МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ПОБЕДИТЕЛЬ КОНКУРСА ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВУЗОВ

Случайные события, случайные величины

Методические указания по решению задач

Санкт-Петербург

2009

Блинова И.В., Попов И.Ю. Случайные события, случайные величины / Методические указания по решению задач. СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. 52 с.

Пособие предназначено для самостоятельной работы студентов по теме «Случайные события, случайные величины». Предназначено студентам всех специальностей и преподавателям.

Рекомендовано к печати Советом естественнонаучного факультета 23.12.2008 (протокол N 5)

ПРИОРИТЕТНЫЕ НАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКТЫ
«Образование»

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

1. Непосредственное вычисление вероятностей

1.1. Основные понятия.

Опытом или испытанием в теории вероятностей называется некоторый комплекс условий, фиксируемый при исследовании какого-нибудь явления.

Предполагается, что данный опыт можно воспроизвести любое число раз.

Опыт можно характеризовать качественно, рассматривая в качестве результата (исхода) опыта наблюдение какого-либо факта. Всякий такой факт называется событием. Примеры событий:

a) Выпадение четного числа очков при бросании игрального кубика.

b) Отказ прибора в заданном промежутке времени.

Событие, обозначаемое Ω, называется достоверным, если оно обязательно происходит в данном опыте.

Событие называется невозможным, если оно не может произойти в данном опыте. Невозможное событие обозначается символом $\varnothing$.

Полной группой событий называется несколько событий $A_1, A_2, ..., A_n$, если в данном опыте происходит хотя бы одно из этих событий.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются попарно несовместными, если никакие два из них не могут произойти в данном опыте одновременно.

Среди всех событий, связанных с данным опытом ξ, можно выделить множество событий $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...$, обладающих тем свойством, что в результате опыта происходит одно и только одно из этих событий. Например, при бросании игрального кубика такими событиями являются:

1) выпадение одного очка
2) выпадение двух очков
3) выпадение трех очков
4) выпадение четырех очков
5) выпадение пяти очков
6) выпадение шести очков

События, обладающие указанными свойствами, называются элементарными событиями, а множество всех элементарных событий – пространством элементарных событий.

Всякое событие A, которое может произойти или не произойти в опыте ξ, рассматривается как некоторое подмножество множества Ω элементарных событий. Так событие A, состоящее в выпадении четного числа очков при бросании игрального кубика, происходит, если выпадает либо два очка, либо четыре очка, либо шесть очков.

Пусть опыт ξ, в котором может произойти событие A, повторяется n раз.

Относительной частотой $P_n^*\left(A\right)$ события A в n опытах называется отношение числа $n(A)$ опытов, в которых произошло событие A, к общему числу опытов.

$$P_n^*\left(A\right) = \frac{n\left(A\right)}{n} \qquad (1.1)$$

<u>Пример 1</u>. В прошедшей проверку ОТК партии из 500 приборов оказалось десять приборов, не удовлетворяющих требованиям технических условий. Чему равна относительная частота появления некондиционного прибора?

<u>Решение</u>. $n = 500,\ \ n\left(A\right) = 10,\ \ P_n^*\left(A\right) = \frac{10}{500} = 0{,}02.$

Относительная частота событий обладает свойством устойчивости, которое заключается в том, что при неограниченном числе повторений опыта относительная частота стабилизируется, принимая значения практически сколь угодно мало отличающиеся от некоторого числа из отрезка $\left[0{,}1\right]$.

Свойство устойчивости относительной частоты позволяет сравнивать события по тому, как часто каждое из них происходит при повторении данного опыта и считать, что с каждым событием связано некоторое число – вероятность этого события, - около которого стремится стабилизироваться относительная частота.

На этом частотном или, как часто говорят, на статическом истолковании вероятности события основаны практически все приложения теории вероятностей. Значение вероятности события, в соответствии с ее статическим истолкованием, находится по экспериментальным данным и принимается приближенно равным значению относительной частоты события, полученному в результате большого числа опытов.

Оказывается, что для некоторых опытов можно не проводить специальных экспериментов, чтобы оценить вероятность события, и вычислить вероятность события непосредственно по условиям опыта. Такие опыты рассматриваются в пунктах 1.1 и 1.2 этого раздела.

<u>Пример 2</u>. Описать пространство элементарных событий, связанное с опытом, который состоит в одновременном бросании двух монет, каждая из которых может упасть гербом или цифрой вверх.

<u>Решение</u>. Пространство элементарных событий состоит из четырех событий, указанных в таблице.

условный номер *i*	**1**	**2**	**3**	**4**
Элементарное событие ω_i	герб, герб	герб, цифра	цифра, герб	цифра, цифра

<u>Пример 3</u>. Очередность выполнения компьютером пяти одновременно поступивших заданий А, В, С, Д, Е устанавливается случайным образом. Описать пространство элементарных событий, связанных с опытом, заключающимся в установлении очередности выполнения заданий компьютером.

Решение. Элементарными событиями являются всевозможные перестановки из пяти заданий А, В, С, Д, Е.

Число всех событий, образующих элементарное пространство, равно числу всех перестановок из пяти элементов $n = P_5 = 5! = 120$.

Задачи.

1. Во время тренировки по прыжкам в высоту спортсмен, выполнив 30 прыжков, сбил планку восемь раз. Определить относительную частоту удачных попыток.
2. В 2000 наблюдений солнечной активности астрономами было зафиксировано 38 вспышек заданной интенсивности μ. Определить относительную частоту солнечных вспышек интенсивности μ.
3. Машинистка, печатая статью, содержащую 2736 знаков, сделала 27 опечаток. Определить относительную частоту появления опечатки в работе этой машинистки.
4. За пять лет наблюдения погоды в Москве было зафиксировано 340 солнечных дней. Определить относительную частоту солнечных дней в этом городе, считая число дней в году равным 365.
5. После транспортировки партии из 30 отрегулированных электронных приборов нуждаться в наладке может любой из них. Описать пространство элементарных событий, связанное с числом приборов, нуждающихся в наладке.
6. В шахматном турнире участвуют восемь равных по силе шахматистов. Описать пространство элементарных событий, связанное с распределение первых трех призовых мест.
7. Описать пространство элементарных событий, связанное с опытом, который состоит в одновременном бросании:
   a) двух игральных костей
   b) трех игральных костей
8. В ящике находятся шесть пронумерованных шаров с номерами от 1 до 6. Наугад выбираются два шара. Описать пространство элементарных событий этого опыта.
9. Определяется срок службы бытового электрического прибора. Описать пространство элементарных исходов данного эксперимента, если срок службы может быть неограничен.

1.2. Схема случаев

Пусть пространство элементарных событий, связанное с опытом ξ, в котором рассматривается событие A, является конечным. Это значит, что:

a) имеется n элементарных событий $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$;

b) события $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ являются попарно несовместными и образуют полную группу событий.

Кроме того, по условиям опыта события $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ являются равновозможными. Предположение о равновозможности элементарных событий означает, что вероятности всех элементарных событий считаются одинаковыми и в рассматриваемом опыте принимаются равными $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$; $i = 1, 2, ..., n$.

Элементарные события, обладающие указанными свойствами, называются случаями.

Пусть осуществление любого из m элементарных событий, например, $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, влечет осуществление события A. События $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ называют благоприятными событию A.

Тогда вероятность события A в опыте ξ можно вычислить по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1.2}$$

здесь n - число всех случаев (элементарных событий); m - число случаев, благоприятных событию A.

<u>Пример 1</u>. Установлено, что неисправность прибора вызвана неисправностью одного из пяти элементов, последовательно включенных в электрическую схему прибора (рис.1). Для устранения неисправности прибора первый элемент заменятся исправным. Если неисправность не устраняется, то замененный элемент устанавливается на место и заменяется исправным следующий элемент и т.д.

a) Чему равна вероятность устранения неисправности прибора в результате замены первого элемента?

b) Чему равна вероятность устранения неисправности прибора в результате замены третьего элемента?

Рис.1

<u>Решение</u>.

a) Так как неисправным может быть любой из пяти элементов, то число всех случаев, $n = 5$.

Число случаев, благоприятных событию A (неисправность прибора устранена) $m = 1$.

Вероятность события A вычисляем по формуле (1.1):

$$P(A) = \frac{1}{5}.$$

b) Теперь требуется найти условную вероятность события A при условии, что произошло событие B, состоящее в том, что два первых элемента оказались исправными.

Число всех случаев $n=3$, число случаев, благоприятных событию A, по прежнему $m=1$.

Искомая вероятность $P\left(A/B\right)=\frac{1}{3}$.

<u>Пример 2</u>. Найти вероятность того, что четырехзначный цифровой шифр замка состоит из различных цифр.

<u>Решение</u>. Число всех случаев равно числу всех четырехзначных шифров, которые можно составить из десяти цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, и отличающихся друг от друга либо самими цифрами, либо порядком следования цифр, причем каждая цифра может повторяться в шифре от 0 до четырех раз. Это число равно числу размещений с повторениями из 10 цифр по четыре цифры в соединении.

$$n=\bar{A}_{10}^{4}=10^{4}.$$

Число случаев благоприятных событию A - четырехзначный шифр состоит из различных цифр – равно числу всех четырехзначных шифров, также отличающихся друг от друга либо цифрами, либо порядком цифр, но теперь каждая цифра в шифре может повторяться не более одного раза. Это число равно числу размещений без повторений из десяти цифр по четыре цифры в соединении

$$m=A_{10}^{4}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7=504.$$

Искомая вероятность $P\left(A\right)=0{,}504$.

<u>Пример 3</u>. Партия из 20 однотипных подшипников содержит шесть подшипников повышенного качества.

a) Найти вероятность того, что среди четырех, взятых из партии для сборки прибора, подшипников имеется один повышенного качества.

b) Чему равна вероятность того, что среди четырех, взятых из партии подшипников, имеется хотя бы один повышенного качества?

<u>Решение</u>.

a) Число всех случаев равно числу всех способов, которыми можно составить группы по четыре подшипника каждая и отличающиеся друг от друга хотя бы одним подшипником. Это число способов равно числу сочетаний из 20 элементов по четыре в соединении.

$$n=C_{20}^{4}=\frac{20!}{4!\,16!}=4845.$$

Число случаев, благоприятных событию A (среди взятых четырех подшипников имеется один повышенного качества) равно числу возможных групп, каждая из которых содержит три подшипника обычного качества и один повышенного, отличающихся друг от друга хотя бы одним подшипником. Это число равно произведению числа всех способов, которыми можно составить из имеющихся подшипников группы по три подшипника обычного качества и числа всех способов, которыми можно составить группы из одного подшипника повышенного качества. Таким образом,

$$m = C_{14}^{3} \cdot C_{6}^{1} = \frac{14! \cdot 6}{3!\ 11!} = 2184.$$

Искомая вероятность равна:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{14}^{3} \cdot C_{6}^{1}}{C_{20}^{4}} = \frac{2184}{4845} = 0,451.$$

b) Число всех случаев то же $n = C_{20}^{4}$.

Число благоприятных случаев равно числу возможных групп по четыре подшипника в группе, среди которых имеется по крайне мере один повышенного качества. Это значит, что группы, отличающиеся друг от друга хотя бы одним подшипником, могут содержать от одного до четырех подшипников повышенного качества. Поэтому

$$m = C_{14}^{3} \cdot C_{6}^{1} + C_{14}^{2} \cdot C_{6}^{2} + C_{14}^{1} \cdot C_{6}^{3} + C_{14}^{0} \cdot C_{6}^{4} = 3844.$$

Вычисляем вероятность того, что среди взятых четырех подшипников имеется хотя бы один повышенного качества.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3844}{4845} = 0,793$$

Эту задачу лучше решать, определив сначала вероятность события $\bar{A}$, противоположного событию A. Событие $\bar{A}$ состоит в том, что среди четырех, взятых для сборки прибора подшипников нет ни одного повышенного качества.

Число случаев, благоприятных событию $\bar{A}$

$$m = C_{14}^{4} \cdot C_{6}^{0} = \frac{14!}{4!\ 10!} = 1001.$$

Находим вероятность события $\bar{A}$.

$$P(\bar{A}) = \frac{m_1}{n} = \frac{C_{14}^{4} C_{6}^{0}}{C_{20}^{4}} = \frac{1001}{4845} = 0,207.$$

Вероятность события A находится по формуле

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,207 = 0,793.$$

Задачи.

1. Монета подбрасывается три раза. Какова вероятность того, что:
   a) все три раза выпадет герб;
   b) герб выпадет не более двух раз.

