee \bar{E}_6 \bar{E}_5 E_4 E_3 E_2 \bar{E}_1$$

Таблица 2.13

E_6	E_5	E_4	E_3	E_2	E_1	η_8	η_7	η_6	η_5	η_4	η_3	η_2	η_1
1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1

Таблица 2.13 (Продолжение)

E_6	E_5	E_4	E_3	E_2	E_1	η_8	η_7	η_6	η_5	η_4	η_3	η_2	η_1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1

Для случая дивидендного метода формирования оценки искажения ПЗК решение поставленной задачи начнем с утверждения.

Утверждение 2.1 (У2.1). Пусть процесс дивидендного декодирования ПЗК, принятого из КС, осуществляется декодирующим устройством, имеющим векторно-матричное описание, параметризованное дискретным временем k , записываемое в форме

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) \equiv 0, \quad (2.35)$$

где $\dim x = m$, $\dim u = 1$, $\dim A = (m \times m)$, $\dim B = (m \times 1)$, причем характеристический полином матрицы A состояния (2.35) удовлетворяет цепочке равенств

$$D(\lambda) = \det(\lambda I + A) = g(x)|_{x=\lambda}, \quad (2.36)$$

где $g(x)$ – образующий модулярный многочлен ПЗК, $\deg g(x) = m$, при этом степень m выбрана из условия исправления ошибок кратности s так, что

$$m = \arg \left\{ N_c = 2^m - 1 \geq N_{\text{ош}} = \sum_{i=1}^s C_{(k+m)}^i \right\}, \quad (2.37)$$

где N_c , $N_{\text{ош}}$ – соответственно число синдромов и ошибок вплоть до кратности s , тогда синдром однократной ошибки в λ -ом разряде в помехозащищенном (n, k) -коде формируется на n -ом такте процесса деления в форме

$$E = x^T(n) = (A^{\lambda-1} B)^T. \quad \square \quad (2.38)$$

Доказательство. Для доказательства утверждения рассмотрим случай, когда по КС передается нулевой ПЗК $y(k) = 0$ так, что из КС принимается кодовая последовательность

$$f(k) = y(k) + \xi(k) = \xi(k). \quad (2.39)$$

В силу того, что n -мерный вектор искажения по условиям утверждения имеет единицу только в λ -ом разряде, то он имеет представление

$$\xi = [\xi_n = 0; \xi_{n-1} = 0; \dots; \xi_{n-\lambda+1} = 0; \xi_{n-\lambda} = 1; \xi_{n-\lambda-1} = 0; \dots; \xi_1 = 0]. \quad (2.40)$$

Вектор (2.40), записанный в виде кодовой последовательности $\xi(k)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \xi(k): \quad & \xi(0) = 0; \xi(1) = 0; \mathbf{K}; \xi(n-\lambda-1) = 0; \xi(n-\lambda) = 1; \\ & \xi(n-\lambda+1) = 0; \mathbf{K}; \xi(n-1) = 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Рассмотрим суммарную версию ЛДДС (2.35) при входной последовательности $u(k) = \xi(k)$, тогда на основании (1.25) с учетом $x(0) \equiv 0$, а также вида (2.41) входной последовательности получим

$$\begin{aligned} x(n) = A^{n-1} \mathbf{B} u(0) + A^{n-2} \mathbf{B} u(1) + \mathbf{K} + A^{n-1-(n-\lambda)} \mathbf{B} u(n-\lambda) + \mathbf{K} \\ \mathbf{K} + \mathbf{B} u(n-1) = A^{n-\lambda} \mathbf{B}. \blacksquare \end{aligned} \quad (2.42)$$

Выражение (2.42) по существу содержит доказательство следующего утверждения.

Утверждение 2.2 (У2.2). *Если принятый из КС ПЗК характеризуется искажениями в μ -ом и ν -ом и т.д. ρ -ом разрядах, то сформированный на n -ом такте деления синдром E ошибки ξ имеет вид*

$$E^T = (x(n) = A^{\mu-1} \mathbf{B} + A^{\nu-1} \mathbf{B} + \mathbf{K} + A^{\rho-1} \mathbf{B})^T. \blacksquare \quad (2.43)$$

С целью дальнейших исследований сформулируем и докажем следующее утверждение.

Утверждение 2.3 (У2.3). *Пусть процесс деления в дивидендном декодирующем устройстве (2.35) продолжается в течение $(t+1)$ циклов длительностью n тактов, тогда, если принятый из КС ПЗК $f = y + \xi$ характеризуется искажением в μ -ом и ν -ом и т.д. ρ -ом разрядах, то на каждом цикле деления на каждом такте кратном $n = \dim f$ будут формировать синдром E ошибок ξ в форме*

$$E^T = (x(nt) = A^{\mu-1} \mathbf{B} + A^{\nu-1} \mathbf{B} + \mathbf{K} + A^{\rho-1} \mathbf{B})^T. \square \quad (2.44)$$

Доказательство утверждения строится на том, что при $k > n$ $u(k) = f(k) \equiv 0$, поэтому процессы при $k > n$ в ЛДДС (2.34) декодирующего устройства будут описываться векторно-матричным выражением

$$x(k+1) = \mathbf{A} x(k); \quad x(n) = A^{\mu-1} \mathbf{B} + A^{\nu-1} \mathbf{B} + \mathbf{K} + A^{\rho-1} \mathbf{B}, \quad (2.45)$$

что для $k = nt$ позволяет записать

$$x(k = nt) = A^{(t-1)n} x(n). \quad (2.46)$$

Если теперь учесть, что матрица A с характеристическим полиномом $D(\lambda) = g(x)|_{x=\lambda}$, принадлежащим показателю n , принадлежит показателю n так, что для нее можно записать

$$A^n = \mathbf{I}, \quad (2.47)$$

откуда следует и выполнение матричного равенства

$$A^{(t-1)n} = \mathbf{I}. \quad (2.48)$$

Соотношение (2.48) совместно с (2.46) и (2.45) приводят к (2.44). ■

И, наконец, сформулируем и докажем еще одно утверждение.

