

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию

Санкт–Петербургский государственный университет
информационных технологий, механики и оптики



ПОБЕДИТЕЛЬ КОНКУРСА ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВУЗОВ

«Образование»

Е.А.Шахно

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЛАЗЕРНЫХ МИКРО– И НАНОТЕХНОЛОГИЙ

Учебное пособие



Санкт–Петербург
2009

Шахно Е.А. Аналитические методы расчета лазерных микро– и нанотехнологий. Учебное пособие – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 77 с.

Учебное пособие предназначено для магистрантов, проходящих обучение по курсу «Лазерные микро– и нанотехнологии» в практических занятиях и лабораторных работах. Является переработанной и дополненной версией пособия «Математические методы описания лазерных технологий». Включает краткий теоретический материал по основным аналитическим методам математики, используемым в исследованиях и разработке лазерных технологий, примеры решения типовых задач и условия задач для самостоятельной работы.

Настоящее учебное пособие может также быть использовано студентами, обучающимися по специальности 200201 «Лазерная техника и лазерные технологии» при самостоятельной работе в курсах «Лазерные технологии», «Физико–технические основы лазерных технологий» и т.п., а также студентами–дипломниками и аспирантами.

Рекомендовано к печати ученым советом инженерно–физического факультета 10.03.09, протокол №3.



СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007-2008 годы и успешно реализовал инновационную образовательную программу «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий», что позволило выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворять возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях науки. Реализация этой программы создала основу формирования программы дальнейшего развития вуза до 2015 года, включая внедрение современной модели образования.

©Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, 2009

©Е.А.Шахно, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
РАЗДЕЛ 1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ	5
РАЗДЕЛ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НА ЭКСТРЕМУМ	12
РАЗДЕЛ 3. ПРИМЕНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ. ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	20
РАЗДЕЛ 4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ РЕШЕНИЕ	29
РАЗДЕЛ 5. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ	35
РАЗДЕЛ 6. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	50
РАЗДЕЛ 7. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИСТОЧНИКОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ОБЛУЧАЕМОМ ОБЪЕКТЕ	57
ЛИТЕРАТУРА	68
КАФЕДРА ЛАЗЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЭКОЛОГИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ	69

ВВЕДЕНИЕ

Лазерные микро- и нанотехнологии в настоящее время интенсивно развиваются и активно внедряются в науке, технике и во многих различных областях нашей жизни. Необходимым условием совершенствования существующих лазерных микро- и нанотехнологий и разработки новых является расчетно-теоретическая база, включающая энергетические расчеты технологических установок, исследование физических процессов и определение основных параметров режимов лазерной обработки. Высокий уровень развития вычислительной техники позволяет сейчас производить многие расчеты с использованием численных методов. Однако их применение не может заменить аналитические методы математики, позволяющие, с одной стороны, быстро получить оценки основных технологических параметров и, с другой стороны, выявить принципиально важные зависимости и закономерности. Поэтому применение методов высшей математики в исследованиях и разработке лазерных технологий имеет большое значение.

При составлении настоящего учебного пособия предполагалось, что знакомство читателей с основным курсом высшей математики уже состоялось. Однако, как показывает опыт преподавания дисциплин специальности "Лазерная техника и лазерные технологии", специализаций «Оптическая физика и квантовая электроника», «Лазерная физика, техники и технология» магистерской программы «Техническая физика», «Лазерные микро- и нанотехнологии» магистерской программы «Оптотехника», одного такого знакомства, даже глубокого, оказывается недостаточно для применения имеющихся знаний к решению задач лазерных технологий. Это связано со спецификой применения математических методов для описания процессов воздействия лазерного излучения на вещество, в особенности, при постановке задач локального нагрева объектов импульсным лазерным излучением.

В настоящем пособии рассмотрены наиболее употребительные в описании лазерных микро- и нанотехнологий аналитические методы математики. Некоторые из них подробно изучаются в вузах в курсе высшей математики, другие (в частности, уравнение теплопроводности, постановка и методы решения краевых задач теплопроводности) обычно не включаются в учебную программу или преподаются в курсах специальных разделов математики. Применение математических методов проиллюстрировано решением типовых задач. Для закрепления материала предложены условия задач для самостоятельного решения, список которых приведен в конце каждого раздела. Изложение теоретического материала носит конспективный характер. При необходимости, более подробное изучение соответствующих разделов может быть осуществлено при использовании рекомендуемой литературы.

РАЗДЕЛ 1

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Теоретические сведения

1. Неопределенный интеграл

Первообразной функцией от функции $f(x)$, определенной на некотором отрезке $[a, b]$, называется функция $F(x)$, определенная на том же отрезке и удовлетворяющая условию:

$$F'(x) = f(x). \quad (1.1)$$

Если функция $f(x)$ имеет первообразную, то она имеет бесчисленное множество первообразных, которые отличаются друг от друга на постоянное слагаемое C .

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называют общее выражение $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная:

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (1.2)$$

Для нахождения неопределенного интеграла функции пользуются таблицей интегралов.

2. Определенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок на n элементарных отрезков и в каждом из них выберем точку x_i .

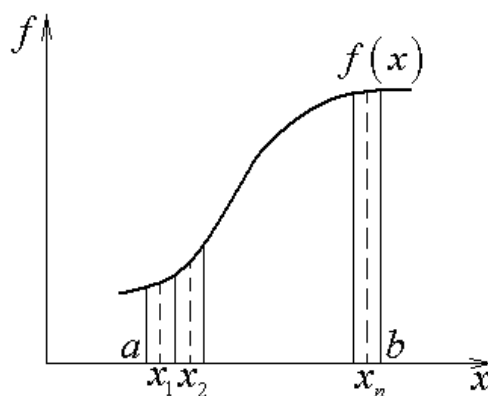


Рис. 1.1. К определению определенного интеграла.

Определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел суммы произведений длин отрезков на значение функции в выбранной на отрезке точке, при условии, что количество отрезков n стремится к бесконечности, а длина каждого отрезка стремится к нулю ($\Delta x_i \rightarrow 0$):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i, \quad (1.3)$$

где величина a называется нижним пределом интегрирования, а b – верхним пределом. Нетрудно видеть, что геометрически определенный интеграл выражает площадь под графиком функции.

По определению принимается:

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad (1.4)$$

$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx. \quad (1.5)$$

Определенный интеграл может быть выражен через неопределенный с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b. \quad (1.6)$$

Это позволяет вычислять определенные интегралы с помощью таблиц неопределенных интегралов.

Другие свойства определенных интегралов:

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad (1.7)$$

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \varphi(x) dx, \quad (1.8)$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx, \quad (1.9)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t)) x'_t dt, \text{ где } x(\alpha) = a, x(\beta) = b, \quad (1.10)$$

$$\int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = f(x) \varphi(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \varphi(x) dx. \quad (1.11)$$

Эти свойства, а также таблица неопределенных интегралов позволяют нам производить вычисления интегралов.

3. Несобственные интегралы

Если в интеграле в качестве одного или обоих пределов интегрирования стоит бесконечность ($+\infty$ или $-\infty$), то такой интеграл относится к так называемым несобственным интегралам. За исключением отдельных нюансов действия с ними производятся так же, как и с обычными определенными интегралами.

4. Интегрирование функций нескольких переменных

Ограничимся рассмотрением двух переменных. Пусть в области G задана функция $f(x, y)$. Двойной интеграл определяется как предел суммы произведений площадей элементарных площадок на значения функции в произвольных точках, выбранных на этих площадках:

$$\int_G f(x, y) dS = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i. \quad (1.12)$$

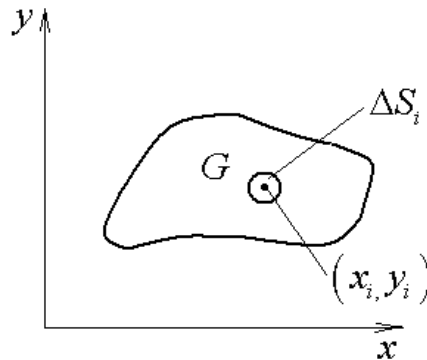


Рис. 1.2. К определению двойного интеграла.

Вычисляется двойной интеграл как двукратный, последовательным интегрированием по каждой координате:

$$\int_G f(x, y) dS = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (1.13)$$

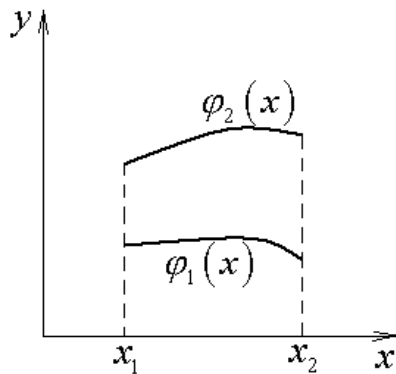


Рис. 1.3. Вычисление двойного интеграла.

Если область сложная, ее разбивают на несколько простых областей, в каждой из которых вычисляется интеграл, а результаты складываются.

5. Интегрирование в других системах координат

Рассмотрим интегрирование в полярной системе координат. Полярная система координат задается полюсом, полярной осью и единицей масштаба.

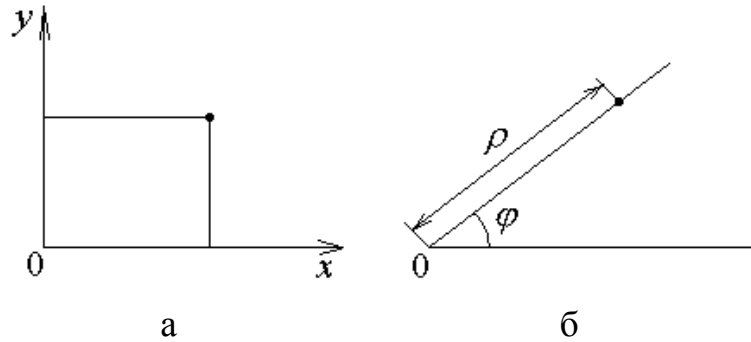


Рис. 1.4. Декартова (а) и полярная (б) системы координат.

Координаты точки в полярной и декартовой системе координат связаны соотношениями:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (1.14)$$

При переводе интеграла из одной системы координат в другую при переходе от дифференциалов dx и dy к новым дифференциалам ($d\rho$ и $d\varphi$) образуется множитель, который называется якобианом. Для полярной системы координат:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_G f(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (1.15)$$

Примеры решения задач

Задача 1

Определить энергию импульса лазерного излучения, если мощность его зависит от времени следующим образом: $P(t) = P_0 \ln(kt + 1)$, $P_0 = 10^8$ Вт, $k = 10^8$ 1/с, длительность импульса $\tau = 10^{-8}$ с.

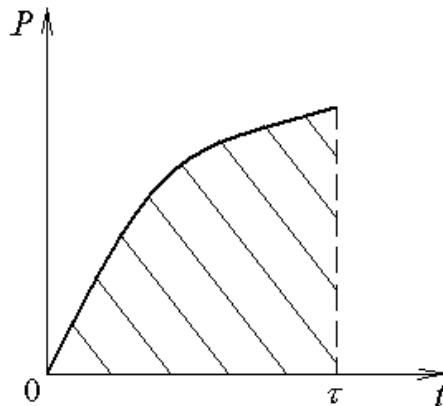


Рис. 1.5. К решению задачи 1.

Решение

Энергия импульса определяется как интеграл от мощности P по времени t (время действия импульса τ):

$$E = \int_0^{\tau} P(t) dt = \int_0^{\tau} P_0 \ln(kt + 1) dt = P_0 \int_0^{\tau} \ln(kt + 1) dt.$$

Делаем замену переменной и пересчет пределов интегрирования:

$$U = kt + 1, \\ dU = k dt.$$

Используя значения U и dU , получим:

$$E = P_0 \int_1^{k\tau+1} \frac{1}{k} \ln U dU = \frac{P_0}{k} \int_1^{k\tau+1} \ln U dU.$$

Из таблицы интегралов (см. например [5]) находим: $\int \ln U dU = U \ln U - U$.

Таким образом,

$$E = \frac{P_0}{k} (U \ln U - U) \Big|_1^{k\tau+1} = \frac{P_0}{k} [(k\tau + 1) \ln(k\tau + 1) - (k\tau + 1) - 1 \ln 1 + 1] = \\ = \frac{P_0}{k} [(k\tau + 1) \ln(k\tau + 1) - k\tau].$$

Вычислим энергию импульса, подставив в полученную формулу числовые значения. Получим $E = 0,4$ Дж.

Задача 2

Определить зависимость от времени температуры тонкой пластины, нагреваемой излучением равномерно по объему, если мощность излучения зависит от времени $P = P(t)$, коэффициент отражения пластины R , а начальная температура пластины T_n .

Решение

Известно, что увеличение температуры тела на величину ΔT требует затраты энергии $\Delta E_{\text{погл}} = cm\Delta T$, где m – масса тела, c – его теплоемкость.

Перейдем к бесконечно малым приращениям: $dE_{\text{погл}} = cmdT$. Отсюда $dT = dE / cm$. Энергия и мощность связаны между собой соотношением: $dE = P_{\text{погл}} dt$, где $P_{\text{погл}} = P(1 - R)$ – поглощенная мощность. Таким образом: $dT = P_{\text{погл}} dt / cm = ((1 - R)P / cm) dt$.

Температуру пленки находим, интегрируя последнее выражение:

$$\int_{T_n}^T dT = \int_0^t \frac{(1 - R)P}{cm} dt. \quad \text{Отсюда} \quad T(t) = \int_0^t \frac{(1 - R)P}{cm} dt + T_n. \quad \text{Если} \quad P = \text{const}, \quad \text{то}$$

$$T = \frac{1 - R}{cm} Pt + T_n.$$

Задача 3

Определить мощность излучения, падающего на поверхность, если облученная область имеет вид круга радиуса r_0 и плотность мощности излучения в ней распределена по закону $q = q(\rho, \varphi)$, где ρ, φ – полярные координаты в плоскости поверхности.

Решение

Мощность излучения, падающего на поверхность, есть интеграл плотности мощности излучения по данной поверхности (в данном случае – по кругу), т.е.

$$P = \int_{S_0} q dS = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} q(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$

Для гауссова распределения плотности мощности излучения

$$q = q_0 e^{-\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^2},$$

$$P = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} q_0 e^{-\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^2} \rho d\rho d\varphi = 2\pi q_0 \int_0^{r_0} e^{-\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^2} \rho d\rho.$$

Проведем замену переменной $x = -\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^2$ и пересчет пределов интегрирования. Получим:

$$P = -\pi q_0 r_0^2 \int_0^{-1} e^x dx = -\pi q_0 r_0^2 (e^{-1} - 1) = \pi q_0 r_0^2 (1 - e^{-1}).$$

Задачи для самостоятельного решения

Определить энергию импульса лазерного излучения длительностью τ , если мощность его зависит от времени следующим образом ($k, P_0, \tau, \alpha, B = const$) (1.1-1.5):

1.1. $P = kt.$

1.4. $P = k\sqrt{t}.$

1.2. $P = k(\tau - t)^2.$

1.5. $P = Bt(\tau - t).$

1.3. $P = P_0 \cos\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right).$

Определить зависимость от времени средней температуры пластины, нагреваемой импульсом лазерного излучения, если коэффициент отражения поверхности R , а мощность излучения, падающего на пластину, изменяется во времени по закону ($k, P_0, \tau, \alpha, B = const$) (1.6 -1.10):

1.6. $P = k(\tau - t).$

1.9. $P = P_0 e^{-\alpha t}.$

1.7. $P = kt^2.$

1.10. $P = Bt^2(\tau - t).$

1.8. $P = P_0 \sin\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right).$

Определить, используя полярную систему координат, мощность излучения, падающего на поверхность, если облученная область имеет вид круга радиуса r_0 и плотность мощности в ней распределена по закону (1.11-1.15):

$$1.11. q = q_0.$$

$$1.12. q = q_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{r_0^2} \right).$$

$$1.13. q = q_0 \cos \left(\frac{\pi \rho}{2 r_0} \right).$$

$$1.14. q = \begin{cases} q_0 & \leftarrow 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 & \leftarrow \pi \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$1.15. q = \begin{cases} q_0 & \leftarrow 0 \leq \varphi \leq \pi \\ \frac{q_0}{2} & \leftarrow \pi \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НА ЭКСТРЕМУМ

Теоретические сведения

1. Возрастающая и убывающая функции

Функция $f(x)$ называется неубывающей на промежутке (a, b) , если для любых величин x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), принадлежащих этому промежутку, выполняется условие:

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

Функция $f(x)$ называется невозрастающей на промежутке (a, b) , если для любых величин x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), принадлежащих этому промежутку, выполняется условие:

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Если неравенства строгие ($<$ или $>$), функция $f(x)$ называется строго возрастающей или строго убывающей.

Неубывающая, невозрастающая, убывающая и возрастающая функции называются монотонными.

Все дальнейшие рассуждения будут относиться к функциям, дифференцируемым на некотором интересующем нас промежутке.

Для того чтобы узнать, возрастающая функция или убывающая, нужно найти ее производную и определить ее знак. Если функция $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ такова, что:

$f'(x) \geq 0$, то $f(x)$ – неубывающая на $[a, b]$.

$f'(x) > 0$, то $f(x)$ – строго возрастающая на $[a, b]$.

$f'(x) \leq 0$, то $f(x)$ – невозрастающая на $[a, b]$.

$f'(x) < 0$, то $f(x)$ – строго убывающая на $[a, b]$.

Связь между знаком производной и направлением изменения функции геометрически очевидна, если вспомнить, что производная представляет собой тангенс угла наклона касательной к графику функции. Если касательная направлена вверх (тангенс угла наклона положителен), то и кривая направлена вверх (функция возрастает). Если касательная направлена вниз (тангенс угла наклона отрицателен), то и кривая направлена вниз (функция убывает) (см. рис. 2.1.). Однако при этом в отдельных точках производная может быть равна нулю (т.е. касательная горизонтальна). Например, функция $y = x^3$ возрастающая, но в точке $x = 0$ функция становится равной нулю (см. рис.2.2).

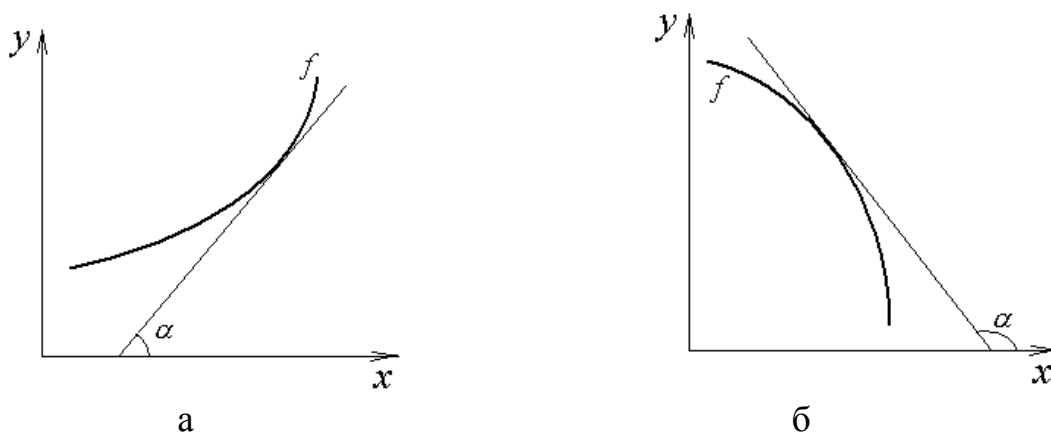


Рис.2.1. Возрастающая (а) и убывающая (б) функции.