2. Телефонизация города достигла уровня использования всех семизначных номеров телефонов. Какова вероятность случайным образом набрать номер требуемого абонента. Найти вероятность этого события при условии, что:

a) неизвестна только последняя цифра номера;
b) известны три последние цифры номера;
c) известны первые три цифры номера.

3. Из букв Я, В, Р, Е, Т, Ь, О, Н, С, О случайным образом составляют слово. Найти вероятность того, что полученным словом будет слово ВЕРОЯТНОСТЬ.

4. Колода из пяти перфокарт А, Б, В, Г, Д сложена правильно, если их последовательность такова Д, Г, В, Б, А.

a) Определить, вероятность того, что после перемешивания колода окажется сложенной правильно.
b) Какова вероятность того, что после перемешивания перфокарты Г и В окажутся рядом?

5. Из колоды в 52 карты наудачу извлекают три. Найти вероятность того, что это будут тройка, семерка, туз. Определить эту вероятность при условии, что в колоде недостает тройки пик и девятки червей.

6. В кассовом ящике имеется пять монет по 20 коп., три монеты по 15 коп., пять монет по 10 коп. Наугад берутся восемь монет. Какова вероятность, что в сумме они составят рубль?

1.3. Геометрические вероятности

Пусть связанное с рассматриваемым опытом пространство элементарных событий является бесконечным (несчетным), но выполняются следующие условия:

a) любые два элементарных события несовместны;
b) по условию опыта элементарные события являются равновозможными.

В таких опытах вероятности некоторых событий можно вычислять геометрически как отношение длин отрезков, площадей фигур или объемов соответствующих областей.

Пример 1. Поезда метро идут в данном направлении с интервалом три минуты. Чему равна вероятность того, что пассажиру придется ждать более двух минут?

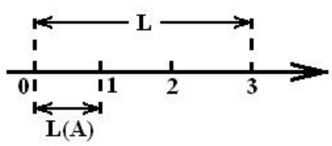


Рис. 2

Решение. Следует считать все моменты появления пассажира в интервале между поездами (0,3) одинаково вероятными. Элементарными событиями, благоприятными событию A - время ожидания больше двух минут, -

являются моменты появления пассажира, принадлежащие интервалу (0,1) (рис.2).

Искомая вероятность находится как отношение длин двух интервалов времени:

$$P(A)=\frac{l(A)}{l}=\frac{1}{3}.$$

<u>Пример 2</u>. Отрезок длины l случайным образом разбит на три части. Определить вероятность того, что из этих частей можно составить треугольник.

<u>Решение</u>. Обозначим длину участков разбиения через x, y и z (рис 3).

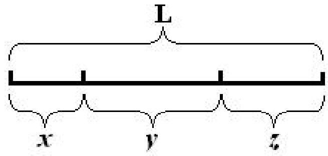


Рис. 3

Элементарное событие ω характеризуется двумя параметрами x и y, т.к. $z=l-x-y$. Изобразим это событие на плоскости OXY (рис.4).

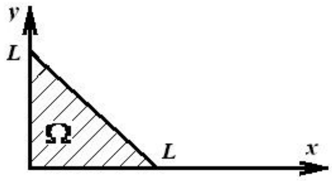


Рис. 4

По условию задачи $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+y\leq l$. Поэтому пространство элементарных событий представляет собой прямоугольный треугольник (заштрихованная область на рис. 4 с катетами, равными l). Площадь этого треугольника $S_\Omega=\frac{l^2}{2}$. Из трех отрезков можно составить треугольник (событие A), если a) сумма двух любых его сторон больше третьей и b) разность любых двух сторон меньше третьей. Этому условию соответствует область A на рис. 5.

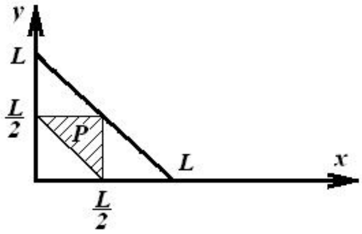


Рис. 5

Ее площадь $S_A=\frac{l^2}{8}$. Следовательно, $P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{1}{4}$.

Задачи.

1. Нить длины l была случайным образом разорвана. Найти вероятность того, что точка разрыва находится к середине нити ближе, чем $\frac{l}{3}$.
2. Точка M Случайным образом делит отрезок дины l на две части. Определить вероятность того, что какое-либо отношение длин этих отрезков будет меньше $\frac{1}{4}$.
3. В квадрате со стороной, равной единице, наугад выбрали точку. Найти вероятность того, что:
   a) точка будет выбрана из квадрата со стороной, равной $\frac{1}{8}$, расположенного в фиксированном углу исходного квадрата;
   b) точка будет выбрана из квадрата со стороной, равной $\frac{1}{8}$, расположенного в любом из углов исходного квадрата;
   c) расстояние от выбранной точки до ближайшей стороны квадрата будет меньше $\frac{1}{4}$.
4. В правильном треугольнике со стороной, раной 5, случайным образом выбрана точка. Найти вероятность того, что:
   a) расстояние от нее до ближайшей вершины будет меньше 1;
   b) она падает в круг, вписанный в этот треугольник.
5. Внутри квадрата со стороной равной 10 случайным образом расположен круг радиуса 1. Какова вероятность того, что этот круг накрывает центр квадрата?
6. Двое договорились встретиться в условном месте в промежуток времени от 15 часов до 15 часов 30 минут. Определить вероятность того, что время ожидания одним другого не будет превышать 5 минут, если момент появления любого из них в указанный промежуток времени равновозможен.

2. Вероятности сложных событий

2.1. Действия с событиями

Событие A называется частью события B ($A \subset B$), если наступление события A влечет наступление события B.

Пример 1. При бросании игрального кубика событие A, состоящее в выпадении двух очков, является частью события B - выпадение четного числа очков.

События A и B называются равносильными, если наступление события A влечет наступление события B ($A \subset B$), и наступление события B влечет наступление события A ($B \subset A$). В этом случае пишут $A = B$.

Пример 2. Опыт состоит в одновременном бросании двух игральных кубиков. Равносильными являются следующие события: A - выпадение четного числа очков, B - выпадение на обоих кубиках числа очков одинаковой четности.

Объединением или суммой событий A и B называется событие, состоящее в осуществлении хотя бы одного из этих событий; для объединения событий применяются обозначения $A \cup B$ или $A + B$.

Пересечением или произведением двух событий A и B называется событие, состоящее в совместном осуществлении этих событий. Для пересечения событий применяются обозначения $A \cap B$ или $A \cdot B$. На рис. 6 иллюстрируются операции включения, объединения и пересечения событий. Опыт состоит в том, что случайная точка занимает то или иное положение внутри прямоугольника. Множество всех точек прямоугольника – пространство Ω элементарных событий. Событие A - попадание случайной точки в область, обозначенную буквой A. Событие B - попадание случайной точки в область, обозначенную буквой B. Объединение (сумма) $A + B$ и пересечение (произведение) $A \cdot B$ событий A и B - попадание случайной точки в заштрихованные области на рис. 6,б и рис. 6,в соответственно.

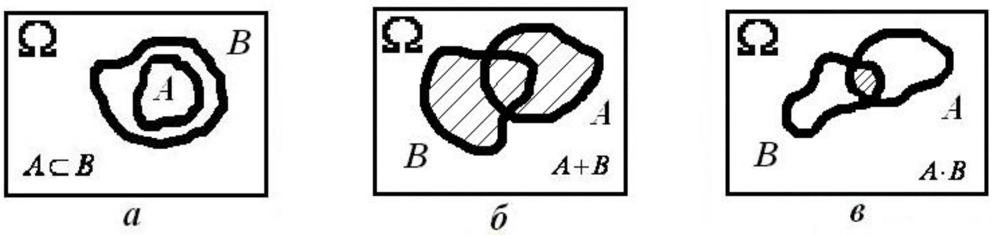


Рис. 6

Объединение (сумма) и пересечение (произведение) событий обладают следующими свойствами:

1. $A + B = B + A$ - свойство переместительности.

2. $\left(A + B\right) + C = A + \left(B + C\right)$; $A \cdot \left(B \cdot C\right) = \left(A \cdot B\right) \cdot C$ - сочетательное свойство.

3. $\left(A + B\right) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ - распределительное свойство.

4. $A + A = A$, $A \cdot A = A$.

5. $A + \varnothing = A$, $A \cdot \varnothing = \varnothing$.

6. $A + \Omega = \Omega$, $A \cdot \Omega = A$.

Здесь $\varnothing$ - невозможное событие; Ω - достоверное событие.

Если события A и B образуют полную группу событий, то их сумма – достоверное событие. $A + B = \Omega$.

Если события A и B несовместны, то их произведение невозможное событие $A \cdot B = \varnothing$.

Два противоположных события A и $\overline{A}$ несовместны и образуют полую группу событий, поэтому $A + \overline{A} = \Omega$ и $A \cdot \overline{A} = \varnothing$.

Принцип двойственности. Операции объединения (сложения) и пересечения (умножения) меняются местами при переходе к противоположным событиям.

Этот принцип выражают формулы $\overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A + B}$, $\overline{A} + \overline{B} = \overline{A \cdot B}$.

Пример 3. Производится три выстрела по мишени. Возможными событиями являются: A_1 - попадание при первом выстреле, A_2 - попадание при втором выстреле; A_3 - попадание при третьем выстреле. Записать события, состоящие в том, что:

a) в мишени будет хотя бы одно попадание;
b) в мишени не будет ни одного попадания;
c) в мишени будет ровно одно попадание;
d) в мишени будет не более одного попадания.

Решение.

a) Событие A - в мишени будет хотя бы одно попадание – по определению суммы событий находим: $A = A_1 + A_2 + A_3$.

b) Событие B - в мишени нет не одного попадания – является противоположным событию A.

$$B = \overline{A} = \overline{A_1 + A_2 + A_3} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$$

здесь события $\overline{A_1}$ (промах при первом выстреле), $\overline{A_2}$ (промах при втором выстреле), $\overline{A_3}$ (промах при третьем выстреле) являются противоположными событиями A_1, A_2 и A_3 соответственно.

c) Событие C – в мишени ровно одно попадание – представляет собой объединение (сумму) событий, каждое из которых состоит из совместного попадания в мишень при одном из выстрелов и не попадании при двух других выстрелах, поэтому

$$C = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$$

d) Событие D – в мишени не более одного попадания – происходит, если либо по мишени нет попаданий, либо в мишени ровно одно попадание, то есть событие D представляет собой сумму событий B и C.

$$D = B + C = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3.$$

Пример 4. Упростить выражение $(A + B) \cdot (A + \overline{B})$.

Решение. Применим принцип двойственности. Рассмотри событие, противоположное событию $(A + B) \cdot (A + \overline{B})$:

$$\overline{(A + B) \cdot (A + \overline{B})} = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = \overline{A}(\overline{B} + B) = \overline{A} \cdot \Omega = \overline{A}$$

Следовательно, $(A+B)\cdot(A+\overline{B})=A$.

Задачи.

1. Упростить запись $\overline{A}\cdot\overline{A}$ и $\overline{A}+\overline{A}$.
2. Пользуясь свойствами действий с событиями, упростить следующие выражения:
   a) $BA+\overline{A}B$;
   b) $AAB+A\overline{A}B+AB\overline{B}+AB\overline{A}\overline{B}$;
   c) $\left(\overline{A+B}\right)\overline{AB}$;
   d) $\left(A+\overline{C}\right)\left(B+\overline{A}\right)\left(C+\overline{B}\right)$.
3. Какими должны быть события A и B, чтобы выполнялись равенства:
   a) $A+B=\Omega$,
   b) $A+B=A$.
4. Совместны ли возможные события:
   a) A и AB;
   b) A и $\overline{A}\cdot B$;
   c) A и $A+B$;
   d) A и $\overline{A+B}$.
5. Опыт состоит в бросании двух монет. В качестве результата (выпадение герба или цифры) рассматриваются следующие события:

   A={герб на первой монете}; B={цифра на первой монете}; C={герб на второй монете}; D={ цифра на второй монете}; E={хотя бы один герб}; F={хотя бы одна цифра}; G={один герб и одна цифра}; H={ни одного герба}; K={два герба}.

   Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события:

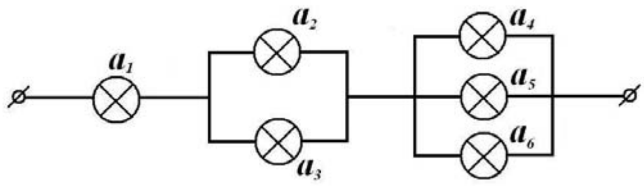
   a) $A+C$, b) $A\cdot C$, c) $E\cdot F$, d) $G+E$, e) $G\cdot E$, f) $B\cdot D$, g) $E+K$
6. По каналу связи передаются последовательно три сообщения, каждое из которых может быть передано правильно или искажено. Рассматриваются события: A_i={i-е сообщение передано правильно}, $\overline{A_i}$={i-е сообщение искажено} (i=1,2,3,).