Утверждение 2.4 (У2.4). Пусть принятый из КС ПЗК $f = y + \xi$ характеризуется искажением в λ -ом разряде, тогда, если в дивидендном декодирующем устройстве (2.35) процесс деления продолжается в течение $(t+1)$ циклов длительностью n тактов, тогда при $k = nt + \mathcal{O}$, где $\mathcal{O} = n - \lambda + 1$ будет формироваться квазисиндром \tilde{E} ошибки ξ в форме

$$\tilde{E} = \mathbf{B}^T. \quad \square \quad (2.49)$$

Доказательство. Учтем, что при $k > n$ ЛДДС (2.35) дивидендного декодирующего устройства описывается векторно-матричным соотношением

$$x(k+1) = \mathbf{A}x(k), \quad x(n), \quad (2.50)$$

где $x(n)$ для случая однократной ошибки в λ -ом разряде имеет вид (2.42). Тогда для момента $k = nt + \mathcal{O}$, где $\mathcal{O} = n - \lambda + 1$ можно записать

$$x(k = nt + \mathcal{O}) = \mathbf{A}^{(t-1)n + \mathcal{O}} x(n) = \mathbf{A}^{\mathcal{O}} \mathbf{A}^{\lambda-1} \mathbf{B}. \quad (2.51)$$

Тогда равенство $x(nt + \mathcal{O}) = \mathbf{B}$ выполняется при $\mathcal{O} = n - \lambda + 1$. ■

Возвращаясь к проблеме коррекции искажений ПЗК, принятого из КС, с использованием синдромов E , которые формируются в моменты $k = nt$ следует заметить, что организация коррекции как в режиме обнаружения, так и в режиме исправления полностью совпадает со случаем матричного метода формирования оценки искажения ПЗК. Так в случае реализации корректирующей способности циклического ПЗК скалярный сигнал η коррекции, который представляет собой квитанцию, формируется на n -ом такте размещения ПЗК в сдвиговом регистре деления и процесса деления в регистре деления дивидендного ДКУ, формируется в силу (2.25).

В случае реализации корректирующей способности циклического ПЗК векторный сигнал $\eta = \text{row}\{\eta_j; j = \overline{n, 1}\}$ коррекции формируется в соответствии с алгоритмом 2.7, который следует модифицировать с учетом специфики формирования проверочной матрицы \mathbf{H} кода. Тогда процесс формирования векторного сигнала $\eta = \text{row}\{\eta_j; j = \overline{n, 1}\}$ коррекции для дивидендного метода его формирования может быть представлен следующим алгоритмом.

*Алгоритм 2.8 (A2.8)
формирования векторного сигнала коррекции
искажения произвольной кратности s принятого из КС ПЗК*

1. Построить проверочную матрицу \mathbf{H} ПЗК, исправляющего искажения кратности s в форме

$$\mathbf{H} = \left[A^{n-1} \mathbf{B} \mid A^{n-2} \mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{K} \mid A\mathbf{B} \mid \mathbf{B} \right]^T \quad (2.52)$$

2. Выполнить п.п. 1–4 А2.7. ■

Как и в случае матричного метода формирования оценки искажения ПЗК целесообразно ограничиться коррекцией искажений только в ИЧК, при этом сигнал коррекции формируется нелинейным способом в форме (2.33).

Особняком в дивидендном методе формирования оценки искажения ПЗК стоит задача коррекции кода с помощью квазисиндрома $\tilde{\mathbf{E}}$ вида (2.49). Квазисиндром может быть использован только в режиме исправления. При его использовании скалярный сигнал коррекции η формируется в силу соотношения

$$\eta(k = (t+1)n - \lambda + 1) = \bigotimes_{i=m}^l \tilde{\mathbf{E}}_i = \bigotimes_{i=m}^l \mathbf{B}_i^T; \quad t = 1, 2, \dots, \mathbf{K} \quad (2.53)$$

Коррекция искажений с помощью сигнала коррекции (2.53) требует организации сдвигового вывода ПЗК из сдвигового регистра хранения кода в дополнительный регистр сдвига или перевода приемного регистра в режим кольцевого регистра сдвига на n -ом такте деления. На выходе приемного регистра сдвига должен быть включен сумматор по модулю два, выполняющий функции устройства коррекции ПЗК, на один вход которого подается искаженный ПЗК, а на другой – сигнал коррекции (2.53), на выходе которого наблюдается откорректированный код.

*Алгоритм 2.8 (A2.8)
формирования векторного сигнала коррекции
искажения произвольной кратности s принятого из КС ПЗК*

3. Построить проверочную матрицу \mathbf{H} ПЗК, исправляющего искажения кратности s в форме

$$\mathbf{H} = \left[A^{n-1} \mathbf{B} \mid A^{n-2} \mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{K} \mid A\mathbf{B} \mid \mathbf{B} \right]^T \quad (2.52)$$

4. Выполнить п.п. 1–4 А2.7. ■

Как и в случае матричного метода формирования оценки искажения ПЗК целесообразно ограничиться коррекцией искажений только в

ИЧК, при этом сигнал коррекции формируется нелинейным способом в форме (2.33).

Особняком в дивидендном методе формирования оценки искажения ПЗК стоит задача коррекции кода с помощью квазисиндрома \tilde{E} вида (2.49). Квазисиндром может быть использован только в режиме исправления. При его использовании скалярный сигнал коррекции η формируется в силу соотношения

$$\eta(k = (t + 1)n - \lambda + 1) = \underset{i=m}{\&}\tilde{E}_i = \underset{i=m}{\&}\mathbf{B}_i^T; \quad t = 1, 2, K \quad (2.53)$$

Коррекция искажений с помощью сигнала коррекции (2.53) требует организации сдвигового вывода ПЗК из сдвигового регистра хранения кода в дополнительный регистр сдвига или перевода приемного регистра в режим кольцевого регистра сдвига на n -ом такте деления. На выходе приемного регистра сдвига должен быть включен сумматор по модулю два, выполняющий функции устройства коррекции ПЗК, на один вход которого подается искаженный ПЗК, а на другой – сигнал коррекции (2.53), на выходе которого наблюдается откорректированный код.

2.4. Дивидендные кодирующие и декодирующие устройства укороченных циклических кодов с коммутируемой структурой

Проблема укороченных кодов состоит в реализации возможности сокращения аппаратных затрат при использовании матричного метода помехозащитного кодирования и декодирования, не параметризованных дискретным временем, и сокращения временных затрат при использовании для тех же целей дивидендного метода. Проблема укороченных кодов возникает, когда в силу целочисленности числа m проверочных разрядов это число оказывается одним и тем же для числа разрядов k помехозащищенного кода a и для случая числа разрядов $k_1 < k$ кода a . Это означает, что два соотношения при заданных помеховой среде в КС и требованиях к достоверности передачи соотношения

$$m = \arg \left\{ N_c = 2^m - 1 \geq N_{ou} = \sum_{i=1}^s C_{n=m+k}^i \right\}, \quad (2.54)$$

$$m_1 = \arg \left\{ N_c = 2^{m_1} - 1 \geq N_{ou} = \sum_{i=1}^s C_{n_1=m_1+k_1}^i \right\} \quad (2.55)$$

дают один и тот же результат так, что выполняется равенство

$$m_1 = m. \quad (2.56)$$

Как следствие в случае решения задачи помехозащитного кодопреобразования средствами циклического кодирования и декодирования укороченный помехозащищенный (n_1, k_1) -код, где $n_1 = k_1 + m$, будет иметь тот же образующий ММ $g(x)$ с $\deg g(x) = m$, что и (n, k) -ПЗК, где $n = k + m$, при этом $g(x)$ принадлежит показателю n .