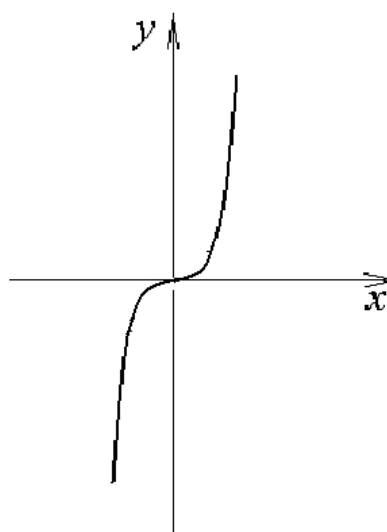


Рис.2.2. Функция $y = x^3$.

2. Экстремумы функции

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале (a, b) . Говорят, что $f(x)$ имеет максимум в точке x_0 , принадлежащей этому интервалу, если ее значение во всех остальных точках некоторой окрестности точки x_0 , также принадлежащей интервалу (a, b) , меньше или равно значению функции в точке x_0 :

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Если $f(x) \geq f(x_0)$, говорят, что функция имеет минимум в точке x_0 .

Если $f(x) > f(x_0)$ или $f(x) < f(x_0)$, то говорят, что функция имеет строгий минимум и максимум в точке x_0 соответственно.

Максимумы и минимумы функции называются также ее экстремумами.

Экстремум функции возможен в так называемых критических точках, т.е. в точках, в которых производная функции равна нулю, обращается в бесконечность или не существует.

Приведем некоторые примеры (см. рис.2.3):

а) Функция $y = x^2$. В точке $x = 0$ $y' = 0$.

б) Функция $y = x^{2/3}$. При $x \rightarrow 0$ $y' \rightarrow \infty$.

в) Функция $y = |x|$. $y'(0+) = 1$, $y'(0-) = -1$, $y'(0)$ не существует.

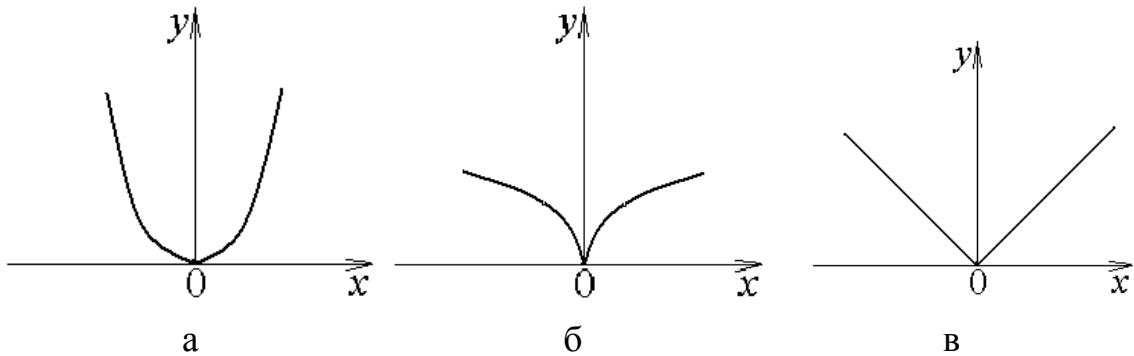


Рис. 2.3. Графики функций а) $y = x^2$, б) $y = x^{2/3}$, в) $y = |x|$.

Заметим, что критическая точка не всегда является точкой экстремума. Например, производная функции $y = x^3$ в точке $x = 0$ равна нулю, однако экстремума в этой точке нет (см. рис.2.2).

Для того чтобы определить, является ли критическая точка точкой экстремума и какой это будет экстремум (максимум или минимум), нужно определить, меняет ли знак производная функции, проходя через критическую точку. Пусть на экстремум проверяется точка x_0 . Возможны следующие ситуации:

- | | |
|-----------|-----------|
| $x < x_0$ | $x > x_0$ |
|-----------|-----------|
1. $f'(x) > 0$ ---- $f'(x) < 0$ – максимум.
 2. $f'(x) < 0$ ---- $f'(x) > 0$ – минимум.
 3. $f'(x) > 0$ ---- $f'(x) > 0$ – экстремума нет (функция возрастает).
 4. $f'(x) < 0$ ---- $f'(x) < 0$ – экстремума нет (функция убывает).

Существует еще один способ определения экстремума, который пригоден лишь для тех критических точек, в которых производная функции равна нулю. Если в такой точке x_0 функция имеет вторую производную $f''(x)$ и она отрицательна, то в точке x_0 функция имеет максимум, если положительна – минимум.

Таким образом, процедура исследования функции $f(x)$ на экстремум заключается в следующем:

1. Определяем $f'(x)$.
2. Находим критические точки.
- 3а. Определяем знак $f'(x)$ по обе стороны вблизи критической точки и определяем наличие или отсутствие максимума и минимума в точке.

или

3б. Если критические точки x_0 такие, что $f'(x) = 0$ при $x = x_0$, находим $f''(x = x_0)$ и определяем по ее знаку наличие минимума или максимума в точке.

Примеры решения задач

Задача 1

На стеклянной подложке нанесена тонкая металлическая пленка. Пучок лазерного излучения фокусируется на поверхности пленки, нагревая и расплавляя ее в очень маленькой (микронной) области. Под действием лазерного излучения в расплавленной области пленки образуется микроскопическое отверстие (см. рис. 2.4.). На поверхности действуют силы поверхностного натяжения. Свободная энергия поверхностей раздела сред 0, 1, 2 (воздух, пленка, подложка) на единицу площади поверхности: δ_{12} , δ_{10} , δ_{20} . Определить, что произойдет с этим отверстием после его возникновения.

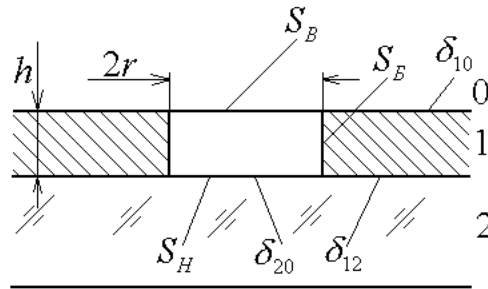


Рис. 2.4. К задаче 1.

Решение

Для того чтобы определить, будет отверстие увеличиваться или уменьшаться, необходимо определить изменение энергии системы в зависимости от радиуса отверстия. Любая система будет стремиться к такому состоянию, при котором ее энергия наименьшая. Определим величину ΔE , на которую изменилась поверхностная энергия системы пленка - подложка после образования в ней отверстия радиуса r . Суммируя свободную энергию по образовавшимся (или ликвидировавшимся) при получении отверстия поверхностям, получим:

$$\Delta E = S_B \delta_{10} + S_H \delta_{20} - S_B \delta_{10} - S_H \delta_{12}.$$

Здесь $S_B = 2\pi r h$, $S_H = S_B = \pi r^2$. Подставив значения S_B , S_H , S_B в выражение для ΔE , получим:

$$\Delta E = 2\pi r h \delta_{10} - \pi r^2 (\delta_{10} + \delta_{12} - \delta_{20}).$$

Для исследования функции $\Delta E(r)$ найдем ее производную:

$$dE / dr = 2\pi h \delta_{10} - 2\pi r (\delta_{10} + \delta_{12} - \delta_{20}).$$

Определим критические точки:

$$dE / dr = 0 \text{ при } r = r_{кр} = h \delta_{10} / (\delta_{10} + \delta_{12} - \delta_{20}).$$

Определим знак второй производной функции $\Delta E(r)$ в точке $r_{кр}$: $d^2E/dr^2 = -2\pi(\delta_{10} + \delta_{12} - \delta_{20}) < 0$, т.к. величина $\delta_{10} + \delta_{12} - \delta_{20} > 0$ представляет собой поверхностное натяжение пленки на подложке. Таким образом, $r_{кр}$ – точка максимума. График функции $\Delta E(r)$ приведен на рис. 2.5.

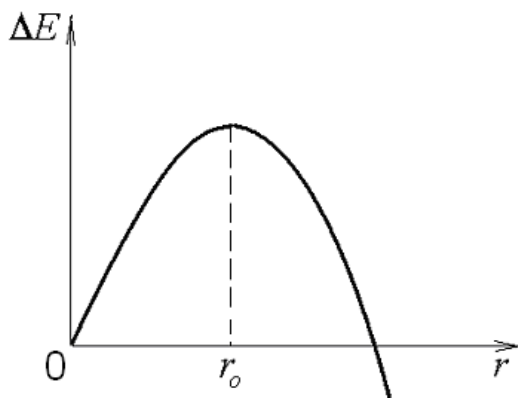


Рис. 2.5. Зависимость поверхностной энергии системы пленка - подложка от радиуса образовавшегося в пленке отверстия.

Итак, если в расплавленной пленке образовалось отверстие радиуса $r < r_{кр}$, то оно будет схлопываться, а если радиуса $r > r_{кр}$ – расти (до начала кристаллизации расплава).

Задача 2

На поверхности пластины происходит осаждение вещества из пара (например, при лазерном осаждении пленки). Молекулы (атомы) пара соединяются друг с другом, образуя зародыши будущей пленки, так называемые кластеры. В зависимости от энергии кластера, он стремится распасться или расти, образуя пленку. Размер кластера определяет зернистость будущей пленки. Определить наименьший размер образующихся кластеров.

Решение

При образовании кластера из частиц пара происходит изменение энергии системы кластер - подложка на величину (см. рис. 2.6)

$$\Delta E = S_{10}\delta_{10} + S_{12}\delta_{12} - S_{12}\delta_{20} - VG,$$

где V – объем кластера, G – удельная энергия объемообразования (определяет связь частиц в кластере). Остальные обозначения как в предыдущей задаче.

Значения S_{10} , S_{12} и V зависят от геометрической формы и размеров кластера. Форма кластера определяется физическими свойствами материалов подложки и наносимой пленки. В общем случае (для произвольной формы кластера) $S_{10} = a_1r^2$, $S_{20} = a_2r^2$, $V = a_3r^3$, где a_1 , a_2 , a_3 — коэффициенты, зависящие от формы кластера, Таким образом:

$$\Delta E = a_1r^2\delta_{10} + a_2r^2(\delta_{12} - \delta_{20}) - a_3r^3G.$$

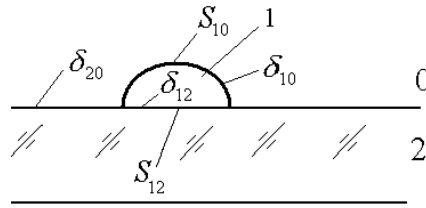


Рис. 2.6. К задаче 2.

Для исследования функции $\Delta E(r)$ найдем ее производную:

$$dE/dr = 2a_1r\delta_{10} + 2a_2r(\delta_{12} - \delta_{20}) - 3a_3r^2G.$$

Критические точки:

1) $r_1 = 0$.

2) $r_2 = 2(a_1\delta_{10} + a_2(\delta_{12} - \delta_{20}))/3a_3G$. При $a_1\delta_{10} + a_2(\delta_{12} - \delta_{20}) > 0$ (когда осаждение возможно) r_2 – точка максимума. Значение r_1 (точка минимума) не важно для нас при решении настоящей задачи. Значение r_2 определяет размер критического кластера $r_{кр} = r_2$: при образовании кластера размером $r < r_{кр}$ он является неустойчивым и распадается, при $r > r_{кр}$ кластер устойчив, он стремится расти. Величина $r_{кр}$ определяет минимальную зернистость образующейся пленки. График зависимости представлен на рис. 2.7.

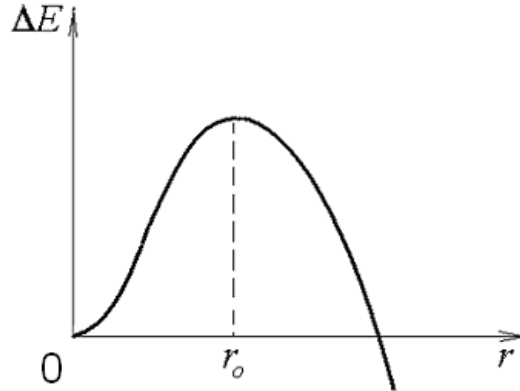


Рис. 2.7. Зависимость энергии системы кластер - подложка от размера кластера.

Задача 3

Температура нагретого тела после его облучения лазерным импульсом, в результате остывания при теплоотводе, падает как $T_1 = T_{01}(1 - t/t_0)$, где $t = 0$ – момент окончания импульса, нагревающего тело. В момент $t = t_u$ включается новый импульс, который дает дополнительное изменение температуры тела $T_2 = T_{02}[\exp(\alpha(t - t_u)) - 1]$. Определить, как будет изменяться температура во время действия второго импульса.

Решение

После начала действия второго импульса температура тела T равна (см. рис. 2.7): $T = T_1 + T_2 = T_{01}(1 - t/t_0) + T_{02}[\exp(\alpha(t - t_u)) - 1]$. Для исследования функции $T(t)$ определим ее производную по времени:

$$T'_t = -T_{01}/t_0 + T_{02}\alpha \exp(\alpha(t - t_u)).$$

Найдем критические точки. $T'_t = 0$ при $T_{01}/t_0 = T_{02}\alpha \exp(\alpha(t - t_u))$. Отсюда:

$$t_{кр} = t_u + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{T_{01}}{T_{02}\alpha t_0}.$$

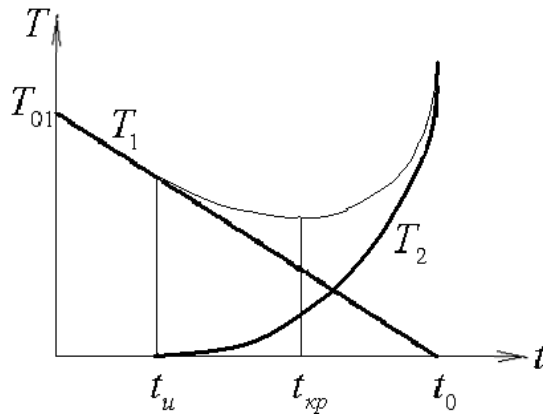


Рис. 2.8. К задаче 3.

Вторая производная от температуры по времени всегда положительна: $T''_{tt} = T_{02}\alpha^2 \exp(\alpha(t - t_u)) > 0$. Поэтому точка $t_{кр}$ является точкой минимума функции $T(t)$.

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Пучок лазерного излучения фокусируется на поверхности пленки толщиной h , свободно расположенной в пространстве. Определить критический радиус образуемого отверстия.

На поверхности пластины происходит осаждение вещества из пара с образованием кластера. Форма кластера следующая (h – высота, R – радиус шара, r – радиус основания кластера) (2.2-2.8):

- 2.2. Полушарие. Определить $R_{кр}$.
- 2.3. Шаровой сегмент, $h = r/2$. Определить $R_{кр}$.
- 2.4. Шаровой сегмент, $h = r/2$. Определить $h_{кр}$.
- 2.5. Шаровой сегмент, $h = r/2$. Определить $r_{кр}$.
- 2.6. Шаровой сегмент, $h = (3/2)R$. Определить $R_{кр}$.
- 2.7. Шаровой сегмент, $h = (3/2)R$. Определить $h_{кр}$.

2.8. Шаровой сегмент, $h = (3/2)R$. Определить $r_{кр}$.

2.9. При столкновении молекул пара в пространстве образуется зародыш капли сферической формы. Определить его критический размер.

Температура нагретого тела падает по закону $T_1 = T_1(t)$. В момент $t = t_u$ включается новый импульс, который дает дополнительное изменение температуры тела $T_2 = T_2(t)$. Определить момент времени t^* ($t^* > t_u$), когда температура $T = T_1 + T_2$ минимальна (2.10-2.12):

$$2.10. T_1 = Ae^{-\alpha t}, T_2 = B[e^{b(t-t_u)} - 1].$$

$$2.11. T_1 = A(1 - \sqrt{t}), T_2 = B(t - t_u).$$

$$2.12. T_1 = A(1 - \sqrt{t}), T_2 = B(t^2 - t_u^2).$$

РАЗДЕЛ 3

ПРИМЕНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ. ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теоретические сведения

Интеграл вероятностей и дополнительный интеграл вероятностей

Интегралом вероятностей называется функция, определяемая выражением:

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt. \quad (3.1)$$

Дополнительным интегралом вероятностей называется функция, определяемая выражением:

$$\operatorname{erfc} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt. \quad (3.2)$$

Интеграл вероятностей и дополнительный интеграл вероятностей связаны соотношением:

$$\operatorname{erfc} z = 1 - \operatorname{erf} z. \quad (3.3)$$

Графики этих функций выглядят следующим образом:

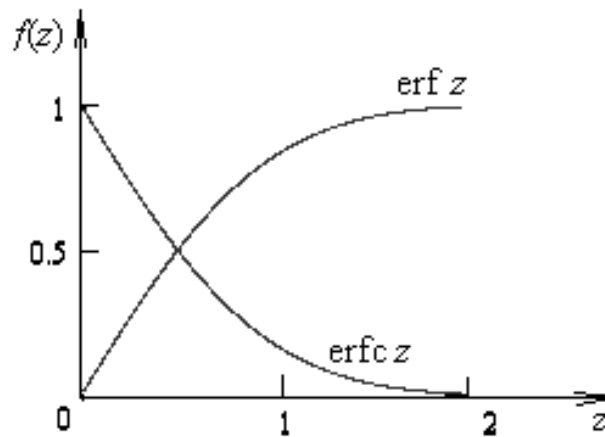


Рис. 3.1. Интегралы вероятностей.

Значения в нуле: $\operatorname{erf} 0 = 0$, $\operatorname{erfc} 0 = 1$.

Значения на бесконечности: $\operatorname{erf} z \rightarrow 1$, $\operatorname{erfc} z \rightarrow 0$.

Значения функции для отрицательных значений аргумента:

$$\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z). \quad (3.4)$$

Для функции $\operatorname{erfc} z$, используя выражения (3.3) и (3.4), получим:

$$\operatorname{erfc}(-z) = 1 - \operatorname{erf}(-z) = 1 + \operatorname{erf} z = 1 + (1 - \operatorname{erfc} z) = 2 - \operatorname{erfc} z. \quad (3.5)$$

Разложение в ряд для малых значений аргумента:

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots \right). \quad (3.6)$$

Здесь $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. По определению $0! = 1$.

Разложение в ряд функции $\operatorname{erfc} z$ можно получить, подставив (3.6) в (3.3):

$$\operatorname{erfc} z = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)}. \quad (3.7)$$

Разложение функции в ряд используется в тех случаях, когда необходимо вычислить приближенно значение этой функции при значениях $z \ll 1$. Например,

$$\operatorname{erf} 0,1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(0,1 - \frac{0,1^3}{3} + \frac{0,1^5}{5} - \dots \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (0,1 - 0,0003 + \dots).$$

Таким образом, ряд сходится быстро, и во многих случаях можно ограничиться первым членом.