   Выразить в виде сумм, произведений или сумм произведений событий A_i, $\overline{A}_i$ следующие события:

   a) А={все три сообщения переданы правильно};
   b) В={все три сообщения искажены}
   c) С={хотя бы одно сообщение передано правильно}
   d) Д={хотя бы одно сообщение искажено}
   e) Е={не менее двух сообщений переданы правильно}
   f) F={не более одного сообщения передано правильно}

g) G={первое правильно переданное сообщение – третье по порядку}

7. Электрическая цепь, состоящая из шести ламп a_1, a_2, …, a_6 имеет вид



Пусть события A_k заключаются в перегорании ламп a_k, k = 1, 2, …, 6. Будет ли цепь замкнута, если выполняются следующие события:

a) $A_1 \cdot \left(\overline{A_2} + \overline{A_3}\right)\left(A_4 + \overline{A_5}\right)$ b) $\overline{A_1} A_2 A_3 + A_1$

c) $\overline{A_4 A_5 A_6 + A_2 A_3 + A_1}$ d) $\left(A_1 + A_2\right)\left(A_1 + A_3\right)\left(A_2 + A_4\right)$

8. В условиях предыдущей задачи записать события, заключающиеся в том, что:

a) все лампы целы;

b) перегорели лампы a_2, a_3, a_5;

c) перегорели лампы a_4 или a_6 и a_2 или a_3;

d) хотя бы одна лампа цела.

2.2. Вероятность суммы и произведения событий

Вероятность суммы нескольких попарно несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n$ равна сумме их вероятностей:

$$P\left(A_1 + A_2 + \ldots A_n\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + \ldots + P\left(A_n\right) \qquad (2.1)$$

Эта формула распространяется на случай любого счетного множества событий и записывается так

$$P\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(A_k\right) \qquad (2.2)$$

Если события A и B являются совместными, то вероятность суммы событий $A+B$ находится по формуле

$$P\left(A+B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cdot B\right) \qquad (2.3)$$

Пример 1. В лотерее разыгрываются 20 выигрышей из них два по 10 руб., шесть по 5 руб., и 12 по 2 руб. Чему равна вероятность выиграть не менее пяти рублей человеку, имеющему один билет?

Решение. Чтобы выиграть на один билет не менее пяти руб., нужно либо выиграть 10 руб., либо – 5 руб. Событие A - выигрыш не менее пяти руб. – есть сумма

$$A = A_1 + A_2$$

где A_1 - выигрыш 10 руб., A_2 - выигрыш 5 руб. Так как эти события несовместные, то

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{2}{100}+\frac{6}{100}=0,08$$

Вероятность произведения двух событий A и B находится по формулам

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A), \tag{2.4}$$

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A/B) \tag{2.5}$$

Эти формулы обобщаются на случай нескольких событий:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cdot A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1}) \tag{2.6}$$

В соответствии с этой формулой вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятности первого события на условную вероятность второго события, при условии, что первое событие произошло, на условную вероятность третьего события, при условии, что два первых события произошли и.т.д.

Пример 2. Последняя цифра шифра секретного замка неизвестна и набирается наудачу. Найти вероятность того, что будет сделано больше трех попыток, чтобы открыть замок.

Решение. Чтобы число попыток открыть замок превышало три, в первых трех попытках должна набираться неверная цифра. Поэтому событие A - число попыток больше трех – представляется в виде

$$A=A_1\cdot A_2\cdot A_3,$$

где событие A_i={в *i*-ой попытке набрана неверная цифра}. Так как из десяти цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 верной является одна, то вероятность набрать цифру неверно в первой попытке равна $P(A_1)=\frac{9}{10}$.

После первой попытки одна неверная цифра становится известной, и условная вероятность набрать цифру неверно во второй попытке, при условии, что и в первой попытке она была набрана неверно, равна $P(A_2/A_1)=\frac{8}{9}$.

После второй попытки известны уже две неверные цифры, поэтому $P(A_3/A_1\cdot A_2)=\frac{7}{8}$

Находим теперь искомую вероятность

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cdot A_2)=\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}=0,7$$

Событие A называется независимым от события B, если вероятность события A не зависит от того, произошло или нет событие B, то есть если $P(A/B)=P(A)$.

События $A_1,A_2,\ldots,A_n$ называются независимыми (независимыми в совокупности), если вероятность любого из них не зависит от наступления какого-либо пересечения остальных событий.

В случае независимых событий формулы для вероятности произведения событий принимают вид:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B), \qquad (2.7)$$

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n) \qquad (2.8)$$

Пример 3. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания в мишень. Найти вероятность того, что каждый стрелок израсходует не более одного патрона, если вероятность попадания для первого стрелка равна 0,7, а для второго - 0,6.

Решение. Противоположным событию A - каждый стрелок израсходует не более одного патрона – является событие $\overline{A}$ - при первых двух выстрелах в мишени нет попаданий.

$$\overline{A}=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2,$$

где $\overline{A}_1$ - промах у первого стрелка, $\overline{A}_2$ - промах у второго стрелка.

$$P(\overline{A})=P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)=0{,}3\cdot 0{,}4=0{,}12.$$

Искомая вероятность равна $P(A)=1-P(\overline{A})=0{,}88$.

Задачи.

1. Из набора цифр 1, 2, …, 9 наугад последовательно выбираются две цифры. Какова вероятность того, что в результате этого:
   a) образуется число 13;
   b) образуется число 31;
   c) образуются числа 13 или 31?
2. При проверке контрольных работ по математике в двух группах оказалось, что в первой группе пять работ оценены отлично, семь – хорошо, одна – удовлетворительно и три – неудовлетворительно. Во второй группе число работ оцененных соответствующим образом: 3, 7, 13 и 5.

   Определить вероятность того, что две наугад взятые работы из двух групп будут оценены: a) на отлично, b) одинаково.
3. Имеется колода из 36 игральных карт. Опыт состоит в извлечении наугад из колоды одной карты. Рассматриваются события: A - {вынута карта бубновой масти}, B - {вынут валет}. Найти вероятность события AB.
4. Одновременно подбрасываются три игральных кубика. Какова вероятность того, что:
   a) выпадет по шесть очков у каждого кубика;
   b) среди выпавших очков будут цифры 1, 3, 5.
5. Со ступени эскалатора одновременно могут сойти два, один или ни одного человека. Считая каждый такой исход равновозможным, определить вероятность того, что с двух параллельно работающих эскалаторов одновременно сойдут:

   a) четыре человека; b) три человека; c) два человека; d) один человек; e) не сойдет ни один человек.

6. Из коробки конфет, содержащей по 17 конфет трех разных типов, последовательно извлекают наудачу три конфеты. Определить вероятность того, что среди извлеченных конфет будут конфеты всех типов.
7. Трое лыжников съезжают с горы. Вероятности падения этих лыжников равны: 0,3; 0,2; 0,1. Найти вероятность того, что все три лыжника съедут с горы без падания.

2.3. Формула полной вероятности

Пусть в опыте ξ событие A может произойти с одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу событий $H_1, H_2, ..., H_n$, называемых гипотезами. Вероятности гипотез $P(H_i)$ заранее известны. Известны также условные вероятности $P(A/H_i)$ события A относительно гипотез H_i.

При этих условиях вероятность события A находится по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i) \tag{2.9}$$

<u>Пример</u>. Поступающие на конвейер детали одного наименования изготавливаются двумя автоматами. Производительность первого автомата – 80 деталей в час. Второго – 120 деталей в час. Процент брака для первого автомата составляет 0,1% , для второго - 0,05%. Чему равна вероятность того, что взятая с конвейера для проверки деталь – бракованная?

<u>Решение</u>. Рассмотрим гипотезы: H_1 - деталь изготовлена первым автоматом, H_2 - вторым.

Так как в течение часа изготовляется всего 200 деталей, то вероятности гипотез равны

$$P(H_1) = \frac{80}{200} = 0{,}4, \qquad P(H_2) = \frac{120}{200} = 0{,}6$$

Условные вероятности появления на конвейере бракованной детали относительно гипотез H_1 и H_2 заданы. Они равны:

$$P(A/H_1) = 0{,}001, \qquad P(A/H_2) = 0{,}0005$$

Искомую вероятность находим по формуле (2.9)

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}001 + 0{,}6 \cdot 0{,}0005 = 0{,}0007.$$

<u>Задачи</u>.

1. Имеется три коробки, содержащие два теннисных мяча отечественного производства, и четыре мяча сделанные в Индии, и две коробки, содержащие четыре теннисных мяча отечественного производства и два

индийских мяча. Из наугад выбранной коробки случайным образом извлекается мяч. Определить вероятность того, что он сделан в нашей стране.

2. Имеется пять лампочек, вероятности перегорания которых за первые 2500 часов работы равны 0,1; 0,15; 0,2; 0,25; 0,3 соответственно. Найти вероятность выхода из строя взятой наугад лампочки за первые 2500 часов работы.

3. Первая партия деталей содержит 65% изделий, изготовленных по пятому классу точности, а вторая партия 85%. Из этих партий случайным образом берут по одной детали и из них наугад выбирают одну. Найти вероятность того, что взятая деталь изготовлена по пятому классу точности.

4. Имеется пять пробирок, в двух из которых находится кислота, а в трех – щелочь. Случайным образом в одну из пробирок опускают лакмусовую бумажку. Определить вероятность ее окраски в синий цвет, если содержимое одной из пробирок наугад заменили водой.

5. В одном альбоме из 100 марок 45 марок погашены. В другом альбоме, содержащем такое же число марок, погашенных нет. Из первого альбома во второй переложена марка. Какова вероятность того, что извлеченная наугад марка из второго альбома окажется непогашенной?

6. В урну, содержащую пять шаров, опустили белый шар. Определить вероятность извлечения из урны белого шара, если все предположения о первоначальном числе белых шаров в урне равновозможны.

2.4. Формула Байеса

Пусть в опыте ξ событие A может произойти с одним из n попарно несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу событий. События H_i (i=1, 2,…,n) называются гипотезами. Вероятности гипотез $P(H_i)$ заранее известны. Известны также условные вероятности $P(A/H_i)$ события A относительно гипотез H_i.

Стало известно, что в результате опыта ξ произошло событие A. Нужно найти вероятность того, что событие A произошло вместе с гипотезой H_k, то есть требуется найти условную вероятность $P(H_k / A)$ гипотезы H_k при условии, что произошло событие A.

Эта вероятность находится по формуле Байеса:

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)} \qquad (2.10)$$

<u>Пример</u>. Для условий примера (п. 2.3) стало известно, что взятая с конвейера для проверки деталь бракованная. Чему равна вероятность того, что эта деталь изготовлена первым автоматом?

<u>Решение</u>. Вероятности гипотез и условные вероятности изготовления бракованной детали первым и вторым автоматами были определены в п. 2.3.

По формуле Байеса находим условную вероятность того, что оказавшаяся бракованной деталь изготовлена первым автоматом.

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A / H_1)}{P(A)} = \frac{0,4 \cdot 0,001}{0,0007} = 0,571.$$

<u>Задачи</u>.

1. Имеется три коробки, содержащие два теннисных мяча отечественного производства и четыре мяча, сделанных в Индии, и две коробки, содержащие четыре теннисных мяча отечественного производства и два индийских мяча. Из наугад выбранной коробки вынули индийский мяч. Найти вероятность того, что он извлечен из коробки содержащей больше отечественных мячей.
2. Прибор состоит из двух блоков и выходит из строя при отказе любого из блоков. Вероятность отказа первого блока в течение времени ***T*** равна 0,1, а второго за это же время – 0,2. Прибор испытывается в течении времени ***T***, в результате чего обнаружено, что он вышел из строя. Найти вероятность того, что отказал только первый блок, а второй исправлен.
3. Два автомата по продаже газированной воды укомплектованы бумажными и пластмассовыми стаканами, причем первый содержит 20% бумажных стаканчиков, а второй 30%. Предложенная Вам газированная вода оказалась в пластмассовом стакане. Какова вероятность, что она набрана во втором автомате?
4. Имеется три пробирки с кислотой и три со щелочью. Одна из пробирок заменена пробиркой с водой. Опущенная в наугад выбранную пробирку лакмусовая бумажка окрасилась в красный цвет. Определить вероятность того, что пробиркой с водой заменена пробирка, содержащая щелочь.
5. Имеется три партии изделий, в каждой из которых содержится 3%, 2% и 1% некондиционных изделий соответственно. Из наугад выбранной партии случайным образом взятое изделие оказалось некондиционным. Какова вероятность того, что оно взято из первой партии?
6. В урну, содержащую три шара, опустили черный шар, после чего выбранный из нее наугад шар оказался белым. Определить вероятность того, что первоначально в урне было два черных шара.
7. Вероятность попадания при каждом выстреле для трех стрелков равна соответственно $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$ и $\frac{3}{4}$. Стрелки произвели по одному выстрелу, в результате чего было одно попадание. Какова вероятность того, что попал первый стрелок?