Если задача помехозащитного кодопреобразования укороченного (n_1, k_1) -ПЗК решается матричными методами, то помехозащитное кодопреобразование может быть осуществлено с использованием редуцированной образующей матрицы \mathbf{G} , а помехозащитное декодирование может быть осуществлено с использованием редуцированной проверочной матрицы \mathbf{H} (n, k) -помехозащищенного кода. Редуцирование образующей матрицы \mathbf{G} осуществляется вычеркиванием $(k - k_1)$ первых столбцов и первых строк этой матрицы, в результате чего формируется образующая $(k_1 \times (n_1 = k_1 + m))$ -матрица $\mathbf{G}_{(n_1, k_1)}$ ПЗК (n_1, k_1) с тем же числом проверочных разрядов, что и код (n, k) . Редуцирование матрицы \mathbf{H} осуществляется вычеркиванием $(k - k_1)$ первых строк этой матрицы, в результате чего формируется проверочная (n_1, m) -матрица $\mathbf{H}_{(n_1, k_1)}$ ПЗК (n_1, k_1) , которая при декодировании будет формировать синдромы той же размерности m , что и в случае декодирования (n, k) -ПЗК с помощью матрицы \mathbf{H} . В связи с тем, что при практической реализации матричного метода помехозащитных процедур кодирования и декодирования от матриц ПЗК переходят к системе линейных скалярных соотношений для кодирования и проверочных соотношений для декодирования редуцирование матриц \mathbf{G} и \mathbf{H} не приводит к уменьшению числа этих соотношений. Сокращается лишь число аддитивных членов в них, что в итоге приводит к уменьшению аппаратного состава устройств кодирования и декодирования на число $(k - k_1)$ сумматоров по модулю два.

При дивидендном методе помехозащитного кодопреобразования укороченных кодов имеет место следующая картина. Аппаратурно в кодирующем устройстве с точностью до изменения момента коммутации в устройстве деления модулярных многочленов, когда оно переводится в режим регистра сдвига для вывода в КС остатка от деления, ничего не меняется. В декодирующем устройстве, если не предпринять специальных структурных мер, появляется временная избыточность, состоящая в том, что при $n_1 < n$ так, как образующий ММ $g(x)$ укороченного (n_1, k_1) -кода и (n, k) -ПЗК один и тот же, причем он принадлежит показателю n , а не n_1 , то есть она оказывается большей длины укороченного (n_1, k_1) -кода. Более того, «квазисиндром» искаженного укороченного кода по своему положению на временной оси на повторных циклах деления перестает быть согласованным с искаженным разрядом укороченного кода (УПЗК). Таким образом корректирующие возможности (n_1, k_1) -ПЗК оказываются представленными только синдромом, квазисиндром перестает быть опознавателем ошибки. Однако корректирующие возможности (n_1, k_1) -ПЗК могут быть расширены до возможностей (n, k) -ПЗК, если сделать цикл деления равный длительности n_1 (n_1, k_1) -ПЗК. Эта задача решается, если базовую векторно-матричную модель ДКУ

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) \equiv 0, \quad (2.57)$$

дополнить цепями коммутации структуры цикла деления так, что векторно-матричная модель ДКУ укороченного (n_1, k_1) -ПЗК принимает вид

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + B_{\kappa 1} u_{\kappa 1} + B_{\kappa 2} u_{\kappa 2}, \quad x(0) \equiv 0. \quad (2.58)$$

В (2.58) сигналы коммутации принимают значение $u_{\kappa 1} = 1, u_{\kappa 2} = 0$ когда $u(k) = f(k)$ – принимаемая из КС искаженная кодовая комбинация в момент коммутации характеризуется равенством $u(k) = 0$, и $u_{\kappa 1} = 0, u_{\kappa 2} = 1$ – когда $u(k)$ в момент коммутации характеризуется равенством $u(k) = 1$. В связи со сказанным матрицы $B_{\kappa 1}$ и $B_{\kappa 2}$ можно сформировать, опираясь на положения следующего утверждения.

Утверждение 2.5 (У2.5). Для того, чтобы цикл деления при декодировании укороченного (n_1, k_1) -ПЗК дивидендным методом был бы согласован с редуцированной на $(n - n_1)$ первых строк проверочной матрицей достаточно, чтобы матрицы входа $B_{\kappa 1}$ и $B_{\kappa 2}$ для коммутирующих сигналов $u_{\kappa 1}$ и $u_{\kappa 2}$ имели вид

$$B_{\kappa 1} = (I + A^{n_1})B, \quad (2.59)$$

$$B_{\kappa 2} = A^{n_1}B. \quad \square \quad (2.60)$$

Доказательство утверждения начнем со случая, когда $u(k)=0$, $u_{k1}=1$ и $u_{k2}=0$. Для этого случая модельное представление (2.58) примет вид

$$x(k+1) = Ax(k) + B_{k1}, \quad (2.61)$$

где $x(k)$ и $x(k+1)$ с точностью до транспонирования должна совпадать соответственно с первой и последней строками редуцированной проверочной матрицей (n_1, k_1) -ПЗК так, что выполняются равенства

$$x(k) = H_{(n-n_1+1)}^T, \quad (2.62)$$

но

$$H_{(n-n_1+1)}^T = A^{n_1-1} B; \quad H_n^T = B. \quad (2.63)$$

Подстановка (2.62) в (2.61) с учетом (2.63) приводит к (2.59). Рассмотрим теперь случай, когда $u(k)=1$, $u_{k1}=0$ и $u_{k2}=1$. В этом случае модель ДКУ (2.58) принимает вид

$$x(k+1) = Ax(k) + B + B_{k2}. \quad (2.64)$$

Подстановка в (2.64) соотношений (2.62) с учетом (2.63) приводит к (2.60). ■

Следует заметить, что сигналы u_{k1} и u_{k2} коммутации дивидендного декодирующего устройства формируются в форме конъюнкций

$$u_{k1} = u_k \bar{u}(k), \quad u_{k2} = u_k u(k), \quad (2.65)$$

где сигнал u_k формируется, как основная конъюнкция набора переменных, задаваемых элементами вектора x состояния ДКУ, удовлетворяющего соотношению

$$x = A^{n_1-1} B. \quad (2.66)$$

Дивидендное декодирующее устройство (2.58) для декодирования укороченных (n_1, k_1) -ПЗК формирует синдромы E ошибок в моменты $k = n_1(t+1) + (n_1 + 1 - \lambda)$ при искажении ПЗК в λ -ом разряде при передаче по каналу связи при $(t+1)$ -циклах деления длительностью n_1 .