При больших значениях аргумента $z > 1$ можно воспользоваться асимптотическим разложением:

$$\sqrt{\pi} z e^{z^2} \operatorname{erfc} z \approx 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{(2z^2)^m}. \quad (3.8)$$

Остаток ряда меньше 1-го отбрасываемого члена и имеет тот же знак.

Во многих случаях достаточно использовать приближение:

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} z e^{z^2} \operatorname{erfc} z &\approx 1, \\ \operatorname{erfc} z &\approx \frac{1}{z\sqrt{\pi}} e^{-z^2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Значение функции $\operatorname{erfc} z$ для больших значений z может быть вычислено с использованием соотношений (3.3) и (3.9).

Производные: $\frac{d}{dz} \operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}$, $\frac{d}{dz} \operatorname{erfc} z = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}$.

2. Кратные интегралы вероятностей

Кратными интегралами вероятностей называются функции, определяемые выражениями:

$$\begin{aligned} \operatorname{ierfc} z &= \int_z^{\infty} \operatorname{erfc} t dt, \\ \operatorname{i}^2 \operatorname{erfc} z &= \int_z^{\infty} \int_z^{\infty} \operatorname{erfc} t dt, \end{aligned} \quad (3.10)$$

.....

$$i^n \operatorname{erfc} z = \int_z^\infty i^{n-1} \operatorname{erfc} t dt .$$

По определению принимается: $i^0 \operatorname{erfc} z = \operatorname{erfc} z$, $i^{-1} \operatorname{erfc} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}$.

Графики кратных интегралов вероятностей выглядят следующим образом:

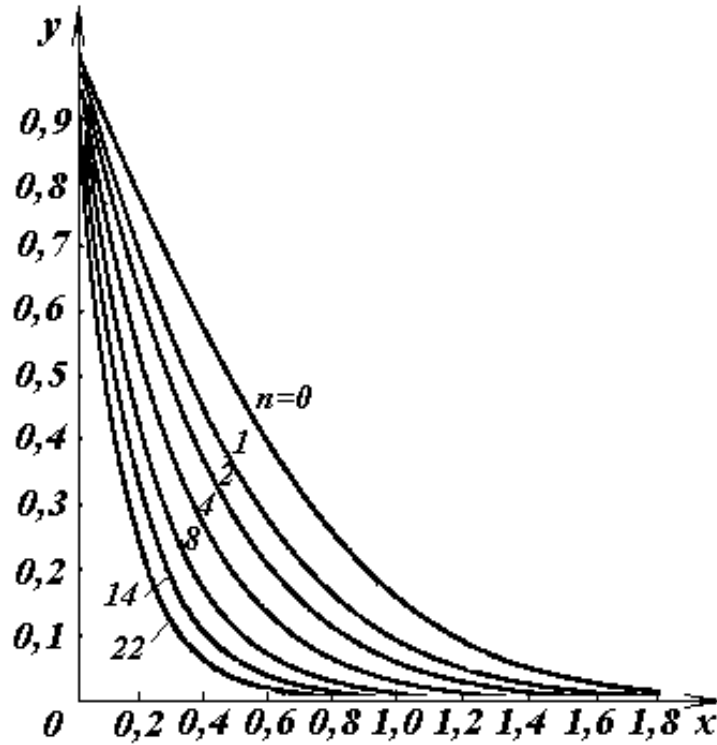


Рис. 3.2. Кратные интегралы вероятностей $f(x) = 2^n \Gamma((n/2) + 1) i^n \operatorname{erfc} x$.

Значения в нуле:

$$i^n \operatorname{erfc} 0 = \frac{1}{\Gamma((n/2) + 1)}, \quad (3.11)$$

где $\Gamma((n/2) + 1)$ – гамма-функция. В частности, $i \operatorname{erfc} 0 = 1/\sqrt{\pi}$, $i^2 \operatorname{erfc} 0 = 1/4$.

Значения на бесконечности: $i^n \operatorname{erfc} z \rightarrow 0$.

Рекуррентные соотношения позволяют выразить кратные интегралы $i^n \operatorname{erfc} z$ друг через друга, понижая значение n . Для $n=1$ и $n=2$:

$$i \operatorname{erfc} z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} - z \operatorname{erfc} z, \quad (3.12)$$

$$i^2 \operatorname{erfc} z = \frac{1}{4}(\operatorname{erfc} z - 2z i \operatorname{erfc} z) = \frac{1}{4} \left[(1 + 2z^2) \operatorname{erfc} z - \frac{2}{\sqrt{\pi}} z e^{-z^2} \right].$$

(3.13)

Для произвольных значений n рекуррентные соотношения можно найти в справочнике [8].

Производные:

$$\frac{d}{dz} i^n \operatorname{erfc} z = -i^{n-1} \operatorname{erfc} z, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

Интегралы вероятностей присутствуют во многих выражениях, являющихся решениями теплофизических задач нагревания вещества лазерным излучением, например в следующих.

1. На поверхность металла или другого сильно поглощающего материала падает пучок лазерного излучения. Радиус облученной области достаточно велик: $r_0 \gg \sqrt{at}$ (где a – температуропроводность материала, t – время воздействия излучения). Плотность мощности падающего излучения q_0 постоянна во времени и по сечению пучка. При этом распределение температуры по глубине материала имеет вид:

$$T = \frac{2q_0 A \sqrt{at}}{k} i \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}}, \quad (3.15)$$

где A – поглощательная способность материала, k – его теплопроводность, t – время от начала воздействия, ось y направлена от поверхности вглубь материала. Здесь и везде дальше температуру отсчитываем от начального значения. Заметим, что представление о достаточно большом размере облученной области ($r_0 \gg \sqrt{at}$) имеет относительный характер, в частности, для импульсов наносекундной длительности размер облученной области $r_0 > 1$ мкм является достаточно большим.

2. Та же ситуация, что и в примере 1, но радиус облученной области r_0 может быть любой, в том числе достаточно малый. Температура на поверхности в центре облученной области:

$$T = \frac{2q_0 A \sqrt{at}}{k} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - i \operatorname{erfc} \frac{r_0}{2\sqrt{at}} \right). \quad (3.16)$$

3. Пучок лазерного излучения падает на поверхность тонкой металлической пленки, находящейся на прозрачной диэлектрической подложке. Плотность мощности излучения постоянна во времени и по сечению пучка. Облученная область имеет форму круга, причем его радиус $r_0 \ll \sqrt{at}$. Время воздействия излучения $t < 10^{-7}$ с. Распределение температуры в пленке имеет вид:

$$T = \frac{2q_0At}{\rho ch} \begin{cases} i^2 \operatorname{erfc} \frac{r-r_0}{2\sqrt{at}} & \text{при } r \geq r_0 \\ \frac{1}{2} - i^2 \operatorname{erfc} \frac{r_0-r}{2\sqrt{at}} & \text{при } r \leq r_0 \end{cases} \quad (3.17)$$

где r – радиус в полярной системе координат на поверхности пленки, полюс которой совпадает с центром облученной области, c – теплоемкость материала пленки, h – толщина пленки, ρ – плотность пленки.

4. Лазерное хирургическое лечение злокачественной опухоли производится путем введения зонда в ее центр, через который с помощью оптического волокна подается лазерное излучение. Конец зонда излучает световую энергию равномерно во все стороны. Распределение температуры в биоткани имеет также сферическую симметрию и определяется зависимостью (исключая область $r \ll \sqrt{at}$):

$$T = \frac{P}{4\pi kr} \operatorname{erfc} \frac{r}{2\sqrt{at}}. \quad (3.18)$$

где P – мощность излучения, r – радиус в сферической системе координат, центр которой совпадает с центром симметрии распределения интенсивности излучения.

Примеры решения задач

Задача 1

На поверхности обрабатываемого материала с помощью цилиндрической линзы освещена полоса. Распределение плотности мощности в направлении поперек полосы гауссово – определяется зависимостью $q = q_0 \exp(-ax^2)$. Определить, какая часть всей мощности заключена в области $\left[-\frac{1}{\sqrt{a}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{a}}\right]$.

Решение

Найдем полную мощность излучения:

$$P_\Sigma = \int_{-\infty}^{\infty} q l dx = q_0 l \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx,$$

где l — длина полосы. Подынтегральная функция четная, поэтому:

$$P_\Sigma = 2q_0 l \int_0^{\infty} \exp(-ax^2) dx.$$

Делая замену переменной $z = x\sqrt{a}$, получим: $P_\Sigma = \frac{q_0 l \sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \operatorname{erfc} 0 = \frac{q_0 l \sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$.

Найдем мощность излучения, заключенную в области $\left[-\frac{1}{\sqrt{a}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{a}}\right]$:

$$P_{\frac{1}{\sqrt{a}}} = \int_{-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}} q l dx = 2q_0 l \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \exp(-ax^2) dx.$$

$$P_{\frac{1}{\sqrt{a}}} = \frac{2q_0 l}{\sqrt{a}} \int_0^1 e^{-z^2} dz = \frac{q_0 l \sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-z^2} dz = \frac{q_0 l \sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \operatorname{erf}(1).$$

Определим, какая часть всей мощности заключена в области $\left[-\frac{1}{\sqrt{a}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{a}}\right]$:

$$\frac{P_{\frac{1}{\sqrt{a}}}}{P_{\Sigma}} = \operatorname{erf}(1) \approx 0,84.$$

Задача 2

Пучок лазерного излучения падает на поверхность твердого тела. Плотность мощности излучения постоянна во времени и по облучаемой поверхности. Размер облученной области $r_0 \ll \sqrt{a\tau}$. Длительность импульса излучения $\tau = 10^{-4}$ с, температуропроводность материала $a = 10^{-4}$ м²/с. Определить глубину, на которой температура тела составляет 0,9 от значения температуры на его поверхности в момент окончания импульса.

Решение

Температуру на поверхности и внутри тела определим из выражения (3.15). Температура на поверхности:

$$T_{\text{пов}} = \frac{2q_0 A \sqrt{a\tau}}{k} \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Температура на глубине y :

$$T(y) = \frac{2q_0 A \sqrt{a\tau}}{k} \operatorname{ierfc} \frac{y}{2\sqrt{at}}.$$

Отношение температуры на глубине y к температуре на поверхности материала:

$$\frac{T(y)}{T_{\text{пов}}} = \frac{\frac{2q_0 A \sqrt{a\tau}}{k} \operatorname{ierfc} \frac{y}{2\sqrt{at}}}{\frac{2q_0 A \sqrt{a\tau}}{k} \frac{1}{\sqrt{\pi}}} = \sqrt{\pi} \operatorname{ierfc} \frac{y}{2\sqrt{at}}.$$

По условию $\frac{T(y)}{T_{\text{пов}}} = 0,9$, т.е. $\operatorname{ierfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} = \frac{0,9}{\sqrt{\pi}} \approx 0,508$.

По таблице функции $\text{ierfc } z$ (например [8]) определяем значение аргумента z , для которого $\text{ierfc } z = 0,508$: $z \approx 0,1$. Подставляя выражение для аргумента, в нашем случае $z = y/2\sqrt{a\tau}$, находим:

$$y \approx 0,1 \cdot 2\sqrt{a\tau} = 0,2 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 20 \text{ мкм}.$$

Задача 3

Те же условия, что и в задаче 2. Выразить через элементарные функции зависимость температуры от координаты y для малых значений y (вблизи поверхности) $y \ll \sqrt{a\tau}$.

Решение

Воспользуемся рекуррентной формулой (3.12) и разложением функции $\operatorname{erfc} z$ в ряд для малых значений аргумента:

$$\operatorname{erfc} z \approx 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} z.$$

$$\text{Отсюда: } i \operatorname{erfc} z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} - z \operatorname{erfc} z \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} - z + \frac{2}{\sqrt{\pi}} z^2.$$

Подставим полученное выражение в формулу для определения температуры (3.15), считая $z = y/2\sqrt{a\tau}$:

$$T_{\text{нов}} = \frac{2q_0 A \sqrt{a\tau}}{k} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{4a\tau}\right) - \frac{y}{2\sqrt{a\tau}} + \frac{y^2}{2\sqrt{\pi a\tau}} \right]. \quad (3.19)$$

Если требуется выразить температуру в виде степенного ряда, нужно разложить экспоненту в ряд и ограничиться членом той же степени, что и в разложении интеграла вероятности.

Разложение функции в ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2 f''(0)}{2!} + \dots + \frac{x^n f^{(n)}(0)}{n!} + \dots$$

$$\text{В нашем случае } f(x) = e^{-x}, \quad x = \frac{y^2}{4a\tau}.$$

$$\text{Следовательно, } \exp\left(-\frac{y^2}{4a\tau}\right) = 1 - x + \dots \approx 1 - \frac{y^2}{4a\tau}.$$

Полученное выражение подставляем в (3.19).

Задачи для самостоятельного решения

На поверхности материала с помощью цилиндрической линзы освещена полоса. Распределение плотности мощности излучения в направлении поперек полосы определяется зависимостью: $q = q_0 \exp(-ax^2)$, где $a = 10^2 \text{ мм}^{-2}$ (3.1-3.2).

3.1. Определить ширину области $2x_0$, в которой заключено 90% всей мощности излучения.

3.2. Определить ширину области $2x_0$, в которой заключено 50% всей мощности излучения.

Пучок лазерного излучения падает на поверхность материала. Плотность мощности излучения постоянна во времени и по облучаемой поверхности. Радиус облученной области $r_0 \propto \sqrt{a\tau}$, длительность импульса излучения $\tau = 10^{-4}$ с, температуропроводность материала $a = 10^{-4}$ м²/с (3.3-3.6).

3.3. Определить глубину, на которой температура составляет 0,1 от температуры поверхности.

3.4. Определить глубину, на которой температура составляет 0,5 от температуры поверхности.

3.5. Выразить приближенно в виде степенного ряда зависимость температуры от координаты y для малых значений y ($y \propto \sqrt{a\tau}$).

3.6. Выразить приближенно через элементарные функции, используя асимптотическое разложение интеграла вероятностей, зависимость температуры от координаты y для больших значений y ($y \propto \sqrt{a\tau}$).

На тонкую металлическую пленку, находящуюся на прозрачной диэлектрической подложке, падает пучок лазерного излучения. Облученная область имеет вид круга радиуса r_0 ($r_0 \propto \sqrt{a\tau}$). Плотность мощности излучения постоянна в пределах облученной области и во времени, длительность импульса излучения $\tau = 10^{-8}$ с, температуропроводность материала $a = 10^{-4}$ м²/с (3.7-3.12).

3.7. Построить качественно график зависимости $T(r)$, где r – расстояние от центра облученной области.

3.8. Определить температуру на границе облученной области.

3.9. Определить отношение температуры на границе облученной области к температуре в ее центре.

3.10. Определить, на каком расстоянии от края облученной области температура составит 10% от значения температуры в ее центре.

3.11. Определить, на каком расстоянии от края облученной области температура составит 40% от значения температуры в ее центре.

3.12. Определить, на каком расстоянии от края облученной области температура составит 90% от значения температуры в ее центре.

На поверхность материала падает пучок лазерного излучения с постоянной плотностью мощности во времени и по сечению пучка. Облученная область имеет вид круга радиуса r_0 . Рассмотрим два случая: $r_0 = r_{01}$ и $r_0 = r_{02}$. Определить отношение температуры в центре облученной области радиуса r_{01} к температуре в центре облученной области радиуса r_{02} (3.13-3.15).

$$3.13. r_{01} = \sqrt{a\tau}, r_{02} = 10\sqrt{a\tau}.$$

$$3.14. r_{01} = 2\sqrt{a\tau}, r_{02} = 10\sqrt{a\tau}.$$

$$3.15. r_{01} = 2\sqrt{a\tau}, r_{02} = 10\sqrt{a\tau}.$$

Производится внутритканевое облучение биоткани с помощью оптического зонда, распределение интенсивности излучения которого имеет сферическую симметрию (3.16 - 3.17).

3.16. Выразить через элементарные функции температуру биоткани на большом расстоянии от зонда $r \gg \sqrt{a\tau}$, используя асимптотическое разложение интеграла вероятностей.

3.17. Построить качественно график функции $T(r)$.

РАЗДЕЛ 4

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ
РЕШЕНИЕ

Теоретические сведения

1. Однородные и неоднородные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением n -го порядка называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (4.1)$$

где $a_1(x), \dots, a_n(x)$, $f(x)$ – некоторые функции. Если $f(x) = 0$, то уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (4.2)$$

называется однородным дифференциальным уравнением, соответствующим данному неоднородному.

Из теории дифференциальных уравнений известно, что если можно найти общее решение уравнения (4.2) y_0 и частное решение уравнения (4.1) y_c , то общее решение уравнения (4.1) будет следующим:

$$y = y_0 + y_c.$$

Если коэффициенты уравнения (4.1) $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ – постоянные, то уравнение (4.1) примет вид:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x). \quad (4.3)$$

Оно называется линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. В дальнейшем нам потребуются линейные дифференциальные уравнения с порядком не выше второго. Остановимся на них подробнее.

2. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть дано линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0. \quad (4.4)$$

Будем искать его решение в виде $y = e^{\lambda x}$. Подставив y в уравнение (4.4), получим:

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0. \quad (4.5)$$

Поскольку $e^{\lambda x} \neq 0$, то уравнение (4.5) равносильно следующему:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) называется характеристическим уравнением уравнения (4.4). Это квадратное уравнение и поэтому всегда имеет два корня:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}.$$

Возможны следующие случаи:

а) λ_1, λ_2 – различные вещественные корни характеристического уравнения;

б) $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ – комплексно-сопряженные корни;

в) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ – корень вещественный двукратный.

Общее решение уравнения (4.4) в этих случаях соответственно будет иметь вид:

а) $y_0 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x};$

б) $y_0 = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x);$

в) $y_0 = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$

Если рассматривать запись комплексных чисел в экспоненциальной форме, то случаи (а) и (б) можно объединить в один – (а).

Комплексные линейные дифференциальные уравнения решаются аналогично. При этом рассматриваются 2 случая: а) два различных корня характеристического уравнения λ_1 и λ_2 , при этом $y_0 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, б) двукратный корень $y_0 = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$.

Таким образом, мы можем найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения.

Если нужно найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения, то по этой методике находим общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения, после чего нужно найти частное решение неоднородного уравнения.

3. Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами со специальной правой частью

В приложениях часто приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями, правая часть которых имеет один из следующих видов:

а) $f(x) = P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n от x ;

б) $f(x) = P_n(x)e^{gx}$, где g – вещественное число;

в) $f(x) = P_n(x)e^{gx} \cos \gamma x$ или $f(x) = P_n(x)e^{gx} \sin \gamma x$, где g, γ – вещественные числа.

Частное решение в этих случаях соответственно ищется в виде:

а) $y_u = Q_n(x)x^k$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами, k – кратность нулевых корней характеристического уравне-

ния (4.6) (т.е. если $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, то $y_u = Q_n(x)x^2$; если $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, то $y_u = Q_n(x)x$; если $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, то $y_u = Q_n(x)$).

б) $y_u = Q_n(x)e^{gx}x^k$, где k – кратность корней характеристического уравнения $\lambda = g$.

в) $y_u = [Q_n \cos \gamma x + R_n \sin \gamma x]e^{gx}x^k$, где $Q_n(x)$, $R_n(x)$ – многочлены степени n с неопределенными коэффициентами, k – кратность корней характеристического уравнения $\lambda = g + i\gamma$ (для уравнений 2-го порядка $k = 0$ или $k = 1$).