2.5. Формула Бернулли

Испытание ξ заключается в том, что некоторый опыт Q, в котором событие A может произойти с вероятностью P, повторяется n раз. Требуется найти вероятность того, что в испытании ξ (при повторении опыта Q n раз) событие A произойдет m раз.

Эта вероятность находится по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \ m = 0, 1, \dots, n \qquad (2.11)$$

В этой формуле C_n^m - число сочетаний из n элементов по m элементов.

Пример. Вероятность сбоя разменного автомата метро при обмене одной монеты равна 0,005. Какова вероятность того, что при размене 100 монет автомат даст сбой:

a) ровно три раза, b) не менее двух раз.

Решение. В соответствии с формулой Бернулли вероятность того, что автомат даст сбой ровно три раза, может быть определена по формуле $P_{100}(3) = C_{100}^3 \cdot 0{,}005^3 \cdot 0{,}995^{100-3} \approx 0{,}01$. При решении задачи b) удобно вначале найти вероятность противоположного события, т.е. вероятность того, что автомат не сделает ни одного сбоя или сделает один сбой. Имеем, $P_{100}(0) = C_{100}^0 \cdot 0{,}005^0 \cdot 0{,}995^{100} \approx 0{,}5$; $P_{100}(1) = C_{100}^1 \cdot 0{,}005^1 \cdot 0{,}995^{99} \approx 0{,}25$. Тогда вероятность того, что автомат даст не менее двух сбоев равна $1 - P_{100}(0) - P_{100}(1) = 1 - 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25$.

Задачи.

1. Игральный кубик подбрасывается шесть раз подряд. Какова вероятность того, что шестерка выпадет ровно два раза?
2. При попытке установить связь линия связи с вероятностью p оказывается занятой. Какова вероятность того, что при 10 попытках абонент сможет осуществить связь не менее восьми раз?
3. Три электрические лампочки включены в цепь последовательно. В условиях повышенного напряжения вероятности перегорания каждой лампочки одинаковы и равны 0,3. Найти вероятность разрыва цепи при повышенном напряжении.
4. Для снижения числа аварийных ситуаций, связанных с выходом из строя какого-либо блока на самолете или в космическом аппарате, его дублируют n раз, таким образом, что неисправный блок автоматически заменяется исправным, не нарушая всей системы. Вероятность выхода блока из строя в течение контрольного времени $\boldsymbol{T}$ равна 0,05. Какова вероятность того, что в интервале времени длительностью восемь $\boldsymbol{T}$ система окажется в аварийной ситуации (n=2)?
5. Вероятность попадания стрелком в мишень при каждом выстреле равна 0,75. Какова вероятность того, что при 10 выстрелах стрелок сделает менее трех промахов?

6. Шахматист A выигрывает у шахматиста B в среднем в два раза больше партий, чем проигрывает. Какое число выигранных шахматистом A партий имеет наибольшую вероятность, если в матче играется восемь партий и ни одна из них не заканчивается вничью?

3. Дискретные случайные величины

3.1. Аналитический и табличный способы задания закона распределения

Случайной величиной, связанной с опытом ξ, называется величина, которая в результате опыта ξ принимает то или иное, неизвестное заранее, значение. Значения, которые случайная величина может принять в данном опыте, называются возможными значениями случайной величины. Случайные величины обозначаются прописными буквами X, Y, Z, …, а их возможные значения – строчными буквами x, y, z, … .

Примеры случайных величин.

1. X - число выпавших очков при бросании игрального кубика. Его возможные значения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$,…, $x_6 = 6$.

2. Y - число отказов прибора в заданном интервале времени. Возможные значения случайной величины Y: $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$,… .

3. T - время безотказной работы прибора. Возможные значения этой случайной величины сплошь заполняют некоторый временной промежуток от $T = 0$ до $T = t$.

Случайная величина называется дискретной, если множество ее возможных значений конечно или счетно. Возможные значения дискретной случайной величины можно перенумеровать. В приведенных первом и втором примерах случайные величины X и Y - дискретные.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение между ее возможными значениями и соответствующими им вероятностями.

Существуют различные способы задания закона распределения дискретной случайной величины.

Аналитический способ состоит в том, что соответствующие возможным значениям случайной величины вероятности находятся аналитически с помощью формулы.

Табличный способ состоит в том, что возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности записываются в таблице (рис. 7). Возможные значения обычно располагаются в порядке возрастания номеров. Такая таблица называется рядом распределения.

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Рис. 7

Распределение дискретной случайной величины можно представить графически. Изображенный на рис. 8 график распределения дискретной случайной величины называется многоугольником распределения.

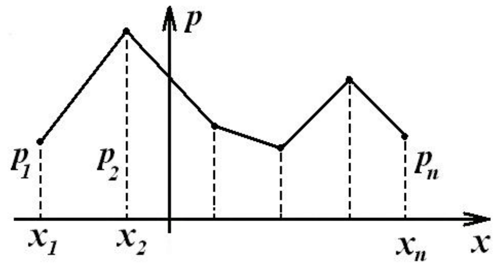


Рис. 8

Если множество возможных значений дискретной случайной величины конечно, то сумма вероятностей всех ее возможных значений равна единице.

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1 \qquad (3.1)$$

Если дискретная случайная величина имеет счетное множество возможных значений, то сумма ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i)$$

должна быть равна единице.

<u>Пример 1</u>. Стрелок стреляет по мишени до первого попадания. Найти закон распределения случайной величины X (число выстрелов до первого попадания в мишень), если вероятность попадания для стрелка равна p.

<u>Решение</u>. Случайная величина X имеет счетное множество возможных значений 1, 2, 3,…

Обозначим буквой A событие, заключающееся в том, что случайная величина X принимает значение, равное k. Это событие происходит, если в предыдущих $k-1$ выстрелах произошел промах, а в k-ом выстреле – попадание в мишень. Поэтому событие A записывается в следующем виде:

$$A = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot ... \cdot \overline{A}_{k-1} \cdot A_k$$

Здесь A_i - попадание в ***i***-ом выстреле (***i***=1, 2, …***k***),

$\overline{A}_i$ - промах в ***i***-ом выстреле.

Так как вероятность попадания для стрелка во всех выстрелах одинакова, то $P(A_k) = p$, $P(\overline{A}_i) = 1 - p$.

События $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_{k-1}, A_k$ являются независимыми, поэтому

$$P(A) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot ... \cdot P(\overline{A}_{k-1}) \cdot P(\overline{A}_k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

Мы получили формулу, позволяющую вычислит вероятность любого возможного значения случайной величины X:

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p, \quad k=1, 2, 3,...$$

Члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}$ являются элементами геометрической прогрессии, знаменатель которой $q=1-p<1$, следовательно, этот ряд сходится и его сумма равна:

$$S=\frac{p}{1-q}=\frac{p}{1-(1-p)}=1.$$

Ряд распределения случайной величины X, построенный для случая, когда вероятность попадания в мишень для стрелка равна 0,6, приведен на рис. 9.

x_i	**1**	**2**	**3**	…	$\boldsymbol{k}$	…
$P(X=x_i)$	p	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$	…	$p(1-p)^{k-1}$	…
$P(X=x_i)$	0,6	0,24	0,096	…	$0,6\cdot(0,4)^{k-1}$	…

Рис. 9

Задачи.

1. Спринтер в беге с препятствиями опрокидывает каждое из пяти препятствий с вероятностью 0,15. Найти закон распределения числа опрокинутых препятствий.
2. Рабочий изготавливает доброкачественную деталь с вероятностью 0,95. Построить ряд распределения числа бракованных изделий при изготовлении им четырех деталей.
3. На пути машины три светофора. Первый из них запрещает проезд с вероятностью 0,5, а два остальных с вероятностью 0,3. Определить закон распределения числа светофоров, пройденных машиной с остановками.
4. Из урны, содержащий один черный и четыре белых шара, последовательно случайным образом извлекают шары. Построить ряд распределения числа белых шаров, вынутых до появления черного шара.
5. Из партии в 20 деталей, содержащей четыре бракованных, случайным образом выбираются три детали. Найти закон распределения числа бракованных изделий в выборке.
6. Два стрелка имеют по два патрона. Каждый независимо стреляет по цели до первого попадания, причем вероятность попадания первого стрелка равна 0,8, а второго 0,9. Построить ряд распределения числа стрелков, у которых после стрельбы остался неизрасходованным хотя бы один патрон.

3.2. Функция распределения

Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X называется вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее некоторого фиксированного числа x.

$$F(x) = P(X < x) \tag{3.2}$$

Основные свойства:

1. Функция распределения – неубывающая функция:

при $x_2 > x_1$, $F(x_2) \geq F(x_1)$.

2. $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Значение функции распределения дискретной случайной величины с возможными значениями $x_1, x_2, ..., x_i, ...$ в точке x вычисляется по формуле

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) \tag{3.3}$$

если $x < x_1$, то $F(x) = 0$, при $x < x_n$, $F(x) = 1$.

График функции распределения дискретной случайной величины (рис. 10) – ступенчатый. Скачек графика функции распределения в точке x_i равен вероятности возможного значения $P(X = x_i)$. В точках $x_1, x_2, ... x_i, ...$ функция $F(x)$ непрерывна слева $\lim\limits_{x\to x_i - 0} F(x) = F(x_i)$.

Вероятность попадания случайной величины X в промежуток $[a, b)$ равна приращению функции распределения $F(x)$ на этом промежутке:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) \tag{3.4}$$

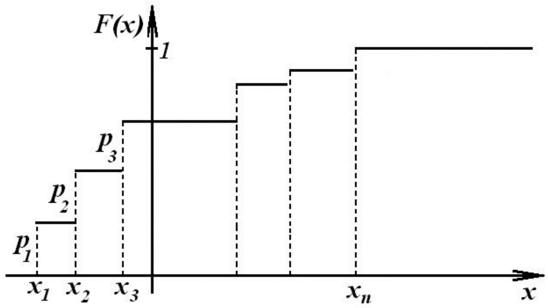


Рис. 10

Пример. На первом этаже девятиэтажного дома в лифт входят четыре пассажира, каждый из которых с одинаковой вероятностью может выйти на любом этаже, начиная со второго.

а) Найти функцию распределения числа пассажиров, выходящих на пятом этаже.

b) Чему равна вероятность того, что на пятом этаже выйдет от одного до трех пассажиров?

Решение. а) Случайная величина X (число пассажиров, выходящих на пятом этаже) имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2, 3, 4. Вероятность события $X = k$ можно найти по формуле

$$P(X=k)=\frac{m}{n}\ (0\le k\le 4).$$

Так как каждый из четырех пассажиров может с одинаковой вероятностью выйти на любом из восьми этажей, то число всех возможных случаев выхода пассажиров из лифта равно числу размещений с повторениями из восьми элементов (этажи) по четыре элемента в соединении:

$$n=\overline{A}_8^4$$

Число случаев, благоприятных событию A - на пятом этаже выходят с пассажиров равно:

$$m=C_4^k\cdot\overline{A}_7^{4-k}$$

Здесь C_4^k - число способов, которыми может быть образована группа из k пассажиров, выходящих на пятом этаже;

$\overline{A}_7^{4-k}$ - число всех способов выхода оставшихся четырех пассажиров на остальных семи этажах.

Формула для искомой вероятности принимает следующий вид:

$$P(X=k)=\frac{C_4^k\cdot\overline{A}_7^{4-k}}{\overline{A}_8^4},\ k=0,1,2,3,4.$$

Вычисленные по этой формуле вероятности возможных значений приведены в таблице:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,5862	0,3350	0,0718	0,0068	0,0002

Вычисляем значения функции распределения случайной величины по формуле (3.3):

при $x\le 0,\ F(x)=0$, при $0<x\le 1,\ F(x)=0{,}5862$, при $1<x\le 2,\ F(x)=0{,}9212$, при $2<x\le 3,\ F(x)=0{,}9930$, при $3<x\le 4,\ F(x)=0{,}9998$, при $x<4,\ F(x)=1$.

b) Вероятность того, что на пятом этаже выйдет от одного до трех пассажиров, равна:

$$P(1\le x<4)=F(4)-F(1)=0{,}9998-0{,}3350=0{,}6648$$

Задачи.