Полученные результаты по синтезу дивидендного декодирующего устройства УПЗК с коммутируемой структурой цикла деления, обеспечивающей корректирующие возможности помехозащищенного кода в форме синдромов и квазисиндромов искажений можно представить в виде следующего алгоритма.

Алгоритм 2.9 (A2.9)

конструирования дивидендного декодирующего устройства с коммутируемой структурой

1. Сформировать параметр k_1 информационной части ПЗК в силу соотношения

$$k_i = \arg\{2^{k_i} \geq [Q] = N_u\},$$

где $[Q] = N_u$ – мощность информационного массива Q .

2. Сформировать параметр m проверочной части ПЗК в силу (2.54)–(2.56).
3. Выбрать образующий модулярный многочлен $g(x)$ степени $\deg g(x) = m$ и определить показатель n , к которому принадлежит $g(x)$.
4. С помощью остатков $r_i(x) = \text{rest} \frac{x^i}{g(x)}$, $i = \overline{1, n-1}$ сформировать проверочную H и образующую G матрицы $(n, k = n - m)$ -помехозащищенного кода.
5. Построить редуцированные проверочную и образующую матрицы $(n, k = n - m)$ -УПЗК.
6. Вычислить D -образ $g(d)$ образующего ММ $g(x)$.
7. Вычислить передаточную функцию $\Phi(d)$ устройства деления модулярных многочленов в форме

$$\Phi(d) = g^{-1}(d).$$
8. Построить структурное представление передаточной функции $\Phi(d) = g^{-1}(d)$ в таком сопровождающем базисе, в котором матрица информационного входа B удовлетворяла второму условию в (2.63).
9. Построить векторно-матричное представление ДКУ в форме (2.57).
10. Построить векторно-матричное представление ДКУ с коммутируемой структурой в форме (2.58), сформировав матрицы B_{k_1} и B_{k_2} коммутирующих входов в форме (2.59), (2.60).
11. Дополнить ДКУ с векторно-матричным представлением (2.58) цепями формирования сигналов коммутации u_{k_1} и u_{k_2} с помощью булевых функций (2.65).
12. Сформировать цепи вывода из ДКУ синдрома E и квазисиндрома \tilde{E} . ■

Пример 2.5 (Пр2.5)

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим процедуру синтеза ДКУ с коммутируемой структурой на примере укороченного $(n_1, k_1) = (5, 2)$ -кода, построенного на базе (n, k) -кода $(7, 4)$, сформированного с помощью образующего ММ $g(x) = x^3 + x + 1$ и обладающего образующей и проверочной матрицами

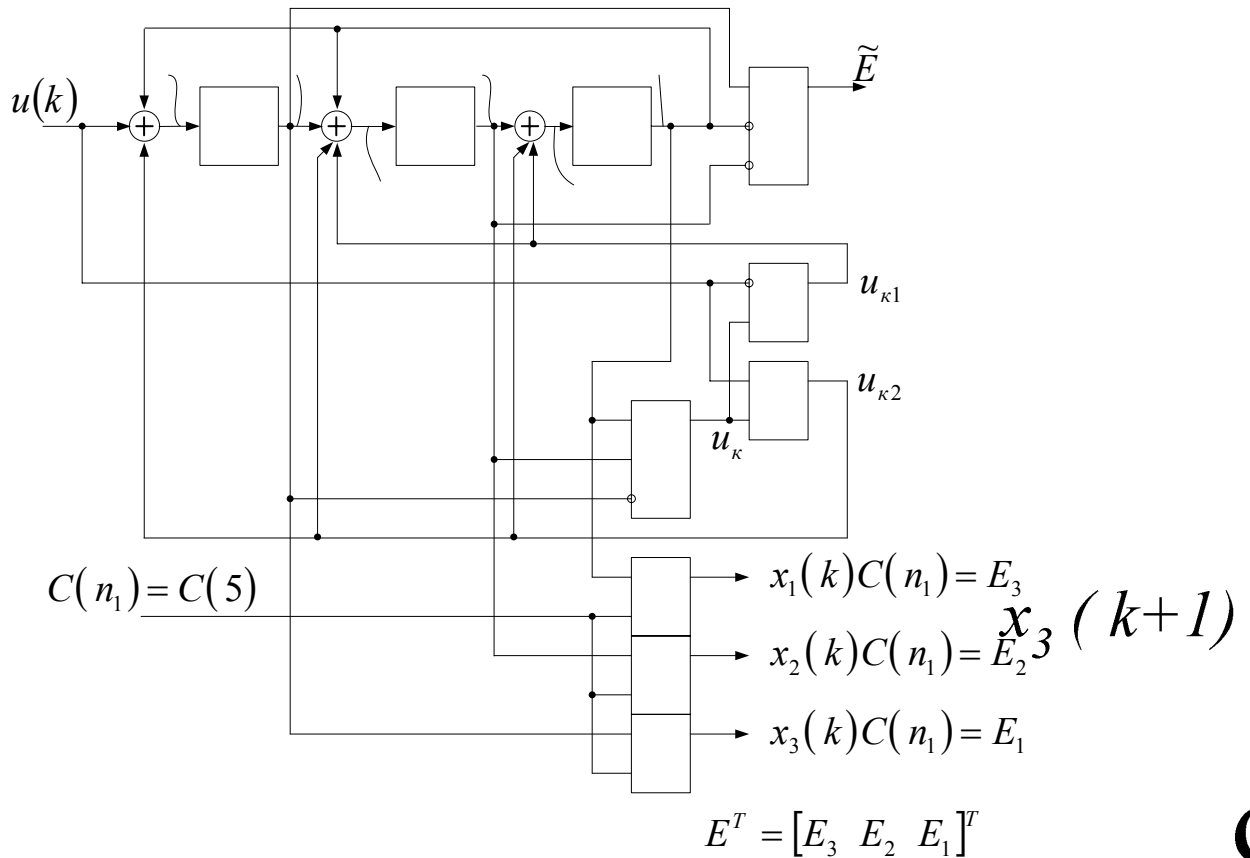


Рисунок 2.11. Структурная схема ДКУ

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]; \quad \mathbf{H}^T = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]^T$$