Частное решение уравнения (4.3) с произвольной правой частью ищется методом неопределенных коэффициентов [3].

Решение линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка существенно проще. Оно может быть получено непосредственно интегрированием уравнения, разделением переменных или с использованием характеристического уравнения.

При решении дифференциальных уравнений часто бывает целесообразно использовать принцип суперпозиции. Пусть в дифференциальном уравнении

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (4.7)$$

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Пусть для уравнений

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f_1(x), \quad (4.8)$$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f_2(x) \quad (4.9)$$

известны решения: y_1 для уравнения (4.8) и y_2 для уравнения (4.9). Тогда решением уравнения (4.7) будет $y = y_1 + y_2$.

Линейные дифференциальные уравнения используются при решении многих задач лазерных технологий, в особенности при анализе распределения температуры в облучаемом материале и изменении распределения температуры во времени. В частности, применение интегральных преобразований (например, преобразования Лапласа, как это показано в разделе б) приводит линейное уравнение теплопроводности к обычному линейному дифференциальному уравнению, которое может быть решено рассматриваемыми здесь методами.

Примеры решения задач

Задача 1

Найти общее решение линейного дифференциального уравнения $y'' + 8y' - 9y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0$.

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -9$.

Корни различные вещественные, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид (а): $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-9x}$.

Задача 2

Найти общее решение линейного дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$.

Корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-10} = -1 \pm 3i$.

Корни комплексно-сопряженные, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид (б): $y_0 = e^{-x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Задача 3

Найти общее решение линейного дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$.

Корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2} = -1$.

Корень один, вещественный двукратный, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид (в): $y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

Задача 4

Найти общее решение линейного дифференциального уравнения $y'' - y = x^2 + x$.

Решение

Однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному: $y'' - y = 0$. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 1 = 0$.

Корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

Корни различные вещественные, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Ищем частное решение неоднородного уравнения. Его правая часть имеет специальный вид (а), поэтому частное решение ищем в виде: $y_u = Q_n(x)x^k$.

Многочлен в правой части неоднородного уравнения второй степени, поэтому $n = 2$. Корни характеристического уравнения ненулевые, поэтому $k = 0$. Получаем $y_u = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$. Постоянные b_0, b_1, b_2 находим, подставляя в неоднородное дифференциальное уравнение функцию y_u и ее вторую производную $y_u = 2b_2$: $2b_2 - b_2 x^2 - b_1 x - b_0 = x^2 + x$.

Приравнивая коэффициенты при равных степенях x , находим: $b_2 = -1$, $b_1 = -1$, $2b_2 - b_0 = 0$, откуда $b_0 = 2b_2 = -2$.

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения: $y_u = -x^2 - x - 2$.

Общее решение: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 - x - 2$.

Задача 5

Найти общее решение линейного дифференциального уравнения $y'' + y = e^x$.

Решение

Однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному: $y'' + y = 0$. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 1 = 0$.

Корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2} = \pm i$.

Корни комплексно-сопряженные, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Ищем частное решение неоднородного уравнения. Его правая часть имеет специальный вид (б), поэтому частное решение ищем в виде: $y_q = Q_n(x)e^x x^k$.

Многочлен в правой части неоднородного уравнения нулевой степени, поэтому $n = 0$. Среди корней характеристического уравнения нет равного 1, поэтому $k = 0$. Получаем $y_q = be^x$. Постоянную b находим, подставляя в неоднородное дифференциальное уравнение функцию y_q и ее вторую производную $y_q = be^x$: $be^x + be^x = e^x$.

Отсюда находим: $b = 1/2$. Таким образом, частное решение неоднородного уравнения: $y_q = \frac{1}{2}e^x$.

Общее решение: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x$.

Задача 6

Найти общее решение линейного дифференциального уравнения $y'' + y' + y = -13 \sin 2x$.

Решение

Однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному: $y'' + y' + y = 0$.

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

Корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Корни комплексно - сопряженные, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид (б): $y_0 = e^{-x/2} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$.

Ищем частное решение неоднородного уравнения. Его правая часть имеет специальный вид (в), поэтому частное решение ищем в виде: $y_q = [Q_n \cos 2x + R_n \sin 2x] e^{sx} x^k$.

Многочлен в правой части неоднородного уравнения нулевой степени, поэтому $n = 0$. Коэффициент при показателе экспоненты $g=0$. Среди корней характеристического уравнения нет равного $g + i\gamma = 2i$, поэтому $k=0$. Получаем $y_u = b_1 \cos 2x + b_2 \sin 2x$.

Постоянные b_1 и b_2 находим, подставляя в неоднородное дифференциальное уравнение y_u и его производные $y_u' = -2b_1 \sin 2x + 2b_2 \cos 2x$ и $y_u'' = -4b_1 \cos 2x - 4b_2 \sin 2x$.

Приравнивая коэффициенты членов, содержащих $\sin 2x$ и $\cos 2x$, находим:

$$\begin{cases} -4b_1 + 2b_2 + b_1 = 0 \\ -4b_2 - 2b_1 + b_2 = -13. \end{cases}$$

Откуда $b_1 = 2$, $b_2 = 3$. Таким образом, частное решение неоднородного уравнения: $y_u = 2 \cos 2x + 3 \sin 2x$.

$$\text{Общее решение: } y = e^{-x/2} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + 2 \cos 2x + 3 \sin 2x.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение дифференциального уравнения (4.1-4.18).

4.1. $y'' + y' = 0$.

4.2. $y'' + y' + y = 0$.

4.3. $y'' + k^2 y = 0$.

4.4. $y'' + 2y' + y = 0$.

4.5. $y'' - y = 0$.

4.6. $y'' - 5y' + 6y = 0$.

4.7. $y'' + 3y' + 2y = 0$.

4.8. $y'' + y = 0$.

4.9. $y'' - y = -x$.

4.10. $y'' - 2y' + y = 1$.

4.11. $y'' + y = 2 \sin x$.

4.12. $y'' + y = \sin x$.

4.13. $y'' - y = x$.

4.14. $y'' - y = -3x$.

4.15. $y'' + y = 4 \sin x$.

4.16. $y'' + y = 2e^x + 1$.

4.17. $y'' + y = 1$.

4.18. $y'' - y = x^2$.

РАЗДЕЛ 5

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.
ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Теоретические сведения

1. Уравнение теплопроводности. Закон Фурье

Уравнением теплопроводности называется дифференциальное уравнение в частных производных для функции $T(x, y, z, t)$ следующего вида:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = f(x, y, z, t), \quad (5.1)$$

где $a = \text{const}$.

Уравнение дополняется начальными и граничными условиями. Физический смысл этого уравнения следующий: пусть в некоторой области Ω вещество однородно и задано распределение температуры вещества в области Ω в момент $t = 0$. Начиная с этого момента, в области Ω действует тепловой источник мощностью $f(x, y, z, t)$ и известна температура или тепловой поток на границе области Ω . Тогда функция $T(x, y, z, t)$ определяет температуру в каждой точке области Ω в любой момент времени $t \geq 0$. Коэффициент a называется теплопроводностью вещества.

Формирование температурного поля в веществе происходит за счет теплопроводности (кондукции). (Мы знаем три механизма теплопередачи: кондукция – в твердом теле, конвекция – потоками жидкости или газа и излучение.) Если функция $f \equiv 0$, то уравнение называется однородным, а изменение температурного поля происходит вследствие начального неравномерного распределения температуры или наличия тепловых потоков на границе области.

Если функция $f(x, y, z, t) \neq 0$, то уравнение называется неоднородным и в области Ω действует источник тепла мощностью

$$f(x, y, z, t) = \frac{Q(x, y, z, t)}{\rho c}.$$

Здесь $Q(x, y, z, t)$ – объемная плотность мощности энергетического источника, ρ и c – соответственно плотность и теплоемкость материала. Физический смысл величин f и Q разный. Мощность теплового источника $f(x, y, z, t)$ определяет, с какой скоростью в точке (x, y, z) возрастала бы температура, если бы тепло не отводилось в стороны за счет теплопроводности. Величина f имеет размерность К/с. Объемная плотность мощности энергетического источника определяет, какая мощность выделяется в элементарном объеме $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ при стремлении $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ к нулю. Величина Q имеет размерность Вт/м³.

Поток тепла через некоторую поверхность S определяется выражением:

$$q = -k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) \Big|_S, \quad (5.2)$$

где n – нормаль к поверхности, k – теплопроводность вещества, которая связана с температуропроводностью соотношением: $k = \rho c a$.

Размерности величин следующие: $k = [\text{Вт/м} \cdot \text{К}]$, $\rho = [\text{кг/м}^3]$, $c = [\text{Дж/кг} \cdot \text{К}]$, $a = [\text{м}^2/\text{с}]$.

Выражение (5.2) выражает закон теплопроводности Фурье. На основании его и выводится уравнение теплопроводности.

Необходимость постановки и решения уравнения теплопроводности возникает в конкретных задачах исследования воздействия лазерного излучения на вещество для определения температуры объекта воздействия, темпа изменения температуры как во время воздействия, так и после его окончания (при лазерной закалке, инициировании структурных изменений в стеклоподобных материалах и т.п.), пространственного распределения и градиентов температуры.

Уравнение теплопроводности в виде (5.1) может быть использовано для описания нагревания тел непрерывным излучением или наносекундными и более длинными импульсами. Для описания нагревания тел короткими (пикосекундными, фемтосекундными импульсами) необходимо использовать специальные физико-математические подходы, при которых отдельно рассматриваются температура электронов и решетки.

2. Длина теплопроводности

Запишем уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{Q(x, y, z, t)}{\rho c}. \quad (5.3)$$

Представим функцию Q в виде $Q(x, y, z, t) = Q_m \varphi(x, y, z, t)$, где Q_m – наибольшее значение функции $Q(x, y, z, t)$. В уравнении (5.3) перейдем к безразмерным величинам: $\bar{t} = \frac{t}{\tau}$, $\bar{T} = T \frac{\rho c}{Q_m \tau}$, где τ – длительность действия источника.

Подставив эти значения в (5.3), получим:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} - a\tau \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \right) = \varphi(x, y, z, \bar{t}).$$

Выберем безразмерные координаты таким образом, чтобы уравнение теплопроводности преобразовалось к виду:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} - \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} \right) = \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}). \quad (5.4)$$

Очевидно, что безразмерные координаты будут следующие:

$$\bar{x} = \frac{x}{\sqrt{a\tau}}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\sqrt{a\tau}}, \quad \bar{z} = \frac{z}{\sqrt{a\tau}}.$$

Аналогично могут быть приведены к безразмерному виду в тех же безразмерных переменных граничные и начальные условия. Итак, мы получили масштаб для переменных x, y, z, t, T , в котором для различных веществ (с разными физическими свойствами), для различных значений мощности источника и длительности его воздействия температурное распределение будет одним и тем же и будет зависеть лишь от характера распределения источника и граничных и начальных условий. Отсюда следует следующий важный вывод: характерный размер, определяющий, на какое расстояние распространяется тепло вследствие теплопроводности, есть $\sqrt{a\tau}$. Этот характерный размер называется длиной теплопроводности. В реальных задачах она определяет размер прогретой области, толщину прогретого слоя и т.п.

Характерные значения длины теплопроводности при лазерном нагреве составляют от десятых и сотых долей микрона при облучении соответственно металлов ($a \approx 10^{-5} - 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$) и диэлектриков ($a \approx 10^{-7} - 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$) импульсами наносекундного диапазона до миллиметров и сантиметров при использовании непрерывного излучения и временах экспозиции порядка секунд и минут (что используется при обработке стекла или при внутритканевых лазерных хирургических операциях).

3. Частные случаи уравнения теплопроводности

В конкретных задачах уравнение теплопроводности может быть упрощено. Рассмотрим следующие примеры:

1) $\partial T / \partial t = 0$. Уравнение теплопроводности описывает стационарный температурный режим, при котором распределение температуры в области Ω остается неизменным во времени. При этом уравнение теплопроводности принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{Q(x, y, z)}{k}. \quad (5.5)$$

В реальных задачах такой режим наступает спустя некоторое время от начала воздействия $t_{\text{ст}}$ – время установления стационарного режима. Стационарный режим нагревания имеет место в случаях, когда теплоотвод из облученной области настолько велик, что полностью компенсирует приток энергии от лазерного излучения. В частности, при облучении поверхности сильно поглощающего (например, металлического) материала стационарный режим нагревания реализуется когда время с начала облучения $t \approx r_0^2 / a$, где r_0 – радиус облученной области. Таким образом, время установления стационарного режима зависит от размера облученной области: при $r_0 = 100 \text{ мкм}$ $t_{\text{ст}} \approx 10 r_0^2 / a \approx 10^{-3} \text{ с}$, при $r_0 = 1 \text{ мкм}$ $t_{\text{ст}} \approx 10^{-7} \text{ с}$.

2) Тепловой поток в одном направлении равен нулю, например, $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$.

Это означает, что тепло распространяется в области Ω в плоскости xOy и параллельных ей плоскостях. Уравнение теплопроводности в этом случае принимает вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \frac{Q(x, y, t)}{\rho c}. \quad (5.6)$$

Примеры, когда осуществляется такой режим теплопроводности:

а) нагревание фольги в некоторой области. Температуру по толщине фольги можно считать одинаковой и тепло распространяется в плоскостях, параллельных поверхности фольги.

б) нагревание детали больших размеров с плоской поверхностью источником тепла в виде длинной полосы. Тепло распространяется вглубь детали и в направлении поперек полосы.

3) Тепловой поток идет только в одном направлении (например, x), а в двух других (y и z) его составляющая равна нулю. Уравнение теплопроводности в этом случае имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{Q(x, t)}{\rho c}. \quad (5.7)$$

Примеры:

а) нагревание фольги источником в виде длинной полосы;

б) нагревание детали больших размеров по всей ее плоской поверхности (тепловой поток идет по нормали к поверхности). Такой режим теплопроводности реализуется также в области, находящейся вблизи центра облученной области и поверхности облучаемого тела, если размер облученной области $r_0 \ll \sqrt{at}$. В центральной области тепловые потоки направлены от поверхности и задача теплопроводности может быть поставлена как плоская, в одномерном виде. Заметим, что радиус r_0 при этом велик лишь относительно – он составляет несколько микрометров или миллиметров, в зависимости от длительности воздействия.

4) Равномерное нагревание тела, тепловые потоки отсутствуют. Уравнение теплопроводности при этом переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{Q(t)}{\rho c}. \quad (5.8)$$

Пример – нагревание фольги по всей ее поверхности источником большого размера.

4. Граничные и начальные условия

Решение дифференциального уравнения включает определенное количество произвольных постоянных. В решении уравнения (5.3) их будет 7. Одно получается при интегрировании по времени, по два – при двукратном интегрировании по каждой координате. Для определения произвольных постоянных служат начальные условия и граничные условия, по два для каждой координаты. Способ задания граничных условий зависит от характера контакта тела с окружающей средой. В классической теории теплопроводности различают граничные условия 1-го, 2-го и 3-го рода.

1. На границе области Ω поддерживается заданная температура $T|_S = \varphi_1$, где S – поверхность, ограничивающая тело, а функция φ_1 может быть функцией времени и функцией координат, например:

$$T|_{x=L} = \varphi(y, z, t).$$

2. На границе области Ω задан тепловой поток: $-k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) \Big|_S = \varphi_2$, где n – нормаль к поверхности S . Если $\varphi_2 > 0$, то тепловой поток идет внутрь тела из окружающей среды, если $\varphi_2 < 0$ – из тела в окружающую среду.

3. На границе области Ω происходит теплоотвод за счет конвекции (поток пропорционален разности температур тела и окружающей среды T_c):

$$-k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) \Big|_S - \gamma (T|_S - T_c) = 0,$$

где γ – коэффициент теплоотвода.

При высоких температурах возможен также теплоотвод излучением.

Рассмотрим граничные условия применительно к задачам воздействия лазерного излучения. Характерной особенностью здесь является кратковременность воздействия: в большинстве случаев длительность воздействия составляет величину от 10^{-8} до 10^{-3} с. Оценим длину теплопроводности $\sqrt{a\tau}$. Среди различных веществ самой большой температуропроводностью обладают металлы: $10^{-5} - 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$. Значит, при действии импульсного лазерного излучения $\sqrt{a\tau}$ изменяется у металлов от 0,3 мкм до 0,3 мм. Тепло распространяется от источника на расстояние $\square (2 \div 3) \sqrt{a\tau}$ (т.е. на 1 мкм и 1 мм соответственно). Следовательно, если расстояние от края облученной области до края детали больше этого значения, то размеры детали не влияют на ее нагревание и математически размеры такой детали считают бесконечными, что существенно упрощает решение. При непрерывном лазерном воздействии необходимо строго учитывать время экспозиции и анализировать возможность реализации различных механизмов теплоотвода: теплопроводностного, конвекционного, излучением.

Другая особенность постановки граничных условий проявляется в задачах об импульсном лазерном воздействии и связана с интенсивностью воздействия. Она заключается в следующем. За время действия импульса излучения тепло-

отвод с поверхности тела в окружающую среду несоизмеримо меньше теплового потока, получаемого телом от лазерного излучения. Поэтому можно считать, что по всей поверхности тела, за исключением областей, где действуют источники или стоки тепла, тепловой поток равен нулю:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_s = 0.$$

Действие источника тепла мы рассмотрим позже. Сток тепла (т.е. источник отрицательной мощности) имеет место там, где есть затраты тепла (например фазовый переход). Тепловой поток на границе тела в области стока имеет вид:

$$k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) \Big|_s = \rho L V, \quad (5.9)$$

где ρ – плотность вещества, L – удельные энергетические затраты (Дж/кг), V – скорость фазового перехода (м/с). Такая запись может использоваться, если перемещение поверхности фазового перехода незначительное по сравнению с длиной теплопроводности.

5. Источник

Нагревание тела может происходить как под действием объемного источника тепла (расположенного внутри тела), так и под действием поверхностного источника (расположенного на его поверхности). При падении излучения на поверхность тела его поглощение, как правило, определяется законом Бугера, согласно которому

$$q = q(x=0) \exp(-\alpha x),$$

где q – плотность мощности излучения на расстоянии x от поверхности, $\alpha = 1/\delta$ – показатель поглощения, δ – глубина проникновения света в вещество (расстояние, на котором плотность мощности излучения уменьшается в e раз). Итак, величина δ характеризует протяженность источника тепла в облучаемом теле по глубине. Поскольку распределение температуры характеризуется величиной $\sqrt{a\tau}$, то при $\delta \ll \sqrt{a\tau}$ источник тепла можно считать поверхностным, а при $\delta \geq \sqrt{a\tau}$ – источник объемный. При облучении металлов глубина проникновения света составляет величину $\delta \ll 10^{-7}$ м, так что для наносекундных и более длинных импульсов, как и для непрерывного излучения, источник тепла в металле всегда можно считать поверхностным. Для диэлектриков в каждом конкретном случае необходимо рассматривать соотношение глубины проникновения излучения и длины теплопроводности в зависимости от теплофизических и оптических свойств материала и длины волны и длительности импульса излучения. Рассмотрим подробнее случаи поверхностного и объемного источников тепла.