1. Каждый из трех пассажиров может с одинаковой вероятностью сесть в любой из трех идущих друг за другом трамваев. Найти функцию распределения числа пассажиров, севших в первый трамвай. Определить вероятность того, что в первый трамвай село не менее двух человек.
2. Две радарные установки независимо обнаруживают любой летящий в заданном районе объект с вероятностями 0,7 и 0,8 соответственно. В районе обнаружения оказалось два летящих объекта. Найти функцию

распределения числа обнаруженных объектов и вероятность того, что обнаружено не менее одного объекта.

3. Из 20 изделий, среди которых 16 изделий высшего качества случайным образом выбирается четыре изделия. Найти функцию распределения числа изделий высшего качества в выборке и найти вероятность того, что в выборке не менее трех изделий высшего качества.

4. Баскетболист бросает мяч в кольцо. Броски прекращаются либо после первого попадания мяча в кольцо, либо после того, как сделано три броска. Вероятность попадания равна 0,7. Найти функцию распределения числа бросков до первого попадания мяча в кольцо и вероятность того, что это число не больше двух.

5. В каждом из двух конвертов находится по три карточки с номерами 1, 2 и 3. Наугад выбирается по одной карточке из каждого конверта. Найти функцию распределения суммы номеров вынутых карточек и вероятность того, что эта сумма не меньше пяти.

6. Автоматическая ракетная установка, имеющая три ракеты, при появлении целей стреляет по любой из них и попадает с вероятностью 0,9. Стрельба производится либо до уничтожения всех появившихся целей, либо до израсходования ракет. В зоне обстрела появилось пять целей. Построить ряд распределения числа пораженных целей и найти вероятность того, что будет поражено от одной до двух целей.

3.3. Математическое ожидании и дисперсия дискретной случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется величина, которая определяется выражением

$$M\left[X\right]=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p_i \qquad (3.5)$$

где x_i - возможные значения случайной величины, $p_i=P(X=x_i)$ - вероятности возможных значений.

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины. При большом числе n повторении опыта ξ, с которым связана случайная величина X, среднее арифметическое возможных значений случайной величины $\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}$ стабилизируется около ее математического ожидания.

<u>Основные свойства</u>. Если X и Y случайные величины, а C - постоянная, то:

$M\left[C\right]=C$

$M\left[C\cdot X\right]=C\cdot M\left[X\right]$

$$M\left[X+Y\right]=M\left[X\right]+M\left[Y\right]$$

$$M\left[X\cdot Y\right]=M\left[X\right]\cdot M\left[Y\right]$$

для независимых случайных величин X и Y.

Дисперсией дискретной случайной величины X называется величина, которая определяется выражением

$$D\left[X\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M\left[X\right]\right)^2\cdot p_i \qquad (3.6)$$

Дисперсия характеризует рассеивание (разброс) возможных значений случайной величины относительно ее математического ожидания.

Дисперсию можно вычислять по формуле:

$$D\left[X\right]=M\left[X^2\right]-\left(M\left[X\right]\right)^2 \qquad (3.7)$$

Здесь $M\left[X^2\right]=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot p_i$ - математическое ожидание квадрата случайной величины X.

<u>Основные свойства</u>. Если X и Y случайные величины, а C - постоянная, то:

$$D\left[C\right]=0$$

$$D\left[C\cdot X\right]=C^2\cdot D\left[X\right]$$

$$D\left[X+Y\right]=D\left[X\right]+D\left[Y\right]$$

для независимых случайных величин.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma\left[X\right]=\sqrt{D\left[X\right]} \qquad (3.8)$$

<u>Пример</u>. Для условий примера п.3.2. найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа пассажиров, выходящих на пятом этаже.

<u>Решение</u>.

1) $M\left[X\right]=0\cdot 0,5862+1\cdot 0,3350+2\cdot 0,0718+3\cdot 0,0068+4\cdot 0,0002=0,50$

2) Дисперсию вычисляем по формуле (3.7):

$$M\left[X^2\right]=1^2\cdot 0,3350+2^2\cdot 0,0718+3^2\cdot 0,0068+4^2\cdot 0,0002=0,687$$

$$D\left[X\right]=0,687-(0,5)^2=0,437$$

3) Среднее квадратическое отклонение $\sigma\left[X\right]=\sqrt{0,437}=0,661$.

<u>Задачи</u>.

1. Игральный кубик подбрасывают три раза подряд. Определить математическое ожидание и дисперсию числа выпавших шестерок.
2. Биатлонист на рубеже стрельбы делает пят выстрелов по пяти мишеням. Найти математическое ожидание и дисперсию числа пораженных

мишеней, если вероятность попадания биатлонистом при одиночном выстреле равна 0,8.

3. Независимо подряд подбрасываются два игральных кубика. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы выпавших на двух кубиках очков.

4. Из урны, содержащих три белых и три черных шара, извлекают шары до тех пор, пока не появится черный шар. Найти математическое ожидание числа вынутых белых шаров, если каждый шар после извлечения возвращается в урну.

5. Производится ряд попыток наладить сложную электронную схему. Вероятность того, что схема будет налажена с первой попытки, равна 0,1; со второй – 0,2; с третьей – 0,3; с четвертой – 0,4. После четвертой безуспешной попытки наладить схему попытки прекращаются. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – общего числа произведенных попыток.

6. Последовательно три раза по линии связи передают сигнал. Вероятности неправильного распознавания сигнала при каждой передаче равны 0,1; 0,2; и 0,3 соответственно. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа правильно распознанных сигналов.

3.4. Биномиальное распределение и распределение Пуассона

Биномиальным распределение называется распределение случайной величины X - числа наступления события A в n опытах, в каждом из которых событие A может произойти с одной и той же вероятностью P. Это распределение задается формулой

$$P(X=m)=C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \tag{3.9}$$

математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, находятся по формулам:

$$M\left[X\right]=np, \quad D\left[X\right]=npq, \quad \sigma\left[X\right]=\sqrt{npq} \tag{3.10}$$

здесь $q=1-p$.

Случайная величина X с множеством значений 0, 1, 2,… имеет распределение Пуассона, если

$$P(X=m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} \tag{3.11}$$

Это распределение появляется при случайном распределении точек на числовой оси, где X - число точек, попадающих в данный интервал(a,b); λ - среднее число таких точек, если

1) точки на числовой оси распределяются независимо друг от друга;

2) вероятность попадания одной точки в бесконечно малый интервал $(x, x+\Delta x)$ есть $O(\Delta x)$, а вероятность попадания более одной точки в этот интервал является бесконечно малой величиной высшего порядка по сравнению с Δx.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, совпадают:

$$M\left[X\right]=\lambda, \quad D\left[X\right]=\lambda \tag{3.12}$$

Вероятность того, что случайная величина, имеющая распределение Пуассона, примет не равное нулю значение находится по формуле

$$P(X>0)=1-e^{-\lambda} \tag{3.13}$$

Распределение Пуассона является предельным по отношению к биномиальному распределению при неограниченном увеличении числа опытов $n \to \infty$, если при этом произведение $n \cdot p$ (p - вероятность наступления события A в отдельном опыте) сохраняет постоянное значение.

Это позволяет находить вероятность возможного значения биномиально распределенной случайной величины при большом числе опытов n и малой вероятности p наступления события A в отдельном опыте по приближенной формуле:

$$P(X=m)=\frac{(np)^m}{m!}e^{-np} \tag{3.14}$$

Пример 1. Машина, проезжая перекресток, может следовать дальше по любой из трех дорог **A**, **B** и **C**. К перекрестку последовательно подъезжают пять машин. Предполагая, что дальнейшее следование по дорогам **A**, **B** и **C** для любой из подъехавших машин равновозможно, определить распределение числа X машин, поехавших по дороге **A**. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. Из условия следует, что вероятность следования по дороге **A** для любой из машин равна $\frac{1}{3}$. Тем самым, имеем серию из 5 повторных и независимых испытаний, при этом случайная величина X принимает значения 0, 1, …, 5 и распределена по биномиальному закону. Составим ряд распределения этой случайной величины.

Значения X:	**0**	**1**	**2**
Вероятности p:	$C_5^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5 \approx 0{,}132$	$C_5^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4 \approx 0{,}329$	$C_5^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 0{,}329$

Значения X:	**3**	**4**	**5**
Вероятности p:	$C_5^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2\approx 0{,}165$	$C_5^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1\approx 0{,}041$	$C_5^5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0\approx 0{,}004$

Пользуясь формулами (3.10), находим $M\left[X\right]$, $D\left[X\right]$ и $\sigma\left[X\right]$:

$M\left[X\right]=np=5\cdot\frac{1}{3}\approx 1{,}667$, $D\left[X\right]=npq=5\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\approx 1{,}111$,

$\sigma\left[X\right]=\sqrt{D\left[X\right]}\approx 1{,}054$.

__Пример 2__. Частота вспышек средней мощности нестационарной звезды составляет в среднем 10 вспышек в сутки. Какова вероятность того, что в течение минуты будет зафиксировано

a) ровно две вспышки, b) не более двух вспышек?

Так как общее число вспышек в сутки равно 10, то математическое ожидание a их числа, приходящего на интервал времени длительностью в одну минуту, будет $a=\frac{10}{24\cdot 60}\approx 0{,}0069$. Вероятность того, что какая-то одна вспышка произойдет в данную минуту мала. Именно $p=\frac{1}{24\cdot 60}\approx 0{,}00069$. Ввиду того, что вспышки взаимно независимы, случайное число X вспышек, происходящих в данную минуту, можно считать распределенным по закону Пуассона. Тогда

$$P(X=2)=\frac{a^2}{2!}e^{-a}\approx\frac{0{,}0069^2}{2}\cdot\frac{1}{e^{0{,}0069}}\approx 0{,}000024;$$

$$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{a^0}{0!}e^{-a}+\frac{a^1}{1!}e^{-a}+\frac{a^2}{2!}e^{-a}=$$

$$=\frac{1+a+a^2/2}{e^a}\approx 0{,}99913$$

__Задачи__.

1. Подбрасывание монеты производится n раз. Определить закон распределения числа выпавших гербов. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
2. Хоккеист, исполняя штрафной бросок, забрасывает шайбу с вероятностью 0,9. По какому закону распределено число заброшенных шайб при 10 бросках? Каково среднее число заброшенных шайб и какова дисперсия этой случайной величины?
3. Игра заключается в набрасывании колец на колышек. Игрок получает 10 колец и последовательно набрасывает их на колышек, причем вероятность удачной попытки равна 0,4 при каждом броске. Можно ли утверждать, что

число X промахов игрока распределено по биномиальному закону? Найти $M[X]$, $D[X]$ и $\sigma[X]$.

4. Автоматическая телефонная станция получает в среднем 240 вызовов в час. Какова вероятность того, что в данную минуту она получит пять вызовов?
5. При контроле выпускаемых деталей автоматический контроллер отбраковывает в среднем 15 деталей в час. Считая, что число забракованных деталей распределено по закону Пуассона, найти вероятность того, что в данную минуту будет забракована хотя бы одна деталь.
6. Среднее число отказов при передаче сигнала радиорелейной станции равно 20 за 4800 часов работы. Определить вероятность хотя бы одного отказа станции в течение суток.

4. Непрерывные случайные величины

4.1. Плотность вероятности и функция распределения непрерывных случайных величин

Плотностью распределения вероятностей или, просто, плотностью вероятности непрерывной случайной величины X называется предел отношения вероятности попадания случайной величины в интервал $(x,\, x+\Delta x)$ к Δx при стягивании этого интервала к точке x.

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x<X<x+\Delta x)}{\Delta x} \qquad (4.1)$$

Отсюда следует, что произведение $f(x)\cdot\Delta x$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно Δx равно вероятности попадания случайной величины X в интервал $(x,\, x+\Delta x)$.

Если плотность вероятности известна, то вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал $(a,\, b)$ находится по формуле

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx \qquad (4.2)$$

Существует следующая связь между плотностью вероятности и функцией распределения непрерывной случайной величины:

$$f(x)=F'(x);\;\; F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad (4.3)$$

График плотности вероятности называется кривой распределения случайной величины X. Примерный вид кривой распределения и графика функции распределения непрерывной случайной величины показан на рис.11.

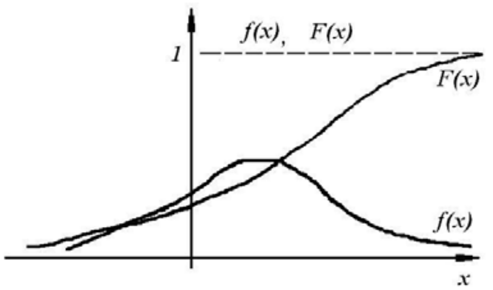


Рис. 11.