Следуя **A2.9** получим:

— редуцированные образующую $\mathbf{G}_{(5,2)}$ и проверочную $\mathbf{H}_{(5,2)}$ матрицы (5, 2)-УПЗК в форме

$$\mathbf{G}_{(5,2)} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]; \quad \mathbf{H}_{(5,2)}^T = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right];$$

— векторно-матричное представление ДКУ (2.57) с матрицами

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right]; \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right];$$

— векторно-матричное представление ДКУ укороченного (5, 2)-УПЗК с коммутируемой структурой в форме (2.58) с матрицами коммутирующих входов

$$\mathbf{B}_{\kappa 1} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{n_1})\mathbf{B} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}^5)\mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}^5\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_{\kappa 2} = \mathbf{A}^{n_1}\mathbf{B} = \mathbf{A}^5\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

— сигналы коммутации

$$u_{\kappa 1} = u_{\kappa} \bar{u}(k) = x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{u}(k),$$

$$u_{\kappa 2} = u_{\kappa} u(k) = x_1 x_2 x_3 u(k)$$

На рисунке 2.11 приведена сконструированная структурная схема ДКУ (5, 2)-УПЗК с коммутируемой структурой.

— векторно-матричное представление ДКУ укороченного (5, 2)-УПЗК с коммутируемой структурой в форме (2.58) с матрицами коммутирующих входов

$$\mathbf{B}_{\kappa 1} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{n_1})\mathbf{B} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}^5)\mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}^5\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_{\kappa 2} = \mathbf{A}^{n_1}\mathbf{B} = \mathbf{A}^5\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

— сигналы коммутации

$$u_{\kappa 1} = u_{\kappa} \bar{u}(k) = x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{u}(k),$$

$$u_{\kappa 2} = u_{\kappa} u(k) = x_1 x_2 x_3 u(k)$$

На рисунке 2.11 приведена сконструированная структурная схема ДКУ (5, 2)-УПЗК с коммутируемой структурой.

2.5. Аппарат селлерсовского дифференцирования в задачах анализа булевых описаний НДДС дискретной автоматики

В своей работе [65] Ф. Селлерс ввел в практику использование производных (разностей) булевых функций на предмет обнаружения ошибок в функционировании дискретных устройств, аналитическое представление которых задается с помощью аппарата БФ. В своей монографии [47] Ф. Селлерс переносит предложенный аппарат на задачу обнаружения ошибок в работе ЭВМ. Однако аппарат селлерсовского дифференцирования, за некоторым исключением [1, 9, 17], остается за пределами массовой технической литературы, проблемно ориентированной на разработки устройств дискретной автоматики.

Задача параграфа – привлечь внимание разработчиков УДА к возможностям аппарата селлерсовского дифференцирования и предложить инструментарий для исследования аналитических описаний УДА в классе НДДС представлений. С этой целью сформулируем основные положения аппарата селлерсовского дифференцирования.

Определение 2.1 (О2.1). Частной производной Селлера (ЧПС) 1-го порядка [1, 9, 17, 47, 65] булевой функции

$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ по булевой переменной x_i называется булева

функция $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, задаваемая выражением

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \oplus f(x_1, x_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n). \quad (2.67)$$

Вычисление частной производной Селлера от БФ

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

по переменной x_i может быть произведено несколькими способами.

Первый способ основан на определении ЧПС (2.67).

Второй способ использует метод карт Карно [47], в соответствии с которым строятся две карты Карно для булевых функций $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ и $f(x_1, x_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n)$, которые суммируются по модулю два, что приводит к карте Карно для частной производной. Этот способ позволяет получать минимальное представление ЧПС.

Третий способ использует разложение К. Шеннона [1], которое для (2.66) позволяет записать

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \oplus f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (2.68)$$

Четвертый способ, в развитие третьего способа, использует представление БФ $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ с помощью таблицы истинности, наборы переменных в которой представлены в форме, имеющей x_i в качестве переменной младшего разряда набора. В этом случае смена значения с x_i на \bar{x}_i , приводящая к смене значения БФ, свидетельствует о единичном значении ЧПС на этом наборе, а отсутствие смены значения БФ – о нулевом значении ЧПС. Следует заметить, что последний способ позволяет оценивать значимость переменной x_i в БФ, определяемую весом ЧПС на всех наборах переменных.

Для вычисления частных производных Селлера от БФ полезно использовать их свойства, которые могут быть установлены [1] непосредственно из определения.

Свойство 2.1 (СВ2.1). (Инвариантность ЧПС относительно инверсии)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_i}. \quad (2.69)$$

Свойство 2.2 (СВ2.2). (Правило дифференцирования констант)

$$\frac{\partial 1}{\partial x_i} = \frac{\partial 0}{\partial x_i} = 0. \quad (2.70)$$

Свойство 2.3 (СВ2.3). («Тривиальные свойства» дифференцирования)

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_i} = 1. \quad \square \quad (2.71)$$

Свойство 2.4 (СВ2.4). Если БФ $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ представима в форме конъюнкции функций, одна из которых не зависит от x_i :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) &= \\ &= f_1(x_j, \quad j = \overline{1, n}, j \neq i) \cdot f_2(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = f_1(x) \cdot f_2(x), \end{aligned}$$

то

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \{f_1(x)f_2(x)\}}{\partial x_i} = f_1(x) \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_i}. \quad \square \quad (2.72)$$

Свойство 2.5 (СВ2.5). Если БФ $f(x)$ представима в виде конъюнкции БФ $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$:

$$f(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x),$$

то

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_i} \varphi_2(x) \oplus \varphi_1(x) \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_i} \oplus \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_i}. \quad \square \quad (2.73)$$

Свойство 2.6 (СВ2.6). Если БФ $f(x)$ представима в виде дизъюнкции БФ $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$:

$$f(x) = \varphi_1(x) \vee \varphi_2(x), \quad (2.74)$$

то

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_i} \bar{\varphi}_2(x) \oplus \bar{\varphi}_1(x) \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_i} \oplus \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_i}. \quad \square \quad (2.75)$$

Свойство 2.7 (СВ2.7). Если БФ $f(x)$ представима в виде суммы по модулю два БФ $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$:

$$f(x) = \varphi_1(x) \oplus \varphi_2(x),$$

то

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_i} \oplus \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_i}. \quad \square \quad (2.76)$$

Свойство 2.8 (СВ2.8). Если БФ $f(x)$ представима в форме конъюнкции ее переменных:

$$f(x) = \big\&_{j=1}^n x_j, \quad (2.77)$$

то

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \big\&_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j. \quad \square \quad (2.78)$$

Свойство 2.9 (СВ2.9). Если БФ $f(x)$ представима в форме дизъюнкции ее переменных:

$$f(x) = \bigvee_{j=1}^n x_j, \quad (2.79)$$

то

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \bar{x}_j. \quad \square \quad (2.80)$$

Свойство 2.10 (СВ2.10). Если $f(x)$ является сложной БФ, задаваемой в форме

$$f(x) = f(x, \varphi(x)), \quad (2.81)$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} &= f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)) \oplus \\ &\oplus f(x_1, x_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n)). \quad \square \quad (2.82) \end{aligned}$$

Рассмотрим далее понятие частных смешанных производных Селлера высокого порядка БФ и их свойства.