1) $\delta \ll \sqrt{a\tau}$ – источник поверхностный. В этом случае математически задача ставится следующим образом: уравнение теплопроводности – однородное ($Q = 0$ – объемные источники отсутствуют). На границе облучаемой поверхности

(например $x = 0$) действует поверхностный источник тепла, что учитывается в граничном условии как тепловой поток внутрь тела:

$$-k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = q_0 (1 - R),$$

где q_0 – плотность мощности падающего излучения, R – коэффициент отражения.

2) $\delta \geq \sqrt{a\tau}$ – источник объемный. Уравнение теплопроводности неоднородное. На границе поверхностный источник отсутствует:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0.$$

Определим объемную плотность мощности источника Q . Для простоты будем считать пучок лазерного излучения параллельным. Рассмотрим в теле элементарный объем на расстоянии x от облучаемой поверхности.

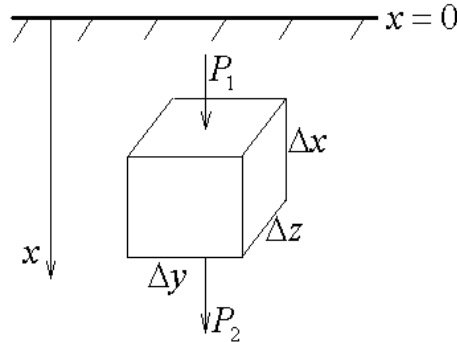


Рис. 5.1. К рассмотрению объемного источника.

Мощность излучения, поступающая в этот объем: $P_1 = q(x) \Delta y \Delta z$. Мощность, выходящая из него: $P_2 = q(x + \Delta x) \Delta y \Delta z$. Мощность, остающаяся в нем: $\Delta P = P_1 - P_2 = [q(x) - q(x + \Delta x)] \Delta y \Delta z$. Мощность на единицу объема (объемная плотность мощности источника): $Q = \Delta P / \Delta x \Delta y \Delta z = [q(x) - q(x + \Delta x)] / \Delta x$. Переходя в пределе к бесконечно малым приращениям, получим:

$$Q = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [q(x) - q(x + \Delta x)] / \Delta x = -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Подставив значения $q = q_0 (1 - R) \exp(-\alpha x)$, получим:

$$Q = q_0 \alpha (1 - R) \exp(-\alpha x).$$

Заметим, что в ряде случаев тепловой источник можно считать объемным даже если глубина проникновения излучения очень мала $\delta \ll \sqrt{a\tau}$. Такая ситуация имеет место в случаях, когда распределение температуры по толщине тела близко к равномерному, в частности, для тонких пленок и пластин, толщина которых $h < \sqrt{a\tau}$, и тонких проволок диаметром $d < \sqrt{a\tau}$. При этом принимают, что поглощенная энергия равномерно распределена по толщине тела, на-

пример, тепловой источник в пленке в правой части уравнения теплопроводности (5.6) $Q = \frac{q_0 A}{h}$, где q_0 – плотность мощности излучения, падающего на поверхность, A – поглощательная способность.

Аналогично, сток энергии (отрицательный источник, например, затраты тепла на плавление или теплоотвод в окружающую среду) для тонких пленок и проволок тоже может быть математически принят объемным. В качестве примера рассмотрим теплоотвод в окружающее пространство при нагреве тонкой пластины. Тепловой поток с единицы площади поверхности $q_T = -\gamma(T - T_c)$, где γ – коэффициент теплоотвода, T – температура пластины, T_c – температура среды. Общая мощность потерь $P_T = 2Sq_T$, где S – площадь одной поверхности пластины. Таким образом,

$$Q = \frac{P_T}{Sh} = -\frac{2\gamma(T - T_c)}{h}. \quad (5.10)$$

6. Уравнение теплопроводности в других системах координат

В цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = \frac{Q(r, \varphi, z, t)}{\rho c}. \quad (5.11)$$

Обычно источник, начальное и граничные условия имеют осевую симметрию (не зависят от φ). При этом уравнение (5.11) упрощается:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = \frac{Q(r, z, t)}{\rho c}. \quad (5.12)$$

В сферической системе координат, если источник, начальные и граничные условия имеют сферическую симметрию:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{Q(r, t)}{\rho c}. \quad (5.13)$$

В качестве граничных условий по координате r обычно берут условие на границе тела: $\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_s = 0$ и в центре тела $\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$.

7. Уравнение теплопроводности при движущемся источнике тепла

Если источник тепла движущийся (например, при лазерной обработке детали сканирующим пучком), целесообразно перейти от обычной системы координат, связанной с нагреваемым телом, к подвижной системе координат, связанной с подвижным источником тепла.

Пусть источник движется прямолинейно с постоянной скоростью V вдоль оси x системы координат x, y, z , связанной с нагреваемым телом. Координаты подвижной системы: $\chi = x - Vt$, $\eta = y$, $\xi = z$. Используя эти соотношения, вычислим производные температуры:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \chi^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial t} = -V \frac{\partial T}{\partial \chi}.$$

Таким образом, уравнение теплопроводности в подвижной системе координат принимает вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{V}{a} \frac{\partial T}{\partial \chi} + \frac{Q(\chi, \eta, \xi)}{k} = 0. \quad (5.14)$$

Примеры решения задач

Задача 1

Облученная область на поверхности тела представляет собой круг радиуса r_0 . Написать упрощенное дифференциальное уравнение, граничные и начальные условия для вычисления температуры в центре круга. Размеры тела: $l_x, l_y \ll \sqrt{a\tau}$, толщина тела $h \ll \sqrt{a\tau}$, $r_0 \ll \sqrt{a\tau}$, $\delta \ll \sqrt{a\tau}$.

Решение

Проанализируем условия задачи:

- 1) $\delta \ll \sqrt{a\tau}$ – источник поверхностный;
- 2) $l_x, l_y \ll \sqrt{a\tau}$ – можно считать, что размеры тела бесконечны;
- 3) $h \ll \sqrt{a\tau}$ – можно считать, что толщина тела h бесконечна;
- 4) $r_0 \ll \sqrt{a\tau}$ – тепловые потоки вблизи центра облученной области направлены перпендикулярно поверхности. Следовательно, уравнение теплопроводности одномерное. Таким образом

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \\ T|_{t=0} = 0, \quad -k \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = q_0 (1 - R), \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\infty} = 0.$$

Задача 2

Облученная область на поверхности тела представляет собой круг радиуса r_0 . Написать упрощенное дифференциальное уравнение, граничные и начальные условия для вычисления температуры в центре круга. Размеры тела: $l_x, l_y \ll \sqrt{a\tau}$, толщина тела $h \ll \sqrt{a\tau}$, $r_0 \ll \sqrt{a\tau}$, $\delta \ll \sqrt{a\tau}$.

Решение

Проанализируем условия задачи:

- 1) $\delta \ll \sqrt{a\tau}$ – источник объемный;
- 2) $l_x, l_y \ll \sqrt{a\tau}$ – можно считать, что размеры тела l_x, l_y бесконечны;
- 3) $h \ll \sqrt{a\tau}$ – толщину тела нужно считать конечной;

4) $r_0 \ll \sqrt{a\tau}$ – тепловые потоки вблизи центра облученной области направлены перпендикулярно поверхности. Следовательно, уравнение теплопроводности одномерное. Таким образом

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{q_0(1-R)\alpha e^{-\alpha z}}{\rho c},$$

$$T|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=h} = 0.$$

Задача 3

Производится облучение тела в форме прямоугольного параллелепипеда с размерами l_x, l_y, h . Облученная область расположена посередине его верхней грани и имеет вид прямоугольника со сторонами $2b_1$ и $2b_2$, $l_x, l_y \ll \sqrt{a\tau}$, $h \ll \sqrt{a\tau}$, $\delta \ll \sqrt{a\tau}$. Написать уравнение теплопроводности, начальное и граничные условия.

Решение

Проанализируем условия задачи:

- 1) $\delta \ll \sqrt{a\tau}$ – источник поверхностный;
- 2) $l_x, l_y, h \ll \sqrt{a\tau}$ – конечность размеров тела необходимо учитывать;
- 3) относительно размеров облученной области информации нет, следовательно, задача трехмерная. Таким образом

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0,$$

$$T|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\frac{l_x}{2}} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=-\frac{l_x}{2}} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=\frac{l_y}{2}} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=-\frac{l_y}{2}} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=h} = 0,$$

$$-k \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = \begin{cases} q_0(1-R) & \text{при } |x| \leq b_1 \text{ и } |y| \leq b_2, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Задача 4

Облученная область на поверхности тела имеет вид круга радиуса r_0 . У поверхности облученной области происходит фазовый переход (плавление) с удельной энергией L и скоростью V . Предполагается, что перемещение границы фазового перехода незначительно и его можно не учитывать, а параметры материала неизменны. $l_x, l_y \ll \sqrt{a\tau}$, $h \ll \sqrt{a\tau}$, $\delta \ll \sqrt{a\tau}$. Написать уравнение теплопроводности.

Решение

Проанализируем условия задачи:

- 1) $\delta \ll \sqrt{a\tau}$ – поглощение поверхностное;
- 2) $l_x, l_y \gg \sqrt{a\tau}$ – можно считать, что размеры тела l_x, l_y бесконечны;
- 3) $h \ll \sqrt{a\tau}$ – толщину тела необходимо учитывать;
- 4) относительно r_0 информации нет, следовательно, задача трехмерная;
- 5) сток энергии на поверхности $z = 0$ в облученной области. Таким образом

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = 0,$$

$$T|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=\infty} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0,$$

$$-k \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = \begin{cases} q_0(1-R) - \rho V L & \text{при } r \leq r_0, \\ 0 & \text{при } r > r_0. \end{cases}$$

Задача 5

Производится сканирование поверхности тонкой стеклокерамической пластины достаточно больших размеров пучком лазерного излучения. Облученная область имеет вид узкой длинной полосы длиной L , направление сканирования – перпендикулярно длинной стороне. Определить распределение температуры в квазистационарном режиме нагревания при наличии теплоотвода в окружающую среду с обеих сторон пластины (см. рис.5.2).

Решение

Проанализируем условия задачи:

- 1) пластина тонкая, следовательно распределение температуры по толщине пластины можно считать равномерным;
- 2) размеры пластины будем считать бесконечными;
- 3) источник движущийся, следовательно целесообразно использовать подвижную систему координат;
- 4) облученная область имеет вид узкой длинной полосы, поэтому будем считать источник линейным;
- 5) задача одномерная;
- 6) сток энергии происходит вследствие теплоотвода в окружающую среду.

Уравнение теплопроводности в подвижной системе координат (5.13) для одномерного случая имеет вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \chi^2} + \frac{V}{a} \frac{\partial T}{\partial \chi} + \frac{Q(\chi)}{k} = 0,$$

где $\chi = x - Vt$, а сток тепла определяется выражением (5.10) $Q = -\frac{2\gamma T}{h}$.

Значение температуры T отсчитываем от начальной температуры, равной температуре среды T_c . Таким образом, уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \chi^2} + \frac{V}{a} \frac{\partial T}{\partial \chi} - \frac{2\gamma}{kh} T = 0.$$

(5.15)

Это обыкновенное линейное однородное уравнение 2-го порядка. Решение

его ищем в виде: $T = e^{\frac{V\chi}{2a}} f(\chi)$. Продифференцируем это выражение:

$$\frac{dT}{d\chi} = e^{\frac{V\chi}{2a}} \left(f' - \frac{V}{2a} f \right), \quad \frac{d^2 T}{d\chi^2} = -\frac{V}{2a} e^{\frac{V\chi}{2a}} \left(f' - \frac{V}{2a} f \right) + e^{\frac{V\chi}{2a}} \left(f'' - \frac{V}{2a} f' \right).$$

Подставив полученное выражение в дифференциальное уравнение (5.15) получим дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами для функции $f(\chi)$:

$$f'' - n^2 f = 0,$$

где $n = \sqrt{\left(\frac{V}{2a}\right)^2 + \frac{2\gamma}{kh}}$. Решение этого уравнения (см. раздел 4):

$f = Be^{n\chi} + De^{-n\chi}$, где B и D – постоянные. Таким образом, температура пластины:

$T = Be^{\left(\frac{n-V}{2a}\right)\chi} + De^{-\left(\frac{n+V}{2a}\right)\chi}$. Для того, чтобы определить постоянные B и D рассмотрим температуру T отдельно в областях перед движущимся источником (область 1, $T = T_1$) и за ним (область 2, $T = T_2$):

$$T_1 = B_1 e^{\left(\frac{n-V}{2a}\right)\chi} + D_1 e^{-\left(\frac{n+V}{2a}\right)\chi} \quad \text{для } \chi > 0$$

$$T_2 = B_2 e^{\left(\frac{n-V}{2a}\right)\chi} + D_2 e^{-\left(\frac{n+V}{2a}\right)\chi} \quad \text{для } \chi < 0.$$

Граничные условия: при $\chi = \infty$ $T_1 = 0$, следовательно, $B_1 = 0$; при $\chi = -\infty$ $T_2 = 0$, следовательно, $D_2 = 0$; при $\chi = 0$ $T_1 = T_2$, следовательно, $D_1 = B_2 = C$. Таким образом,

$$T_1 = Ce^{-\left(\frac{n+V}{2a}\right)\chi}, \quad T_2 = Ce^{\left(\frac{n-V}{2a}\right)\chi}. \quad (5.16)$$

Коэффициент C определим из условия действия линейного движущегося источника мощностью $P = P_0 A$ (P_0 – мощность лазерного излучения, A – поглощательная способность пластины) в соответствии с законом Фурье. Поглощенная мощность лазерного излучения расходуется на теплоотвод в две стороны от движущегося источника. Мощность потока тепла от источника в область 1 (перед

движущимся источником): $P_1 = -k \frac{dT_1}{d\chi} \Big|_{\chi=0} \cdot S$, в область 2 (за движущимся источ-

ником): $P_2 = -k \frac{dT_2}{d(-\chi)} \Big|_{\chi=0} \cdot S$, где $S = Lh$ - площадь сечения пластины в области

действия источника. При этом $P_1 + P_2 = P = P_0 A$. Подставив значения производных

от температур T_1 и T_2 (5.16), получим: $P_1 = kS \left(n + \frac{V}{2a} \right) C$, $P_2 = kS \left(n - \frac{V}{2a} \right) C$,

$P = 2nkSC$. Отсюда $C = \frac{P}{2nkS}$ и решение задачи имеет вид:

$$T_1 = \frac{P_0 A}{2nkLh} e^{-\left(n + \frac{V}{2a}\right)\chi}, \quad T_2 = \frac{P_0 A}{2nkLh} e^{-\left(n - \frac{V}{2a}\right)\chi},$$

где $\chi = x - Vt$, $n = \sqrt{\left(\frac{V}{2a}\right)^2 + \frac{2\gamma}{kh}}$.

Задачи для самостоятельного решения

Поверхность тела, имеющего поперечные размеры $l_x = 10\text{мм}$, $l_y = 10\text{мм}$ и толщину h , облучается импульсом излучения Nd:YAG лазера длительностью 10^{-3} с. Облученная область представляет собой круг радиуса r_0 . Написать упрощенное дифференциальное уравнение, граничные и начальные условия для вычисления температуры в центре облученной области, если (5.1 – 5.6):

5.1. Облучаемое тело – алюминиевая фольга толщиной $h = 0,2$ мм ($a = 0,87 \cdot 10^{-4}$ м²/с, $\delta \approx 0,1$ мкм), $r_0 = 30$ мкм.

5.2. Облучаемое тело – алюминиевая фольга толщиной $h = 0,2$ мм ($a = 0,87 \cdot 10^{-4}$ м²/с, $\delta \approx 0,1$ мкм), $r_0 = 3$ мм.

5.3. Облучаемое тело – алюминиевая пластина толщиной $h = 3$ мм ($a = 0,87 \cdot 10^{-4}$ м²/с, $\delta \approx 0,1$ мкм), $r_0 = 30$ мкм.

5.4. Облучаемое тело – пластмассовая пластина толщиной $h = 3$ см ($a = 0,8 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\delta \approx 2$ мм), $r_0 = 0,5$ мм.

5.5. Облучаемое тело – пластмассовая пластина толщиной $h = 1$ мм ($a = 0,8 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\delta \approx 2$ мм), $r_0 = 0,5$ мм.

5.6. Облучаемое тело – пластмассовая пластина толщиной $h = 2$ мм ($a = 0,8 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\delta \approx 2$ мм), $r_0 = 20$ мкм.

Облученная область на поверхности тела представляет собой круг радиуса r_0 . Написать уравнение теплопроводности, граничные и начальные условия, если (5.7 - 5.12):

5.7. Облучаемое тело – алюминиевая пластина толщиной $h = 3$ мм достаточно больших размеров ($a = 0,87 \cdot 10^{-4}$ м²/с, $\delta \approx 0,1$ мкм). Стационарный режим облучения Nd:YAG лазером непрерывного действия.

5.8. Облучаемое тело – алюминиевая пластина толщиной $h = 3$ мм и размерами $l_x = l_y = 3$ см ($a = 0,87 \cdot 10^{-4}$ м²/с, $\delta \approx 0,1$ мкм). Используется импульс излучения Nd:YAG лазера длительностью 10^{-3} с.

5.9. Облучаемое тело – алюминиевая фольга толщиной $h = 0,2$ мм и размерами $l_x = l_y = 3$ см ($a = 0,87 \cdot 10^{-4}$ м²/с, $\delta \approx 0,1$ мкм). Используется импульс излучения Nd:YAG лазера длительностью 10^{-3} с.

5.10. Облучаемое тело – пластмассовая пластина толщиной $h = 1$ мм и размерами $l_x = l_y = 3$ см ($a = 0,8 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\delta \approx 2$ мм), $r_0 = 0,5$ мм. Используется импульс излучения Nd:YAG лазера длительностью 10^{-3} с.

5.11. Облучаемое тело – пластмассовая пластина толщиной $h = 3$ см и размерами $l_x = l_y = 3$ см ($a = 0,8 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\delta \approx 2$ мм), $r_0 = 0,5$ мм. Используется импульс излучения Nd:YAG лазера длительностью 10^{-3} с.

5.12. Облучаемое тело – пластмассовая пластина толщиной $h = 5$ мм достаточно больших размеров ($a = 0,8 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\delta \approx 2$ мм). Стационарный режим облучения Nd:YAG лазером непрерывного действия.

Облученная область на поверхности тела представляет собой прямоугольник со сторонами b_1 и b_2 . Написать уравнение теплопроводности, граничные и начальное условие при облучении импульсом азотного лазера длительностью 10^{-8} с, если (5.13 - 5.15):

5.13. Облучаемое тело – фольга из хрома ($a = 0,22 \cdot 10^{-4}$ м²/с, $\delta \approx 0,1$ мкм) толщиной $h = 0,1$ мм и размерами $l_x = l_y = 4$ см.

5.14. Облучаемое тело – пленка хрома ($a = 0,22 \cdot 10^{-4}$ м²/с, $\delta \approx 0,1$ мкм) толщиной $h = 0,1$ мкм и размерами $l_x = l_y = 4$ см.

5.15. Облучаемое тело – пластина из хрома ($a = 0,22 \cdot 10^{-4}$ м²/с, $\delta \approx 0,1$ мкм) толщиной $h = 2$ мм и размерами $l_x = l_y = 4$ см.