Основные свойства плотности вероятностей:

1. $f(x) \geq 0$,
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая этим свойствам, может рассматриваться как плотность вероятности некоторой непрерывной случайной величины.

Пример. Пусть плотность вероятности случайной величины X задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x, \textit{ если } x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0 \quad , \textit{ если } x \notin \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

a) Найти значение постоянной a.
b) Найти функция распределения случайной величины X.
c) Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Решение.

a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = a\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2a$

В соответствии со свойствами (2) $2a = 1$, отсюда $a = \dfrac{1}{2}$.

b) При $x \leq -\dfrac{\pi}{2}$, $F(x) = 0$,

при $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$, $F(x) = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \cos t dt = \dfrac{1}{2}\sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{x} = \dfrac{1+\sin x}{2}$,

при $\dfrac{\pi}{2} \leq x$, $F(x) = 1$.

c) $P(0 < X < \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Кривая распределения и график функции распределения приведены на рис. 12.

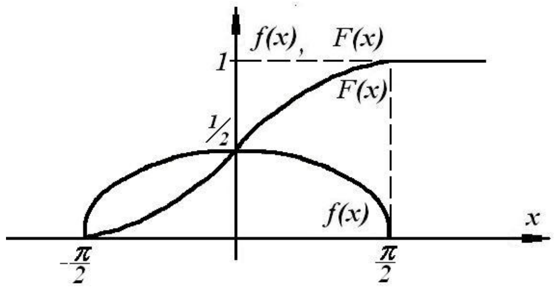


Рис. 12

Задачи.

1. Случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x) = \frac{A}{1+x^2}$. Определить постоянную A. Найти функция распределения $F(x)$ и вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервал (0,1).

2. Функция распределения случайной величины X имеет вид $F(x) = A + B \cdot arctg\frac{x}{2}$ (закон Коши). Определить постоянные A и B, и плотность вероятности $f(x)$. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$. Определить вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

3. Закон распределения случайной величины X определен формулой

$$F(x) = \begin{cases} A, & x < 0 \\ Bx, & 0 \le x \le 1 \\ C, & x > 1 \end{cases}$$

Найти значения параметров **A**, **B** и **C**, плотность вероятности $f(x)$. Вычислить вероятность того, что случайная величина X будет лежать в интервале $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

4. Функция распределения случайной величины X задана выражением

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ A\sin x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Найти коэффициент **А** и плотность функции распределения $f(x)$ этой случайной величины. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

5. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{A}{\cos^2 x}, & 0 < x < \dfrac{\pi}{4} \\ 0, & x \ge \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Определить постоянную **А** и функцию распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти вероятность того, что случайная величина X принимает значение в интервале $\left(\frac{\pi}{16},\frac{\pi}{8}\right)$.

4.2. Моменты и числовые характеристики непрерывных случайных величин

Начальным моментом порядка r случайной величины X называется величина, которая определяется выражением

$$\alpha_r\left[X\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx \tag{4.4}$$

Центральным моментом порядка s случайной величины X называется величина, которая определяется выражением

$$\mu_s\left[X\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_X)^s f(x)dx \tag{4.5}$$

В этих формулах $f(x)$ - плотность вероятности, m_X - математическое ожидание случайной величины X.

Центральные моменты можно выразить через начальные моменты, например,

$$\mu_2=\alpha_2-\alpha_1^2$$
$$\mu_3=\alpha_3-3\alpha_2\alpha_1+2\alpha_1^3 \tag{4.6}$$

Математическим ожидаем $M\left[X\right]$ или m_X случайной величины X называется ее начальный момент первого порядка $M\left[X\right]=\alpha_1\left[X\right]$, то есть

$$M\left[X\right]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \qquad (4.7)$$

Дисперсией случайной величины X называется ее центральный момент второго порядка $D\left[X\right]=\mu_2\left[X\right]$, или

$$D\left[X\right]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m_X)^2 f(x)dx \qquad (4.8)$$

Основные свойства математического ожидания и дисперсии указаны в пункте 3.3.

Символ математического ожидания может использоваться для обозначения начальных и центральных моментов любого порядка, так

$$\alpha_r\left[X\right]=M\left[X^r\right],\ \mu_s\left[X\right]=M\left[\left(X-m_X\right)^s\right] \qquad (4.9)$$

В качестве числовых характеристик случайных величин могут использоваться моменты более высокого порядка. Наиболее употребительными являются:

- коэффициент асимметрии $s_X=\dfrac{\mu_3}{\sigma_X^3}$, характеризующий несимметричность кривой распределения относительно вертикальной прямой, проходящей через точку m_X;

- эксцесс $E_X=\dfrac{\mu_4}{\sigma_X^4}-3$, характеризующий отличие данного распределения от нормального. Для нормального распределения (п. 4.3) эксцесс равен нулю.

Квантилью порядка p случайной величины X называется ее возможное значение x_p, соответствующее значению функции распределения, равному p (рис. 13).

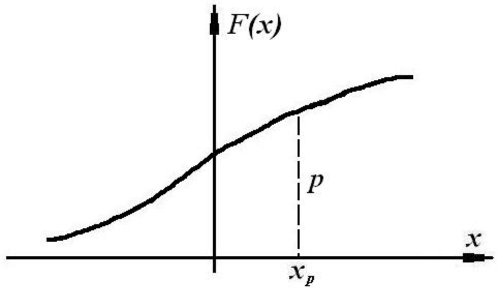


Рис. 13.

Некоторые квантили имеют специальные названия:

a) Медиана – квартиль $x_{0,5}$. Вероятность попадания случайной величины X левее или правее этой точки одинакова и равна 0,5.
b) Квартили – это квантили $x_{0,25}$ и $x_{0,75}$ и др.

Пример 1. Случайная величина X распределена по «закону прямоугольного треугольника» с плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(1-\dfrac{x}{a})}{a}, \text{ при } x\in\left(0,a\right)\\ 0 \quad, \text{ при } x\notin\left(0,a\right)\end{cases}$$

Найти числовые характеристики случайной величины $X: m_X$, $D\left[X\right]$, $\sigma\left[X\right]$, $\mu_3\left[X\right]$.

Решение. По формуле (4.7) находим

$$m_X=\alpha_1=\int_0^a x\cdot 2\left(1-\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{1}{a}dx=\frac{2}{a}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_0^a=\frac{a}{3}.$$

Для нахождения $D\left[X\right]$ определим начальный момент α_2:

$$\alpha_2=\int_0^a x^2\cdot 2\left(1-\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{1}{a}dx=\frac{2}{a}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4a}\right)\Bigg|_0^a=\frac{a^2}{6}$$

Пользуясь формулой (4.6) находим

$$D\left[X\right]=\mu_2=\alpha_2-\alpha_1^2=\frac{a^2}{6}-\frac{a^2}{9}=\frac{a^2}{18},\ \sigma\left[X\right]=\sqrt{D\left[X\right]}=\frac{a}{3\sqrt{2}}.$$

Определим начальный момент α_3

$$\alpha_3=\int_0^a x^3\cdot 2\left(1-\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{1}{a}dx=\frac{2}{a}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5a}\right)\Bigg|_0^a=\frac{a^3}{10}$$

Пользуясь формулой 4.6, находим

$$\mu_3=\alpha_3-3\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1^3=\frac{a^3}{10}-3\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a^2}{6}+2\frac{a^3}{27}=\frac{a^3}{135}.$$

Задачи.

1. Случайная величина X распределена по закону Симпсона («закону равнобедренного треугольника») с плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\left(1-\dfrac{x}{a}\right), \text{ при } 0<x<a\\ \dfrac{1}{a}\left(1+\dfrac{x}{a}\right), \text{ при } -a<x\le 0\\ 0 \quad, \text{ при } x\le -a \text{ или } x\ge a\end{cases}$$

Определить следующие числовые характеристики случайной величины X: m_X, $D\left[X\right]$, $\sigma\left[X\right]$, μ_3.

2. Определить числовые характеристики равномерно распределенной случайной величины X (задача 3, п. 4.1).
3. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \lambda(3x-x^2), & 0\le x\le 3 \\ 0, & x>3 \end{cases}$$

При каком λ функция $f(x)$ может быть принята за плотность вероятности случайной величины X? Определить $M\left[X\right]$, $D\left[X\right]$ и $\sigma\left[X\right]$ этой случайной величины.

4. Дана плотность вероятности случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \alpha(x-\frac{x^2}{3}), & 0\le x\le 3 \\ 0, & x>3 \end{cases}$$

Определить постоянную α. Найти моду $\overline{M}$ и медиану μ этой случайной величины.

5. Плотность распределения случайной величины X определена формулой

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{3x^2}{2}, & 0\le x<1 \\ \frac{3(2-x)^2}{2}, & 1\le x<2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$$

Определить начальные и центральные моменты первых четырех порядков, асимметрию и эксцесс этой случайной величины.

6. Найти эксцесс случайной величины X, распределенной по экспоненциальному закону с плотностью $f(x)=e^{\frac{-|x|}{2}}$. Определить ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

4.3. Нормальный закон распределения

Нормальный закон распределения имеет особое значение. Если случайная величина X зависит от большого числа примерно одинаково влияющих на нее факторов, то в большинстве случаев это приводит к нормальному распределению случайной величины. Кроме того, нормальное распределение является предельным по отношению к некоторым другим распределениям.

Нормальное распределение случайной величины X задается плотностью:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}$$

(4.10)

здесь m_X - математическое ожидание случайной величины, σ_X^2 - ее дисперсия.

Кривая нормального распределения симметрична относительно вертикальной прямой, проходящей через точку m_X. Медиана нормального распределения совпадает с математическим ожиданием. Коэффициент асимметрии s_X и эксцесс E_X равны нулю. Влияние σ_X на вид кривой нормального распределения показано на рис. 14.

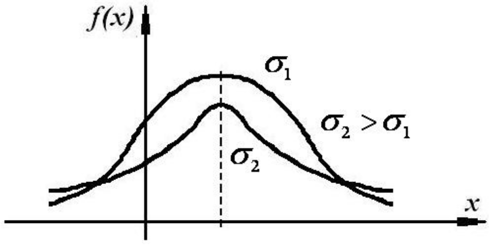


Рис. 14.

Функция распределения случайной величины X, имеющей нормальное распределение с параметрами m_X и σ_X ($X \in N(m_X, \sigma_X)$):

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-m_X}{\sigma_X}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

(4.11)

Имеются таблицы значений (см. Приложение) функции распределения нормированного нормального закона с параметрами $m_X=0$ и $\sigma_X=1$:

$$\Phi^*(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (4.12)$$

а также таблицы значений функции Лапласа:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (4.13)$$

Функция распределения нормированного нормального закона и функция Лапласа связаны соотношением:

$$\Phi^*(x)=\Phi(x)+\frac{1}{2} \qquad (4.14)$$

Функция распределения случайной величины X, подчиненной нормальному закону с параметрами m_X и σ_X, выражается через функцию распределения нормированного нормального закона следующим образом:

$$F(x)=\Phi^*\left(\frac{x-m_X}{\sigma_X}\right) \qquad (4.15)$$

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал (a,b) находится по формуле:

$$P(a<X<b)=\Phi^*\left(\frac{b-m_X}{\sigma_X}\right)-\Phi^*\left(\frac{a-m_X}{\sigma_X}\right)=\Phi\left(\frac{b-m_X}{\sigma_X}\right)-\Phi\left(\frac{a-m_X}{\sigma_X}\right) \qquad (4.16)$$

Правило трех сигм. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал $(m_X-3\sigma_X, m_X+3\sigma_X)$ близка к единице. Точнее:

$$P\left(\left|X-m_X\right|<3\sigma_X\right)\approx 0,997.$$

Пример 1. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $m_X=10$ и дисперсией $\sigma_X^2=100$. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(5,20)$. Какую точность отклонения ε случайной величины X от ее математического ожидания можно гарантировать с вероятностью 0,9?

Решение. Среднее квадратическое отклонение $\sigma_X=10$. Найдем, используя таблицу значений функции Лапласа, $P(5<X<20)=\Phi\left(\frac{20-10}{10}\right)+\Phi\left(\frac{5-10}{10}\right)=\Phi(1)+\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\approx 0,34+0,19=0,53$.

Для определения гарантированной точности ε, при которой $P(|X-10|<\varepsilon)\geq 0,9$. Найдем $P(|X-10|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{10}\right)$. Решая уравнение $2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{10}\right)=0,9$, получим $\frac{\varepsilon}{10}\approx 1,645$ или $\varepsilon\approx 16,45$. Ввиду того, что функция Φ возрастает, в качестве ε можно взять $\varepsilon=16,5$.