Определение 2.2 (О2.2). Двукратной смешанной производной Селлера булевой функции $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$ от n булевых переменных называется БФ, задаваемая [9, 17] выражением

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right). \quad \square \quad (2.83)$$

Определение 2.3 (О2.3). m -кратной смешанной производной Селлера по m переменным $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$ булевой функции $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i_1}, \dots, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}, \dots, x_n)$ называется БФ, задаваемая [9, 17] выражением

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m f(x)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}} &= \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\Lambda \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_{i_m}} \right) \right) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_{i_m}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{(m-1)}}} \left(\Lambda \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_{i_1}} \right) \right) \right). \quad \square \quad (2.84) \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение еще одну m -кратную производную по вектору из m элементов.

Свойство 2.11 (СВ2.11). (Равенство нулю частной селлерсовской производной порядка $k > 1$ произвольной БФ)

$$\left. \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_i^k} \right|_{k>1} = 0. \quad \square \quad (2.85)$$

Доказательство. Свойство является следствием определения **O2.1**, примененного к булевой функции типа ЧПС первого порядка от исходной БФ по той же переменной. ■

Определение 2.4 (O2.4). Производная m -го порядка $\frac{\partial^m f(x)}{\partial(x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_m})}$ от булевой функции $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по кортежу переменных $(x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_m})$ определяет условия, при которых функция $f(x)$ изменяет свое значение при **одновременном** изменении значений переменных кортежа. □

Для вычисления введенной с помощью **O2.4** производной воспользуемся теоремой Д. Бохманна, доказательство которой можно найти в [9].

Теорема Д. Бохманна. (Теорема **T.2.1**).

Производная $\frac{\partial^m f(x)}{\partial(x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_m})}$ по кортежу $(x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_m})$ от скалярной булевой функции $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ представима суммой по модулю два всех ее переменных порядка k от 1 до n :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m f(x)}{\partial(x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_m})} = & \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_{i_\mu}} \oplus \sum_{\substack{i,j \\ i_\mu \neq j_\nu}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_\mu} \partial x_{j_\nu}} \oplus \\ & \oplus \sum_{\substack{i,j,l \\ i_\mu \neq j_\nu \neq l_\rho}} \frac{\partial^3 f}{\partial x_{i_\mu} \partial x_{j_\nu} \partial x_{l_\rho}} \oplus \dots \oplus \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}. \quad \blacksquare \quad (2.86) \end{aligned}$$

Сформулированную задачу решим в нескольких постановках. В первой постановке контроль корректности булевых описаний с помощью аппарата частных производных Селлера 1-го порядка осуществим инвариантным относительно его конкретного использования способом с помощью веса ЧПС на всех наборах переменных. В этой постановке задача решается использованием следующих определений и утверждений.

Определение 2.5 (O2.5). Весом $P\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right\}$ частной производной $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$ Селлера 1-го порядка от булевой функции $f(x)$ по переменной x_i называется сумма значений БФ $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$ на всех 2^n наборах $\{x\}$ булевых переменных $x = \text{row}\{x_i, i = \overline{1, n}\}$:

$$P\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right\} = \sum_{\lambda=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \Big|_{\{x\}=\lambda}. \quad \square \quad (2.87)$$

Введенное определение позволяет на основе свойств частной производной Селлера (ЧПС) 1-го порядка сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2.6 (У2.6). Если вес ЧПС $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$ на всех 2^n наборах $x = \text{row}\{x_i, i = \overline{1, n}\}$ равен нулю так, что

$$P\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right\} = 0, \quad (2.88)$$

то в дизъюнктивной форме представления булевой функции $f(x)$ происходит полное «склеивание» по переменной x_i . \square

Доказательство утверждения строится на том, что $P\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right\} = 0$ означает, что $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = 0$ на всех наборах переменных, в том числе и на тех μ наборах, где $f(x)$ принимает единичное значение так, что для этих наборов становится в силу (2.67) справедлива запись:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = 1; \quad f(x_1, x_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n) = 1. \quad (2.89)$$

Тогда (2.89) позволяет для дизъюнктивной нормальной формы БФ $f(x)$ записать

$$f(x) = \left(\bigvee_{l=1}^{\mu} \bigg\{ \bigg\{ \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j^{\alpha_j} \right\} (x_i \vee \bar{x}_i) \right) = \bigvee_{l=1}^{\mu} \bigg\{ \bigg\{ \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j^{\alpha_j} \right\}, \quad (2.90)$$

где $x_j^{\alpha_j} = \bar{x}_j$ при $\alpha = 0$ и $x_j^{\alpha_j} = x_j$ при $\alpha = 1$. \blacksquare

Утверждение 2.7 (У2.7). Если вес ЧПС $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ на всех 2^n наборах переменных $x = \text{row}\{x_i, i = \overline{1, n}\}$ равен 2^n так, что

$$P\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right\} = 2^n, \quad (2.91)$$

то при конструировании множества пар наборов булевых переменных полной мощности равной 2^{n-1} , на которых эта БФ меняет свое значение, не найдется такой пары, на которой эта БФ сохраняет свое значение. \square

Доказательство утверждения содержит в себе определение ЧПС $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, которое фиксирует изменение значения БФ $f(x)$ при изменении переменной x_i на ее инверсию \bar{x}_i , что соответствует своей паре наборов булевых переменных. \blacksquare

Утверждение 2.8 (У2.8). Вес $P\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right\}$ ЧПС $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ на всех 2^n наборах переменных в простом поле Галуа $GF(2)$ всегда представляет собой величину кратную двум. \square

Доказательство утверждения строится на том факте, что для каждого набора переменных вес $P\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right\}$ может принимать значение нуль или единица, а любая смена значения функции $f(x)$ всегда подразумевает два набора переменных, на которых БФ $f(x)$ переключается по схеме $0 \rightarrow 1$ и $1 \rightarrow 0$, а, следовательно, исключительно на которых $P\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right\} = 1$. \blacksquare

Следствие 2.1 (С2.1) из У2.7 и У2.8.