Производится облучение объекта из стекла в форме прямоугольного параллелепипеда непрерывным излучением CO₂-лазера ($a = 0,91 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\delta \approx 10$ мкм). Облученная область расположена посередине его верхней грани и имеет вид прямоугольника со сторонами b_1 и b_2 . Написать уравнение теплопроводности, начальное и граничные условия, если (5.16 – 5.17):

5.16. Размеры верхней грани $l_x = l_y = 10$ см, толщина объекта $h = 8$ см, длительность воздействия $\tau = 3$ мин.

5.17. Размеры верхней грани $l_x = l_y = 3$ см, толщина объекта $h = 2$ мм, длительность воздействия $\tau = 1$ с.

Производится облучение тела из пластмассы ($a = 0,7 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\delta \approx 1$ мм), имеющего форму цилиндра радиуса R_0 и высотой h при длительности воздействия τ . Облученная область – круг радиуса r_0 – находится в центре верхней плоскости цилиндра. Написать уравнение теплопроводности, начальное и граничные условия, если (5.18 - 5.20):

5.18. $R_0 = 1$ см, $h = 8$ мм, $\tau = 5$ мин.

5.19. $R_0 = 1 \text{ см}$, $h = 10 \text{ см}$, $\tau = 2 \text{ мин}$.

5.20. $R_0 = 5 \text{ мм}$, $h = 2 \text{ мм}$, $\tau = 1 \text{ с}$.

Пучок излучения CO_2 -лазера падает на поверхность тела из ситалла ($\delta \approx 10 \text{ мкм}$) с поперечными размерами $l_x = l_y = 2 \text{ см}$, облученная область имеет вид круга радиуса r_0 . На поверхности в облученной области происходит фазовый переход с удельной энергией L и скоростью V . Предполагается, что перемещение границы фазового перехода можно не учитывать, а параметры тела неизменны. Написать уравнение теплопроводности, граничные и начальные условия, если (5.21 – 5.22):

5.21. Облученное тело – пластина толщиной 1 мм, длительность воздействия – 1 с.

5.22. Облученное тело – пленка толщиной 1 мкм, длительность воздействия – 10^{-3} с .

РАЗДЕЛ 6

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Теоретические сведения

1. Преобразование Лапласа и обратное преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа – это такая операция, при которой функции $f(t)$, определенной при $t > 0$, ставится в соответствие некоторая функция $F(s)$ комплексной переменной s , причем эта операция совершается посредством интегрирования:

$$F(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) f(t) dt.$$

(6.1)

Отметим, что не для каждой функции можно осуществить преобразование Лапласа, а именно, функция $f(t)$ должна быть такой, чтобы сходился интеграл

$$\int_0^{\infty} \exp(-x_0 t) f(t) dt \quad (6.2)$$

при достаточно большом x_0 (т.е. чтобы функция не росла быстрее, чем $\exp(-x_0 t)$).

Функцию $f(t)$ называют оригиналом, $F(s)$ – ее изображением. Совокупность функций $f(t)$ называют пространством оригиналов, совокупность функций $F(s)$ называют пространством изображений. Записывают $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$.

Определение функции-оригинала по ее изображению называют обращением преобразования Лапласа или обратным преобразованием Лапласа. Его можно произвести по формуле (при $t > 0$):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \exp(ts) F(s) ds. \quad (6.3)$$

На практике как прямое, так и обратное преобразование Лапласа чаще определяют по таблицам. Но так как в таблице приведены лишь основные функции, то для определения оригинала или изображения произвольной функции необходимо знать свойства преобразования Лапласа.

2. Основные свойства преобразования Лапласа

Пусть функциям $f(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ соответствуют изображения: $F(s)$, $F_1(s)$, $F_2(s)$.

Оригинал	Изображение
1. Свойство линейности	
$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(s) + bF_2(s)$
2. Теорема подобия	
$f(ct)$, ($c > 0$)	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
3. Теорема запаздывания	
$f(t-c)$, ($c > 0$)	$\exp(-cs)F(s)$
4. Теорема смещения	
$\exp(at)f(t)$	$F(s-a)$
5. Дифференцирование оригинала	
$f'(t)$	$sF(s) - f(+0)$
6. Интегрирование оригинала	
$\int_0^t f(\theta) d\theta$	$\frac{1}{s} F(s)$
7. Теорема о свертке	
$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(t-\theta)f_2(\theta) d\theta$	$F_1(s)F_2(s)$
8. Дифференцирование изображения	
$-tf(t)$	$F'(s)$
9. Интегрирование изображения	
$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(y) dy$

Необходимо обратить особое внимание на свойство 5 (дифференцирование оригинала): дифференцированию функции в пространстве оригиналов соответствует алгебраическая операция умножения в пространстве изображений. Благодаря этому свойству преобразование Лапласа является одним из основных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных, в том числе уравнения теплопроводности. Использование преобразования Лапласа позволяет уменьшить на единицу количество переменных, по которым производится дифференцирование. В частности, если в уравнении теплопроводности есть производные по времени и одной координате, то в пространстве изображений в соответствующем уравнении будет только производная по одной координате, т.е. уравнение теплопроводности будет обыкновенным дифференциальным

уравнением, которое можно решить с использованием методов, изложенных в разделе 4.

Примеры решения задач

Задача 1

Определить зависимость температуры полубесконечного сильно поглощающего тела от времени и координаты при его лазерном нагреве, если плотность мощности излучения постоянна во времени и постоянна по поверхности тела.

Решение

Уравнение теплопроводности для этого случая (см. раздел 5):

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0. \quad (6.4)$$

Граничные условия: $-k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = q_0(1-R), \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = 0.$

Начальное условие примем нулевым: $T|_{t=0} = 0$, т.е. температуру будем отсчитывать от начального значения.

Запишем задачу в пространстве изображений Лапласа: $\mathcal{L}(T) = \bar{T}$, $\mathcal{L}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = s\bar{T}$, $\mathcal{L}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}$, $\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2}$, $\mathcal{L}(q_0(1-R)) = \frac{q_0(1-R)}{s}$ (т.к. единичной функции в пространстве изображений Лапласа соответствует функция $1/s$). Таким образом, изображение уравнения (6.4) по Лапласу имеет вид:

$$s\bar{T} - a \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = 0. \quad (6.5)$$

Граничные условия: $-k \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \frac{q_0(1-R)}{s}, \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = 0.$

Итак, дифференциальному уравнению теплопроводности в пространстве изображений Лапласа соответствует обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Найдем его решение (см. раздел 5). Характеристическое уравнение для уравнения (6.5):

$$\lambda^2 - \frac{s}{a} = 0.$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{s}{a}}.$

Таким образом, общее решение уравнения (6.5) имеет вид:

$$\bar{T} = C_1 e^{-\sqrt{\frac{s}{a}}x} + C_2 e^{\sqrt{\frac{s}{a}}x}.$$

Подставив производную от температуры по координате

$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = -\sqrt{\frac{s}{a}}C_1 e^{-\sqrt{\frac{s}{a}}x} + \sqrt{\frac{s}{a}}C_2 e^{\sqrt{\frac{s}{a}}x}$ в граничное условие при $x = \infty$, получим $C_2 = 0$.

Из граничного условия при $x = 0$ получим: $k\sqrt{\frac{s}{a}}C_1 = \frac{q_0(1-R)}{s}$. Отсюда:

$$C_1 = \frac{q_0(1-R)\sqrt{a}}{k} \frac{1}{s\sqrt{s}}.$$

Таким образом, изображение температуры имеет вид:

$$\bar{T} = \frac{q_0(1-R)\sqrt{a}}{k} \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\frac{s}{a}}x}. \quad (6.6)$$

Из таблиц обратного преобразования Лапласа:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-b\sqrt{s}}\right) = 2\sqrt{t} \operatorname{ierfc} \frac{b}{2\sqrt{t}}.$$

Следовательно: $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\frac{s}{a}}x}\right) = 2\sqrt{t} \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\sqrt{at}}$.

В результате, проведя обратное преобразование выражения (6.6), получим температуру тела как функцию x и t :

$$T = \frac{2q_0(1-R)\sqrt{at}}{k} \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\sqrt{at}}. \quad (6.7)$$

Дополнение

Отметим, что в решении задач теплопроводности часто бывает полезно использование других интегральных преобразований – по координатам. В задачах лазерных микро- и нанотехнологий наиболее употребительными являются преобразование Фурье (преимущественно для задач, записанных в декартовых координатах) и преобразование Ганкеля (в некоторых изданиях – Ханкеля) – в частности, для задач, записанных в полярных координатах. Свойства этих преобразований несколько отличаются от свойств преобразования Лапласа, с ними можно познакомиться в соответствующей литературе (см. например [6], [10]). Необходимое для решения конкретной задачи теплопроводности интегральное преобразование можно выбрать, рассматривая свойства дифференцирования функции-оригинала различных преобразований (аналогичные приведенному выше свойству 5 преобразования Лапласа). При этом выбирают то интегральное преобразование, которое позволяет максимально упростить уравнение теплопроводности.

Поясним это на примере. Задача нагрева тонкой стеклокерамической пластины пучком излучения CO₂-лазера с гауссовым распределением интенсивности излучения по пятну может быть записана в полярных координатах следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{q_0 A \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right)}{\rho c h}, \quad (6.8)$$

где T – температура, t – время с начала облучения, r – радиальная координата, r_0 – характерный размер гауссова распределения, q_0 – плотность мощности лазерного излучения, A , ρ , c , h – поглощательная способность, плотность, теплоемкость и толщина стеклокерамической пластины.

Рассмотрим возможность применения для решения уравнения интегрального преобразования Ганкеля 0-го порядка, которое устанавливает следующее соотношение между функцией $f(r)$ и ее изображением $\bar{f}(s)$:

$$\bar{f}(s) = K_0[f(r)] = \int_0^{\infty} f(r) r J_0(sr) dr, \quad (6.9)$$

$$f(r) = \int_0^{\infty} \bar{f}(s) s J_0(sr) ds. \quad (6.10)$$

Из свойств преобразования Ганкеля 0-го порядка (см. [6]):

$$K_0 \left[f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) \right] = -s^2 K_0[f(r)]. \quad (6.11)$$

Очевидно, что левая часть уравнения (6.8) может быть существенно упрощена использованием преобразования Ганкеля. Таким образом, применив преобразование, в пространстве изображений получим уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + as^2 \bar{T} = \frac{q_0 A}{\rho c h} K_0 \left[\exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right) \right], \quad (6.11)$$

где $\bar{T} = K_0[T]$, а $K_0 \left[\exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right) \right]$ определяется по таблицам преобразования

Ганкеля или вычисляется по формуле обращения (6.10). Таким образом, уравнение теплопроводности (6.8) приводится к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению.

Задачи для самостоятельного решения

Написать в пространстве изображений Лапласа уравнение теплопроводности и граничные условия, описывающие лазерный одномерный нестационарный нагрев сильно поглощающего полубесконечного тела, если плотность мощности излучения зависит от времени следующим образом ($q_0, b = const$) (6.1-6.5):

6.1. $q = bt$.

6.4. $q = q_0(1 - e^{-bt})$.

6.2. $q = q_0 e^{bt}$.

6.5. $q = \frac{q_0}{\sqrt{t}}$.

6.3. $q = q_0 \cos bt$.

Написать в пространстве изображений Лапласа уравнение теплопроводности и граничные условия, описывающие лазерный одномерный нестационарный нагрев слабо поглощающего полубесконечного тела, если плотность мощности излучения зависит от времени следующим образом ($q_0, b = const$) (6.6 - 6.9):

6.6. $q = bt^2$.

6.8. $q = q_0 \sin bt$.

6.7. $q = q_0 e^{-bt}$.

6.9. $q = q_0 \sqrt{t}$.

Найти функцию от времени по ее лапласову изображению ($a, b = const$) (6.10-6.18):

6.10. $\frac{a}{s^2 + a^2}$.

6.13. $\frac{a}{s^3}$.

6.17. $\frac{s+a}{s\sqrt{s}}$.

6.11. $\frac{1}{s(1+sa)}$.

6.14. $\frac{b}{(s-a)^3}$.

6.18. $\frac{1}{\sqrt{s+a}}$.

6.12. $\frac{bs}{s^2 + a^2}$.

6.15. $\frac{a}{\sqrt{s}}$.

6.16. $\frac{1}{s\sqrt{s}}$.

6.19. Записать задачу теплопроводности для определения температуры поверхности полубесконечного сильно поглощающего тела от времени при его лазерном нагреве, при условии, что плотность мощности излучения изменяется во времени линейно $q = Bt$ ($B = const$) и постоянна по поверхности тела. Решить задачу методом преобразования Лапласа.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИСТОЧНИКОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ОБЛУЧАЕМОМ ОБЪЕКТЕ

Теоретические сведения

1. Сущность метода и элементарные решения

Метод источников позволяет определить распределение температуры в теле при заданных начальном и граничных условиях без непосредственного решения уравнения теплопроводности.

Из теории теплопроводности следует, что если в некоторой точке бесконечного n -мерного тела с нулевой начальной температурой в некоторый момент времени t' температура мгновенно приняла значение δ -функции по координатам, то в произвольной точке, удаленной от нее на расстояние Δr , в момент времени t ($t > t'$) температура равна:

$$T = \frac{1}{[4\pi a(t-t')]^{n/2}} \exp\left[-\frac{\Delta r^2}{4a(t-t')}\right], \quad (7.1)$$

где a – температуропроводность тела.

Мгновенное возрастание температуры в точке до значения δ -функции может трактоваться как следствие действия в этой точке в момент t' точечного мгновенного источника энергии ρc . Поэтому если в точке действует точечный мгновенный источник единичной энергии, то температурное распределение в бесконечном теле в момент времени t будет следующим:

$$T_{TM1} = \frac{1}{\rho c [4\pi a(t-t')]^{n/2}} \exp\left[-\frac{\Delta r^2}{4a(t-t')}\right]. \quad (7.2)$$

В частности, для трехмерного пространства ($n = 3$):

$$T_{TM1} = \frac{1}{\rho c [4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4a(t-t')}\right], \quad (7.3)$$

где x', y', z' – координаты точки, в которой действует точечный мгновенный источник единичной энергии, x, y, z – координаты точки, в которой определяется температура.

Для двумерного пространства:

$$T_{TM1} = \frac{1}{\rho c [4\pi a(t-t')]^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4a(t-t')}\right]. \quad (7.4)$$

Для одномерного пространства:

$$T_{TM1} = \frac{1}{\rho c [4\pi a(t-t')]^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a(t-t')}\right]. \quad (7.5)$$

Заметим, что с физической точки зрения в формулах (7.1) – (7.5) единица в числителе имеет следующую размерность:

- в формуле (7.1): [К · мⁿ];
- в формуле (7.2): [Дж/м³⁻ⁿ];
- в формуле (7.3): [Дж];
- в формуле (7.4): [Дж/м];
- в формуле (7.5): [Дж/м²].

Решение конкретной задачи теплопроводности в области Ω_0 методом источников использует принцип суперпозиции температурных полей. Оно сводится к отысканию совокупности точечных мгновенных источников, общее действие которых вызывает температурное распределение в бесконечном теле, которое в области Ω_0 тождественно температурному распределению в данной задаче, и последующему сложению (или интегрированию) температурных распределений для этой совокупности точечных мгновенных источников.

2. Основные методики определения совокупности элементарных источников

Рассмотрим процедуру суммирования температур от элементарных тепловых источников более подробно.

1. Если энергия точечного мгновенного источника не единичная, а равна некоторому значению E , то температурное распределение от такого источника

$$T_{TM} = ET_{TM1}.$$

2. Если точечный источник продолжительно действующий, то он может быть представлен в виде совокупности точечных мгновенных источников, действующих последовательно $T_{TM} = ET_{TM1} = T_{TM1} P dt$.

Таким образом, если в момент времени t источник еще действует, то:

$$T_T = \int_0^t P(t') T_{TM1} dt'.$$

Для моментов времени после окончания действия источника ($t > \tau$):

$$T_T = \int_0^\tau P(t') T_{TM1} dt'.$$

3. Если источник не точечный, а имеет какое-то распределение в области Ω' , то он может быть представлен в виде совокупности точечных источников, распределенных в этой области:

$$T = \int_{\Omega'} T_T d\Omega = \iiint_{\Omega'} \int_0^t Q(x', y', z', t') T_{TM1} dx' dy' dz' dt',$$

где Q – объемная плотность мощности источника.

4. Размерность пространства определяется количеством координатных направлений, в которых распространяются тепловые потоки (см. рис. 7.1.).

Примеры:

а) Источник представляет собой область на поверхности полубесконечного тела: $n = 3$.

б) Источник представляет собой полосу на поверхности полубесконечного тела: $n = 2$.

в) Источник представляет собой плоскость – границу полубесконечного тела: $n = 1$.

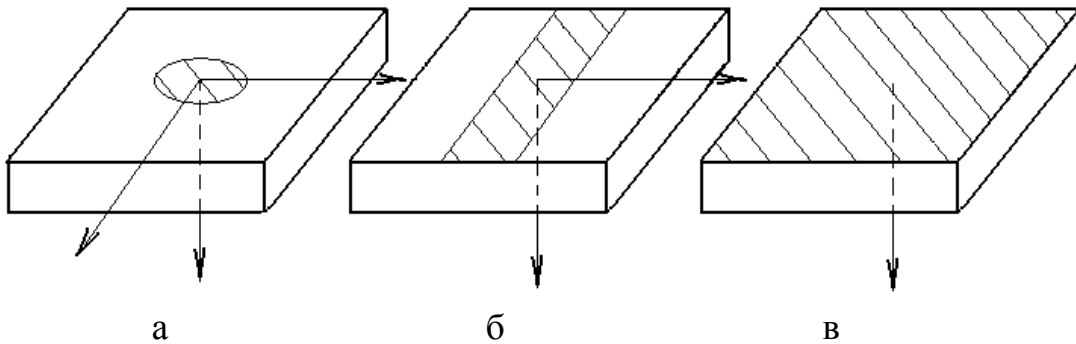


Рис. 7.1. К определению размерности пространства в тепловой задаче:

а) $n = 3$, б) $n = 2$, в) $n = 1$.

5. Если тело занимает не все пространство, а только его часть – область Ω_0 , то точечные источники подбираются для бесконечного тела таким образом, чтобы результирующее температурное поле в области Ω_0 бесконечного тела было тождественно температурному полю ограниченного тела в задаче.

Примеры:

а) полубесконечное тело, в котором действует поверхностный источник. В бесконечном теле выбираем источник, расположенный в той же плоскости, плотность мощности которого вдвое больше.