Теорема Лапласа. Вероятность попадания в интервал (a,b) случайной величины X - числа наступления события A в n опытах, в каждом из которых это событие может произойти с одной и той же вероятностью p, при большом числе опытов приближенна равна:

$$P(a<X<b)\approx\Phi^*\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi^*\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)=\Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right) \qquad (4.17)$$

Следствие. Если в каждом из n опытов событие A может произойти с одинаковой вероятностью p, то вероятность наступления события A в этих опытах m раз, при большом числе опытов приближенно равна

$$P(X=m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad (4.18)$$

здесь $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $q=1-p$.

Пример 2. Сколько раз достаточно подбросить игральный кубик, чтобы с вероятностью 0,5 можно было ожидать, что выпадение шестерки будет наблюдаться не менее 50 раз.

Решение. Предположим, что кубик подбрасывается n раз, а X - число выпадений шестерки. Вероятность выпадения шестерки равна $p=\frac{1}{6}$. По формуле (4.17) находим:

$$P(50\le X<+\infty)\approx \Phi(+\infty)-\Phi\left(\frac{50-n/6}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}}}\right)=0,5-\Phi\left(\frac{300-n}{\sqrt{5n}}\right).$$

По условию задачи $P(50\le X)=\frac{1}{2}$. Следовательно, $\frac{1}{2}\approx\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{n-300}{\sqrt{5n}}\right)$ или $\Phi\left(\frac{n-300}{\sqrt{5n}}\right)=0$. Откуда $n\approx 300$, т.е. примерно необходимо сделать около 300 бросаний игрального кубика.

Задачи.

1. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Вычислить вероятность попадания этой случайной величины в интервал $(2,4)$. Доказать, что $P(-0,5<X<-0,1)>P(1<X<2)$.
2. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 5 и дисперсией 4. Определить вероятность попадания случайной величины X в интервал a)$(0,6)$, b)$(-2,2)$.
3. При изготовлении детали наблюдается отклонение ее веса X от номинального, равного $m_X=400\,гр$. Считая, что случайная величина X распределена по нормальному закону со средним квадратическим отклонением равным 0,5 гр., определить, какую точность веса изделия можно ожидать с вероятностью 0,9?
4. Длина изготавливаемого изделия удовлетворяет ГОСТу, если отклонение его длины X от номинальной $m_X=5\,см$, не превосходит по абсолютной величине $0,1\,мм$. Случайная величина X распределена по нормальному закону со среднем квадратическим отклонением равным $0,05\,мм$. Определить вероятность изготовления изделия удовлетворяющего ГОСТу.

Ответы

<u>1. п. 1.1.</u>

1) 0,2667; **2)** 0,019; **3)** 0,00987; **4)** 0,1863; **5)** $\Omega = \{0,1,2,...,30\}$;

6) Каждый шахматист может занять любое место в турнире. Если обозначить через S_m $m-ого$ шахматиста, то пространство элементарных событий можно представить как совокупность упорядоченных троек: $\Omega = \{(S_i, S_j, S_k) / i, j, k = 1,2,...,8, i \neq j, i \neq k, j \neq k\}$. Общее число таких троек, т.е. общее число элементарных событий, связанное с распределением первых трех призовых мест, равно $A_8^3 = 336$.

7) a) Элементарными событиями опыта являются упорядоченные пары чисел (i, j), первое из которых i - число очков, выпавших на первой игральной кости, а j- на второй. $\Omega = \{(i, j) / i, j = 1,2,...,6\} = \{(1,1),(1,2),...,(1,6),(2,1),(2,2),...,(2,6),...,(6,1),(6,2),...,(6,6)\}$. Общее число элементарных событий $6^2 = 36$. b) аналогично a), $\Omega = \{(i, j, k) / i, j, k = 1,2,...,6\} = \{(1,1,1),(1,1,2),...,(6,6,5),(6,6,6)\}$. Общее число элементарных событий $6^3 = 216$.

8) Элементарные события опыта можно представить двухэлементными подмножествами множества, составленного из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. $\Omega = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$
$(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$. Общее число элементарных событий равно $C_6^2 = 15$. 9) Элементарными событиями являются все положительные действительные числа, $\Omega = (0, +\infty)$.

<u>1. п. 1.2.</u>

1) a) общее число исходов $2^3 = 8$, благоприятный один, $p = \frac{1}{8}$; b) A={герб выпадает не более двух раз}, $\overline{A}$={все три раза выпадет герб}.
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. **2)** $\frac{1}{10^7}$, a) $\frac{1}{10}$, b) $\frac{1}{10^4}$, c) $\frac{1}{10^4}$. **3)** $p = \frac{2!2!}{11!} = 10^{-7}$. **4)** a) $p = \frac{1}{5!} \approx 0{,}0083$, b) $p = \frac{4 \cdot 2! \cdot 3!}{5!} = 0{,}4$. **5)** $p = \frac{C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1}{C_{52}^3} \approx 0{,}0029$,
$p = \frac{C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1}{C_{50}^3} \approx 0{,}00245$. **6)** $p = \frac{C_5^1 \cdot C_3^2 \cdot C_5^1}{C_{13}^8} \approx 0{,}01166$.

<u>1. п. 1.3.</u>

1) $p = \frac{(2l/3)}{l} = \frac{2}{3}$. **2)** $p = \frac{l/5 + l/5}{l} = \frac{2}{5}$.

3) a) $p = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{1/64}{1} = \frac{1}{64}$, b) $p = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{4 \cdot \frac{1}{64}}{1} = \frac{1}{16}$, c) $p = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{3}{4}$.

4) a) $p=\dfrac{S_A}{S_\Omega}=\dfrac{3\cdot\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot 1^2}{\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{13}{2}\cdot 5}\approx 0{,}145$, b) $p=\dfrac{S_A}{S_\Omega}=\dfrac{\pi\left(\frac{1}{3}\cdot 5-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 5}\approx 0{,}6$.

5) $p=\dfrac{S_A}{S_\Omega}=\dfrac{\pi\cdot 1^2}{64}\approx 0{,}049$. <u>Примечание</u>. Круг радиуса 1 находится внутри квадрата, если его центр располагается не ближе чем на единицу от границы квадрата, покрывает центр квадрата, если отстоит от последнего не далее, чем на единицу.

6) $p=\dfrac{S_A}{S_\Omega}=\dfrac{S_\Omega-S_{\overline{A}}}{S_\Omega}=1-\dfrac{S_{\overline{A}}}{S_\Omega}=1-\dfrac{25^2}{30^2}=\dfrac{11}{36}$.

<u>2. п. 2.1.</u>

1) $\overline{A}$ и $\overline{A}$; **2)** a) B, b) AB, c) $\overline{A}\overline{B}$, d) $ABC+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; **3)** a) $A=\overline{B}$, b) BCA;
4) a) да, если A и B совместны, нет в противном случае, b) нет, c) да, d) нет;
5) a) $A+C=E$, b) $AC=K$, c) $EF=G$, d) $G+E=E$, e) $GE=G$,
f) $BD=H$, g) $E+K=E$; **6)** a) $A=A_1A_2A_3$, b) $B=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$,
c) $C=A_1A_2A_3+A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3+A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3+\overline{A}_1A_2\overline{A_3}$,
d) $D=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2A_3+A_1\overline{A_2}A_3+A_1A_2\overline{A_3}$,
e) $E=A_1A_2A_3+A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$,
f) $F=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$, g) $G=\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$;
7) a) нет, b) нет, c) да, d) нет; **8)** a) $\overline{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}$, b) $A_2A_3A_5$,
c) $(A_4+A_6)(A_2+A_3)$, d) $\overline{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3}+\overline{A_4}+\overline{A_5}+\overline{A_6}$.

<u>2. п. 2.2.</u>

1) a) $\frac{1}{72}$, b) $\frac{1}{72}$, c) $\frac{1}{36}$; **2)** a) 0,018; b) 0,321; **3)** $\frac{1}{36}$; **4)** a) 0,046; b) 0,028;
5) a) $\frac{1}{9}$, b) $\frac{2}{9}$, c) $\frac{3}{9}$; d) $\frac{2}{9}$, e) $\frac{1}{9}$; **6)** 0,236; **7)** 0,504.

<u>2. п. 2.3.</u>

1) $\frac{7}{15}$; **2)** $\frac{1}{5}$; **3)** 0,75; **4)** 0,32; **5)** 0,9955; **6)** $\frac{7}{12}$.

<u>2. п. 2.4.</u>

1) 0,25; **2)** $\frac{9}{49}$; **3)** 0,467; **4)** 0,6; **5)** 0,5; **6)** $\frac{1}{6}$; **7)** 0,417.

<u>2. п. 2.5.</u>

1) 0,241; **2)** $46\cdot(1-p)^8p^2+10\cdot(1-p)^9p+(1-p)^{10}$; **3)** 0,657; **4)** 0,041; **5)** 0,525;

6) 5.

<u>3. п. 3.1.</u>

1) $P(X=x_i)=C_5^{x_i}(0{,}15)^{x_i}(0{,}85)^{5-x_i}$;

x_i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
p_i	0,44371	0,39150	0,13818	0,02439	0,00215	0,0007

2) $P(X=x_i)=C_4^{x_i}(0{,}05)^{x_i}(0{,}95)^{4-x_i}$;

x_i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
p_i	0,814506	0,171475	0,013538	0,000475	0,000006

3)

x_i	**0**	**1**	**2**	**3**
p_i	$0{,}5\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7=$ $=0{,}245$	$0{,}5\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7+$ $+0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7+$ $+0{,}5\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3=$ $=0{,}455$	$0{,}5\cdot 0{,}3\cdot 0{,}3+$ $+0{,}5\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7+$ $+0{,}5\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3=$ $=0{,}255$	$0{,}5\cdot 0{,}3\cdot 0{,}3=$ $=0{,}045$

4)

x_i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
p_i	$\frac{1}{5}=0{,}2$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=0{,}2$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=0{,}2$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=0{,}2$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=0{,}2$

5)

x_i	**0**	**1**	**2**	**3**
p_i	$\frac{C_{16}^3\cdot C_4^0}{C_{20}^3}\approx$ $\approx 0{,}491228$	$\frac{C_{16}^2\cdot C_4^1}{C_{20}^3}\approx$ $\approx 0{,}421052$	$\frac{C_{16}^1\cdot C_4^0}{C_{20}^3}\approx$ $\approx 0{,}084211$	$\frac{C_{16}^0\cdot C_4^3}{C_{20}^3}\approx$ $\approx 0{,}003509$

6)

x_i	**0**	**1**	**2**
p_i	$0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}02$	$0{,}8\cdot 0{,}1+0{,}9\cdot 0{,}2=$ $=0{,}26$	$0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}72$

<u>3. п. 3.2.</u>

1) $P(X=k)=C_3^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$; $k=0,1,2,3,$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 8/27, & 0<x\le 1 \\ 26/27, & 1<x\le 2, \quad P(x\ge 2)=7/27 \\ 26/27, & 2<x\le 3 \\ 1, & 3<x \end{cases}$$

2) Рассмотрим события: A_1={первая установка обнаружила первый объект}, A_2={первая установка обнаружила второй объект}, B_1={вторая установка обнаружила первый объект}, B_2={вторая установка обнаружила второй объект}.