Вес $P\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right\}$, $i = \overline{1, n}$, позволяет проранжировать переменные x_i , $i = \overline{1, n}$ по степени их значимости в булевой функции $f(x)$, при этом, чем больше значение веса $P\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right\}$, $i = \overline{1, n}$, тем значимее переменная x_i . \square

Вторая постановка задачи предполагает «встроенность» булевых функций в структуру аналитического описания комбинационной схемы (КСХ) УДА. Здесь основными БФ являются булевы функции возбуждения входов используемых триггеров и булевы функции формирования выхода процесса кодопреобразования в УДА. Причем задачу в этой постановке решим с использованием канонических автоматных представлений и ГСА-описаний функционирования УДА.

Выполнить контроль корректности составления ГСА-описания функционирования НДДС на фазе перехода от «вербальной» версии ГСА к ее формальной версии позволяют положения У2.6 и У2.7. Здесь оказываются полезными положения следующего утверждения.

Утверждение 2.9 (У2.9). Пусть $f_{ms}(x)$ – БФ перехода от операторной вершины Y_m к операторной вершине Y_s , тогда $f_{ms}(x)$ оказывается составленной корректно, если ни по одной из переменных x_i на наборах, на которых эта функция принимает единичное значение, производная этой функции $\frac{\partial f_{ms}(x)}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$ не принимает нулевое значение, то есть

$$\frac{\partial f_{ms}(x)}{\partial x_i} \neq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad \square \quad (2.92)$$

Доказательство утверждения не приводится в силу того, что данное утверждение можно рассматривать как следствие из **У2.7** применительно к формальной версии ГСА-описаний НДДС. ■

Как уже упоминалось выше, в общем случае произвольная НДДС включает в свой состав БФ, реализующие правило μ (2.12) формирования сигнала ν возбуждения информационных входов триггеров, а также БФ, реализующие правило δ (2.8), (2.9) формирования выхода. Таким образом, применив к (2.8), (2.9), (2.12) аппарат частных производных Селлера 1-го порядка, получим оценки структурных свойств НДДС в форме детектируемости и достижимости, описываемых каноническими конечными автоматами.

Утверждение 2.10 (У2.10). *Состояние S_l НДДС с кодом состояния $\kappa\{S_l\} = \text{row}\{x_j, j = \overline{1, n}\}$ является недетектируемым по переменной x_i относительно ρ -го компонента выхода НДДС если ЧПС от ρ -го компонента функции выхода (2.16) по этой переменной удовлетворяет условию*

$$\left. \frac{\partial \delta_\rho(x)}{\partial x_i} \right|_{x=\kappa\{S_l\}} = 0. \quad \square \quad (2.93)$$

Доказательство утверждения использует содержательное определение ЧПС 1-го порядка. ■

Очевидно, становится справедливым положение следующего утверждения.

Утверждение 2.11 (У2.11). *Переменная x_i кодов состояния НДДС оказывается полностью недетектируемой относительно ρ -го компонента выхода НДДС, если по выходу S_l вес ЧПС $P\left\{\frac{\partial \delta_\rho(x)}{\partial x_i}\right\} = 0$ на всех 2^n наборах переменных $x = \text{row}\{x_j, j = \overline{1, n}\}$. □*

Доказательство утверждения опирается на положения **У2.7** и содержательную часть **У2.10** о детектируемости состояний конечного автомата. ■

Утверждение 2.12 (У2.12). *Состояние S_l УДАТ с кодом состояния $\kappa\{S_l\} = \text{row}\{x_j, j = \overline{1, n}\}$ является недостижимым по входной переменной $u_\nu, \nu = \overline{1, r}$, если ЧПС от функции возбуждения (2.12) для этого состояния удовлетворяет условию*

$$\left. \frac{\partial \tilde{\mu}(x,u)}{\partial u_v} \right|_{x=\kappa\{S_l\}} = \text{col} \left\{ \frac{\partial \tilde{\mu}_j(x,u)}{\partial u_v}; j = \overline{1,n} \right\} = 0. \quad (2.94)$$

Доказательство. Справедливость положений утверждения обнаруживают свойства ЧПС 1-го порядка и аналитическое представление функции возбуждения триггеров. ■

Примечание 2.4 (ПМ2.4). Нетрудно видеть, что У2.12 содержит в себе потенциал развития мысли в направлении введения понятия полной недостижимости состояния S_l , когда условие (2.94) выполняется для всех $v = \overline{1,r}$ входных переменных u_v . □

Примечание 2.5 (ПМ2.5). Положения У2.11 являются эффективным средством контроля булевого описаний НДДС на предмет достижимости неопределенных описанием НДДС состояний. Такая ситуация имеет место в НДДС, если при ее заданном функционировании используются не все кодовые комбинации вектора x ее состояния размерности $\dim x = n$ при мощности 2^n полного их множества. □

Воспользуемся теперь смешанными производными Селлера для разложения булевой функции в заданной точке пространства над двоичным полем Галуа $GF(2)$. Конструктивный результат решения этой задачи содержится в теореме Горбатова В. А. [17, теорема 2.3].

Теорема В. А. Горбатова (Теорема Т2.1) Любая булева функция

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

представима своим значением в точке $x = (00\dots 0)$ и значениями всех

ее производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}, \dots, \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$ в этой точке в виде

$$\begin{aligned} f(x) = & f(0) \oplus \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x=0} \cdot x_i \oplus \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x=0} \cdot x_i x_j \oplus \dots \\ & \oplus \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=1}^n \left. \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}} \right|_{x=0} \cdot x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m} \oplus \dots \\ & \oplus \left. \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \right|_{x=0} \cdot x_1 x_2 \dots x_n. \end{aligned} \quad (2.95)$$

где $i_1, i_2, \dots, i_m \in (\overline{1,n})$ и попарно не равны друг другу, \oplus – сложение по модулю два. □

В заключение необходимо сделать примечание к разложению (2.95) произвольной булевой функции $f(x)$. Очевидно, что число членов разложения в (2.95) определяет степень близости $f(x)$ к ее линейной версии, а произведение числа членов разложения на размерность блока памяти определяет функционал размещения данной задачи кодопреобразования в диаде «комбинационная схема – блок памяти».

Полученные результаты исследований позволяют предложить следующий алгоритм контроля булевых описаний нелинейных ДДС дискретной автоматики.