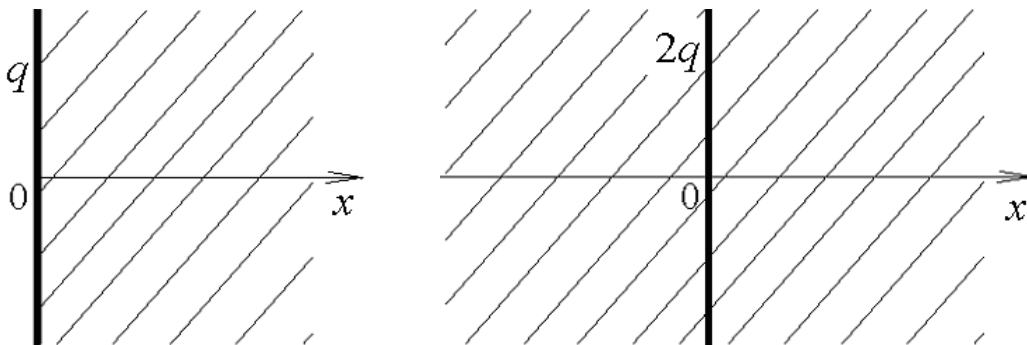


Рис. 7.2. Постановка задачи теплопроводности для решения ее методом источников для полубесконечного тела.

б) бесконечная пластина толщиной h , на одной из поверхностей которой действует поверхностный источник (теплоотвод от второй поверхности отсутствует). В бесконечном теле выбираем источники, расположенные в параллельных плоскостях на расстоянии $2h$ друг от друга (моделирование отражение теплового потока от второй поверхности пластины), плотность мощности каждого вдвое больше.

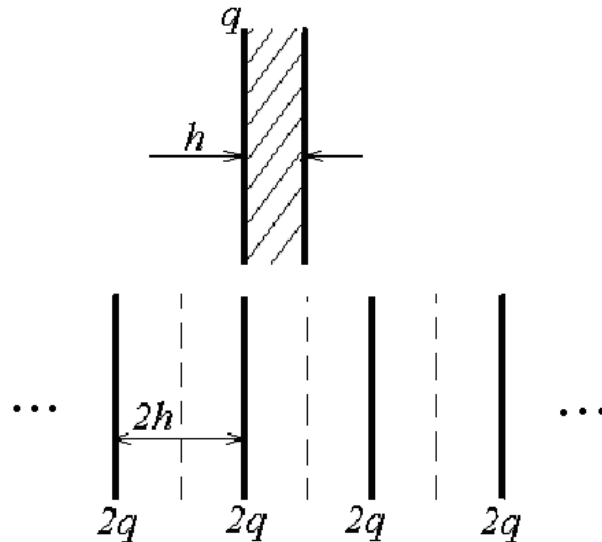


Рис. 7.3. Постановка задачи теплопроводности для решения ее методом источников для бесконечной пластины.

6. Если в реальной теплофизической задаче изменение температурного распределения происходит вследствие действия тепловых потоков на границах тела, то совокупность точечных источников подбирается таким образом, чтобы температурное распределение в бесконечном теле, обусловленное действием этих источников, соответствовало температурному распределению в реальной задаче.

Пример: тепловой поток на границе $-k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = q$ моделируется совокупностью источников в плоскости $x = 0$.

7. Метод источников может быть использован при определении температуры тела, подвергнутого воздействию движущегося источника тепла (например, при обработке поверхности сканирующим пучком лазерного излучения). В этом случае расстояние Δr между источником и точкой, в которой определяется температура, становится зависящим от времени действия источника t' . Например, при прямолинейном движении точечного источника по оси x от точки $x = 0$ с постоянной скоростью V в трехмерном теле это расстояние определяется выражением $\Delta r = (Vt' - x)^2 + y^2 + z^2$.

Примеры решения задач

Задача 1

Производится облучение полубесконечного сильно поглощающего тела. Плотность мощности излучения q постоянна на поверхности тела и во времени. Определить распределение температуры по толщине тела в момент окончания импульса излучения.

Решение

Проанализируем условие задачи:

- 1) $n = 1$;
- 2) источник продолжительного действия;
- 3) распределение источников по поверхности $x = 0$ равномерное;
- 4) $\Delta r = x$;
- 5) так как тело занимает полупространство, будем рассматривать задачу нагревания всего пространства источником плотности мощности $2q_0(1-R)$ (q_0 - плотность мощности излучения, R - коэффициент отражения).

Итак, температура при действии точечного мгновенного единичного источника:

$$T_{TM1} = \frac{1}{\rho c [4\pi a(t-t')]^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a(t-t')}\right].$$

Размерность числителя: [Дж/м²].

При действии источника с плотностью энергии $2q_0(1-R)dt'$:

$$T_{TM} = \frac{2q_0(1-R)dt'}{\rho c [4\pi a(t-t')]^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a(t-t')}\right].$$

Интегрируя по времени, определяем температуру при действии точечного продолжительного источника с плотностью мощности $2q_0(1-R)$:

$$T = T_T = \int_0^t \frac{2q_0(1-R)}{\rho c [4\pi a(t-t')]^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a(t-t')}\right] dt'.$$

Вычисляем интеграл, делая замену переменной: $z = \frac{x}{2\sqrt{a(t-t')}}.$

Находим дифференциал новой переменной dz :

$$dz = \frac{x}{2\sqrt{a}} \frac{1}{2(t-t')^{3/2}} dt'.$$

Отсюда: $\frac{dt'}{(t-t')^{1/2}} = \frac{4\sqrt{a}(t-t')}{x} dz = \frac{4a(t-t')}{x^2} \frac{x}{\sqrt{a}} dz = \frac{x}{z^2\sqrt{a}} dz.$

Таким образом, $T = \int_{1/2\sqrt{at}}^{\infty} \frac{2q_0(1-R)}{\rho c 2\sqrt{\pi a}} \frac{x}{z^2 \sqrt{a}} e^{-z^2} dz = \frac{q_0(1-R)x}{\rho c a \sqrt{\pi}} \int_{1/2\sqrt{at}}^{\infty} \frac{e^{-z^2}}{z^2} dz.$

Вычислим последний интеграл. Берем интеграл по частям, обозначив $e^{-z^2} = u, -\frac{1}{z} = v.$

Получим:

$$\begin{aligned} I &= \int_b^{\infty} \frac{e^{-z^2}}{z^2} dz = -\frac{e^{-z^2}}{z} \Big|_b^{\infty} - 2 \int_b^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{e^{-b^2}}{b} - 2 \int_b^{\infty} e^{-z^2} dz = \\ &= \frac{e^{-b^2}}{b} - \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} b = \frac{\sqrt{\pi}}{b} \left[\frac{e^{-b^2}}{\sqrt{\pi}} - b \operatorname{erfc} b \right] = \frac{\sqrt{\pi}}{b} \operatorname{ierfc} b. \end{aligned}$$

Таким образом, температура на глубине x в момент времени t с начала облучения:

$$T = \frac{q_0(1-R)x}{\rho c a \sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{x} 2\sqrt{at} \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\sqrt{at}} = \frac{2q_0(1-R)\sqrt{at}}{k} \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\sqrt{at}},$$

где $k = \rho c a$ – теплопроводность тела.

В момент окончания импульса излучения $t = \tau$:

$$T = \frac{2q\sqrt{a\tau}}{k} \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}.$$

Задача 2

Производится облучение тонкой поглощающей пленки. Облученная область представляет собой половину ее поверхности ($x \leq 0$). Плотность мощности излучения распределена равномерно по облученной области и во времени. Определить распределение температуры по поверхности пленки во время действия импульса излучения.

Решение

Проанализируем условия задачи:

- 1) $n = 1$;
- 2) источник продолжительного действия;
- 3) распределение источников – равномерное, $x \leq 0$;
- 4) $\Delta r = x - x'$.

Температура одномерного тела при действии на него точечного мгновенного единичного источника:

$$T_{TM1} = \frac{1}{\rho c [4\pi a(t-t')]^{1/2}} \exp \left[-\frac{(x-x')^2}{4a(t-t')} \right].$$

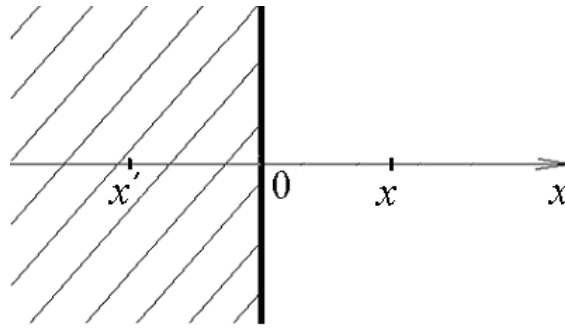


Рис. 7.4. К задаче 2.

Размерность числителя: [Дж/м²].

При действии источника с энергией $\frac{q_0(1-R)dt'dx'}{h}$

$$T_{TM1} = \frac{qdt'dx'}{\rho ch [4\pi a(t-t')]^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a(t-t')}\right].$$

Интегрируя по t' и x' , определим зависимость $T(x,t)$ во время действия излучения:

$$T_{TM1} = \int_{-\infty}^0 \int_0^t \frac{q_0(1-R)}{\rho ch [4\pi a(t-t')]^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a(t-t')}\right] dx' dt'.$$

Интегрирование по t' с заменой переменной $y = \frac{x-x'}{2\sqrt{a(t-t'')}}$ дает (см. предыдущую задачу):

$$T = \int_{-\infty}^0 \frac{q_0(1-R)\sqrt{at}}{kh} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x-x'}{2\sqrt{at}}\right) dx',$$

где $k = \rho ca$ – теплопроводность пленки.

Интегрирование по x' с заменой переменной $y = \frac{x-x'}{2\sqrt{at}}$ дает:

$$T = \frac{2q_0(1-R)t}{\rho ch} i^2 \operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{at}}.$$

Задача 3

Производится облучение тонкой поглощающей пленки толщиной h . Облученная область – квадрант ($x \geq 0, y \geq 0$). Плотность мощности излучения распределена равномерно по облученной области и во времени. Определить температуру в точке ($x = 0, y = 0$) в момент времени $t \leq \tau$.

Решение

Проанализируем условия задачи:

- 1) $n = 2$;
- 2) источник продолжительного действия;
- 3) распределение источника – равномерное в облученной области ($x \geq 0, y \geq 0$);
- 4) $\Delta r^2 = (x')^2 + (y')^2$.

Температура в точке ($x = 0, y = 0$) при действии точечного мгновенного единичного источника:

$$T_{TM1} = \frac{1}{\rho c [4\pi a(t-t')]^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{x'^2 + y'^2}{4a(t-t')}\right],$$

Размерность числителя: [Дж/м].

При действии источника с энергией $\frac{q_0(1-R)dt'dx'dy'}{h}$:

$$T_{TM} = \frac{q_0(1-R)dt'dx'dy'}{\rho ch [4\pi a(t-t')]^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{x'^2 + y'^2}{4a(t-t')}\right].$$

Интегрируя по x', y', t' , определим $T(x=0, y=0, t)$ при $t \leq \tau$:

$$\begin{aligned} T &= \int_{t'=0}^t \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{q_0(1-R)}{\rho ch [4\pi a(t-t')]^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{x'^2 + y'^2}{4a(t-t')}\right] dt'dx'dy' = \\ &= \frac{q_0(1-R)}{\rho ch \pi} \int_{t'=0}^t \left[\int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{x'^2}{4a(t-t')}\right)}{2\sqrt{a(t-t')}} dx' \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{y'^2}{4a(t-t')}\right)}{2\sqrt{a(t-t')}} dy' \right] dt'. \end{aligned}$$

Интегрируем каждый из двух интегралов в квадратных скобках, делая замену переменной $\frac{x'}{2\sqrt{a(t-t')}} = u, \frac{y'}{2\sqrt{a(t-t')}} = v$:

$$\begin{aligned} T &= \frac{q_0(1-R)}{\rho ch \pi} \int_{t'=0}^t \left[\int_0^\infty e^{-u^2} du \int_0^\infty e^{-v^2} dv \right] dt' = \\ &= \frac{q_0(1-R)}{\rho ch \pi} \int_{t'=0}^t \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc} 0 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc} 0 \right] dt' = \frac{q_0(1-R)}{\rho ch \pi} \int_{t'=0}^t \frac{\sqrt{\pi}}{4} dt' = \frac{q_0(1-R)t}{4\rho ch}. \end{aligned}$$

Задача 4

Производится облучение поверхности полубесконечного сильно поглощающего тела сканирующим сфокусированным пучком, движущимся прямолинейно с постоянной скоростью. Определить распределение температуры по линии сканирования в квазистационарном режиме.

Решение

Проанализируем условие задачи:

- 1) $n = 3$;
- 2) источник продолжительного действия;
- 3) источник точечный;
- 4) $\Delta r = Vt' - x$;

5) так как тело занимает полупространство, будем рассматривать задачу нагревания всего пространства источником мощностью $2P_0A$. (P_0 – мощность излучения, A – поглощательная способность).

Итак, температура при действии точечного мгновенного единичного источника:

$$T_{TM1} = \frac{1}{\rho c [4\pi a(t-t')]^{n/2}} \exp\left[-\frac{\Delta r^2}{4a(t-t')}\right].$$

Размерность числителя: [Дж/м²]. Здесь $\Delta r = Vt' - x$.

При действии источника с энергией $2P_0Adt'$:

$$T_{TM} = \frac{2P_0Adt'}{\rho c [4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left[-\frac{(Vt' - x)^2}{4a(t-t')}\right].$$

Интегрируя по t' , определим $T(x, t)$:

$$T = \int_0^t \frac{2P_0Adt'}{\rho c [4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp\left[-\frac{(Vt' - x)^2}{4a(t-t')}\right].$$

Сделаем замену переменной: $\theta = t - t'$:

$$T = -\int_t^0 \frac{2P_0Ad\theta}{\rho c (4\pi a\theta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(Vt - V\theta - x)^2}{4a\theta}\right] = \int_0^t \frac{2P_0Ad\theta}{\rho c (4\pi a\theta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(V\theta + d)^2}{4a\theta}\right],$$

где $d = x - Vt$ – расстояние от точки, в которой определяется температура, до источника, $d > 0$, если точка находится перед источником, $d < 0$, если за ним.

Квазистационарный режим нагревания соответствует условию достаточно больших значений времени, поэтому решение задачи получим из выражения

$$T_{kc} = \int_0^\infty \frac{2P_0Ad\theta}{\rho c (4\pi a\theta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(V\theta + d)^2}{4a\theta}\right].$$

Вычислим интеграл.

$$\begin{aligned} T_{kc} &= \frac{2P_0A}{\rho c} \int_0^\infty e^{-\frac{V^2\theta}{4a}} e^{-\frac{d^2}{4a\theta}} e^{-\frac{Vd}{2a}} \frac{d\theta}{(4\pi a\theta)^{3/2}} = \frac{P_0A}{2\pi\rho c a |d|} e^{-\frac{Vd}{2a}} \int_0^\infty e^{-\frac{V^2\theta}{4a}} e^{-\frac{d^2}{4a\theta}} \frac{|d|d\theta}{2\sqrt{\pi a\theta^3}} = \\ &= \frac{P_0A}{2\pi k |d|} e^{-\frac{Vd}{2a}} e^{-\frac{V|d|}{2a}}, \end{aligned}$$

где $k = \rho c a$ – теплопроводность.

Таким образом, распределение температуры по линии сканирования в квазистационарном режиме

$$T_{\text{кс}} = \begin{cases} \frac{P_0 A}{2\pi k |d|} e^{-\frac{v d}{a}}, & \text{если } d > 0, \\ \frac{P_0 A}{2\pi k |d|}, & \text{если } d < 0. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

Используя метод источников, написать в виде интеграла выражение для температуры тонкой поглощающей пленки, нагреваемой лазерным излучением (q_0 постоянна во времени и в пределах облученной области) (7.1-7.9).

7.1. В точке $(x = 0, y = 0)$ – в центре облученной области, имеющей вид квадрата со стороной $2a$ ($-a \leq x' \leq a, -a \leq y' \leq a$).

7.2. В точке $(x = 0, y = a)$ – в середине стороны облученной области имеющей вид квадрата со стороной $2a$ ($-a \leq x' \leq a, -a \leq y' \leq a$).

7.3. В точке $r = 0$ – в центре облученной области, имеющей вид круга радиуса r_0 (написать в полярной системе координат).

7.4. На линии $x = 0$ – в середине облученной области, имеющей вид бесконечной полосы шириной $2a$ ($-a \leq x' \leq a$).

7.5. На линии $x = a$ – на границе облученной области, имеющей вид бесконечной полосы шириной $2a$ ($-a \leq x' \leq a$).

7.6. На линии $x = 0$ – на границе облученной области, имеющей вид полуплоскости ($x' \geq 0$).

7.7. На линии $x = a$ ($a > 0$), находящейся в облученной области, имеющей вид полуплоскости ($x' \geq 0$).

7.8. В точке $(x = 0, y = 0)$ – в углу облученной области, имеющей вид четверти плоскости ($x' \geq 0, y' \geq 0$).

7.9. В точке $(x = 0, y = a)$, ($a > 0$) – на границе облученной области, имеющей вид четверти плоскости ($x' \geq 0, y' \geq 0$).

7.10. Используя метод источников, написать в виде интеграла выражение для температуры биоткани в зависимости от расстояния от точечного источника мощностью P , расположенного внутри нее и излучающего равномерно во все стороны (глубина проникновения излучения $\delta \ll \sqrt{a\tau}$).

7.11. Используя метод источников, написать в виде интеграла выражение для температуры полубесконечного слабо поглощающего (по закону Бугера) тела в зависимости от расстояния от поверхности, если плотность мощности падающего излучения q_0 равномерна по всей поверхности и постоянна во времени.

7.12. Используя метод источников, написать в виде интеграла выражение для температуры полубесконечного сильно поглощающего тела, нагреваемо-

го лазерным излучением (q_0 постоянна в облученной области и не зависит от времени, если не задано иначе) (7.12 - 1.17).

7.13. В точке $r = 0$ – в центре облученной области, если плотность мощности излучения изменяется на поверхности по закону $q_0 = q_m \exp(-r^2/r_0^2)$.

7.14. На линии $x = 0$ – в середине облученной области, имеющей вид бесконечной полосы шириной $2a$ ($-a \leq x' \leq a$).

7.15. На линии $x = a$ – на границе облученной области, имеющей вид бесконечной полосы шириной $2a$ ($-a \leq x' \leq a$).

7.16. На линии $x = 0$ – на границе облученной области, имеющей вид полуплоскости ($x' \geq 0$).

7.17. На линии $x = a$ ($a > 0$), находящейся в облученной области имеющей вид полуплоскости ($x' \geq 0$).

7.19. В точке ($x = 0, y = 0$) – в углу облученной области, имеющей вид четверти плоскости ($x' \geq 0, y' \geq 0$).

7.20. Определить зависимость температуры полубесконечного сильно поглощающего тела от времени при его лазерном нагреве, если плотность мощности излучения изменяется во времени линейно $q = Bt$ ($B = const$) и постоянна по поверхности тела.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. О.С.Ивашев-Мусатов. Начала математического анализа. М.: Наука, 1988.
2. Я.С.Бугров, С.М.Никольский. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1988.
3. Я.С.Бугров, С.М.Никодьский. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1981.
4. И.Н.Бронштейн, К.А.Семендяев. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. М.: Наука, 1981.
5. Г.Б.Двайт. Таблицы интегралов и другие математические формулы. СПб, 1995.
6. Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977.
7. Э.Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
8. Справочник по специальным функциям. Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган. М.: Наука, 1979.
9. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики, М.; Наука, 1977.
10. Н.М.Беляев, А.А.Рядно. Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высшая школа, 1978.
11. Г.Деч. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z- преобразования. М.: Наука, 1971.



СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы и успешно реализовал инновационную образовательную программу «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий», что позволило выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворять возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях науки. Реализация этой программы создала основу формирования программы дальнейшего развития вуза до 2015 года, включая внедрение современной модели образования.

КАФЕДРА ЛАЗЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЭКОЛОГИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

Лазерные технологии не случайно называют технологиями XXI века. Открытые при нашей жизни лазеры уже сегодня широко проникли в медицину, биологию, экологию, промышленность, строительство, транспорт, связь, шоу-бизнес и другие сферы жизни. Лазерные принтеры, лазерные CD-диски, лазерные торговые сканеры и лазерные шоу сегодня известны всем. Менее известны широкой публике, но не менее важны лазерные технологии при лечении болезней глаз, сосудов, опухолей, в микроэлектронике для нанесения и структурирования тонких пленок, для резки и сварки брони, закалки инструментальных сталей, декоративной обработки дерева, камня и кожи, и т.д., а в ближайшей перспективе — для избавления человечества от очков и морщин (да, да — сотни операций по лазерной полировке роговицы глаза и кожи уже проведены), разработка реакций лазерного управляемого термоядерного синтеза и лазерных реактивных двигателей, создание трехмерных объектов за счет прямой трансформации виртуального (компьютерного) образа в материальный объект при взаимодействии лазерного излучения с веществом и многое, многое другое.

История кафедры ЛТ и ЭП делится на 4 разных периода:

Период I — с момента появления лаборатории лазерной технологии в ЛИТМО в 1965 г. до момента организации кафедры охраны труда и окружающей среды (ОТ и ОС) с отраслевой лабораторией лазерных технологий (ОЛЛТ) в 1982 г.

Период II — период развития кафедры ОТ и ОС и ОЛЛТ — 1982–1988 гг.

Период III — с момента создания на базе кафедры ОТ и ОС и ОЛЛТ кафедры лазерных технологий — 1988 г., в дальнейшем преобразованной в ка-

федру лазерных технологий и экологического приборостроения и по настоящее время.

Охарактеризуем периоды 1, 2 и 3 фактами.

1976 г. — научные работы ОЛЛТ по физическим основам лазерной обработки тонких пленок удостоены Премии Президиума АН СССР за лучшую научную работу в области «Фундаментальных проблем микроэлектроники».

1983, 1984 гг. — работы кафедры удостоены Премий Минвуза СССР за лучшую научную работу.

1986 г. — работы кафедры совместно с рядом других организаций удостоены Государственной Премии СССР.

1988 г. — кафедра ОТОС с лабораторией ЛТ по инициативе ректора ЛИТМО преобразована в выпускающую кафедру «Лазерных технологий» и начинается систематический выпуск специалистов по специальности 07.23 «лазерная техника и лазерные технологии».

1996 г. — кафедра ЛТ переименована в кафедру ЛТ и ЭП и осуществляет выпуск специалистов как лазерным технологиям, так и по специальности «инженер–педагог» со специализацией «экология».

С 2000 г. — лаборатория и кафедра ЛТ признаны Ведущей научной школой Российской Федерации по «Фундаментальным основам лазерных микротехнологий».

2001 – 2007 г. — этот статус ежегодно подтверждается.

- За период времени с 1988 по 2005 г. кафедра выпустила более 300 специалистов в области лазерных технологий;
- За тот же период времени сотрудниками и аспирантами кафедры защищены 2 докторские и более 20 кандидатских диссертаций;
- По результатам работ кафедры издано 9 монографий;
- Результаты исследований сотрудников кафедры изложены более чем в 500 научных статьях и 50 патентах и авторских свидетельствах;

Период 4 с 2008 г. характеризуется тем, что университет явился победителем конкурса Правительства РФ 2006-2008г.г., проводимого в рамках приоритетного национального проекта «Образование» по отбору образовательных учреждений высшего профессионального образования, внедряющих инновационные образовательные программы.

При этом одним из направлений научно-образовательной деятельности Университета в рамках конкурса было выбрано направление «Лазерные технологии и системы», которое соответствует приоритетным направлениям развития науки, техники и технологий в РФ и критическим технологиям РФ.

По результатам маркетинговых исследований ожидаемый рынок труда специалистов по данному направлению в Санкт-Петербурге составляет 300 чел. в год, по России - порядка 1500 человек.

Важнейшей составной частью проекта явилось создание новых научно-образовательных структур, центров и лабораторий, для оснащения которых были проведены закупки необходимого оборудования и приборов. Приведем информацию по данному разделу программы более подробно:

Создание новых лабораторий и центров.

1. Лаборатория лазерных нанотехнологий в составе 4–х научно–образовательных направлений, укомплектованных современным лазерным, измерительным и аналитическим оборудованием и финансируемых грантами РФФИ, РГНФ и Роснауки :

1) Лазерное формирование многофункциональных зондов (МЗ) для зондовой микроскопии с целью создания универсальных зондовых микроскопов.

Работа базируется на значительном заделе кафедры лазерных технологий и экологического приборостроения (далее ЛТ и ЭП) по лазерной вытяжке ближнепольных оптических зондов, нанокапилляров, многослойных зондов, кантилеверов и т.п.. Она проводится на базе 15 Вт квазинепрерывного ($f = 5$ кГц, $\tau = 1$ мкс CO_2 (Sinrad) лазера, специальной оптической системы облучения с торическим зеркалом и специализированных механических систем вытяжки с обратной электромеханической связью. Для контроля за процессом используется скоростная видеокамера AOS–x–motion (разрешение 1280 x 1024, размер пиксела 12 мкм, максимальная скорость съемки 32000 кадр/сек), и быстродействующий микропирометр частичного излучения IFMO (спектральный диапазон 5.7–8.7 мкм, температурный диапазон 200–2000°C, диаметр объекта 0.5–5 мм, время отклика 0.1 с, точность ± 10 К), а для оценки результатов и разработки методик применения МЗ — зондовый микроскоп «Nanoeducator», НТ МДТ.

Работа проводится совместно с кафедрой нанотехнологий и материаловедения ИТМО (заведующий кафедрой — А.О.Голубок), имеющей большой опыт создания и применения зондовых микроскопов.

2) Исследование физических основ формирования А–К–А переходов в стеклокерамиках (А — аморфизованный, К — кристаллизованный слой) и способов управления их размерами, глубиной залегания, скоростью переключения и степенью кристаллизации.

Работа направлена на закрепление пионерского научного задела и на продвижение локальности А–К–А переходов в область наноразмеров, времен записи и переключения в область пико–и фемтосекунд, оптимизацию сред для объемной оптической записи и поиск эффективных систем считывания информации.

Для реализации заложенных научных идей созданы стенды с пикосекундным лазером типа EXPLA PL 2143 ($\lambda = 266$ нм, 355 нм, 532 нм, 1060 нм, $W_{\text{имп}} = 30$ мДж, $\tau = 30$ пс, $f = 10$ Гц) и фемтосекундным лазером типа AVESTA (TiF-100-F4 $\lambda = 710$ –950 нм, $P_{\text{ср}} = 500$ мВт, $f = 90$ МГц, $\tau = 100$ фс), с 10) импульсными CO_2 -лазерами ($\lambda = 10,6$ мкм) ТЕА-типа ($P_{\text{имп}} = 10^6$ Вт, $f = 500$

Гц, $\tau = 200$ нс) и щелевым ($P_{\text{ср}} = 150$ Вт, $f = 50\text{-}5000$ Гц, $\tau = 30\text{-}500$ мкс), позволяющими в максимальной степени реализовать потенциал работы.

Для контроля за процессом разработаны схемы, созданы и оснащены системы микрофотометрического контроля (микроскоп-спектрофотометр МСФУ–К (ОАО «ЛЮМО»), увеличение – до 1000X, спектральный диапазон регистрации спектров: и оптической плотности 350-900 нм, минимальный размер фотометрируемого участка 1 мкм), микротепловизионного контроля (тепловизор FLIR–Titanium), спектральный диапазон 8-14 мкм, разрешение изображения 320 x 256, 14 бит, , максимальная частота обновления полных кадров 380 Гц скоростной видеографии (видеокамера AOS–x–motion) и др.

Работа проводится совместно с кафедрой оптоинформационных технологий и материалов (заведующий кафедрой — Н.В.Никоноров), обладающей большим опытом создания и исследования оптических материалов и всем комплексом необходимого термофизического, оптического и испытательного оборудования и приборов.

3) Наноструктурирование тонких металлических и полупроводниковых слоев.

Работа основана на обнаруженном в лаборатории кафедры ЛТ еще в 1967–70 гг. эффекте локального термохимического воздействия лазерного излучения и, в частности, на радикальном изменении растворимости Cr при его лазерном окислении. В последнее время этот эффект дополнен также «микроструктурным» воздействием лазерного излучения на структуру тонких слоев Cr, Si и, соответственно Cr₂O₃ и SiO₂. Оба эффекта позволяют управлять топологией и другими параметрами структур.

Работа базируется на использовании коротких (N₂–лазер, 0.337 мкм, 10 нс) и сверхкоротких импульсов (пикосекундный и фемтосекундный лазеры, упомянутые выше, эксимерный ArF лазер (CL-7020, $W_{\text{имп}} = 250$ мДж, $P_{\text{ср}} = 5$ Вт, $f = 20$ Гц, $\tau = 17$ нс) и коротких длин волн (193 нм, 226 нм, 337 нм, 355 нм) для повышения разрешающей способности метода и продвижения его в область нанометрических размеров вплоть до теоретического предела разрешающей способности (\sim толщины защитной окисной пленки). При ее проведении используются также указанные выше приборы и устройства — зондовый микроскоп, микротепловизор и целый ряд химических и термофизических методик.

Работа проводится в настоящее время совместно с группой А.Полещука из института автоматизации и электротехники Сибирского отделения РАН.

4) Управление микро– и нанощероховатостью поверхностей оптических материалов

В основе работы лежит эффект снижения шероховатости поверхности за счет лазерной абляции выступов. Этот эффект дополняется процессами гидродинамического затекания впадин, а также микроструктурирования,

основанными на возникновении поверхностных электромагнитных волн и периодического рельефа и использовании других опто-физических явлений (интерференционных, ближнепольных и т.д.). Все изложенные методы и приемы позволяют создавать оптимальные параметры оптических поверхностей (асферизация, полировка, структурирование) из стекла и пластмассы, металла и др. материалов.

В работе используются импульсные CO_2 -лазеры (ТЕА CO_2 и щелевой), эксимерный, пико- и фемтосекундные лазеры, специальные оптические системы, системы активного контроля профиля поверхности с обратной связью, зондовый микроскоп, микротепловизор.

Отдельное направление работ этого цикла — микро- и наноструктурирование поверхности кремния за счет модификации структуры и лазерной абляции, а также управление свойствами окисла.

2. Лаборатория лазерной очистки и реставрации произведений культуры и искусства (ПКИИ) организована совместно с фирмой ООО «Мобильные лазерные системы».

В лаборатории имеются 3 установки.

1. Лазерный комплекс очистки и реставрации ЛИК-1 на базе 200 Вт, 20 нс Nd-YAG импульсного лазера и 6-ти координатного робота (максимальный рабочий радиус (размах) 1300 мм, точность при повторении позиции ± 0.08 мм) с полной системой ориентации, управления позиционированием волоконно-оптической головки. Работает в режимах очистки металлических изделий сложной формы от загрязнений, оксидных пленок и т.п., подготовки под сварку, сварки и модификации поверхности с системой сбора продуктов очистки для производства работ в лабораториях и в условиях музейных интерьеров.

2. Мобильный лазерный комплекс МЛС2 на основе 50 Вт импульсного Yt-Er лазера с волоконным выводом и миниатюрной оптической головкой для очистки; может быть установлен на автономную передвижную платформу с дистанционным управлением, например, для очистки поверхностей от радиоактивных загрязнений.

3. Переносной ранцевый лазерный комплекс ЛИК-2 на основе 20 Вт импульсного Yt-Er лазера с волоконным выводом и оптической системой, миниатюрной системой сканирования поверхности и встроенной системой отсоса продуктов очистки.

Все изложенные лазерные системы опробованы при исследованиях и разработке следующих процессов лазерной очистки:

- 1) лазерная очистка радиоактивно-загрязненных поверхностей,
- 2) лазерная очистка теплообменников и др. элементов энергетического оборудования,
- 3) лазерная очистка и подготовка поверхности под лазерную сварку и консервацию,

4) лазерная очистка металлических поверхностей ПКИН, городской скульптуры и декора.

В настоящее время разрабатываются физико–химические основы процессов лазерной очистки неметаллических поверхностей (мрамора и др. минералов), а также процессов реставрации стеклянных и стеклокерамических изделий (смальты, финифти, стеклянных и керамических мозаик и т.п.), фресок и т.п.

3. Учебно–производственный центр лазерных технологий резки, сварки, наплавки и термообработки создан совместно с фирмой ООО «СП Лазертех» на базе мощных иттербиевых волоконных лазеров ЛС–0.5 (кВт), ЛС–2 (кВт) или ЛС– 5 (кВт) (IPG-Photonics, Россия, г.Фрязино).

Лазерный комплекс для трехмерного раскроя деталей ЛУВР-1 на основе волоконного лазера с мощностью 5,0 кВт и выходным волоконным кабелем ($\lambda = 1,07$) включает универсальный 6–ти координатный робот FA06E (KAWASAKI) с системой ориентации и позиционирования, и полный комплект остального оборудования (холодильная машина, система управления роботом (контроллер D40), система подготовки и подачи технологических газов, фирмы Precitec), система дистанционного видеонаблюдения за техпроцессом, и т.д.

Там же установлен Лазерный комплекс «Trotec Professional 1313» предназначенный для прецизионной резки и гравировки неметаллов. Комплекс включает CO₂ лазер мощностью 50 Вт, механизм сканирования типа «летающая оптика». Максимальная скорость лазерной гравировки 1 м/с, максимальная площадь обрабатываемой поверхности 1300x1300 мм, программное разрешение 2 мкм, точность позиционирования ± 15 мкм).

Установка Trotec Professional TP 1313 применяется в следующих процессах: рекламном бизнесе, резке промышленных изделий из листовых неметаллических материалов, изготовлении вырубных штампов, трафаретов, лекал, текстильных изделий, изготовлении печатей и штампов.

Центр предназначен для подготовки специалистов современного уровня и разработки новых лазерных технологий в основном на базе волоконных технологических лазеров.

Для организации учебного процесса задействуется также современное производственное оборудование предприятий ООО «СП «Лазертех», ООО «Лазерный центр», ООО «Мобильные лазерные системы»:

– Лазерные технологические комплексы типа «Хебр» (CO₂-лазеры мощностью 1-квт с порталными столами) для резки листовых металлических и неметаллических материалов, труб, сварка.

– Лазерные технологические комплексы типа «Trumatic» (CO₂-лазеры мощностью до 2,5 квт с порталными столами) для резки листовых металлических материалов.

– Модернизированный лазерный технологический комплекс типа «Хебр» с иттербиевым волоконным лазером ЛС-2 для резки и сварки, в т.ч сплавов цветных металлов.

– Минимаркер М 10 с иттербиевым импульсным волоконным лазером для прецизионной маркировки.

– Установка «Бетамарк 2000» (лазер Nd-YAG с ламповой накачкой и модуляцией добротности) для прецизионной маркировки.

– Установка ТЕГРА – 500 (лазер Nd-YAG с ламповой накачкой) для резки цветных металлов и их сплавов.

– Специализированные лазерные комплексы со столами АП-400 (лазеры Nd-YAG с ламповой накачкой).

Таким образом, выполнение поставленных перед инновационно-образовательной программой (ИОП) в рамках направления «Лазерные технологии и системы» позволило создать новый научно-учебный инновационный центр в СПбГУ ИТМО, оснащенный уникальным современным лазерным и измерительным оборудованием, способным реализовать подготовку высококвалифицированных научных кадров в области лазерных технологий и проводить исследования на самом высоком научном уровне.

Одним из недавних результатов выполнения ИОП является завоевание Университетом (в лице кафедры лазерных технологий) совместно с указанными выше организациями нескольких наград на **Международной выставке–конгрессе «Высокие технологии, инновации, инвестиции»**: Диплома I степени за создание **лазерного комплекса для трехмерной обработки материалов на базе волоконного лазера**, Диплома II степени за создание **учебно–производственного центра «Лазерные технологии»**, Диплома II степени за разработку **переносной лазерной установки для очистки материалов от различных поверхностных загрязнений**, Диплома II степени за разработку **ранцевого устройства для лазерной очистки** с вручением 1 золотой и 3–х серебряных медалей.

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ КАФЕДРЫ

1. Лазерная обработка пленочных элементов, в том числе

-наноструктурирование тонких металлических и полупроводниковых слоев,

- лазерное локальное осаждение тонких пленок.

2. Исследование физических основ формирования А–К–А переходов в стеклокерамиках (А — аморфизованный, К — кристаллизованный слой) и способов управления их размерами, глубиной их залегания, скоростью переключения и степенью кристаллизации.

3. Создание новых оптических материалов и элементов микро– и нанофотоники на базе лазерных технологий.

4. Лазерное формирование многофункциональных зондов для зондовой микроскопии с целью создания универсальных зондовых микроскопов.

5. Физико-химические основы лазерной очистки в промышленности и при реставрации произведений культурно-исторического наследия.

6. Фундаментальные исследования в области взаимодействия лазерного излучения с веществом: лазерная абляция и конденсация металлических и композиционных пленок и эффекты самоорганизации.

7. Физико-математическое моделирование в задачах дистанционного лазерного зондирования морской среды.

Заведует кафедрой лазерных технологий и экологического приборостроения Заслуженный деятель науки России, Лауреат Государственной Премии СССР, действительный член Академии Инженерных Наук РФ, д.т.н., профессор В.П.Вейко. Среди преподавателей кафедры Почетный работник высшей школы, д.т.н., профессор Е.Б.Яковлев, д.т.н., профессор Е.А.Шахно, Почетный работник высшей школы, к.ф.–м.н., доцент Г.Д.Шандыбина, к.т.н., доцент В.В.Барановский, к.ф.–м.н., доц. Ю.И.Копилевич, к.ф.–м.н., доцент А.Н.Проценко, молодые преподаватели, к.т.н., доц. А.А.Петров, к.т.н., доц. Н.Н.Марковкина, к.т.н., асс. Б.Ю.Новиков.

Работа кафедры проводится в тесном контакте с ведущими предприятиями Санкт-Петербурга по лазерным технологиям: ООО СП «Лазертех» (ген. директор С.Н.Смирнов), ООО «Лазерный центр» (ген. директор С.Г.Горный), ООО «Мобильные лазерные системы» (ген. директор В.Н.Смирнов).

Кафедра также активно сотрудничает с университетами и институтами США (Princeton University, Cornell University), Германии (BIAS, FHS Emden), Японии (RIKEN), Китая (HUST), Франции (ENISE), Италии (Lecce University) и др.

Елена Аркадьевна Шахно

Аналитические методы расчета
лазерных микро– и нанотехнологий

Учебное пособие

В авторской редакции

Дизайн

Верстка

Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики

Зав. РИО

Лицензия ИД № 00408 от 05.11.09

Подписано к печати 14.04.09

Заказ № 2104

Тираж 200 экз.

Отпечатано на ризографе

С.М.Сарнаков

С.М.Сарнаков

Н.Ф. Гусарова