$P(X=0)=P(\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{B_1}\overline{B_2})=0,3\cdot 0,3\cdot 0,2\cdot 0,2=0,0036$,

$P(X=1)=P(A_1\overline{A_2}\overline{B_1}\overline{B_2}+A_1\overline{A_2}B_1\overline{B_2}+\overline{A_1}A_2\overline{B_1}\overline{B_2}+\overline{A_1}A_2\overline{B_1}B_2+\overline{A_1}\overline{A_2}B_1\overline{B_2}+\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{B_1}B_2)=$
$=2\cdot(0,7\cdot 0,3\cdot 0,2\cdot 0,2)+2\cdot(0,3\cdot 0,3\cdot 0,8\cdot 0,2)+2\cdot(0,7\cdot 0,3\cdot 0,8\cdot 0,2)=0,1128$

$P(X=2)=1-P(X=0)-P(X=1)=0,8836$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 0,0036, & 0<x\le 1 \\ 0,1164, & 1<x\le 2 \\ 1, & 2<x \end{cases}, \quad P(X\ge 1)=0,9964$$

3) $P(X=k)=\dfrac{C_{15}^k\cdot C_5^{4-k}}{C_{20}^4}$,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 0,001032, & 0<x\le 1 \\ 0,03199, & 1<x\le 2 \\ 0,248709, & 2<x\le 3 \\ 0,718266, & 3<x\le 4 \\ 1, & 4<x \end{cases}, \quad P(X\ge 3)=0,751291$$

4) $P(X=0)=0,7$, $\quad P(X=1)=0,3\cdot 0,7=0,21$,
$P(X=2)=0,3\cdot 0,3\cdot 0,7=0,063$, $P(X=3)=0,3\cdot 0,3\cdot 0,3=0,027$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 0,7, & 0<x\le 1 \\ 0,91, & 1<x\le 2 \\ 0,973, & 2<x\le 3 \\ 1, & 3<x \end{cases}, \quad P(X>2)=0,19$$

5) $P(X=2)=\dfrac{1}{9}$, $\quad P(X=3)=\dfrac{2}{9}$, $P(X=4)=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$,

$P(X=5)=\dfrac{2}{9}$, $P(X=6)=\dfrac{1}{9}$,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ 1/9, & 2<x\le 3\\ 1/3, & 3<x\le 4\\ 2/3, & 4<x\le 5\\ 8/9, & 5<x\le 6\\ 1, & 6<x\end{cases},\quad P(2\le X\le 5)=\frac{5}{9}$$

6) $P(X=0)=0,1\cdot 0,1\cdot 0,1=0,001$,

$P(X=1)=C_3^1 0,1\cdot 0,9\cdot 0,1=0,027$,

$P(X=2)=C_3^2 0,1\cdot 0,9\cdot 0,9=0,243$,

$P(X=3)=0,9\cdot 0,9\cdot 0,9=0,729$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 0,001, & 0<x\le 1\\ 0,028, & 1<x\le 2\\ 0,271, & 2<x\le 3\\ 1, & 3<x\end{cases},\quad P(1\le X\le 2)=0,27$$

<u>3. п. 3.3.</u>

1) $P(X=k)=C_3^k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}$

$MX\approx 0\cdot 0,5787+1\cdot 0,3472+2\cdot 0,0695+3\cdot 0,0046=0,5$

$MX^2\approx 0,6666$, $DX\approx 0,4166$.

2) $P(X=k)=C_5^k\left(0,8\right)^k\left(0,2\right)^{5-k}$

$MX\approx 0\cdot 0,00032+1\cdot 0,0064+2\cdot 0,0512+3\cdot 0,2048+4\cdot 0,4096+5\cdot 0,32768=4$

$MX^2\approx 16,8$, $DX\approx 0,8$.

3) $MX\approx 2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{1}{18}+4\cdot\frac{1}{12}+5\cdot\frac{1}{9}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{1}{6}+$

$+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{1}{9}+10\cdot\frac{1}{12}+11\cdot\frac{1}{18}+12\cdot\frac{1}{36}=7$

$MX^2\approx 54,833$, $DX\approx 5,833$.

4) $P(X=k)=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

$$MX=\sum_{k=0}^{\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Вычислим сумму ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}k\left(x\right)^{k-1}=\left(|x|<1\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}x^k=\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{\left(1-x\right)^2}$$

Следовательно, $MX=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(1-x\right)^2}\Bigg|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\cdot 4=1$

5) $MX=1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}4=3$, $MX^2=10$, $DX=1$

6) $P(X=3)=0{,}504$, $P(X=2)=0{,}398$, $P(X=1)=0{,}092$, $P(X=0)=0{,}006$, $MX=2{,}4$, $MX^2=6{,}22$, $DX=0{,}46$, $\sigma X=0{,}678$.

3. <u>п. 3.4.</u>

1) $P(X=k)=0{,}5^n C_n^k\left(k=0,1,2,...,n\right)$, $MX=\frac{n}{2}$, $DX=\frac{n}{4}$.

2) По биномиальному. $P(X=k)=C_{10}^k\cdot\left(0{,}9\right)^k\cdot\left(0{,}1\right)^{10-k}\left(k=0,1,...,10\right)$, $MX=9$, $DX=0{,}9$.

3) Да, $MX=6$, $DX=2{,}4$, $\sigma X=1{,}55$.

4) $P(X=5)=\frac{4^5}{5!}e^{-4}\approx 0{,}1563$.

5) $P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-\frac{(0{,}25)^0}{0!}e^{-0{,}25}\approx 0{,}2212$

6) $P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-\frac{(0{,}1)^0}{0!}e^{-0{,}1}\approx 0{,}0952$

4. <u>п. 4.1.</u>

1) $A=\frac{1}{\pi}$, $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctgx$, $P(0<X<1)=\frac{1}{4}$.

2) $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{\pi}$, $f(x)=\frac{2}{\pi(4+x^2)}$, $P\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}<X<\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3}$.

3) $A=0$, $B=1$, $C=1$, $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 0\le x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$, $P\left(0<X<\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

4) $A=1$, $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \cos x, & 0<x\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$, $P\left(\frac{\pi}{4}<X<\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$.

5) $A=1$, $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ tgx, & 0<x<\frac{\pi}{4}\\ 1, & x\ge\frac{\pi}{2}\end{cases}$, $P\left(\frac{\pi}{16}<X<\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

<u>4. п. 4.2.</u>

1) $m_X = 0$, $D[X] = \dfrac{a^2}{6}$,.$\sigma[X] = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$, $\mu_3 = 0$.

2) $m_X = \dfrac{1}{2}$, $D[X] = \dfrac{1}{12}$,.$\sigma[X] = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, $\alpha_3 = \dfrac{1}{4}$, $\alpha_4 = \dfrac{1}{5}$, $\mu_1 = \mu_3 = 0$, $\mu_2 = \dfrac{1}{12}$, $\mu_4 = \dfrac{1}{80}$,

$S_X = 0$, $E_X = -\dfrac{6}{5}$.

3) $\lambda = \dfrac{2}{9}$, $m_X = \dfrac{3}{2}$, $D[X] = \dfrac{9}{20}$,.$\sigma[X] = \dfrac{3}{2\sqrt{5}}$.

4) $\alpha = \dfrac{2}{3}$, $\bar{M} = \dfrac{3}{2}$, $\mu = \dfrac{3}{2}$.

5) $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \dfrac{11}{10}$, $\alpha_3 = \dfrac{13}{10}$,.$\alpha_4 = \dfrac{57}{35}$, $\mu_1 = \mu_3 = 0$, $\mu_2 = \dfrac{1}{10}$, $\mu_4 = \dfrac{1}{35}$, $S_X = 0$, $E_X = -\dfrac{1}{7}$.

6) $E_X = -\dfrac{3}{2}$, $m_X = 0$, $D[X] = 32$, $\sigma[X] = 4\sqrt{2}$.

4. п. 4.3.

1) $P(2 < X < 4) = 0{,}023$. **2)** $P(0 < X < 6) = 0{,}698$, $P(-2 < X < 2) = 0{,}067$. **3)** $\varepsilon = 332$.
4) $P = 0{,}95$.

Литература

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969.

2. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. / Под ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1970.

Приложение.

Приближенные значения функции стандартного нормального распределения

$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, умноженные на 10^5. $\quad \Phi^*(-x) = 1 - \Phi^*(x)$.

X	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	50000	50399	50798	51197	51595	51994	52392	52790	53188	53586
0,1	53983	54380	54776	55172	55567	55962	56356	56749	57142	57535
0,2	57926	58317	58706	59095	59483	59871	60257	60642	61026	61409
0,3	61791	62172	62552	62930	63307	63683	64058	64431	64803	65173
0,4	65542	65910	66279	66640	67003	67364	67724	68082	68439	68793
0,5	69146	69497	69847	70194	70540	70884	71226	71566	71904	72240
0,6	72575	72907	73237	73565	73891	74215	74537	74857	75175	75490
0,7	75804	76115	76424	76730	77035	77337	77637	77935	78230	78524
0,8	78814	79103	79389	79673	79955	80234	80511	80785	81057	81327
0,9	81594	81859	82121	82381	82639	82894	83147	83398	83646	83891
1	84134	84375	84614	84849	85083	85314	85543	85769	85993	86214
1,1	86433	86650	86864	87076	87286	87493	87698	87900	88100	88298
1,2	88493	88686	88877	89065	89251	89435	89617	89796	89973	90147
1,3	90320	90490	90658	90824	90988	91149	91308	91466	91621	91774
1,4	91924	92073	92220	92364	92507	92647	92785	92922	93056	93189
1,5	93319	93448	93574	93699	93822	93943	94062	94179	94295	94408
1,6	94520	94630	94738	94845	94950	95053	95154	95254	95352	95449
1,7	95543	95637	95728	95818	95907	95994	96080	96164	96246	96327
1,8	96407	96485	96562	96638	96712	96784	96856	96926	96995	97062
1,9	97128	97193	97257	97320	97381	97441	97500	97558	97615	97670
2	97725	97778	97831	97882	97932	97982	98030	98077	98124	98169
2,1	98214	98257	98300	98341	98382	98422	98461	98500	98537	98574
2,2	98610	98645	98679	98713	98745	98778	98809	98840	98870	98899
2,3	98928	98956	98983	99010	99036	99061	99086	99111	99134	99158
2,4	99180	99202	99224	99245	99266	99286	99305	99324	99343	99361
2,5	99379	99396	99413	99430	99446	99461	99477	99492	99506	99520
2,6	99534	99547	99560	99573	99585	99598	99609	99621	99632	99643
2,7	99653	99664	99674	99683	99693	99702	99711	99720	99728	99736
2,8	99744	99752	99760	99767	99774	99781	99788	99795	99801	99807
2,9	99813	99819	99825	99831	99836	99841	99846	99851	99856	99861
3	99865	99869	99874	99878	99882	99886	99889	99893	99896	99900
3,1	99903	99906	99910	99913	99916	99918	99921	99924	99926	99929
3,2	99931	99934	99936	99938	99940	99942	99944	99946	99948	99950
3,3	99952	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99962	99964	99965
3,4	99966	99968	99969	99970	99971	99972	99973	99974	99975	99976
3,5	99977	99978	99978	99979	99980	99981	99981	99982	99983	99983
3,6	99984	99985	99985	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989
3,7	99989	99990	99990	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992
3,8	99993	99993	99993	99994	99994	99994	99994	99995	99995	99995
3,9	99995	99995	99996	99996	99996	99996	99996	99996	99997	99997

Содержание

1. Непосредственное вычисление вероятностей 3
1.1. Основные понятия. 3
1.2. Схема случаев 5
1.3. Геометрические вероятности 9
2. Вероятности сложных событий 11
2.1. Действия с событиями 11
2.2. Вероятность суммы и произведения событий 15
2.3. Формула полной вероятности 18
2.4. Формула Байеса 19
2.5. Формула Бернулли 21
3. Дискретные случайные величины 22
3.1. Аналитический и табличный способы задания закона распределения 22
3.2. Функция распределения 25
3.3. Математическое ожидании и дисперсия дискретной случайной величины 27
3.4. Биномиальное распределение и распределение Пуассона 29
4. Непрерывные случайные величины 32
4.1. Плотность вероятности и функция распределения непрерывных случайных величин 32
4.2. Моменты и числовые характеристики непрерывных случайных величин 35
4.3. Нормальный закон распределения 38
Ответы 42
Литература 48
Приложение. 49

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики – крупнейшая в Санкт-Петербургском государственном университете информационных технологий, механики и оптики. С момента основания на ней работали такие выдающиеся ученые, как И.П.Натансон, В.А.Тартаковский, В.Н.Попов, И.А.Молотков, А.Г.Аленицын, В.В.Жук и другие. Научные интересы сотрудников покрывают практически все разделы математики. На кафедре сложилась мощная научная школа по математическому моделированию сложных физических систем. В последнее время активно развивается направление, связанное с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовым компьютером и квантовыми коммуникациями. Сотрудники кафедры активно участвуют в международных научных конференциях, работают в рамках Российских и международных научных проектов. Сложилось тесное научное сотрудничество с Санкт-Петербургским государственным университетом, Петербургским отделением Математического института имени В.А.Стеклова РАН, лабораторией физикохимии наносистем Института химии силикатов РАН и другими научными центрами как в России, так и за рубежом: университетами Марселя и Тулона (Франция), Ювяскиля (Финляндия), Гумбольдтовским университетом Берлина (Германия).

Блинова И.В., Попов И.Ю.

Теория вероятностей. Методические указания по решению задач

В авторской редакции
Компьютерный набор и верстка Попов И.Ю.
Дизайн обложки Попов И.Ю.
Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики
Зав.РИО Гусарова Н.Ф.
Лицензия ИД N 00408 от 05.11.99
Подписано к печати 18.09.09.
Заказ 2142
Отпечатано на ризографе
Тираж 100 экз.