Алгоритм 2.10 (A2.10)

*контроля булевых описаний НДДС дискретной автоматики
в фазе их аналитического конструирования*

1. Выполнить в зависимости от формального описания НДДС: в случае ГСА-описаний при контроле корректности ее составленной в силу У2.9 – п.п. 1–5 А2.2, а затем – п.п. 2–6 А2.1; в случае использования канонического автоматного синтеза – п.п. 1–6 А2.1.
2. Проверить с использованием положений У2.6, У2.7 и У2.8 факт избыточности переменных булевых описаний БФ, задающих функции μ (2.12) возбуждения информационных входов ν триггеров, и в случае обнаружения такового выполнить соответствующее приведение этих переменных.
3. Проверить с использованием положений У2.6, У2.7 и У2.8 факт избыточности переменных булевых описаний БФ, задающих функцию y (2.11) выхода НДДС, и в случае обнаружения такового выполнить соответствующее приведение этих переменных.
4. Выполнить с использованием положений У2.10 и У2.12 контроль постановочного описания в форме диаграмм переходов и выхода (ДПВ) или ГСА нелинейной ДДС с полученным его аналитическим представлением, определяемым соответствующими БФ.
5. Выполнить п.6 А2.1. ■

Примечание 2.6 (ПМ2.6). *Следует заметить, что предложенный алгоритм контроля булевых описаний НДДС достаточно просто реализуем в программной среде, что позволит разработчикам существенно сэкономить время при разработке НДДС.* □

Для иллюстрации приведенных положений рассмотрим два примера, в первом из которых рассмотрим использования аппарата селлерсовского дифференцирования применительно к произвольным БФ.

Таблица 2.14

x_1	x_2	x_3	$f(x) = (x_1 \cdot x_2 \vee x_3) \rightarrow (x_1 \cdot x_3 \oplus x_1)$										
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
			x_1	\cdot	x_2	\vee	x_3	\rightarrow	x_2	\cdot	x_3	\oplus	x_1

Примечание: в выделенных столбцах таблицы приведены значения, соответствующие результату выполнения указанных логических операций.

Таблица 2.15

x_1	x_2	x_3	$f(x)$	$\frac{\partial f}{\partial x_3}$	x_3	x_1	x_2	$f(x)$	$\frac{\partial f}{\partial x_2}$	x_2	x_3	x_1	$f(x)$	$\frac{\partial f}{\partial x_1}$
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1

Пример 2.6 (Пр2.6)

Рассматривается переключательная функция 3-х переменных $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 \vee x_3) \rightarrow (x_2 x_3 \oplus x_1)$ на предмет вычисления частных производных Селлера 1-го порядка по всем переменным и оценки их веса. Для вычисления производной $\partial f / \partial x_i$ используется 4-й способ (см. выше способы вычисления ЧПС). Результаты вычисления сведены в две таблицы: таблица 2.14 представляет собой таблицу истинности, а таблица 2.15 – иллюстрирует 4-й способ вычисления ЧПС.

Из таблицы 2.15 нетрудно видеть, что все ЧПС $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, 2, 3$, принимают единичные значения на 4-х переменных. Таким образом, все веса $P\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}, i = 1, 2, 3$ всех ЧПС характеризуются одной величиной $P\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\} = 4$. Иначе говоря, все переменные в БФ $f(x_1, x_2, x_3)$ обладают равной значимостью. ■

Пример 2.7 (Пр2.7)

Рассматривается процедура контроля булевого описаний НДДС в составе:

— БФ возбуждения информационных входов **D**-триггеров в виде

$$\mu_1 = u(\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2) = u(x_1 \oplus x_2), \quad \mu_2 = u \bar{x}_1 \bar{x}_2;$$

— БФ формирования выхода НДДС в форме

$$y = \bar{x}_1 x_2.$$

Выполняем алгоритм **2.10** с п.2.

2. Контроль факта избыточности переменных булевого описаний БФ, задающих функции μ возбуждения информационных входов триггеров, на кодовых переходах дает

$$P\left\{\frac{\partial \mu_1}{\partial x_1}\right\} = P\{u \bar{x}_2\} = 2; \quad P\left\{\frac{\partial \mu_1}{\partial x_2}\right\} = P\{u \bar{x}_1\} = 2;$$

$$P\left\{\frac{\partial \mu_1}{\partial u}\right\} = P\{\bar{x}_1 \bar{x}_2\} = 2; \quad P\left\{\frac{\partial \mu_2}{\partial x_1}\right\} = P\{u \bar{x}_2\} = 2;$$

$$P\left\{\frac{\partial \mu_2}{\partial x_2}\right\} = P\{u x_1\} = 2; \quad P\left\{\frac{\partial \mu_2}{\partial u}\right\} = P\{x_1 \bar{x}_2\} = 2,$$

что свидетельствует об отсутствии избыточности переменных булевого описаний соответствующих БФ, кроме этого полученные веса имеют значения кратные двум, что подтверждает корректность их вычисления.

3. Контроль факта избыточности переменных булевого описаний БФ, задающую функцию y выхода НДДС, на кодовых переходах дает

$$P\left\{\frac{\partial y}{\partial x_1}\right\} = P\{x_2\} = 2; P\left\{\frac{\partial y}{\partial x_2}\right\} = P\{\bar{x}_1\} = 2,$$

что свидетельствует об отсутствии избыточности переменных булевого описаний функции y выхода, кроме этого полученные веса имеют значения кратные двум, что подтверждает корректность их вычисления.

4. Контроль постановочного описания ННДС в форме ДПВ с полученным его аналитическим представлением, определяемым соответствующими БФ, в форме

— проверки детектируемости состояний НДДС по соответствующим булевым переменным дает

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = x_2 \neq 0; \frac{\partial y}{\partial x_2} = \bar{x}_1 \neq 0,$$

что свидетельствует о детектируемости состояний НДДС по этим переменным;

— проверки достижимости состояний НДДС по соответствующим булевым переменным дает

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial u} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \neq 0; \frac{\partial \mu_2}{\partial u} = x_1 \bar{x}_2 \neq 0,$$

что свидетельствует о достижимости состояний НДДС по входной переменной u .

Выполнение п.5 алгоритма авторы сочли возможным опустить. ■

Примечание 2.7 (ПМ2.7). Следует заметить, что при решении задач минимизации БФ использование аппарата селлерсовского дифференцирования, в отличие от соответствующих методов минимизации БФ, при своей простоте позволяет одновременно исследовать среду БФ: определять и ранжировать ее переменные по степени их значимости, проверять корректность БФ; в рамках ДДС – производить анализ детектируемости и достижимости состояний, а также корректности составления ГСА-описания ее функционирования в фазе перехода от «вербальной» версии ГСА к ее формальной версии. □

